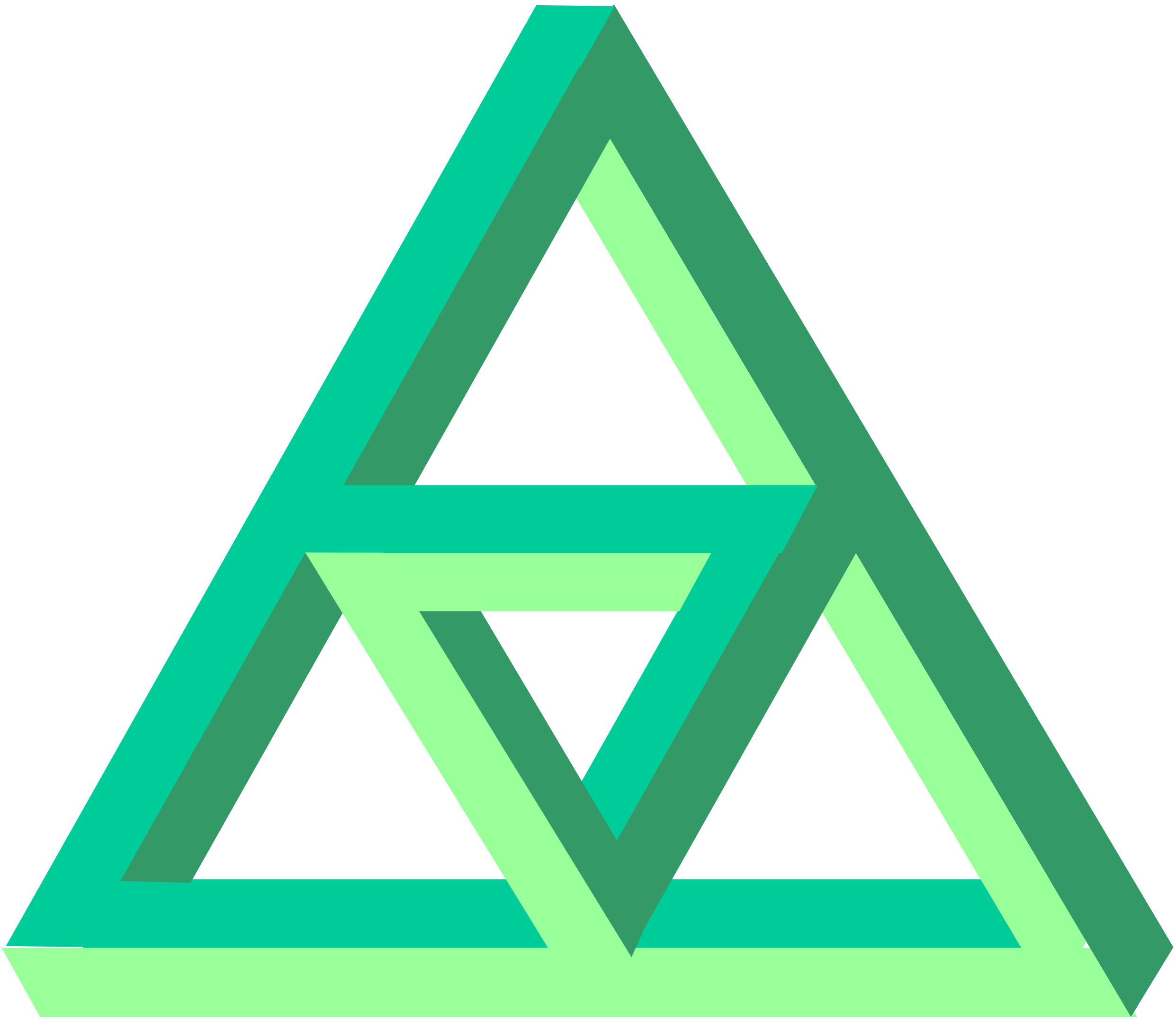
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 01+02/2026 (Januar/Februar 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den aktuellen Aufgaben **MO650923** und **MO651012** finden wir den Bezug zu bereits diskutierten Themen. Wir ergänzen deshalb das **Thema 24** „Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit“ und setzen das **Thema 9** „Differenzen und Summen von Quadratzahlen“ fort.

Weiterhin betrachten wir auch unter dem **Thema 35** „DIOPHANTische Gleichungen“ Aufgaben mit Quadratzahlen. Passend dazu zitieren wir im historischen Rückblick eine Arbeit von EULER aus dem Jahr 1758 zu den Zahlen, die sich als Summen zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

Da die „Mathematischen Kostproben“ die themenbezogene Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe fördern möchte, nehmen wir den 25. Jahrgang zum Anlass, auf zurückliegende Themen hinzuweisen und die zugehörigen Aufgabensammlungen zu wiederholen. Wir beginnen in diesem Heft mit dem **Thema 1** „Funktionalgleichungen“ aus den Jahren 2020 und 2021. Die Lösungen sind in den angegebenen Heften enthalten bzw. werden auf formlose Anfrage per pdf-Dokument zugesandt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 24.6 – Kombinatorik[3] u. klassische Wahrscheinlichkeit (Nachtrag)

Auch in der 2. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurden Aufgaben zum Thema gestellt.

Aufgabe 24.29 – MO650923. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den dreißig natürlichen Zahlen von 1 bis 30

a) genau zwei verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Produkt durch 4 teilbar ist.
b) genau drei paarweise verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Produkt durch 4 teilbar ist.

Hinweis: Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der drei Faktoren unterscheiden, sollen hierbei nicht als verschieden angesehen werden.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Wir erhalten ein durch 4 teilbares Produkt, wenn entweder beide Zahlen gerade sind oder eine ungerade sowie eine durch 4 teilbare Zahl gewählt wird.

Im ersten Fall wählen wir zwei Zahlen aus den 15 geraden Zahlen mit einem Griff. Dafür gibt es $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

Im zweiten Fall wählen wir genau eine aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 7 durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28}. Dafür gibt es $15 \cdot 7 = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

Insgesamt bekommen wir $105 + 105 = 210$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Insgesamt gibt es $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei verschiedenen Zahlen aus der gegebenen Menge. Wir erhalten ein nicht durch 4 teilbares Produkt, wenn entweder beide Zahlen ungerade sind oder eine ungerade sowie eine durch 2, aber nicht durch 4 teilbare Zahl gewählt wird.

Fall 1: Wählen wir zwei Zahlen aus den 15 ungeraden Zahlen mit einem Griff, so gibt es dafür $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

[3] s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025, Teil 3: Heft 02/2025, Teil 4: Heft 11/2025, Teil 5: Heft 12/2025

Fall 2: Wir wählen genau eine aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 8 durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30}. Dafür gibt es $15 \cdot 8 = 120$ Möglichkeiten der Auswahl.

Insgesamt bekommen wir $435 - 105 - 120 = 210$ Möglichkeiten.

Anmerkung: Aus der Lösungsvariante können wir unmittelbar ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Zahlenpaar zu den Bedingungen aus Teilaufgabe a) zufällig auszuwählen, $\frac{210}{435} \approx 48.3\%$ beträgt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es gibt $\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$ Möglichkeiten der Auswahl von 3 verschiedenen Zahlen mit einem Griff aus den 30 gegebenen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge). Von diesen subtrahieren wir die Anzahl der Möglichkeiten, in denen wir kein durch 4 teilbares Produkt bekommen. Diese ergibt sich aus der folgenden Fallunterscheidung:

Fall 1: Alle drei Zahlen sind ungerade. Da es insgesamt 15 ungerade Zahlen im betrachteten Bereich gibt, haben wir $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ Möglichkeiten der Auswahl von drei ungeraden Zahlen.

Fall 2: Wir wählen genau zwei aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 8 durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30}. Dafür gibt es $\binom{15}{2} \cdot 8 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 840$ Möglichkeit.

Fall 3: Sind zwei gerade Zahlen unter den drei ausgewählten, ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

Die Gesamtzahl der gesuchten Auswahlmöglichkeiten berechnet sich damit zu 4060 − 455 − 840 = 2765 Möglichkeiten. ❑

Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, ein Zahlentripel zu den Bedingungen aus Teilaufgabe b) zufällig auszuwählen, beträgt $\frac{2765}{4060} \approx 68.1\%$.

Aufgabe – MO651024. Wir betrachten die vier Paare von Primzahlen (3, 5), (7, 11), (13, 17) und (19, 23). Aus den neun Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 werden sieben Zahlen zufällig ausgewählt (Ziehen mit einem Griff bzw. Ziehen ohne Zurücklegen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 7 ausgewählten Zahlen mindestens 2 der oben genannten Paare befinden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der 7 ausgewählten Zahlen ungerade ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 7 ausgewählten Zahlen genau 2 der oben genannten Paare befinden?

Hinweis: Alle möglichen Auswahlen von 7 Zahlen sollen jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Von den neun gegebenen Zahlen werden nur zwei nicht ausgewählt. Dadurch kann es höchstens 2 Paare geben, die nicht vollständig in der Auswahl dabei sind. Also sind immer mindestens 2 Paare unter den 7 ausgewählten Zahlen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit gleich 1.00 = 100%.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Die Summe von 7 Zahlen ist genau dann ungerade, wenn die 2 (als einzige gerade Zahl) zu den ausgewählten Zahlen gehören. Es gibt 8 Möglichkeiten, aus den 8 ungeraden Primzahlen 7 Zahlen auszuwählen, denn statt 7 Zahlen zu wählen, können wir auch eine Zahl nicht wählen.

Die Anzahl aller Auswahlmöglichkeiten von 7 aus 9 ist genauso groß wie die Anzahl der Möglichkeiten, 2 aus 9 auszuwählen, d.h. es kann die Gültigkeit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ als bekannt vorausgesetzt werden. Diese Anzahl beträgt somit $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 22.2\%$.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Für die geforderte Auswahl müssen zwei ungerade Zahlen nicht ausgewählt werden, die nicht zu einem gemeinsamen Paar gehören, denn nur in dem Fall gibt es genau 2 Paare unter den 7 ausgewählten Zahlen. Wir wählen zunächst zwei Paare aus den 4 gegebenen Zahlenpaaren aus. Dafür gibt es $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Möglichkeiten. Für die Auswahl von je einer Zahl aus jedem Paar gibt es nochmals $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, insgesamt also $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

Jeder Auswahl von diesen zwei nicht ausgewählten Zahlen entspricht genau eine Auswahl von 7 ausgewählten Zahlen aus den 9 gegebenen Zahlen. Wie im Aufgabenteil a) gibt es insgesamt 36 Auswahlmöglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 66.7\%$. ❑

Thema 9.5 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen[4]

Aufgabe 09.28 – MO651012. In dieser Aufgabe sind a und b positive ganze Zahlen.

a) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 65$ an.
b) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 340$ an.
c) Hat die Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ Lösungen, bei denen a und b ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Hinweis: Die Gleichung $a^2 + b^2 = 13$ hat im Bereich der positiven ganzen Zahlen die Lösungen $(2,3)$ und $(3,2)$, denn es gilt $2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): (1, 8), (8, 1), (4, 7) und (7, 4) sind Lösungen, denn $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$. (Die Summanden können wir vertauschen.) Die Lösungen finden wir effektiv durch systematisches Probieren, indem wir untersuchen, ob sich für $65 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 8$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): (4, 18), (18, 4), (12, 14) und (14, 12) sind Lösungen, denn $4^2 + 18^2 = 12^2 + 14^2 = 340$. Die Lösungen finden wir auch hier durch systematisches Probieren, indem wir untersuchen, ob sich für $340 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 18$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungsvariante: Während in Teilaufgabe a) das systematische Probieren praktikabel (im Kopf) lösbar ist, erscheint diese Methode in Teilaufgabe b) unbefriedigend. Insbesondere ist der Lösungsansatz durch Probieren nicht verallgemeinerungsfähig. Wir erinnern deshalb an die Aussage aus

Aufgabe 9.17 – MO100922[5]. Jemand behauptet: Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
Beweisen Sie diesen Satz!

Die Zerlegung der rechten Seite der zu untersuchenden Gleichungen in Faktoren führt dazu, dass das systematische Probieren drastisch reduziert werden kann.

Zerlegen wir $65 = 5 \cdot 13$, finden wir wegen $5 = 1^2 + 2^2$ und $13 = 3^2 + 2^2$ die Darstellungen

$$65 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$$

und

[4] Siehe auch Heft 09/2021, Heft 11/2022, Heft 04/2024 und Heft 05/2025
[5] Lösungshinweise s. Heft 04/2024

$$65 = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 = 1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$$

Zerlegen wir $340 = 17 \cdot 20$, finden wir wegen $17 = 1^2 + 4^2$ und $20 = 4^2 + 2^2$ die Darstellungen

$$340 = (1 \cdot 4 + 4 \cdot 2)^2 + (4 \cdot 4 - 1 \cdot 2)^2 = 12^2 + 14^2 = 144 + 196 = 340$$

und

$$340 = (1 \cdot 4 - 4 \cdot 2)^2 + (4 \cdot 4 + 1 \cdot 2)^2 = 4^2 + 18^2 = 16 + 324 = 340$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Da 8024 durch 4 teilbar ist, müssen für eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ in ganzen Zahlen beide Zahlen gerade sein. Es gibt also ganze Zahlen m und n mit

$$a = 2m,\ b = 2n \text{ und } m^2 + n^2 = 8024 : 4 = 2006.$$

Wir können als bekannt voraussetzen: Sind a und b beide ungerade, so lässt $a^2 + b^2$ bei Division durch 4 den Rest 2. Da nun 2006 bei Division durch 4 den Rest 2 lässt, müssen für eine Lösung der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$ in ganzen Zahlen beide Zahlen ungerade sein und sich als $m = 2u + 1$ und $n = 2v + 1$ mit den ganzen Zahlen u und v darstellen lassen. Dann folgt $(2u + 1)^2 + (2v + 1)^2 = 2006$. Daraus ergibt sich durch Umformungen

$$4u^2 + 4u + 1 + 4v^2 + 4v + 1 = 2006$$
$$4u^2 + 4u + 4v^2 + 4v = 2004$$
$$u^2 + u + v^2 + v = u(u + 1) + v(v + 1) = 501.$$

Nun sind sowohl $u(u + 1)$ als auch $v(v + 1)$ gerade Zahlen, weil eine von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gerade ist. Dann ist aber auch die Summe $u(u + 1) + v(v + 1)$ gerade und kann nicht gleich 501 sein. Es gibt also keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$, damit auch keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ und folglich erst recht nicht in positiven ganzen Zahlen. ❑

Lösungsvariante zur Teilaufgabe c): Da 8024 durch 4 teilbar ist, müssen für eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ in ganzen Zahlen beide Zahlen gerade sein. Es gibt also ganze Zahlen m und n mit

$$a = 2m,\ b = 2n \text{ und } m^2 + n^2 = 8024 : 4 = 2006.$$

Wir können als bekannt voraussetzen: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.

Somit kann die Summe zweier Quadratzahlen nur einen der Reste $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 0 + 4 = 4, 1 + 1 = 2, 1 + 4 = 5$ oder $4 + 4 = 8$ lassen. Da nun aber 2006 bei Division durch 8 den Rest 6 lässt, gibt es also keine ganzzahligen Lösungen der

Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$, damit auch keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ und folglich erst recht nicht in positiven ganzen Zahlen.

Die oben als bekannt vorausgesetzten Aussagen[6] waren bereits in der MO Inhalt von Aufgaben, so in

Aufgabe 09.16 – MO220934[7]. Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

bzw.

Aufgabe 9.24 – MO400941/MO401021[8].

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.
b) Gibt es eine n-stellige Quadratzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Auch in folgender Aufgabe waren Summen zweier Quadrate zu untersuchen.

Aufgabe MO261034. Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare $(x;\ y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in der Gleichung dieser Wert z ergibt!

Lösungshinweise: Die Umformung der gegebenen Gleichung ergibt

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 = (x+1)^2 + y^2 - 23$$

Damit z eine natürliche Zahl wird, muss $(x+1)^2 + y^2 - 23 \geq 0$ sein. Die kleinste natürliche Zahl ist 0, d.h. es müsste $(x+1)^2 + y^2 = 23$ sein. Eine Darstellung der Zahl 23 als Summe zweier Quadratzahlen existiert aber nicht, ebenso nicht für die Zahl 24 (wie wir durch systematisches Probieren nachweisen können). Erst die Zahl 25 kann

---

[6] Da es sicher bei solchen Aufgaben in der Klausur nicht gelingt, die entsprechenden Aufgabennummern anzugeben, sollten die Aussagen bewiesen werden (da sie sicherlich keinen eigenen, zitierfähigen Namen haben).

[7] Lösungshinweise s. Heft 04/2024

[8] Lösungshinweise s. Heft 05/2025

als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen dargestellt werden, d.h. $z = 2$ ist der kleinste Wert, der eine natürliche Zahl mit Erfüllung der Aufgabenaussage sein kann.

Zur Bestimmung der entsprechenden Paare (x, y) zerlegen wir 25.

$$(x + 1)^2 + y^2 = 25 = 0 + 25 = 25 + 0 = 9 + 16 = 16 + 9$$

Damit sind folgende Möglichkeiten und die daraus resultierenden Paare möglich:

$(x+1)^2$	$x+1$	x	y^2	y	Paare (x, y)
25	±5	4 ; -6	0	0	(4, 0) ; (-6, 0)
0	0	-1	25	±5	(-1, 5) ; (-1, -5)
9	±3	2 ; -4	16	±4	(2, 4) ; (-4, 4) ; (2, -4) ; (-4, -4)
16	±4	3 ; -5	9	±3	(3, 3) ; (3, -3) ; (-5, 3) ; (-5, -3)

Es existieren 12 Paare (x, y) für die z den kleinstmöglichen Wert 2 annehmen kann, die wir durch eine Probe bestätigen können:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= 4^2 + 0^2 + 2 \cdot 4 - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= (-6)^2 + 0^2 + 2 \cdot (-6) - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= (-1)^2 + (\pm 5)^2 + 2 \cdot (-1) - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= 2^2 + (\pm 4)^2 + 2 \cdot 2 - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= (-4)^2 + (\pm 4)^2 + 2 \cdot (-4) - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= 3^2 + (\pm 3)^2 + 2 \cdot 3 - 22 = 2 \\
x^2 + y^2 + 2x - 22 &= (-5)^2 + (\pm 3)^2 + 2 \cdot (-5) - 22 = 2
\end{aligned}$$

❑

Thema 35.2 – DIOPHANTische Gleichungen[9]

Während im Teil 1 dieses Themas lineare Gleichungen ersten Grades untersucht wurden, beschäftigen wir uns nun mit Gleichungen zweiten Grades.

Für die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung $(1; 0)$ nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit DIOPHANTischen Gleichungen beschäftigte (aber nicht mit dem genannten Typ).

Zunächst betrachten wir Eigenschaften der Zahl A. Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die nur für $|A| > 1$ die trivialen Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind für A nur Nichtquadratzahlen interessant.

[9] s. Teil 1: Heft 12/2025

Wir können für eine vorgegebene Zahl A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x\,;\ y)$ finden. So ist offensichtlich $(3; 2)$ eine Lösung von $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$, aber auch $(17\ ;\ 12)$ ist eine Lösung. Können wir alle Lösungen angeben?

Ist $(x_0;\ y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich finden wir wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n\,,$$

wenn wir nur alle Summanden der Binomischen Formel ohne den Faktor $\sqrt{A}$ zu x_n und die Summenden mit dem Faktor $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfassen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n \right), \\ y_n &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{A}} \cdot \left(\left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n \right). \end{aligned}$$

Wir können aber aus der Bildungsvorschrift eine praktikable Rekursionsvorschrift herleiten:

$$\begin{aligned} & x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} = \left(x_n + \sqrt{A} \cdot y_n\right)\left(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0\right) \\ & = (x_n x_0 + A \cdot y_n y_0) + \sqrt{A} \cdot (x_n y_0 + y_n x_0) \end{aligned}$$

Am Beispiel der Lösung $(3\ ;\ 2)$ für $A = 2$ führt dies zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3 \cdot x_n + 4 \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= 2 \cdot x_n + 3 \cdot y_n. \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und wir erhalten

$$3 \cdot x_{n+1} - 4 \cdot y_{n+1} = x_n.$$

Setzen wir nun für $4 \cdot y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3 \cdot x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_{n+2} = 6 \cdot x_{n+1} - x_n.$$

Nun wird x_n eliminiert. Dies führt zu

$$3 \cdot y_{n+1} - 2 \cdot x_{n+1} = y_n.$$

Setzen wir nun für $2 \cdot x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3 \cdot y_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$y_{n+2} = 6 \cdot y_{n+1} - y_n.$$

Wir verallgemeinern diese Vorgehensweise und finden die Rekursionsvorschrift wie folgt:

$$x_{n+1} = x_0 \cdot x_n + 2 \cdot y_0 \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = y_0 \cdot x_n + x_0 \cdot y_n.$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und wir erhalten

$$x_0 \cdot x_{n+1} - 2 \cdot y_0 \cdot y_{n+1} = (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot x_n.$$

Setzen wir nun für $2 \cdot y_0 \cdot y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - x_0 \cdot x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_{n+2} = 2 \cdot x_0 \cdot x_{n+1} - (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot x_n.$$

Nun wird x_n eliminiert. Dies führt zu

$$y_0 \cdot x_{n+1} - x_0 \cdot y_{n+1} = -(x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot y_n.$$

Setzen wir nun für $y_0 \cdot x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - x_0 \cdot y_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$y_{n+2} = 2 \cdot x_0 \cdot y_{n+1} - (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot y_n.$$

Setzen wir das oben gefundene zweite Lösungspaar ein, führt dies zu

$$x_{n+2} = 34 \cdot x_{n+1} - 91 \cdot x_n,$$
$$y_{n+2} = 34 \cdot y_{n+1} - 91 \cdot y_n.$$

Offensichtlich sind beide Rekursionsformel nicht gleichwertig. Wie können wir sichern, alle Lösungen zu finden? Um dies zu untersuchen, definieren wir:

Eine Lösung $(x_0; y_0)$ der PELLschen Gleichung wird minimale Lösung genannt, wenn sie für alle Lösungen $(x; y)$ die Ungleichung

$$x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A} \leq x + y \cdot \sqrt{A}$$

erfüllt ist.

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen $(x_{01}; y_{01})$ und $(x_{02}; y_{02})$, so wäre

$$x_{01} + y_{01} \cdot \sqrt{A} = x_{02} + y_{02} \cdot \sqrt{A},$$
$$x_{01} - x_{02} = \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01}).$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite. Folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun $(x'; y')$ eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der PELLschen Gleichung wäre, gilt also für alle natürlichen Zahlen n

$$x' + y' \cdot \sqrt{A} \neq \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n.$$

Aus der Minimalität von $(x_0; y_0)$ folgt

$$1 < x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A} < x' + y' \cdot \sqrt{A},$$

also gibt es einen Exponenten k mit

$$\left(x_0 + y_0 . \sqrt{A}\right)^k < x' + y' \cdot \sqrt{A} < \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^{k+1}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungskette mit $\left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^k$, finden wir eine weitere Lösung $(x''; y'')$, wenn wir in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultiplizieren und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfassen.

$$1 < x'' + y'' \cdot \sqrt{A} = (x' + y' \cdot \sqrt{A})\left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^k < 1 \cdot \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right).$$

Leicht überzeugen wir uns, dass $(x''; y'')$ tatsächlich die PELLsche Gleichung erfüllt:

- Sind x'' und y'' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von $(x_0; y_0)$ gegeben.

- Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-A \cdot y'^2 < 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein (wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette).

- Verbleiben noch folgende Fälle, die analysiert werden müssen:

$$x'' < 0 < y'' \quad \Rightarrow \quad x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < -x'' + y'' \cdot \sqrt{A}$$
$$y'' < 0 < x'' \quad \Rightarrow \quad x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < x'' - y'' \cdot \sqrt{A}$$

also

$$1 < x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < \left|x'' - y'' \cdot \sqrt{A}\right|$$
$$\Rightarrow \quad 1 < \left|\left(x'' + y'' \cdot \sqrt{A}\right) \cdot \left(x'' - y'' \cdot \sqrt{A}\right)\right| = 1$$

Dieser Widerspruch (1 < 1) zeigt, dass das Paar $(x''; y'')$ aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der PELLschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre.

Also hat man mit dem obigen Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese können mittels Kettenbrüche konstruktiv angegeben werden.

Verallgemeinern wir die PELLsche Gleichung zu $x^2 - A \cdot y^2 = C$ mit ganzahligem C, so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise (10 ; 7) eine Lösung der Gleichung $x^2 - 2 \cdot y^2 = 2$, gibt es für $x^2 - 2 \cdot y^2 = 3$ keine Lösungen. Die Unlösbarkeit folgt aus den Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.
- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein. Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil die Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

Wenn es aber eine Lösung gibt, so finden wir sogar unendlich viele Lösungen, indem wir die spezielle Lösung $(x_c; y_c)$ der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der PELLschen Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$ kombinieren:

$$\left(x_C + y_C \cdot \sqrt{A}\right) \cdot \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n.$$

Für jede natürliche Zahl n finden wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten PELLschen Gleichung.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Über Zahlen, die Aggregate zweier Quadrate sind[10]

LEONHARD EULER

§1 Die Natur der Zahlen pflegen die Arithmetiker auf mehrere Arten zu erforschen, während sie deren Ursprung entweder durch Addition oder durch Multiplikation

[10] _Originaltitel: „De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum", erstmals publiziert in „Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4, 1758, pp. 3-40", Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 2, pp. 295 - 327" und Commentat. arithm. 1, 1849, pp. 155-173 [E228b]", Eneström Nummer E228, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Jens Becker, im Rahmen des Hauptseminars „Euler" 2013/14

darstellen. Von der ersten Art ist ohne Zweifel die einfachste Zusammensetzung die aus Einheiten, nach welcher alle ganzen Zahlen durch die Aggregation von Einheiten zu entspringen aufgefasst werden. Dann können Zahlen auch so betrachtet werden, wie sie aus der zweier oder mehrerer ganzer Zahlen entstehen, worauf sich das Problem über die Partition von Zahlen bezieht, dessen Lösung ich vor nunmehr einigen Jahren dargelegt habe, in welchem gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen jede beliebige vorgelegte Zahl durch Addition zweier oder mehrerer kleinerer Zahlen resultieren kann. Hier aber habe ich beschlossen, die Zusammensetzung von Zahlen zu betrachten, mit welcher sie durch Addition zweier Quadrate hervorgehen; und weil auf diese Weise nicht alle Zahlen entspringen, weil die Menge dieser riesig ist, die durch Addition zweier Quadrate nicht hervorgebracht werden können, möchte ich die Natur und Eigenschaften derer, die Summen zweier Quadrate sind, hier untersuchen. Auch wenn viele dieser Eigenschaften schon erkannt und quasi durch Induktion gefunden worden sind, sind sie dennoch zum größten Teil nicht mit strengen Beweisen untermauert; weil ein nicht zu verachtender Teil der Diophant'schen Analysis auf deren Gültigkeit gestützt ist, werde ich in dieser Abhandlung den Beweis vieler dieser Eigenschaften, die bis jetzt ohne Beweise zugelassen worden sind, geben, zugleich werde ich aber auch mitteilen, was es mir freilich immer noch nicht zu beweisen möglich gewesen ist, auch wenn wir über deren Gültigkeit in keinster Weise zweifeln können.

§2 Zuerst wird es also, weil die Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196 etc. förderlich sein, diese Zahlen, die aus der Kombination zweier Quadrate entspringen, angeschaut zu haben, welche ich deshalb bis hinzu 200 hier aufführe: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 144, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 162, 164, 169, 170, 173, 178, 180, 181, 185, 193, 194, 196, 197, 200

Dies sind natürlich alle Zahlen bis hin zu 200, die aus der Addition zweier Quadrate hervorgehen, und diese Zahlen mit allen ins Unendliche folgenden werde ich als die Summen zweier Quadrate bezeichnen, welche deshalb in dieser allgemeinen Formal $xx + yy$ erfasst zu werden offenbar ist, während für x und y nacheinander alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. eingesetzt werden. Welche Zahlen also in diesen nicht aufgefunden werden, die sind nicht Summen zweier Quadrate; diese sind also bis hin zu 200: 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 147, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 158, 159, 161, 163, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 179, 182, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 198, 199.

Daher tritt klar zutage, dass zumindest bis 200 die Menge der Zahlen, die nicht Summen zweier Quadrate sind, größer ist als die derer, die Summen zweier Quadrate sind. Im Übrigen wird dem Betrachtenden sofort klar werden, dass keine der beiden Reihen dieser Zahlen in einem bestimmten und angebbaren Gesetz enthalten sind und es deswegen selbst schwierig sein wird, die natürliche Beschaffenheit jeder der beiden zu untersuchen.

§3 Weil jede Quadratzahl entweder gerade und in diesem Fall durch 4 teilbar und in dieser Form $4a$ enthalten ist, oder ungerade und in diesem Fall in dieser Form $8b+1$ enthalten ist, wird jede aus zwei Quadraten zusammengesetzte Zahl sein: Entweder erstens die Summe zweier gerader Quadrate und sich auf diese Form $4a+4b$ beziehen und also durch 4 teilbar sein; oder zweitens die Summe zweier Quadrate, eines geraden und eines ungeraden, und deshalb in einer Form dieser Art $4a+8b+1$ oder in dieser $4a+1$ enthalten sein; sie wird also ein Vielfaches von vier um die Einheit überschreiten; oder drittens die Summe zweier ungerader Quadrate und wird deshalb von dieser Form $8a+1+8b+1$ sein oder in dieser $8a+2$ enthalten sein; sie wird natürlich eine verdoppelte ungerade Zahl sein und um zwei ein Vielfaches von acht übersteigen.

Weil also alle ungerade Zahlen entweder um die Einheit ein Vielfaches von vier übersteigen oder von dieser Form sind $4n+1$, oder um die Einheit nach unten von einem Vielfachen von vier abweichen oder von dieser Form sind $4n-1$, tritt es klar zutage, dass keine ungeraden Zahlen von dieser zweiten Form $4n-1$ die Summen zweier Quadrate sind; oder aus der Reihe der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, werden alle in dieser Form $4n-1$ enthaltenen Zahlen ausgeschlossen.

Weil des Weiteren alle verdoppelten ungeraden Zahlen entweder um zwei ein Vielfaches von acht übersteigen, dass sie $8n+2$ sind, oder um zwei von einem Vielfachen von acht nach unten abweichen, dass sie $8n-2$ sind, tritt es klar zutage, dass keine Zahlen dieser letzten Form Summen zweier Quadrate sind; und so werden aus der Reihe der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, die Zahlen von dieser Form ausgeschlossen $8n-2$.

Dennoch ist indess sorgfältig zu bemerken, dass weder alle in dieser Form $4n+1$ noch die in dieser $8n+2$ enthaltenen die Summe zweier Quadrate sind. Von jener Form werden nämlich die Zahlen 21, 33, 48, 69, 77, 93, 105, 129 etc. ausgeschlossen, von dieser hingegen diese 42, 66, 114, 138, 154 etc., deren Beschaffenheit später untersucht werden wird.

§4 Dennoch sind indess die Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, so mit einem gewissen Zusammenhang miteinander verbunden, dass aus einer einzigen Zahl von dieser natürlichen Beschaffenheit unendlich viele andere derselben Natur angegeben werden können. Damit dies leichter erkannt wird, möchte ich die folgenden Lemmata, die freilich für gewöhnlich hinreichend bekannt sind, hinzufügen.

I. Wenn die Zahl p die Summe zweier Quadrate ist, werden auch die Zahlen $4p$, $9p, 16p$ und allgemein nnp Summen zweier Quadrate sein. Weil nämlich $p = aa + bb$ ist, wird sein $4p = 4aa + 4bb, 9p = 9aa + 9bb, 16p = 16aa + 16bb$ und $nnp = nn(aa + bb)$ welche Formen gleichermaßen Summen zweier Quadrate sind.

II. Wenn die Zahl p die Summe zweier Quadrate ist, wird auch $2p$ und allgemein $2nnp$ die Summe zweier Quadrate sein.
Es sei nämlich $p = aa + bb$; es wird $2p = 2aa + 2bb$ sein. Aber es ist

$$2aa + 2bb = (a + b)^2 + (a - b)^2 \qquad (1)$$

woher sein wird

$$2p = (a + b)^2 + (a - b)^2 \qquad (2)$$

und deshalb die Summe zweier Quadrate. Daher wird in der Tat weiter sein

$$2nnp = nn(a + b)^2 + nn(a - b)^2 \qquad (3)$$

III. Wenn die Zahl $2p$ die Summe zweier Quadrate war, wird auch ihre Hälfte p die Summe zweier Quadrate sein. Es sei nämlich $2p = aa + bb$; es wird jede der beiden Zahlen a und b entweder gerade oder ungerade sein, woher in jedem der beiden Fälle so $\frac{a+b}{2}$ wie $\frac{a-b}{2}$ eine ganze Zahl sein wird. Es ist in der Tat

$$aa + bb = 2 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

nach Einsetzen welches Wertes wird

$$p = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

Daher werden also alle geraden Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, durch wiederholte Zweiteilung schließlich auf ungerade Zahlen derselben Gestalt zurückgeführt werden. Wenn umgekehrt allein ungerade Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, erkannt werden, werden aus ihnen auch alle geraden Zahlen durch wiederholte Verdopplung deriviert werden.

§5 Des Weiteren ist das folgende Theorem des Merkens würdig, mit welchem die Natur der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, nicht unwesentlich ans Licht gebracht werden.

Theorem. Wenn p und q zwei Zahlen sind, von denen jede der beiden die Summe zweier Quadrate ist, wird auch deren Produkt pq die Summe zweier Quadrate sein.

Beweis. Es sei $p = aa + bb$ und $q = cc + dd$; es wird sein

$$pq = (aa + bb)(cc + dd) = aacc + aadd + bbcc + bbdd \qquad (6)$$

welcher Ausdruck auf diese Weise dargestellt werden kann, dass ist

$$pq = aacc + 2abcd + bbdd + aadd - 2abcd + bbcc \qquad (7)$$

und daher

$$pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \qquad (8)$$

welcher das Produkt pq, die Summe zweier Quadrate sein wird. QED

Aus dieser Proposition folgt, auf welche Weise auch immer mehrere Zahlen, welche einzelnen die Summen zweier Quadrate seien, miteinander multipliziert werden, dass die Produkte immer die Summen zweier Quadrate sind. Und aus dieser angegebenen allgemeinen Form tritt es klar zutage, dass ein Produkt aus zwei Zahlen dieser Art auf zwei Weisen in zwei Quadrate aufgelöst werden kann. Wenn nämlich $p = aa + bb$ und $q = cc + dd$ ist, wird so

$$pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \qquad (9)$$

wie sein

$$pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \qquad (10)$$

welche Formeln verschieden sein werden, wenn nicht entweder $a = b$ oder $c = d$ ist. Weil $5 = 1 + 4$ und $13 = 4 + 9$ ist, wird das Produkt auf zwei Arten die Summe zweier Quadrate sein, es wird natürlich sein

$$65 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 49 + 16 \qquad (11)$$

und

$$65 = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 = 1 + 64 \qquad (12)$$

Und wenn man ein Produkte aus mehreren Zahlen hat, welche einzelnen die Summen zweier Quadrate seien, wird es auf mehrere Arten in zwei Quadrate aufgelöst werden können. Wie wenn die Zahl $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ vorgelegt wird, werden ihre Auflösungen in zwei Quadrate diese sein

$$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2 \qquad (13)$$

Hier haben natürlich vier Auflösungen Geltung.

§6 Obwohl aber so dargetan worden ist, wenn die Faktoren p und q Summen zweier Quadrate sind, dass auch das Produkt pq die Summe zweier Quadrate sein wird, folgt dennoch die Umkehrung dieser Proposition nicht, dass, wenn das Produkt die Summe zweier Quadrate ist, auch ihre Faktoren Zahlen von derselben Natur sind; denn diese Schlussfolgerung würden weder die Regeln der Logik noch die Natur der Sache selbst billigen. Denn die Zahl $45 = 36 + 9$ ist die Summe zweier Quadrate, dennoch ist keiner von beiden dieser Faktoren von ihr 3, 15 die Summe zweier Quadrate. Solider mag diese Schlussfolgerung scheinen: Wenn das Produkt pq und der eine der beiden ihrer Faktoren p die Summen zweier Quadrate waren, dass dann auch der andere Faktor q die Summe zweier Quadrate sein wird. Obgleich aber diese Schlussfolgerung zufällig wahr ist, wird sie dennoch mit den Regeln das logischen Schließens nicht bestätigt, denn es kann nicht, weil bewiesen worden ist, wenn die beiden Faktoren p und q des Produktes pq Summen zweier Quadrate sind, dass pq selbst eine Summe zweier Quadrate ist, daher die legitime Konsequenz gezogen werden: Wenn sowohl das Produkt pq als auch der eine Faktor p Summe zweier Quadrate sind, dass auch der andere Faktor q eine Summe zweier Quadrate sein wird. Dass nämlich eine logische Folgerung dieser Art nicht legitim ist, wird auch dieses Beispiel ersichtlich dartun: Es ist gewiss, wenn die zwei Faktoren p und q gerade Zahlen sind, dass auch das Produkt pq eine gerade Zahl sein wird; wenn jemand aber daher folgern will, wenn das Produkt pq und der eine Faktor gerade sind, dass auch der andere Faktor q gerade sein wird, würde er sich gewaltig täuschen.

Monatsaufgabe 01/2026[11]

Man bestimme die zwei kleinsten natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die es positive natürliche Zahlen a und b gibt, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2 \,.$$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/2025

Es wird nach folgender Vorschrift einer Ziffernfolge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ gebildet:

Die erste Ziffer sei $a_1 = 2$, und die zweite Ziffer sei $a_2 = 3$. Aus dem Produkt $a_1 \cdot a_2 = 6$ folgt als dritte Ziffer $a_3 = 6$. Da $a_2 \cdot a_3 = 18$ ist, seien die vierte Ziffer $a_4 = 1$ und die fünfte Ziffer $a_5 = 8$. Nun wird wegen $a_3 \cdot a_4 = 6$ und $a_4 \cdot a_5 = 8$ werden $a_6 = 6$ und $a_7 = 8$ festgelegt. Bislang lautet die Folge also

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 8 \quad 6 \quad 8$$

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.03.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Die geschweiften Klammern deuten an, welche Produkte bereits ausgeführt wurden. Nun wäre das Produkt $8 \cdot 6 = 48$ zu bilden und die Folge mit den Ziffern 4 und 8 fortzusetzen. Diese Vorschrift lässt sich beliebig fortsetzen.

Man untersuche, ob in dieser Folge die Ziffer 5 auftritt!

Lösungshinweise: Wir erkennen, dass eine ungerade Ziffer nur zwischen zwei geraden Ziffern auftreten kann. Wären nämlich c und d zwei aufeinanderfolgende ungerade Ziffern der Folge, so ist entweder c oder d die Einerstelle des Produktes zwei (vorhergehender) Ziffern a und b. Diese Einerstelle ist nur dann ungerade, wenn a und b beide ebenfalls ungerade sind. Setzen wir diese Schlussweise fort, müssten unter den ersten drei Ziffern dieser Folge bereits zwei aufeinanderfolgende ungerade Ziffern sein. Da dies nicht der Fall ist, ist die Annahme falsch und eine ungerade Ziffer kann nur zwischen zwei geraden Ziffern stehen.

Da nun eine ungerade Ziffer aus den Ziffern des Produktes zweier nebeneinander stehender Ziffern entsteht, kann sie nur die Zehnerstelle eines solchen Produktes sein. Damit kommt aber die Ziffer 9 in dieser Folge nicht vor, da das Produkt zweier einstelligen Zahlen stets kleiner als 90 ist. Damit kommt aber auch die Ziffer 7 in dieser Folge nicht vor, weil die Zehnerstell 7 nur im Produkt $8 \cdot 9 = 72$ auftreten kann. Schließlich sind damit auch die Produkte $7 \cdot 8 = 56, 6 \cdot 9 = 54$ nicht möglich. Also gibt es auch kein Produkt aus zwei einstelligen Zahlen dieser Folge, bei denen die Zehnerstelle 5 beträgt.

Somit kann die Ziffer 5 in dieser Folge nicht auftreten. ❑

Rückblick: Thema 1 – Funktionalgleichungen[12]

Aufgabe 01.01 – MO601016. Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen *x* und *y* eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür *z = x # y*. (Die Zahl *z* wird also mit Hilfe einer Formel aus *x* und *y* berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung

$$a + (b \# c) = (a \# b) + (a \# c) \qquad (1)$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für *x # y* an, die nur die vier Grundrechenarten +, −, ·, : als Rechenarten verwendet, sodass (1) erfüllt ist.
   Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.

[12] s. Hefte 09/2020, 01/2021 und 09/2021

b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von # die Formel aus a).

Statt des allgemeinen Symbols # hätte auch eine Funktion *f* verwendet werden können, die zwei rationalen Zahlen *x* und *y* einer rationalen Zahl *z* zuordnet. Dann sind alle Funktionen *f* mit $f(x,y)=z$ für rationale Zahlen *x, y, z* gesucht, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$a+f(b,c)=f(a,b)+f(a,c).$$

Aufgaben in dieser Schreibweise mit Funktionalgleichungen sind in der MO-Geschichte bereits häufig aufgetreten. Eine Gruppe von Aufgaben beinhaltet die Ermittlung spezieller Funktionswerte. Ziel ist also, die Zusammenhänge aus den Gleichungen für geeignete Argumente auszunutzen. Mit der Formulierung „E sei *f* eine Funktion ...“ wird vorausgesetzt, dass eine solche Funktion überhaupt existiert, d.h., für die Funktion muss keine explizite Darstellung angegeben werden.

Aufgabe 01.02 – MO271042. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllt:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1^3)+f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1\cdot x_2)=x_1\cdot f(x_2)+x_2\cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f\left(2+\sqrt{5}\right)$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

In der folgenden Aufgabenstellung wird ausdrücklich offengelassen, ob eine Funktion mit diesen Eigenschaften existiert.

Aufgabe 01.03 – MO301044. Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen *x* definierte Funktion *f* so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen *a* und *b* die Gleichung

$$f(a)+f(a+b)-f(a-b)=a^2+4b+2 \text{ gilt!}$$

Gibt es eine Lösungsstrategie für solche Aufgaben? Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muss eine gegebene Gleichung erst recht für spezielle Belegungen der Veränderlichen gelte. Es kann also hilfreich sein, durch geschickte Wahl der Argumente Eigenschaften der gesuchten Funktionen zu finden, die zur expliziten Form der Lösung führen (können). Wir betrachten folgendes Beispiel.

Aufgabe 01.04. Man finde alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x+y)+2\cdot f(x-y)+f(x)+2\cdot f(y)=4\cdot x+y.$$

Aufgabe 01.05. Man finde alle Funktionen f mit

a) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2+y^2$
b) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2\cdot xy+y^2$

Natürlich führen solche einfachen Substitutionen nicht immer zum sofortigen Erfolg. Geringe Änderungen in der Funktionalgleichung können beträchtliche Wirkungen haben!

Aufgabe 01.06. Man finde alle reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sei und folgende Gleichung für alle reellen Zahlen x und y erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)-2\cdot f(y)=y-2$$

Aufgabe 01.07 – MO201033. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Es ist $f(1)=1$. (1)
Für jedes $x\neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$. (2)
Für alle x_1, x_2 mit $x_1, x_2, x_1+x_2\neq 0$ gilt $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. (3)

Man beweise, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}$ gilt.

Aufgabe 01.08 – MO271042. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1^3)+f(x_2^3) \quad (1)$$
$$f(x_1\cdot x_2)=x_1\cdot f(x_2)+x_2\cdot f(x_1) \quad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Aufgabe 01.09. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für die für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-1 \text{ mit } f(0)=1.$$

Aufgabe 01.10. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle positiven reellen Zahlen definiert sind und für beliebige positive reelle Zahlen x und y die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Aufgabe 01.11. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 7;\ f(1) = 10.$$

Um den Umgang mit Funktionalgleichungen zu vertiefen, betrachten wir die

Definition. Die reelle Funktion $f: R \to R$ heißt periodisch mit der Periode $a \neq 0$, wenn für alle reellen Zahlen $x \in R$ die Gleichung $f(x + a) = f(x)$ erfüllt ist.

Aufgabe 01.12 – MO141232. Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x + p) = \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1}$$

a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist.
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an!

Aufgabe 01.13 - MO051222. Es sei a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
2. Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt $f(x + a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist.
b) Geben Sie für $f(x)$ einen rechnerischen Ausdruck an, der die obigen Eigenschaften hat!

Offensichtlich gilt für periodische Funktionen folgende Eigenschaft: Ist a eine Periode, dann ist $2a$ ebenfalls eine Periode, denn es gilt für alle x

$$f(x + 2a) = f((x + a) + a) = f(x + a) = f(x)$$

Verallgemeinernd gilt sogar

Aufgabe 01.14. Die Zahlen a_1, a_2 seien Perioden der Funktion f. Dann ist für beliebige ganzzahlige Zahlen m und n die Zahl $a_3 = m \cdot a_1 + n \cdot a_2$ ebenfalls eine Periode von f (falls $a_3 \neq 0$).

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 3 (Landesrunde) 20. bis 22. Februar 2026.
https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Regionalausscheide Sachsen

Region Nordwestsachsen, 26. Februar 2026, Leipzig, Universität Leipzig/Augusteum, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig

Region Ostsachsen, 28. Februar 2026, Dresden, HTWD - Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden, Friedrich-List-Platz 1, 01069 Dresden

Region Südwestsachsen, 6. bis 7. März 2026, solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestraße 88, 09116 Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[13]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[13] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.