

**LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM**

HERAUSGEGEBEN

VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

---

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

**1. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1964**



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9135/1

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

1. LEHRBRIEF . Unveränderter Nachdruck 1964

von Dr. phil. **Heinrich Kindler**  
Professor mit Lehrstuhl  
an der Technischen Universität Dresden

Bearbeitet für das Fernstudium  
von Dipl.-Gwl. **Helmut Wiesenhütter**  
wissenschaftlicher Mitarbeiter  
der Hauptabteilung Fern- und Abendstudium  
der Technischen Universität Dresden



**VEB VERLAG TECHNIK BERLIN . 1964**

**Nur für das Fernstudium bestimmt**

**VT-Bestell-Nr. 9 135/1 · Auflage 1850 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/25/64/DDR  
Verfaßt für die Hauptabteilung Fern- und Abendstudium der Technischen Universität Dresden · Heraus-  
gegeben im Auftrag des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demo-  
kratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, Berlin  
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza**

## PROGRAMM

In den vorliegenden Lehrbriefen sollen Sie einen Einblick in ein großes und wichtiges Teilgebiet der Automatisierung, nämlich in die Regelungstechnik, erhalten. Wenn auch einzelne Regelungsprobleme schon seit langem bearbeitet und weitgehend gelöst wurden, so wurde doch erst in den letzten Jahrzehnten die Regelungstechnik in der Industrie in breitem Umfange angewandt. Sie ist also ein junger Zweig der Technik und noch in stürmischer Entwicklung begriffen.

Da auf sehr verschiedenen Gebieten der Technik Regelungsprobleme anfallen, sind die Mittel zur gerätemäßigen Verwirklichung eines Reglers entsprechend vielseitig. Man sagt deshalb auch, daß die Regelungstechnik eine Querschnittstechnik darstellt. Aus dieser Lage der Dinge folgt, daß die vorliegenden Lehrbriefe querschnittsmäßig auf dem Ihnen bereits nahegebrachten Stoff aufbauen.

In bezug auf den Plan dieser Lehrbriefe ist folgendes zu sagen: Wir gehen von der Beschreibung einer Reihe von zum Teil schematisierten Reglern aus, die verschiedenen Anwendungsgebieten entnommen sind. Einerseits bekommen Sie einen gewissen Eindruck von der Vielgestaltigkeit der Regelungsprobleme, andererseits berücksichtigen wir, daß sowohl Studenten der Elektrotechnik als auch des Maschinenwesens sich mit dieser Lehrbriefreihe zu befassen haben.

Mit der beschreibenden Darstellung der Regler können wir uns natürlich nicht begnügen. Wir werden uns also im Anschluß an die Beispiele mit der Terminologie auf dem Gebiete der Regelungstechnik befassen. Nun handelt es sich aber bei der Regelung um ein dynamisches Problem, so daß wir das Zeitverhalten der einzelnen Bestandteile und schließlich des gesamten Reglers zu erörtern haben. Dabei tritt die Frage nach der Stabilität des Regelungssystems auf. Weiterhin werden wir uns mit Möglichkeiten zur Verbesserung der Eigenschaften eines Reglers durch die Verwendung von Zusatzeinrichtungen zu befassen haben. Daran schließt sich die Frage nach der Beurteilung der Güte eines Reglers.



Endlich geben wir Ihnen mehrere durchgerechnete Beispiele, um die vorherigen Erörterungen zu vertiefen und zusammenzufassen.

- DIN 19226 . Jan. 1954 - Regelungstechnik: Benennungen, Begriffe  
Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin W 15 und Köln
- Kirillow, J.J. Regelung von Dampf- und Gasturbinen  
VEB Verlag Technik 1956 395 S.
- Leonhard, A. Die selbsttätige Regelung 1957 2. Auflage  
Springer Berlin-Göttingen 376 S.
- Mejerow, M.W. Grundlagen der selbsttätigen Regelung  
elektrischer Maschinen  
VEB Verlag Technik, Berlin 1955 171 S.
- Oldenburg, R.C. u. Dynamik selbsttätiger Regelungen, Band 1  
Sartorius, H. Allgemeine und mathematische Grundlagen,  
Stetige und unstetige Regelungen,  
Nichtlinearitäten  
Verlag R. Oldenbourg, München 1951 258 S.
- Oppelt, W. Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge  
Verlag Chemie, Weinheim 1960, 3. Auflage  
632 S.
- Regelungstechnik Vorträge des VDI/VDE-Lehrganges in Bonn 1953  
und Essen 1954  
Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH, Düsseldorf  
VDE-Verlag GmbH, Wuppertal und Berlin 1954  
282 S.
- Reichardt, W. Regelungen, Rückkopplung, Gegenkopplung und  
negative Widerstände, einheitlich zusammen-  
gefaßt, Elektrotechnik Band 4 (1950), Nr. 2  
Seite 47 ... 53, und Nr. 3 Seite 73 ... 80
- Schäfer, O. Grundlagen der selbsttätigen Regelung,  
Francis-Verlag, München 1953, 150 S.
- Trnka, Z. Einführung in die Regelungstechnik  
VEB Verlag Technik, Berlin 1956 404 S.

# Teil I: Grundlagen der Regelungstechnik

## 1. Kapitel: Einleitung und Problemstellung

### [1] Über die Begriffe Mechanisierung und Automatisierung

1. Mechanisierung. Der Mensch begann schon in der Vorzeit, sich durch Jagd- und Ackergeräte sein Leben zu erleichtern. Doch war seine Entlastung von schwerer physischer Arbeit gering, da man auf die begrenzte physische Leistung von Pferden und anderen Tieren angewiesen blieb. Dementsprechend hat sich in der Landwirtschaft in vielen Ländern, bis in die neueste Zeit hinein, eine Arbeitsweise gehalten, die tierische bzw. menschliche Muskelkraft zusammen mit einfachen maschinellen Anordnungen ausnützt. Durch die Erfindung der Dampfmaschine und des Explosionsmotors wurde die bisher gebrauchte Muskelkraft weitgehend ausgeschaltet. Viele der nun lösbaren Aufgaben wären mit der Muskelkraft auch gar nicht zu bewältigen gewesen. Erst mit dem Einsatz der Maschine wurde der Mensch in vielen Fällen von der Leistung schwerer physischer Arbeit befreit.

Im Rahmen technischer Prozesse fallen dem Menschen im wesentlichen zwei Aufgaben zu:

Er wirkt durch seine Muskelkraft, oder er beeinflusst den Prozeß durch seine Intelligenz.

Heutzutage pflegt man nun Prozesse als mechanisiert zu bezeichnen, bei denen dem Menschen die unmittelbare schwere Arbeit abgenommen wird. Dem am Gerät beschäftigten Menschen bleibt aber noch die Lenkung und Überwachung des Vorgangs. Als Beispiel dafür sei die Bedienung von Bagger, Förderband und Lastenaufzug genannt. Nun ging man aber noch weiter. Bei vielen Aufgaben war es wünschenswert, den Menschen auch noch aus der Lenkung des betreffenden Prozesses auszuschalten. Ihm wird sowohl die körperliche Arbeit als auch die operative Leitung abgenommen.

Diese zweite höhere Stufe der Technisierung bezeichnet man als Automatisierung.

## 2. Automatisierung

Bei der Automatisierung kann man zwei Richtungen erkennen:

a) Steuerung

b) Regelung

a) Steuerung

Als 1. Beispiel betrachten wir hier den Fernsprecheverkehr über ein Selbstanschlußamt (SA-Amt). Wenn der Teilnehmer die Nummer eines anderen Teilnehmers wählt, so läuft der Vermittlungsvorgang im SA-Amt automatisch ab. Ob der Vorgang in der vorgeschriebenen Weise vor sich ging, erkennt man erst, wenn sich der gewünschte Teilnehmer meldet. Es ist nämlich im SA-Amt keine apparative Kontrolle eingebaut, die anzeigt, ob der selbsttätige Vorgang der Vermittlung in der richtigen Art und Weise funktionierte. Die Tatsache, daß keine Rückmeldung über die Befehlsausführung erfolgt, ist bezeichnend für derartige Vorgänge.

Ein ähnliches Verhalten liegt vor, wenn wir einen Viertakt-Ottomotor betrachten. Hier werden die zu den einzelnen Zylindern gehörigen Ventile von der gemeinsamen Antriebswelle aus über aufgesetzte Kurvenscheiben und die von diesen betätigten Gestänge- und Stoßelsysteme in der vorgeschriebenen Reihenfolge geöffnet und geschlossen. Offensichtlich wäre hier bei der Steuerung durch den Menschen keine besonders schwere physische Arbeit zu leisten, aber der Mensch scheidet von vornherein für die Übernahme dieser Tätigkeit aus, weil die Bewegungen zu schnell aufeinander folgen und außerdem ein genauer zeitlicher Ablauf eingehalten werden muß.

Eine große Bedeutung besitzen Steuerungen mit einem vorgegebenen Zeitprogramm in der sogenannten Automatentechnik. Wenn z.B. in ein Werkstück eine Reihe von Löchern zu bohren ist, so wird nach Drücken des Starterknopfes mit dem Bohren begonnen. Nach Vollen-  
dung eines Arbeitsganges wird das Werkstück automatisch in die für den weiteren Arbeitsgang nötige Lage gebracht. Nach Durchlaufen der vorgeschriebenen Arbeitsgänge wird der Automat stillgesetzt. Ähnliche Bedingungen herrschen z.B. bei Schraubenautomaten usw. Die Automatentechnik besitzt heute eine große Bedeutung. Offensichtlich kommen Automaten nur bei großen Stückzahlen in Frage,

da sie auf mehr oder minder spezielle Probleme zugeschnitten und außerdem sehr teuer sind.

Eine Steuerung verläuft in vielen Fällen aber auch stetig. Als Beispiel dafür betrachten wir die folgende Aufgabe. Es soll die Temperatur in einem Zimmer in Abhängigkeit von der Temperatur der Luft im Freien gesteuert werden (Bild 1). Die Temperatur der Außenluft wird durch ein Thermometer (hier Thermoelement)  $Th$  gemessen, das nur eine sehr geringe Leistung abgibt. Deshalb müssen wir einen Verstärker ( $V$ ) vorsehen. Dieser muß so bemessen sein, daß er einen Antrieb ( $A$ ) für die Verstellung der Drosselklappe ( $D$ ) in der Warmluftzuführung betätigen kann.

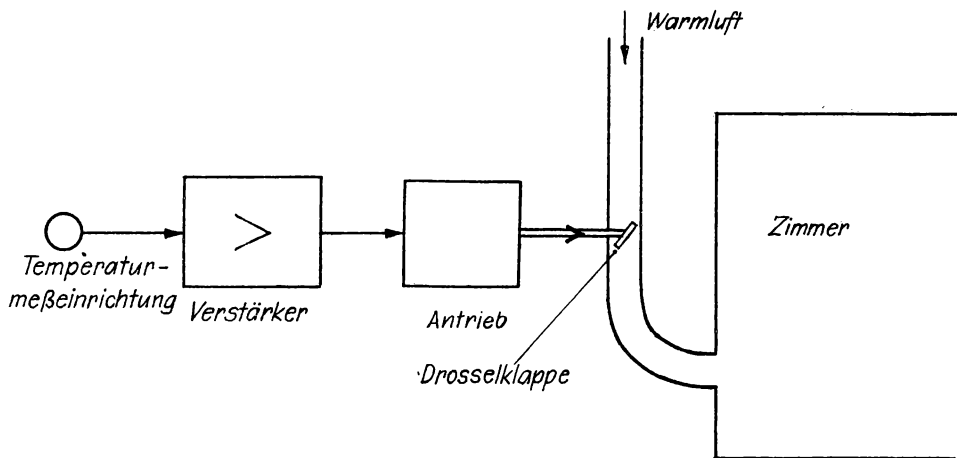


Bild 1  
Beispiel einer Steuerung ohne vorgegebenen Zeitplan

Auch hier erfolgt wie unter 2a) der Eingriff ohne Messung der beeinflussten Größe (Raumtemperatur). Aber nun ändert sich die Verstellung der Drosselklappe in Abhängigkeit von der vom Thermoelement gemessenen Außentemperatur stetig. Sie erkennen aus dem Beispiel, daß Steuerungen dieser Art keine genauen Ergebnisse liefern werden; denn die Temperatur im Zimmer ist wesentlich von der Temperatur der zugeführten Warmluft abhängig, von der Öffnung von Fenstern usw.

Ein anderes einfaches Beispiel einer derartigen Steuerung ist die Wirkung der Schleuse auf den Wasserdurchfluß bei einem Wehr.

Allen betrachteten Ausführungen ist eins gemeinsam: Ihr Wirkungsablauf ist nicht geschlossen. Bild 1 als Blockschaltbild dargestellt ergibt Bild 2 und läßt den offenen Wirkungskreis deutlich erkennen.

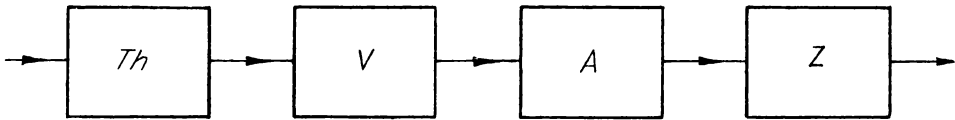


Bild 2  
Blockschaltbild einer Steuerung

Eine Steuerung eines Prozesses liegt also immer dann vor, wenn die Geberstelle (hier Th) nicht vom gesteuerten Objekt (hier Temperatur des Luftvolumens im Zimmer) beeinflusst wird.

b) Regelung. Das Beispiel für eine Steuerung ohne vorgegebenen Zeitplan (Bild 1) wird in der Weise abgeändert, daß die Geberstelle (Temperaturmeßeinrichtung) aus dem freien Außenraum in das Zimmer verlegt wird (Bild 3).

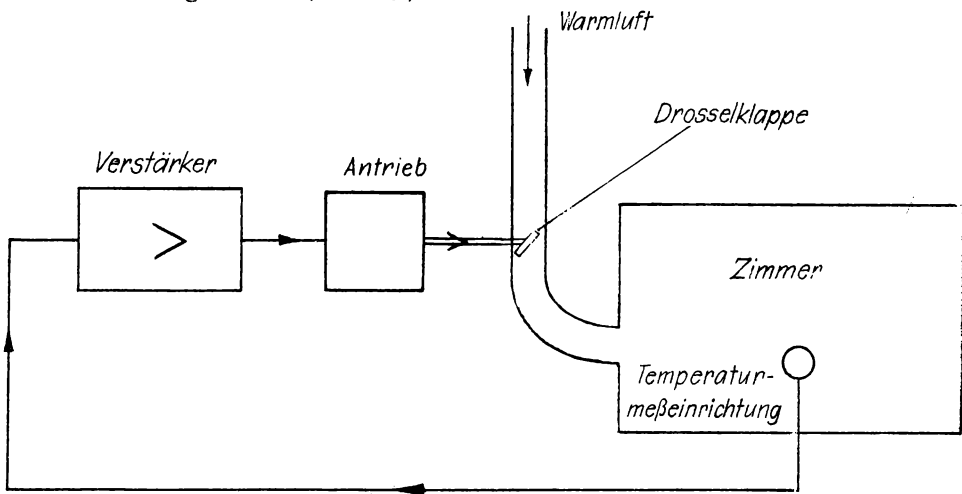


Bild 3  
Beispiel einer Regulationsanlage

Jetzt liegt ein geschlossener Wirkungskreis vor, denn die Meßeinrichtung (Thermoelement) steht in dem zu heizenden Raum und betätigt dementsprechend bei allen auftretenden Störungen (z.B.



Kälteeinfall) über den Verstärker und Antrieb die Drosselklappe. Aus der Steuerung ist dadurch eine Regelung geworden. Das Blockschaltbild einer Regelungsanlage zeigt Bild 4.

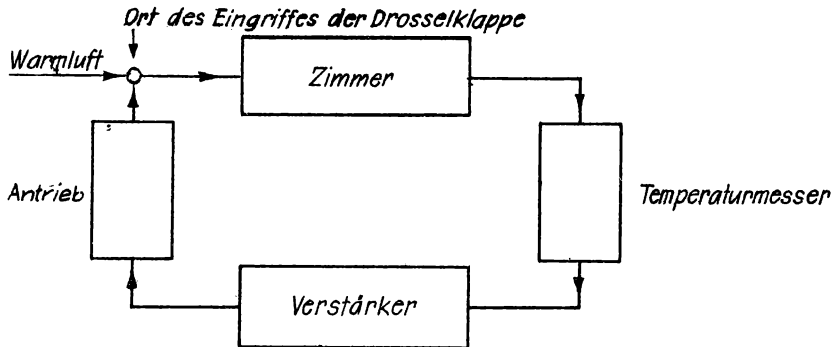


Bild 4  
Blockschaltbild einer Regelungsanlage

Der erste Regler, der einen großen Einfluß auf die technische Entwicklung hatte, war der Dampfmaschinenregler von James WATT (etwa 1784). Zunächst wurde rein experimentell gearbeitet. Erst im Jahre 1877 lieferte der russische Mathematiker WYSCHNEGRADSKI die Theorie für diesen Fall. Dann folgten wichtige Arbeiten von STODOLA (1894) und TOLLE (1905 - 21). Aber erst nach 1920 setzte eine stürmische Entwicklung der Regelungstechnik ein. In den letzten 2 Jahrzehnten bemühte man sich besonders, die Nomenklatur zu vereinheitlichen und die mathematischen Methoden der theoretischen Behandlung der Regler so zu gestalten, daß sie auch von weniger Geübten auf die verschiedenen Probleme angewandt werden können.

Es ist aber bemerkenswert, daß die Regelungstechnik ihrem Wesen nach eigentlich kein völlig neues Prinzip darstellt. Den Physiologen war nämlich schon lange aufgefallen, daß z.B. zur Aufrechterhaltung des menschlichen Lebens eine große Zahl von Parametern konstant bzw. annähernd konstant gehalten werden müssen. Sie sprechen jedoch von Regulationsvorgängen (nicht von Regelvorgängen) bei der Konstanthaltung wichtiger chemischer oder physikalischer Größen des Organismus bzw. seiner Zellen, so z.B. Binnentemperatur, Blutversorgung, Blutdruck, Blutzuckerspiegel, Wasserstoffionenkonzentration, osmotischer Druck der Körpersäfte.

Bei Nichteinhaltung der Konstanz treten Störungen in Form von Krankheit (Fieber, Zuckerkrankheit usw.) auf.

Die Ähnlichkeit der Zielsetzung bei biologischen Regulationsvorgängen und technischen Regelungsaufgaben ist zu auffallend, als daß man nicht versucht hätte, sie auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Die Diskussion hierüber ist noch in vollem Gange, doch müssen wir uns mit diesen Hinweisen begnügen.

Im folgenden befassen wir uns nur mit technischen Regelungsvorgängen.

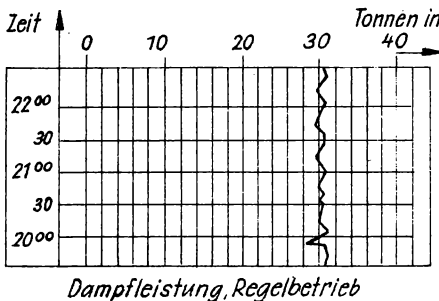
Ehe wir nun der Behandlung von Reglern nähertreten, sollen die Einsatzmöglichkeiten und die Bedeutung von Reglern behandelt werden.

## **[2] Einsatzmöglichkeiten und Bedeutung der Regler**

1. Entlastung des Bedienungspersonals von laufenden ermüdenden Verrichtungen. Man wird Regler dann einsetzen, wenn dem Bedienungspersonal notwendige laufende, aber ermüdende Verrichtungen abgenommen werden sollen, wobei natürlich die Möglichkeit für den Einsatz eines Reglers gegeben sein muß.

Beispiele dafür sind:

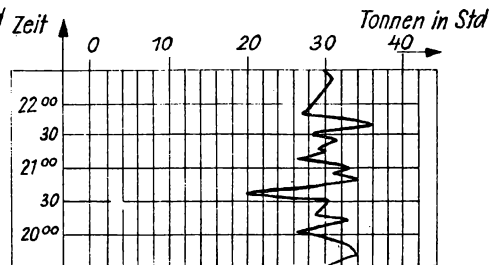
a) Bei der Kesselregelung kann der Dampfdruck unter Verwendung eines Reglers viel besser konstant gehalten werden, als es ein Bedienungsmann durchführen könnte. Der Einsatz eines selbsttätigen Reglers bringt hier außer gleichmäßigeren Betriebsbedingungen auch noch wirtschaftliche Vorteile im Hinblick auf einen geringeren Energieverbrauch. Die Wirkung einer Regelanlage auf die abgegebene Dampfleistung zeigt Bild 5.



*Dampfleistung, Regelbetrieb*

**Bild 5**

Kurve der Dampfleistung bei Benutzung eines Reglers



*Dampfleistung, Handbetrieb*

**Bild 6**

Kurve einer Dampfleistung bei Handbetrieb

Im Vergleich zu Bild 6, welches die gleiche Anlage bei Handbetrieb darstellt, erkennen Sie deutlich, daß durch die Regelanlage die auftretenden Abweichungen vom Sollwert auf etwa 1/10 verringert werden.

Selbst in kleinen Zentralheizungen verwendet man heute eine Feuerzugregelung. Dadurch werden gleichmäßigere Betriebsbedingungen erzielt und Kohle gespart, zumal in diesem Falle eine laufende Aufsicht nicht durchführbar ist.

b) Bei der Zugbeleuchtung wird die Klemmenspannung selbsttätig überwacht.

In Automobilen ist eine Lichtmaschine vorhanden, von der der Akkumulator aufgeladen wird. Ein Regler ist notwendig, weil ja der Automobilmotor mit ganz verschiedenen Drehzahlen läuft, die Ladespannung dagegen in einem bestimmten Bereich liegen muß. In beiden Fällen kann die Funktion, die der Regler ausführt, schon aus Sicherheitsgründen keinesfalls von dem Fahrpersonal übernommen werden.

c) Durch die Schwundregelung in Empfängern der drahtlosen Telephonie und Telephonie werden Schwankungen der Feldstärke des zu empfangenden Senders am Empfangsort in weitem Maße ausgeglichen, so daß ein brauchbarer Empfang gewährleistet wird, sofern nur das Verhältnis von Signal- zu Störpegel genügend hoch ist. Eine Nachregelung durch Hand ist zumindest mühsam. Außerdem wäre ein Bedienungsmann durch diese Arbeit voll in Anspruch genommen.

d) Bei genauen elektrischen Messungen müssen die Versorgungsspannungen konstant sein. Die Verwendung von Anodenbatterien scheidet meistens aus. Um den Einfluß von Netzspannungsschwankungen zu eliminieren, müßte etwa ein Laborant entsprechend eingreifen und auf eine konstante Versorgungsspannung einregeln. Der hierbei notwendige Aufwand kann durch Einsatz eines Netzspannungsreglers erheblich vermindert werden.

2. Einsatz von Reglern für Aufgaben, bei denen der Mensch versagt bzw. die ihm wegen Gesundheitsschädigungen nicht zugemutet werden können. Kann sich ein Parameter, den man konstant zu halten wünscht, wie etwa eine Spannung, plötzlich um erhebliche Beträge ändern, so wird ein Bedienungsmann meist nicht in der Lage sein, diese Aufgabe zu lösen. Seine Reaktionszeit ist zu groß, als daß er in solchen Fällen die Regelung in der gewünschten Schnelligkeit

durchführen könnte. Hinzukommt, daß die Bedienungsperson durch äußere Einflüsse leicht abgelenkt werden kann, aus physischen Gründen mit der Zeit geringere Aufmerksamkeit aufbringt usw. Der Regler dagegen ist, solange er voll funktioniert, jederzeit aktionsbereit und bei geeigneter Bauart zu viel schnellerem Eingreifen als der Mensch befähigt:

a) So muß bei der Spannungsregelung in elektrischen Netzen, z.B. bei Abschaltungen eines Großverbrauchers, die Spannung in Bruchteilen einer Sekunde nachgeregelt sein.

b) Auf Schiffen benutzt man heute für bestimmte Zwecke Geräte, die die Schlingerbewegung des Schiffes nicht mitmachen sollen; also weder kippen noch kanten dürfen. Um dies zu erreichen, muß die Lage des Gerätes in der Horizontalen stabilisiert werden. Dabei setzt man „Folgeregler“ ein, die schnell und genau arbeiten. Ein Bedienungsmann kann diese Aufgabe erfahrungsgemäß nicht mit der erforderlichen Genauigkeit lösen.

c) Die direkte Regelung eines Vorganges durch den Menschen ist dann kaum noch möglich, wenn eine Mehrfachregelung vorliegt. So wird bei der Klimatisierung von Räumen im allgemeinen die Raumtemperatur und die Feuchtigkeit geregelt. Es muß erst einmal die Temperatur der angesaugten Luft gemessen werden. Der Temperaturregler (Regler 1) verstellt dann z.B. ein Ventil in einer Heißwasser- oder Dampfleitung, wodurch die Temperatur der angesaugten Luft auf einen vorgegebenen Wert gebracht wird. Bevor man aber den Luftstrom erhitzt, wird er durch einen Befeuchter, mit Feuchtigkeit gesättigt, und zwar mit Hilfe eines Taupunktreglers (Regler 2). Bei der nachfolgenden Erhitzung bleibt die absolute Feuchte, d.h. die im Kubikmeter Luft enthaltene Wasserdampfmenge in Gramm konstant. Man kann die gewünschte relative Feuchte durch den gleichzeitigen Einsatz dieser beiden voneinander abhängigen Regler erhalten.

d) Der Betrieb der (ersten) Zwangsdurchlaufkessel in der Industrie mit etwa 160 atü, 600°C war ohne Regelung überhaupt nicht möglich.

e) Der Druck in der Brennkammer eines Raketenmotors kann nur durch einen Regler, aber nicht durch einen Menschen geregelt werden.

f) Von wachsender Bedeutung dürfte der Einsatz von Reglern bei Atomkraftwerken sein, wobei wegen der Gefährdung durch Strahlung

der Mensch den unbedingt nötigen Abstand vom Atomreaktor einhalten muß.

3. Wirtschaftliche Gesichtspunkte. Punkt 1 und 2 zeigte Ihnen, daß der Einsatz von Reglern aus verschiedenartigen technischen Gründen wünschenswert bzw. erforderlich ist. Während die Anwendungen im Haushalt im wesentlichen der größeren Bequemlichkeit gewidmet sind, ergeben sich in der Industrie aber auch große wirtschaftliche Vorteile:

- a) Senkung der Betriebskosten durch Einsparung von Hilfspersonal und größere Unabhängigkeit von den praktischen Erfahrungen routinierter und entsprechend teurer Fachkräfte,
- b) gleichmäßigere und bessere Produktion bei sparsamstem Verbrauch von Rohstoffen und Betriebsmitteln,
- c) größere Sicherheit vor Betriebsunfällen.

Im folgenden wollen wir auf diese Punkte noch etwas näher eingehen.

Zu a) Da die selbsttätigen Regler Funktionen übernehmen, die vorher von Bedienungspersonal durchgeführt wurden, verringert sich der Personalbedarf, der für einen bestimmten Produktionsprozeß erforderlich ist. In vielen Fällen arbeitet der Regler dabei noch genauer als es ein Mensch könnte.

In populärwissenschaftlichen Darstellungen wird oft angedeutet, daß man in mehr oder minder naher Zukunft große Fabrikanlagen völlig automatisieren, d.h. ohne Bedienungspersonal betreiben könne. Das dürfte ein Wunschtraum bleiben, denn zur Überwachung und Reparatur werden stets Menschen, ja sogar Fachleute gebraucht. Betriebsstörungen sind nämlich in keiner technischen Anlage auszuschließen. Bei räumlich und technisch umfangreichen Anlagen, z.B. der chemischen Großindustrie, sind Störungen nur mit einem größeren Stab von Fachkräften der verschiedensten Sparten zu beheben. Die Störung bzw. Betriebsunterbrechung muß außerdem in möglichst kurzer Zeit behoben sein, damit der Produktionsausfall niedrig bleibt. Die Betriebsleitung muß dann einen Kompromiß schließen zwischen den Kosten für das gegebenenfalls erforderliche Betriebspersonal und den Schäden, die durch längeren Produktionsausfall entstehen.

Hinzu kommt noch, daß sich auch in der Großindustrie Betriebsumstellungen mitunter nicht vermeiden lassen, die ebenfalls einen Facharbeiterstab bedingen.



Als ein Beispiel hierfür betrachten wir eine Öltraffinerie. Das dort angelieferte Rohöl aus einem Förderungsgebiet enthält etwa 21 % Benzin, dasjenige aus einem anderen nur 1,7 %. Selbst das Rohöl aus ein und demselben Bohrgebiet weist einen örtlich unterschiedlichen Benzinanteil auf, so daß von Tanker zu Tanker der ganze Veredelungsprozeß darauf abgestimmt werden muß. Die höher siedenden Bestandteile werden nämlich gekrackt, d.h. gespalten und weiterverarbeitet. Bei diesem Verfahren sind u.a. sehr viele Meß- und Regelgeräte eingesetzt, so daß nur relativ wenig Bedienungspersonal benötigt wird. Ein Mindeststand an Personal wird aber natürlich gebraucht, da man nicht ohne weiteres von der Verarbeitung einer Sorte zu einer anderen übergehen kann.

Zu b) Hervorragende Bedeutung hat die Regelungstechnik heute in Industriezweigen, die mit hohen Materialumsätzen arbeiten. Hierbei wirkt sich auch eine kleine Verbesserung des Wirkungsgrades stark aus. Aus diesem Grunde hat die chemische Großindustrie schon frühzeitig Regler verwendet. Ehe man jedoch bei einem Produktionsprozeß einen Regler einsetzt, muß man den Prozeß genau analysieren. Die Analyse muß sich erstrecken auf:

Untersuchung der Regelungsmöglichkeiten des betreffenden Betriebsprozesses.

Festlegung der einzubauenden Geräte, sobald die Regelungsfähigkeit festgestellt ist.

Feststellung des Investitionsaufwandes. Damit ist eine Wirtschaftlichkeitsrechnung zu verbinden, die letzten Endes den Ausschlag geben wird, wenn man nach ökonomischen Gesichtspunkten verfährt. Darin können auch Erwägungen enthalten sein, die sich nicht unmittelbar in Geldeswert ausdrücken lassen (z.B. Verbesserung der Exportfähigkeit).

Einen Eindruck über den Umfang der notwendigen Investitionen erhält man bei der Betrachtung eines Mineralöl verarbeitenden Betriebes. Bei modernen derartigen Anlagen betragen die Kosten für die Ausrüstung mit Meß- und Regelgeräten etwa 4 ... 9 % der Gesamtbaukosten. In anderen Industriezweigen liegen die Verhältnisse naturgemäß jeweils etwas verschieden. Selbstverständlich wird der Prozentsatz stark von der Größe der Anlage bestimmt; denn eine kleine Anlage erfordert praktisch den gleichen Aufwand an Betriebsmeß- und Regelgeräten wie eine gleichartige große.

Zu c) Die Anwesenheit des Menschen in unmittelbarer Nähe von sich bewegenden Teilen wird überflüssig, da die manuelle Funktion vom Regler übernommen wird (Kraftwerke werden von Schaltwarten aus gesteuert).

Bedienungspersonal kann aus Räumen abgezogen werden, in denen bei längerem Aufenthalt gesundheitsschädigende Wirkungen eintreten. Diese Möglichkeit ist u.a. in chemischen Betrieben (giftige Substanzen) und Atomkraftwerken (schädliche Strahlung) gegeben.

Der Regler ermüdet nicht. Erfahrungsgemäß sind bei ermüdeten Bedienungspersonal die Unfallziffern wesentlich höher, da infolge des Nachlassens der Aufmerksamkeit Fehlleistungen auftreten, die zu Unfällen führen.

**[3] Welche Größen werden geregelt.** Die folgende Aufzählung zeigt Ihnen, welche Größen nach dem augenblicklichen Stand der Technik geregelt werden können, wobei wir keine Vollständigkeit anstreben.

#### **1. Mechanische Größen**

Behälterinhalt (Wasserstand von Dampfkesseln)

Drehzahl bzw. Leistung

von Turbinen (Dampf-, Gas-, Wasserturbinen)

von Kolbenmaschinen (Verbrennungsmotoren)

von Elektromotoren

Druck von Flüssigkeiten (Druck in Hauswasserversorgungsanlagen),

von Gasen (Gichtgas in Hochofenanlagen, Gasen in der chemischen Industrie),

von Dämpfen (Wasserdampf in Heizungsanlagen von Kraftwerkskesseln).

Durchflußmenge von Flüssigkeiten und Gasen

Feuchtigkeit in Trockenanlagen (bei der Tabakherstellung)

in Lagerräumen (Getreidesilos),

in Werkstattäumen (Spinnereien, Leimfabriken),

Geschwindigkeit von Fahrzeugen (Eisenbahn, Schiff, Luftfahrzeug)

Beschleunigung (Anfahrbeschleunigung von E-Lok mit  $16 \frac{2}{3}$  Hz, einphasig)

Höhe von Luftfahrzeugen

Kurs von Fahrzeugen (Schiffe, Luftfahrzeuge)

Mechanische Spannung von Fäden (Spinn- und Zwirnmaschinen)  
von Bändern (Filmbänder, Tonbänder)

Zug in Fabrikschornsteinen, bei Hausfeuerung.

## 2. Elektrische Größen

Frequenz und Frequenzintegral von Stromerzeugern

Wirk- und Blindleistung von Stromerzeugern, Übergabeleistung  
zwischen zwei Netzen

Größen der Nachrichtenübertragung z.B. Verstärkungsgrad,  
Lautstärke, Modulations-  
grad

Phasenwinkel von Stromerzeugern

Spannung von Stromerzeugern, für Prüfzwecke

Strom von Schweißumformern, von Bogenlampen, für galvanische  
Bäder

## 3. Thermische Größen

Temperatur von Industrieöfen, Wärmeaustauschern, chemisch-  
technischen Prozessen, bei Raumheizung

Heizwert von Brennstoffen, Gas- und Flüssigkeitsgemischen

## 4. Optische Größen

bei der Photometrierung, selbsttätiger Regelung der Filmbe-  
lichtung, selbsttätiger Messung von Trübungen

## 5. Stoffkonstanten

Gewicht bei selbsttätigen Fördereinrichtungen

spezifisches Gewicht bei der Herstellung bestimmter Lösungen

Konzentration von Flüssigkeiten bei der Herstellung von  
Säuren und Laugen

Elektrische Leitfähigkeit bei der Herstellung bestimmter  
Elektrolyte

p<sub>H</sub>-Wert von Flüssigkeiten bei Brauwasser, beim Kondensat,  
bei der Destillation und Rektifikation, bei Bädern in der  
Galvanotechnik, in der Gerberei, Papier-, Zellstoff-, Kunst-  
seide-, Textilindustrie, Trinkwasseraufbereitung und Zucker-  
industrie.

Aus dieser Aufzählung erkennen Sie, daß Regelungsprobleme recht verschiedenartige technische Gebiete betreffen. Dadurch ist eine große Vielfalt der zur Lösung der entsprechenden Probleme benutzten Mittel verbunden, und zwar sowohl in bezug auf den Aufwand als auch in bezug auf den Charakter der Baugruppen. Damit ist folgendes gemeint: Eine Kursregelung von Schiffen kann auf elektrischer, hydraulischer und mechanischer Basis erfolgen. Für welches Prinzip man sich entscheidet, hängt von verschiedenen Faktoren ab, wie z.B. Anschaffungs- bzw. laufende Kosten, Gewicht, Genauigkeit, Betriebssicherheit.

Bei Regelungsaufgaben in der elektrischen Nachrichtentechnik wird man vorzugsweise auf elektrische Bauelemente zurückgreifen, ohne daß die Bewältigung der betreffenden Regelungsaufgabe mit anderen Mitteln ausgeschlossen ist.

Man kann daraus ersehen, daß es sich bei der Regelungstechnik um eine Querschnittstechnik handelt. Es ist nicht immer vorauszusagen, ob eine Regelungsaufgabe mit elektrischen, mechanischen, hydraulischen oder pneumatischen Mitteln oder auch einer bestimmten Kombination dieser Mittel nach dem Stande der Technik optimal verwirklicht werden kann.

Aus dieser Sachlage heraus ist es verständlich, daß man, um zu einer brauchbaren Lösung zu gelangen, häufig mehrere Entwürfe anfertigt, die unter Benutzung verschiedenartiger Bauprinzipien gewonnen sind.

Um die verschiedenen Ausführungsmöglichkeiten in analoger Weise rechnerisch bzw. experimentell untersuchen zu können, wurden allgemein anwendbare Methoden entwickelt. Sie sind so durchgearbeitet, daß sie auch der mathematisch weniger Geübte in den meisten Fällen anwenden kann.

## **2. Kapitel: Beschreibung einiger Regler**

Die Einleitung brachte Ihnen einen Überblick über die Bedeutung und Einsatzmöglichkeit von selbsttätigen Reglern. Jetzt sollen Sie an Beispielen den Aufbau und die Wirkungsweise von Reglern kennenlernen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Beispiele mehr oder weniger schematisiert sind, damit das Wesentliche klar heraustritt.

Auf einige dieser Beispiele wird im weiteren Verlauf dieser Lehrbriefreihe noch öfter zurückgegriffen. In Bild 3 gaben wir Ihnen das erste Beispiel für einen Regler.

**[4] Feuerzugregler (Bild 7).** Bei kleinen Zentralheizungen tritt zwischen zwei Brennstoffnachfüllungen eine verhältnismäßig große Schwankung der Wassertemperatur auf. Man könnte sie in kleinen Grenzen halten, wenn man den Feuerzug entsprechend verändert. Für zentralbeheizte kleine Häuser kann man dafür aus wirtschaftlichen Gründen keine menschliche Hilfskraft einsetzen. Um aber zu starke Schwankungen der Wassertemperatur zu verhindern, verwendet man einen mechanischen Feuerzugregler. Im Warmwasser befindet sich eine Meßeinrichtung, die die Temperaturänderungen in mechanische Bewegung eines Hebelsystems umwandelt. Sie besteht aus einem Zylinder, in dem sich ein Kolben bewegt. Bei einer durch steigende Temperatur bedingten Ausdehnung der im unteren Teil befindlichen Flüssigkeit wird der Kolben gegen den Federdruck nach oben gedrückt und betätigt über das Hebelsystem die Luftklappe so, daß weniger Frischluft zuströmt und in der Zeiteinheit weniger Brennstoff verbrannt wird. Sinkt die Wassertemperatur, so geht der Kolben wieder zurück, die Luftklappe öffnet weiter und die Verbrennung wird stärker gefördert.

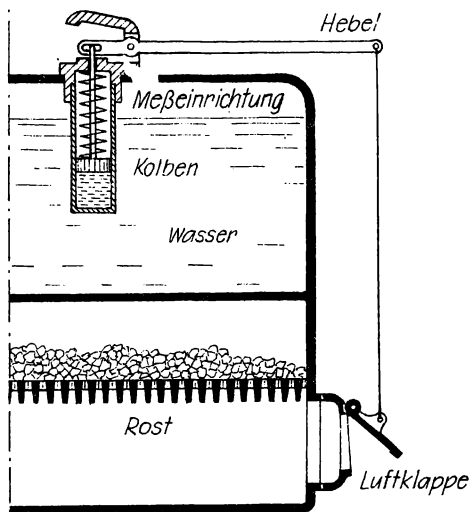


Bild 7  
Schema eines mechanischen  
Feuerzugreglers

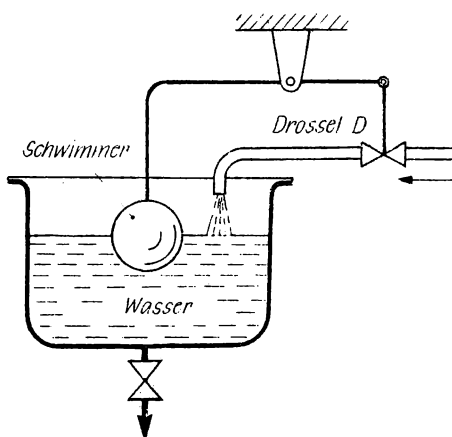


Bild 8  
Schema eines Flüssigkeits-  
standsreglers



**[5] Flüssigkeitsstandregler** (Bild 8). Heutzutage begegnet man in vielen Wohnungen einem Flüssigkeitsstandregler, nämlich bei der Spüleinrichtung der Toilette. Er besteht aus einem Behälter, in dem ein bestimmter Wasserstand aufrechterhalten wird (Festwertregler). Wie aus Bild 8 zu ersehen ist, kann über eine Drosselklappe die Wasserzufuhr verändert bzw. ganz abgestellt werden. Die Drosselklappe ist über ein Gestänge mit einem im Behälter befindlichen Schwimmer verbunden. Befindet sich der Schwimmer unterhalb seiner Sollage, so gibt die Drosselklappe den Zufluß frei. Ist die Sollage des Schwimmers erreicht, so sperrt die Drosselklappe den Zufluß.

**[6] Selbsttätiger Kompensator** (Bild 9). Ein selbsttätiger Kompensator wird in der Praxis angewandt, wenn z.B. eine Foto- oder Thermospannung mit einem Tintenschreiber registriert werden soll. Eine unmittelbare Registrierung ist hierbei nicht möglich, weil von der Meßeinrichtung die zur Betätigung der Schreibfeder benötigte Leistung nicht aufgebracht werden kann. In unserem Bild setzen wir also voraus, daß an den Klemmen 1 und 2 die Gleichspannung  $X$  liegt.

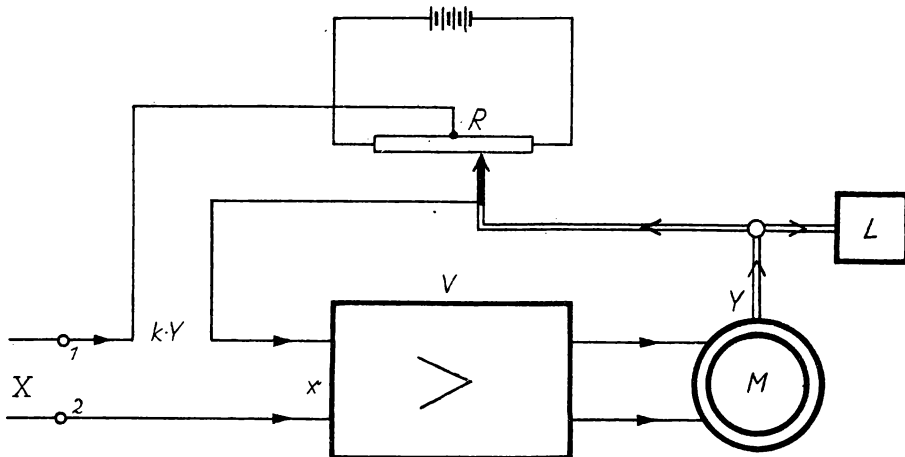


Bild 9  
Schaltschema eines selbsttätigen Kompensators  
(Bild nach Mac Coll)

Entsprechend der Größe dieser Spannung soll die Last  $L$  bewegt werden (drehen, heben, senken). Da an den Klemmen 1 und 2 die für

die Bewegung der Last notwendige elektrische Leistung nicht abgenommen werden kann, wird dazu ein elektrischer Verstärker V, dessen innerer Aufbau in diesem Zusammenhang nicht interessiert, und ein Elektromotor M benötigt. Der Motor bringt über ein Getriebe das zur Bewegung der Last notwendige Drehmoment auf. Damit aber die Bewegung der Last in der vorgeschriebenen Abhängigkeit von der Größe der Spannung  $X$  erfolgt, muß eine Anordnung vorgesehen sein, die die Ausführung des erteilten Befehls kontrolliert. Dazu dient das Potentiometer R mit Mittelanzapfung, welches von einer Batterie gespeist wird. Der Schleifer des Potentiometers ist mechanisch über ein Getriebe mit dem Elektromotor gekuppelt und wird entsprechend der Bewegung der Last verstellt. Die zwischen dem Potentiometer und der Mittelanzapfung abgegriffene Spannung  $kY$  wird der Spannung  $X$  entgegengeschaltet. Die Differenz dieser beiden Spannungen gelangt auf den Verstärker. Ist die Bewegung der Last bzw. des Potentiometers mit der erforderlichen Genauigkeit erfolgt, so wird die Spannung  $x$  am Eingang des Verstärkers derart klein, daß das am Motor entstehende Drehmoment nicht mehr ausreicht um ihn zu drehen: er bleibt stehen und der gewünschte Kompensationszustand ist erreicht. Wir haben damit einen selbsttätigen Kompensator vor uns, der als Regler aufgefaßt werden kann. Nun ist auch der Fall denkbar, daß sich die Spannung  $X$  in Abhängigkeit von der Zeit ändert. Jetzt muß der zeitlich variable Sollwert kompensiert werden. Ist der Sollwert zeitlich veränderlich, so spricht man von einer Folgeregelung. Die Größe  $X(t)$  heißt in diesem Falle Führungsgröße. Diese wird von der Regelung nicht beeinflußt. Um dies zu erläutern, wollen wir das Bild 9 etwas erweitern und erhalten das Bild 9a.

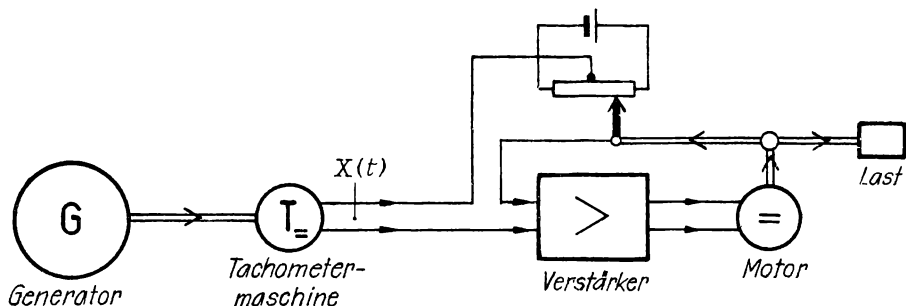


Bild 9a  
Messung einer Generatorndrehzahl

Die Anordnung Bild 9a erlaubt die Messung der Drehzahl eines Generators mittels einer Tachometermaschine. Sie besteht aus einem kleinen Gleichstrommotor, der konstant erregt wird und dessen Ankerspannung als Führungsgröße  $X(t)$  dient. Die Last  $L$  wird also proportional der Drehzahl des Generators bewegt.

Das Bild 9 können wir aber auch noch in einer anderen Richtung erweitern, und zwar legen wir vor den Verstärker eine Zusammenschaltung aus Widerständen und einem Kondensator, wobei am Eingang der Schaltung die Spannung  $x$  liegt, während die Ausgangsspannung  $x'$  als Eingangsspannung des Verstärkers dient (Bild 9b).

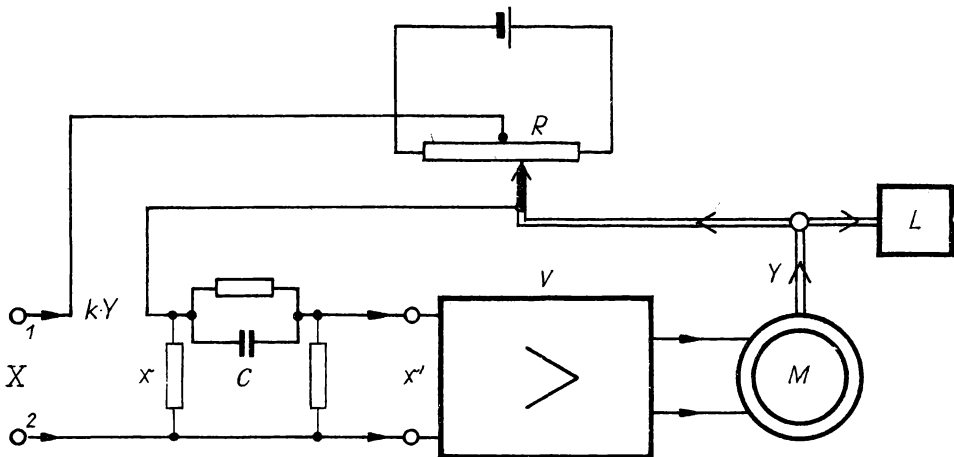


Bild 9b  
Kompensatorschaltung mit Vorhalt (D-Einfluß)

Ist die Größe  $x$  konstant, so hat der Kondensator keinerlei Einfluß auf die Spannung  $x'$ , die sich auf Grund der Spannungsteilung durch die Wirkwiderstände errechnen läßt. Ändert sich aber die Spannung  $x$  sinusförmig, so wird  $x'$  nicht nur von den Wirkwiderständen, sondern auch von dem Kondensator  $C$  beeinflusst. Durch die Kapazität wird  $x'$  gegenüber  $x$  sowohl in bezug auf Amplitude als auch in bezug auf die Phase verändert. Man kann leicht zeigen, daß bei Vorhandensein des Kondensators die Phase der Spannung  $x'$  gegenüber  $x$  um einen Winkel  $\varphi$ , der von der Dimensionierung der Schaltung und der Frequenz abhängig ist, vorverlegt

wird. Wir können auch sagen, daß durch den Kondensator ein Verhalten gebildet bzw. eine differenzierende Wirkung hervorgerufen wird, worauf später noch genau eingegangen wird.

**[7] Spannungsgegengekoppelter Verstärker (Bild 10).** Besonders in der Nachrichtentechnik werden heutzutage häufig gegengekoppelte Verstärker eingesetzt. Durch die Anwendung der Gegenkopplung gelingt es nämlich, den Verstärkungsfaktor bei Änderung von inneren Parametern des Verstärkers (z.B. Veränderung von Röhrenkennlinien, Schwankungen der Versorgungsspannung) ausreichend konstant zu halten.

Einen gegengekoppelten Verstärker können wir auch als Regler auffassen. Und zwar handelt es sich um einen programmgesteuerten Folgeregler. Die verstärkte Wechselspannung muß nämlich der Eingangsspannung möglichst getreu folgen, wobei das Programm durch die Amplitude und Phase der Eingangswechselspannung bzw. deren Komponenten gegeben ist.

Der eigentliche Verstärker ist durch den Kasten in Bild 10 gegeben. Die an seinem Ausgang auftretende Spannung  $u_2$  geht an den Verbraucherwiderstand  $R_L$ .

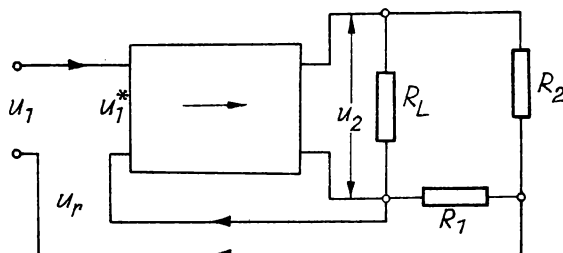


Bild 10  
Schema eines spannungsgegengekoppelten Verstärkers

Parallel zu diesem Widerstand  $R_L$  liegt ein aus den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  bestehender Spannungsteiler.

Die an dem Widerstand  $R_1$  abfallende Spannung  $u_r$  wird der Eingangsspannung  $u_1$  entgegengeschaltet, so daß an den Eingangsklemmen des Verstärkers nur die Spannung  $u_1^* = u_1 - u_r$  wirksam wird.

Verringert sich z.B. infolge alternder Röhren der Verstärkungsgrad, so wird die an  $R_1$  abfallende Spannung entsprechend kleiner, damit aber  $u_1^*$  entsprechend größer, so daß der Verstärkungsabfall zum größten Teil ausgeglichen werden kann.

Es sei darauf hingewiesen, daß man einen gegengekoppelten Verstärker auf viele verschiedene Arten verwirklichen kann, doch müssen wir uns hier mit diesem Hinweis begnügen.

**[8] Selbsttätiger Trübungsmesser.** Soll die optische Durchlässigkeit eines Mediums etwa in Abhängigkeit von der Zeit oder Wellenlänge gemessen werden, so benutzt man einen Trübungsmesser. Bei bestimmten Aufgaben ist eine fortlaufende Messung vorteilhaft, und man setzt dafür selbsttätige Trübungsmesser ein. Die Wirkungsweise wollen wir an Hand des Bildes 11 erläutern. Charakteristisch ist hier der doppelte Strahlengang. In dem ersten Strahlengang fließt der Lichtstrom von der Lichtquelle  $L$  über einen Spiegel  $S$  durch die Anordnung  $K_1$ , die den zu prüfenden Stoff enthält und fällt schließlich auf eine Fotozelle  $c$ .

In dem zweiten Strahlengang läuft der von der Lichtquelle  $L$  ausgesandte Strahlengang wieder über einen Spiegel  $S$ , durchsetzt die Vergleichssubstanz  $K_2$  und weiter eine veränderliche Blende und gelangt ebenfalls auf die Fotozelle  $c$ . Ein rotierender Sektor  $B$  bewirkt, daß während gleicher Zeiten abwechselnd die Strahlen aus dem Strahlengang eins oder aus dem Strahlengang zwei auf die Fotozelle  $c$  fallen.

Durch die Einschaltung des Flügelrades in die Strahlengänge ergeben sich zwei zeitlich verschobene Fotoströme (Bild 12a, b), deren Summe einen Fotogleichstrom ergibt, wenn die Lichtströme gleich sind (Bild 12c). Ist der Abgleich gestört, d.h., sind die Intensitäten in den beiden Strahlengängen ungleich, so haben die beiden Fotoströme verschiedene Amplituden.

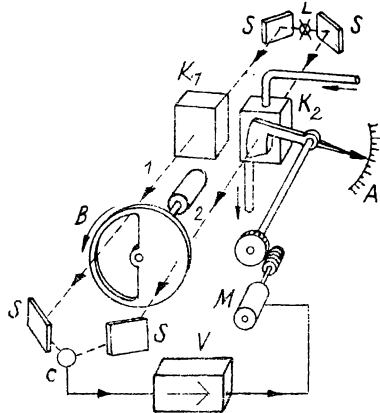
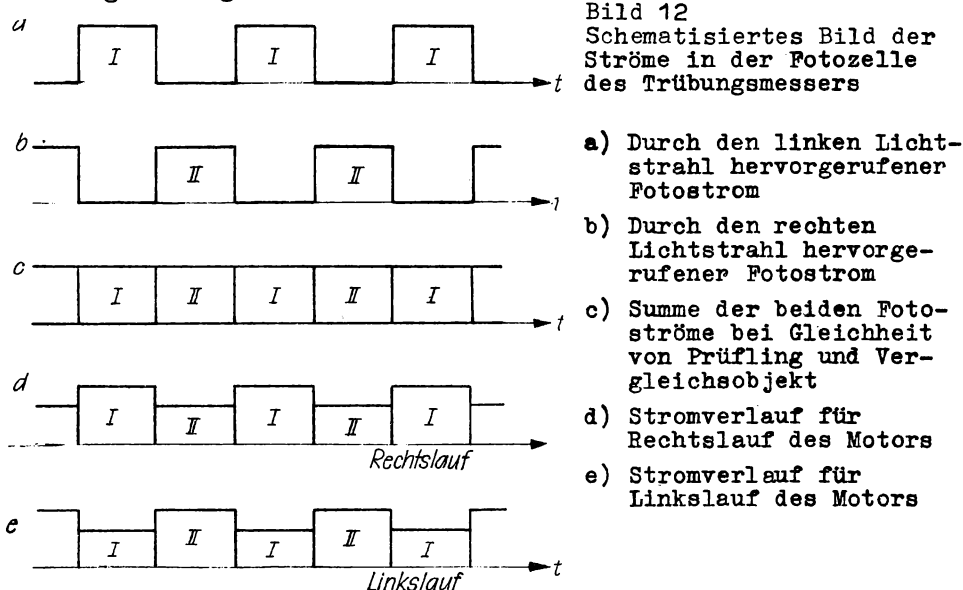


Bild 11  
Aufbau eines selbsttätigen  
Trübungsmessers  
(Bild nach Oppelt)



Die beiden Möglichkeiten für den Stromverlauf zeigen Bild 12d und e. Wir erhalten bei der Summierung neben einem Gleichstrom verringerter Amplitude noch einen Wechselstrom, der durch den Verstärker V verstärkt wird und den Motor M für die Blendenverstellung betätigt.



Damit wir eine dem Vorzeichen der Differenz  $i_I - i_{II}$  entsprechende Motorlaufrichtung erhalten, brauchen wir noch eine Bezugsspannung mit der Unterbrecherfrequenz, die üblicherweise in den Verstärker eingeführt wird. Durch Kombination dieser Bezugsspannung mit der von der Fotozelle gelieferten Spannung, die bei fehlender Kompensation die Form nach Bild 12d oder e hat, kann man dann durch Rechts- oder Linkslauf des Motors den Abgleich und damit die Spannungsform nach Bild 12c erreichen.

Mit der Blende kann man statt des Anzeigeinstrumentes A ein Schreibgerät koppeln, das die Trübung in Abhängigkeit von der Zeit oder von der Wellenlänge registriert. Die letztere Ausführung wird bei den technisch wichtigen Infrarot-Spektralfotometern angewandt, und zwar bei der Bestimmung der Spektren von chemischen Verbindungen.

## [9] Dampfturbinenregler

1. Erste Ausführungsmöglichkeit. Im Bild 13 ist eine Dampfturbine schematisch dargestellt. Diese soll mit konstanter Drehzahl be-

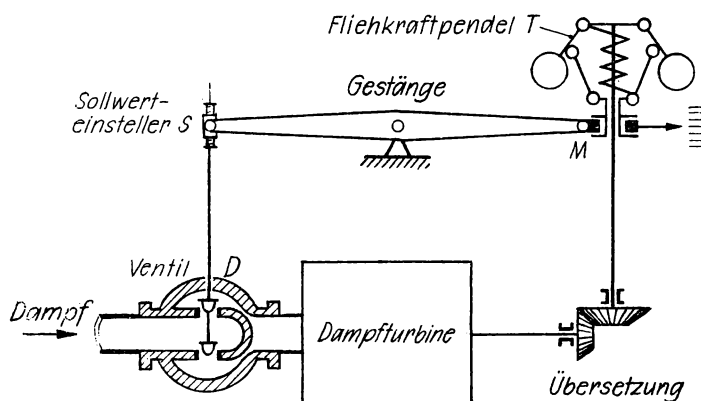


Bild 13  
Dampfturbinenregler  
erste Ausführungsmöglichkeit

trieben werden. Da aber sowohl Lastschwankungen als auch Schwankungen im Dampfdruck auftreten können, muß man einen Regler einsetzen, um möglichst gleichmäßige Betriebsbedingungen zu erzielen.

Um nun aber die Drehzahl regeln zu können, mißt man diese fortlaufend. Als Meßeinrichtung dient hier ein Fliehkraftpendel T. Der Drehzahl entsprechend nehmen die rotierenden Kugeln eine bestimmte Lage ein und verschieben dadurch die Muffe M. Um die gewünschte Wirkungsweise zu erhalten, ist mit der Muffe eine zusätzliche Masse und oft auch eine Feder verbunden. Durch ein Gestänge ist die Muffe mit dem Ventil D, dem Stellglied, starr verbunden. Bei steigender Drehzahl wird die Muffe angehoben, das Ventil dadurch so bewegt, daß die Dampfzufuhr gedrosselt wird.

Wollte man einen Regler dieser Art einsetzen, so wäre die Last und die Drehzahl vorgegeben. Wir müssen den Regler noch einstellen können. Das geschieht mit Hilfe des Sollwerteinstellers S. Die Maschine wird also bei einer bestimmten Last betrieben, und es stellt sich ein Beharrungszustand ein, wobei die Drehzahl  $n$  gemessen wird. Ist die Drehzahl etwas höher als die Gewünschte, so muß am Sollwerteinsteller verstellt werden. Das Ventil muß in diesem Fall nach unten verschoben werden, so daß er die Dampfzufuhr drosselt. Stellen wir bei konstanter Last nacheinander

mehrere verschiedene Soll-drehzahlen ein, so messen wir im Beharrungszustand auch mehrere verschiedene Ventilstellungen. Und zwar ist im stationären Betrieb die Änderung der Ventilstellung der Drehzahländerung proportional, so lange wir uns im linearen Bereich befinden.

Um einen noch etwas genaueren Einblick zu bekommen, trennen wir vorübergehend die Verbindung zwischen Ventil und Sollwertein-

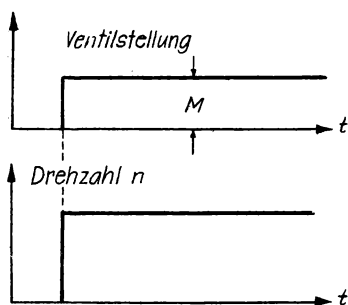


Bild 13a  
Zeitabhängigkeit

steller. Wenn wir jetzt das Ventil plötzlich um einen kleinen Betrag  $M$  verstellen und in der neuen Stellung festhalten, so wird sich auch die Drehzahl der Maschine, wenn man idealisiert, also von den Massenwirkungen absieht, sprunghaft auf einen neuen Wert einstellen (Bild 13a). Außerdem wollen wir noch kurz überlegen, wie sich die in der Praxis immer auftretenden Störungen bemerkbar machen. Im vor-

liegenden Beispiel sind dies vorzugsweise Änderung des Dampfdruckes und Änderung der Last. Erhöht sich beispielsweise die Last, so muß die Dampzufuhr zur Maschine vergrößert werden. Einer Er-

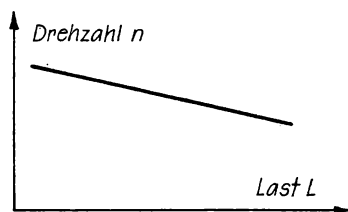


Bild 13b  
Lastabhängigkeit

weiterung des freien Querschnitts der Dampfzuleitung (Herausziehen des Ventiles) entspricht wegen der starren Verbindung von  $D$  und  $M$  eine Drehzahlerniedrigung. Die Drehzahl sinkt also im Beharrungszustand um so mehr ab, je höher die Last ist (Bild 13b). Wir können auch sagen, daß im Beharrungszustand im linearen Bereich die Abwei-

chung der Ist-drehzahl vom Sollwert der Belastung proportional ist. Regler, die ein solches Verhalten aufweisen, nennt man P-Regler.

2. Zweite Ausführungsmöglichkeit (Bild 14). Gegenüber Bild 13 unterscheidet sich Bild 14 dadurch, daß hier zwischen der Meßeinrichtung  $T$  und dem Dampfeinlaßventil  $D$  eine Verstärkungseinrichtung eingebaut ist. In einem Zylinder  $SK$  befindet sich ein Doppelkolben, der entsprechend der Stellung der Muffe  $M$  bewegt wird. Bei der Soll-drehzahl stehen die beiden starr verbundenen Kolben

so, daß die Ölleitungen  $P_1$  und  $P_2$  zum Stellmotor SM hin geschlossen sind. Verringert sich beispielsweise die Drehzahl infolge einer Lasterhöhung, so senkt sich die Muffe und der Doppelkolben bewegt sich nach unten. Nun wird die Verbindung zwischen der Leitung  $P_z$ , in die Öl durch eine Pumpe mit hohem Druck eingeführt wird, und der Leitung  $P_1$  hergestellt. Infolgedessen wird der

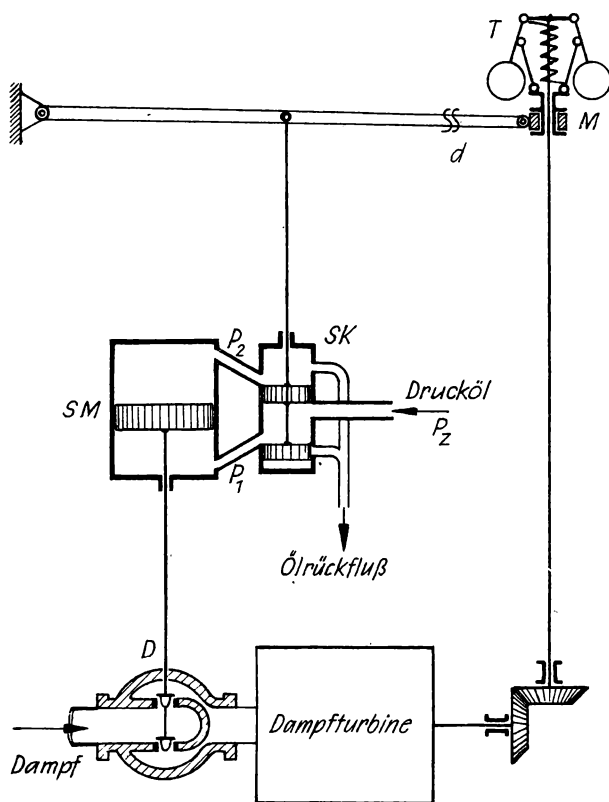


Bild 14  
Dampfturbinenregler  
zweite Ausführungsmöglichkeit

Kolben des Stellmotors SM und des Ventils D nach oben bewegt und damit der Maschine eine größere Dampfmenge zugeführt. Die Anordnung nach Bild 14 unterscheidet sich funktionsmäßig von der nach Bild 13 in drei wichtigen Punkten:

a) In der Anordnung Bild 14 verwenden wir nun eine Ölpumpe als Hilfsenergiequelle, die den zur Betätigung des Stellmotors erforderlichen Öldruck liefert. Sobald an die Güte des Reglers höhere Forderungen gestellt werden, kommt man ohne Hilfsenergie nicht aus. Ihre Verwendung

bringt nicht nur Vorteile, sondern auch Nachteile mit sich. Die Anordnung kann nämlich bei unzuweckmäßiger Auslegung instabil werden, wobei die Energie für die Erzeugung von Schwingungen (Pendelungen) von der Hilfsenergiequelle geliefert wird.

b) Um die Wirkungsweise der Anordnung besser zu übersehen, wollen wir uns die Verbindung des Doppelkolbens mit der Muffe vorüber-

gehend gelöst denken. Dann lenken wir den Doppelkolben plötzlich um einen kleinen Betrag  $M$  nach unten aus (Bild 14a). Dadurch strömt Drucköl durch die Leitung  $P_1$  in den Zylinder des Stellmotors. Der Kolben bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

*Auslenkung des Doppelkolbens*

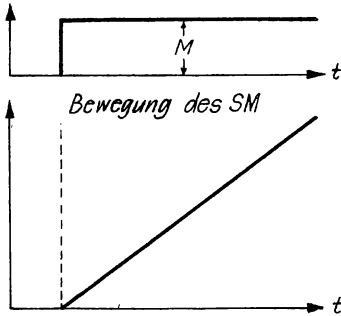


Bild 14a  
Zeitabhängigkeit

nach oben, soweit dies die Dimensionen des Stellmotorzylinders erlauben. Hier entspricht also einer Stellungsänderung des Doppelkolbens eine Stellmotorgeschwindigkeit. Wir können diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Die Bewegung des Stellmotors ist dem Zeitintegral der Auslenkung des Doppelkolbens proportional.

c) Bei Belastungsschwankungen unterscheidet sich die Anordnung nach Bild 14 wesentlich von der nach Bild 13. Hier wird bei einer Vergrößerung der Belastung der Stellmotorkolben und damit das Ventil solange verstellt, bis die zugeführte

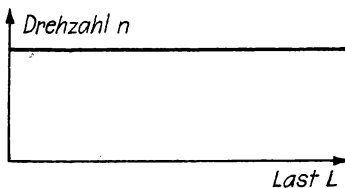


Bild 14b  
Lastabhängigkeit

Bei Belastungsschwankungen unterscheidet sich die Anordnung nach Bild 14 wesentlich von der nach Bild 13. Hier

Dampfmenge ausreicht, um die Solldrehzahl wieder herzustellen. Erst dann ist nämlich der Doppelkolben wieder in seiner Ruhelage, in der seine Kolben die Verbindungen  $P_1$  und  $P_2$  zum Stellmotor abdecken (Bild 14a, b).

Regler, die entsprechend Bild 14 arbeiten, nennt man integralwirkende

(I-Regler). Die Anordnung nach Bild 14 wendet man wegen gewisser, hier nicht näher zu erörternder Nachteile in der Praxis nicht an.

3. Dritte Ausführungsmöglichkeit (Bild 15). Gegenüber Bild 14 ist jetzt nicht nur der Steuerkolben, sondern auch der Stellmotor mit der Muffe über ein Gestänge verbunden. Die mechanische Verbindung zwischen Muffe und Stellmotor bezeichnen wir als starre Rückführung. Dadurch wird die Wirkungsweise der Anordnung wesentlich geändert. Um eine klare Vorstellung über das Zusammenwirken von Steuerkolben, Stellmotor und starrer Rückführung zu erlangen, nehmen wir auch hier an, daß das Gestänge an der Stelle  $d$  aufgeschnitten sei. Nun lenken wir das Gestänge an der linken Seite

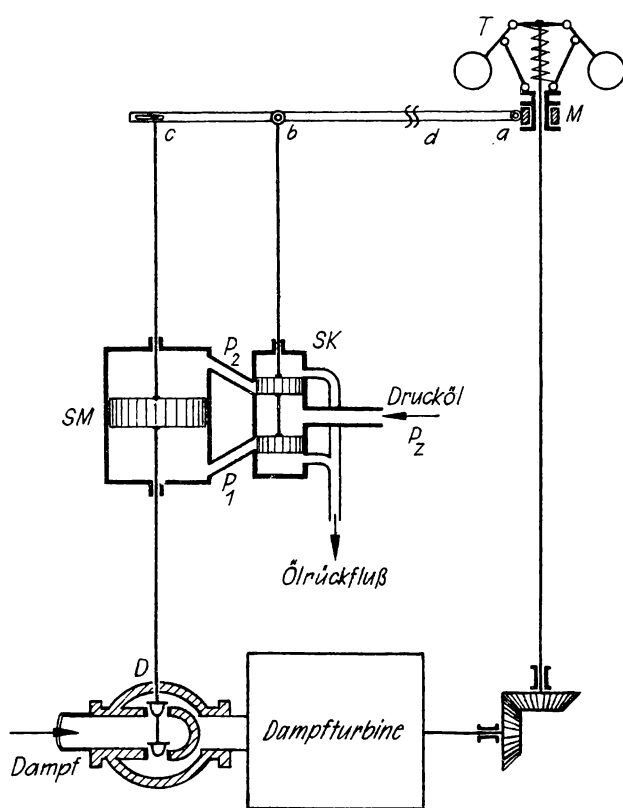


Bild 15  
Dampfturbinenregler  
dritte Ausführungsmöglichkeit

gedrückt und verstellt entsprechend das Dampfeinlaßventil D. Der Punkt c bewegt sich also nach oben und zieht den Punkt b und damit den Doppelkolben ebenfalls nach oben, da ja die Stelle d (Trennstelle) als festgelegt gilt. Die Bewegung des Steuerkolbens erfolgt nach einer sprungförmigen Verstellung an der Schnittstelle d in Abhängigkeit von der Zeit angenähert nach einer Exponentialfunktion.

Ist nun die Trennstelle geschlossen, so ist die Verschiebung des Stellmotorkolbens nach einer sprungförmigen Störung im Beharrungszustand dem Betrag der Störung proportional (P-Regler).

der Trennstelle plötzlich um einen bestimmten Betrag nach unten aus. Dadurch wird der Punkt b nach unten bewegt, während der Punkt c noch in seiner Lage bleibt, da das im Stellmotor befindliche Öl inkompressibel ist und die Leitungen  $P_1$  und  $P_2$  erst bei der Abwärtsbewegung freigegeben werden. Dabei wird die Verbindung zwischen der Druckölleitung  $P_2$  und der Leitung  $P_1$  hergestellt, so daß Drucköl in den unteren Teil des Zylinders strömen kann. Der Kolben wird nach oben

4. Vierte Ausführungsmöglichkeit (Bild 16). Gegenüber dem Schema von Bild 15 besteht folgender Unterschied: Zwischen den beiden

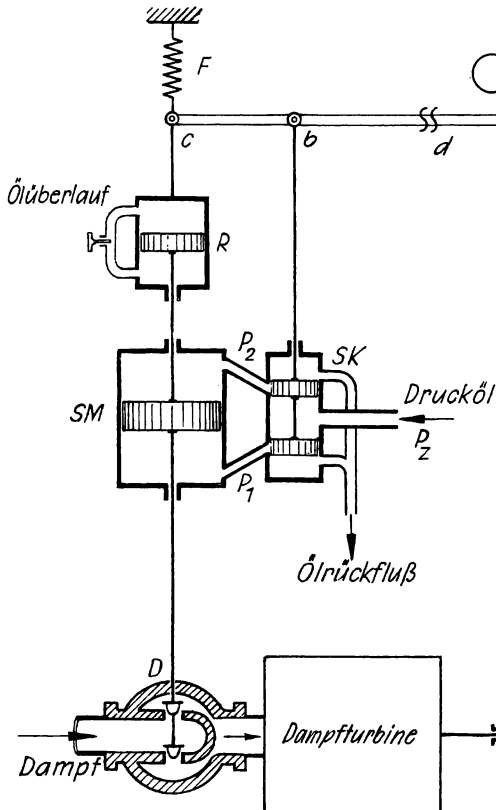


Bild 16  
Dampfturbinenregler  
vierte Ausführungsmöglichkeit

Bauelementen Steuerkolben und Stellmotor liegt nun ein Zylinder, der mit Öl gefüllt ist und der einen Überlauf (Katarakt) besitzt. Außerdem greift am Punkte c eine Feder an, deren zweiter Endpunkt festgelegt ist. Um die Wirkungsweise dieser Anordnung näher kennenzulernen, verfahren wir wie in den vorhergehenden Fällen. Wir trennen wieder an der Stelle d auf und bewegen die linke Seite der Trennstelle sprungförmig um einen bestimmten Betrag nach unten. Im Zeitpunkt des Auftretens

der Störung wird der Punkt c festgehalten, während sich der Gestängepunkt b und damit auch der Doppelkolben nach unten bewegt. Die Verbindung zwischen der Druckölleitung  $P_2$  und der Leitung  $P_1$  wird hergestellt, so daß sich der Kolben des Steuermotors SM nach oben verschiebt. Dabei wird das Dampfeinlaßventil D entsprechend verstellt. Gleichzeitig mit der Bewegung des Kolbens von SM wird der mit Öl gefüllte Zylinder R mit dem dazugehörigen Kolben als Ganzes nach oben bewegt. Die Feder F wird zusammenge-  
drückt. Sie sucht sich nun auszudehnen und drückt das Öl durch die Umgehungsleitung des Zylinders R in dessen unteren Teil, bis

der neue Beharrungszustand erreicht ist. Wird die Schnittstelle in d geschlossen, haben wir einen Regler mit proportionaler und integraler Wirkung (PI-Regler). Wir bemerken nun noch, daß durch Schließen des Überlaufs im Rückführkolben die gleichen Verhältnisse wie in Bild 15 erzielt werden.

**[10] Zweipunktregler** (Bild 17). Die Temperatur eines beheizten Ofens ändert sich relativ langsam. Wenn die Temperatur nicht sehr

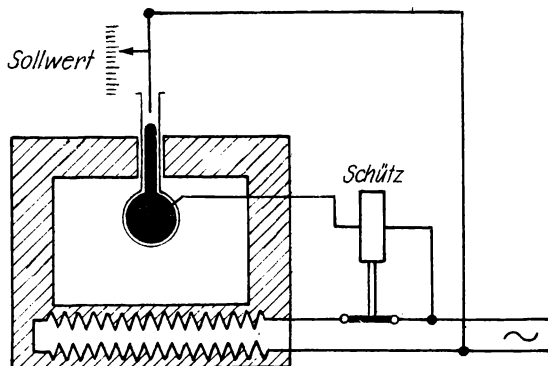


Bild 17  
Schema eines Zweipunktreglers

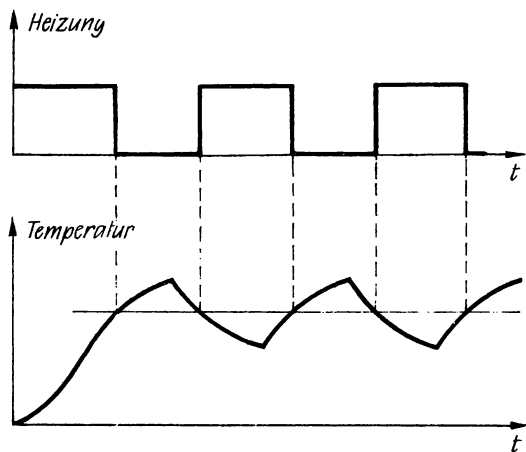


Bild 17a  
Temperaturverlauf im Ofen in  
Abhängigkeit von seiner Heizung

genau geregelt werden muß, kann man den Aufwand niedrig halten, indem ein unstetig wirkender Regler benutzt wird. In Bild 17 ist ein elektrisch geheizter Ofen gezeichnet, wobei die Heizleistung über ein Schütz geführt ist. Als Meßeinrichtung dient ein Quecksilber-Thermometer, dessen Kapillare oben offen ist, so daß ein Draht je nach der einzustellenden Temperatur in größerer oder geringerer Länge in die Kapillare geschoben werden kann. Dieser Draht steht mit dem einen Pol der Stromquelle in Verbindung. Der andere Pol der Stromquelle wird mittels eines zweiten Drahtes durch eine Einschmelzung mit der Quecksilbersäule über die Erregerspule des Schützes leitend



verbunden. Wenn sich nun infolge der Erwärmung des Ofens das Quecksilber ausdehnt, steigt es in der Kapillare und schließt den Stromkreis. Das Schütz spricht an und unterbricht die Heizleitung. Die Temperatur sinkt langsam ab. Schließlich wird der Kontakt zwischen dem Quecksilberfaden und dem eingeführten Draht abreißen. Das Schütz schließt wieder den Heizstromkreis.

Im Bild 17a ist oben der zeitliche Verlauf der Heizung angegeben. Darunter sehen wir den Temperaturverlauf nach dem Einschalten der Ofenheizung. Beachten Sie, daß die Ofentemperatur noch eine gewisse Zeit ansteigt, obwohl der Heizstrom bereits abgeschaltet ist! Dies ist auf die geringe Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme in der Ofenwandung und die Speicherwirkung des Ofens zurückzuführen. Entsprechende Verhältnisse treten nach dem Abschalten der Heizung auf.

### **3. Kapitel: Begriffe der Regelungstechnik**

[11] Vorbetrachtungen. Wir haben eine Reihe von Reglern beschrieben, die aus recht verschiedenartigen Bauelementen bestehen. Jetzt haben wir uns mit der Aufgabe zu befassen, das den verschiedenen Ausführungen Gemeinsame herauszuarbeiten. Von den Bauelementen als solchen können wir offensichtlich nicht ausgehen, weil ein bestimmtes Bauelement innerhalb des Reglers nicht immer die gleiche Funktion auszuüben braucht. So können Sie aus Bild 9a entnehmen, daß dort Gleichstrommaschinen zu zwei ganz verschiedenen Aufgaben herangezogen werden. Die eine Gleichstrommaschine (Tachometermaschine) liefert eine der Drehzahl des Generators proportionale Spannung. Die andere Gleichstrommaschine dient als Stellmotor und gibt ein Drehmoment ab, das einerseits zum Antrieb der Last und andererseits zur Verstellung des Abgriffes am Potentiometer dient.

Wir müssen also bei der Beschreibung des Regelungssystems einen anderen Weg gehen, indem wir Begriffe verwenden, die auf die Funktion innerhalb der Anordnung hindeuten. Die Frage nach der gerätemäßigen Verwirklichung der gestellten Aufgabe bleibt dabei erst einmal offen.

Das soll an folgendem Beispiel erläutert werden. Hören wir den Begriff „Tür“, so haben wir in 1. Linie die Funktion der Tür innerhalb ihrer Umgebung im Auge. Erst in 2. Linie taucht die Frage nach Form, Material, Farbe usw. auf.

In Deutschland hat man der Frage der Terminologie schon längere Zeit Aufmerksamkeit geschenkt. Die Bemühungen um eine einheitliche Bezeichnungsweise sind von großer praktischer Bedeutung, da sich sonst die Ingenieure, die verschiedenartige Regelungsprobleme bearbeiten, nur schlecht verständigen könnten. Einen gewissen Abschluß in dieser Frage stellte das Normblatt DIN 19226 vom Januar 1954 dar. Da sich die im Normblatt gemachten Vorschläge schnell einbürgern, werden wir uns im folgenden nach dem Normblatt richten, wobei wir allerdings noch einige früher gebrauchte Begriffe parallel anführen.

**[12] Regelung.** Allen unseren Beispielen ist gemeinsam, daß wir einen physikalischen Wert entweder mit vorgegebener Genauigkeit konstant halten oder nach einer Zeitfunktion verändern wollen. Bei unseren Beispielen erfolgt der Vorgang der Regelung selbsttätig, also ohne direktes Einwirken des Menschen. Gelegentlich kommen Anordnungen vor, bei denen der Mensch in der Regelung eingeschaltet wird. Dieses Verfahren, das man Handregelung nennt, schließen wir von unseren weiteren Betrachtungen aus. Wir haben in [3] eine größere Zahl von physikalischen Größen kennengelernt, die beim heutigen Stande der Technik geregelt werden können. Zum Begriff der Regelung gehört, daß die betreffende Größe ohne Vorhandensein des Reglers schwanken kann. Größen, die aus physikalischen Gründen schon von sich aus ihren Wert beibehalten, sind also von der Behandlung ausgeschlossen. Als Beispiel führen wir hier den Siedepunkt des Wassers bei konstanten äußeren Bedingungen an.

Es wurde bereits erwähnt, daß die zu regelnde Größe (Druck, Temperatur usw.) in jedem Zeitpunkt einen bestimmten Wert annehmen soll. Um dies festzustellen, daß nämlich eine Regelung stattfindet, müssen wir daher erst messen, welchen Wert die vorgegebene physikalische Größe im betreffenden Zeitpunkt wirklich hat. Da der Sollwert der zu regelnden Größe in Abhängigkeit von der Zeit vorgeschrieben ist, muß auch die Messung des Istwertes in Abhängigkeit

von der Zeit durchgeführt werden. Im allgemeinen wird die Messung kontinuierlich vorgenommen. Doch ist es in Sonderfällen auch vertretbar, die Messung in Zeitabständen durchzuführen, wenn sich nämlich in der betrachteten Anlage der Wert der physikalischen Größe so langsam ändert, daß die punktweise Messung in erster Näherung als fortlaufend betrachtet werden kann. Auf Grund der Messung des Istwertes der zu regelnden Größe können wir feststellen, wie groß die Abweichung vom Sollwert im betrachteten Zeitpunkt ist. Das Kennzeichen einer selbsttätigen Regelung besteht nun darin, daß man die Differenz aus dem Istwert und dem Sollwert in geeigneter Weise benutzt, um mit Hilfe von apparativen Einrichtungen die erwähnte Differenz so weit zu verkleinern, daß die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird. Wir haben also einen Wirkungsablauf; denn die Differenz zwischen Soll- und Istwert wird gemessen, dem erhaltenen Meßwert entsprechend wird in den Ablauf des Vorganges eingegriffen, so daß die Differenz verkleinert wird. Auf Grund des neuen Wertes wird nun auf den Ablauf des Vorganges wieder eingewirkt usf. Es liegt also ein Prozeß vor, der sich in einem Wirkungskreis vollzieht, der Regelkreis genannt wird.

Im Normblatt wird dieser Sachverhalt folgendermaßen formuliert:

„Die Regelung (das Regeln) ist ein Vorgang, bei dem der vorgegebene Wert einer Größe fortlaufend durch Eingriff auf Grund von Messungen dieser Größe hergestellt und aufrechterhalten wird.

Hierdurch entsteht ein Wirkungsablauf, der sich in einem geschlossenen Kreis, dem Regelkreis vollzieht; denn der Vorgang läuft ab auf Grund von Messungen einer Größe, die durch ihn selbst wieder beeinflußt wird.“

Dies wollen wir noch am Beispiel Bild 13 erläutern: Im Augenblick der Inbetriebsetzung der Anlage ist zunächst eine große Abweichung zwischen Ist- und Sollwert vorhanden, wobei sich der Zeiger noch am unteren Skalenende befindet. Wegen der starren Verbindung von Muffe und Dampfeinlaßventil drosselt dieser die Dampzufuhr kaum. Die Maschine beschleunigt sich, die Drehzahl steigt, und es wird eine Verminderung der Differenz von Ist- und Sollwert gemessen, und infolgedessen wird die Dampzufuhr vermindert. Der Wirkungsablauf läuft mithin kontinuierlich von der Muffe zum Dampf-

einlaßventil und über die Maschine zur Muffe usw.

**[13] Regelkreis.** Den im vorigen Abschnitt gefundenen Wirkungskreis nennen wir also Regelkreis. Im Beispiel des Bildes 9 (selbsttätiger Kompensator) besteht der Regelkreis aus der Meßeinrichtung, in der die Differenz aus Ist- und Sollwert gebildet wird, dem Verstärker, dem Motor und der Potentiometeranordnung. Im Beispiel des Bildes 11 (selbsttätiger Trübungsmesser) bilden die Fotozelle, der Verstärker, der Motor, die Blende, die Vergleichssubstanz und der Strahlengang den Regelkreis. Ein mechanisches Beispiel, und zwar der Dampfmaschinenregler (Bild 14), wurde in anderem Zusammenhang bereits besprochen. Wir geben Ihnen nun noch zwei weitere Beispiele von Regelkreisen (Bilder 18, 19), die dem Normblatt DIN 19226 entnommen sind, auf deren nähere Beschreibung wohl verzichtet werden kann.

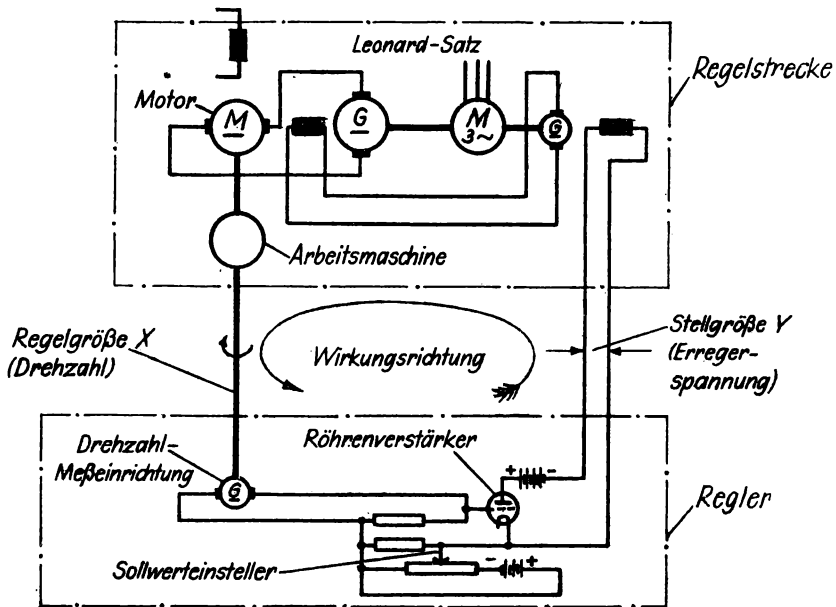


Bild 18  
Drehzahlregelkreis einer Arbeitsmaschine, die durch einen Elektromotor angetrieben wird (nach DIN 19226)

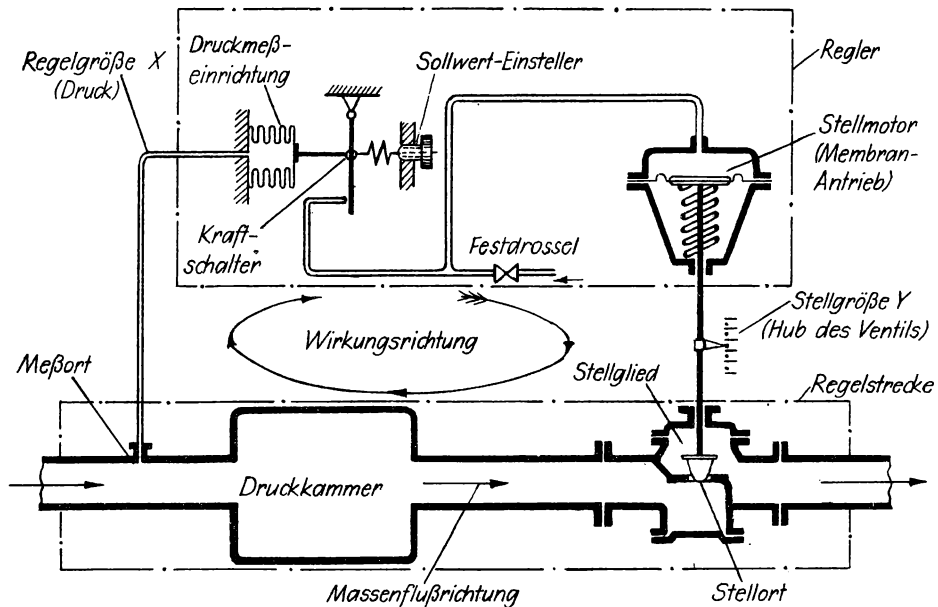


Bild 19  
Druckregelkreis in einer Rohrleitung (Stellglied im Abfluß)  
(nach DIN 19226)

In ihnen sind die wesentlichsten von uns in Zukunft benutzten Bezeichnungen enthalten. Der Druckregelkreis ist noch in einer Hin-

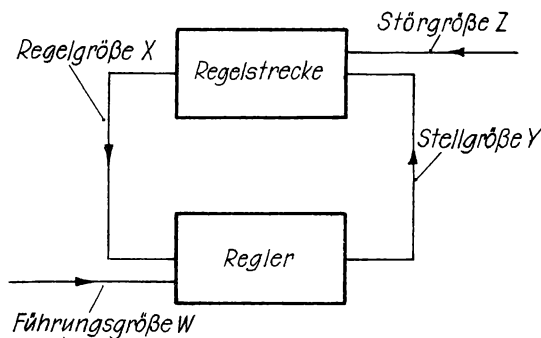


Bild 20  
Blockschaltbild des Regelkreises  
(nach DIN 19226)

sicht bemerkenswert: Das in die Druckkammer strömende Medium strömt von links nach rechts, während die Wirkungsrichtung im Uhrzeigersinn erfolgt. Die Wirkungsrichtung braucht also nicht mit der Richtung des Massenflusses zusammenzufallen. Als Schluß geben wir Ihnen die Definition des Normblattes:

„Der Regelkreis wird gebildet durch die Gesamtheit aller Glieder, die an dem geschlossenen Wirkungsablauf der Regelung teilnehmen.“

Der Regelkreis ist also ein Wirkungskreis, nicht etwa der Weg der Energie- oder Massenströme, die durch die Regelung beeinflusst werden. Seine Darstellung erfolgt zweckmäßig durch ein Blockschaltbild, siehe Bild 20."

**[14] Regelstrecke.** In dem Blockschaltbild Bild 20 ist der Regelkreis in zwei Abschnitte zerlegt. Mit dem einen Abschnitt, der Regelstrecke, müssen wir uns nun etwas näher beschäftigen. In vielen Regelanordnungen können wir einen Bereich abgrenzen, in dem eine Größe durch die Regelung beeinflusst wird. So ist in Bildern 13 ... 16 die Dampfturbine die Regelstrecke. Im Bild 3 ist das Zimmer, im Bild 7 der Heizkessel, im Bild 8 der Wasserbehälter, im Bild 18 der Leonard-Satz mit den zugehörigen Maschinen und im Bild 19 die Druckkammer die Regelstrecke. Etwas summarisch ausgedrückt kann man sagen, daß die Regelstrecke der Anlagenteil eines Regelungssystems ist, der nach Abschneiden der Einrichtung zur Regelung übrigbleibt. Es wird Ihnen aufgefallen sein, daß wir soeben nicht alle Beispiele herangezogen haben. Das liegt daran, daß es nicht in jedem Falle aus physikalischen Gesichtspunkten heraus möglich ist, die Regelstrecke gegen den Regler abzugrenzen. Bei der Abgrenzung von Regler und Regelstrecke muß man gegebenenfalls Vereinbarungen treffen. In den von uns angezogenen Beispielen ist aber die Aufteilung offenkundig. Die übrigen Beispiele sollen Sie jedoch darauf hinweisen, daß die Abgrenzung von Regelstrecke und Regler nicht immer zwanglos erfolgen kann. Die Begriffsbestimmung nach DIN 19226 lautet hier:

„Die Regelstrecke ist der Bereich einer Anlage, in welchem eine Größe durch die Regelung beeinflusst wird und deren Zustandsänderungen für den Ablauf der Regelung maßgebend sind.“

**[15] Regler.** Betrachten wir eine Dampfmaschine, so kann diese, braucht man auf konstante Drehzahl keinen besonderen Wert zu legen, ohne jede Hilfseinrichtung arbeiten. Alle Teile, die zusätzlich verwendet werden müssen, um in den Grenzen der Leistungsfähigkeit der Apparatur eine konstante Drehzahl zu bewirken, bezeichnet man als Regler. Der Regler ist die gesamte Einrichtung, die den Regelungsvorgang an der Regelstrecke bewirkt. Den Komplex Dampfturbine plus Regler können wir Dampfmaschinenregelung nennen.

Will man aber von der speziellen Ausführungsform absehen, so kann dafür auch der Ausdruck Regelungssystem benutzt werden. Leider spricht man oft aus Gründen der Kürze statt von einem Regelungssystem einfach von einem Regler, worauf hingewiesen sei. Regler und Regelstrecke sind gerichtete Glieder, d.h., sie werden nur in einer Wirkungsrichtung durchlaufen. Die Eingangsgröße bestimmt die Ausgangsgröße, während umgekehrt die Ausgangsgröße durch die Eingangsgröße nicht nennenswert beeinflusst wird. <sup>1)</sup>

Der Regler im Sinne dieses Abschnittes enthält zumindest eine Meßeinrichtung und ein Stellglied.

1. Meßeinrichtung. In unseren Beispielen haben wir in Bild 3 die Temperaturmeßeinrichtung, in Bild 9 den Spannungsvergleich. Beim Trübungsmesser Bild 11 vergleichen wir die Intensität in den beiden Strahlengängen. In Bild 10 liegt die Meßanordnung im Eingangsteil des Verstärkers. Der mechanische Feuerzugregler (Bild 7) besitzt eine Temperaturmeßeinrichtung. Bei der Wasserstandsregelung (Bild 8) dient der Schwimmer als Meßorgan, während bei der Dampfturbinenregelung (Bilder 13 ... 16) die Drehzahl mit Hilfe eines Fliehkraftpendels gemessen wird.

2. Stellglied. Bei den Stellgliedern haben wir ebenfalls recht verschiedenartige Ausführungsformen. Wir geben Ihnen anschließend eine Tabelle (Tafel 1), die die von uns in den Beispielen angewandten Stellglieder enthält. Weiter finden Sie darin die entsprechenden Stellgrößen, die Ausgangsgrößen der Regler. Außerdem enthält die Tabelle eine Übersicht über die Wirkung einer Stellgrößenänderung und schließlich den Stellstrom.

---

<sup>1)</sup> So wirkt in Bild 3 die Zimmertemperatur zwar auf die Temperaturmeßeinrichtung, während aber die Temperaturmeßeinrichtung auf die Zimmertemperatur keinen merklichen Einfluß ausübt. Die Gitterspannung einer Elektronenröhre übt auf den Anodenstrom einen Einfluß aus, während dieser die Gitterspannung praktisch nicht beeinflusst.

Tafel 1				
Bild_Nr.	Stellglied	Stellgröße	Wirkung einer Stellgrößenänderung	Stellstrom
3, 7	Klappe	Drehwinkel	Änderung des Durchgangsquerschnitts	Luftdurchfluß
8	Drossel	Hub	Änderung des Durchgangsquerschnitts	Wasserdurchfluß
13, 14, 15, 16	Ventil	Hub	Änderung des Durchgangsquerschnitts	Dampfdurchfluß
19	Ventil	Hub	Änderung des Durchgangsquerschnitts	Luftdurchfluß
9	Potentiometer-schleifer	Verschiebung	Änderung der abgegriffenen Spannung	-
10, 18	letzte Verstärker-röhre	Gitterspannung	Änderung des Anodenstromes	Anodenstrom
11	Blende	Drehwinkel	Änderung des Lichtstromes	Lichtstrom



**1161** Weitere Bemerkungen zum Regelkreis. In diesem Abschnitt finden Sie noch einige Begriffe, die für die Beschreibung von Reglern üblich sind und die zum Teil, wenn es sich zwanglos ergab, bereits verwendet wurden. Im Normblatt DIN 19226 sind für verschiedene Größen auch Buchstaben festgelegt, auf deren Anführung wir jedoch verzichten, da sich in der Praxis wegen der geringen Zahl der verfügbaren Buchstaben doch immer wieder Schwierigkeiten ergeben.

**1. Regelgröße**

„Die Regelgröße ist die Größe, die geregelt wird. Jeder Regler regelt nur die Größe, die er unmittelbar mißt.“

In unseren Beispielen (Bilder 7 ... 19) finden Sie an Regelgrößen: Temperatur, Druck, elektrische Spannung, Drehzahl und Durchlässigkeit (Trübung).

**2. Istwert der Regelgröße**

„Der Istwert der Regelgröße ist der Wert, den diese Größe jeweils tatsächlich hat.“

**3. Sollwert**

„Der Sollwert ist der am Sollwerteinsteller des Reglers eingestellte Betrag der Regelgröße.“

**4. Führungsgröße**

„Die Führungsgröße ist die Größe, die den augenblicklichen Wert des Sollwertes am Regler bestimmt.“

Wenn wir in Bild 9 (Kompensator) die Größe  $X$  in Abhängigkeit von der Zeit ändern, so bewegt sich die Last nach dem gleichen Zeitgesetz. Die Größe  $X = X(t)$  ist dabei die Führungsgröße.

Die Führungsgröße wirkt also von außen auf den Regelkreis ein und löst Regelvorgänge aus. Dabei beeinflußt aber der Regelvorgang die Führungsgröße nicht.

**5. Störgrößen.** Während es sich bei der Führungsgröße um eine Einwirkung mit vorgegebener Zeitabhängigkeit handelt, wirken aber auf den Regelkreis auch noch andere Größen von außen ein, die wir insgesamt als Störgrößen bezeichnen.

In unseren Beispielen haben wir bei der Drehzahlregelung (Bilder 13 ... 16) und bei der Spannungsregelung (Bild 18) Belastungsschwankungen zu erwarten, beim Wasserstandsregler (Bild 8) Wasserentnahme aus dem Behälter. Beim Druckregler (Bild 19) treten etwa Schwankungen des Vordruckes auf.

## 6. Regelabweichung

„Die Regelabweichung ist die Abweichung des Istwertes der Regelgröße vom Sollwert.“

„Bleibende Regelabweichung ist die im Beharrungszustand der Regelgröße vorhandene Regelabweichung.“

Hierzu ist zu bemerken, daß die bleibende Regelabweichung sowohl durch die Eigenschaften der einzelnen Glieder (Lose- und Reibungsfehler usw.) als auch durch die Reglerbauart (z.B. Proportionalabweichung beim P-Regler) bedingt ist.

**[17]** Haupttypen von Reglern. Im vorhergehenden Abschnitt lernten Sie die verschiedenen Teile eines Reglers und deren Aufgaben kennen. Bevor wir nun dieses Kapitel abschließen, wollen wir noch die Haupttypen von Reglern zusammenstellen.

Teilt man die Regler nach ihren Aufgaben ein, so kann man zwischen Festwert- und Folgeregler unterscheiden:

„Eine Festwertregelung liegt vor, wenn der Sollwert fest eingestellt ist. Der Sollwert kann durch Bedienung des Sollwerteinstellers verstellbar sein.“

Als Beispiel für die Festwertregelung nennen wir die Wasserstandsregelung (Bild 8), die Drehzahlregelung der Dampfturbine (Bild 13 ... 16), die Druckregelung (Bild 19) und die Feuerzugregelung (Bild 7).

Die andere Gruppe sind die Folgeregler.

„Bei einer Folgeregelung folgt der Sollwert dem Wert einer veränderlichen Größe, der Führungsgröße, die den Wert des Sollwertes bestimmt und die von der Regelung nicht beeinflußt wird.“

Bei den Folgereglern kann man nun zwei Untergruppen bilden, nämlich Zeitplanregler und Nachlaufregler.

Bei der Zeitplanregelung wird der Sollwert nach einem vorgegebenen Zeitplan selbsttätig geändert, wie z.B. bei der Schnittgeschwindigkeitsregelung, bei der die Drehzahl von der Supportstellung abhängig gemacht wird. Temperaturregler für Glühöfen arbeiten ebenfalls oft als Zeitplanregler. Die Sollwertänderung kann man etwa dadurch vornehmen, daß eine Kurvenscheibe einen Potentiometerschleifer in vorgegebener Abhängigkeit von der Zeit verstellt.

Nachlaufregler verwendet man u.a. für Regelaufgaben, bei denen die Geberstelle praktisch kein Moment abgeben kann, aber ein Moment benötigt wird, um einen hinter dem Nachlaufregler liegenden Geräteteil zu betätigen. Der Kompensator (Bild 9) kann als Nachlaufregler aufgefaßt werden, wenn  $X = X(t)$  zeitabhängig gemacht ist. Auch den Trübungsmesser (Bild 11) können wir als Nachlaufregler ansehen.

Die Übertragung der Werte eines Kreiselkompasses an verschiedene Stellen im Schiff wird ebenfalls durch einen Nachlaufregler bewirkt.

Eine andere Aufgliederung der Regelungssysteme kann man vornehmen, indem man sie in Regler ohne Hilfsenergie und solche mit Hilfsenergie einteilt. Verlangt man von einem Regelungssystem nur eine geringe Genauigkeit, so kann man das Stellglied direkt von der Meßeinrichtung betätigen, sofern diese die zur Verstellung notwendige Energie abgeben kann. Ein solcher Regler arbeitet also ohne Hilfsenergie. Beispiele hierfür finden Sie in den Bildern 7, 8 und 13.

Kann die Meßeinrichtung keine merkliche Leistung abgeben, was häufig dann der Fall ist, wenn höhere Genauigkeiten gefordert werden, so muß man zwischen die Meßeinrichtung und das Stellglied einen Verstärker einfügen. Dieser benötigt eine besondere Energiequelle. In diesem Falle spricht man von einem Regler mit Hilfsenergie. Oft benötigt man ein weiteres Glied, den Stellmotor, um die Ausgangsgröße des Verstärkers (elektrische Leistung, Druck usw.) in eine mechanische Bewegung umzusetzen, sofern der Eingriff des Stellgliedes auf mechanischem Wege erfolgt. Hydraulische Verstärker finden Sie in den Bildern 14, 15 und 16. Einen pneumatischen Verstärker zeigt Bild 19, während elektrische Verstärker in den Bildern 9, 9a, 9b, 10, 11 und 18 vorkommen.

Schließlich können wir die Regler auch noch nach ihrer Wirkungsweise einteilen. Wir müssen uns an dieser Stelle auf eine Aufzählung beschränken und kommen später auf diese Gruppen ausführlicher zurück. Wir finden proportionalwirkende Regler (P-Regler), die am häufigsten vorkommen, siehe Bilder 9, 13.

Früher nannte man sie statische Regler. Weiterhin lernten wir im Beispiel des Dampfturbinenreglers Bild 14 einen Vertreter der Gruppe der integralwirkenden Regler (I-Regler) kennen.

Die Bezeichnung ~~a~~statische Regler ist veraltet. Es gibt weiterhin auch Regler, bei denen sowohl eine proportionale als auch eine integrale Wirkung auftritt (siehe Bild 15). Einen solchen Regler nennt man PI-Regler, während man früher von Isodrome sprach. In vielen Reglern finden wir auch noch den sogenannten D-Einfluß. Hierbei wird von der Regelabweichung der Differentialquotient nach der Zeit gebildet und zusätzlich benutzt, um die Stellgröße zu beeinflussen. Man nennt solche Anordnungen auch Regler mit Vorhalt. In Beispiel Bild 9b hatten wir einen P-Regler mit D-Einfluß, kurz einen PD-Regler, betrachtet.

Endlich gibt es auch noch PID-Regler, die wir hier nur der Vollständigkeit halber erwähnen wollen.

Bei allen vorangegangenen Reglertypen handelt es sich um stetige Regler, bei denen man die Stellgröße stetig ändern kann. Es gibt aber eine große Zahl von Reglern, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Bei ihnen kann die Stellgröße nur bestimmte Werte annehmen. Am häufigsten kommen in dieser Gruppe Regler vor, bei denen nur zwei Werte für die Stellgröße möglich sind. Solche Anordnungen nennt man Zweipunkt-Regler. Gelegentlich spricht man auch von „Ein - Aus-“ oder „Schwarz - Weiß“ Regelung. In Bild 17 gaben wir Ihnen ein Beispiel für einen derartigen Zweipunkt-Regler.

Für diese und ähnliche Anordnungen ist charakteristisch, daß die Regelaufgabe mit geringem Aufwand gelöst wird. Bei erhöhtem Aufwand kann man übrigens mit unstetigen Reglern sehr gute Ergebnisse erzielen.

#### **4. Kapitel: Übertragungsglieder und Aufbau eines Reglers aus diesen Gliedern**

In den einleitenden Kapiteln haben wir eine Anzahl von Reglern beschrieben, um einen Einblick zu bekommen, wie verschieden ein Regler aufgebaut sein kann. Wir haben weiterhin die gemeinsamen Merkmale der Regler herausgearbeitet und Begriffe geprägt, um Regler beschreiben zu können, ohne auf die spezielle Ausführungsform der einzelnen Bauteile angewiesen zu sein. Mit einer solchen qualitativen Beschreibung eines Reglers können wir uns jedoch nicht begnügen.

**[18] Übertragungsglieder des Regelkreises.** Wir erinnern uns nun an die Festsetzung (S.36), daß die einzelnen Bestandteile des Regelkreises als rückwirkungsfrei betrachtet werden können, weil sie nur in einer Richtung wirken. Wir können nun den Regelkreis an all den Stellen aufschneiden, an denen Rückwirkungsfreiheit vorhanden ist. Wenn wir dies bei unseren Beispielen durchführen, so erhalten wir eine Reihe von Meßeinrichtungen, Verstärkern usw., die in den Tafeln 2 ... 5 zusammengestellt sind, wobei wir noch einige häufig verwendete Ausführungen, die sich in unseren Beispielen nicht finden, hinzugefügt haben.

In Tafel 2 sind einige Meßwerke und Fühler für Druck, Durchfluß, Flüssigkeitsstand, Drehzahl, Temperatur und elektrischen Strom zusammengestellt.

Tafel 3 enthält einige gerätetechnische Ausführungsformen von Abgriffsystemen und Übertragungsmitteln.

Tafel 4 zeigt Ihnen einige gerätetechnische Ausführungsformen von Stellmotoren.

In Tafel 5 finden Sie einige gerätetechnische Ausführungsformen von Kraftschaltern.

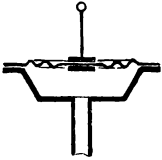
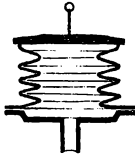

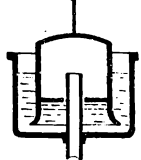
Die Darstellungen in den Tafeln 2 ... 5 sind entnommen aus W. OPPELT, Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge.

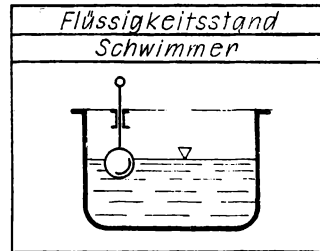
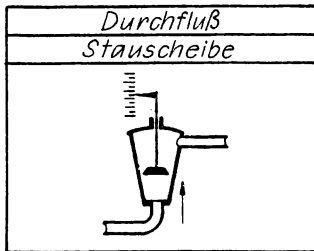
Bei der vorliegenden Ordnung der Übertragungsglieder in Gruppen haben wir nur die Funktion im Regelkreis berücksichtigt.

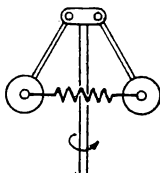

### **[19] Zeitverhalten von Übertragungsgliedern**

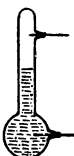


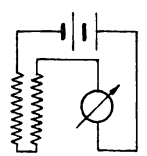
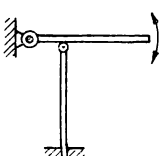
Nun können wir aber die Übertragungsglieder auch nach einem anderen Gesichtspunkt einteilen, nämlich nach ihrem Zeitverhalten. Da es sich bei der Regelung um ein dynamisches Problem handelt und sich der Regelkreis aus rückwirkungsfrei gedachten Übertragungsgliedern zusammensetzt, ist offenbar das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises maßgebend durch das der Übertragungsglieder bedingt. Wir wollen im Folgenden das Zeitverhalten einiger einfacher Glieder betrachten. Wir nehmen jeweils an, daß sich das entsprechende System zunächst in einem stationären Zustand befindet. Im Zeitpunkt  $t = t_0$  legen wir eine sprungförmige Störung, im speziellen Falle vom Betrage 1, an das System.

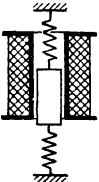
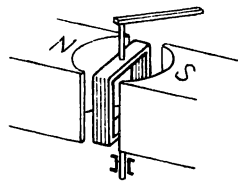
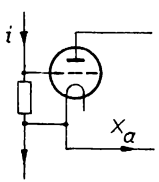
**Tafel 2: Ausführungsformen von Meßwerken und Fühlern (nach OPPELT)**

Druck			
Plattenfeder	Wellrohr	Rohrfeder	Tauchglocke
			

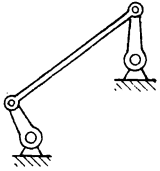
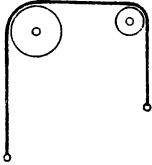
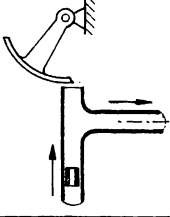
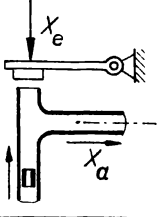
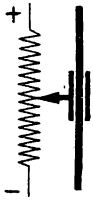
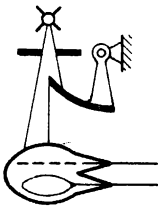
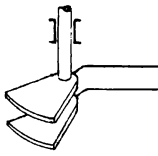
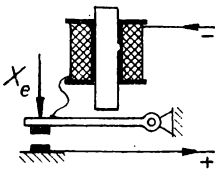


Drehzahl Meßdynamo		
Fliehpindel	Schaltkontakt mit Glättungsmitteln	
		

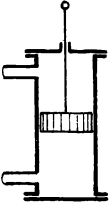
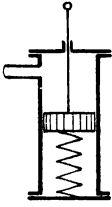
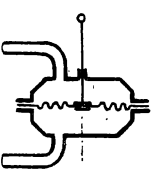
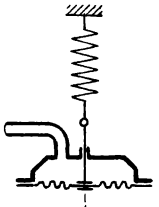
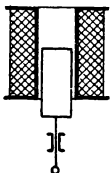
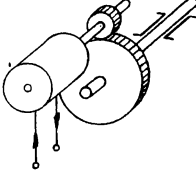
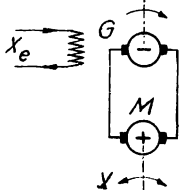
Temperatur				
Kontakt- Thermometer	Bimetall	Thermo- Element	Widerstands- Thermometer	Ausdehnungs- stab
				

elektrischer Strom		
Weicheisen- Meßwerk	Drehpul - Meßwerk	Röhrenverstärker
		

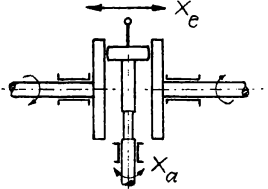
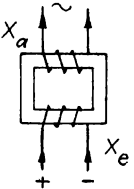
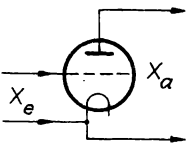
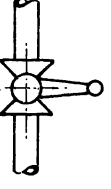
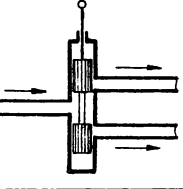
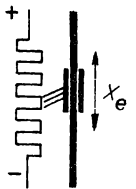
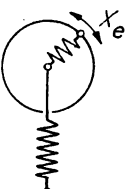
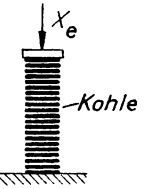
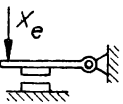
**Tafel 3: Ausführungsformen von Abgriffsystemen und Übertragungsmitteln (nach OPPELT)**

mechanisch		pneumatisch - hydraulisch	
Gestänge	seile	Blende (Kräftearm)	Drossel (Wegarm)
			
elektrisch			
Widerstand	Fotozelle	Kapazität	Kontaktdruck-Kompensation
			

**Tafel 4: Ausführungsformen von Stellmotoren (nach OPPELT)**

hydraulisch			
Kolben		Membrane	
			
elektrisch			
Magnet	Motoren		
	Stromschaltung	Leonard-Satz	
			

Tafel 5: Ausführungsformen von Kraftschaltern (nach OPPELT)

mechanisch – mechanisch		elektrisch – elektrisch	
Kupplung		Drossel, Trafo	Röhre oder Stromtor
			
mechanisch – hydraulisch		mechanisch – elektrisch	
Ventil	Drosselwirkung	Widerstände	Drehtrafo
			
		Kohle	Kontakte
			

Wir können auch sagen, daß die Eingangsgröße  $x_E$  zur Zeit  $t = 0$  sprungartig um einen bestimmten Betrag geändert wird, wobei die Änderung von  $x_E$  bis  $t = \infty$  bestehen bleibt. Uns interessiert dann bei den Beispielen der zeitliche Verlauf von  $x_A$ , durch den die betrachtete Anordnung charakterisiert ist.

I. Übertragungsglied ohne Zeitabhängigkeit. Die einfachste Abhängigkeit zwischen der Eingangsgröße  $x_E$  und der Ausgangsgröße  $x_A$  bei einem Übertragungsglied ist offenbar dann vorhanden, wenn zwischen beiden Größen Proportionalität besteht. Die Ausgangsgröße ist in diesem Falle bis auf einen Maßstabsfaktor der Eingangsgröße gleich. Wenn sich  $x_E$  nach einer Sprungfunktion ändert, so ändert



sich auch  $x_A$  entsprechend. Wir schreiben also

$$x_A = k x_E \quad (I)$$

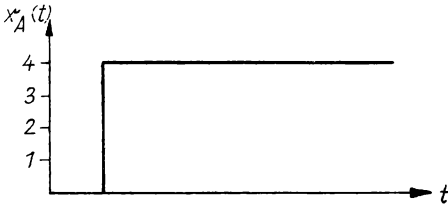
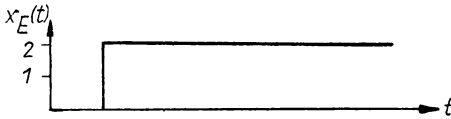


Bild 21  
Übergangsfunktion von Reglern  
ohne Zeitabhängigkeit

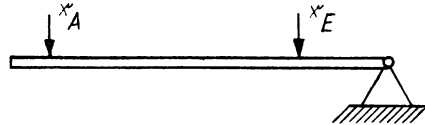


Bild 22  
Starrer Hebel als Beispiel  
eines Übertragungsgliedes  
ohne Zeitabhängigkeit

Wenn  $x_E$  ein Zeitverhalten zeigt wie in Bild 21 oben, so ergibt sich ein zeitlicher Verlauf wie in Bild 21 unten. In diesem speziellen Falle ist  $k = 2$ .

Als Glied ohne zeitliche Verzögerung können wir mit technischer Genauigkeit einen starren Hebel (Bild 22) ansehen. Auch Elektronenröhren arbeiten bis zu sehr hohen Frequenzen praktisch trägheitslos. Auf weitere Beispiele verzichten wir.

II. Übertragungsglied mit Verzögerung 1. Ordnung. Bei einer Reihe von Übertragungsgliedern können wir feststellen, daß sie speichernde Wirkung besitzen. Die hier vorliegenden Verhältnisse werden zunächst an einem mechanischen Beispiel erläutert. Über eine Rohrleitung mit dem Strömungswiderstand  $W$  soll in einem Behälter vom Volumen  $S$  der Gasdruck erhöht werden (Bild 23). Im Zeitpunkt  $t = 0$  wird das Ventil ( $V$ ) in der Zuleitung zum Behälter plötzlich geöffnet. Wir geben also auf das System eine sprungförmige Störung und beobachten, wie sich das System verhält. Die Eingangsgröße ist der Druck  $x_E$  am Anfang der Rohrleitung (hinter dem Ventil). Die Ausgangsgröße ist der Druck  $x_A$  im Behälter. Die Gasmenge  $q$ , die in der Zeiteinheit in den Behälter einströmt, ist proportional  $x_E - x_A$  und umgekehrt proportional dem Strömungswiderstand  $W$ .

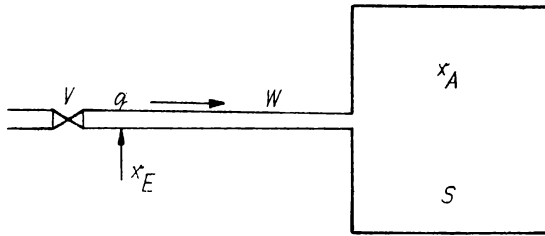


Bild 23  
Übertragungsglied mit Zeitabhängig-  
keit 1. Ordnung

Damit ergibt sich

$$q = (x_E - x_A) \cdot \frac{1}{W}$$

Weiterhin wird sich  $x_A$  offenbar um so schneller ändern, je kleiner der Inhalt  $S$  des Speichers ist, d.h. also,

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{q}{S} \quad \text{bzw.}$$

$$x_A = \frac{1}{S} \int q \, dt$$

Unter Benutzung der vorhergehenden Gleichung erhalten wir

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{q}{S} = \frac{x_E - x_A}{SW}$$

Wir erhalten also die Differentialgleichung

$$SW \frac{dx_A}{dt} + x_A = T \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E \quad (\alpha)$$

Wir betrachten nun noch ein elektrisches Beispiel (Bild 24).

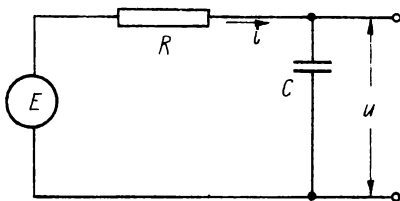


Bild 24  
Elektrisches Glied mit  
Zeitabhängigkeit 1. Ordnung

Wir erhalten zunächst die Beziehung

$$i = C \frac{du}{dt},$$

andererseits finden wir

$$u = E - Ri$$

Aus den beiden vorangegangenen Gleichungen folgt

$$u = E - RC \frac{du}{dt}$$

$$\text{oder} \quad RC \frac{du}{dt} + u = E \quad \text{bzw.} \quad T \frac{du}{dt} + u = E \quad (\beta)$$

Ersetzen wir  $u$  durch  $x_A$  und  $E$  durch  $x_E$ , so erhalten wir

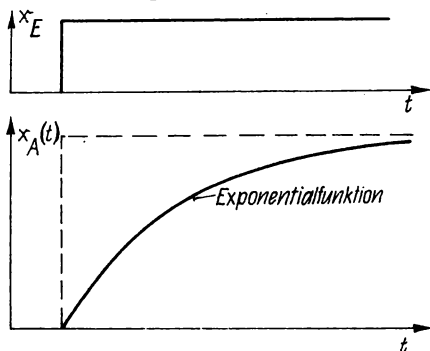
$$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E \quad (\text{II})$$

Wir sehen, daß sich die Gleichungen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) vollkommen entsprechen. Wie man diese Gleichung integriert, entnehmen Sie bitte den Lehrbriefen „Höhere Mathematik“ Nr. 15 und 16, 77. und 78. Kapitel. Als Lösung der Gl. (II) ergibt sich

$$x_A = x_E \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

wenn  $x_E$  als Sprungfunktion gegeben ist.

Bild 25 zeigt Ihnen die hier vorliegenden Verhältnisse. Die obige Differentialgleichung können wir etwas allgemeiner schreiben:



$$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

Der Differentialquotient  $\frac{dx_A}{dt}$  ist mit einer Zeitkonstante multipliziert, so daß die beiden Glieder auf der linken Seite die gleiche Dimension besitzen. Da  $x_E$  nicht immer die gleiche Dimension wie  $x_A$  hat, muß man genau genommen  $x_E$  mit einem dimensionsbehafteten

Faktor  $k$  multiplizieren, damit die rechte Seite der Gleichung die gleiche Dimension wie die linke erhält. Das ist im Folgenden in den Fällen zu berücksichtigen, in denen die Größe  $k = 1$  gesetzt ist und deshalb nicht ausdrücklich in der Gleichung erscheint.

Wir haben eben die Differentialgleichung, die das zeitliche Verhalten der vorliegenden Anordnung beschreibt, abgeleitet. Häufig steht man jedoch vor der umgekehrten Aufgabe. Man hat an ein Übertragungsglied eine sprungförmige Störung vom Betrage  $x_E$  gelegt und den Verlauf von  $x_A$  registriert und vermutet, daß es sich bei der erhaltenen Kurve um eine Exponentialfunktion handelt.

Um dies festzustellen, übertragen wir die aufgenommene Kurve auf ein Blatt, bei dem die Zeitachse linear und die Ordinatenachse logarithmisch geteilt ist. Ergibt sich eine geradlinige Abhängigkeit, so handelt es sich bei der vorgegebenen Kurve um eine Exponentialfunktion. Wir haben nun die Koeffizienten der zugehörigen Differentialgleichung zu ermitteln (Bild 26).

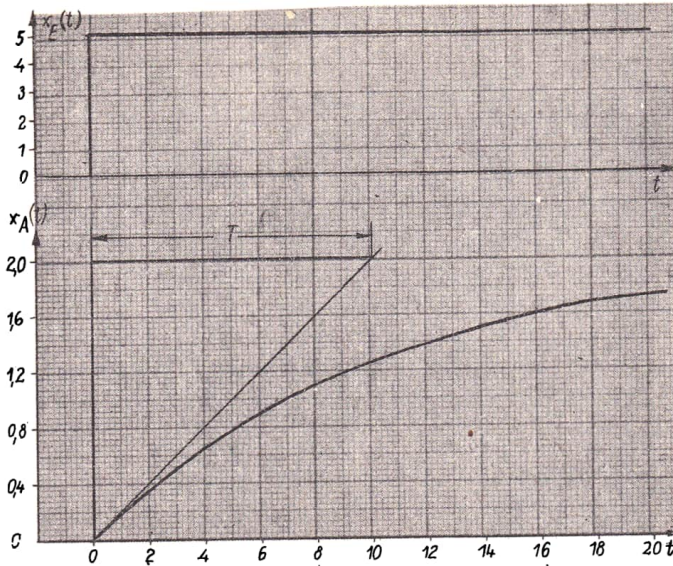


Bild 26  
Experimentell aufgenommene Übergangs-  
funktion

Wir benutzen dazu  
wieder die Gleichung

$$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

Nach genügend langer Zeit ist das  
Glieder mit  $\frac{dx_A}{dt}$ , verschwunden, und wir  
finden

$$x_A = k x_E$$

Weiter ist  
im Nullpunkt die  
Abweichung  $x_A$  ver-  
schwindend klein,  
so daß wir erhalten

$$T \frac{dx_A}{dt} = k x_E$$

Dieses Verfahren wird noch an einem Zahlenbeispiel (Bild 26) er-  
läutert. Für  $T \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$x_A = k x_E = 2 = 5 \cdot k; \quad k = 0,4$$

Andererseits ergibt sich aus der Neigung der Tangente  $\frac{dx_A}{dt} = 0,2$

und damit

$$T = \frac{k x_E}{\frac{dx_A}{dt}} = \frac{2}{0,2} = 10$$

Damit ergibt sich jetzt für den Vorgang die folgende Differential-  
gleichung

$$10 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 0,4 x_E$$

Schließlich wollen wir noch einige Beispiele für Bauelemente mit  
Verzögerung 1. Ordnung anführen:

Gasdruckregelstrecke von Bild 19, in Annäherung Thermoelement  
(mit Schutzrohr), federbelasteter Membranantrieb.

III. Übertragungsglied mit Verzögerung 2. Ordnung. Zu einem Über-  
tragungsglied mit Verzögerung 2. Ordnung kommt man, wenn zwei  
Glieder mit Verzögerung 1. Ordnung hintereinandergeschaltet sind  
(Bild 27).

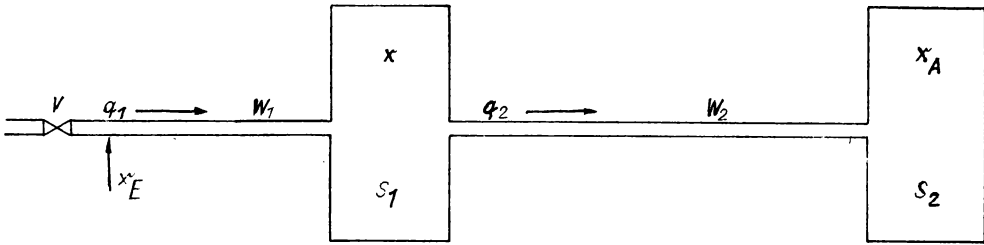


Bild 27  
Übertragungsglied mit Zeitabhängigkeit 2. Ordnung

Wir betrachten nun zunächst das mechanische Beispiel, wobei wir jetzt zwei Speicher mit den Volumina  $S_1$ , bzw.  $S_2$  und den Rohrleitungen mit den Widerständen  $W_1$  und  $W_2$  zusammenbauen. Wir erhalten als Speichergleichungen die Beziehungen

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{1}{S_2} q_2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{S_1} (q_1 - q_2)$$

Weiterhin erhalten wir entsprechend der Gleichung  $q = (x_E - x_A) \frac{1}{W}$  (vgl. S.47) die Beziehungen

$$x_E = W_1 q_1 + x \quad \text{und} \quad x = W_2 q_2 + x_A$$

Eliminiert man aus den vier Gleichungen die Größen  $q$ ,  $q_2$ ,  $x$ , dann erhält man

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} W_1 S_1 W_2 S_2 + \frac{dx_A}{dt} (W_1 S_1 + W_2 S_2 + W_1 S_2) + x_A = x_E;$$

verwenden wir die Abkürzungen

$$T_1 = W_1 S_1; \quad T_2 = W_2 S_2; \quad T_{12} = W_1 S_2,$$

so ergibt sich schließlich

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} T_1 T_2 + \frac{dx_A}{dt} (T_1 + T_2 + T_{12}) + x_A = x_E \quad (\text{III})$$

Auch hier soll ein analoges elektrisches Beispiel die Anschauung vertiefen. Wir betrachten die Schaltung nach Bild 28 und erhalten die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \frac{1}{C_1} \int i_2 dt = E \\ -\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0 \end{array} \right\}$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( R_1 + \frac{1}{pC_1} \right) i_1 + \left( -\frac{1}{pC_1} \right) i_2 = E \\ \left( -\frac{1}{pC_1} \right) i_1 + \left( R_2 + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2} \right) i_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Um  $i_2$  zu bestimmen, bilden wir die entsprechenden Determinanten, es ergibt sich

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{pC_1} & E \\ -\frac{1}{pC_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{pC_1} & -\frac{1}{pC_1} \\ -\frac{1}{pC_1} & R_2 + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix}} = \frac{EpC_2}{p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2)p + 1}$$

Da  $u = p C_2 i_2$ , erhalten wir schließlich

$$u = \frac{E}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})p + 1}$$

mit

$$R_1 C_1 = T_1; \quad R_2 C_2 = T_2; \quad R_1 C_2 = T_{12}$$

oder schließlich

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} T_1 T_2 + \frac{dx_A}{dt} (T_1 + T_2 + T_{12}) + x_A = x_E$$

Auch in bezug auf die Integration dieser Gleichung müssen wir auf die Lehrbriefe „Höhere Mathematik“ Nr. 15 und 16 verweisen.

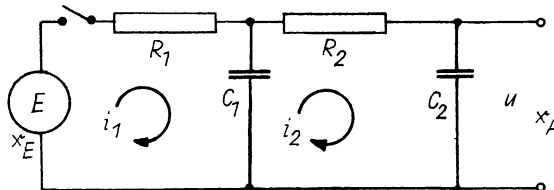


Bild 28

Elektrisches Glied mit Zeitabhängigkeit 2. Ordnung

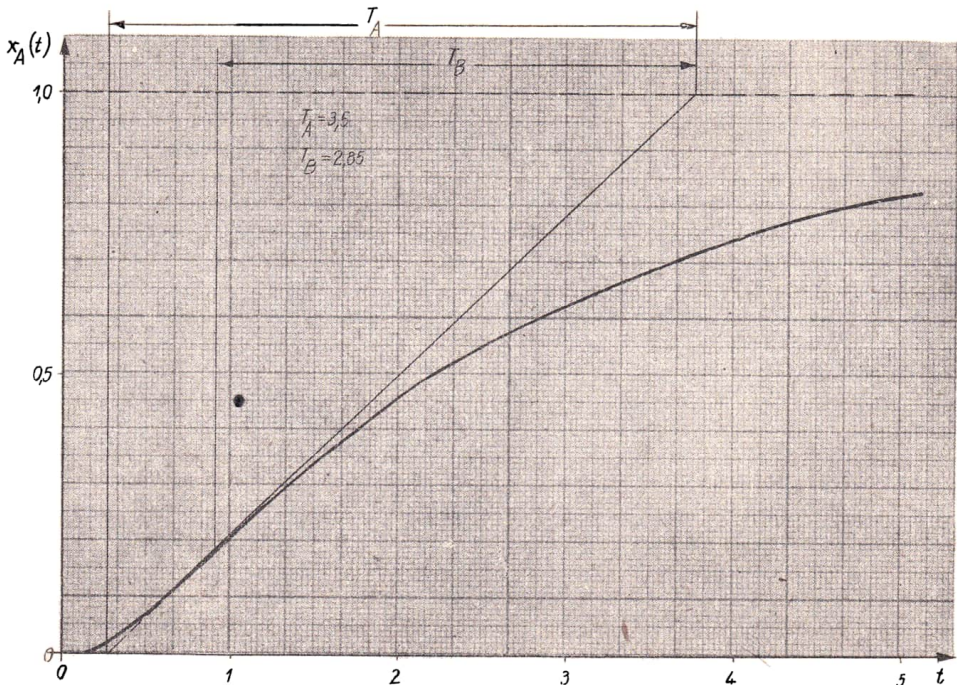


Bild 29  
Experimentell aufgenommene Kurve für  $x_A(t)$

Legen wir eine Sprungfunktion an ein derartiges Übertragungsglied, so erhalten wir die in Bild 29 dargestellte Kurve.

Wir ziehen nun die Wendetangente, diese schneidet die Abszissenachse und die dazu im Abstande 1 verlaufende Parallele. Die den beiden Schnittpunkten zugeordnete Zeitdifferenz nennen wir  $T_A$  und den Abschnitt vom Wendepunkt bis zum oberen Schnittpunkt  $T_B$ .

Um zu einer Auswertung zu gelangen, schreiben wir die Gleichung (III) in der folgenden Form

$$T_1 T_2 \cdot \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right) x_A = k x_E \quad ,$$

dann gilt, wobei wir die Herleitung der Beziehungen unterdrücken müssen

$$T_B = T_1' + T_2'$$

und 
$$T_A = T_1' \left( \frac{T_2'}{T_1'} \right)^{\frac{T_2'}{T_2' - T_1'}} \quad \text{oder} \quad \left( \frac{T_1'}{T_A} \right)^{\left( \frac{T_2'}{T_A} \right) \frac{\frac{T_2'}{T_A}}{\frac{T_2'}{T_A} - \frac{T_1'}{T_A}}} = 1$$

Die letztere Beziehung ist im Bild 30 dargestellt.

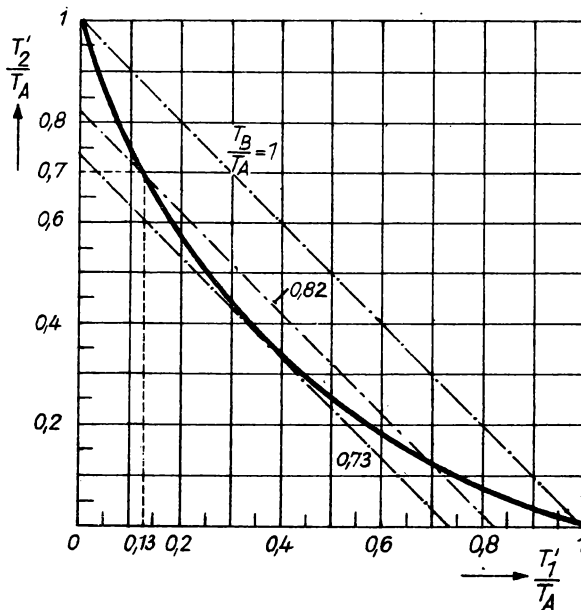


Bild 30

Die Bestimmung der Zeitkonstanten  $T_1'$  und  $T_2'$  eines Übertragungsgliedes zweiter Ordnung aus den Kenngrößen  $T_A$  und  $T_B$  der Übergangsfunktion (nach OLBENBOURG/SARTORIUS)

Die vorstehende Beziehung wollen wir nun benutzen, um die Werte für  $T_1$  und  $T_2$  zu erhalten, vorausgesetzt, daß sich die Zeitabhängigkeit von Bild 29 nach der Differentialgleichung (III) beschreiben läßt. Dem Bild 29 entnehmen wir, daß  $\frac{T_B}{T_A} = 0,82$  ist.



Aus Bild 30 erhalten wir  $\frac{T_2'}{T_A} = 0,7$  und  $\frac{T_1'}{T_A} = 0,13$ , d.h., es er-

gibt sich:  $T_2' = 2,45$ ;  $T_1' = 0,46$  und

$T_1' T_2' = T_1 T_2 = 1,12$  und damit  $(p + \frac{1}{0,46}) \cdot (p + \frac{1}{2,45}) = p^2 + 2,59p + 0,89$

oder  $1,12 \left( \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 2,59 \frac{dx_A}{dt} + 0,89 x_A \right) = 1$

Übertragungsglieder, die dieser Gleichung genau gehorchen, kommen verhältnismäßig selten vor. Man benützt aber die Gleichung (III) öfter, um für thermische Glieder eine angenäherte Gleichung zu erhalten. Als Beispiel nennen wir hier das Gasausdehnungsthermometer.

IV. Übertragungsglied mit Verzögerung 1. Ordnung und zusätzlicher Massenwirkung (Schwingungsglied). Wir betrachten die Schaltung nach Bild 31a.

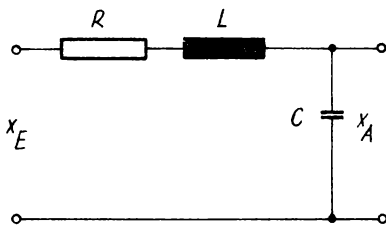


Bild 31a  
Elektrische Schaltung, die Gleichung (IV) gehorcht

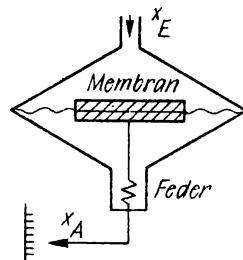


Bild 31b  
Mechanische Anordnung, die Gleichung (IV) gehorcht

Als Beziehung zwischen  $x_E$  und  $x_A$  erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} LC + \frac{dx_A}{dt} RC + x_A = x_E,$$

mit  $T_1 = RC$  und  $T_2 = \frac{L}{R}$  geht sie über in

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_1 \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E \quad (IV)$$

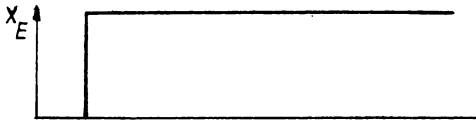
Als Wurzeln der charakteristischen Gleichung ergeben sich

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2T_2} + \sqrt{\frac{1}{4T_2^2} - \frac{1}{T_1T_2}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2T_2} - \sqrt{\frac{1}{4T_2^2} - \frac{1}{T_1T_2}}$$

Wenn  $T_1$  genügend klein ist, die Wurzel also imaginär wird, ergibt sich

$$\lambda_1 = -\delta_0 + j\omega_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\delta_0 - j\omega_0$$

Wir nennen eine solche Anordnung Schwingungsglied; denn hier kann nach einer sprunghaftigen Änderung der Eingangsgröße der Vorgang am Ausgang in Form von gedämpften Sinusschwingungen vor sich gehen. Wir bemerken noch, daß wir bei (III) die Zeitkonstanten nicht so wählen können, daß gedämpfte Schwingungen entstehen. Dagegen erhalten wir im Fall (IV) bei passender Wahl von  $T_1, T_2$  Lösungen der Differentialgleichung, die denen der Gleichung (III) entsprechen.



Derartige Anordnungen nach (IV) sind Ihnen aus der Mechanik wohl bekannt. Dort wird die Gleichung in der folgenden Form geschrieben

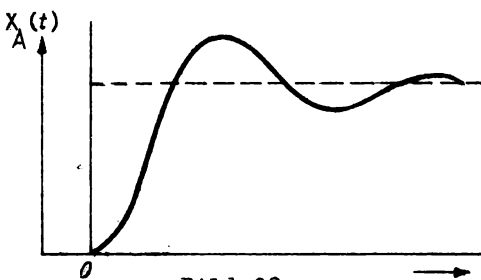


Bild 32  
Übergangsfunktion der Gleichung (IV) entsprechend

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + D \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E ;$$

dabei bedeutet  $m$  die Masse,  $D$  die Dämpfung.

Nach Integration der Gleichung (IV) (vgl. Höhere Mathematik, 15. und 16. Lehrbrief) erhält man für  $x_A$  den folgenden zeitlichen Verlauf.

$$x_A(t) = 1 - e^{-\delta_0 t} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t - \theta),$$

wobei

$$\theta = \arctan \frac{\delta_0}{\omega_0} \quad \text{ist.}$$

Nun wollen wir hier noch die Übergangskurve nach Bild 33 betrachten. Wir vermuten, daß wir sie mittels Gleichung (IV) beschreiben können.

Zunächst können wir aus der Schnelligkeit, mit der sich die Amplitude der Halbwellen verringern, Schlüsse ziehen. Es gilt nämlich

$$\left| \ln(x_{A_{K+1}}) \right| - \left| \ln(x_{A_K}) \right| = \frac{\delta_o \pi}{\omega_o} = \frac{\pi}{2T_2 \omega_o}$$

$$0,916 - 0,478 = 0,438 = \frac{3,14}{14 \cdot T_2}$$

und 
$$T_2 = \frac{3,14}{0,438 \cdot 14} = 0,51$$

Dann finden wir aus Bild 33 einen mittleren Abstand von Nulldurchgang zu Nulldurchgang von 0,45 s, so daß demnach eine volle Periode in 0,90 s abläuft. Wir setzen in den vorher gefundenen Ausdruck ein und erhalten

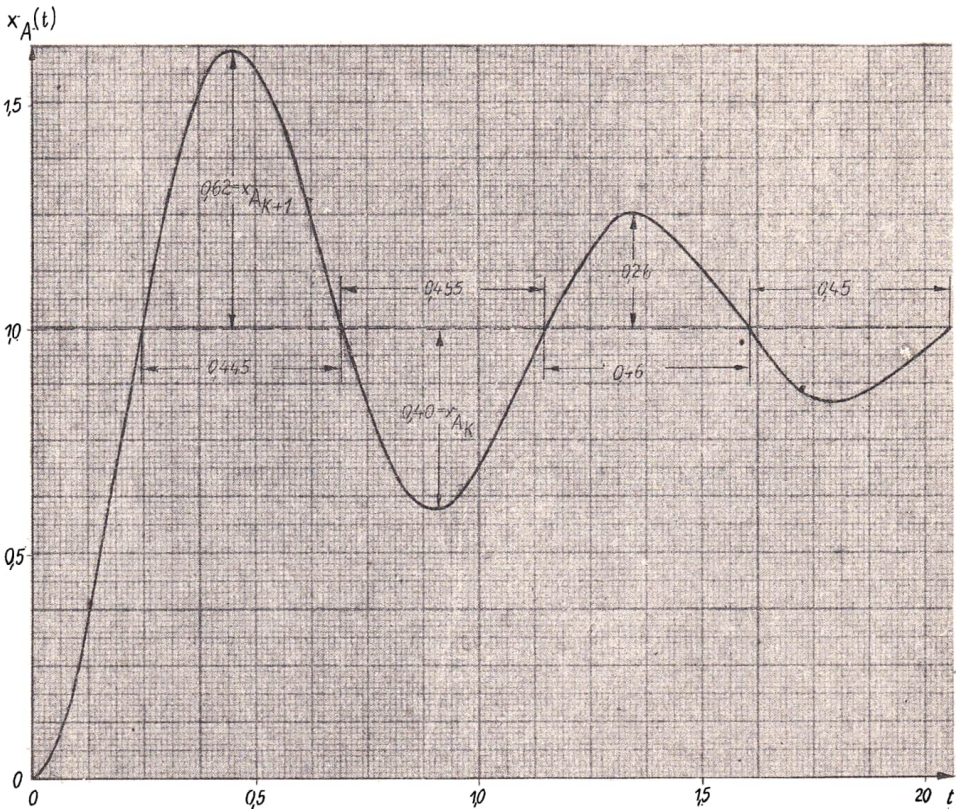


Bild 33

Experimentell erhaltene Übergangsfunktion eines Übertragungsgliedes

Damit findet man nach Einsetzen in die Beziehung (α)

$$T_1 = 0,041$$

und 
$$0,0209 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 0,041 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 1$$

Schließlich folgen auch hier weitere Ausführungsbeispiele. Der Membranantrieb (Bild 31b), die Spule mit federbelastetem Anker und das Drehspulmeßwerk gehorchen einer Gleichung nach (IV).

V. Integralwirkendes Übertragungsglied. Bei dem Beispiel Bild 14 wurde nach einer sprungförmigen Auslenkung des Doppelkolbens die Verbindung zwischen der Druckölleitung  $P_Z$  und z.B. dem Rohr  $P_1$  freigegeben. Der Kolben des Stellmotors bewegte sich dann mit konstanter Geschwindigkeit nach oben.

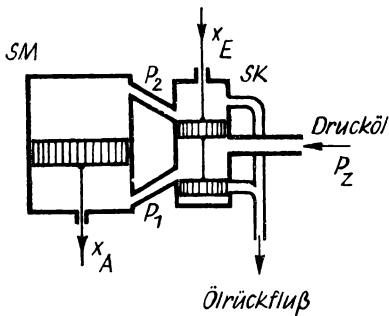
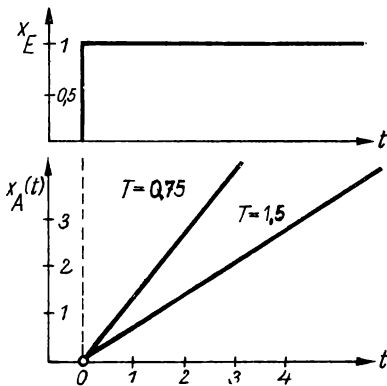


Bild 34  
Integralwirkendes Übertragungsglied

Dieses Verhalten können wir durch die Beziehung

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{1}{T} \cdot x_E \quad \text{oder} \quad x_A = \frac{1}{T} \int x_E dt \quad \text{ausdrücken.} \quad (V)$$



Aus der letzten Formel ist die integrale Wirkung klar ersichtlich. Um zu einer Bestimmung der Konstanten  $T$  zu gelangen, bemerken wir, daß man bei konstant gehaltenen  $\frac{dx_A}{dt}$  die Gleichung (V) auch schreiben kann

$$\frac{x_A}{t} = \frac{1}{T} \cdot x_E$$

Bild 35  
Übergangsfunktion von integralwirkenden Übertragungsgliedern

Hat man also eine Auslenkung  $x_E$  vorgenommen (Bild 35), so beobachtet man den Anstieg von  $x_A(t)$ .

Gemessen sei  $x_E = 1$ , weiter

$$\frac{x_A}{t} = \frac{2}{3},$$

woraus sich dann ergibt  $\frac{x_A}{t} = \frac{2}{3} = \frac{1}{T}$ , daraus folgt  $T = 1,5$  also  $1,5 \frac{dx_A}{dt} = x_E$ . Das Strahlrohr mit Kraftkolben ist ein weiteres Ausführungsbeispiel. Desgleichen folgt die Wasserstandregelstrecke eines Dampfkessels der Differentialgleichung (V).

#### VI. Integralwirkendes Übertragungsglied mit Verzögerung 1. Ordnung.

Wir betrachten einen Gleichstrom-Nebenschlußmotor, der im Zeitpunkt  $t = 0$  an eine konstante Spannung gelegt wird. Dann erhalten wir die Kurve nach Bild 36. Die Abhängigkeit der Drehzahl  $n$  von der Zeit können wir durch die Gleichung beschreiben

$$T_1 T_2 \frac{dn}{dt} + T_1 n = k \cdot E$$

Sie hat die Form der Gleichung für das Übertragungsglied 1. Ordnung (II). Nun machen wir aber die Substitution

$$n = \frac{dx_A}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dn}{dt} = \frac{d^2 x_A}{dt^2} \quad \text{und schließlich} \quad k \cdot E = x_E$$

Damit erhalten wir

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_1 \frac{dx_A}{dt} = x_E \quad (\text{VI})$$

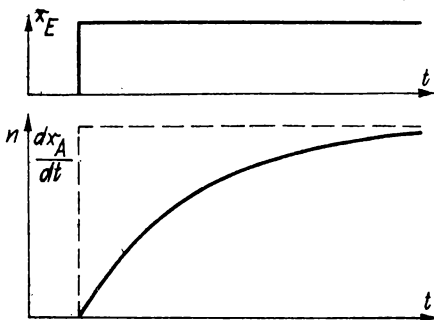


Bild 36  
Anlaufkennlinie des Motors

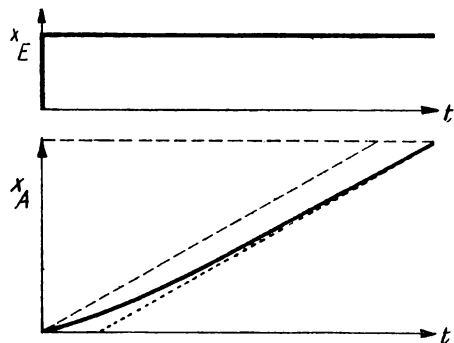


Bild 37  
Übergangsfunktion des integralwirkenden Gliedes mit Verzögerung 1. Ordnung

Es fehlt also das Glied mit  $\ddot{x}_A$ . Durch die Substitution haben wir erreicht, daß wir von der Drehzahl auf den Drehwinkel des Motors übergehen. Wie Bild 37 zeigt, nähert sich der tatsächlich erreichte Drehwinkel (ausgezogene Kurve) im Laufe der Zeit der punktierten Linie. Bei Anlauf mit der Endgeschwindigkeit würde dagegen die gestrichelte Kurve durchlaufen.

Liegt z.B. die in Bild 38 dargestellte experimentell aufgenommene Kurve vor, so verfahren wir, um die Zeitkonstanten dieser Gleichung zu ermitteln, wie folgt:

Wir schreiben

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_1 \frac{dx_A}{dt} = 2$$

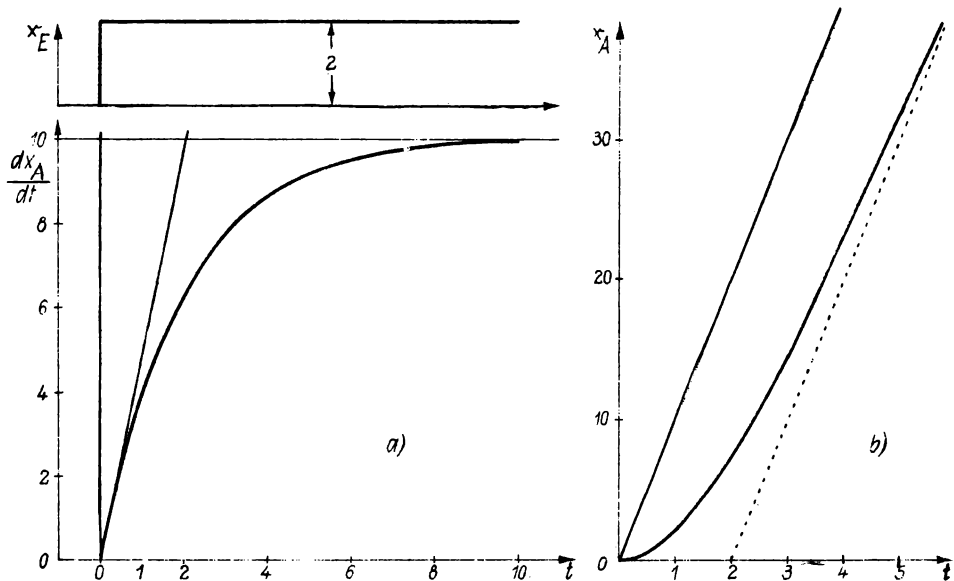


Bild 38a, b  
 a) Experimentell aufgenommene Übergangsfunktion  
 b) Kurve der Abhängigkeit  $x_A(t)$

für  $t \rightarrow \infty$  geht  $T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} \rightarrow 0$ , also ist  $T_1 \frac{dx_A}{dt} = 2$

Aus Bild 38a lesen wir ab, daß sich bei sehr großem  $t$  ergibt:

$$\frac{dx_A}{dt} = 10, \text{ und damit wird } T_1 = 0,2.$$

Bei  $t = 0$  erhalten wir  $T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} = x_E = 2,$

weiter  $\frac{d^2 x_A}{dt^2} = \frac{10}{2} = 5$  und daraus schließlich

$$T_2 = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{x_E}{\frac{d^2 x_A}{dt^2}} = \frac{1 \cdot 2}{0,2 \cdot 5} = 2$$

Die Gleichung lautet also  $0,4 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 0,2 \frac{dx_A}{dt} = 2$ .  
Daraus würden wir erhalten

$$\frac{dx_A}{dt} = 10 (1 - e^{-0,5 t})$$

und

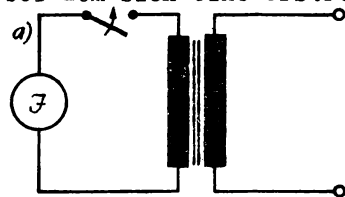
$$x_A = 10 (t + 2 e^{-0,5 t} - 2)$$

Die Abhängigkeit  $x_A(t)$  ist für unser Beispiel durch Bild 38b dargestellt.

An Ausführungsbeispielen erwähnen wir noch:

Spule mit massebehaftetem Anker und Ölbremse. Weiterhin folgt bei Schiffen der Zusammenhang zwischen Ruderauslenkung ( $x_E$ ) und Kursänderung ( $x_A$ ) der obigen Gleichung.

**VII. Differenzierendes Organ.** Wir betrachten einen Transformator, bei dem sich eine Urstromquelle und ein Schalter in Reihe mit der



Primärwicklung befinden (Bild 39a). Die Sekundärwicklung schließt man direkt an die Platten eines Elektronenstrahloszillos an. Wird der Schalter eingeschaltet, so beobachtet man einen Impuls. Im Idealfall würde die Höhe des Impulses außerordentlich groß und seine Breite außerordentlich klein sein (Bild 39b). Die hier vorliegenden Verhältnisse kann man wiedergeben durch die Gleichung

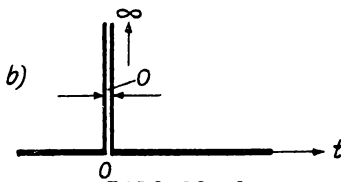


Bild 39a,b

a) Schaltung eines Transformators als differenzierendes Organ

b) Impuls 1. Ordnung

$$x_A = kT \frac{dx_E}{dt} \quad (\text{VII})$$

Durch die Gleichung (VII) kann noch eine elektromechanische Anordnung beschrieben werden, nämlich der Tachometerdynamo

(Bild 40). Das Magnetfeld wird entweder durch einen Erregerstrom

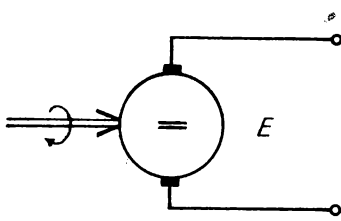


Bild 40  
Tachometerdynamo

oder durch Permanentmagnete erzeugt. Wird der Motor angetrieben, so gibt er eine Spannung ab, die der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Also entspricht  $\frac{dx_E}{dt}$  der Winkelgeschwindigkeit und  $x_A$  der abgegebenen Spannung.



# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Programm .....	1
Literaturverzeichnis .....	2
I. Teil: Grundlagen der Regelungstechnik .....	3
1. Kapitel: Einleitung und Problemstellung .....	3
1 Über die Begriffe Mechanisierung und Automati-	
sierung .....	3
2 Einsatzmöglichkeiten und Bedeutung der Regler ....	8
3 Welche Größen werden geregelt .....	13
2. Kapitel: Beschreibung einiger Regler .....	15
4 Feuerzugregler .....	16
5 Flüssigkeitsstandregler .....	17
6 Selbsttätiger Kompensator .....	17
7 Spannungsgegengekoppelter Verstärker .....	20
8 Selbsttätiger Trübungsmesser .....	21
9 Dampfturbinenregler .....	23
10 Zweipunktregler .....	29
3. Kapitel: Begriffe der Regelungstechnik .....	30
11 Vorbetrachtungen .....	30
12 Regelung .....	31
13 Regelkreis .....	33
14 Regelstrecke .....	35
15 Regler .....	35
16 Weitere Bemerkungen zum Regelkreis .....	38
17 Haupttypen von Reglern .....	39
4. Kapitel: Übertragungsglieder und Aufbau eines Reglers	
aus diesen Gliedern .....	41
18 Übertragungsglieder des Regelkreises .....	42
19 Zeitverhalten von Übertragungsgliedern bei sprung-	
förmiger Störung .....	42



**LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM**

HERAUSGEGEBEN

VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

---

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

**2. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1964**



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9135/2

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

**2. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1964**

von Dr. phil. **Heinrich Kindler**  
Professor mit Lehrstuhl  
an der Technischen Universität Dresden

Bearbeitet für das Fernstudium  
von Dipl.-Gwl. **Helmut Wiesenhütter**  
wissenschaftlicher Mitarbeiter  
der Hauptabteilung Fern- und Abendstudium  
der Technischen Universität Dresden



**VEB VERLAG TECHNIK BERLIN 1964**

**Nur für das Fernstudium bestimmt**

**VT-Bestell-Nr. 9135/2 · Auflage 1850 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/26/64/DDR  
Verfaßt für die Hauptabteilung Fern- und Abendstudium der Technischen Universität Dresden · Heraus-  
gegeben im Auftrag des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demo-  
kratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, Berlin  
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza**

# I. Teil: Grundlagen der Regelungstechnik

## 4. Kapitel: Übertragungsglieder und Aufbau eines Reglers aus diesen Gliedern (Fortsetzung)

### [19] Zeitverhalten von Übertragungsgliedern (Fortsetzung)

#### VIII. Differenzierendes Glied mit Verzögerung

Wir betrachten die Anordnung nach Bild 41. Sie besteht aus einem vollkommen mit Öl gefüllten Zylinder, in dem sich ein Kolben bewegen kann. Den oberen und unteren Teil des Zylinders verbindet eine Umgehungsleitung, die mit einer einstellbaren Drossel versehen ist. Der Boden B des Zylinders ist außen mit einer Feder verbunden, die am anderen Ende festgelegt ist. Die Bewegung des Kolbenbodens kann mittels des Hebels H an der Skala abgelesen werden. Von einem Gleichgewichtszustand ausgehend, soll  $x_E$  plötzlich um den Betrag 1 geändert werden, d.h., der Kolben soll um den entsprechenden Betrag nach unten gedrückt werden. Im Augenblick der Auslenkung wird der Zylinder der Bewegung folgen, da der Austausch von Öl zwischen den beiden Zylinderteilen eine

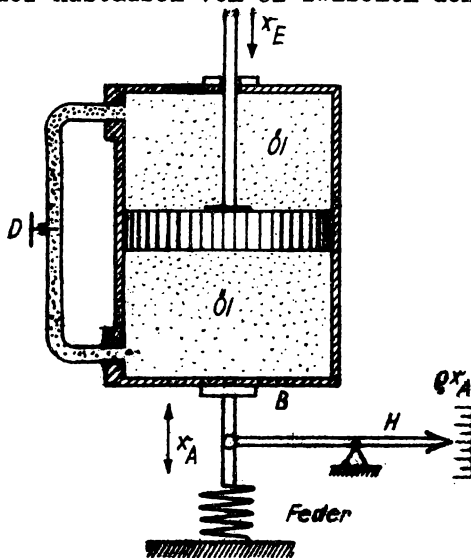


Bild 41  
Hydraulische Ausführung eines verzögerten D-Gliedes

endliche Zeit erfordert. Deshalb wird zunächst auch die Feder gespannt.

Die Feder drückt nun gegen den Kolbenboden und preßt dadurch das Öl durch die Verbindungsleitung, so daß sich der Zylinder nach oben bewegt und sich die Feder allmählich entspannt.

Setzt man voraus, daß die Strömungsgeschwindigkeit der Druckdifferenz proportional ist, so bewegt sich der Kolben nach einer Exponentialfunktion (Bild 42), deren Zeitkonstante durch  $T_r$  charakterisiert ist.

Wir können diesen Sachverhalt mathematisch durch die Gleichung darstellen

$$T_r \frac{dx_A}{dt} + x_A = \varrho T_r \frac{dx_E}{dt} \quad (\text{VIII})$$

$\varrho$  berücksichtigt den Einfluß der Hebelübersetzung. In Operator-schreibweise ergibt sich

$$(T_r p + 1) x_A = (\varrho T_r p) x_E$$

$$\frac{x_A}{x_E} = \varrho \frac{T_r p}{1 + T_r p}$$

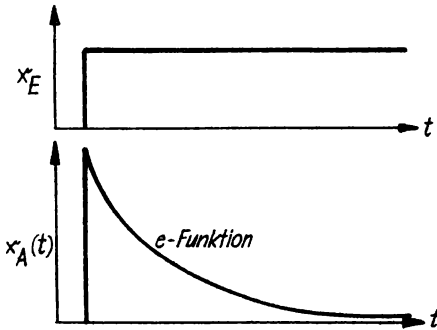


Bild 42  
Übergangsfunktion des  
verzögerten D-Gliedes  
nach Bild 41

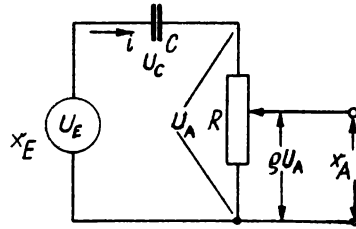


Bild 43  
Elektrisches Beispiel einer  
nachgebenden Rückführung

Für das elektrische Beispiel (Bild 43) schreiben wir:

$$U_E = U_C + U_A$$

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{dU_C}{dt} + \frac{dU_A}{dt} = \frac{U_A}{T} + \frac{dU_A}{dt},$$

wobei

$$U_A = R \cdot i = RC \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Weiter folgt: 
$$T \frac{dU_A}{dt} + U_A = T \frac{dU_E}{dt}$$

Bilden wir R als Spannungsteiler mit dem Spannungsteilerverhältnis  $\varrho$  aus, so erhalten wir

$$\frac{U_A}{U_E} = \varrho \frac{T_r p}{1 + T_r p}$$



Diese Gleichung kann wieder wie (VIII) geschrieben werden.

Bei der experimentellen Ermittlung der Übergangskurve eines Übertragungsgliedes gewinnen wir etwa die Kurve nach Bild 44.

Wegen der Ähnlichkeit mit Bild 42 vermuten wir, daß es sich um eine Exponentialfunktion entsprechend der Gleichung (VIII) handelt. Ist dies der Fall, benötigen wir nur den Wert  $T_R$  und können an den der Zeit  $t = 0$  zugeordneten Kurvenpunkt die Tangente legen und erhalten dadurch die Zeitkonstante  $T_R = 0,5$  s. Der Wert  $q$  ergibt sich unmittelbar zu 0,4, wenn  $x_E = 1$ .

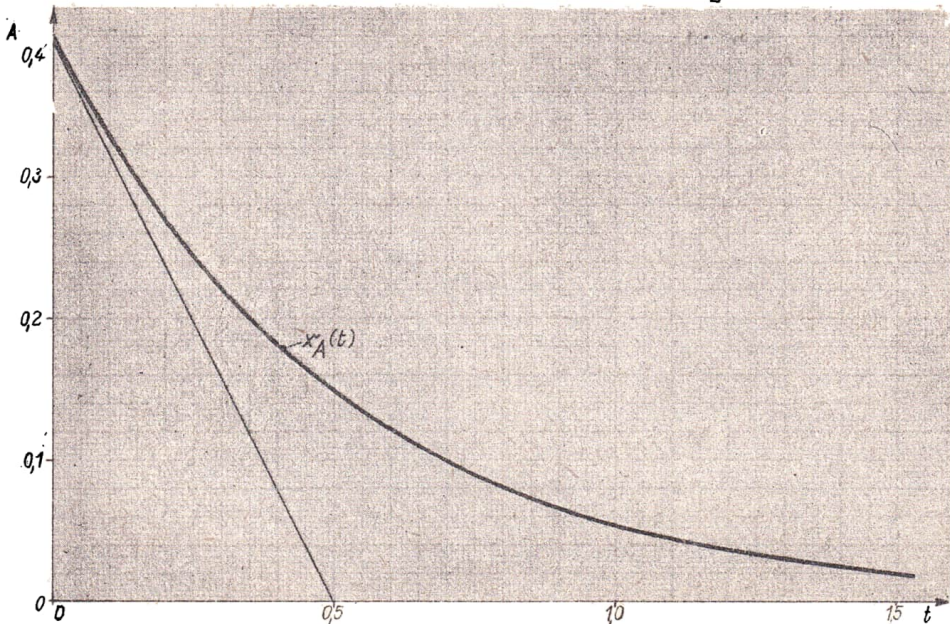


Bild 44  
Experimentell erhaltene Übergangsfunktion  
eines Übertragungsgliedes

## [20] Zusammenstellung der Gleichungen der behandelten Übertragungsglieder

Zunächst geben wir noch eine Übersicht über die acht Gleichungen der Übertragungsglieder, mit denen wir uns bis jetzt befaßt haben. Selbstverständlich könnten wir noch eine große Reihe weiterer Gleichungen anführen, doch kommen wir mit den besprochenen acht in dem von uns gesteckten Rahmen aus. Behandelt hatten wir



$$(I) \quad x_A = k x_E$$

$$(II) \quad T \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

$$(III) \quad T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_{12}) \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

$$(IV) \quad T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_1 \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

$$(V) \quad \frac{dx_A}{dt} = \frac{k}{T} x_E$$

$$(VI) \quad T_1 T_2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_1 \frac{dx_A}{dt} = k x_E$$

$$(VII) \quad x_A = k T \frac{dx_E}{dt}$$

$$(VIII) \quad T_r \frac{dx_A}{dt} + x_A = Q T_r \frac{dx_E}{dt}$$

Wir haben also in (II) ... (VIII) nur lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Sie lassen sich einfach lösen, und überdies gilt hierbei das Superpositionsprinzip, nach dem sich mehrere Eingangswerte in einem Übertragungsglied ohne gegenseitige Beeinflussung überlagern. Treten Nichtlinearitäten auf, so gilt das Superpositionsprinzip nicht, wodurch die mathematische Behandlung solcher Fälle sehr erschwert ist.

Schließlich wollen wir uns noch den Überblick darüber verschaffen, welche der behandelten Gleichungen bei den Hauptbestandteilen des Regelkreises bisher auftraten. Wir betrachten also Regelstrecken, Meßeinrichtungen, Kraftschalter, Stellmotore und Rückführungen und schreiben die dafür jeweils in Frage kommenden Gleichungen daneben.

### 1. Regelstrecken

Flüssigkeitsdruckregelstrecke .....	Gl. I
Gasdruckregelstrecke .....	Gl. II
Spannungsregelstrecke mit Feldänderung des Generators .	Gl. II
Spannungsregelstrecke mit Feldänderung der Erreger- maschine .....	Gl. III
Wasserstandsregelstrecke eines Dampfkessels .....	Gl. V

### 2. Meßeinrichtungen

Schwimmer .....	Gl. I
Thermoelement (im Schutzrohr) .....	Gl. II
Drehspulmeßwerk .....	Gl. IV
Tauchglockenmeßwerk (mit vernachlässigbarem Auftrieb) .	Gl. V

### 3. Kraftschalter

Elektronenröhre, Stromtor, Kohleldrucksäule .....	Gl. I
Strahlrohr, Steuerschieber mit Kolben .....	Gl. V

### 4. Stellmotore

Gewichtsbelasteter Membranantrieb .....	Gl. V
Gleichstromnebenschlußmotor .....	Gl. VI

### 5. Rückführungen

Gestängerrückführung .....	Gl. I
Ölkatarakt, RC-Glied .....	Gl. VIII

Betrachten Sie die Bilder 13, 14, 15, 16, 18 und 19 und ordnen Sie den einzelnen Übertragungsgliedern Differentialgleichungen zu!

#### Ermittlung der resultierenden Differentialgleichung beim Zusammenfügen mehrerer Übertragungsglieder

Bisher haben wir nur die Gleichungen einzelner Übertragungsglieder betrachtet. Nun wollen wir den Fall behandeln, daß einige dieser Glieder miteinander verbunden sind.

### 1. Reihenschaltung

Von drei einzelnen Übertragungsgliedern [1], [2] und [3], vgl. Bild 45, schreiben wir die zugehörigen Differentialgleichungen auf:

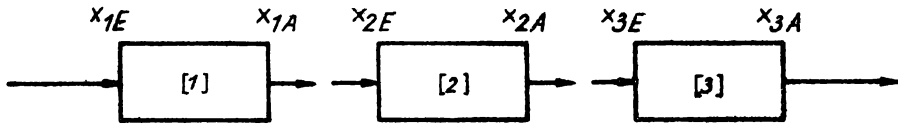


Bild 45  
Blockschaltbild dreier  
Übertragungsglieder

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad L_0 x_{1A}^{(1)} + L_1 x_{1A}^{(1-1)} + \dots + L_{l-1} \frac{dx_{1A}}{dt} + L_l x_{1A} &= x_{1E} \\ [2] \quad M_0 x_{2A}^{(m)} + M_1 x_{2A}^{(m-1)} + \dots + M_{m-1} \frac{dx_{2A}}{dt} + M_m x_{2A} &= x_{2E} \\ [3] \quad N_0 x_{3A}^{(n)} + N_1 x_{3A}^{(n-1)} + \dots + N_{n-1} \frac{dx_{3A}}{dt} + N_n x_{3A} &= x_{3E} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}, 1)$$

Diese drei Glieder sollen nun hintereinander geschaltet werden, wie dies Bild 46 zeigt. Dabei nehmen wir wieder Rückwirkungsfreiheit an, d.h., das folgende Glied wird nicht von dem davorliegenden beeinflusst. Es gilt also: [2] beeinflusst [1] nicht, [3] beeinflusst weder [2] noch [1]. Weiterhin haben wir wegen der Hintereinanderschaltung

$$\left. \begin{aligned} x_E &= x_{1E} \\ x_{1A} &= x_{2E} \\ x_{2A} &= x_{3E} \\ x_{3A} &= x_A \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}, 2)$$

Durch Eliminieren von  $x_{1A}$  und  $x_{2A}$  erhält man nun aus den Gleichungen für [1], [2], [3] die folgende Abhängigkeit zwischen  $x_E$  und  $x_A$ ,

$$A_0 x_A^{(a)} + A_1 x_A^{(a-1)} + A_2 x_A^{(a-2)} + \dots + A_{a-1} \frac{dx_A}{dt} + A_a x_A = x_E, \quad (\text{IV}, 3)$$

wobei

$$a = 1 + m + n$$

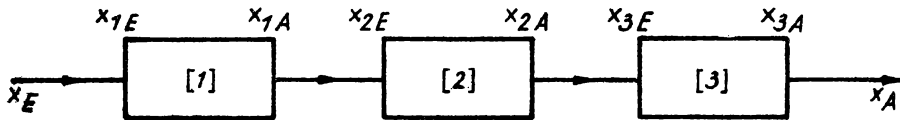


Bild 46  
Blockschaltbild hintereinander-  
geschalteter Übertragungsglieder

Damit ist eine Beziehung zwischen Eingang und Ausgang gewonnen, wobei die Eingangsgröße nicht wieder von der Ausgangsgröße beeinflusst wird.

Diese allgemeine Ableitung soll nun durch ein Beispiel erläutert werden.

Wir nehmen an, daß in der Anordnung von Bild 46

- [1] der Gl. II,
- [2] der Gl. I,
- [3] der Gl. III gehorcht.

Damit können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\left. \begin{array}{l} [1] \quad L_0 \frac{dx_{1A}}{dt} + L_1 x_{1A} = x_{1E} \\ [2] \quad M_0 x_{2A} = x_{2E} \\ [3] \quad N_0 \frac{d^2 x_{3A}}{dt^2} + N_1 \frac{dx_{3A}}{dt} + N_2 x_{3A} = x_{3E} \end{array} \right\} \quad (IV, 4)$$

oder mit (IV,2)

$$\left. \begin{array}{l} [1] \quad L_0 \frac{dx_{1A}}{dt} + L_1 x_{1A} = x_E \\ [2] \quad M_0 x_{2A} = x_{1A} \\ [3] \quad N_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + N_1 \frac{dx_A}{dt} + N_2 x_A = x_{2A} \end{array} \right\} \quad (IV, 4a)$$

Aus den Gleichungen [2] und [3] der Gruppe (IV,4a) erhalten wir

$$N_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + N_1 \frac{dx_A}{dt} + N_2 x_A = \frac{x_{1A}}{M_0} \quad (\text{IV},5)$$

Jetzt bilden wir den Ausdruck für  $L_1 x_{1A}$  in der Gleichung [1] der Gruppe (IV,4a), und zwar unter Benutzung von (IV,5)

$$L_1 M_0 N_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_1 M_0 N_1 \frac{dx_A}{dt} + L_1 M_0 N_2 x_A = L_1 x_{1A} \quad (\text{IV},6)$$

Wir brauchen aber noch den Ausdruck für  $L_0 \frac{dx_{1A}}{dt}$ . Dazu gehen wir von (IV,5) aus und finden

$$L_0 M_0 N_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + L_0 M_0 N_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_0 M_0 N_2 \frac{dx_A}{dt} = L_0 \frac{dx_{1A}}{dt} \quad (\text{IV},7)$$

In (IV,6) und (IV,7) haben wir links nur noch die gewünschte Variable  $x_A$  und ihre Ableitungen. Damit auf der rechten Seite  $x_E$  erscheint, addieren wir (IV,6) und (IV,7) und erhalten

$$\begin{aligned} L_0 M_0 N_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + L_0 M_0 N_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_0 M_0 N_2 \frac{dx_A}{dt} + L_1 M_0 N_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + \\ + L_1 M_0 N_1 \frac{dx_A}{dt} + L_1 M_0 N_2 x_A = x_{1E} = x_E \end{aligned} \quad (\text{IV},8)$$

Durch Zusammenfassung bekommen wir:

$$\begin{aligned} L_0 M_0 N_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + (L_0 M_0 N_1 + L_1 M_0 N_0) \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (L_0 M_0 N_2 + L_1 M_0 N_1) \frac{dx_A}{dt} + \\ + L_1 M_0 N_2 x_A = x_E \end{aligned}$$

Setzen wir

$$L_0 M_0 N_0 = A_0$$

$$L_0 M_0 N_1 + L_1 M_0 N_0 = A_1$$

$$L_0 M_0 N_2 + L_1 M_0 N_1 = A_2$$

$$L_1 M_0 N_2 = A_3 ,$$

so kann jetzt geschrieben werden

$$A_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + A_2 \frac{dx_A}{dt} + A_3 x_A = x_E$$

## 2. Parallelschaltung

Eine weitere Möglichkeit der Verbindung von Übertragungsgliedern ist die Parallelschaltung, in Bild 47 dargestellt. Es können auch mehr als zwei Glieder parallel geschaltet werden.

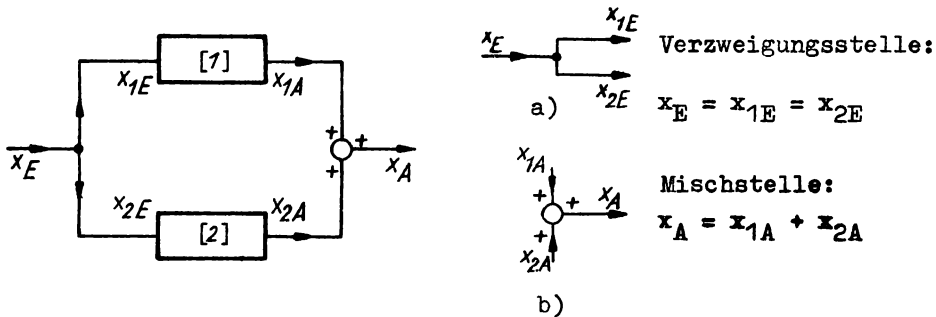


Bild 47, 47a, 47b  
Blockschaltbild einer Parallelschaltung

Wir haben hier zwischen Verzweigungsstellen (Bild 47a) und Mischstellen (Bild 47b) zu unterscheiden. Wir beschränken uns auf die Parallelschaltung zweier Glieder

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad L_0 x_{1A}^{(1)} + L_1 x_{1A}^{(1-1)} + \dots + L_{l-1} \frac{dx_{1A}}{dt} + L_l x_{1A} &= x_{1E} \\ [2] \quad M_0 x_{2A}^{(m)} + M_1 x_{2A}^{(m-1)} + \dots + M_{m-1} \frac{dx_{2A}}{dt} + M_m x_{2A} &= x_{2E} \end{aligned} \right\} \text{(IV, 9)}$$

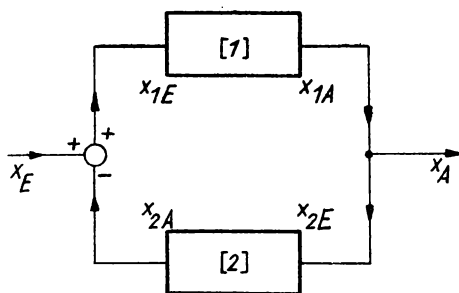
Unter Berücksichtigung der vorangehenden Gleichungen (in Bild 47a) haben wir

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad L_0 x_{1A}^{(1)} + \dots + L_{l-1} \frac{dx_{1A}}{dt} + L_l x_{1A} &= x_E \\ [2] \quad M_0 x_{2A}^{(m)} + \dots + M_{m-1} \frac{dx_{2A}}{dt} + M_m x_{2A} &= x_E \end{aligned} \right\} \text{(IV, 10)}$$

Um den gesuchten Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen zu finden, müssen wir mit dem vorgegebenen  $x_E$  die Gleichungen einzeln lösen und die erhaltenen Lösungen addieren, um  $x_A$  zu erhalten. Es gelingt nämlich nicht, die beiden Gleichungen (IV,10) zu einer Gleichung zusammenzufassen.

### 3. Gegenschaltung

Das Prinzip entnehmen Sie aus dem Bild 48. Durch Vergleich der Bilder 47 und 48 sieht man, daß Verzweigungs- und Mischstelle ihre



Plätze getauscht haben. Offensichtlich können aber nur zwei Übertragungsglieder gegeneinander geschaltet werden.

Hier gilt:

$$\left. \begin{aligned} x_{1E} &= x_E - x_{2A} \\ x_A &= x_{1A} = x_{2E} \end{aligned} \right\} \text{(IV,11)}$$

Bild 48  
Blockschaltbild einer  
Gegenschaltung

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad L_0 x_{1A}^{(1)} + L_1 x_{1A}^{(1-1)} + \dots + L_{l-1} \frac{dx_{1A}}{dt} + L_l x_{1A} &= x_{1E} \\ [2] \quad M_0 x_{2A}^{(m)} + M_1 x_{2A}^{(m-1)} + \dots + M_{m-1} \frac{dx_{2A}}{dt} + M_m x_{2A} &= x_{2E} \end{aligned} \right\} \text{(IV,12)}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (IV,11) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad L_0 x_A^{(1)} + L_1 x_A^{(1-1)} + \dots + L_{l-1} \frac{dx_A}{dt} + L_l x_A &= x_E - x_{2A} \\ [2] \quad M_0 x_{2A}^{(m)} + M_1 x_{2A}^{(m-1)} + \dots + M_{m-1} \frac{dx_{2A}}{dt} + M_m x_{2A} &= x_A \end{aligned} \right\} \text{(IV,12a)}$$

Durch Eliminieren von  $x_{2A}$ ,  $\frac{dx_{2A}}{dt}$ , usw. erhält man dann die Beziehung zwischen  $x_E$  und  $x_A$ .

Das Verfahren wird an dem folgenden Beispiel erläutert.  
Die Gleichungen für [1] und [2] lauten:

$$[1] \quad L_0 \frac{d^2 x_{1A}}{dt^2} + L_1 \frac{dx_{1A}}{dt} + L_2 x_{1A} = x_{1E}$$

$$[2] \quad M_0 \frac{dx_{2A}}{dt} + M_1 x_{2A} = x_{2E}$$

Setzen wir in [1]  $x_{1E} = x_E - x_{2A}$  und außerdem

$x_{1A} = x_A$  ein, so erhalten wir:

$$L_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_1 \frac{dx_A}{dt} + L_2 x_A = x_E - x_{2A}$$

Diese Gleichung wird differenziert und wir erhalten

$$L_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + L_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_2 \frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_E}{dt} - \frac{dx_{2A}}{dt}$$

oder

$$\frac{dx_{2A}}{dt} = \frac{dx_E}{dt} - \left( L_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + L_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_2 \frac{dx_A}{dt} \right)$$

Wir setzen die erhaltenen Ausdrücke in [2] ein und bekommen

$$\begin{aligned} M_0 \left[ \frac{dx_E}{dt} - \left( L_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + L_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_2 \frac{dx_A}{dt} \right) \right] + \\ M_1 \left[ x_E - \left( L_0 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + L_1 \frac{dx_A}{dt} + L_2 x_A \right) \right] = x_A \end{aligned}$$

geordnet:

$$\begin{aligned} M_0 L_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + (M_0 L_1 + M_1 L_0) \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (M_0 L_2 + M_1 L_1) \frac{dx_A}{dt} \\ + (M_1 L_2 + 1) x_A = M_1 x_E + M_0 \frac{dx_E}{dt} \end{aligned}$$

## **[22] Differentialgleichung eines Regelkreises**

Wir knüpfen an Abschnitt [21], 3 an und wollen die Differentialgleichung des im Bild 49 dargestellten Regelkreises aufstellen, wobei [1] die Regelstrecke darstellen soll. Das Kästchen [2] von Bild 48 wird in Bild 49 in eine Meßeinrichtung [2], einen Kraftschalter [3] und einen Stellmotor [4] aufgeteilt. Man beachte



dabei, daß  $x_E$  in Bild 48 mit  $x_E$  in Bild 49 nicht identisch ist. Wir schreiben zunächst die Differentialgleichungen von [1], [2], [3], [4] auf, die sich ergeben, wenn der Regelkreis an den in Bild 49 angegebenen Stellen aufgeschnitten ist.

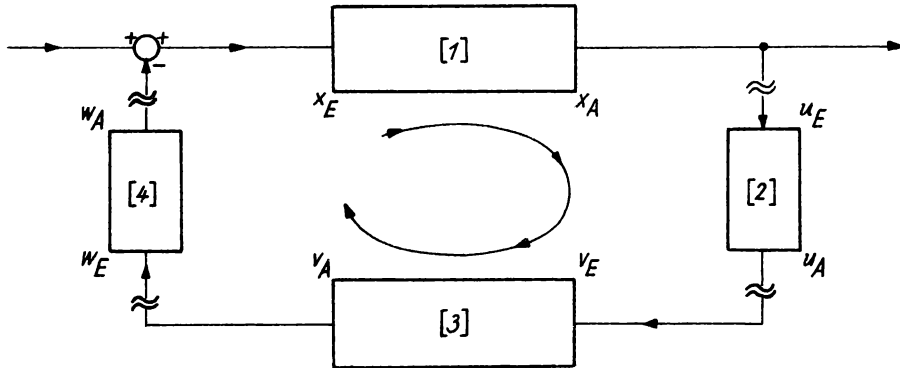


Bild 49  
Regelkreis, ( $\approx$  Schnittstellen)

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad & B_0 x_A^{(b)} + B_1 x_A^{(b-1)} + \dots + B_{b-1} \frac{dx_A}{dt} + B_b x_A = x_E \\ [2] \quad & C_0 u_A^{(c)} + C_1 u_A^{(c-1)} + \dots + C_{c-1} \frac{du_A}{dt} + C_c u_A = u_E \\ [3] \quad & D_0 v_A^{(d)} + D_1 v_A^{(d-1)} + \dots + D_{d-1} \frac{dv_A}{dt} + D_d v_A = v_E \\ [4] \quad & E_0 w_A^{(e)} + E_1 w_A^{(e-1)} + \dots + E_{e-1} \frac{dw_A}{dt} + E_e w_A = w_E \end{aligned} \right\} \quad (IV, 13)$$

Um nun weiter zu kommen, um also einen geschlossenen Regelkreis zu erhalten, müssen wir die Übertragungsglieder miteinander verbinden. Wir erinnern uns, daß durch die Regelung eine aufgetretene Störung vermindert bzw. beseitigt werden soll. Es muß daher in der schematischen Darstellung von Bild 49 zwischen zwei Übertragungsgliedern eine Richtungsumkehr der auf das nächste Glied wirkenden Größe vorgenommen werden (bei elektrischen Anordnungen: Umpolung). Im allgemeinen kann man in einem Regelkreis mehrere Stellen finden, an denen eine Richtungsumkehr möglich ist. In unserem Falle soll zwischen dem Stellglied und der Regelstrecke das Vorzeichen umgekehrt werden.

Wir schreiben demnach

$$w_A = -x_E ;$$

weiterhin gilt:

$$x_A = u_E$$

$$u_A = v_E$$

$$v_A = w_E ,$$

damit ist der Regelkreis geschlossen.

Eliminieren wir nun wieder  $u_E$ ,  $u_A$ ,  $v_E$ ,  $v_A$ ,  $w_E$ ,  $w_A$ , deren Ableitungen (Punkt 1 des Abschnittes [21]) und auch  $x_E$ , so kommen wir zu der Gleichung

$$F_0 x_A^{(f)} + F_1 x_A^{(f-1)} + \dots + F_{f-1} \frac{dx_A}{dt} + F_f x_A = 0 \quad (\text{IV}, 14)$$

Dabei ist  $f = b + c + d + e$

Diese Differentialgleichung kann man nach den bekannten Methoden lösen (vgl. „Höhere Mathematik“, 15. und 16. Lehrbrief).

Jetzt müssen wir noch den Fall betrachten, bei dem eine Störung auf das System einwirkt. Wir setzen die Störung in der Form einer Sprungfunktion voraus, und zwar soll sie bei  $t = 0$  von Null auf den Betrag  $Q$  springen. Aus Bild 50 ist zu ersehen, wo die Störung  $Q$  einwirkt.

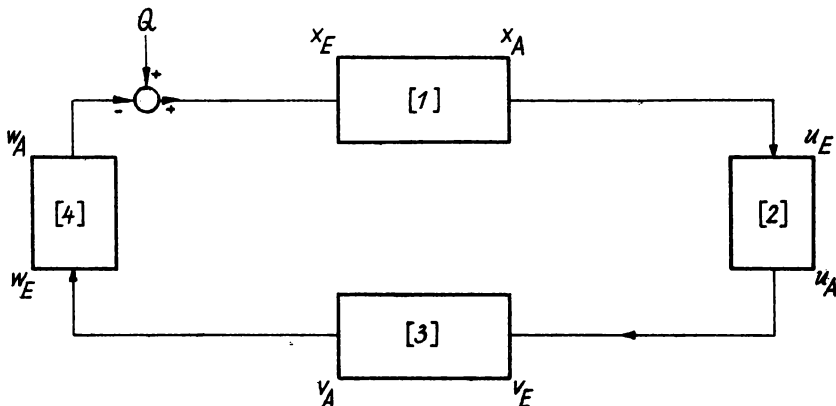


Bild 50  
Regelkreis mit Störung  $Q$

In diesem Falle erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} [1] \quad & B_0 x_A^{(b)} + B_1 x_A^{(b-1)} + \dots + B_{b-1} \frac{dx_A}{dt} + B_b x_A = -w_A + Q \\ [2] \quad & C_0 u_A^{(c)} + C_1 u_A^{(c-1)} + \dots + C_{c-1} \frac{du_A}{dt} + C_c u_A = u_E \\ [3] \quad & D_0 v_A^{(d)} + D_1 v_A^{(d-1)} + \dots + D_{d-1} \frac{dv_A}{dt} + D_d v_A = v_E = u_A \\ [4] \quad & E_0 w_A^{(e)} + E_1 w_A^{(e-1)} + \dots + E_{e-1} \frac{dw_A}{dt} + E_e w_A = w_E = v_A \end{aligned} \right\} \text{(IV, 15)}$$

Nach Eliminieren aller Variablen außer  $x_A$  erhält man

$$F_0 x_A^{(f)} + F_1 x_A^{(f-1)} + \dots + F_{f-1} \frac{dx_A}{dt} + F_f x_A = \\ G_0 Q^{(g)} + G_1 Q^{(g-1)} + \dots + G_{g-1} \frac{dQ}{dt} + G_g Q$$

Dabei ist  $g = b + c + d + e$

Der Lösungsansatz für diese Gleichung ist Ihnen auch bekannt, siehe „Höhere Mathematik“, Lehrbriefe 15 und 16.

Das jetzt folgende einfache Beispiel, (das Blockschaltbild dazu zeigt Bild 51) soll dieses Verfahren erläutern. Wir lehnen uns an den Ihnen aus dem 1. Lehrbrief her bekannten Druckregelkreis (Bild 19) an. Als Störgröße käme hier praktisch vor allem eine Schwankung des Vordruckes in Frage, wobei die Störgröße bei  $x_A$  angreifen würde. Um uns aber möglichst eng an die vorherigen Darlegungen anzuschließen, nehmen wir an, daß die Störgröße in der Abflußleitung auftritt, also bei  $x_E$  wirksam ist. Die Störung kann etwa als plötzliche Änderung des Druckes im Außenraum oder als plötzlich eintretende Querschnittsveränderung in der Abflußleitung auftreten.

Für die Regelstrecke, die Druckkammer, können wir die Differentialgleichung der Form (II) benutzen, wobei die Störgröße  $Q$  zu berücksichtigen ist.

$$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E = -w_A + Q$$

Dem Wellrohr, der Meßeinrichtung, können wir näherungsweise die Gleichung (I) unserer Aufstellung zuordnen, da die Zeit, die es

nach einer sprungförmigen Störung benötigt, um den neuen Beharrungszustand zu erreichen, sicher viel kleiner als  $T$  ist. Entsprechende Verhältnisse liegen bei der Prallplatte, die in diesem Falle als Kraftschalter wirkt, vor. Dagegen müssen wir für den Membranmotor (Stellmotor) die Gleichung (IV) ansetzen.

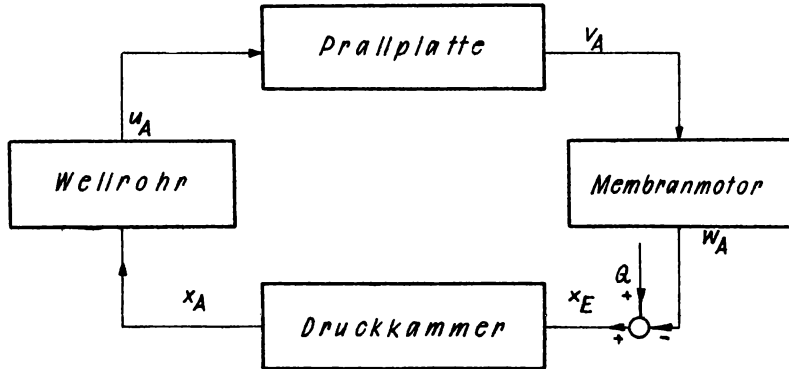


Bild 51  
Blockschaltbild des Druckregelkreises von Bild 19

Die Gleichungen der einzelnen Übertragungsglieder lauten:

Druckkammer [1]	$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E = -w_A + Q$	(Gl. II)
Wellrohr [2]	$u_A = k_u \cdot x_A$	(Gl. I)
Prallplatte [3]	$v_A = k_v \cdot u_A$	(Gl. I)
Membranmotor [4]	$M \frac{d^2 w_A}{dt^2} + D \frac{dw_A}{dt} + w_A = k_w \cdot v_A$	(Gl. IV)

Wir erhalten nun aus [1], [2], [3], [4]

$$v_A = k_v \cdot k_u \cdot x_A$$

und weiter

$$-\frac{dw_A}{dt} = T \frac{d^2 x_A}{dt^2} + \frac{dx_A}{dt} - \frac{dQ}{dt}$$

$$-\frac{d^2 w_A}{dt^2} = T \frac{d^3 x_A}{dt^3} + \frac{d^2 x_A}{dt^2} - \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

Damit ergibt sich Gleichung [4] wie folgt: (IV,16)

$$M(T \frac{d^3 x_A}{dt^3} + \frac{d^2 x_A}{dt^2} - \frac{d^2 Q}{dt^2}) + D(T \frac{d^2 x_A}{dt^2} + \frac{dx_A}{dt} - \frac{dQ}{dt}) + T \frac{dx_A}{dt} + x_A - Q = -k_u k_v k_w x_A$$

geordnet ergibt sich folgende Form

$$MT \frac{d^3 x_A}{dt^3} + (M+DT) \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (D+T) \frac{dx_A}{dt} + (1 + k_w k_v k_u) x_A = Q + D \frac{dQ}{dt} + M \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

Verwenden wir statt der Gleichung

$$M \frac{d^2 w_A}{dt^2} + D \frac{dw_A}{dt} + w_A = k_w v_A$$

die Form

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \dot{w}_A}{dt^2} + T_1 \frac{d\dot{w}_A}{dt} + \dot{w}_A = k_w v_A, \quad \text{vgl. Gl. (IV)}$$

so erhalten wir (IV,17)

$$TT_1 T_2 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T) \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (T_1 + T) \frac{dx_A}{dt} + (1 + k_w k_v k_u) x_A = Q + T_1 \frac{dQ}{dt} + T_1 T_2 \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

In diesem Falle steht bei der dritten Ableitung ein Produkt aus 3 Zeitkonstanten, bei der zweiten Ableitung eine Summe von Produkten zweier Zeitkonstanten und schließlich bei der 1. Ableitung eine Summe aus einfachen Zeitkonstanten.

## 5. Kapitel: Komplexer Frequenzgang

### [23] Der Begriff des Komplexen Frequenzganges

Bisher charakterisierten wir das dynamische Verhalten der Bauglieder des Regelkreises durch die zugehörigen Differentialgleichungen. Dann ermittelten wir aus den Differentialgleichungen der einzelnen Übertragungsglieder auch die des geschlossenen Regelkreises. Bei Kenntnis der Zahlenwerte der Koeffizienten der Differentialgleichung sind wir in der Lage, das Verhalten des Regelungssystems rechnerisch zu ermitteln. Wir können nun die

Frage aufwerfen, ob die Beschreibung des Regelungssystems durch die Differentialgleichung die einzige Möglichkeit seiner Charakterisierung ist. Es ist auch von vornherein nicht sicher, ob die Methode der Differentialgleichung immer der bequemste Weg zur Ermittlung des Verhaltens eines Regelungssystems ist.

Als Störfunktion verwendeten wir bisher eine Sprungfunktion und konnten dann das zeitliche Verhalten der Bauglieder ermitteln. Umgekehrt waren wir in der Lage, aus einer vorliegenden Übergangsfunktion, die aus einer sprungförmigen Störung resultierte, in einigen einfachen Fällen die zugehörige Differentialgleichung aufzufinden. Man kann nun daran denken, das Verhalten von Baugliedern auch unter Verwendung anderer Störfunktionen zu untersuchen. Naheliegend sind sinusförmige Störfunktionen. Wir gehen aus von der Gleichung:

$$A_0 x_A^{(n)} + A_1 x_A^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = x_E \quad (V,1)$$

Die Störfunktion habe also die Form

$$x_E = X_E \cos \omega t \quad (V,2)$$

Wenn wir mit (V,2) in (V,1) eingehen, so erhalten wir unbequem zu behandelnde Ausdrücke.

Wir erinnern uns aber der Beziehung

$$\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t},$$

bei der wir zur e-Funktion kommen, wenn wir zum Glied  $\cos \omega t$  noch  $j \sin \omega t$  hinzufügen. Wir haben damit eine Transformation vorgenommen. Für die Rechnung benutzen wir also

$$x_E = X_E e^{j\omega t} \quad (V,3)$$

Danach müssen wir rücktransformieren. Die reelle Lösung ist hierbei der Realteil der e-Funktion (Natürlich können wir auch von der sin-Funktion ausgehen und entsprechend verfahren, wobei die reelle Lösung der Imaginärteil der e-Funktion ist).

Wir setzen weiter

$$\left. \begin{aligned} x_A &= X_A e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{dx_A}{dt} &= j\omega X_A e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^n x_A}{dt^n} &= (j\omega)^n X_A e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (V,4)$$

Wir führen nun die für  $x_E$ ,  $x_A$ ,  $\frac{dx_A}{dt}$  ...  $\frac{d^n x_A}{dt^n}$  erhaltenen Ausdrücke in die Differentialgleichung ein und bekommen (V,5)

$$A_0(j\omega)^n X_A e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \dots + A_{n-1}(j\omega) X_A e^{j\varphi} e^{j\omega t} + A_n X_A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = X_E e^{j\omega t}$$

Wir wollen nun  $X_A e^{j\varphi}$  ermitteln und erhalten aus der vorangegangenen Gleichung (V,5) die folgende Gleichung (V,6)

$$\frac{X_A}{X_E} e^{j\varphi} = \frac{1}{A_0(j\omega)^n + A_1(j\omega)^{n-1} + \dots + A_{n-2}(j\omega)^2 + A_{n-1}(j\omega) + A_n}$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks hängt, abgesehen von der Frequenz, nur noch von den Systemparametern ab.

Weiter ist die Größe  $X_E$  auf der linken Seite bekannt.

Den Ausdruck

$$\frac{X_A}{X_E} e^{j\varphi} = W(j\omega) \quad (V,7)$$

nennen wir den komplexen Frequenzgang des Übertragungsgliedes. Mitunter spricht man auch von der Amplituden-Phasen-Frequenzcharakteristik.

Aus (V,4) und (V,7) erhalten wir

$$\begin{aligned} x_A &= W(j\omega) \cdot X_E e^{j\omega t} = |W(j\omega)| e^{j\varphi} \cdot X_E \cdot e^{j\omega t} = \\ &= |W(j\omega)| X_E e^{j(\omega t + \varphi)}, \end{aligned} \quad (V,8)$$

also die reelle Lösung

$$x_A = |W(j\omega)| X_E \cos(\omega t + \varphi), \quad (V,8a)$$

wobei

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} \{ W(j\omega) \}}{\operatorname{Re} \{ W(j\omega) \}}$$

Der absolute Betrag von  $W(j\omega)$  ist ein Maß für die durch das Übertragungsglied hervorgerufene Amplitudenänderung, während  $\varphi$  die dabei auftretende Phasenverschiebung angibt. Dabei ist vorausgesetzt, daß sich das System jeweils im stationären Zustand befindet, d.h., daß die Ausgleichsvorgänge abgeklungen sind. Wir wählen nun in dem Frequenzbereich von  $0 \dots +\infty$  eine hinreichende Zahl  $k$  von Frequenzen. Jede Frequenz lassen wir auf das Übertragungsglied solange wirken, bis der stationäre Zustand erreicht ist. Dann bestimmen wir die durch das Übertragungsglied hervorgerufenen Amplituden- und Phasenveränderungen und erhalten in der komplexen Zahlenebene die Punkte  $W(j\omega_1)$ ,  $W(j\omega_2)$ , ...,  $W(j\omega_k)$ . Diese Punkte verbinden wir nach steigenden Frequenzen und erhalten so in der komplexen Ebene den Frequenzgang des betrachteten Übertragungsgliedes.

Ehe wir auf einige Beispiele eingehen, wollen wir die an die Gleichung (V,1) anschließenden Überlegungen noch etwas erweitern.

Es ist möglich, daß auf der rechten Seite von (V,1) nicht nur  $x_E$ , sondern auch  $\frac{dx_E}{dt}$  usw. erscheint. Anstelle von (V,1) gehen wir also aus von:

$$A_0 x_A^{(n)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = B_m x_E + B_{m-1} \frac{dx_E}{dt} + \dots \quad (V,9)$$



Nach (V,2) erhalten wir  $\frac{dx_E}{dt} = j\omega X_E e^{j\omega t}$  usw. und bekommen schließlich

$$W(j\omega) = \frac{X_A}{X_E} e^{j\varphi} = \frac{B_0(j\omega)^m + \dots + B_{m-1}j\omega + B_m}{A_0(j\omega)^n + \dots + A_{n-1}j\omega + A_n} \quad (V,10)$$

Um eine einfachere Schreibweise zu erreichen, setzt man bei der Darstellung des Frequenzganges häufig  $j\omega = p$ . Dann schreibt sich (V,10) in der folgenden Form

$$W(p) = \frac{X_A}{X_E} e^{j\varphi} = \frac{B_0 p^m + \dots + B_{m-1}p + B_m}{A_0 p^n + \dots + A_{n-1}p + A_n}, \quad (V,11)$$

und damit ist dann

$$W(p) = \frac{X_A(p)}{X_E(p)} \quad (V,12)$$

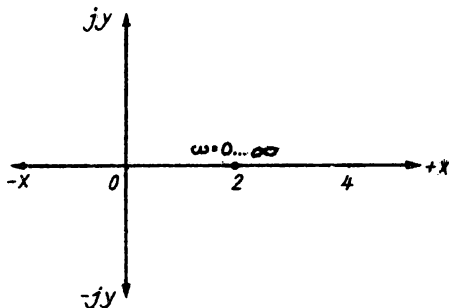
Wir erwähnen noch, daß dieser Ausdruck auch mit Hilfe der Laplace-Transformation gewonnen werden kann. Es ist

$$W(p) = \frac{X_A(p)}{X_E(p)} = \frac{\mathcal{L}\{x_A(t)\}}{\mathcal{L}\{x_E(t)\}}$$

In der Theorie der Regelung wird  $W(p)$  auch als Übertragungsfunktion bezeichnet.

## **[24] Beispiele. Frequenzgänge der behandelten Übertragungsglieder (I ... VIII)**

Frequenzgang I. Wendet man das im Anschluß an (V,3) entwickelte Verfahren an, so erkennt man, daß der zum Übertragungsglied ohne



Zeitabhängigkeit (I) gehörende Frequenzgang für alle Frequenzen in der gleichen, durch den Faktor  $k$  beschriebenen Amplitudenänderung besteht. Eine Phasenverschiebung tritt nicht auf. In diesem, wie auch in den folgenden Beispielen legen wir den Zeiger  $x_E$  vom Nullpunkt aus auf die positive reelle Halbachse (Bild 52). Unter Berücksichtigung von  $x_A = k \cdot x_E$  setzen wir  $k = 2$  entsprechend dem Beispiel auf Seite 46 voraus.

Bild 52  
Frequenzgang eines Übertragungsgliedes ohne Zeitabhängigkeit

Frequenzgang II. Aus der Differentialgleichung II (S. 47) folgt für den Frequenzgang

$$W(p) = \frac{1}{pT + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + \frac{-j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = x + jy$$

Damit haben wir den Frequenzgang in kartesischen Koordinaten erhalten, wobei  $x$  eine andere Bedeutung als  $x_A$  und  $x_E$  besitzt. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir

$$W(j\omega) = x + jy = |x + jy| e^{j\varphi} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{j\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{j \arctan(-\omega T)},$$

$$\text{wobei } \tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}} = -\omega T$$

$$\text{und } \varphi = \arctan(-\omega T)$$

Aus dem Zahlenbeispiel Bild 26 ergibt sich

$$W(j\omega) = \frac{0,4}{1 + 10 j\omega}$$

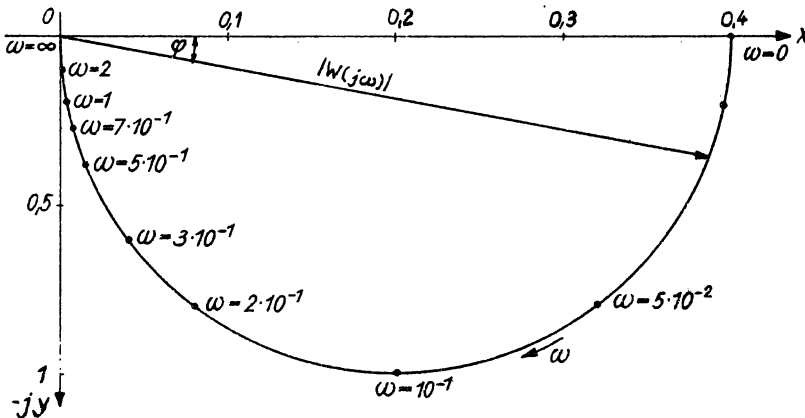


Bild 53  
Frequenzgang eines Übertragungsgliedes mit  
Zeitabhängigkeit 1. Ordnung

Wir erhalten demzufolge als Frequenzgang einen Halbkreis im vierten Quadranten, der mit einer ungleichmäßigen Frequenzteilung versehen ist, wie Sie aus Bild 53 entnehmen können. Die Zeiger  $W(j\omega)$  haben ihren Ursprung im Nullpunkt und enden auf dem Halbkreis. Wenn wir die Frequenz von  $0 \dots +\infty$  durchlaufen lassen, so ändert sich der Phasenwinkel  $\varphi$  von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$ .

Frequenzgang III. Aus der Differentialgleichung III (S. 50) erhalten wir als Frequenzganggleichung

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j\omega (T_1 + T_2 + T_{12})}$$

Die dem Beispiel auf Seite 52 entsprechende Frequenzganggleichung lautet

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{1}{1 - 1,12 \omega^2 + 2,90 j\omega}$$

Die dazugehörige Kurve ist in Bild 54 dargestellt. Beim Durchlaufen der Frequenz von  $0 \dots \infty$  ändert sich der Phasenwinkel von  $0^\circ$  auf  $-180^\circ$ .

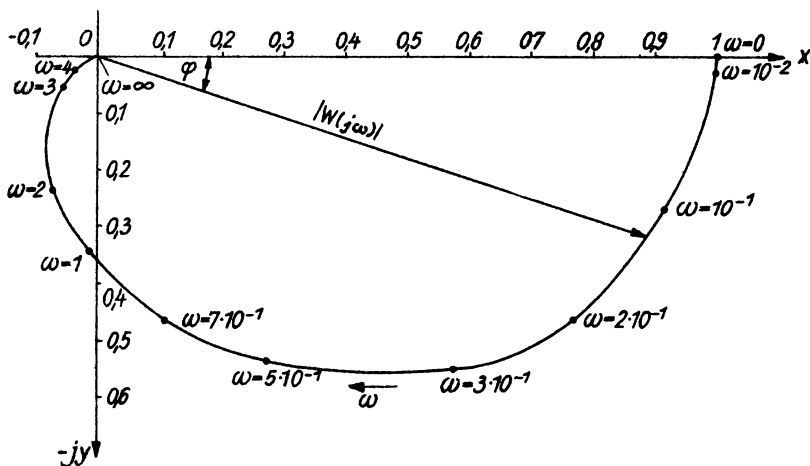


Bild 54  
Frequenzgang eines Übertragungsgliedes mit  
Zeitabhängigkeit 2. Ordnung

Frequenzgang IV. Von der Differentialgleichung für das Schwingungsglied (S.54) ausgehend, erhalten wir als Frequenzganggleichung

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{1}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j\omega T_1}$$

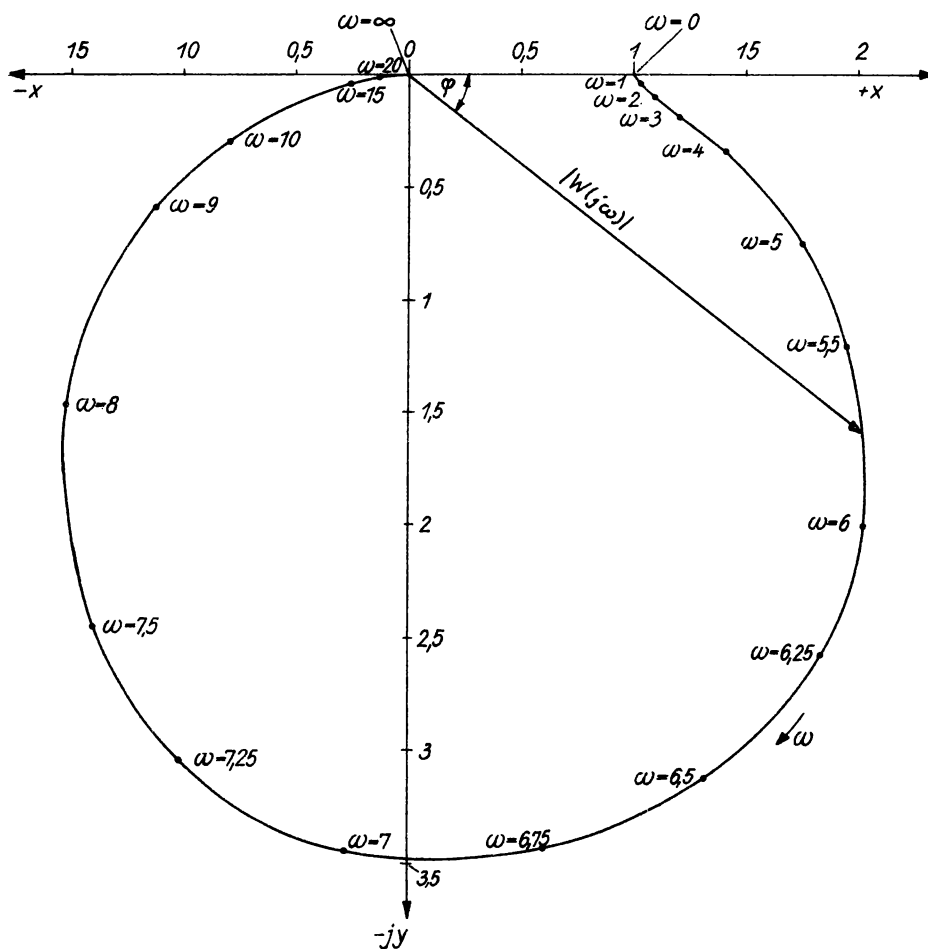


Bild 55

Frequenzgang eines Übertragungsgliedes mit Verzögerung 1. Ordnung und zusätzlicher Massenwirkung

Unter Zugrundelegung der Gleichung für das Beispiel auf S. 56 gewinnen wir

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - 0,0209 \omega^2 + 0,041 j\omega}$$

Die entsprechende Kurve zeigt Bild 55. Lassen wir die Frequenz von  $0 \dots +\infty$  wachsen, so erhalten wir auch hier als Ergebnis, daß der Phasenwinkel von  $0^\circ$  bis  $-180^\circ$  ansteigt.

Frequenzgang V. Aus der Differentialgleichung V für das integral wirkende Übertragungsglied (S. 57) ergibt sich der folgende komplexe Frequenzgang

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T}$$

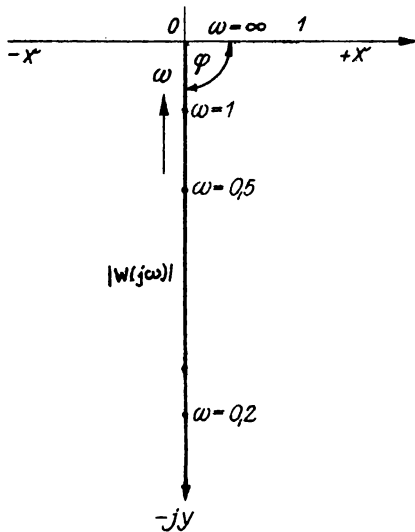


Bild 56

Frequenzgang eines integralwirkenden Übertragungsgliedes

Den Frequenzgang eines Übertragungsgliedes nach Bild 35 zeigt Bild 56. Wir haben beispielsweise  $W(j\omega) = \frac{1}{1,5j\omega}$ . In diesem Falle ist die Phase von  $x_A$  für alle Frequenzen um  $-90^\circ$  verschoben, und der Endpunkt des Zeigers bewegt sich, wenn man die Frequenz von  $0 \dots +\infty$  wachsen läßt, auf der negativen imaginären Achse, und zwar von  $-\infty$  kommend gegen 0.

Frequenzgang VI. Den Frequenzgang für das integralwirkende Übertragungsglied mit Verzögerung 1. Ordnung erhalten wir aus der Differentialgleichung VI (S. 58), und zwar ergibt sich

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{1}{T_1 j\omega - T_1 T_2 \omega^2}$$

Unter Benutzung des Zahlenbeispiels Bild 38 (S. 59) ergibt sich

$$W(j\omega) = \frac{2}{0,2 j\omega - 0,4 \omega^2}$$

Die Kurve, auf der der Endpunkt des Zeigers läuft, wenn man die Frequenz von  $0 \dots \infty$  ändert, liegt ganz im 3. Quadranten. Bei  $\omega = 0$  haben wir also bereits einen Phasenwinkel  $\varphi$  von  $-90^\circ$ . Bei wachsender Frequenz nähert sich der Phasenwinkel  $180^\circ$ , wobei gleichzeitig der Betrag von  $W(j\omega)$  monoton kleiner wird.

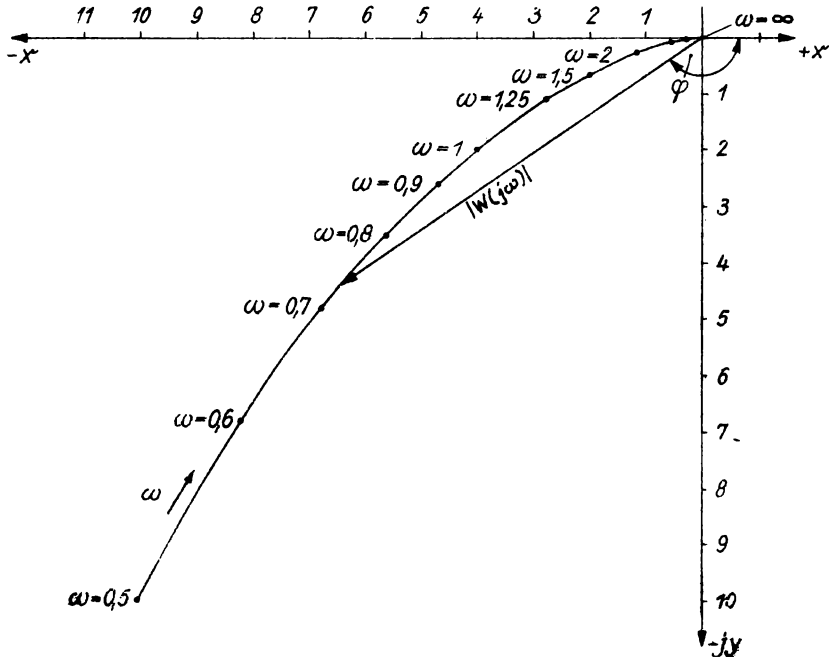
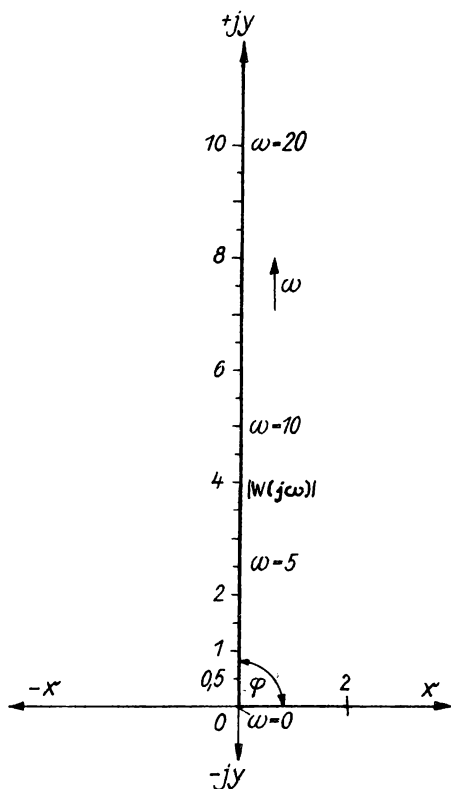


Bild 57  
Frequenzgang eines integralwirkenden Übertragungsgliedes  
mit Verzögerung 1. Ordnung

Frequenzgang VII. In diesem Falle erhalten wir aus Gleichung VII,  
Seite 60, formal

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = j\omega T$$



$W(j\omega)$  liegt also auf der positiven imaginären Achse, so daß der Phasenwinkel für alle Frequenzen von  $0 \dots \infty$  in diesem Falle  $+90^\circ$  beträgt.

Es war schon angedeutet worden, daß man den Frequenzgang VII experimentell nur in Annäherung erhält.

Mit  $W(j\omega) = 0,25 j\omega$  ( $T=0,25$ ) erhalten wir die Werte in Bild 58.

Bild 58  
Frequenzgang eines Differenzierenden Organs

Frequenzgang VIII. Wir gewinnen hier entsprechend den Darlegungen von Seite 62 für  $W(j\omega)$  den Ausdruck

$$W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = g \frac{T_r j\omega}{1 + T_r j\omega}$$

Wie sich aus Bild 59 ablesen läßt, bewegt sich der Endpunkt von  $W(j\omega)$  auf einem Halbkreis, der aber im 1. Quadranten liegt und dessen Durchmesser mit dem Anfangsbereich der positiven, reellen Achse zusammenfällt. Wächst die Frequenz von  $0 \dots +\infty$ , so fällt der Phasenwinkel von  $+90^\circ$  auf  $0^\circ$ , während die Amplitude von 0 bis auf den Wert des Kreisdurchmesser steigt. Das Auftreten eines positiven Phasenwinkels bei diesem Übertragungsgliede bedingt die Art seiner Verwendung in Reglern, worauf wir noch später zurückkommen.

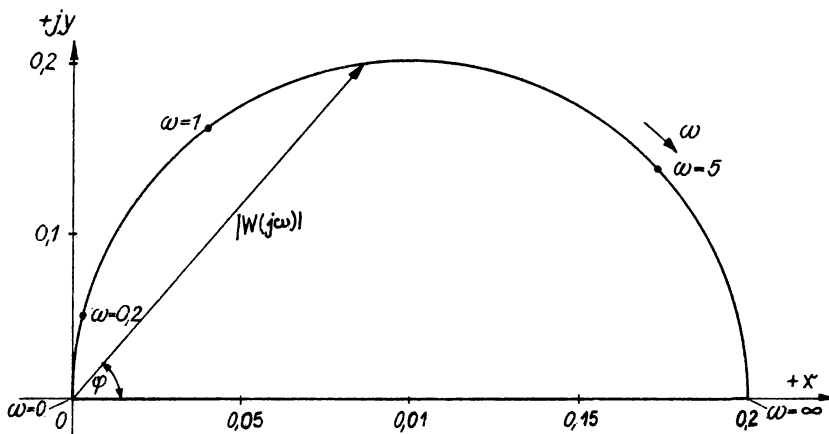


Bild 59  
Frequenzgang eines verzögerten D-Gliedes

## 125] Gesamtfrequenzgang zusammengeführter Bauelemente

Bisher haben wir uns mit dem Frequenzgang von relativ einfach gebauten Übertragungsgliedern befaßt. Es erhebt sich nun die Frage, wie der resultierende Frequenzgang aussieht, wenn man Bauelemente in verschiedener Weise zusammengefügt hat. Wir betrachten die 3 Fälle, die wir bereits bei der Zusammenstellung der Dgl. behandelt haben.

- a) Reihenschaltung
- b) Parallelschaltung
- c) Gegenschaltung

### a) Reihenschaltung

Bild 60 zeigt die Hintereinanderschaltung von 2 Baugruppen [1] und [2], wobei [2] auf [1] keine Rückwirkung ausübt.

Wir haben



$$W_1(j\omega) = \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)}$$

Bild 60  
Reihenschaltung zweier Bauglieder



$$\frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)} = \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)} \cdot \frac{x_{2E}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)} = \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)} \cdot \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)} = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)$$

Das Verfahren ist offensichtlich leicht auf eine Reihenschaltung von mehr als zwei Gliedern auszudehnen. Wir bekommen als Ergebnis, daß der resultierende Frequenzgang der Reihenschaltung mehrerer Elemente durch Multiplikation der Frequenzgänge der einzelnen Glieder gewonnen wird. Bei der Multiplikation addieren sich die Phasenwinkel, während sich die Beträge multiplizieren.

b) Parallelschaltung (Bild 61)

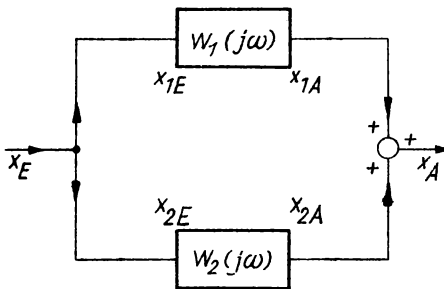


Bild 61  
Parallelschaltung zweier  
Bauglieder

Nun wollen wir den resultierenden Frequenzgang zweier parallelgeschalteter Bauglieder bestimmen.

Zunächst bemerken wir, daß gilt

$$x_E(j\omega) = x_{1E}(j\omega) = x_{2E}(j\omega)$$

$$x_A(j\omega) = x_{1A}(j\omega) + x_{2A}(j\omega)$$

$$W_1(j\omega) = \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)}$$

Nun ergibt sich

$$\frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{x_{1A}(j\omega) + x_{2A}(j\omega)}{x_E(j\omega)} = \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)} + \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)} = W_1(j\omega) + W_2(j\omega)$$

Den Frequenzgang zweier parallelgeschalteter Glieder erhält man also durch Addition der einzelnen Frequenzgänge. Auch hier läßt sich das Verfahren auf beliebig viele parallelgeschaltete Bauglieder erweitern.

c) Gegenschaltung (Bild 62)

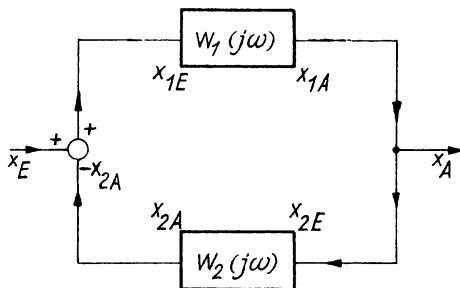


Bild 62  
Gegenschaltung zweier Bauglieder

Bei der Gegenschaltung müssen wir uns auf zwei Elemente mit den Frequenzgängen  $W_1(j\omega)$  und  $W_2(j\omega)$  beschränken.

Wir haben

$$x_A(j\omega) = x_{1A}(j\omega) = x_{2E}(j\omega)$$

und unter Berücksichtigung der Umpolung (siehe S. 72)

$$x_{1E}(j\omega) = x_E(j\omega) - x_{2A}(j\omega)$$

$$W_1(j\omega) = \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)} &= \frac{x_A(j\omega)}{x_{1E}(j\omega) + x_{2A}(j\omega)} = \frac{x_{1A}(j\omega)}{x_{1E}(j\omega) + x_{2A}(j\omega)} \\ &= \frac{1}{\frac{x_{1E}(j\omega)}{x_{1A}(j\omega)} + \frac{x_{2A}(j\omega)}{x_{2E}(j\omega)}} = \frac{1}{\frac{1}{W_1(j\omega)} + W_2(j\omega)} = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis werden wir im Folgenden noch benutzen.

Wir müssen noch kurz auf die Frage eingehen, in welcher Hinsicht die Anwendung der Frequenzgangmethode bei der Behandlung von Regelungsproblemen von Nutzen sein kann.

1. Man kann aus dem gemessenen Frequenzgang genauere Rückschlüsse auf die Form der Dgl. ziehen als aus der Form der Übergangsfunktion, die wir als Lösung der Dgl. unter Verwendung einer Sprungfunktion erhielten. Wie man im einzelnen von der Kurve des

Frequenzganges,- der Amplituden-Phasencharakteristik-, erst einmal auf die zugehörige Frequenzganggleichung kommt, geht über den Rahmen unserer Darlegungen hinaus. Aus den Beispielen kann man jedoch gewisse Schlüsse ziehen.

2. Wie wir später noch begründen werden, kann man auch aus dem Verlauf der Frequenzgangkurve Schlüsse auf das dynamische Verhalten des Reglers ziehen. Diese Anwendungsmöglichkeit ist einer der Gründe für die Einführung der Methode des Frequenzganges.

## **6. Kapitel: Stabilität von Regelkreisen**

### **[26] Das Problem der Stabilität**

Im Abschnitt [19] haben wir das zeitliche Verhalten einer Reihe von Regelstrecken, Meßeinrichtungen, Stellmotoren und Kraftschaltern (Verstärkern) betrachtet und auch die zugehörigen Differentialgleichungen aufgestellt. An das Zeitverhalten der einzelnen Übertragungsglieder hatten wir bisher keinerlei spezielle Forderungen gestellt, weil dazu kein Anlaß vorlag. Wir konnten nun die einzelnen Glieder zu einer offenen Kette zusammenschließen, wobei sich deren Zeitverhalten in der dargelegten Weise aus den einzelnen Gliedern bestimmen ließ und noch verhältnismäßig übersichtlich war.

Schließen wir die aus Regelstrecke und Regler bestehende Kette, so können sich die Verhältnisse wesentlich komplizieren, da in dem Regelkreise Energiequellen vorhanden sind. Dadurch ist grundsätzlich die Möglichkeit der Anfachung von Schwingungen gegeben, wobei die zu ihrer Entstehung und Aufrechterhaltung notwendige Energie eben von der Quelle geliefert wird. Wenn ein Regelkreis Schwingungen mit wachsender Amplitude ausführt - wegen der vergleichsweise niedrigen Frequenzen beim Regelungsvorgang spricht man oft von Pendelungen -, wird er als instabil bezeichnet, im anderen Fall ist er stabil.

Ein stabiles Regelungssystem wird nach einer aufgetretenen Störung immer versuchen, einen irgendwie gearteten Gleichgewichtszustand zu erreichen.

Ein instabiles Regelungssystem ist von vornherein völlig unbrauchbar, da es seine Aufgabe, die Regelgröße auf den vorgeschriebenen Wert einzustellen, nicht erfüllen kann. Aus diesem Grunde kommt der Untersuchung der Stabilität eine große praktische Bedeutung zu. Wir gehen dazu aus von der im Abschnitt [22] gewonnenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für den geschlossenen Regelkreis.

Diese Gleichung wurde aus denen der einzelnen Übertragungsglieder gewonnen.

Wenn nun die Differentialgleichung des Regelungssystems und die Anfangsbedingungen bekannt sind und die Koeffizienten zahlenmäßig gegeben sind, kann man das zeitliche Verhalten der Anordnung bestimmen, indem man die Differentialgleichung löst.

Die Gleichung des geschlossenen Regelkreises schreiben wir auf Seite 73 als (IV,14) in der Form:

$$A_0 x_A^{(n)} + A_1 x_A^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = 0 \quad (\text{VI},1)$$

Eine Störfunktion (auf der rechten Seite der Gleichung) ist nicht erforderlich, da wir uns auf die Betrachtung der freien Schwingungen (Pendelungen) beschränken können. Die Lösung dieser homogenen Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$x_A(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (\text{VI},2)$$

wobei die  $C_i$  die Integrationskonstanten sind. Die  $p_i$  sind Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Mehrfachwurzeln seien nicht vorhanden)

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0 \quad (\text{VI},3)$$

Diese Gleichung können wir unter Benutzung der  $n$  Wurzeln  $p_1 \dots p_n$  auch schreiben

$$(p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0$$

Die Wurzeln können nun die folgende Form besitzen

- (1)  $p = -x$
- (2)  $p = +x$
- (3)  $p = \pm jy$
- (4)  $p = -x \pm jy$
- (5)  $p = +x \pm jy$

und in der GAUSSschen Zahlenebene eingetragen werden.

Im Anschluß an die Schreibweise von S. 54 ff. ergibt sich die folgende Form

- (1)  $p = -\delta$
- (2)  $p = +\delta$
- (3)  $p = \pm j\omega$
- (4)  $p = -\delta \pm j\omega$
- (5)  $p = +\delta \pm j\omega$

In Bild 63 sind die verschiedenen Möglichkeiten der Lage der

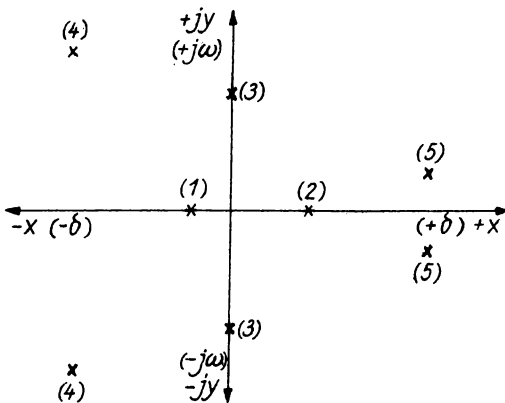


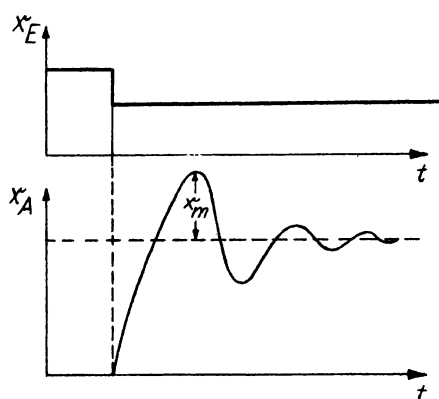
Bild 63  
Lage der Wurzeln in der  
GAUSSschen Zahlenebene

Wurzeln berücksichtigt, wobei die daneben eingetragenen Zahlen mit denen der Zusammenstellung übereinstimmen. Da bei einem stabilen Regelvorgang alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil besitzen müssen, { (1) oder (4) in Bild 63 }, liegen sie in diesem Falle ausnahmslos in der linken Halbebene.

Tritt außer Wurzeln mit negativem Realteil noch ein Paar rein imaginärer Wurzeln

{ (3) in Bild 63 } auf, so haben wir den Grenzfall der Stabilität vor uns, da sich ungedämpfte Schwingungen einstellen. (Von dem Standpunkt der Praxis aus ist ein Regelvorgang mit ungedämpften Pendelungen bereits völlig unbrauchbar.)

Ist in der charakteristischen Gleichung eine Wurzel oder ein Wurzelpaar mit positiven Realteil vorhanden { (2) und (5) in Bild 63 }, die also in der rechten Halbebene liegen, so ist der Vorgang instabil. Der Regler ist nicht verwendungsfähig, da er auch nach einer flüchtigen Störung nicht mehr in seine Ruhelage zurückkehrt. Wie schon angedeutet, muß man in der Praxis fordern, daß die Realteile der Wurzeln nicht nur negativ sind, sondern sie müssen auch noch einen ausreichenden Abstand von der imaginären Achse besitzen, damit der Ausgleichsvorgang schnell genug abklingt. Durch die Lage der Wurzeln ist bei einem System mit den Anfangsbedingungen gleich Null nach einer sprungförmigen Störung die Überschwingweite  $x_m$  und das Abklingen etwa vorhandener Schwingungen vollkommen bestimmt (Bild 64). Hat man also die Wurzeln der



charakteristischen Gleichung errechnet und festgestellt, daß sie im geforderten Teil der linken Halbebene (Bild 63) liegen, so ist die vorgegebene Aufgabe im wesentlichen gelöst. Man hat ermittelt, daß das lineare Regelungssystem mit ausreichender Genauigkeit arbeitet.

Bild 64  
Überschwingweite und Abklingen  
einer Schwingung nach sprungförmiger Störung

Oft wird aber der Fall eintreten, daß sich die betrachtete Anlage als instabil herausstellt. Dann muß man Parameter einzelner dazu geeigneter Übertragungsglieder abändern, wieder die Wurzeln der sich nun ergebenden charakteristischen Gleichung suchen und prüfen, ob sie in der linken Halbebene liegen. Die Ermittlung der Wurzeln ist zumindest bei Gleichungen höheren Grades ( $n > 4$ ) sehr mühsam, da man sie mittels Näherungsverfahren (z.B. nach GRAEFFE-LOBATSCHESKI) berechnen muß.

So erklärt es sich, daß man nach Methoden gesucht hat, die mit geringerem Zeitaufwand eine Aussage über die Stabilität erlauben, wobei das Vorhandensein der Differentialgleichung vorausgesetzt ist.

Itunter gelingt es aber gar nicht, die Differentialgleichung mit

der notwendigen Zuverlässigkeit zu ermitteln; sei es nun, daß dies aus physikalischen Gründen der Fall ist oder daß dem Praktiker die notwendigen mathematischen Fertigkeiten fehlen. Auch für diese Fälle mußten Prüfungsverfahren bereitgestellt werden. Wir werden uns daher anschließend mit einigen Verfahren zur Beurteilung der Stabilität befassen, von denen jedes seinen besonderen Vorzug besitzt.

## **[27] Stabilitätskriterium nach HURWITZ**

Betrachten wir die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$A_0 x_A^{(n)} + A_1 x_A^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = 0, \text{ vgl. (VI,1)}$$

so sind bekanntlich die Werte der Wurzeln der charakteristischen Gleichung durch die der Koeffizienten  $A_0, A_1 \dots A_n$  bestimmt. Man kann sich daher fragen, ob nicht durch Benutzung dieser Koeffizienten ein Stabilitätskriterium unmittelbar abzuleiten ist. Diese Aufgabe löste HURWITZ im Jahre 1895. Den Beweis für den allgemeinen Fall müssen wir unterdrücken, wollen aber an Gleichungen niedriger Ordnung zeigen, worauf es hier ankommt. Wir betrachten zunächst eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Ihre charakteristische Gleichung lautet:

$$A_0 p + A_1 = 0,$$

also ist

$$p = - \frac{A_1}{A_0},$$

und zwar negativ, wenn  $A_0$  und  $A_1$  reell und positiv sind. Mithin ist der durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschriebene Vorgang stabil, wenn die Koeffizienten der Gleichung reell sind und gleiches Vorzeichen haben, d.h. wenn  $A_0 > 0$  ist, muß auch  $A_1 > 0$  sein.

Die charakteristische Gleichung 2. Grades ist

$$A_0 p^2 + A_1 p + A_2 = 0 \quad (A_0 > 0)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung lauten bekanntlich

$$p_{1,2} = -\frac{A_1}{2A_0} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4A_0^2} - \frac{A_2}{A_0}}$$

Wenn  $A_1^2 - 4 A_0 A_2 > 0$ , so sind die Wurzeln reell, und zwar negativ, sofern außer  $A_0 > 0$

$$A_1 > 0 \quad \text{und} \quad A_0 A_2 > 0$$

Ist  $A_1^2 - 4 A_0 A_2 < 0$ , so erhält man bei  $A_2 > 0$  konjugiert komplexe Wurzeln. Der Realteil wird negativ mit  $A_1 > 0$ . Als Bedingung für die Stabilität genügt also auch hier noch, daß die Koeffizienten  $A_0, A_1, A_2$  das gleiche Vorzeichen besitzen müssen. Die bei der charakteristischen Gleichung 2. Grades für die Stabilität hinreichende Bedingung, daß die Koeffizienten  $A_0, A_1, A_2$  positiv sein müssen, ist bei Gleichungen höheren Grades nicht mehr hinreichend. Das sei an zwei Beispielen nachgewiesen.

#### Beispiel 1:

$$p^3 + p^2 + p + 1 = (p + 1) (p^2 + 1) = (p + 1) (p - j) (p + j)$$

Das System befindet sich, obwohl alle Koeffizienten positiv sind, an der Grenze der Stabilität ( $p_{2,3} = \pm j$ ).

#### Beispiel 2:

$$p^3 + 0,8 p^2 + 0,81 p + 1,01 = (p + 1) (p - 0,1 + j) (p - 0,1 - j)$$

Obwohl also die Koeffizienten  $A_0, A_1, A_2, A_3$  der charakteristischen Gleichung positiv sind, tritt ein Wurzepaar mit positivem Realteil auf ( $p_{2,3} = + 0,1 \pm j$ ). Wir wollen nun bei einer charakteristischen Gleichung 3. Grades eine zusätzliche Bedingung ableiten, deren Erfüllung die Stabilität sicherstellt.

Wir gehen von der charakteristischen Gleichung 3. Grades aus

$$A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0$$



Die Koeffizienten  $A_0, A_1, A_2, A_3$  seien alle positiv. Bei dieser Gleichung muß eine reelle Wurzel auftreten, und diese ist negativ, da alle Koeffizienten positiv sind. Im vorliegenden Falle kann also nur Instabilität auftreten, wenn der Realteil der komplexen Wurzeln positiv wird.

Wir wollen nun die Werte der Koeffizienten bestimmen, für die ein komplexes Wurzelpaar auf der imaginären Achse liegt, ihr Realteil also gleich Null ist. Wir setzen  $p = j\omega$  und erhalten

$$A_0(j\omega)^3 + A_1(j\omega)^2 + A_2j\omega + A_3 = 0$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden folgenden Ausdrücke

$$A_3 - A_1\omega^2 = 0 \quad (\alpha)$$

$$\omega(A_2 - A_0\omega^2) = 0 \quad (\beta)$$

Aus  $(\beta)$  erhalten wir die Bedingung

$$\omega^2 = \frac{A_2}{A_0} \quad (\gamma)$$

Führen wir  $(\gamma)$  in  $(\alpha)$  ein, so finden wir

$$A_3 - A_1 \frac{A_2}{A_0} = 0 \quad (\delta)$$

oder

$$A_1A_2 - A_3A_0 = 0$$

Dies ist die Bedingung für die Grenze der Stabilität.

Wir könnten noch zeigen, daß die Wurzeln einen negativen Realteil besitzen, wenn

$$A_1A_2 - A_3A_0 > 0$$

Auf die Ableitung wollen wir verzichten. Ist  $A_1A_2 - A_3A_0 < 0$ , dann ist das System instabil. (Diese Behauptung prüfe der Leser am Beispiel 2!)

Die Bedingung  $A_1 A_2 - A_3 A_0 > 0$  können wir in Form einer Determinante schreiben. Es gilt:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0,$$

wenn Stabilität vorhanden ist.

Für den allgemeinen Fall, nämlich den der Differentialgleichung  $n$ -ten Grades (VI,1), ergibt sich nach HURWITZ das folgende Koeffizientenschema

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} A_1 & A_3 & A_5 & & & \\ \hline A_0 & A_2 & A_4 & & & \\ \hline 0 & A_1 & A_3 & & & \\ \hline 0 & A_0 & A_2 & & & \\ & \cdot & & & & \\ & \cdot & & & & A_n \end{array} \right\}$$

Damit das System stabil ist, müssen die durch gestrichelte Linien abgeteilten Determinanten sämtlich größer als Null sein.

Die Bildung der Determinanten sei an einer Gleichung 3. Ordnung erläutert.

$$A_0 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + A_2 \frac{dx_A}{dt} + A_3 x_A = 0;$$

daraus ergibt sich das Schema zu

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{array} \right\}$$

1. Determinante:  $|A_1| > 0$

2. Determinante:  $\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0$

3. Determinante:  $\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = A_3 \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0$

Da  $A_3 > 0$  ist, bringt die Berechnung der 3. Determinante nichts Neues. Die 2. Determinante haben wir bereits früher bei der Betrachtung der Gleichung 3. Grades abgeleitet.

Schließlich geben wir noch das Schema für die Gleichung 5. Ordnung.

$$A_0 \frac{d^5 x_A}{dt^5} + A_1 \frac{d^4 x_A}{dt^4} + A_2 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + A_3 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + A_4 \frac{dx_A}{dt} + A_5 x_A = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} A_1 & A_3 & A_5 & 0 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & A_5 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_3 & A_5 \end{array} \right\}$$

Die Berechnung der einzelnen Determinanten überlassen wir dem Leser.

#### Beurteilung der Methode

a) Um das HURWITZsche Kriterium anwenden zu können, muß die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises vorliegen. Nun stößt aber die Entwicklung der Differentialgleichung und vor allem die Bestimmung des Koeffizienten oft auf Schwierigkeiten, wovon wir uns schon selbst überzeugen konnten.

- b) Das Ergebnis bei der Auswertung des HURWITZ-Determinanten besagt nur, daß das System stabil oder instabil ist. Das Kriterium gibt aber ungenügend Antwort auf die Frage, wie das System verändert werden muß, um einen stabilen Regelungsvorgang zu erhalten.
- c) Nach dem Kriterium gilt ein Regelungssystem als stabil, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der linken Halbebene liegen. Falls Wurzeln der charakteristischen Gleichung nahe der imaginären Achse liegen, ist der Vorgang der Regelung entsprechend schlecht gedämpft und der Regler in der Praxis in diesem Zustand unbrauchbar. Man kann allerdings durch eine geeignete Transformation das HURWITZsche Kriterium verschärfen: Die Determinanten sind nach der Transformation nur dann größer als Null, wenn die Wurzeln einen vorgegebenen Mindestabstand von der imaginären Achse besitzen, worauf wir aber hier nicht eingehen.
- d) Für Gleichungen mit  $n > 5$  ist die Berechnung der Determinanten mühsam, allerdings wesentlich leichter als die Ermittlung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

#### Beispiel

Wir schließen uns an den Druckregelkreis, dargestellt in Bild 19, an, wobei die Zahlenwerte der Koeffizienten etwas willkürlich so gewählt sind, daß das Wesentliche möglichst klar herauskommt. Für die Gleichung der Druckkammer setzten wir an (siehe S. 74 )

$$10 \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E$$

Weiter nahmen wir an, daß das Wellrohr vergleichsweise schnell reagiert, so daß wir seine Zeitkonstante gegenüber der der Druckkammer vernachlässigen können. Wir setzen also

$$u_A = k_u \cdot u_E$$

Die Gleichung der Prallplatte schreiben wir

$$v_A = k_v \cdot v_E$$

Schließlich haben wir noch die Gleichung für den Membranantrieb (Stellmotor) anzuschreiben:

$$2 \frac{d^2 w_A}{dt^2} + 4 \frac{dw_A}{dt} + w_A = w_E$$

Wir bilden nun die offene Kette (Bild 65)

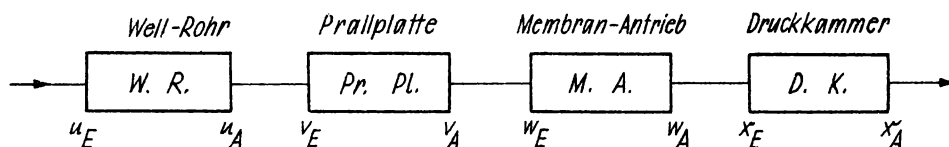


Bild 65  
Druckregelkreis, vgl. Bild 19, offene Kette

Nach Elimination der Größen  $u_A$ ,  $v_E$ ,  $v_A$ ,  $w_E$ ,  $w_A$ ,  $x_E$  erhalten wir (vgl. S. 75 ff.)

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = k_u k_v u_E$$

Wir bemerken, daß  $x_A$  und  $u_E$  dimensionsgleich sind. Das ergibt sich aus dem Aufbau der Kette.

Nun wollen wir zuerst bestätigen, daß der offene Kreis stabil ist. Wir untersuchen also die Gleichung

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 0$$

Dabei ist

$$A_0 = 20, \quad A_1 = 42, \quad A_2 = 14, \quad A_3 = 1$$

Das Schema lautet also

$$\begin{Bmatrix} 42 & 1 & 0 \\ 20 & 14 & 0 \\ 0 & 42 & 1 \end{Bmatrix}$$

Von Interesse ist nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} 42 & 1 \\ 20 & 14 \end{vmatrix} = 42 \cdot 14 - 20 > 0$$

Unsere Vermutung hat sich als richtig herausgestellt.

Nun schließen wir den Kreis, setzen  $k_u = 10$ ,  $k_v = 20$  und

$$u_E = -x_A \text{ (siehe dazu S. 72 )}.$$

Wir erhalten

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + (1 + 200) x_A = 0$$

Die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises besitzt folgende Zahlenwerte für die Koeffizienten.

$$A_0 = 20, A_1 = 42, A_2 = 14, A_3 = 201$$

Wir gewinnen also das Schema

$$\begin{pmatrix} 42 & 201 & 0 \\ 20 & 14 & 0 \\ 0 & 42 & 201 \end{pmatrix}$$

Die 2. Determinante ergibt

$$\begin{vmatrix} 42 & 201 \\ 20 & 14 \end{vmatrix} = 42 \cdot 14 - 20 \cdot 201 < 0, \text{ d.h.,}$$

der geschlossene Kreis ist mit  $k = 200$  instabil.

Jetzt wollen wir das Produkt  $k_u \cdot k_v$  so weit verkleinern, daß wir den Grenzfall der Stabilität erhalten. Es muß also sein:

$$42 \cdot 14 - 20 (1 + k_u \cdot k_v) = 0$$

Der Grenzfall der Stabilität liegt also hier vor, wenn  $k_u \cdot k_v = 28,4$  wird. Wählen wir also  $k_u \cdot k_v < 28,4$ , so ist der geschlossene Kreis stabil. Wir bemerken, daß es nicht immer gelingt, durch Verringerung des Verstärkungsfaktors Stabilität zu erzielen. Darauf gehen wir im 7. Kapitel ein.

## **[28] Stabilitätskriterium nach MICHAILLOW-LEONHARD**

Wie schon auf Seite 99 unter d) bemerkt, steigt die Rechenarbeit bei der Ermittlung der HURWITZ-Determinanten sehr schnell an, wenn die Ordnung der Dgl. höher wird. In solchen Fällen wendet man zweckmäßigerweise das Stabilitätskriterium nach MICHAILLOW-LEONHARD an. An seiner Aufstellung waren KÖNIG (1937), MICHAILLOW (1938) und unabhängig davon LEONHARD (1944), hauptsächlich aber MICHAILLOW beteiligt.

Wir gehen wieder von der Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises aus, wobei keine Störgrößen vorhanden sind.

$$A_0 x_A^{(n)} + A_1 x_A^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = 0$$

Daraus gewinnt man die charakteristische Gleichung

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n = f(p) = 0$$

Wir setzen nun  $p = j\omega$  und erhalten also

$$A_0 (j\omega)^n + A_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + A_{n-1} j\omega + A_n = f(j\omega) = 0$$

Damit das System stabil ist, muß  $f(j\omega)$  folgende Bedingungen erfüllen

a)  $f(j\omega) \neq 0$  für  $\omega = 0$ , d.h.  $A_n \neq 0$

b) Die Spitze des Zeigers  $f(j\omega)$  muß nacheinander, und zwar ohne Ausnahme  $n$  Quadranten ( $n = \text{Grad der charakteristischen Gleichung}$ ), in mathematisch positivem Sinne (entgegengesetzt dem Uhrzeiger) durchlaufen, wenn  $\omega$  von  $0 \dots +\infty$  geht.

Schreibt man dabei  $f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$ , so muß sowohl  $u(\omega) = 0$  als auch  $v(\omega) = 0$  reelle Wurzeln besitzen.

Weiter muß der Wert von  $u(\omega)$  und die Änderungsgeschwindigkeit  $v'(\omega)$  im Punkte  $\omega = 0$  das gleiche Vorzeichen besitzen.

Schließlich müssen die Nulldurchgänge von  $u(\omega)$  und  $v(\omega)$  mit wachsendem  $\omega$  einander abwechseln.

Um die Gültigkeit des MICHAJLOWschen Kriteriums nachzuweisen, schreiben wir

$$f(p) = A_0 (p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_n),$$

wobei die  $p_1, p_2 \dots p_n$  die Wurzeln der Gleichung sind.

Für  $p$  setzen wir speziell  $j\omega$  und erhalten

$$f(j\omega) = A_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) = A_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)$$

$f(j\omega)$  entsteht also aus dem Produkt der  $n$  Zeiger  $j\omega - p_i$ , wobei  $i$  von  $1 \dots n$  läuft.

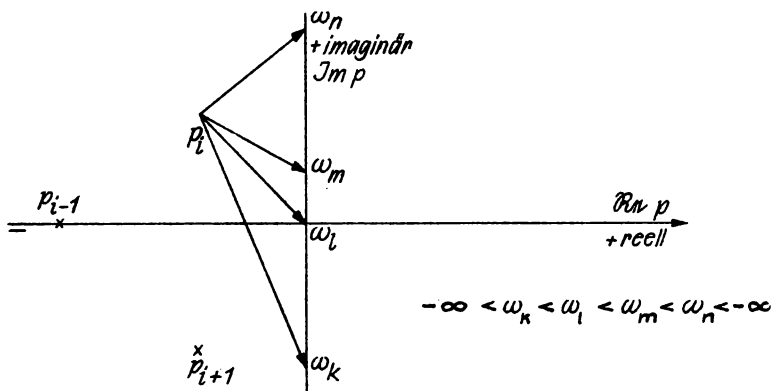


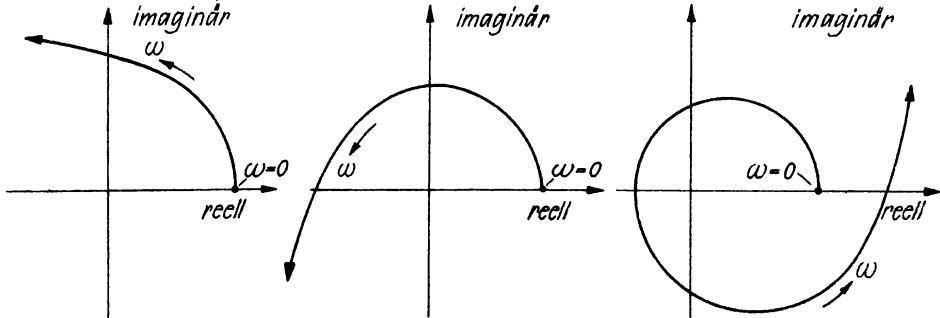
Bild 66  
Lage der Wurzeln in der Komplexen Ebene

Wir greifen nun einen Zeiger  $j\omega - p_i$  heraus (Bild 66). Sein Anfangspunkt liegt in  $p_i$  und die Spitze auf der imaginären Achse. Lassen wir nun  $\omega$  von  $-\infty$  an nach  $+\infty$  wachsen, so durchläuft der Zeiger in positiver Richtung den Winkel  $\pi$ , und zwar  $+\pi$ , weil  $p_i$  in der linken Halbebene liegt.

Wenn also alle  $n$  Wurzeln von  $f(j\omega)$  in der linken Halbebene liegen, erhalten wir bei Veränderung der Frequenz von  $-\infty$  bis  $+\infty$  eine Phasendrehung von  $+n\pi$ . Liegt dagegen eine Wurzel von  $f(j\omega)$  in der rechten Halbebene, so bekommen wir bei Veränderung der Frequenz von  $-\infty$  bis  $+\infty$  eine resultierende Phasendrehung von  $(n-2)\pi$ ; denn die  $(n-1)$  Zeiger, deren Anfangspunkte in der negativen Halbebene liegen, liefern  $(n-1)\pi$ , während der Zeiger, dessen Anfangspunkt in der positiven rechten Halbebene liegt,  $-\pi$  liefert. Da nur positive Frequenzen physikalische Realität besitzen, genügt es, wenn man die Frequenz von  $0 \dots +\infty$  variiert. Beim Antragen der Winkel berücksichtigen wir, daß  $f(j\omega)$  für  $\omega = 0$  einen positiven reellen Wert  $f(0) = A_n$  besitzt, da alle Koeffizienten der Gleichung positiv sind. Die Zählung beginnt daher auf der positiven reellen Achse mit dem Nullpunkt als Drehpunkt. Bei einem stabilen Regelungsvorgang erhält man dann eine Gesamtphasendrehung von  $+\frac{n\pi}{2}$ .



Wir zeigen Ihnen jetzt einige MICHAIIOWsche Kurven, und zwar zunächst solche, die zu einem stabilen Regelungssystem gehören.



a)

b)

Bild 67

c)

MICHAIIOWsche Kurven stabiler Regelungssysteme für:

- a) Differentialgleichung 2. Ordnung
- b) Differentialgleichung 3. Ordnung
- c) Differentialgleichung 5. Ordnung

Die folgenden drei MICHAIIOWschen Kurven ergeben sich, wenn die charakteristische Gleichung Wurzeln in der rechten Halbebene besitzt, das Regelungssystem also instabil ist.

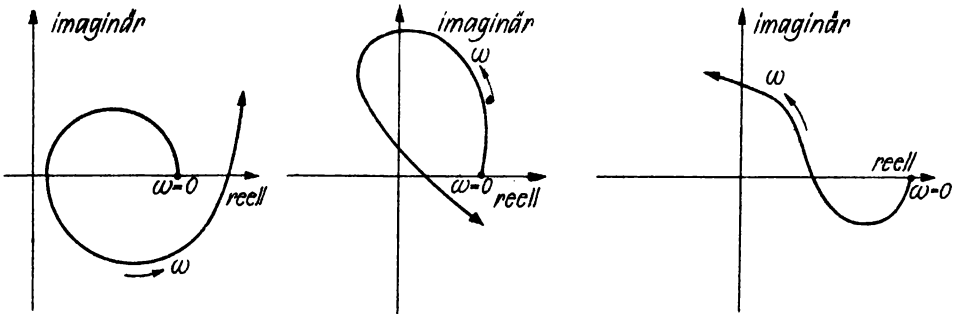


Bild 68

MICHAIIOWsche Kurven für instabile Regelungssysteme

Die Vorteile des MICHAIIOWschen Kriterium liegen also einmal darin, daß man bei Dgl. höherer Ordnung schneller zum Ziel kommt als mit dem HURWITZverfahren. Außerdem kann man zumindest bei einschleifigen Systemen den kritischen Wert des Verstärkungsfaktors bestimmen, wie auch aus dem folgenden Beispiel hervorgeht.

Zahlenbeispiel für das Stabilitätskriterium nach MICHAIIOW

Die vorgegebene Gleichung für den offenen Kreis (Druckregler) lautet

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 200 u_E$$

Hieraus gewinnen wir die charakteristische Gleichung für den offenen Kreis

$$20 p^3 + 42 p^2 + 14 p + 1 = 0$$

Mit  $p = j\omega$  ergibt sich

$$-20 j\omega^3 - 42 \omega^2 + 14 j\omega + 1 = 0$$

$$u(\omega) = 1 - 42 \omega^2$$

$$v(\omega) = 14 \omega - 20 \omega^3$$

Die Nullstellen liegen für:

$$u \text{ bei } \omega = \sqrt{\frac{1}{42}}$$

$$v \text{ bei } \omega = 0; \omega = \sqrt{\frac{14}{20}}$$

Die Nullstellen von  $u$  und  $v$  folgen also abwechselnd aufeinander, das offene System ist stabil. Bild 69 zeigt die dazugehörige MICHAIIOWSche Kurve.

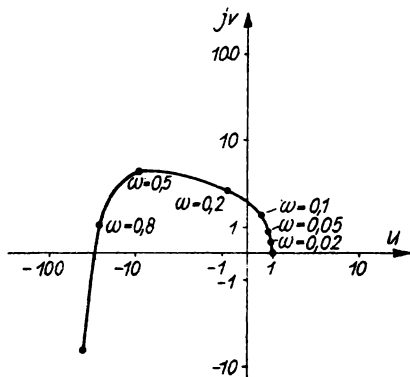


Bild 69  
MICHAIIOWSche Kurve des  
offenen, stabilen Systems

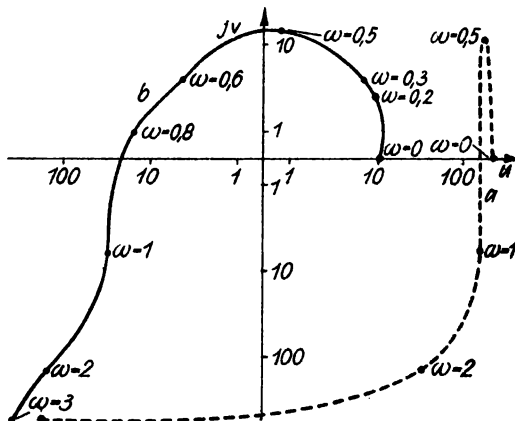


Bild 70  
MICHAIIOWSche Kurve des  
geschlossenen Systems  
a) mit  $k = 200$  (instabil) ---  
b) mit  $k = 10$  (stabil) —

Der Leser möge sich nicht an den ungewöhnlichen Maßstäben (0 ... 1 linear, 1 ...  $\infty$  logarithmisch) stoßen. Sie wurden gewählt, damit auf kleinem Diagramm das Wesentliche zu erkennen ist.

Schließen wir das System, indem wir  $u_E = -x_A$  setzen, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + 201 x_A = 0$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$20 p^3 + 42 p^2 + 14 p + 201 = 0$$

Setzen wir wieder  $p = j\omega$ , gewinnen wir

$$- 20 j\omega^3 - 42 \omega^2 + 14 j\omega + 201 = 0$$

$$u(\omega) = 201 - 42 \omega^2$$

$$v(\omega) = 14 \omega - 20 \omega^3$$

Die Nullstellen liegen für:

$$u \text{ bei } \omega = \sqrt{\frac{201}{42}}$$

$$v \text{ bei } \omega = \sqrt{\frac{14}{20}} \text{ und } \omega = 0$$

Hieraus ersehen Sie, daß die Nullstellen nicht abwechselnd aufeinander folgen. Das geschlossene System ist also instabil (Bild 70a). Da nach der Rechnung auf S. 101 der Verstärkungsfaktor  $k < 28,4$  sein muß, um Stabilität zu erhalten, wollen wir noch eine Stabilitätsbetrachtung mit  $k = 10$  durchführen, um einen besseren Einblick in das Verfahren zu erhalten.

Wir erhalten also die Gleichung

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + (10 + 1) x_A = 0$$

Wir erhalten entsprechend

$$- 20 j\omega^3 - 42 \omega^2 + 14 j\omega + 11 = 0$$

$$u(\omega) = 11 - 42 \omega^2$$

$$v(\omega) = 14 \omega - 20 \omega^3$$

Die Nullstellen ergeben sich für:

$$u \text{ bei } \omega = \sqrt{\frac{11}{42}}$$

$$v \text{ bei } \omega = \sqrt{\frac{14}{20}} \text{ und } \omega = 0$$

Die Nullstellen von  $u$ ,  $v$  folgen also abwechselnd aufeinander (siehe Bild 70b). Das System ist also mit  $k = 10$  stabil.

## **[29] Stabilitätskriterium nach NYQUIST**

**1. Die Grundlage des Verfahrens.** Bei den Kriterien nach HURWITZ und MICHAÏLOW geht man von der Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises aus. Diese muß man also erst einmal kennen. Da wir aber schon bemerkten, daß die Ermittlung der Differentialgleichung des einzelnen Übertragungsgliedes bzw. des gesamten Regelkreises oft Schwierigkeiten bereitet, haben die beiden bisher behandelten Kriterien für den Praktiker unter Umständen einen nur begrenzten Wert.

Für die praktische Verwendung wären demgemäß Verfahren von Nutzen, bei denen man eine Beurteilung der Stabilität auf Grund angestellter Messungen vornehmen kann. Es liegt nahe, die Methode des Frequenzganges in dieser Richtung zu untersuchen. Für den Frequenzgang einer offenen Kette hatten wir die Gleichung (V,11) gefunden, die wir in der folgenden Form schreiben

$$-\frac{x_A(p)}{x_E(p)} = \frac{B_0 p^m + \dots + B_{m-1} p + B_m}{A_0 p^n + \dots + A_{n-1} p + A_n}, \quad \text{wobei } n \geq m \text{ (VI,4)}$$

Wenn nun entsprechend (VI,4) für irgend eine Frequenz nach Betrag und Phase  $x_A = x_E$  wird, bleibt nach Schließen des Kreises eine einmal aufgetretene Schwingung bestehen. Wir befinden uns also an der Grenze der Stabilität, wobei sich aus (VI,4) und (V,12) die Beziehung ergibt

$$1 + W(j\omega) = 0 \quad \text{(VI,5)}$$

Man wird nun die Frage stellen, wie sich das System verhält, wenn  $x_A(\omega_0) \neq x_E(\omega_0)$  ist. Man kann erwarten, daß das System stabil ist, wenn  $x_E(\omega_0) < x_A(\omega_0)$  ist. Dagegen stellt sich der Schluß, daß das System instabil wird, wenn  $x_A(\omega_0) > x_E(\omega_0)$  ist, in manchen Fällen als voreilig heraus.

Bei der Ermittlung des Frequenzganges einer einschleifigen Kette, die im offenen Zustand stabil ist, erhalten wir nämlich drei verschiedene Fälle:

a) Die Kurve beginnt bei  $\omega = 0$  auf der positiven reellen Achse, läuft dann durch den vierten Quadranten usw., um schließlich bei  $\omega = +\infty$  im Nullpunkt zu enden. In manchen Fällen beginnt die Ortskurve im Nullpunkt oder im Unendlichen. Wie aus Bild 71 zu ersehen ist, umfaßt die Kurve den Punkt  $(-1, 0)$  nicht, sondern läßt ihn links liegen, wenn man sich auf der Kurve mit steigendem  $\omega$  bewegt. Hierbei ist also  $x_A(\omega_0) < x_E(\omega_0)$ . Einschleifige Systeme, bei denen der Frequenzgang des aufgeschnittenen Kreises nach Bild 71 verläuft, sind auch nach Schließung des Kreises stabil. Dabei ist zu berücksichtigen, daß noch der Wirkungssinn an einer Stelle innerhalb der Kette umzukehren ist (siehe Seite 72).

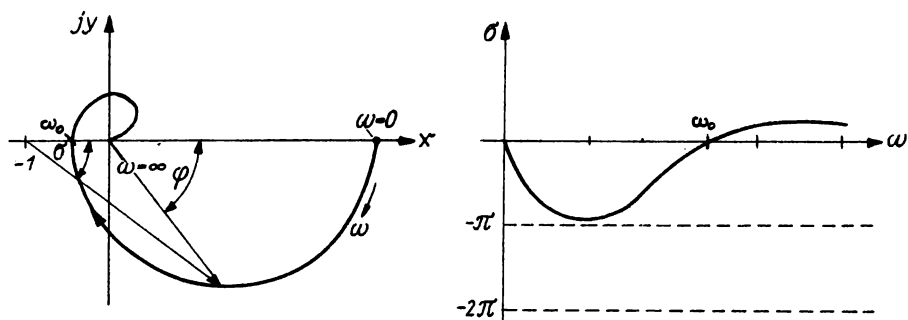


Bild 71  
NYQUIST-Kurve eines stabilen Regelungssystems

b) Die Kurve beginnt wieder bei  $\omega = 0$  auf der reellen Achse, läuft durch den vierten Quadranten usw., aber umschlingt jetzt den Punkt  $(-1, 0)$ , um dann bei  $\omega = +\infty$  im Nullpunkt zu enden (Bild 72). Zeigt ein aufgeschnittener Regelkreis eine solche Charakteristik, so ist das geschlossene System instabil.

Die Fälle a) und b) lassen sich formal auch durch Benutzung der Beziehung (VI,5) erklären, die als BARKHAUSEN-Bedingung bekannt ist. Wir können danach aus dem Verlauf des Frequenzganges des aufgeschnittenen Kreises gemäß a) oder b) einen Schluß auf die Stabilität der geschlossenen Kette ziehen.

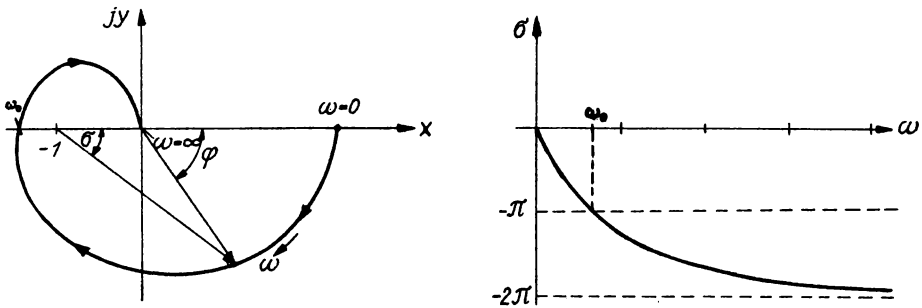


Bild 72  
NYQUIST-Kurve eines instabilen Regelungssystems

c) Manchmal erhält man aber einen Frequenzgang, der bei kleinen Frequenzen ähnlich wie unter a) und b) verläuft. Dann aber schneidet die Kurve die negative reelle Achse zweimal, und zwar wechselt sie aus dem dritten Quadranten in den zweiten und rückläufig in den dritten Quadranten zurück, ohne den Punkt  $(-1,0)$  zu umfassen. Bei  $\omega \rightarrow \infty$  wendet sie sich gegen den Koordinatenanfangspunkt (Bild 73).

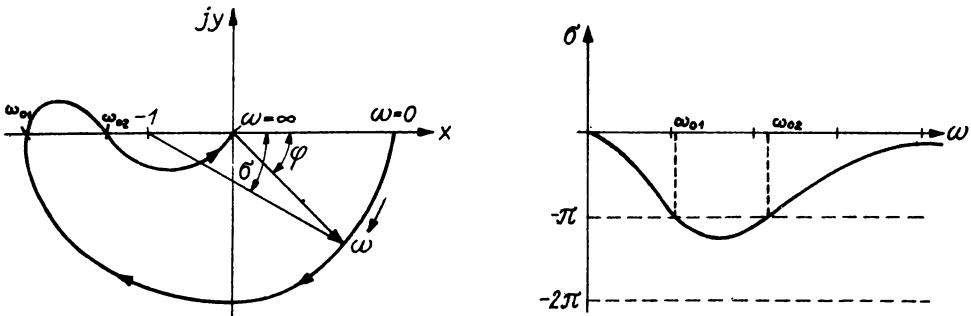


Bild 73  
NYQUIST-Kurve eines bedingt stabilen Regelungssystems

Erfahrungsgemäß sind Regelkreise, bei denen das offene System einen Frequenzgang nach c) ergibt, stabil. Man beachte, daß die bedenkenlose Anwendung der Gleichung  $1 + W(j\omega) = 0$  unrichtige Ergebnisse zur Folge haben kann. Häufig bezeichnet man übrigens einen Regelkreis, der im aufgeschnittenen Zustand einen Frequenzgang nach Bild 73 aufweist, als bedingt stabil. Ein wirklich brauchbares Verfahren, das aus dem Frequenzgang des offenen Systems einen Schluß auf die Stabilität des geschlossenen zuläßt, muß aber selbstverständlich für alle drei Fälle a), b), c) einwandfreie Resultate liefern. NYQUIST hat nun 1932 ein verschärftes Kriterium angegeben, das diese Forderung erfüllt. Da aber der von NYQUIST gezogene Schluß auf Stabilität bzw. Instabilität des geschlossenen Kreises aus dem Verlauf der Amplituden-Phasen-Charakteristik des aufgeschnittenen Kreises nicht unmittelbar einleuchtet, wollen wir das Verfahren näher begründen. Wir gehen aus von der Differentialgleichung des aufgeschnittenen Systems und erhalten (VI,6).

$$A_0 x_A^{(n)} + A_1 x_A^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \frac{dx_A}{dt} + A_n x_A = B_m x_E + B_{m-1} \frac{dx_E}{dt} + \dots + B_0 x_E^{(m)}$$

dabei ist  $n \geq m$ .

Die charakteristische Gleichung der linken Seite schreiben wir in der Form

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n = Q(p), \quad (\text{VI},7)$$

wobei alle Wurzeln von  $Q(p)$  einen negativen Realteil besitzen sollen. Schließen wir das System, setzen also  $x_A = -x_E$ , so wird

$$Q(p) = - \left\{ B_m + B_{m-1} p + \dots + B_0 p^m \right\} \quad (\text{VI},8)$$

Weiter setzen wir abkürzend:

$$\left\{ B_m + B_{m-1} p + \dots + B_0 p^m \right\} = R(p), \quad (\text{VI},8a)$$

so daß die charakteristische Gleichung des geschlossenen Systems die Form annimmt

$$Q(p) + R(p) = 0 \quad (\text{VI},9)$$

Nun bilden wir

$$\frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} \quad (\text{VI},10)$$

Das Nennerpolynom, das wir aus der Gleichung der offenen Kette erhalten haben, besitzt nach Voraussetzung nur Wurzeln mit negativem Realteil. Das Zählerpolynom dagegen haben wir aus der Gleichung des geschlossenen Regelkreises gewonnen. Durch Schließen des Regelkreises können hier Wurzeln mit positivem Realteil auftreten, die in der rechten Halbebene liegen.

Bezeichnen wir die Wurzeln des Zählers mit  $p_1, p_2 \dots p_n$  und die des Nenners mit  $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n$ , so können wir schreiben

$$\frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \text{konst.} \frac{(p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n)}{(p - \bar{p}_1) (p - \bar{p}_2) \dots (p - \bar{p}_n)} \quad (\text{VI},11)$$

In der Ebene der Wurzeln, der  $p$ -Ebene, entspricht jedem Wert der Wurzel ein Punkt, dessen Abszisse gleich dem Realteil und dessen Ordinate gleich dem Imaginärteil der Wurzel ist. Folglich entspricht in der  $p$ -Ebene der Lage einer Wurzel jeweils ein Zeiger, der vom Koordinatenanfangspunkt bis zum Punkt  $p_1$  führt. Entsprechend ist  $(p - p_1)$  ein Zeiger, der gleich der Differenz der Zeiger  $p$  und  $p_1$  ist. Wir geben nun  $p$  rein imaginäre Werte, setzen also  $p = j\omega$ . Dann ergibt sich (falls keine Wurzel auf der imaginären Achse liegt)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} &= \text{konst.} \frac{(j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{(j\omega - \bar{p}_1) (j\omega - \bar{p}_2) \dots (j\omega - \bar{p}_n)} \\ &= \text{konst.} \frac{|j\omega - p_1| e^{j\psi_1} |j\omega - p_2| e^{j\psi_2} \dots |j\omega - p_n| e^{j\psi_n}}{|j\omega - \bar{p}_1| e^{j\varphi_1} |j\omega - \bar{p}_2| e^{j\varphi_2} \dots |j\omega - \bar{p}_n| e^{j\varphi_n}} \\ &= \text{konst.} \frac{|j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|}{|j\omega - \bar{p}_1| |j\omega - \bar{p}_2| \dots |j\omega - \bar{p}_n|} \cdot e^{j\{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)\}}, \quad (\text{VI},12) \end{aligned}$$



wobei

$$\{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)\} = \sigma$$

Wir greifen einen der Zeiger des Nenners, und zwar  $(j\omega - \bar{p}_1)$  heraus, wobei vorausgesetzt wird, daß  $\bar{p}_1$  einen negativen Realteil besitzt. Wenn wir nun  $\omega$  von  $-\infty$  über 0 nach  $+\infty$  laufen lassen, so dreht sich der Zeiger  $(j\omega - \bar{p}_1)$  im mathematisch positiven Sinne, und zwar um  $+\pi$ .

Greifen wir einen Zeiger  $(j\omega - p_1)$  des Zählers heraus, so erhalten wir bei Veränderung von  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ebenfalls eine Drehung um  $+\pi$ , wenn  $p_1$  einen negativen Realteil besitzt. Hat aber  $p_1$  einen positiven Realteil, so ergibt sich eine Drehung des Zeigers im mathematisch negativen Sinne, und zwar um  $-\pi$ .

Sind im Zähler keine Wurzeln mit positivem Realteil vorhanden, so erhalten wir dort eine Phasendrehung von  $n\pi$  und im Nenner ebenfalls eine von  $n\pi$ , wenn  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft. Die resultierende Phasendrehung  $\sigma$  ist also gleich Null, da sich bei einem Quotienten zweier komplexer Zahlen die Argumente subtrahieren.

Nun seien im Zähler  $k$  Wurzeln mit positivem Realteil vorhanden, die also in der rechten Halbebene liegen. Dann haben wir im Zähler von den  $(n - k)$  Wurzeln mit negativem Realteil eine Phasendrehung von  $(n - k)\pi$ . Die  $k$  Wurzeln mit positivem Realteil geben eine Phasendrehung von  $-k\pi$ , so daß wir eine Phasendrehung des Zählers von  $(n - 2k)\pi$  bekommen, wenn  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft. Die Phasendrehung  $\sigma$  beträgt mithin  $-2k\pi$ , wenn  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  wandert. Da nur positive Frequenzen physikalisch einen Sinn haben, bekommen wir also bei einer Änderung der Frequenz von 0 bis  $+\infty$  eine resultierende Phasendrehung von  $-k\pi$ . Nun haben wir noch die Frage zu erörtern, wie der Winkel  $\sigma$  angetragen wird. Dazu gehen wir aus von:

$$\frac{Q(j\omega) + R(j\omega)}{Q(j\omega)} = 1 + \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = K(j\omega)$$

oder

(VI, 13)

$$K(j\omega) - 1 = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = W(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{x_E(j\omega)}$$

Wir müssen also experimentell oder rechnerisch den Frequenzgang  $W(j\omega)$  gewinnen, entsprechend dem Abschnitt [23]. Zur Beurteilung der Stabilität haben wir nach der obigen Beziehung vom Punkt  $(-1, 0)$  auszugehen und den Winkel  $\sigma$  an der Strecke  $(-1, 0); (0, 0)$  im Punkte  $(-1, 0)$  anzutragen. Ist der resultierende Winkel  $\sigma$  ungleich Null, wenn  $\omega$  von 0 bis  $+\infty$  geht, so ist das System instabil.

Wir betrachten noch den Verlauf des Winkels  $\sigma$  bei unseren typischen Kurven (Bilder 71 ... 73). In den Fällen a) und c) Bilder 71 und 73 geht  $\sigma$  schließlich gegen Null, wenn nur  $\omega$  genügend groß wird, und dann ist das geschlossene System stabil.

Bei Fall b) geht dagegen  $\sigma$  nicht gegen Null, auch wenn  $\omega$  beliebig groß wird (Bild 72).

Wir haben bei einer Frequenzänderung von 0 bis  $+\infty$  eine resultierende Phasendrehung von  $-2\pi$  gefunden. Es treten also nach Schließung des Regelkreises zwei Wurzeln mit positivem Realteil auf, die als komplexe Doppelwurzel zu erwarten sind.

Der zu b) gehörende geschlossene Regelkreis ist daher instabil. Zum Schluß bemerken wir noch, daß bei manchen Autoren der Punkt  $(+1, 0)$  als kritischer Punkt benutzt wird, wobei die Umpolung bereits beim Zeichnen des Diagramms berücksichtigt wird. Dementsprechend verlagert sich der Frequenzgang. Am Prinzip ändert sich selbstverständlich nichts.

Das NYQUIST-Verfahren kann man immer dann mit Vorteil anwenden, wenn der für die Auswertung wichtige Frequenzbereich mit den üblichen Generatoren für Sinusschwingungen bequem überstrichen werden kann.

## 2. Beispiele

Das erste Beispiel ist mit Absicht sehr einfach. Hierbei soll nur eine Gedächtnisstütze für den Beginn der Kurve bei  $\omega = 0$  und die Lage des kritischen Punktes gegeben werden.

Wir gehen aus von der Dgl.

$$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = k x_E$$

Daraus erhalten wir

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

Mit  $R(j\omega) = k$  und  $Q(j\omega) = 1 + j\omega T$  ergibt sich

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

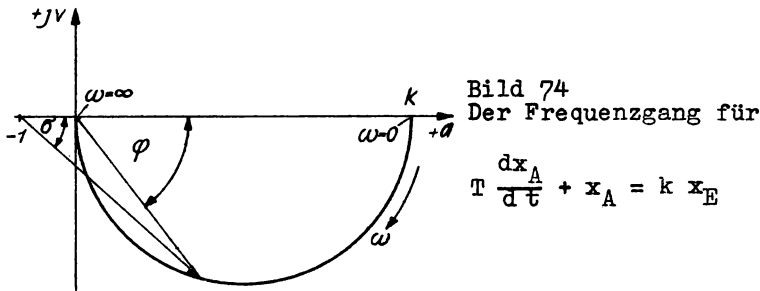
und

$$\left| \frac{x_A}{x_E} \right| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\arctan \varphi = -\omega T$$

$\varphi$  ist im Punkte (0,0) an die positive reelle Halbachse anzutragen.

Der Frequenzgang ist in diesem Falle ein Halbkreis, dessen Lage Bild 74 zeigt.



Zweites Beispiel. Wir benutzen die Gleichung des offenen Kreises

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 200 x_E,$$

die wir schon auf den Seiten 100 und 104 betrachtet haben.  
Hier ist

$$R(j\omega) = 200$$

$$Q(j\omega) = -20 j\omega^3 - 42 \omega^2 + 14 j\omega + 1$$

$$W(j\omega) = \frac{200}{1 - 42 \omega^2 + j\omega (14 - 20 \omega^2)}$$

Nun ermitteln wir  $\left| \frac{x_A}{x_E} \right|$  und den Phasenwinkel  $\varphi$ .

$$\frac{X_A}{X_E} = \frac{200}{\sqrt{(1 - 42 \omega^2)^2 + \omega^2 (14 - 20 \omega^2)^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan \left\{ - \frac{\omega(14 - 20 \omega^2)}{1 - 42 \omega^2} \right\}$$

In der folgenden Tabelle a) sind einige Punkte berechnet, die sich unter Benutzung von  $k_u \cdot k_v = k = 200$  ergeben.

a)

$k = 200$

$\omega$	$\frac{X_A}{X_E}$	$\varphi$
0	200	$0^\circ$
0,2	75	$-75^\circ$
0,5	20	$-154^\circ$
0,8	7,7	$-176^\circ$
1	4,8	$-188^\circ$

b)

$k = 10$

$\omega$	$\frac{X_A}{X_E}$	$\varphi$
0	10	$0^\circ$
0,2	3,75	$-75^\circ$
0,5	1	$-154^\circ$
0,8	0,39	$-176^\circ$
1	0,24	$-188^\circ$

Die dazugehörige Ortskurve ist in Bild 75 dargestellt. Der Punkt  $(-1, 0)$  wird umfaßt, so daß das geschlossene System instabil ist.

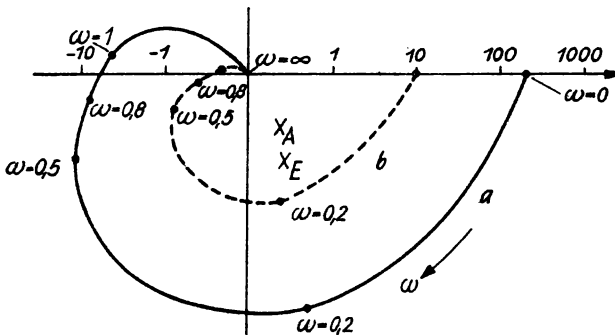


Bild 75  
Frequenzgang des Druckregelkreises

- a) Kurve für den instabilen Zustand  
 $k = 200$  —  
b) Kurve für den stabilen Zustand  
 $k = 10$  ---

Dieses Ergebnis hatten wir bereits unter Anwendung des HURWITZ- und MICHAÏLOW-Kriteriums gefunden. Auf S. 101 berechneten wir den Verstärkungsfaktor  $k$ , der den Grenzfall der Stabilität liefert. Wir erhielten den Wert  $k = 28,4$ .

Wir wollen deshalb noch das NYQUIST-Diagramm unter Zugrundelegung von  $k = 10$  ermitteln.

Die Gleichung lautet dann

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 10 x_E$$

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{10}{1 - 42 \omega^2 + j\omega (14 - 20 \omega^2)}$$

$$\varphi = \arctan \left\{ - \frac{\omega(14 - 20 \omega^2)}{1 - 42 \omega^2} \right\}$$

$$\frac{x_A}{x_E} = \frac{10}{\sqrt{(1 - 42 \omega^2)^2 + \omega^2 (14 - 20 \omega^2)^2}}$$

Wir erhalten die Tabelle b) auf Seite 115.

Die zugehörige Ortskurve zeigt Bild 75b.

Es bestätigt sich also, daß mit  $k = 10$  das System stabil ist.

### **[30] Stabilitätskriterium nach KÜPFMÜLLER**

1. **Vorbemerkungen.** In Abschnitt [22] hatten wir uns schon mit der Übergangsfunktion befaßt. Wir betrachteten die Änderung der Ausgangsgröße eines Übertragungselements, wenn an den Eingang eine Sprungfunktion gelegt wurde. Bei Verwendung einfacher Bauelemente war die Übergangsfunktion leicht zu übersehen. Dabei zeigte sich bei I ... VIII unmittelbar nach Auftreten einer sprungförmigen Störung  $x_E$  ein endlicher Ausgangswert  $x_A$ . Es kommt nun aber auch der Fall vor, daß nach einer sprungförmigen Eingangsstörung  $x_E$  eine bestimmte Zeit  $T_{tot}$ , die Totzeit, verstreicht, ehe eine endliche Ausgangsgröße  $x_A$  erscheint. Dementsprechend ist bei einer Regelstrecke die Totzeit  $T_{tot}$  diejenige Zeit, die vergeht, bis sich eine Veränderung der Stellgröße am Meßort auszuwirken beginnt (vgl. DIN 19226). Aus Bild 76 ist der Wert  $T_{tot}$  zu ersehen. Die Totzeit entsteht durch endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Als Beispiel erwähnen wir hier die Ausbreitung eines Wärmestromes durch die Wandung eines Ofens.

## 2. Das KÜPFMÜLLER-Verfahren. Nach den Vorbemerkungen

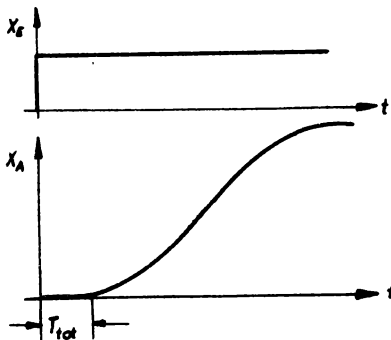


Bild 76  
Darstellung der Totzeit  $T_{\text{tot}}$

wollen wir uns nun dem KÜPFMÜLLER-Verfahren zuwenden. Zunächst bemerken wir, daß die vorher behandelten Stabilitätskriterien nicht angewandt werden können, wenn es weder gelingt, die Differentialgleichung des Regelkreises aufzustellen, noch den Frequenzgang experimentell zu bestimmen. Solche Verhältnisse liegen unter Umständen dann vor, wenn der Regelvorgang so langsam verläuft, daß der

Frequenzgang aus experimentellen oder zeitlichen Gründen nicht mit der notwendigen Genauigkeit gemessen werden kann. Weiterhin kann es erforderlich sein, einen in Betrieb befindlichen Regelkreis auf seine Funktion zu prüfen, ohne eine störende Betriebsunterbrechung eintreten zu lassen.

Häufig kann man nun in einem solchen Falle einen Schaltversuch durchführen. Man schneidet den Regelkreis auf und gibt an der Schnittstelle in Wirkungsrichtung eine sprunghafte Störung auf das System. Am anderen Ende der Schnittstelle wird die Reaktion des Systems auf die Störung gemessen. Die Vorzeichenumkehr in Bild 77 rührt daher, daß der vorher geschlossene Regelkreis auf eine

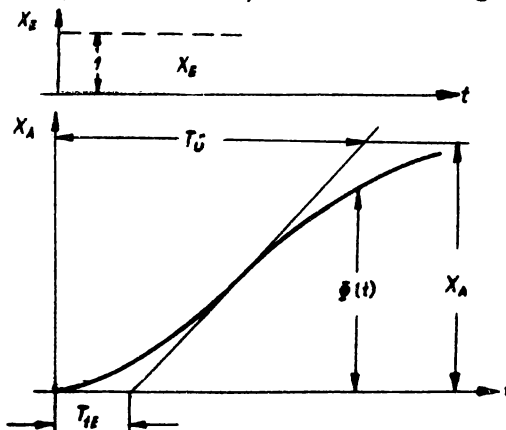


Bild 77  
Bestimmung von  $T_{tE}$  und  $T_{\text{ü}}$

Störung mit umgekehrten Vorzeichen reagieren muß, da er ja die aufgetretenen Abweichungen abbauen soll. Die Übertragungsfunktion  $\phi(t)$  werde wie folgt definiert

$$\phi(t) = \frac{x_A(t)}{x_E}$$

Für den Verstärkungsfaktor  $V$  erhalten wir

$$\frac{x_A(t)_{t \rightarrow \infty}}{x_E} = -V$$

Das Verhalten des geschlossenen Systems wird also offensichtlich durch den Verstärkungsfaktor  $V$  und durch die Form von  $\phi(t)$  bestimmt.

Da nun die Übergangsfunktion sehr verschieden aussehen kann, müßte man für jede spezielle Übergangsfunktion eine Stabilitätsrechnung durchführen. KÜPFMÜLLER umgeht diese Schwierigkeit, indem er die Übergangsfunktion durch geeignete, leichter zu behandelnde Ersatzkurven annähert.

Wir behandeln hier nur den Fall der aus Geradenstücken bestehenden Ersatzfunktion  $\phi_E$ , die wir auf folgendem Wege gewinnen, wobei wir  $x_E = 1$  voraussetzen. Wir legen an die Übergangsfunktion die Wendetangente. Sie schneidet auf der Abzissenachse die Ersatztotzeit  $T_{tE}$  ab. Auf der im Abstand  $V$  zur Abzissenachse verlaufenden Parallele wird durch die Wendetangente die Übergangszeit  $T_{ü}$  abgetrennt.

Die Ersatzkurve ist also folgendermaßen festgelegt:

$$\phi_E(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq T_{tE} \\ V \frac{t - T_{tE}}{T_{ü} - T_{tE}} & \text{für } T_{tE} \leq t \leq T_{ü} \\ V & \text{für } t \geq T_{ü} \end{array} \right\} \quad (\text{VI},13)$$

Für die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion  $\psi(t)$  gilt die Beziehung <sup>1)</sup>

$$\mathcal{L}\{\psi(t)\} = \psi_B(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (\text{VI},14)$$

Weiter erhält man die Übertragungsfunktion eines Systems, indem man die LAPLACE-Transformierte der Wirkung durch die LAPLACE-Transformierte

---

1) Wird in einem Abschnitt die LAPLACE-Transformation benutzt, so können sich die Nichtregelungstechniker von der Fakultät Maschinenbau auf die Aneignung der Ergebnisse beschränken.

der Ursache dividiert.

$$W(p) = \frac{\mathcal{L}\{\text{Wirkung}\}}{\mathcal{L}\{\text{Ursache}\}}$$

In unserem Falle benutzen wir als Ursache die Einheitssprungfunktion, deren LAPLACE-Transformierte  $\frac{1}{p}$  ist. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{\mathcal{L}\{\phi_E(t)\}}{\frac{1}{p}} = p \cdot \mathcal{L}\{\phi_E(t)\} = \\ &= p \cdot V \left[ \int_{T_{tE}}^{T_{\ddot{u}}} \frac{t - T_{tE}}{T_{\ddot{u}} - T_{tE}} e^{-pt} \cdot dt + \int_{T_{\ddot{u}}}^{\infty} e^{-pt} \cdot dt \right] = \\ &= \frac{V}{p(T_{\ddot{u}} - T_{tE})} \left( e^{-pT_{tE}} - e^{-pT_{\ddot{u}}} \right) \quad (\text{VI},15) \end{aligned}$$

Wir setzen nun  $j\omega$  für  $p$  ein und gewinnen den Frequenzgang

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{V}{T_{\ddot{u}} - T_{tE}} \cdot \frac{1}{j\omega} (\cos \omega T_{tE} - j \sin \omega T_{tE} - \cos \omega T_{\ddot{u}} + j \sin \omega T_{\ddot{u}}) \\ &= \frac{V}{\omega(T_{\ddot{u}} - T_{tE})} \left[ (\sin \omega T_{\ddot{u}} - \sin \omega T_{tE}) + \right. \\ &\quad \left. + j (\cos \omega T_{\ddot{u}} - \cos \omega T_{tE}) \right] \quad (\text{VI},16) \end{aligned}$$

Wir wenden nun die Beziehung (VI,5) an, um den Grenzfall der Stabilität zu gewinnen.

Imaginärteil und Realteil liefert je eine Gleichung:

$$\text{a) } \operatorname{Im} [W(j\omega)] = \frac{V}{\omega(T_{\ddot{u}} - T_{tE})} (\cos \omega T_{\ddot{u}} - \cos \omega T_{tE}) = 0 \quad (\text{VI},17a)$$

$$\text{b) } \operatorname{Re} [W(j\omega)] = \frac{V}{\omega(T_{\ddot{u}} - T_{tE})} (\sin \omega T_{\ddot{u}} - \sin \omega T_{tE}) = -1 \quad (\text{VI},17b)$$

Aus a) und b) folgt die Beziehung

$$\tan \left( \omega \frac{T_{\ddot{u}} + T_{tE}}{2} \right) = 0, \quad (\text{VI},18)$$



die unendlich viele Wurzeln besitzt

$$\omega \frac{T_{\ddot{u}} + T_{tE}}{2} = (k + 1) \pi, \quad (\text{VI},19)$$

wobei  $k$  eine beliebige, ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir die Wurzeln (VI,19) in die Gleichung (VI,17b) ein, so findet man

$$V = \frac{(-1)^k \left[ \frac{T_{\ddot{u}} - T_{tE}}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}} (k + 1) \right] \pi}{\sin \left[ \frac{T_{\ddot{u}} - T_{tE}}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}} (k + 1) \right] \pi} \quad (\text{VI},20)$$

Ungeradzahlige Werte für  $k$  scheiden aus, da sie negative Werte von  $V$  ergeben. Wie man leicht sieht, ergibt sich für  $k = 0$  (Grundwelle) die kleinste Verstärkung  $V$  für den Grenzfall der Stabilität, so daß wir uns auf diese Bedingung beschränken können. Wir erhalten

$$V_0 = \frac{\frac{T_{\ddot{u}} - T_{tE}}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}} \pi}{\sin \frac{T_{\ddot{u}} - T_{tE}}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}} \pi} = \frac{\frac{T_{\ddot{u}}/T_{tE} - 1}{T_{\ddot{u}}/T_{tE} + 1} \pi}{\sin \frac{T_{\ddot{u}}/T_{tE} - 1}{T_{\ddot{u}}/T_{tE} + 1} \pi} \quad (\text{VI},21)$$

Die kritische Verstärkung  $V_0$  ist also nur von dem Verhältnis  $\frac{T_{\ddot{u}}}{T_{tE}}$  abhängig, wie sich auch aus Bild 78 ergibt.

Je größer das Verhältnis  $\frac{T_{\ddot{u}}}{T_{tE}}$  ist, umso höher kann die kritische

Verstärkung  $V_0$  gewählt werden, und das wiederum bewirkt eine entsprechende Verbesserung der Regelgenauigkeit. Aus Gleichung (VI,19) kann man noch die Frequenz  $f$  der Pendelung an der Stabilitätsgrenze ermitteln.

$$f = \frac{k + 1}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}}, \text{ wobei } k \text{ geradzahlig ist.} \quad (\text{VI},22)$$

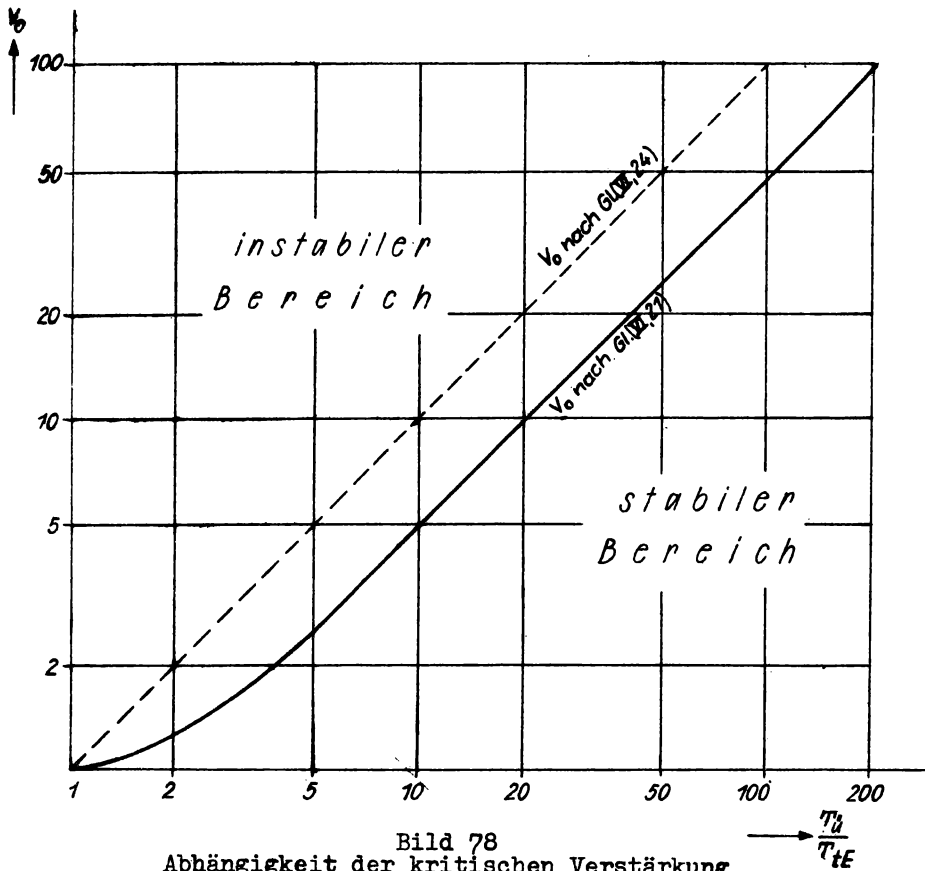


Bild 78  
Abhängigkeit der kritischen Verstärkung  
 $V_0$  vom Verhältnis  $\frac{T_{\ddot{u}}}{T_{tE}}$

Für  $k = 0$  erhalten wir

$$f_0 = \frac{1}{T_{\ddot{u}} + T_{tE}} \quad (\text{VI}, 23)$$

Als praktisch brauchbare Näherung für die kritische Verstärkung verwendet man

$$V_0 = \frac{T_{\ddot{u}}}{T_{tE}} \quad (\text{VI}, 24)$$

Beispiele für das Stabilitätskriterium nach Kűpfműller folgen im 3. Lehrbrief.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. Teil: Grundlagen der Regelungstechnik .....	61
4. Kapitel: Übertragungsglieder und Aufbau eines Reglers aus diesen Gliedern (Fortsetzung) .....	61
19 Zeitverhalten von Übertragungsgliedern (Fortsetzung) .....	61
20 Zusammenstellung der Gleichungen der behandelten Übertragungsglieder .....	63
21 Ermittlung der resultierenden Differentialgleichung beim Zusammenfügen mehrerer Übertragungs- glieder .....	65
22 Differentialgleichung eines Regelkreises .....	71
5. Kapitel: Komplexer Frequenzgang .....	76
23 Der Begriff des Komplexen Frequenzganges .....	76
24 Beispiele: Frequenzgänge der behandelten Über- tragungsglieder (I ... VIII) .....	80
25 Gesamtfrequenzgang zusammengefügtter Bauelemente ..	87
6. Kapitel: Stabilität von Regelkreisen .....	90
26 Das Problem der Stabilität .....	90
27 Stabilitätskriterium nach HURWITZ .....	94
28 Stabilitätskriterium nach MICHAILLOW-LEONHARD .....	101
29 Stabilitätskriterium nach NYQUIST .....	107
30 Stabilitätskriterium nach KÜPFMÜLLER .....	116



**LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM**

HERAUSGEGEBEN

VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

---

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

**3. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1964**



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9135/3

# **GRUNDLAGEN DER REGELUNGSTECHNIK**

**3. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1964**

von Dr. phil. **Heinrich Kindler**  
Professor mit Lehrstuhl  
an der Technischen Universität Dresden

Bearbeitet für das Fernstudium  
von Dipl.-Gwl. **Helmut Wiesenhütter**  
wissenschaftlicher Mitarbeiter  
der Hauptabteilung Fern- und Abendstudium  
der Technischen Universität Dresden



**VEB VERLAG TECHNIK BERLIN 1964**

**Nur für das Fernstudium bestimmt**

**VT-Bestell-Nr. 9135/3 · Auflage 1850 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/27/64/DDR  
Verfaßt für die Hauptabteilung Fern- und Abendstudium der Technischen Universität Dresden · Heraus-  
gegeben im Auftrag des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demo-  
kratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, Berlin  
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza**

## 6. Kapitel: Stabilität von Regelkreisen (Fortsetzung)

### [30] Stabilitätskriterium nach KÜPFMÜLLER (Fortsetzung)

#### 3. Beispiele

1. In diesem Zusammenhang gehen wir aus von der schon behandelten Gleichung des offenen Regelkreises

$$20 \frac{d^3 x_A}{dt^3} + 42 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 14 \frac{dx_A}{dt} + x_A = 200 x_E$$

Bei Anlegen der Einheitssprungfunktion ergibt sich für  $x_A(t)$

$$x_A(t) = 200 - 2,58 e^{-1,706 t} + 121 e^{-0,295 t} - 318 e^{-0,095 t}$$

Die Übergangsfunktion ist in Bild 79 dargestellt.

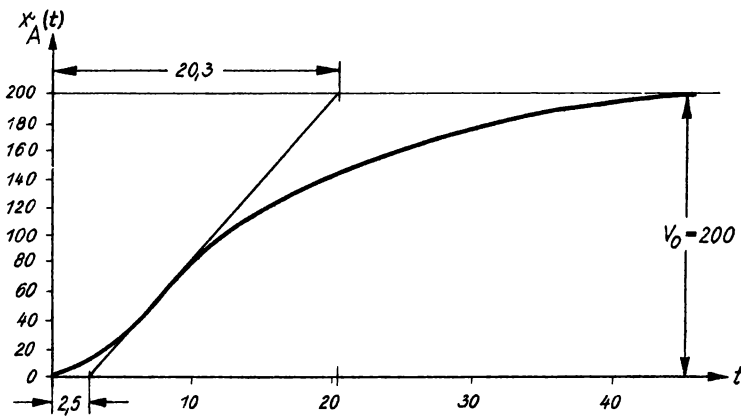


Bild 79  
Übergangsfunktion des 1. Beispielles

Wir zeichnen die Wendetangente und erhalten ein  $T_{\ddot{u}} = 20,3$  und ein  $T_{tE} = 2,5$ . Wir sehen sofort, daß der geschlossene Regelkreis bei einem Verstärkungsgrad von 200 instabil ist. Um Stabilität zu erreichen, verringern wir die Kreisverstärkung. Nach Bild 78 muß sie kleiner als 4,5 sein. Wenden wir unsere Faustformel

$$V_0 = \frac{T_{\ddot{u}}}{T_{tE}}$$



an, so erhalten wir eine zulässige Verstärkung von  $V \approx 8$ . Wir bekommen also einen wesentlich geringeren Wert des kritischen Verstärkungsfaktors als beim HURWITZ-Verfahren. Dies ist aber nicht verwunderlich, da die gebrochene Übergangsfunktion, mit der wir gerechnet haben, offensichtlich wesentlich ungünstiger ist, als die in der Praxis vorkommenden Funktionen ohne Knickstellen.

2. Ein weiteres von v. ENGEL-OLDENBOURG herrührendes Beispiel zeigt die Anwendungsmöglichkeit des KÜPFMÜLLER-Verfahrens besonders deutlich.

Eine Prüfkammer K (Bild 80) soll von einer etwa gleichbleibenden Luftmenge belüftet werden, und dabei soll eine relative Feuchtigkeit von 80 % aufrecht erhalten bleiben.

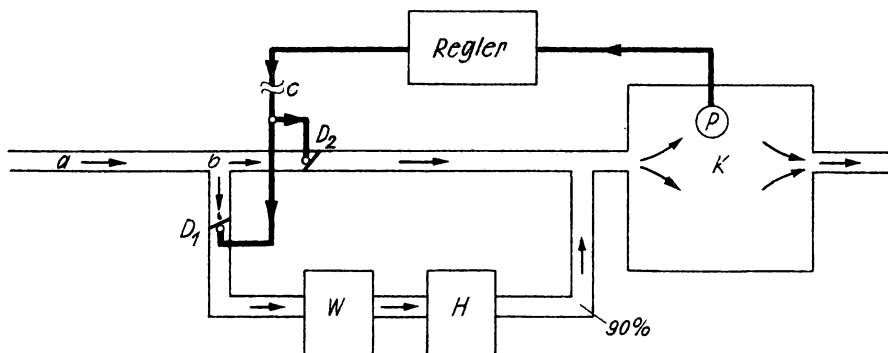


Bild 80

Blockschaltbild einer Feuchtigkeitsregelung einer Prüfkammer

Die Außenluft habe 30 bis 70 % relative Feuchtigkeit und werde bei a angesaugt. Bei b wird der Luftstrom in zwei Stränge, in denen sich die Drosselklappen  $D_1$  und  $D_2$  befinden, verteilt. Bei gleichbleibendem Gesamtdurchsatz durch K kann das Verhältnis der Teilmengen mittels  $D_1$  und  $D_2$  in weiten Grenzen geändert werden. Die  $D_1$  durchströmende Luft wird in dem Wäscher W mit Wasserdampf gesättigt und weiterhin in einem Heizraum H erwärmt, so daß sie 90 % relative Feuchtigkeit besitzt. Durch besondere Einrichtungen wird für konstante Temperatur gesorgt. Die Feuchtigkeit in der Kammer K wird durch einen Feuchtigkeitsmesser P (Aspirationspsychrometer) überwacht. Die Einzelvorgänge sind schwer zu übersehen, und die Aufstellung einer Differentialgleichung ist kaum möglich. Die Aufnahme des Frequenzganges ist wegen der Langsamkeit der Regelvor-

gänge zumindest mühsam.

Um das KÜPFMÜLLER-Verfahren anzuwenden, löst man die Verbindung des Reglers mit den Drosselklappen bei c und nimmt möglichst in der Nähe des Sollwertes eine kleine Verstellung aus dem Ruhezustand vor. Sie betrage 4,5 mm. Die Bewegung des Reglergestänges wird registriert, wobei der Zeitpunkt der primären Verstellung genau fixiert sein muß. Nach genügend langer Zeit ergibt sich am Reglergestänge eine Verschiebung von 22,5 mm. Die Funktion  $x_A(t)$  ist in Bild 81 eingetragen. Wir erhalten eine Ersatztotzeit  $T_{tE}$  von 21 s und eine Übergangszeit  $T_u$  von 240 s.

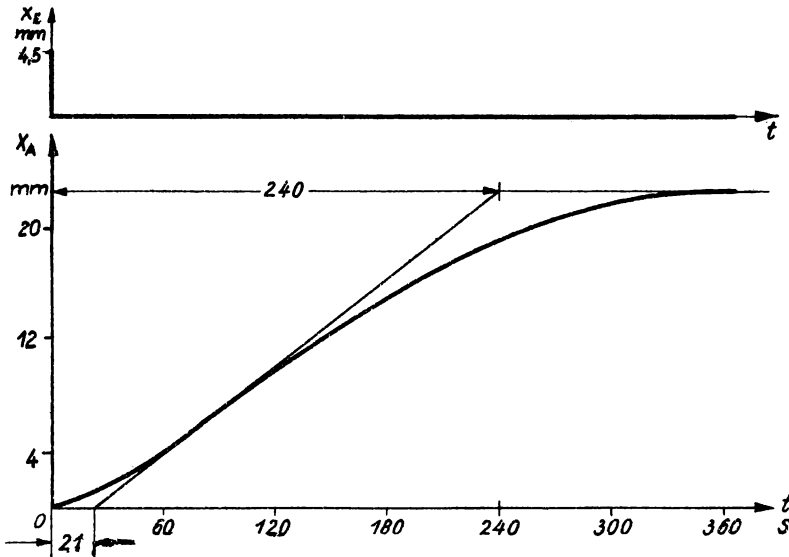


Bild 81  
Übergangsfunktion bei einem Feuchtigkeitsregler

Der Verstärkungsfaktor  $V$  des aufgeschnittenen Regelkreises ergibt sich zu

$$V = \frac{22,5}{4,5} = 5,0$$

Weiter erhalten wir

$$\frac{T_u}{T_{tE}} \approx 11,5$$

Unter Zugrundelegung von Bild 78 ergibt sich eine kritische Verstärkung  $V_0 \approx 5$  und bei Benutzung der Faustformel:  $V_0 \approx 11,5$ .

Nach den Darlegungen des vorigen Beispiels können wir erwarten, daß der Regler befriedigend arbeitet. Lassen wir die Verstärkung wachsen, so kommen wir schließlich an die Grenze der Stabilität und erhalten Pendelungen. Für die Frequenz der Grundwelle ( $k = 0$ ) ergibt sich (vgl. 2. Lehrbrief, S. 120)

$$f = \frac{1}{240 \text{ s} + 21 \text{ s}} = 0,0038 \text{ s}^{-1}$$

Das Beispiel wollen wir mit einer Bemerkung über die sich ergebende Regelgenauigkeit abschließen. Wir benutzen den Regelfaktor  $R$  ( $R = \frac{1}{1 + \sqrt{v}}$ ), der angibt, in welchem Maße eine Störung abgebaut wird. Auf den Begriff des Regelfaktors kommen wir später noch zurück.

In unserem Beispiel gilt:

$$R = \frac{1}{1 + 5} \approx 0,17$$

Schwankungen der Feuchtigkeit der Außenluft werden also durch den Regler auf  $\frac{1}{6}$  herabgesetzt. Während wir ohne Regelung mit  $\pm 20\%$ -Schwankung der Feuchtigkeit zu rechnen hatten, reduziert sich dieser Wert mit Regelung auf  $\pm 3\%$ .

## 7. Kapitel: Rückführungen

**[31] Strukturstabilität - Strukturinstabilität.** Im vorigen Kapitel hatten wir die Stabilität von Regelkreisen untersucht und dabei die Stabilitätskriterien benutzt. Außer der Entscheidung der Frage, ob das System stabil oder instabil ist, waren wir bei den einfachen Beispielen von einschleifigen Anordnungen noch in der Lage, gewisse Schlüsse über die zulässige Größe des Gesamtverstärkungsfaktors des aufgeschnittenen Kreises zu ziehen. Auf Grund der behandelten Beispiele könnte man zu der Auffassung kommen, daß man den Gesamtverstärkungsfaktor nur ausreichend zu verringern braucht, um Stabilität zu erzielen. Dieser Schluß ist jedoch unzutreffend, wie wir jetzt nachweisen wollen.

Dazu betrachten wir 3 Beispiele, wobei das erste zwar nichts Neues bringt, aber den Anschluß an die Darlegungen des vorigen Kapitels erleichtert.

In dem ersten Beispiel treten nur zwei Übertragungsglieder auf. Wir benutzen wieder ein Blockschaltbild, wobei wir aber jetzt in die Kästchen nicht mehr die Zahlen unserer Aufstellung einsetzen wollen, sondern die Übergangsfunktion eintragen, die nach einer sprungförmigen Störung auftritt (Bild 82).

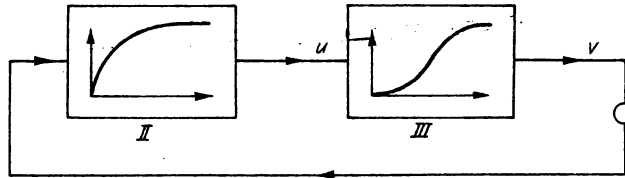


Bild 82  
Blockschaltbild eines Regelkreises mit 2 Baugliedern

Die Differentialgleichung des linken Kästchens lautet:

$$T_1 \frac{du}{dt} + u = k_1 \cdot v \quad (\text{VII},1)$$

Für das rechte Kästchen schreiben wir die Gleichung in der folgenden Form

$$T_2 T_3 \frac{d^2 v}{dt^2} + T_4 \frac{dv}{dt} + v = k_2 \cdot u \quad (\text{VII},2)$$

Wir eliminieren  $u$  und nehmen bei Schließen des Regelkreises wieder eine Vorzeichenumkehr vor (vgl. dazu S. 72) und erhalten damit die Differentialgleichung

$$T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 v}{dt^3} + (T_1 T_4 + T_2 T_3) \frac{d^2 v}{dt^2} + (T_1 + T_4) \frac{dv}{dt} + (1 + k_1 \cdot k_2) v = 0 \quad (\text{VII},3)$$

Die HURWITZbedingung für Stabilität lautet nach [27]

$$A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0$$

Also muß gelten:

$$(T_1 T_4 + T_2 T_3) (T_1 + T_4) - T_1 T_2 T_3 (1 + k_1 k_2) > 0$$

oder

$$T_1^2 T_4 + T_1 T_4^2 + T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_3 k_1 k_2 > 0$$

In diesem Beispiel kann man also durch entsprechende Verkleinerung des Produktes  $k_1 k_2$  immer die Stabilitätsbedingung erfüllen.

2. Beispiel. Auch hier beschränken wir uns auf zwei Übertragungsglieder (Bild 83), wobei das linke wieder der Gleichung (VII,1) gehorcht. Zu dem rechten Kästchen gehört die Gleichung

$$T_2^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + v = k_2 \cdot u \quad (\text{VII},4)$$

Die Formel erhalten wir aus VII,2, indem man  $T_4 = 0$  und  $T_2 T_3 = T_2^2$  setzt. (Ein solches Übertragungsglied haben wir bisher nicht behandelt, weil es in der Praxis vermieden wird.)

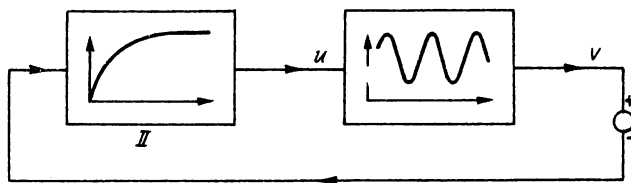


Bild 83  
Blockschaltbild zweier Übertragungsglieder

Die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises lautet:

$$T_1 T_2^2 \frac{d^3 v}{dt^3} + T_2^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + T_1 \frac{dv}{dt} + (1 + k_1 k_2) v = 0 \quad (\text{VII},5)$$

Als HURWITZbedingung finden wir:

$$T_1 T_2^2 - T_1 T_2^2 (1 + k_1 k_2) > 0$$

oder

$$- T_1 T_2^2 k_1 k_2 > 0$$

Da die Zeitkonstanten  $T_1, T_2$  immer positiv sind und das Produkt  $k_1 k_2$  genau wie im 1. Beispiel als positiv vorausgesetzt worden war, ist der Regelkreis instabil, auch wenn das Produkt  $k_1 k_2$  beliebig gewählt wird. Ein solches System nennt man nach GALPERIN (1946) strukturinstabil, während der Regelkreis von Beispiel 1 entsprechend als strukturstabil bezeichnet wird.

3. Beispiel. Auch im dritten Beispiel (Bild 84) wird das Verhalten des linken Kästchens durch die Differentialgleichung von der Form (VII,1) dargestellt, während die beiden anderen Glieder integralwirkend sind.

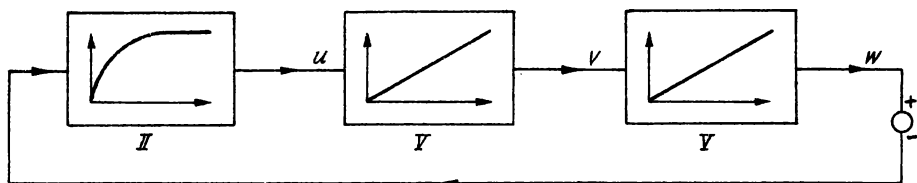


Bild 84  
Blockschaltbild dreier Übertragungsglieder

Die zu den letzteren Kästchen gehörigen Gleichungen lauten:

und

$$\left. \begin{aligned} T_2 \frac{dv}{dt} &= u \\ T_3 \frac{dw}{dt} &= v \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII}, 6)$$

Als Differentialgleichung für den geschlossenen Regelkreis erhalten wir

$$T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 w}{dt^3} + T_2 T_3 \frac{d^2 w}{dt^2} + k_2 w = 0 \quad (\text{VII}, 7)$$

Während bei den beiden anderen Beispielen alle Koeffizienten in der Differentialgleichung größer als Null waren, ist hier der Koeffizient der ersten Ableitung gleich Null. Infolgedessen ist der Regelkreis von vornherein instabil, und zwar strukturinstabil. Der Vollständigkeit halber schreiben wir noch die HURWITZbedingung an. Sie lautet

$$- T_1 T_2 T_3 k_1 > 0,$$

wobei nach Voraussetzung die Faktoren  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $k_1$  positiv sind.

Durch die Beispiele 2 und 3 ist also nachgewiesen, daß es einschleifige Regelkreise gibt, bei denen eine vorhandene Instabilität durch Änderung, und zwar speziell Verminderung des Gesamtverstärkungsfaktors nicht beseitigt werden kann. Haben wir einen strukturinstabilen Regelkreis vor uns, so müssen wir offenbar seine Struktur abändern, um ihn in ein strukturstabiles System überzuführen.

Wir wollen nun ein Beispiel einer Strukturänderung behandeln, mit deren Hilfe ein strukturinstabiles System in ein strukturstabiles System übergeführt wird. Wir greifen das Übertragungsglied mit der Differentialgleichung

$$T_3 \frac{dw}{dt} = v$$

heraus und bringen an ihm eine starre Rückführung an, d.h., ein Teil der Ausgangsgröße wird auf den Eingang des Übertragungsgliedes gegeben (Bild 85). Den rückgeführten Anteil charakterisieren wir durch den Faktor  $\varrho$ .

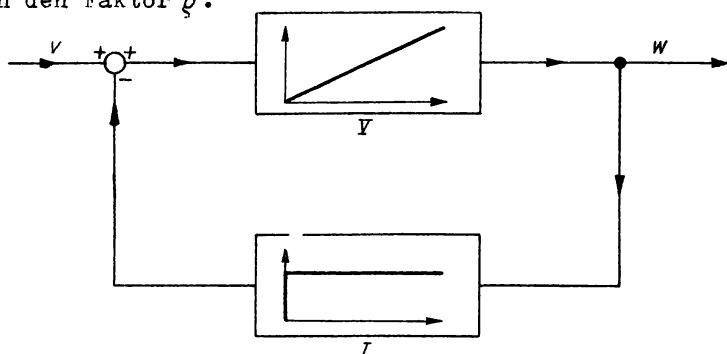


Bild 85  
Übertragungsglied mit starrer Rückführung

Im Bild 15 wurde bereits eine solche starre Rückführung benutzt. Wir erörtern nun, wie sich die Differentialgleichung des Übertragungsgliedes durch die Einführung der starren Rückführung ändert. Nach Bild 85 erhalten wir

$$T_3 \frac{dw}{dt} = v - \varrho w \quad (\text{VII}, 8)$$

oder

$$T_3 \frac{dw}{dt} + \varrho w = v \quad (\text{VII}, 8a)$$

$$T_3^* \frac{dw}{dt} + w = \frac{1}{\varrho} v, \quad \text{wobei} \quad T_3^* = \frac{T_3}{\varrho}$$

Außerdem wollen wir noch betrachten, wie sich der Frequenzgang dieses Übertragungsgliedes durch Einführung einer starren Rückführung ändert. Auf Grund der Ausführungen auf S. 89 ergibt sich der folgende Gesamtfrequenzgang

$$W_g(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)}$$

Hier ist

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{T_3 j\omega} \quad \text{und} \quad W_2 = \varrho$$

$$W_g(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega T_3}}{1 + \frac{\varrho}{j\omega T_3}} = \frac{1}{j\omega T_3 + \varrho}$$

$$= \frac{1}{\varrho} \left( \frac{1}{j\omega T_3^* + 1} \right) \quad (\text{VII}, 9)$$

Wir kehren nun zum Beispiel 3 zurück, wobei die Struktur des Regelkreises durch Anbringung einer starren Rückführung am rechten Übertragungsglied abgeändert ist (Bild 86).

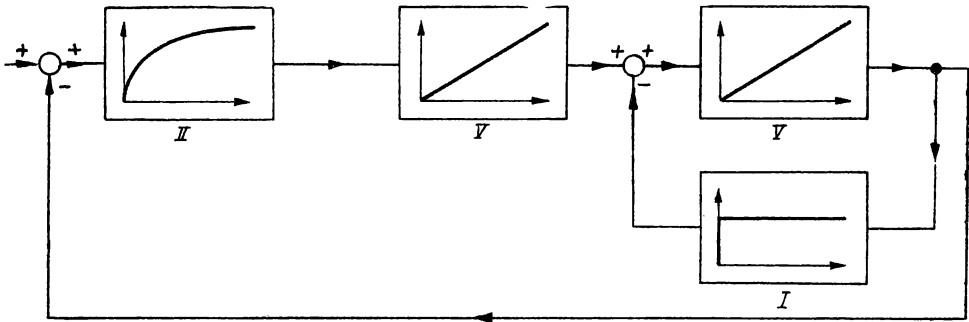


Bild 86  
Regelkreis mit starrer Rückführung

Der Regelkreis nach Bild 86 ist dem nach Bild 87 äquivalent.

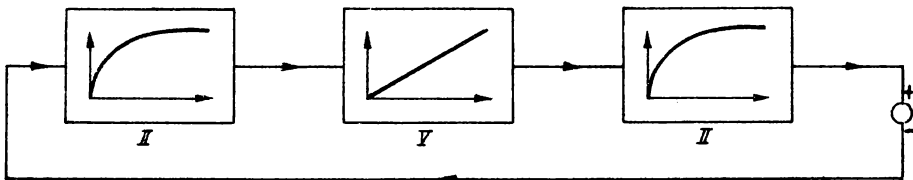


Bild 87  
Regelkreis



Für den Regelkreis nach Bild 86 bzw. Bild 87 ermitteln wir die Differentialgleichung

$$T_1 T_2 T_3^* \frac{d^3 v}{dt^3} + (T_2 T_3^* + T_1 T_2) \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + T_2 \frac{dv}{dt} + k_1 \frac{v}{\varrho} = 0$$

Als HURWITZbedingung erhalten wir

$$(T_3^* + T_1) T_2^2 - T_1 T_2 T_3^* k_1 \frac{1}{\varrho} > 0$$

Durch geeignete Wahl von  $k_1$  und  $\varrho$  kann die HURWITZbedingung erfüllt werden. Das System ist also strukturstabil; denn wir erhalten bei einem endlichen positiven Verstärkungsfaktor

$$k = k_1 \frac{1}{\varrho}$$

einen stabilen Regelkreis.

**[32] Arten der Rückführungen.** Im Abschnitt [31] haben wir einen der Fälle behandelt, in dem durch Einführung einer starren Rückführung ein strukturinstabiles System in ein strukturstabiles übergeführt wird. Man kann vermuten, daß sich in bestimmten Fällen die Eigenschaften eines bereits strukturstabilen Systems durch eine zweckmäßig angebrachte und dimensionierte Rückführung verbessern lassen. In der Praxis werden nun tatsächlich die meisten Regler in der einen oder anderen Form mit einer Rückführung ausgestattet, um ihre Eigenschaften zu verbessern. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die Bilder 13...16. Eine genaue Untersuchung des Einflusses der Rückführung im Anschluß an die Dampfmaschinenregelung ist indes nicht zweckmäßig, weil sich dabei Differentialgleichungen höherer Ordnung ergeben, deren Diskussion zu unübersichtlich ist. Aus diesem Grunde halten wir uns an ein von OLDENBOURG-SARTORIUS angegebenes einfaches, schematisiertes Beispiel. Dazu betrachten wir zunächst die in Bild 88 dargestellte Anordnung eines Regelkreises ohne Rückführung. Dann werden verschiedene stabilisierende Einrichtungen, die also die Eigenschaften des Regelkreises verbessern sollen, in den Regelkreis eingeführt, und deren Einfluß auf das dynamische Verhalten der Anordnung wird untersucht. Bei jeder Anordnung werden wir zuerst die Gleichung des geschlossenen Regelkreises aufstellen, wobei wir vorzugsweise von der

Methode des Frequenzganges Gebrauch machen wollen. Um zu vergleichbaren Resultaten zu kommen, ermitteln wir jeweils den Grenzfall der Aperiodizität, und schließlich vergleichen wir die Übergangsprozesse bei den einzelnen Regelkreisen unter Verwendung des noch einzuführenden Begriffs der Regelfläche. Wir betrachten nun nacheinander folgende Fälle:

1. Regelkreis ohne Rückführung
2. Regelkreis mit starrer Rückführung
3. Regelkreis mit nachgebender Rückführung
4. Regelkreis mit einem differenzierenden Glied

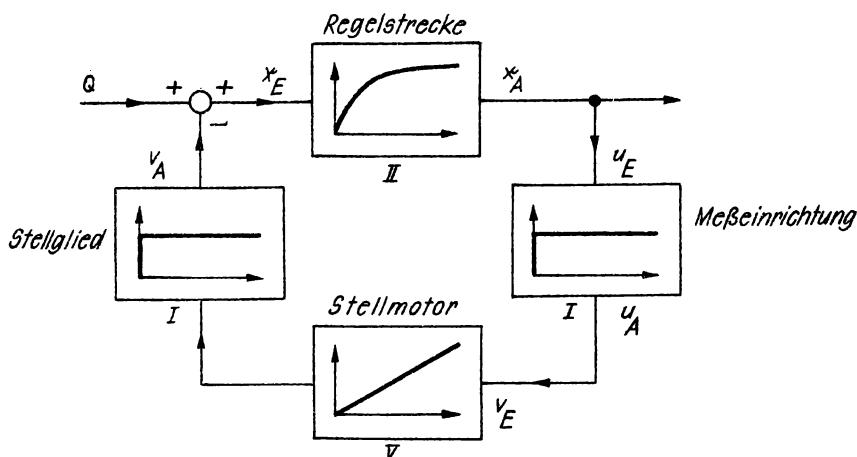


Bild 88  
Regelkreis ohne Rückführung

1. Regelkreis ohne Rückführung (Bild 88). Als Regelstrecke benutzen wir ein Speicherglied 1. Ordnung, also etwa einen Druckbehälter, dessen Differentialgleichung lautet

$$T_2 \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E$$

Die Meßeinrichtung gehorcht der Gleichung

$$u_A = u_E$$

Schließlich gilt für den Stellmotor unter Einbeziehung des Stellgliedes

$$T_5 \frac{dv_A}{dt} = v_E$$

Wir haben die Verstärkungsfaktoren alle gleich 1 gesetzt, um möglichst einfache Verhältnisse zu erzielen.

Wir nehmen nun noch an, daß am Eingang der Regelstrecke eine Mengengstörung  $Q$  wirksam ist und erhalten damit:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= u_E \\ u_A &= v_E \\ x_E &= -v_A + Q \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII}, 10)$$

Daraus ergibt sich:

$$T_2 T_5 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + T_5 \frac{dx_A}{dt} + x_A = T_5 \frac{dQ}{dt} \quad (\text{VII}, 10a)$$

Diese Gleichung läßt sich mit bekannten Methoden lösen.

Über die Lage der Wurzeln erhalten wir Auskunft aus der charakteristischen Gleichung, die wir in der Form schreiben können:

$$T_2 T_5 (p - p_1) (p - p_2) = 0,$$

wobei

$$p_1 = -\frac{1}{2T_2} + \sqrt{\frac{1}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2 T_5}}, \quad p_2 = -\frac{1}{2T_2} - \sqrt{\frac{1}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2 T_5}} \quad (\text{VII}, 11)$$

ist. Aus der Form der Wurzeln folgt, daß bei positiven  $T_2$  und  $T_5$  der Regelungsvorgang immer stabil ist, da sich bei den Wurzeln stets ein negativer Realteil ergibt.

Ist der Radikand negativ, so erhalten wir abklingende Schwingungen, die möglichst vermieden werden sollen.

Bei positivem Wert des Radikanden erhalten wir aperiodische Vorgänge. Bei wachsendem Wert des Radikanden wird der Abstand der Werte für  $p_1$  und  $p_2$  größer und ein Exponentialglied der Lösung klingt entsprechend langsamer ab. Man kann also vermuten, daß der Vorgang am günstigsten dann verläuft, wenn der Radikand gleich Null ist, d.h., wenn  $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2T_2}$  ist (aperiodischer Grenzfall).

Das ist der Fall bei

$$\frac{T_5}{T_2} = 4$$

Da die Zeitkonstante  $T_2$  der Regelstrecke durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist, liegen günstige Verhältnisse dann vor, wenn für die Zeitkonstante des Stellmotors gilt:  $T_5 = 4 T_2$ . In der Wahl der Zeitkonstanten  $T_5$  des Stellmotors ist man also sehr eingeengt.

Um den Verlauf von  $x_A$  in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten, können wir die Differentialgleichung (VII,10a) unter Benutzung der Ihnen bekannten Methoden integrieren.

Wir können aber auch vom Frequenzgang ausgehen. Wir erinnern uns an die auf S. 118/119 benutzte Formel, daß der Frequenzgang dargestellt wird, wenn man die LAPLACEtransformierte der Wirkung durch die LAPLACEtransformierte der Ursache dividiert.

Unter Benutzung des Frequenzganges erhalten wir für den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{1}{pT_2 + 1} \\ W_3(p) &= \frac{1}{pT_5} \\ W_g(p) &= \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p)} = \frac{\frac{1}{T_2} p}{p^2 + \frac{1}{T_2} p + \frac{1}{T_2 T_5}} \end{aligned} \quad (\text{VII}, 12)$$

Für den Regelverlauf im Unterbereich bei Vorliegen einer sprungförmigen Störung  $Q$  erhält man

$$\frac{x_A(p)}{Q} = \frac{\frac{1}{T_2}}{p^2 + \frac{1}{T_2} p + \frac{1}{T_2 T_5}}$$

Unter Berücksichtigung von

$$x_A(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ x_A(p) \}$$

findet man

$$\frac{x_A(t)}{Q} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{W_g(p) \cdot e^{pt}}{p} dp = \frac{1}{T_2} \cdot \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \quad (\text{VII}, 13)$$

Was können wir nun aus dieser Beziehung ablesen?

Wir sind in der Lage, den Regelungsverlauf zu berechnen, wenn uns die Parameter  $T_2$  und  $T_5$  gegeben sind. Wir möchten die Parameter natürlich so wählen, daß wir einen möglichst guten Verlauf von  $x_A(t)$  erhalten. Dazu ist offensichtlich notwendig, daß der Vorgang

im wesentlichen aperiodisch verläuft. Weiterhin muß die Abweichung der Regelgröße von ihrem Sollwert möglichst klein und die Dauer des Regelvorganges möglichst kurz sein. Man kann nun die beiden zuletzt genannten Forderungen in eine zusammenfassen, indem man zur Beurteilung des Systems die Fläche  $S$  heranzieht, die vom Regelungsverlauf und dem Gleichgewichtszustand nach einer sprungförmigen Störung eingeschlossen wird (vgl. Bild 89). Wir müssen also

$$S = \int_0^{\infty} x_A(t) dt \quad (\text{VII},14)$$

berechnen. Die so ermittelte Regelfläche  $S$  besitzt in unserer Schreibweise die Dimension einer Zeit. Wir werden nun auf Grund des sich für  $S$  ergebenden Ausdruckes in die Lage versetzt, die Parameter des Regelkreises so zu wählen, daß wir möglichst günstige Verhältnisse bekommen. Bemerkt sei noch, daß wir uns hier auf die Betrachtung der Fälle beschränken müssen, bei denen  $x_A(t)$  sein Vorzeichen nicht wechselt, wenn sich  $t$  von Null bis Unendlich ändert.

Setzen wir speziell  $Q = 1$ , so ergibt sich in der vorliegenden Variante

$$S_1 = \int_0^{\infty} x_A(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{T_2 (p_1 - p_2)} dt \quad (\text{VII},15)$$

Die Auswertung dieses Integrals liefert

$$S_1 = T_5,$$

d.h., die Regelfläche ist gleich dem Zeitfestwert  $T_5$ .

Wir haben eingangs dieses Abschnittes gesagt, daß wir den Grenzfall der Aperiodizität betrachten wollen. Bisher haben wir aber den Fall behandelt, bei dem die Wurzeln der Gleichung verschieden sind. Aus dem Ergebnis, daß die Regelfläche  $S = T_5$  ist, sehen wir aber unmittelbar, daß auch bei gleichen Wurzeln kein anderer Wert für die Regelfläche erzielt wird. Dies können wir auch prüfen, wenn wir die Differentialgleichung für den Fall einer Doppelwurzel lösen, wobei sich aber für  $x_A(t)$  ein von (VII,13) verschiedener Ausdruck ergibt.

Schließlich wollen wir noch ein Zahlenbeispiel für den Verlauf von

$x_A(t)$  geben. Nach Gleichung (VII,11) verläuft der Regelungsvorgang am günstigsten, wenn  $\frac{T_5}{T_2} = 4$  ist. Hierbei wird der Grenzfall der Aperiodizität erreicht. Um die Formel (VII,13) benutzen zu können, bei der zwei verschiedene negative reelle Wurzeln auftreten, wählen wir

$$T_2 = 10 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_5 = 50 \text{ s}$$

Damit ergibt sich

$$p_1 = -0,0724 \quad p_2 = -0,0276$$

$$p_1 - p_2 = -0,0448$$

$$x_A(t) = \frac{1}{10} \frac{e^{-0,0724 t} - e^{-0,0276 t}}{-0,0448}$$

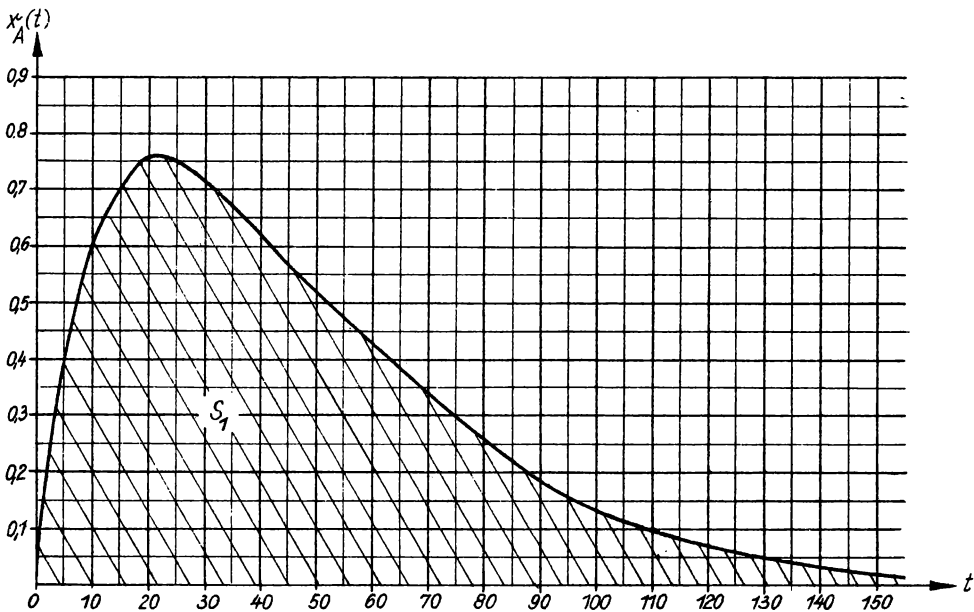


Bild 89  
Regelfläche eines Regelkreises ohne Rückführung (I-Regler)

Aus Bild 89 ersieht man, daß die Ausregelung, wie zu erwarten, langsam erfolgt. Wir können dabei auch abschätzen, daß die Ein-

stellung des neuen Zustandes auch im günstigsten Falle mit  $T_2 = 10$  s und  $T_5 = 40$  s nicht wesentlich schneller erfolgt.  
 2. Regelkreis mit starrer Rückführung. Der Stellmotor wird nun mit einer starren Rückführung ausgerüstet (Bild 90).

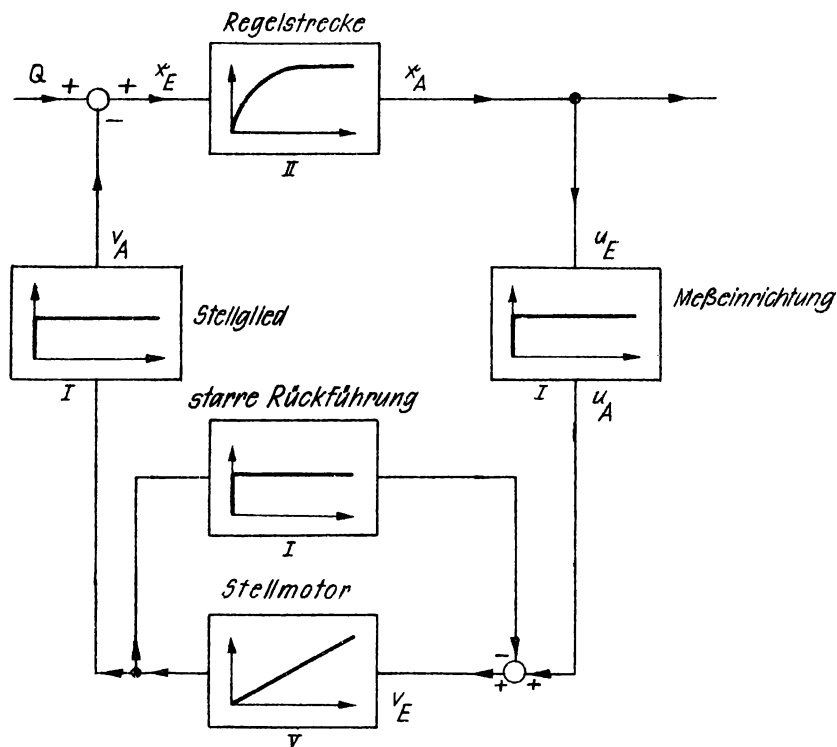


Bild 90  
 Regelkreis mit starrer Rückführung

Den dazugehörigen Frequenzgang haben wir in (VII,9) abgeleitet. Wir erhalten also folgende Gleichungen:

$$W_1(p) = \frac{1}{p T_2 + 1}$$

$$W_3(p) = \frac{1}{p T_5 + \varrho}$$

$$W_g(p) = \frac{\frac{1}{p T_2 + 1}}{1 + \frac{1}{p T_2 + 1} \cdot \frac{1}{p T_5 + \varrho}}$$

$$= \frac{1}{T_2} \cdot \frac{p + \frac{\varrho}{T_5}}{p^2 + \frac{T_2 \varrho + T_5}{T_2 T_5} p + \frac{\varrho + 1}{T_2 T_5}} \quad (\text{VII}, 16)$$

Die Wurzeln des Nennerpolynoms sind

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{T_2 \varrho + T_5}{2 T_2 T_5} + \sqrt{\left(\frac{T_2 \varrho + T_5}{2 T_2 T_5}\right)^2 - \frac{\varrho + 1}{T_2 T_5}} \\ p_2 &= -\frac{T_2 \varrho + T_5}{2 T_2 T_5} - \sqrt{\left(\frac{T_2 \varrho + T_5}{2 T_2 T_5}\right)^2 - \frac{\varrho + 1}{T_2 T_5}} \end{aligned} \quad (\text{VII}, 17)$$

Schließlich setzen wir

$$p_0 = -\frac{\varrho}{T_5},$$

damit ergibt sich

$$W_g(p) = \frac{1}{T_2} \frac{p - p_0}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (\text{VII}, 16a)$$

Ähnlich wie bei der ersten Variante erhalten wir hier

$$\begin{aligned} \frac{x_A(t)}{Q} &= \frac{1}{2\pi j} \frac{1}{T_2} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{(p - p_0) e^{pt}}{p(p - p_1)(p - p_2)} dp \\ &= \frac{\varrho}{\varrho + 1} + \frac{1}{T_2} \left\{ \frac{(p_1 - p_0) e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_2)} + \frac{(p_2 - p_0) e^{p_2 t}}{p_2 (p_2 - p_1)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VII}, 18)$$

Infolge der Anwendung einer starren Rückführung erhalten wir hier den Summanden  $\frac{\varrho}{\varrho + 1}$ , der mit dem Verschwinden von  $\varrho$  ebenfalls verschwindet. Ein solches konstantes Glied tritt bei allen proportional wirkenden Reglern auf und heißt bleibende Proportionalabweichung. Wir erhalten also beim P-Regler immer

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^\infty x_A(t) dt = \infty$$

Um aber einen genaueren Überblick über den Übergangsprozeß zu bekommen, berechnen wir die Fläche  $S_1$  bzw.  $S_2$  getrennt, wobei

$$S_1 = \int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho + 1} dt = \infty$$



$$S_2 = \frac{1}{T_2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(p_1 - p_0) e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_2)} + \frac{(p_2 - p_0) e^{p_2 t}}{p_2 (p_2 - p_1)} \right\} dt = \frac{T_5 - \varrho^2 T_2}{(\varrho + 1)^2} \quad (\text{VII}, 19)$$

Ehe wir auf ein zahlenmäßiges Beispiel eingehen, wollen wir noch betrachten, wie  $\varrho$  zu wählen ist, um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen. Nach (VII,17) muß sein

$$(T_2 \varrho + T_5)^2 = 4 T_2 T_5 (\varrho + 1)$$

oder

$$\varrho = \frac{T_5}{T_2} + 2 \sqrt{\frac{T_5}{T_2}} \quad (\text{VII}, 20)$$

Aus dieser Gleichung ist zu entnehmen, daß eine starre Rückführung in dieser Variante dann zweckmäßig ist, wenn mit großer Arbeitsgeschwindigkeit des Stellmotors, also mit kleinem  $T_5/T_2$  gearbeitet wird; denn die bleibende Proportionalabweichung soll ja möglichst klein sein.

Wie beim I-Regler setzen wir als Zeitkonstante der Regelstrecke  $T_2 = 10$  s voraus. Da wir, um einen Vergleich durchführen zu können, auch hier in der Nähe des aperiodischen Grenzfalles bleiben wollen, müssen wir bei der Wahl der Motorzeitkonstante  $T_5$  die Gleichung (VII,20) berücksichtigen. Mit  $T_5 = 0,01$  s erreicht man den Grenzfall der Aperiodizität, wenn  $\varrho = 0,064$  ist. Bei der nachfolgenden Rechnung benutzen wir den Wert  $\varrho = 0,07$ , damit wird  $\frac{\varrho}{\varrho + 1} = 0,065$ .

Werten wir die Gleichung (VII,18) aus, so erhalten wir für den zeitlichen Verlauf von  $x_A(t)$  die Kurve nach Bild 91. Wir bemerken, daß sich nach Einsetzen der von uns gewählten Werte  $T_0$ ,  $T_5$ ,  $\varrho$  (in VII,19) für  $S_2$  ein negativer Wert ergibt, der von der Fläche

$$S_1 = \int_0^{\infty} \frac{\varrho}{\varrho + 1} dt \text{ subtrahiert wird.} \quad \text{Vergleichen wir Bild 91}$$

mit Bild 89 und berücksichtigen die verschiedenen Maßstäbe, so sehen wir, daß wir beim P-Regler eine zwar unendlich große Regelfläche bekommen, aber die Regelfläche längs der gesamten positiven Zeitachse verteilt ist.

Beim I-Regler erreichte nun  $x_A(t)$  nach der sprungförmigen Störung während des Übergangsprozesses den Maximalwert 0,76. Beim vorliegenden P-Regler würde dagegen  $x_A(t)$  nach Einwirkung der

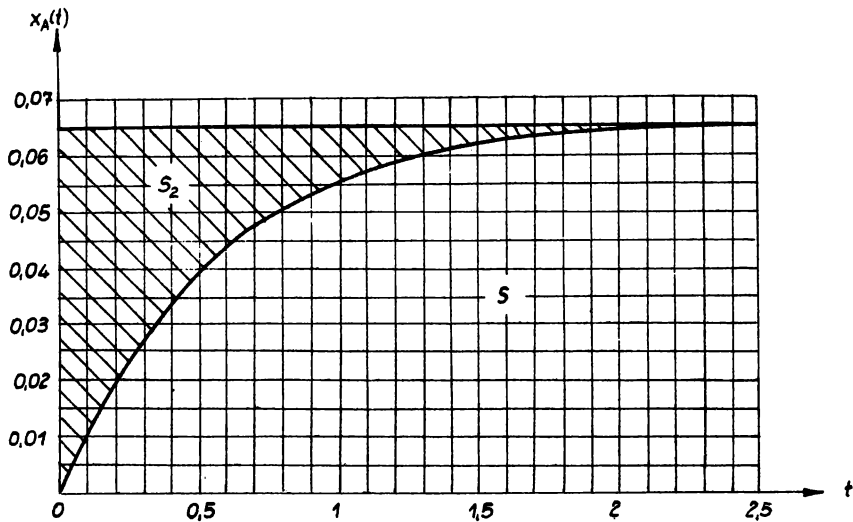


Bild 91

Regelfläche eines Regelkreises mit starrer Rückführung  
(Beachten Sie beim Vergleich mit Bild 89 die verschiedenen Maßstäbe!)

gleichen Störung den Wert 0,065 nicht übersteigen.

Dieses Ergebnis macht es verständlich, daß man in der Praxis reine I-Regler nicht gern verwendet. Oft nimmt man lieber die bleibende Proportionalabweichung des P-Reglers in Kauf und erreicht mit ihm einen günstigeren Regelungsprozeß.

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß man je nach den vorliegenden Verhältnissen ein verschiedenes Aussehen des Verlaufes von  $x_A(t)$  erhält und damit auch eine verschiedene Regelfläche. Man darf also die hier vorliegenden Verhältnisse nicht bedenkenlos verallgemeinern.

3. Regelkreis mit nachgebender Rückführung. Wir gehen von dem Bild 88 aus, wobei wir nun an dem Stellmotor eine nachgebende Rückführung anbringen (Bild 92).

Die Gleichungen der Frequenzgänge lauten

$$W_{II} = \frac{1}{1 + pT_2}$$

$$W_V = \frac{1}{pT_5}$$

$$W_{VIII} = \frac{\varrho pT_8}{1 + pT_8}$$

Nun ermitteln wir den Frequenzgang der Schleife, die durch den Stellmotor und die nachgebende Rückführung gebildet wird:

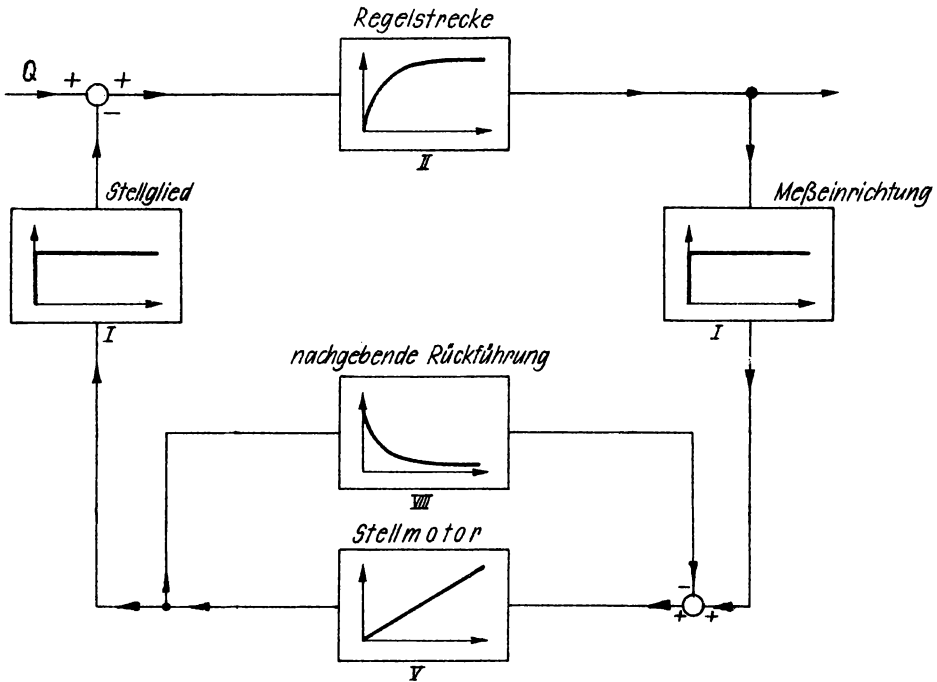


Bild 92  
Regelkreis mit nachgebender Rückführung

$$\begin{aligned}
 W_{Sch1} &= \frac{W_V}{1 + W_V \cdot W_{VIII}} = \frac{\frac{1}{pT_5}}{1 + \frac{1}{pT_5} \cdot \frac{\varrho pT_8}{1 + pT_8}} \\
 &= \frac{1 + pT_8}{(1 + pT_8) pT_5 + \varrho pT_8} = \frac{1 + pT_8}{p(pT_5T_8 + T_5 + \varrho T_8)} \quad (VII, 21)
 \end{aligned}$$

Wenn  $T_8 \rightarrow \infty$  und  $\varrho \rightarrow 0$ , dann bleibt der Frequenzgang des Stellmotors übrig.

Nun betrachten wir den Frequenzgang des Gesamtsystems

$$W_g = \frac{\dot{W}_{II}}{1 + W_{II} \cdot W_{Sch1}} = \frac{\frac{1}{1 + pT_2}}{1 + \frac{1}{1 + pT_2} \cdot \frac{1 + pT_8}{p(pT_5T_8 + T_5 + qT_8)}}$$

$$= \frac{pT_5(1 + pT_8) + qT_8}{[pT_5(1 + pT_8) + qT_8](1 + pT_2) + pT_2 + 1} \quad (\text{VII}, 22)$$

und benutzen die Substitution  $q = pT_2$

$$W_g = \frac{q^2 + (\frac{T_2}{T_8} + q \frac{T_2}{T_5})q}{q^3 + (1 + \frac{T_2}{T_8} + q \frac{T_2}{T_5})q^2 + (\frac{T_2}{T_5} + \frac{T_2}{T_8} + q \frac{T_2}{T_5})q + \frac{T_2}{T_5} \cdot \frac{T_2}{T_8}}$$

$$= \frac{q^2 + (A - 1)q}{q^3 + Aq^2 + Bq + C} \quad (\text{VII}, 22a)$$

Man sieht, daß sich hier der Grad der Gleichung gegenüber (VII, 12 bzw. VII, 16) erhöht hat. Das ist durch den Vergleich mit den Frequenzgängen der beiden vorhergehenden Varianten sofort zu erkennen. Wir haben im vorliegenden Falle offensichtlich mehr Möglichkeiten, durch geeignete Auswahl der Parameter das Verhalten des Regelkreises zu beeinflussen.

Ebenso wie bei den beiden vorher behandelten Varianten wollen wir auch hier die Parameter so wählen, daß wir eine möglichst kleine Regelfläche erhalten.

Man kann nämlich unter Benutzung der LAPLACEtransformation, wenn bestimmte, hier nicht näher zu erörternde Bedingungen gelten, die aber in unserem Fall erfüllt werden, schreiben

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) dt = [\Phi_u(p)]_{\infty}^0$$

Wenden wir diese Beziehung auf unsere Aufgabe an, so erhalten wir nach Ermittlung der Operatorgleichung, wobei wir wieder als Ursache eine Störung vom Betrage 1 voraussetzen,

$$\frac{S_3}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int_0^{\infty} x_A(t) dt = \left[ \frac{1}{q} W_g(q) \right]_{\infty}^0 = \frac{A - 1}{C} \quad (\text{VII}, 23)$$

Die Forderung nach der kleinsten Regelfläche läuft daraus hinaus, daß wir die Koeffizienten der Gleichung 3. Grades

$$\psi(q) = q^3 + Aq^2 + Bq + C \quad (\text{vgl. VII, 22a})$$

so wählen, daß sich eine negative, reelle Dreifachwurzel ergibt. Damit dies der Fall ist, muß die Funktion  $\psi(\Delta)$  und ihre ersten beiden Ableitungen gleich Null sein. Wir haben also mit  $q = -\Delta$

$$\left. \begin{aligned} \psi(\Delta) &= \Delta^3 - A\Delta^2 + B\Delta - C = 0 \\ \psi'(\Delta) &= 3\Delta^2 - 2A\Delta + B = 0 \\ \psi''(\Delta) &= 6\Delta - 2A = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII, 24})$$

Daraus bestimmen wir die Konstanten:

$$A = 3\Delta$$

$$B = 3\Delta^2$$

$$C = \Delta^3$$

Nun müssen wir auf die Parameter  $T_2$ ,  $T_5$ ,  $T_8$  und  $\varrho$  unseres Regelkreises zurückgehen. Wir hatten (VII, 22a):

$$A = 1 + \frac{T_2}{T_8} + \varrho \frac{T_2}{T_5}$$

$$B = \frac{T_2}{T_5} + \frac{T_2}{T_8} + \varrho \frac{T_2}{T_5}$$

$$C = \frac{T_2}{T_5} \frac{T_2}{T_8}$$

Aus  $A = 3\Delta$  finden wir

$$3\Delta = 1 + \frac{T_2}{T_8} + \varrho \frac{T_2}{T_5}$$

Weiter ergibt sich aus  $B = 3\Delta^2$

$$3\Delta^2 = \frac{T_2}{T_5} + \frac{T_2}{T_8} + \varrho \frac{T_2}{T_5}$$

Jetzt bilden wir

$$3\Delta^2 - 3\Delta = \frac{T_2}{T_5} + \frac{T_2}{T_8} + \varrho \frac{T_2}{T_5} - 1 - \frac{T_2}{T_8} - \varrho \frac{T_2}{T_5} = \frac{T_2}{T_5} - 1$$

oder

$$\Delta^2 - \Delta + \frac{1}{3} - \frac{T_2}{3T_5} = 0,$$

also

$$\Delta_{1,2} = + \frac{1}{2} (+) \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{T_2}{3T_5}} = + \frac{1}{2} (+) \sqrt{\frac{1}{3} \frac{T_2}{T_5} - \frac{1}{12}} \quad (\text{VII}, 25)$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist in diesem Ausdruck nur die positive Wurzel sinnvoll.

Unter Benutzung der Gleichung  $\Delta^3 = C$  erhalten wir

$$\frac{T_8}{T_2} = \frac{T_2}{T_5} \cdot \frac{1}{\Delta^3} \quad (\text{VII}, 26)$$

Schließlich wollen wir noch den Wert für  $\varrho$  ermitteln. Dazu benutzen wir die Gleichung  $3\Delta = A$ . Es ergibt sich

$$\varrho = \frac{T_5}{T_2} (3\Delta - 1 - \frac{T_2}{T_8}) \quad (\text{VII}, 27)$$

Wie können wir nun die Gleichungen (VII,25), (VII,26), (VII,27) benutzen, um eine Übersicht über die Abhängigkeit der Regelfläche von den Parametern  $T_2$ ,  $T_5$ ,  $T_8$  und  $\varrho$  zu erhalten?

Zunächst bemerken wir, daß wir 3 Gleichungen besitzen und 4 Parameter. Wir legen also einen Parameter fest, und zwar die Zeitkonstante  $T_2$  der Regelstrecke, was naheliegend ist, da die Regelstrecke in der Praxis vorgegeben ist und ein Regler gesucht wird, der in Zusammenarbeit mit dieser Regelstrecke einen günstig arbeitenden Regelkreis ergibt. Weil in jeder der Gleichungen (VII,25), (VII, 26), (VII, 27) der Quotient  $T_2/T_5$  vorkommt, liegt es nahe, ihn als unabhängige Variable zu benutzen. Wir können dann die Werte  $T_8/T_2$  und  $\varrho$  ermitteln, bei denen wir jeweils den Grenzfall der Aperiodizität erreichen. Schließlich können wir auch noch die Regelfläche (in unserem Falle dividiert durch die Zeitkonstante  $T_2$  der Regelstrecke) berechnen.

Wir setzen beispielsweise voraus, daß die Regelstrecke eine Zeitkonstante  $T_2 = 10$  s besitzt. Speziell nehmen wir an, daß die Zeitkonstante des Stellmotors  $T_5 = 0,1$  s ist. Dann erhalten wir durch Einsetzen in (VII, 25)

$$\Delta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3} \frac{T_2}{T_5} - \frac{1}{12}} \approx 6,27$$

Aus

$$\frac{T_8}{T_2} = \frac{T_2}{T_5} \cdot \frac{1}{\Delta^3} \quad (\text{VII}, 26)$$

folgt

$$\frac{T_8}{T_2} = 0,4 \quad \text{bzw.} \quad (T_8 = 4 \text{ s})$$

Weiter ergibt sich aus (VII, 27)

$$\varrho = \frac{T_5}{T_2} (3\Delta - 1 - \frac{T_2}{T_8}) \approx 0,15$$

Für die Regelfläche gewinnen wir

$$\frac{S_3}{T_2} = \frac{\Delta - 1}{\varrho} = \frac{\frac{T_2}{T_8} + \varrho}{\frac{T_2}{T_5} \frac{T_2}{T_8}} \approx 0,07$$

Geben wir nun einen anderen Wert  $T_5$  vor, so erhalten wir entsprechend andere Werte für  $T_8$ ,  $\varrho$  und  $S_3$ . In Bild 93 sind die Ergebnisse der entsprechenden Rechnungen zusammengetragen.

Wir erkennen aus Bild 93, daß die Regelfläche  $S_3$  mit wachsendem

$\frac{T_5}{T_2}$  monoton ansteigt. Sie ist um so größer, je kleiner die Arbeitsgeschwindigkeit des Stellmotors gewählt wurde; für  $\frac{T_5}{T_2} = 4$  gilt  $\frac{S_3}{T_2} = 4$ . Dieser Wert deckt sich mit dem Ergebnis der Variante 1, Gleichung (VII, 15).

Bei  $\frac{T_5}{T_2} = 4$  brauchen wir also offensichtlich keine Rückführung, da auch ohne Rückführung die Regelung aperiodisch erfolgt. Dementsprechend ist auch der Verlauf von  $\varrho$ . Positive Werte von  $\varrho$  sind nur vorhanden, wenn  $\frac{T_5}{T_2} < 4$  ist. Verkleinern wir  $T_5$  bei konstant

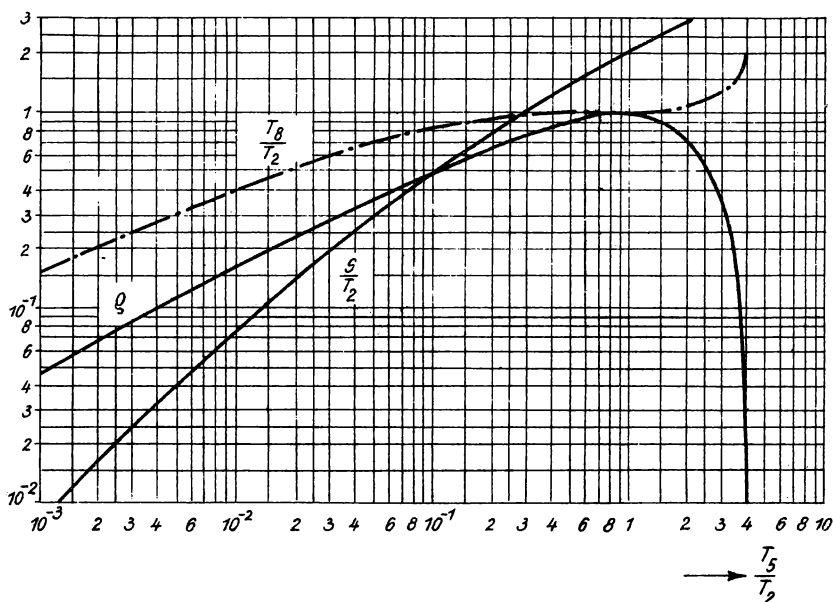


Bild 93  
Dimensionierung der Rückführung für optimalen Regelverlauf  
(Regelkreis nach Bild 92) aus OLDENBOURG/SARTORIUS

gehaltenem  $T_2$ , so durchläuft  $Q$  in der Gegend bei  $\frac{T_5}{T_2} = 1$  ein Maximum, um dann monoton abzufallen.

Auch die Rückführzeitkonstante  $T_g$  muß man in Abhängigkeit von  $\frac{T_5}{T_2}$  verändern, um den Grenzfall der Aperiodizität zu erhalten, wie aus Bild 93 hervorgeht.

Durch Einführung der nachgebenden Rückführung kann man also bei geschickter Wahl der Parameter eine wesentlich kleinere Regelfläche erhalten als bei den Anordnungen mit starrer Rückführung, bzw. ohne jede Rückführung.

4. Regelkreis mit einem differenzierenden Glied. Schließlich wollen wir die Verbesserung des dynamischen Verhaltens eines Regelkreises mit einer anderen Methode behandeln. Wir benutzen jetzt ein Bauelement, welches von seiner Eingangsgröße die 1. Ableitung nach der Zeit bildet. Während für die Regelstrecke und den Stellmotor einschließlich Stellglied die bisher benutzten Differentialgleichungen weitergelten, wird die Meßeinrichtung so abgeändert,



wie dies in Bild 94 dargestellt ist.

Wir bemerken noch, daß die Meßeinrichtung hier idealisiert ist, denn eine exakte erste Ableitung kann gerätemäßig nicht verwirklicht werden. In Bild 9b auf S. 19 haben wir Ihnen übrigens bereits eine Anordnung gezeigt, bei welcher ein D-Einfluß mit elektrischen Mitteln, und zwar mit Hilfe des Kondensators C bewirkt wurde.

Die Glieder des Regelkreises nach Bild 94 besitzen also die folgenden Frequenzgänge:

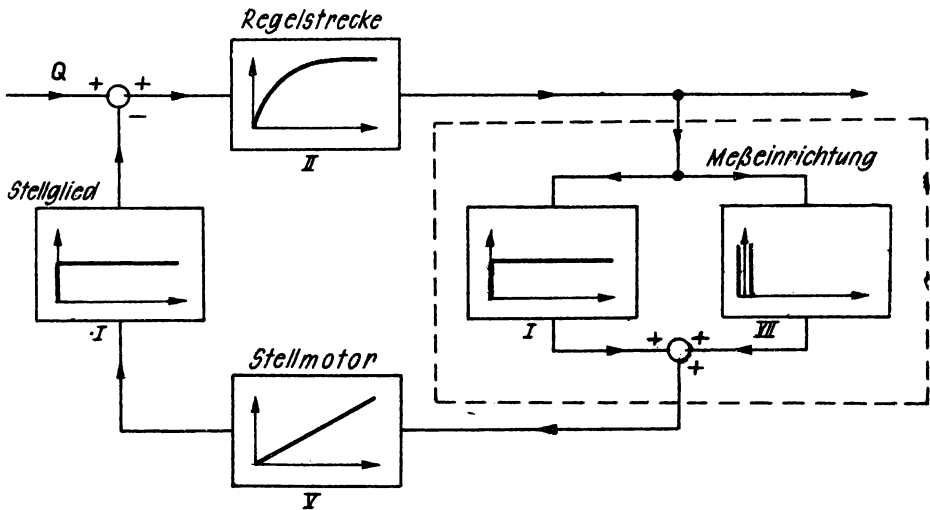


Bild 94

Regelkreis mit differenzierendem Meßglied (D-Einfluß)

Regelstrecke

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + pT_2}$$

Meßeinrichtung

$$W_2(p) = k_1 + pT_I^* \quad (\text{VII}, 28)$$

Stellmotor + Stellglied

$$W_3(p) = \frac{1}{pT_5^*}$$

Als Frequenzgang des Regelkreises erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W_g(p) &= \frac{\frac{1}{1 + pT_2}}{1 + \frac{1}{1 + pT_2} \cdot \frac{1}{pT_5^*} (pT_1^* + k_1)} \\
 &= \frac{pT_5^*}{p^2 T_2 T_5^* + p (T_1^* + T_5^*) + k_1} \quad (\text{VII,29})
 \end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir  $T_1^* = k_1 T_1$ ;  $T_5^* = k_1 T_5$  und dividieren durch  $T_2 T_5$ . Dann ergibt sich

$$W_g(p) = \frac{\frac{1}{T_2} p}{p^2 + p \left( \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right) + \frac{1}{T_2 T_5}} \quad (\text{VII,30})$$

Zum Vergleich schreiben wir die Gleichung (VII,12) nochmals an:

$$W_g(p) = \frac{\frac{1}{T_2} p}{p^2 + \frac{1}{T_2} p + \frac{1}{T_2 T_5}} \quad (\text{VII,12})$$

In (VII,30) erkennen wir, daß sich im vorliegenden Beispiel durch Einführung des D-Einflusses nur im Nenner der Koeffizient von  $p$  geändert hat. Wir wollen nun näher untersuchen, welche Vorteile die Möglichkeit der Veränderung des Koeffizienten  $\frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5}$  mit sich bringt.

Dazu berechnen wir wieder die Regelfläche und stellen fest, daß sie wie in der 1. Variante (ohne Rückführung) gleich  $T_5$  ist, also:  $S_4 = T_5$ . Anscheinend haben wir also durch die Einführung des D-Einflusses nichts gewonnen. Um zu zeigen, daß diese Annahme nicht zutrifft, wollen wir den Grenzfall der Aperiodizität untersuchen.

Den Nenner von (VII,30) können wir in der folgenden Form darstellen

$$\begin{aligned}
 p^2 + p \left( \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right) + \frac{1}{T_2 T_5} &= \left\{ \left( p + \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right)^2 - \frac{1}{T_2 T_5}} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( p + \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T_1 + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right)^2 - \frac{1}{T_2 T_5}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Im aperiodischen Grenzfall gilt

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T_I + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right)^2 - \frac{1}{T_2 T_5}} = 0, \quad \text{d.h.}, \quad \left( \frac{T_I + T_5}{T_2 \cdot T_5} \right)^2 = \frac{4}{T_2 T_5} \quad \text{oder}$$

$$\left( \frac{T_I}{T_2} + \frac{T_5}{T_2} \right)^2 = 4 \frac{T_5}{T_2}$$

und schließlich

$$\frac{T_I}{T_2} = - \frac{T_5}{T_2} \pm \sqrt{4 \frac{T_5}{T_2}} \quad (\text{VII},32)$$

In der Gleichung (VII,32) ist nur das positive Vorzeichen der Wurzel sinnvoll.

Wir sind also in der Lage, für jedes  $\frac{T_5}{T_2}$  denjenigen Wert  $\frac{T_I}{T_2}$  zu bestimmen, mit dessen Benutzung es uns gelingt, den Grenzfall der Aperiodizität zu erreichen.

Das Aussehen der Gleichung (VII,32) legt es nahe, daß wir ebenso wie bei der vorigen Variante als Ausgangspunkt unserer Rechnung den Quotienten  $\frac{T_5}{T_2}$  benutzen. Wir wählen deshalb auch hier wieder  $T_5 = 0,1 \text{ s}$  und  $T_2 = 10 \text{ s}$ , damit wird  $\frac{T_5}{T_2} = 0,01$ . Es ergibt sich also aus (VII,32)

$$\frac{T_I}{T_2} = - 0,01 + \sqrt{4 \cdot 0,01} = - 0,01 + 0,2 = 0,19$$

Die Zeitkonstante  $T_I$  hat den Wert  $1,9 \text{ s}$

Die Regelfläche ergab sich unter Voraussetzung einer Störung vom Betrag 1 zu

$$\frac{S_4}{T_2} = \frac{T_5}{T_2} = 0,01, \quad \text{d.h.:} \quad S_4 = 0,1 \text{ s},$$

während wir ohne stabilisierendes Glied als günstigsten Wert  $S_1 = 40 \text{ s}$  erhielten.

Wenn wir Rechnungen für die verschiedensten Werte  $\frac{T_5}{T_2}$  durchführen, erhalten wir das in Bild 95 dargestellte Diagramm.

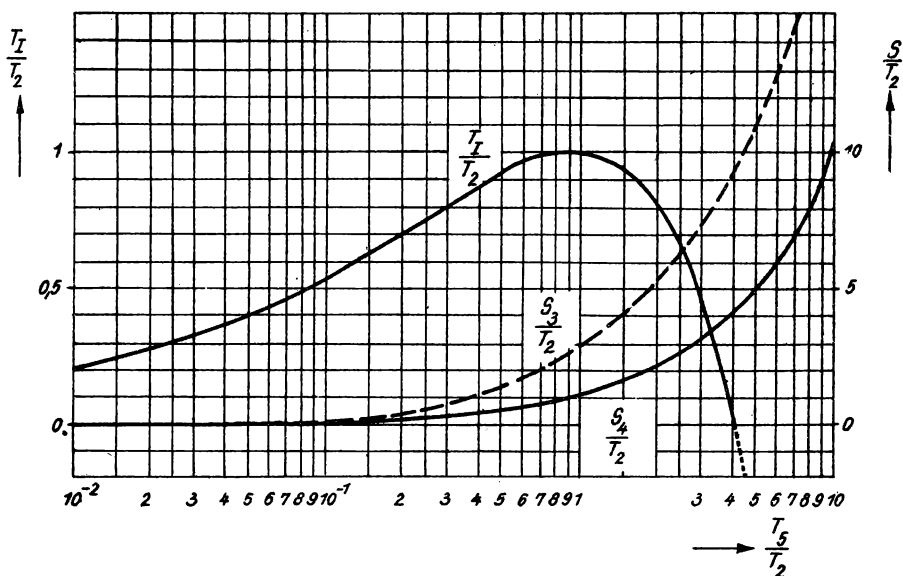


Bild 95  
Günstigste Einstellverhältnisse im Regelkreis nach Bild 94  
nach OLDENBOURG/SARTORIUS

Um die unter Benutzung von Variante 3 bzw. 4 erhaltenen Regelflächen miteinander vergleichen zu können, ist in Bild 95 neben der ausgezogenen Kurve  $S_4$ , die unter Benutzung einer differenzierenden Meßeinrichtung erhalten wurde, auch noch eine gestrichelte Kurve  $S_3$  gezeichnet, die die Regelfläche angibt, die man bei Benutzung einer nachgebenden Rückführung erhält. Man erkennt, daß die 4. Variante rechnermäßig bessere Resultate als die 3. Variante ergibt. In der Praxis zieht man jedoch eine nachgebende Rückführung einer Anordnung mit differenzierendem Glied im allgemeinen vor.

Die vier Varianten haben uns eine gewisse Vorstellung darüber gegeben, wie man durch Benutzung von Rückführungen bzw. differenzierenden Gliedern das Verhalten von Reglern beeinflussen und unter Umständen ganz erheblich verbessern kann. Es sei aber darauf hingewiesen, daß man die hier erzielten Ergebnisse nicht ohne weiteres auf ähnlich gelagerte Fälle übertragen darf. Wir haben nämlich in Variante 1 eine sehr einfache Anordnung vorausgesetzt, und dementsprechend sind die Ergebnisse sehr durchsichtig. Die praktisch

eingesetzten Regler sind komplizierter, und daher ist auch der Einfluß von stabilisierenden Einrichtungen nicht so eindeutig zu analysieren.

**[133] Stabilisierende Mittel in elektrischen Reglern.** Dieser Abschnitt ist vorzugsweise für die Fernstudenten der Fachrichtung Elektrotechnik gedacht.

Bei dem im vorigen Abschnitt behandelten Regelkreis mit 4 Varianten lag ein nichtelektrisches Problem vor. Um eine gewisse Übersicht über die Möglichkeiten des Aufbaues stabilisierender Einrichtungen zu gewinnen, wollen wir im folgenden noch einige elektrische Ausführungen beschreiben. Auf Rechnungen gehen wir hier nicht ein, weil in diesen Fällen nicht so einfache Verhältnisse vorliegen wie im Beispiel des Abschnittes [32]. Das können wir um so unbedenklicher tun, da wir dabei keine wesentlich neuen Erkenntnisse sammeln und wir überdies im letzten Lehrbrief ein Beispiel eines elektrischen Reglers durchrechnen werden.

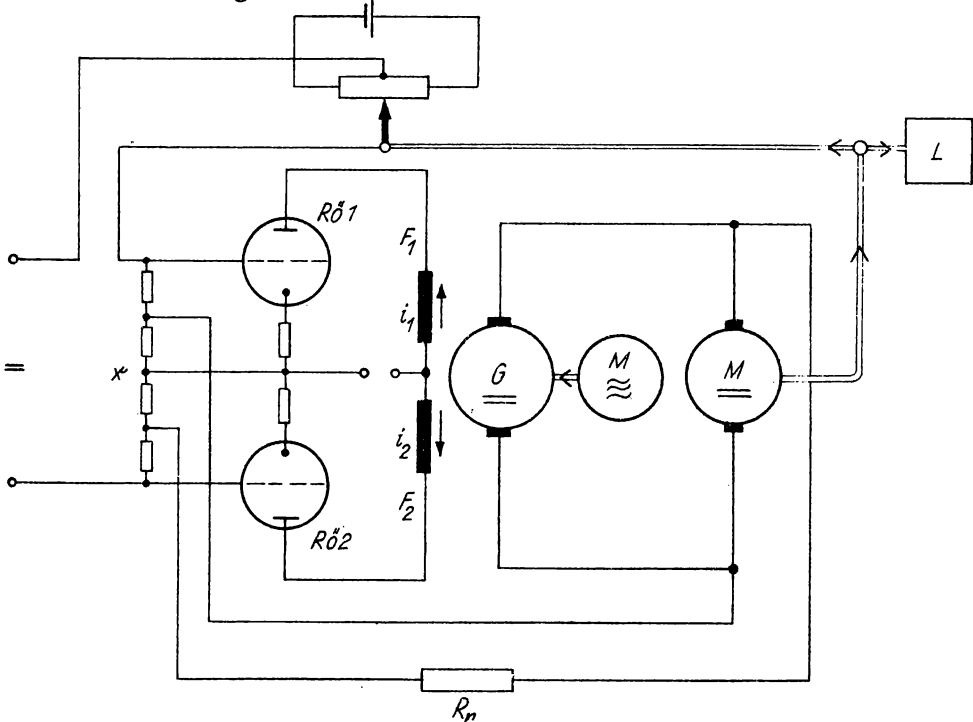


Bild 96

Regelkreis mit LEONARDgenerator und Geschwindigkeitsrückführung

Wir knüpfen an das grobe Schema von Bild 9 an. In diesem Schema ist noch keine stabilisierende Einrichtung vorhanden. Das Bild 96 dagegen ist weit weniger schematisiert. Wir finden zunächst einen einstufigen Verstärker mit Elektronenröhren, der als Zwei-Seiten-Stufe geschaltet ist. Die Spannung  $x$  wird in zwei gleiche Teile aufgeteilt, deren jeder an das Gitter einer der beiden Röhren, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen, gelangt. Bei Vorhandensein einer Spannung  $x$  wird also je nach ihrem Vorzeichen die eine Röhre entsprechend geöffnet und die andere geschlossen. Die in den Feldwicklungen  $F_1$  und  $F_2$  auftretenden Anodenströme sind, wenn  $x \neq 0$  ist, verschieden. Die im Erregerkreis des LEONARDgenerators wirksame Amperewindungszahl ist also gleich  $w(i_1 - i_2)$ , wobei beide Felder die gleiche Windungszahl  $w$  besitzen. Die an den Bürsten des Generatorankers auftretende Spannung ist also im linearen Teil der Kennlinie der Spannung  $x$  nach Größe und Vorzeichen proportional. Diese Generatorspannung dient zum Antrieb des Gleichstromnebenschlußmotors  $M$ , der über ein Getriebe die Last  $L$  und den Schleifer der Brücke verstellt, und zwar im Sinne einer Verkleinerung von  $x$ . Soweit wäre die Schaltung nur eine präzisierte Variante von Bild 9. Im Bild 96 haben wir aber noch zusätzlich eine Rückführung vorgesehen, und zwar wird die an den Bürsten des Generators auftretende Spannung in den Gitterkreis zurückgegeben. Die Polung wird dabei so gewählt, daß die Generatorspannung der Spannung  $x$  entgegenwirkt. Wenn  $i_1 = i_2$  ist und der Motor steht, erfolgt keinerlei Einwirkung auf den Gitterkreis. Ist dagegen  $i_1 \neq i_2$ , so tritt am Generator eine Spannung auf, die den zwischen den Eingangsklemmen des Verstärkers und Bürsten des Generators gemessenen Verstärkungsfaktor herabsetzt, und zwar um so stärker, je höher die Spannung am Generator ist. Es tritt zwar eine stabilisierende Wirkung ein, und es können bei kleinen Geschwindigkeiten größere Genauigkeiten erzielt werden, als ohne Rückführung, doch nimmt die Regelabweichung mit der Drehzahl des Motors stark zu. Wir konstatieren also einen großen „Geschwindigkeitsfehler“. Diese Anordnung entspricht einer Geschwindigkeitsrückführung.

Eine wesentliche Verbesserung der Eigenschaften des Regelkreises können wir erhalten, indem wir in den Rückführkreis einen Kondensator legen (Bild 97). Jetzt gelangt vom Generator aus an die

Gitter der ersten Stufe nur dann eine Spannung, wenn sich die Generatorspannung ändert. Der „Geschwindigkeitsfehler“ wird also bei dieser Anordnung gegenüber der vorigen ganz erheblich gesenkt.

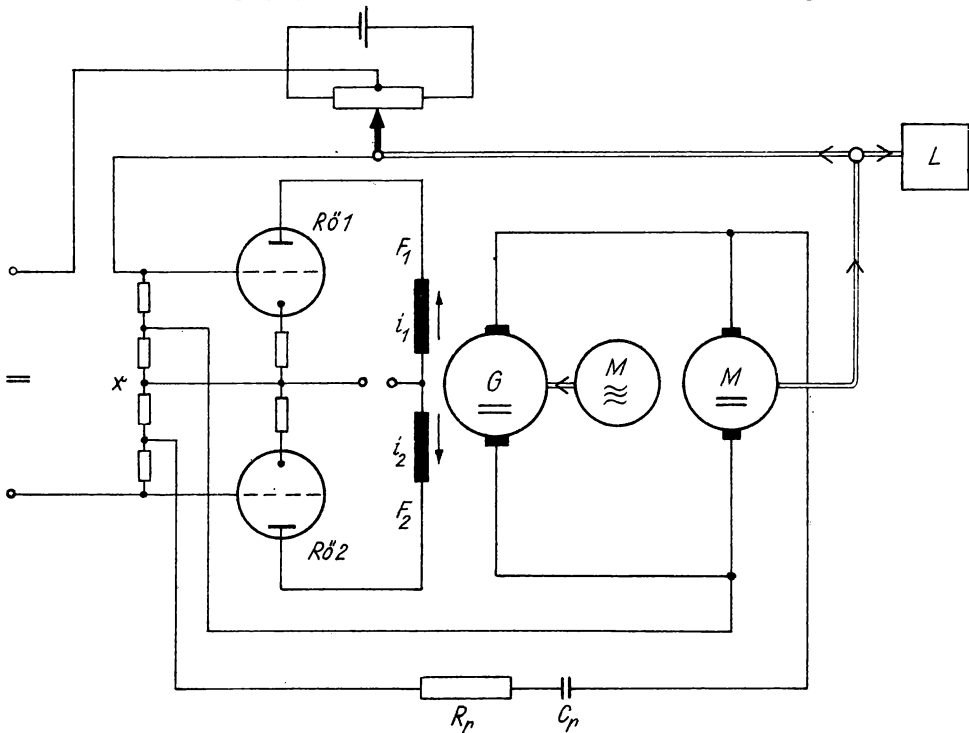


Bild 97

Regelkreis mit LEONARDgenerator und Beschleunigungsrückführung

Natürlich muß die RC-Schaltung sorgfältig dimensioniert werden. Schließlich bemerken wir noch, daß wir bei der Anordnung nach Bild 97 eine Beschleunigungsrückführung vor uns haben.

In vielen Fällen wird in der Praxis am Ausgang eines Regelungssystems nur eine kleine Leistung benötigt, so daß die Verwendung eines LEONARDgenerators aus Gründen des Aufwandes nicht tragbar ist. In solchen Fällen verwendet man andere Anordnungen, wie z.B. die in Bild 98 gezeigte. Vor dem eigentlichen Verstärker liegt ähnlich wie in den Bildern 96 und 97 eine Widerstandsschaltung. Die am Eingang des Umsetzers liegende Gleichspannung wird in eine Wechselspannung umgesetzt, wobei einem Vorzeichenwechsel der Eingangsgleichspannung ein Phasensprung um  $180^\circ$  bei der

Wechselspannung entspricht. Nach ausreichender Verstärkung wird mit dieser die Steuerwicklung eines Zweiphasenmotors eingespeist. Die Erregerwicklung liegt über einem Kondensator, der für die notwendige Phasenschiebung sorgt, an einer Wechselstromquelle der gleichen Frequenz wie die der Steuerspannung.

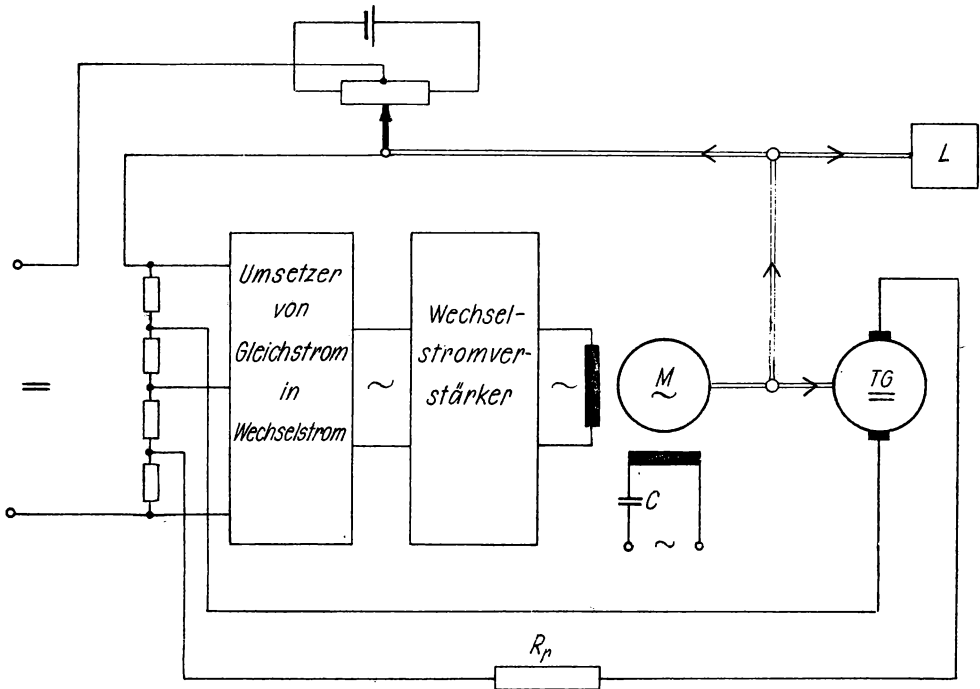


Bild 98

Regelkreis mit Geschwindigkeitsrückführung unter Benutzung eines Tachogenerators

Der Motor verstellt entsprechend wie in den Bildern 96 und 97 über ein Getriebe die Last  $L$  und den Schleifer des Potentiometers. Außerdem treibt der Stellmotor einen kleinen Gleichstromgenerator (Tachometermaschine), dessen Klemmenspannung an die Widerstands-schaltung des Einganges zurückgeführt wird. Die Wirkungsweise ist ähnlich wie in der Anordnung nach Bild 96. Während aber im Bild 96 die Generatorspannung zurückgeführt wurde, wird hier eine der Drehzahl des Motors proportionale Spannung an den Eingang gegeben. Wegen der Trägheit des Ankers und der damit verbundenen Tachometermaschine kommt die Rückführspannung in dem Schema nach



Bild 98 gegenüber Bild 96 zeitlich später, so daß wir im letzteren Falle nicht so günstige Verhältnisse erhalten. Auch hier können wir in dem Rückführstromkreis eine RC-Schaltung vorsehen.

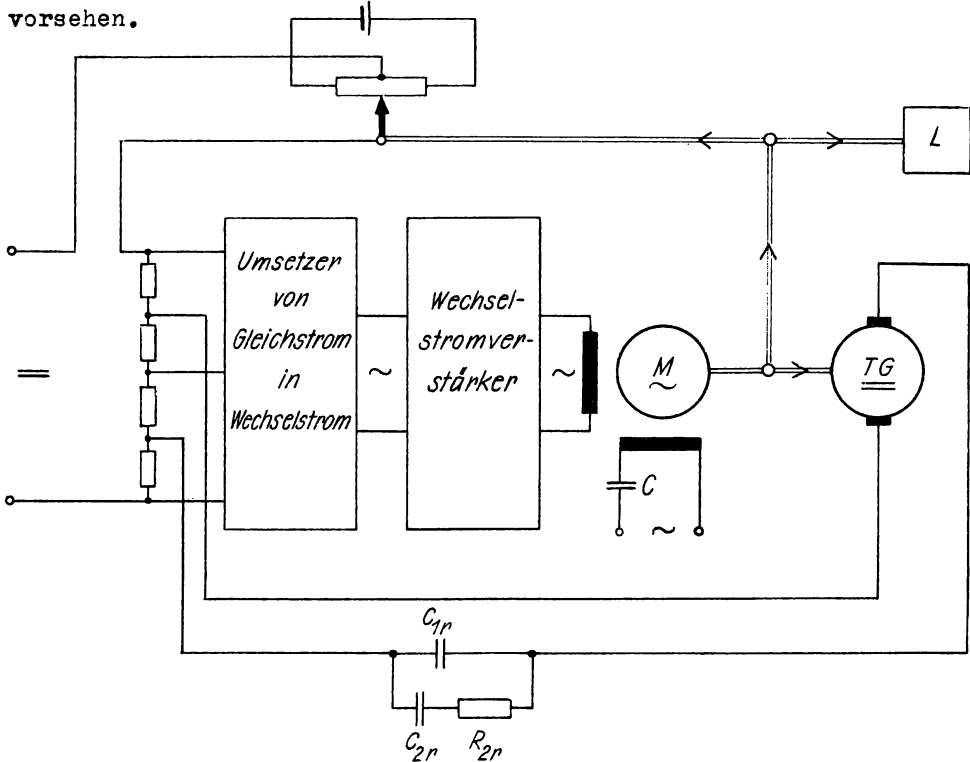


Bild 99

Regelkreis mit Beschleunigungsrückführung unter Benutzung eines Tachogenerators

Die damit ausgerüstete Anordnung arbeitet viel genauer als die nach Bild 98. Oft begnügt man sich jedoch nicht mit einer einfachen RC-Schaltung. Als Beispiel dient die im Bild 99 angegebene Schaltung. Daß man durch Verwendung des zu  $C_{1r}$  parallel liegenden Zweiges mit  $C_{2r}$  und  $R_{2r}$  bei geschickter Dimensionierung eine weitere Verbesserung der Eigenschaften des Regelkreises erreicht, wollen wir hier nur feststellen.

Wir haben also bisher zwei Varianten für die Anwendung einer Geschwindigkeitsrückführung mit elektrischen Mitteln kennengelernt (Bilder 96 und 98), und zwei weitere, bei denen eine Beschleunigungsrückführung mit elektrischen Mitteln verwirklicht wurde (Bilder 97 und 99).

Eine der Variante 4 (Anordnung mit differenzierendem Glied) des Abschnittes [32] entsprechende elektrische Ausführung brauchen wir hier nur zu erwähnen, da sie im Bild 9b in anderem Zusammenhang bereits angegeben wurde.

## **8. Kapitel: Klassifizierung der Regler nach Aufbau und Verhalten**

**[34] Einteilung der Regler nach ihrem Verhalten.** In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns mit dem Verhalten von Regelkreisen befaßt, die unter Benutzung von stetigen, linearen Reglern aufgebaut waren. So beschäftigten wir uns mit der Untersuchung der Stabilität von Regelkreisen und mit der Wirkung von Rückführungen und differenzierenden Gliedern, mit denen nur der Regler ausgerüstet werden konnte, da die Regelstrecke als Objekt der Regelung in ihren Eigenschaften vorgegeben ist. Durch die behandelten Hilfseinrichtungen ließ sich das zeitliche Verhalten der Regler in verschiedener Richtung beeinflussen. Im folgenden wollen wir nun die Regler, die dann zusammen mit der Regelstrecke den Regelkreis bilden, nach ihrem zeitlichen Verhalten einteilen, um eine Übersicht über die wichtigsten Reglertypen zu erhalten.

**1. Proportionalwirkender Regler (P-Regler).** Gehen wir auf die im 2. Kapitel behandelten Regelkreise zurück, so finden wir in Bild 8 eine Regelanordnung, die ohne Verwendung einer Hilfsenergie arbeitet. Der Regler besteht hier aus dem Schwimmer, dem Gestänge und der Drossel D. Wenn wir den Schwimmer sprungförmig um den Betrag 1 heben, so wird über das Gestänge die Drossel D ebenfalls sprungförmig verstellt, und zwar um einen Betrag, der von der konstruktiven Ausbildung der Anordnung abhängig ist. Als weiteres Beispiel führen wir Bild 13 an, in welchem der Regler ebenfalls ohne Hilfsenergie arbeitet.

Schließlich verweisen wir auf Bild 19, in dem ein Druckregelkreis dargestellt ist.

In Bild 100a, b ist die Abhängigkeit der Stellgröße von der Regelgröße für den P-Regler gezeichnet. Wir bemerken, daß wir in Bild 13a bereits einen speziellen Fall gezeichnet hatten.

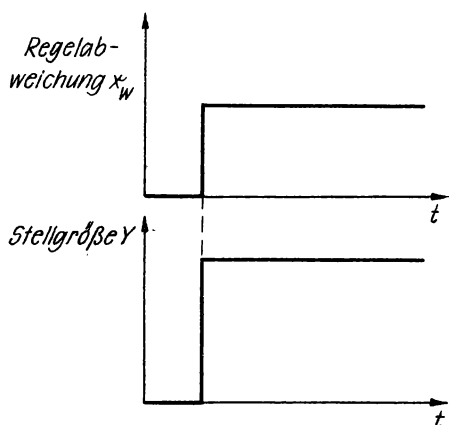


Bild 100a  
Übergangsfunktion eines idealisierten P-Reglers bei sprunghafter Verstellung der Regelabweichung  $x_w$

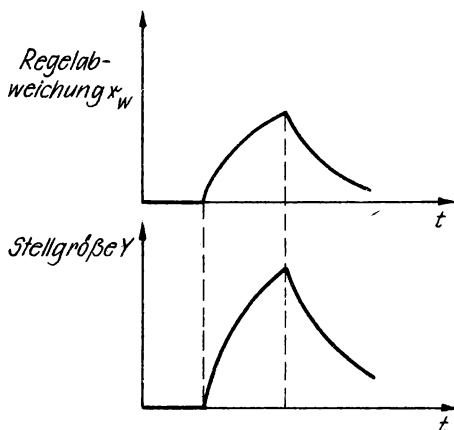


Bild 100b  
Verhalten eines P-Reglers für eine nicht sprunghafte Verstellung der Regelabweichung

Bei einer kleinen Änderung der Regelgröße, in Bild 101 z.B. einer geringen Druckerhöhung, dehnt sich das Wellrohr aus. Dieses bewirkt am Kraftschalter eine proportionale Vergrößerung des Abstandes zwischen Prallplatte und Ausströmdüse.

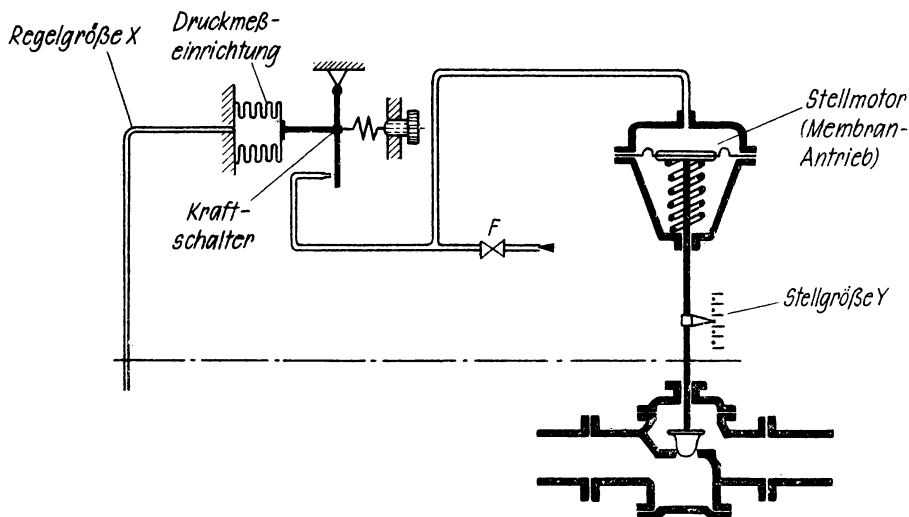


Bild 101  
Regler des Druckregelkreises (nach Bild 19)

Wir erwähnen, daß die Festdrossel  $F$ , die zwischen dem Speicher mit konstantem Druck einerseits und Prallplatte bzw. Stellmotor andererseits liegt, unbedingt erforderlich ist, um einen veränderlichen Steuerdruck zu erzeugen. Der Druckabfall in der Rohrleitung

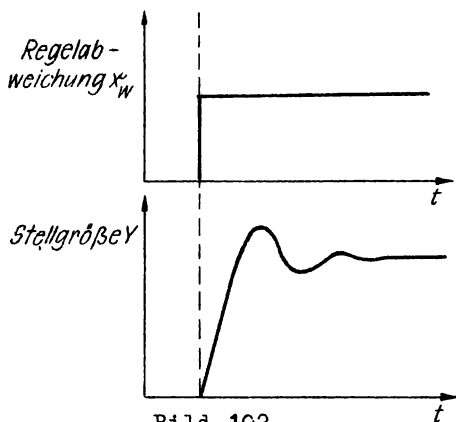


Bild 102

Abhängigkeit der Stellgröße von der Regelgröße bei dem Regler nach Bild 101

zwischen Ausströmdüse und Stellmotor bewirkt dann eine entsprechende Bewegung der Membran.

In bezug auf Abhängigkeit der Stellgröße von der Regelgröße erhalten wir bei dem Regler nach Bild 101 wegen der Feder- und Massenwirkungen etwa den Verlauf nach Bild 102.

Idealisieren wir das dynamische Verhalten des in Bild 19 dargestellten Reglers, können wir ihm ebenfalls ein Verhalten nach Bild 100a zuordnen.

Im Normblatt DIN 19226 wird der proportionalwirkende Regler folgendermaßen definiert:

„Beim P-Regler ist im Beharrungszustand jedem Wert der Regelgröße ein bestimmter Wert der Stellgröße zugeordnet. Diese Zuordnung ist im allgemeinen, vor allem für kleine Abweichungen, (linear-) proportional und gilt nur innerhalb eines gewissen Bereiches. Der Proportionalitätsfaktor kann sich längs des Stellbereiches ändern“.

Hier wollen wir noch einige Ergänzungen anschließen:

Wir nennen Proportionalbereich ( $X_p$ ) den Bereich, um den sich die Regelgröße ändern muß, damit die Stellgröße den Stellbereich durchläuft. Bei einem proportionalwirkenden Regler ist innerhalb des Proportionalbereiches jedem Wert der Regelgröße ein bestimmter Wert der Stellgröße zugeordnet (vgl. Bild 103).

Oft benutzt man auch den Begriff des Übertragungsfaktors (Verstärkungsfaktors), der als Verhältnis von Stellgrößenänderung zu Regelgrößenänderung festgelegt ist.

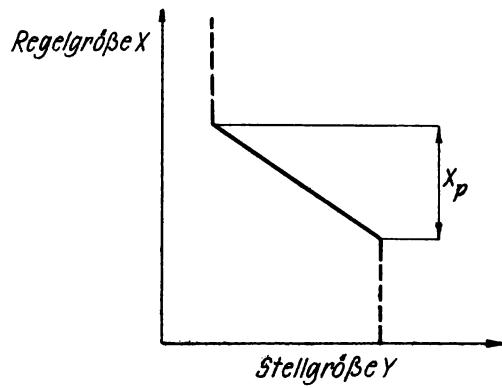


Bild 103  
Kennlinie eines P-Reglers

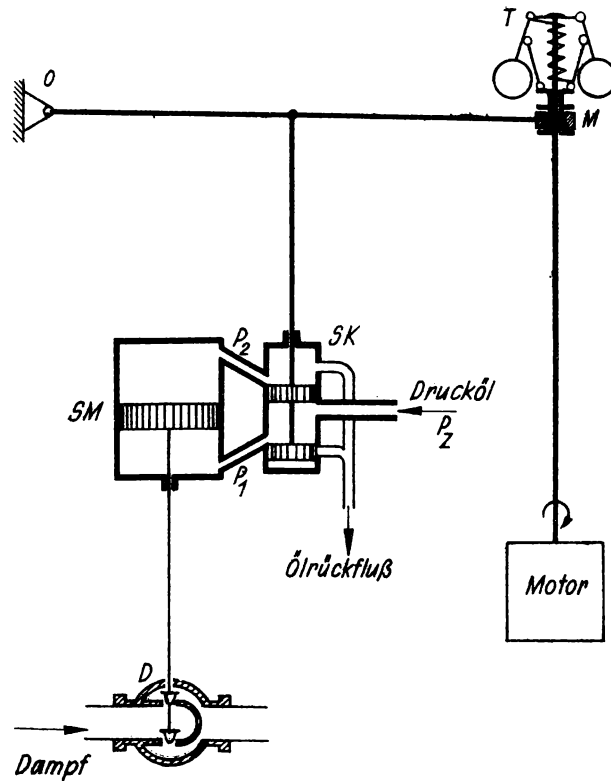


Bild 104  
Regler des Dampfmaschinen-Regelkreises (nach Bild 14)

Schließlich erinnern wir uns, daß wir bei der Variante 2 (s.S.135), bei der der Stellmotor mit einer starren Rückführung versehen ist, eine proportionale Wirkung erzielen. Dabei trat in dem Regelkreis eine bleibende Abweichung der Regelgröße vom Sollwert ein, obwohl die Ausführung des Reglers als fehlerfrei vorausgesetzt wurde. Diese bleibende Abweichung, die bei allen P-Reglern auftritt, nennt man P-Abweichung (s. Bild 91).

2. Integralwirkender Regler (I-Regler). Ein ganz anderes Verhalten zeigt der Regler nach Bild 14. Wir trennten damals die Verbindung zwischen Muffe und Doppelkolben und betrachteten die Bewegung des Stellmotors in Abhängigkeit von der Stellung des Doppelkolbens, siehe Bild 14a. Nun wollen wir entsprechend wie beim P-Regler verfahren und trennen die Regelstrecke vom Regelkreis ab. Wir treiben das Zentrifugalpendel durch einen Motor so an (Bild 104), daß sich der Doppelkolben in seine neutrale Lage einstellt. Ändern wir die Drehzahl des Pendels sprunghaft um einen bestimmten Betrag, so ermöglicht der Doppelkolben in entsprechendem Maße die Ölzufuhr zu dem Stellmotor. Dieser nimmt eine konstante Geschwindigkeit an, deren Betrag der Größe der sprunghaftigen Verschiebung des Doppelkolbens verhältnismäßig ist. Die Bewegung des Stellmotors dauert solange an, bis der Doppelkolben wieder in seine neutrale Lage zurückgeführt wird oder der Stellmotor eine Endlage erreicht. Wie wir auf S. 26 schon erwähnten, nennt man einen Regler mit solchem Verhalten integralwirkend. In Bild 105a und b geben wir Ihnen die Übergangsfunktion eines idealisierten integralwirkenden Reglers.

Man beachte den unterschiedlichen Verlauf der Stellgröße Y in den Bildern 100b und 105b.

Die Definition für den integralwirkenden Regler nach DIN 19226 lautet:

„Beim I-Regler ist im Beharrungszustand jedem Wert der Regelgröße eine bestimmte Änderungsgeschwindigkeit der Stellgröße zugeordnet. Diese Zuordnung ist im allgemeinen, vor allem für kleine Abweichungen, (linear-) proportional. Der Wert der Stellgröße selbst ist dann dem Zeitintegral der Regelabweichung proportional.“

Bei genügender Dauer auch einer sehr kleinen Regelabweichung, die nur die Ansprechgrenze überschreitet, erreicht die Stellgröße einen Endwert ihres Bereiches.“

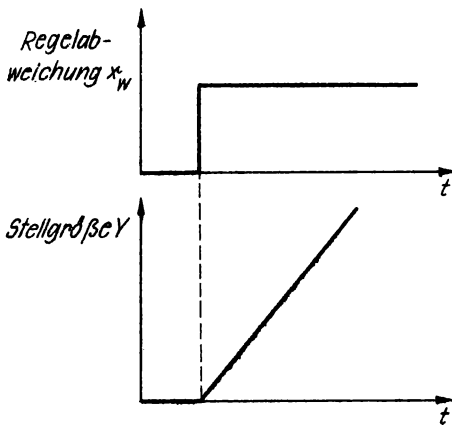


Bild 105a  
Übergangsfunktion eines idealisierten I-Reglers bei sprunghafter Verstellung der Regelabweichung  $x_w$

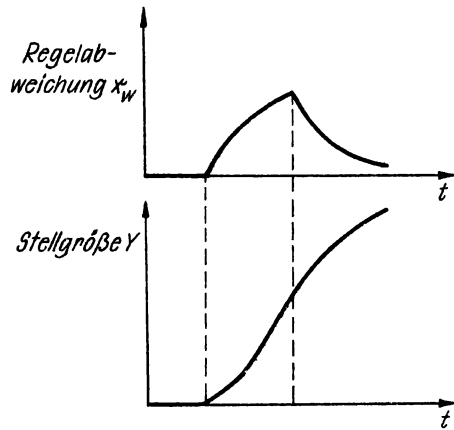
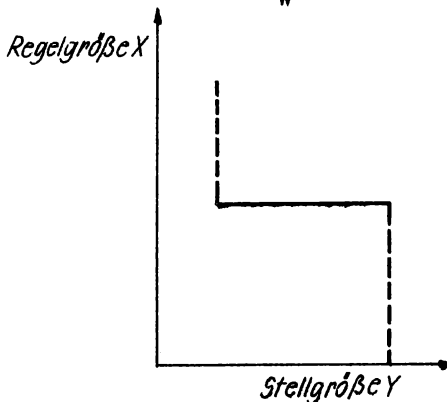


Bild 105b  
Verhalten eines I-Reglers für eine nicht sprunghafte Verstellung der Regelabweichung



Betrachten wir nun noch die idealisierte Kennlinie des I-Reglers, so erkennen wir, daß beim integralwirkenden Regler der Proportionalbereich gleich Null ist ( $x_p = 0$ ), wie aus Bild 105c hervorgeht.

Bild 105c  
Kennlinie eines I-Reglers

3. Proportional-integralwirkender Regler (PI-Regler). Der P-Regler und der I-Regler sind als die Grundtypen anzusprechen. Wir haben in den Kapiteln 2 und 7 gesehen, daß man durch geeignete zusätzliche Einrichtungen sowohl das Verhalten des P-Reglers als auch das des I-Reglers modifizieren kann. In Bild 16 und auch entsprechend bei Variante 3 (s.S. 139 ff.) haben wir eine nachgebende Rückführung angebracht, durch die sich eine wesentliche Veränderung des Verhaltens des Reglers ergibt. Wir sahen, daß wir neben der proportionalen Wirkung auch eine integrale Wirkung erhielten. Im Normblatt wird der proportional-integralwirkende Regler (PI-Regler) folgendermaßen definiert:

„Der PI-Regler stellt wie der P-Regler den Wert der Stellgröße proportional der Regelabweichung ein und addiert zu diesem einen weiteren Wert, der wie beim I-Regler dem Zeitintegral der Regelabweichung entspricht.“

Die Übergangsfunktion eines idealisierten PI-Reglers ist in Bild 106a, b gegeben. Die Überlagerung eines proportionalen und eines integralen Anteils ist deutlich zu erkennen. Wie Sie aus dem Bild 106a ersehen, ist die den I-Anteil charakterisierende geneigte Gerade bis zum Schnittpunkt mit der Zeitachse verlängert.

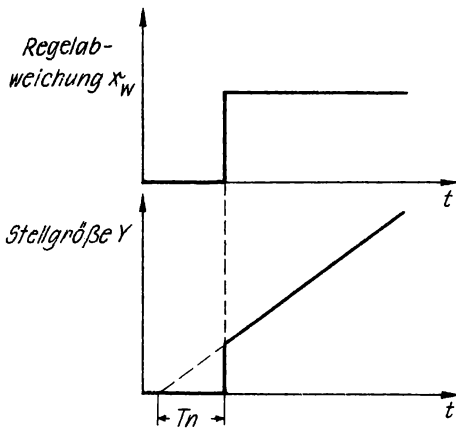


Bild 106a  
Übergangsfunktion eines idealisierten PI-Reglers bei sprunghafter Verstellung der Regelabweichung  $x_w$

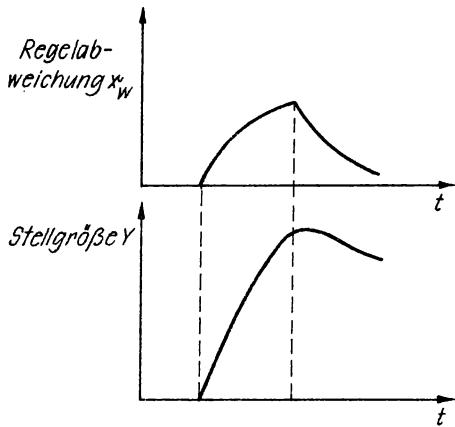


Bild 106b  
Verhalten eines PI-Reglers für eine nicht sprunghafte Verstellung der Regelabweichung

Der Abschnitt der Zeitachse vom Zeitnullpunkt bis zum Schnittpunkt heißt Nachstellzeit  $T_n$ . Offensichtlich ist die so definierte Nachstellzeit  $T_n$  gleich Null, wenn wir einen reinen integralwirkenden Regler haben.

4. Regler mit differenzierend wirkendem Einfluß (Regler mit D-Einfluß PD-, ID-, PID-Regler). In vielen Fällen genügen die bisher besprochenen Reglertypen noch nicht den an sie zu stellenden Anforderungen. Wie wir an dem Regelkreis mit differenzierendem Glied feststellten, kann man durch zusätzliche Verwendung eines differenzierenden Gliedes die Eigenschaften des Reglers so abwandeln, daß der Regelkreis ganz erheblich günstiger arbeitet. Auch die RC-Schaltung in Bild 9b ergab eine Verbesserung der



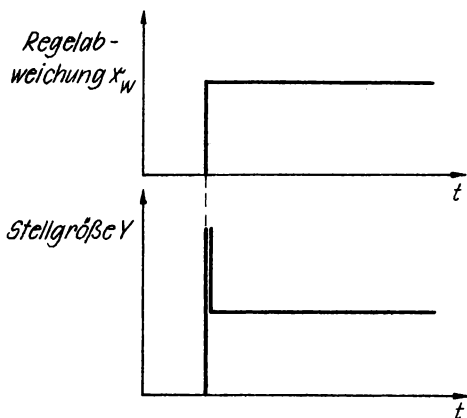


Bild 107a

Übergangsfunktion eines idealisierten P-Reglers mit D-Einfluß bei sprunghafter Verstellung der Regelabweichung  $x_w$

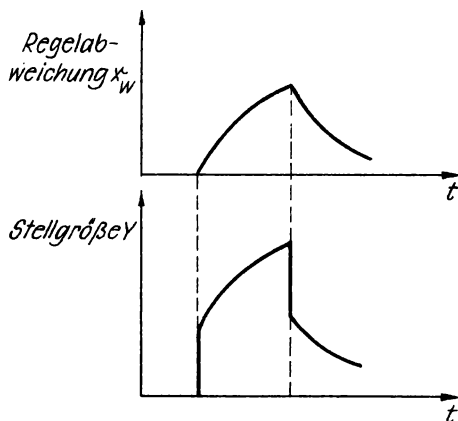


Bild 107b

Verhalten eines P-Reglers mit D-Einfluß bei einer nicht sprunghaftigen Verstellung der Regelabweichung

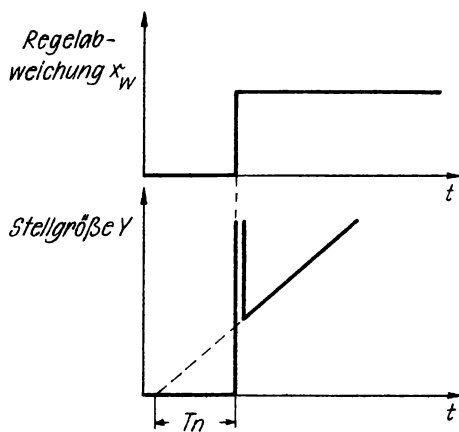


Bild 108a

Übergangsfunktion eines idealisierten PID-Reglers bei sprunghafter Verstellung der Regelabweichung  $x_w$

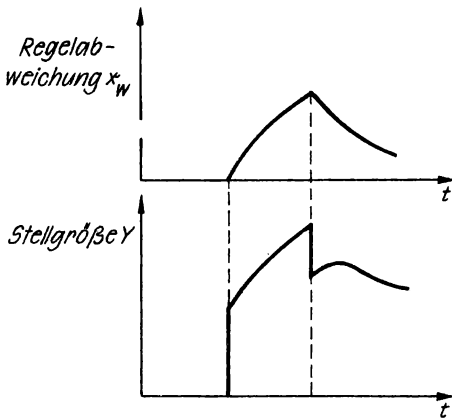


Bild 108b

Verhalten eines PID-Reglers bei einer nicht sprunghaftigen Verstellung der Regelabweichung

Eigenschaft des Regelkreises. Ist in dem Regler in Wirkungsrichtung eine Anordnung der eben erwähnten Art vorhanden, so bezeichnet man sie auch als Vorhaltglied oder Glied mit D-Einfluß. Solche Glieder werden in P-, I- und PI-Reglern eingebaut. Man erhält dann PD- und PID-Regler, während der ID-Regler keine praktische

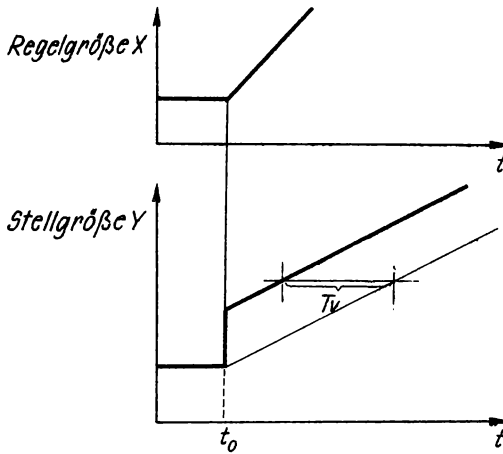


Bild 109  
Bestimmung der Vorhaltzeit  
(PD-Regler)

Bedeutung besitzt.

In Bild 107a, b sind Übergangsfunktionen eines idealisierten PD-Reglers und in Bild 108a, b die eines idealisierten PID-Reglers dargestellt.

Am PD-Regler erklären wir noch den Begriff der Vorhaltzeit.

Ändern wir die Regelgröße vom Zeitpunkt  $t = t_0$  nach der sogenannten Rampenfunktion ( $x = at$ ), dann erhalten wir das folgende Bild (Bild 109).

Wenn wir in der angedeuteten Weise eine Parallele zur Zeit-

achse ziehen, so können wir dem Bild 109 die Vorhaltzeit ( $T_v$ ) entnehmen. Ihre Definition nach DIN 19226 lautet:

„Die Vorhaltzeit  $T_v$  eines PD-Reglers ist die Zeit, die das Stellglied vom Beginn einer mit konstanter Geschwindigkeit verlaufenden Änderung der Regelabweichung an benötigt, um auf Grund der Proportionalwirkung den Weg zurückzulegen, den es infolge der Vorhaltwirkung sofort zurückgelegt hat.“

Am Schluß dieses Abschnittes sollen in schematischer Form mögliche Änderungen des Verhaltens eines Reglers zusammengestellt werden, wobei wir auf Vollständigkeit keinen Wert legen.

In Bild 110 gehen wir vom P-Regler aus. Durch die Pfeile werden die Eigenschaften eines Blockes auf den anderen übertragen.

Ist uns zunächst ein I-Regler gegeben, so ergeben sich etwa folgende Möglichkeiten (Bild 111).—Es ist vielleicht nicht unnötig darauf hinzuweisen, daß wir eigentlich nur zwei Hauptgruppen, nämlich P-Regler und I-Regler haben. Bei den Reglern, die durch 2 oder 3 Buchstaben (P; I; D) charakterisiert werden, kommen zu dem Grundverhalten ein oder zwei andere Komponenten hinzu, wodurch sich ein günstigeres Verhalten des Regelkreises erzielen läßt. Gewarnt werden muß davor, das Vorhandensein einer I- bzw. D-Komponente mit der mathematischen Differentiation bzw. Integration zu identifizieren.

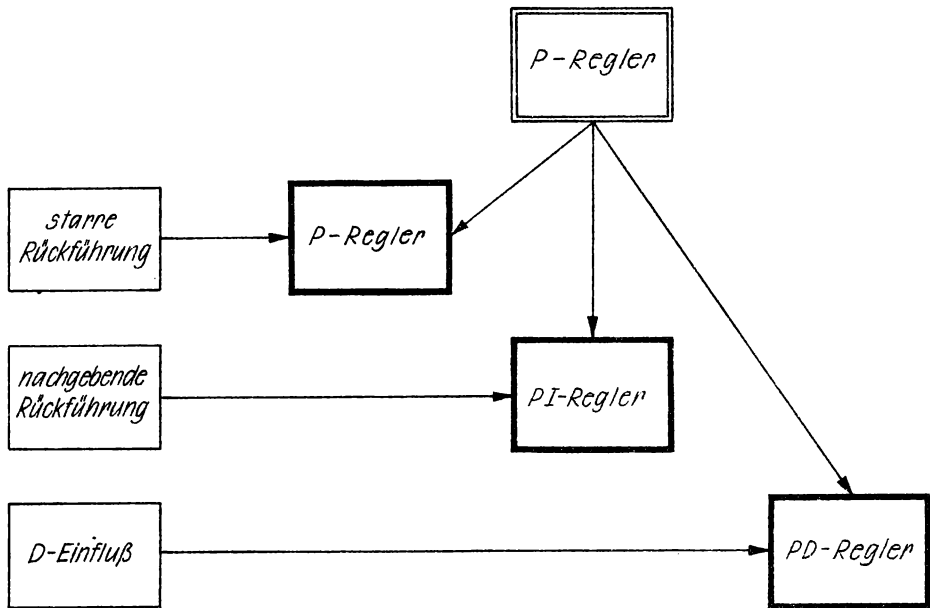


Bild 110

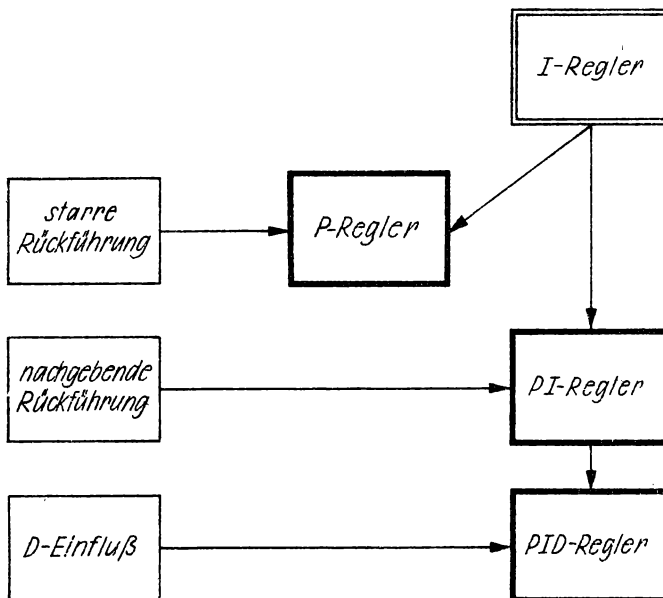


Bild 111

## 9. Kapitel: Experimentelle Untersuchungen von Regelkreisen

[35] Messungen an Regelkreisen. In dem 4. Kapitel hatten wir das zeitliche Verhalten von Baugliedern untersucht, wobei als Störgröße die Sprungfunktion gegeben war. Umgekehrt konnten wir nach experimenteller Ermittlung der Übergangsfunktion gewisse Rückschlüsse auf die Differentialgleichung ziehen, der das entsprechende Bauelement gehorcht. Im 5. Kapitel betrachteten wir dann den Fall, daß die Störung in Form einer Sinusfunktion verlief. Wir erhielten Frequenzgänge, die für die einzelnen Bauelemente charakteristisch sind. Auch hier konnten wir umgekehrt aus dem experimentell aufgenommenen Frequenzgang gewisse Schlüsse auf die Eigenschaften der untersuchten Anordnung ziehen. Während wir uns damals auf eine formale Darstellung beschränkten, wollen wir nun darauf eingehen, wie man solche Messungen durchführt.

1. Sprungförmige Einwirkung. Die Erzeugung einer sprungförmigen Störung bereitet in den meisten Fällen keine Schwierigkeit. Soll sich eine elektrische Größe sprungförmig ändern, so erzielt man den Sprung mit Hilfe eines Schalters, dabei muß nur gewährleistet sein, daß nicht durch sekundäre Einflüsse ein unzulässiges Abschleifen der Sprungfunktion erfolgt. Schwierigkeiten können auftreten, wenn man zur Erzeugung einer sprungförmigen Störung mechanische Anordnungen verwendet. Allerdings verlaufen die Regelungsvorgänge meistens relativ langsam, so daß man im allgemeinen bei einiger Geschicklichkeit zu befriedigenden Ergebnissen kommt. Will man etwa eine sprungförmige Störung dadurch erzielen, daß ein Strahlengang abgeblendet wird, so ist zu gewährleisten, daß die Blendenverstellung genügend schnell vor sich geht. Dies bereitet kaum technische Schwierigkeiten. Ungünstiger liegen die Verhältnisse, wenn z.B. ein Ventil mit großem Durchgangsquerschnitt plötzlich verstellt werden muß. In einem solchen Falle ist immer eine Prüfung der Abweichung der Form der wirklichen Störung von der vorausgesetzten sprungförmigen durchzuführen, um die Anwendbarkeit des Verfahrens sicherzustellen.

2. Sinusförmige Einwirkung. Außer sprungförmigen gibt man häufig sinusförmige Einwirkungen sowohl auf einzelne Bauelemente als auch auf den geschlossenen Regelkreis. Bei der Untersuchung von

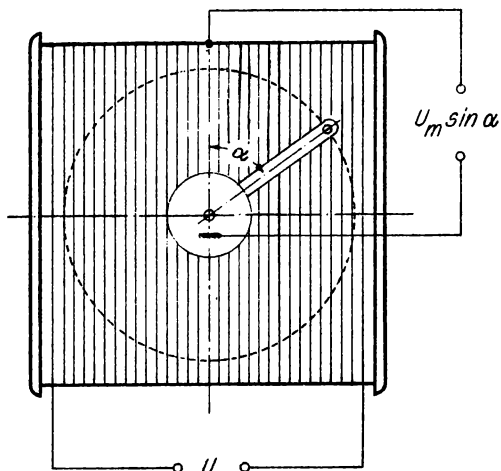


Bild 112a  
Potentiometer zur Erzeugung  
von niederfrequenten Sinus-  
schwingungen

gegengekoppelten Verstärkern, die im Bereich von etwa 30 ... 10 000 Hz arbeiten sollen, treten hierbei keinerlei Komplikationen auf, da Röhrengeneratoren für diesen Frequenzbereich leicht zu bauen sind.

Bei den meisten Reglern liegt aber der für die Untersuchung wichtigste Frequenzbereich in der Größenordnung von 1 Hz. Der Bau von Röhrengeneratoren für so niedrige Frequenzen bereitet Schwierigkeiten, und zwar besonders in bezug auf die Einhaltung eines niedrigen Klirrfaktors, also eines geringen Anteils an Harmonischen. Die Feststellung des Frequenzganges kann dabei unter Benutzung von Schleifenoszillografen bzw. Elektronenstrahloszillografen mit langsam abklingender Fleckhelligkeit erfolgen.

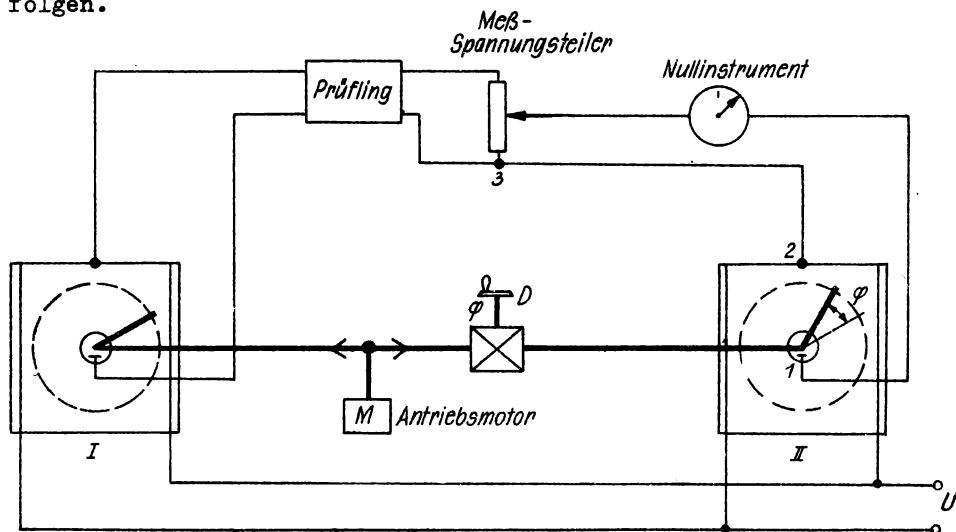


Bild 112b  
Amplituden- und Phasenmessung mittels zweier Potentiometer nach Bild 112a

Zur Aufnahme des Frequenzganges bei sehr niedrigen Frequenzen wendet man häufig Anordnungen an, die auf anderen Prinzipien beruhen. Eine der Möglichkeiten sei im folgenden genauer betrachtet.

Auf einer quadratischen, isolierenden Grundplatte (Bild 112a) wird eine Drahtwicklung aufgebracht. Über die Oberfläche der Drähte gleitet ein Schleifer auf einer Kreisbahn. Zwischen ihm und der in der Mitte angezapften Drahtwicklung wird dann die Spannung abgenommen, die dem Sinus des Drehungswinkels proportional ist.

Die Durchführung der Amplituden- und Phasenmessung erläutern wir an Bild 112b. Wir benötigen dabei zwei nach Bild 112a aufgebaute Potentiometer, deren Schleifer über ein Differential miteinander gekuppelt sind und mit gleicher Geschwindigkeit angetrieben werden können. Die vom Potentiometer I abgegebene Spannung wird auf den Prüfling gegeben. An seinen Ausgangsklemmen wird ein Meßspannungsteiler angeschlossen. Die zwischen seinem Schleifer und dem Anfang (Punkt 3) auftretende Spannung wird unter Zwischenschaltung des Nullinstruments mit den Ausgangsklemmen (1,2) des Potentiometers II verbunden. Dann wird durch Betätigung des Meßspannungsteilers die Amplitude und durch Eindrehen des Winkels  $\varphi$  an dem Differential D die Phase so geändert, bis das Instrument keinen Ausschlag mehr zeigt.

Die Aufnahme des Frequenzganges von Baugruppen bzw. Reglern und schließlich auch Regelkreisen ist aber mit der angegebenen elektrischen Einrichtung in dieser Form nur dann möglich, wenn am Eingang und Ausgang elektrische Größen vorliegen. Oft kann man sich dadurch helfen, daß man vorgegebene nichtelektrische Größen durch elektrische Größen darstellt. Dies sei an Bild 113 erläutert. Wir wollen hier den Frequenzgang des im Bild 19 dargestellten Reglers aufnehmen, wobei wir noch erwähnen, daß man in der Praxis kompliziertere Regler benutzt.

Wie Bild 113 zeigt, führen wir der Meßeinrichtung einen sinusförmigen Wecheldruck zu, der in einer Hilfeinrichtung durch die Veränderung des Abstandes der Prallplatte von der Düse mittels eines Exzenters erzeugt wurde. Gleichzeitig verstellt der Motor über ein Differential das Sinus-Potentiometer I. An dem Gestänge zwischen Membranmotor und Ventil ist mechanisch ein zweites und zwar lineares Potentiometer II angebracht, welches die Bewegung des Ventilstößels elektrisch anzeigt.

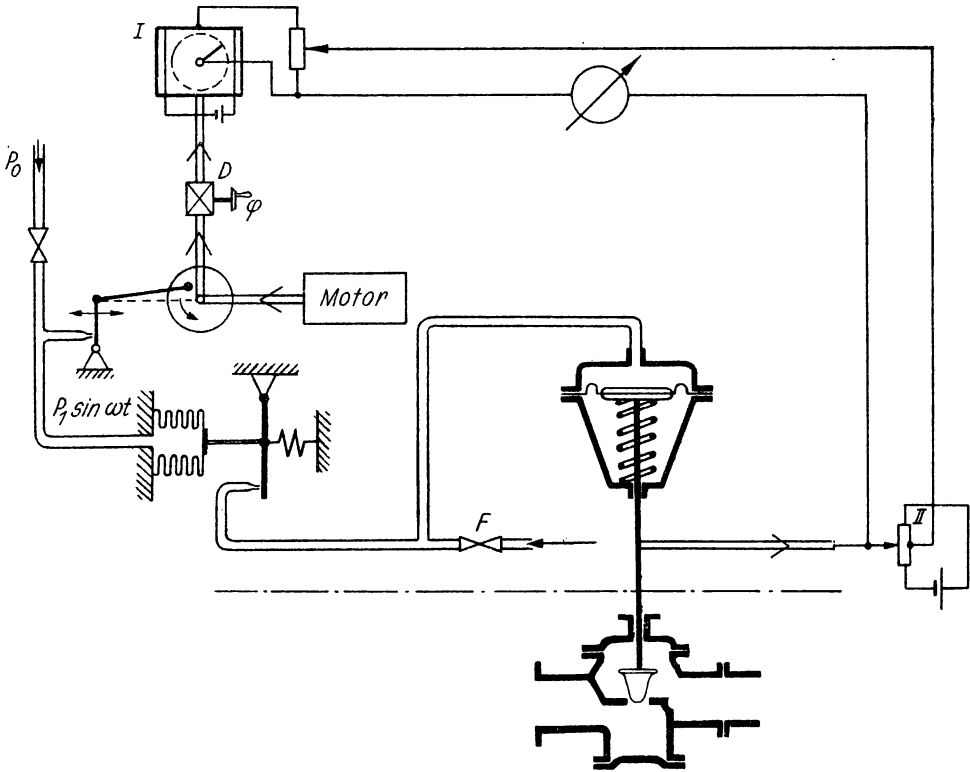


Bild 113  
Umwandlung von nichtelektrischen Größen (Druck) in elektrische Größen, um den Frequenzgang aufnehmen zu können

Die beiden erzeugten Spannungen werden genau wie in dem vorigen Bild 112b verglichen, und zwar unter Zwischenschaltung eines Nullanzeigegerätes kompensiert, wobei die Amplitude durch Veränderung der Speisespannung des Potentiometer II und die Phase  $\varphi$  durch Betätigung des Differentials verändert werden.

Bei der Untersuchung des Frequenzganges etwa einer Druckkammer kann man auch auf die Verwendung elektrischer Mittel verzichten, wie dies in Bild 114 dargestellt ist. Die Druckluft geht über eine Vordrossel in die Druckkammer. Zwischen Druckkammer und Vordrossel befindet sich eine Prallplatte.

Der Abstand zwischen Düse und Prallplatte wird mittels eines

Motors und eines Exzenters in der Abhängigkeit von der Zeit sinusförmig geändert. Außerdem ist am Eingang und Ausgang der Druckkammer je ein Wellrohr angebracht, das je eine Schreibfeder trägt, um den Druckverlauf zu registrieren. Dabei muß natürlich die Zeitkonstante der Wellrohre klein gegenüber derjenigen der Druckkammer sein.

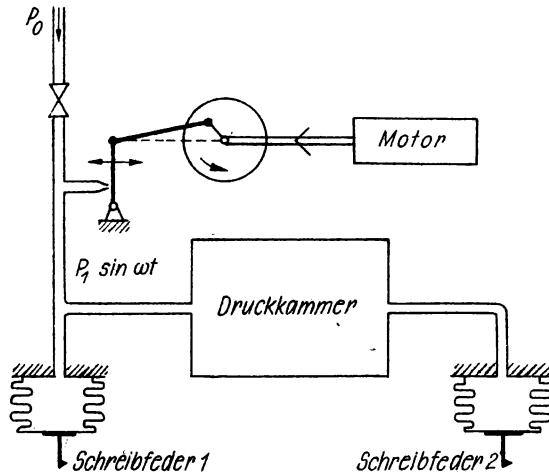


Bild 114

Aufzeichnung des Frequenzganges einer Druckkammer mittels zweier durch Wellrohre betätigter Schreibfedern

In einem Punkte unterscheidet sich allerdings diese Anordnung wesentlich von den beiden vorher gezeigten. Wir können keine Kompensation vornehmen, sondern die Schreibfeder 1 schreibt den Kurvenverlauf des Eingangsdruckes, die Schreibfeder 2 den Kurvenverlauf des Ausgangsdruckes. Das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung zwischen den Kurven 1 und 2 müssen dann für die einzelnen Frequenzen grafisch ermittelt werden.

Mitunter ist der Einsatz eines mechanischen Sinusgebers angebracht. Eine Ausführungsform zeigt Bild 115. Hier wird eine Kreisscheibe K mit konstanter Geschwindigkeit angetrieben. Ein an der Peripherie angebrachter Stift bewegt sich so in der Kulissee, daß dem mit ihr verbundenen Schieber eine sinusförmige Bewegung erteilt wird. Für die Schubbewegung des Gestänges gilt

$$x = r \sin \omega t$$



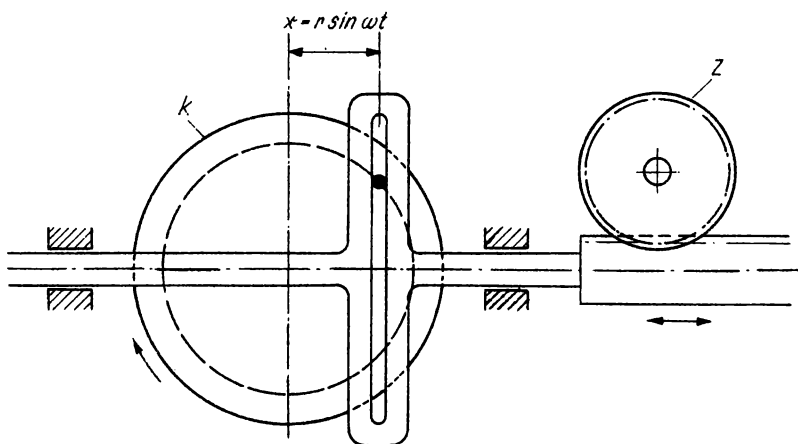


Bild 115  
Mechanischer Generator für Sinusschwingungen

Mittels des Zahnrades Z kann man die Schubbewegung in eine Drehbewegung umwandeln. Diese Anordnung muß sorgfältig gebaut sein, damit keine Losen, die eine beträchtliche Verzerrung des sinusförmigen Verlaufs hervorrufen, auftreten. Daher benutzt man derartige Anordnungen nur für kleine Frequenzen.

Mit diesen Ausführungsmöglichkeiten müssen wir uns in diesem Rahmen begnügen.

**[36] Einstellregeln.** Im 6. Kapitel beschäftigten wir uns mit der Frage der Beurteilung der Stabilität. Die von uns behandelten Kriterien gaben eine Auskunft darüber, ob das System stabil oder instabil ist oder sich an der Stabilitätsgrenze befindet. Wie wir schon mehrfach betonten, ist aber ein Regelkreis, der sich an der Grenze der Stabilität befindet, vom Standpunkt der Praxis aus bereits völlig unbrauchbar. Er ist aber selbst dann praktisch nicht verwendungsfähig, wenn die Pendelungen nach einer sprungförmigen Störung nur langsam abklingen.

Wir hatten weiterhin im 7. Kapitel einen sehr einfachen Regelkreis behandelt, dessen Eigenschaften wir durch nachträgliche Anbringung von Rückführungen bzw. eines differenzierenden Gliedes abändern konnten. Wir stellten fest, daß bei geeigneter Ausbildung der genannten Einrichtungen eine wesentliche Verbesserung

der Eigenschaften dieses Regelkreises erzielt wurde. Bei den Darlegungen des 7. Kapitels wählten wir, um einen bequemen Vergleich durchzuführen, den Grenzfall der Aperiodizität.

Nun hatten wir bereits angedeutet, daß die Verhältnisse bei praktisch ausgeführten Reglern wohl immer komplizierter liegen, als in dem von uns behandelten Falle. Es ist also nicht sicher, ob wir in der Praxis den Grenzfall der Aperiodizität überhaupt zu erreichen in der Lage sind bzw. ob wir einen monotonen Verlauf der Regelgröße in Abhängigkeit von der Zeit erhalten können. Nur in dem letzteren Falle können wir nämlich die Regelfläche in der auf Seite 134 eingeführten Art bestimmen. Zwei derartige Möglichkeiten sind in Bild 116 dargestellt.

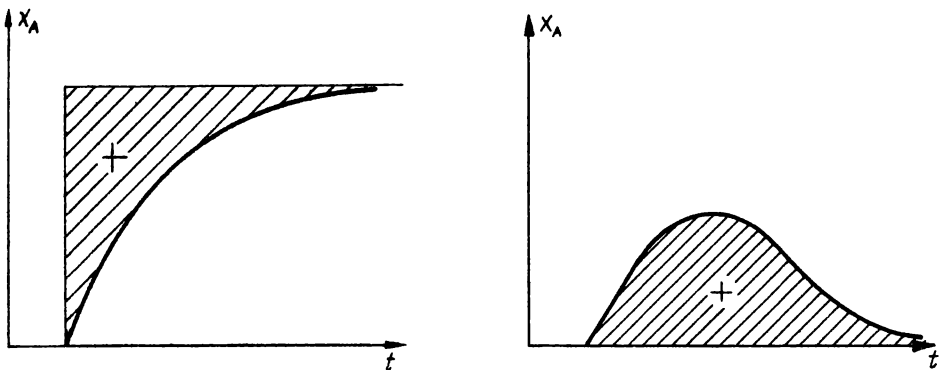


Bild 116  
Regelfläche bei monotonem Verlauf

In manchen Fällen wird aber nach einer sprunghaftigen Störung ein Überschwingen auftreten, wie es in Bild 117 dargestellt ist.

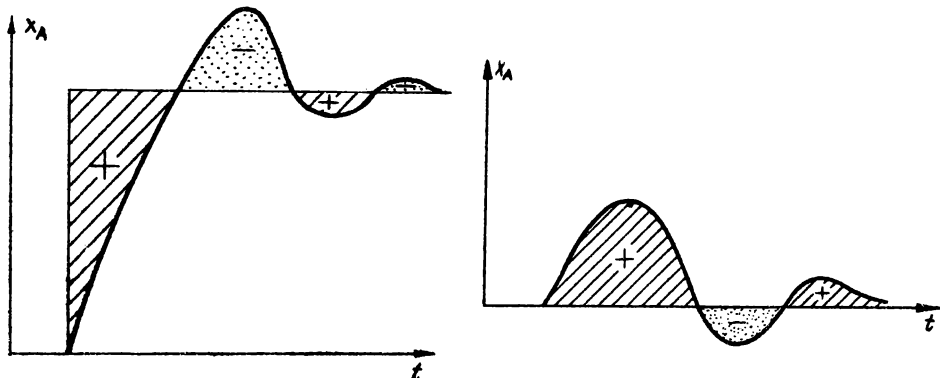


Bild 117  
Regelfläche bei Überschwingungen

Die bisherige Definition der Regelfläche verliert dann ihren Sinn, weil sich die mit dem Minuszeichen versehenen Flächen von den positiv gerechneten subtrahieren, so daß bei der Ermittlung der Regelfläche nach Gleichung (VII,14) ein zu günstiges Verhalten des Regelkreises vorgetäuscht wird. Aus diesem Grunde summiert man mitunter die Beträge der Teilflächen, d.h., man verzichtet auf die Berücksichtigung der in den Bildern 116 und 117 eingetragenen Vorzeichen. So erhält man eine recht brauchbare Charakterisierung des Übergangsprozesses. Wir wollen jedoch auf diese und noch andere Möglichkeiten nicht weiter eingehen.

Da die Ermittlung der Regelfläche nicht immer mit geringem Aufwand durchgeführt werden kann, bemüht man sich, dem Praktiker einfache Regeln zur Verfügung zu stellen. Wir nehmen an, daß der Übergangsprozeß bei einem Folgeregler in der im Bild 118 dargestellten Form verläuft. Dann kann man ihn nach SOLODOWNNIKOW durch

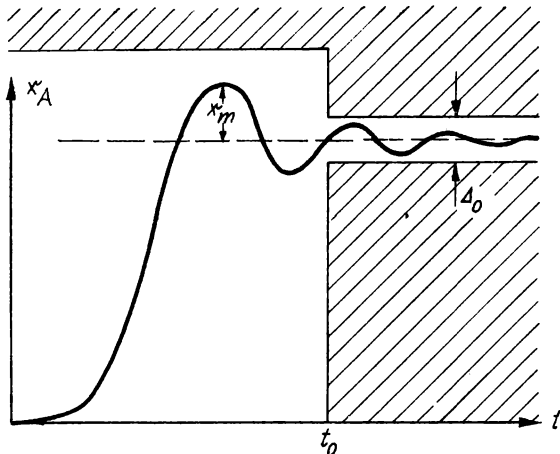


Bild 118  
Grenze der zulässigen Abweichungen der Regelgröße nach SOLODOWNNIKOW

die maximale Überschwingweite  $x_m$ , die zulässige Dauer des Einschwingvorganges  $t_0$  und die erforderliche Genauigkeit  $\Delta_0$  des Befehls charakterisieren. In der Praxis beansprucht natürlich der umgekehrte Weg das größere Interesse, wobei man die Überschwingweite  $x_m$ , die Dauer des Einschwingvorganges  $t_0$  und die erforderliche Genauigkeit  $\Delta_0$  vorschreibt. Bei der Justierung des Regelkreises müssen dann

seine Parameter so variiert werden, daß die gestellten Bedingungen erfüllt werden. Allerdings sind damit noch nicht alle Schwierigkeiten behoben. Wir haben nämlich noch keinen Hinweis gegeben, wie man zumindest in die Nähe des optimalen Verhaltens des Regelkreises kommt. Hier wären Faustregeln sehr nützlich, damit die wichtigsten veränderbaren Parameter nicht planlos variiert zu werden brauchen. Dahinzielende Anweisungen sind offensichtlich besonders

dann wichtig, wenn ein fertig entwickelter Regler am Einsatzort an die Regelstrecke angebaut werden muß.

Natürlich kann man bei der Angabe von überschlägigen Einstellregeln keine große Allgemeinheit in bezug auf die Zahl der veränderbaren Parameter erwarten, da die einzelnen Regelkreise in ihrem Aufbau viel zu sehr voneinander abweichen können. In vielen Fällen kommt man unter Anwendung des von NICHOLS und ZIEGLER angegebenen Verfahrens wie folgt zum Ziel.

Man stellt zuerst den Regler als P-Regler ein, d.h., der D- bzw. I-Anteil muß abgeschaltet werden. Dann vergrößert man den Gesamtverstärkungsfaktor  $K$ , der am aufgeschnittenen Kreis gemessen werden muß, soweit, bis ungedämpfte Schwingungen auftreten. Man befindet sich also an der Grenze der Stabilität. Der hierbei festgestellte Verstärkungsfaktor sei mit  $K_{kr}$  bezeichnet. Außerdem bestimmt man die Schwingungsdauer  $T_{kr}$  dieser Dauerschwingung. Dann ergibt sich als günstigste Einstellung für

a) den P-Regler  $K = 0,5 K_{kr}.$

b) den PI-Regler  $K = 0,40 K_{kr}$

$T_N = 0,85 T_{kr}; \quad T_N = \text{Nachstellzeit}$

c) den PID-Regler  $K = 0,6 K_{kr}$

$T_N = 0,5 T_{kr}$

$T_v = 0,12 T_{kr}; \quad T_v = \text{Vorhaltzeit}$

Aus den angegebenen Werten sieht man, daß beim PI-Regler der Wert für  $K$  am kleinsten ist, dann folgt der P-Regler, während wir beim PID-Regler mit dem größten Wert von  $K$  arbeiten können.

Nachdem die Justierung des Regelkreises vorgenommen worden ist, nimmt man zweckmäßigerweise den Einschwingvorgang nach Aufdrücken einer sprungförmigen Störung experimentell auf und kontrolliert, ob die zulässigen Werte für die Überschwingweite, Einschwingzeit und Genauigkeit nicht überschritten werden.

## 10. Kapitel: Nichtlinearitäten

**[37] Beschreibung einiger Nichtlinearitäten.** Bisher haben wir bei der rechnerischen Behandlung von Regelkreisen immer vorausgesetzt, daß zwischen den veränderlichen Größen ein linearer Zusammenhang besteht. Wir konnten also das Superpositionsprinzip anwenden, demzufolge sich Einwirkungen verschiedener Frequenz additiv ohne gegenseitige Beeinflussung überlagern. Die mathematische Beschreibung linearer Regelkreise führte, wie wir sahen, auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die einfach zu behandeln sind.

Treten in einem Regelkreis Nichtlinearitäten auf, so wird die rechnerische Behandlung im allgemeinen beträchtlich komplizierter, und in vielen Fällen kann man keine geschlossene Lösung finden. Als weitere Erschwerung kommt hinzu, daß bei Regelungsproblemen die Nichtlinearitäten in sehr verschiedenartiger Form auftreten können. Manchmal sind sie so verwickelt, daß sie keinen einfachen analytischen Ansatz erlauben.

Wir wollen hier nur einige Beispiele qualitativ betrachten.

### 1. Nichtlineare Kennlinie eines Elektronenröhrenverstärkers

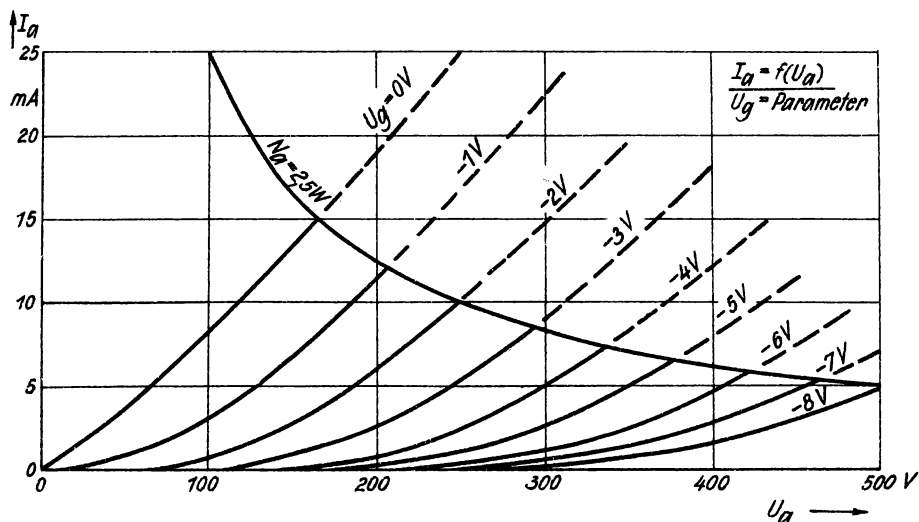


Bild 119  
 $I_A - U_A$ -Kennlinienfeld einer Triode

In Bild 119 sehen Sie das Kennlinienfeld einer Elektronenröhre (Triode), aus dem das Vorhandensein einer Nichtlinearität unmittelbar hervorgeht.

Untersuchen wir nun den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße  $x_E$  und der Ausgangsgröße  $x_A$  eines Elektronenröhrenverstärkers, so haben wir bei größeren Werten von  $x_E$  damit zu rechnen, daß sich die Nichtlinearitäten der Elektronenröhren und Transformatoren im Verlauf der Aussteuerkennlinie bemerkbar machen (Bild 120b), während Bild 120a die Aussteuerkennlinie eines idealen Verstärkers zeigt.

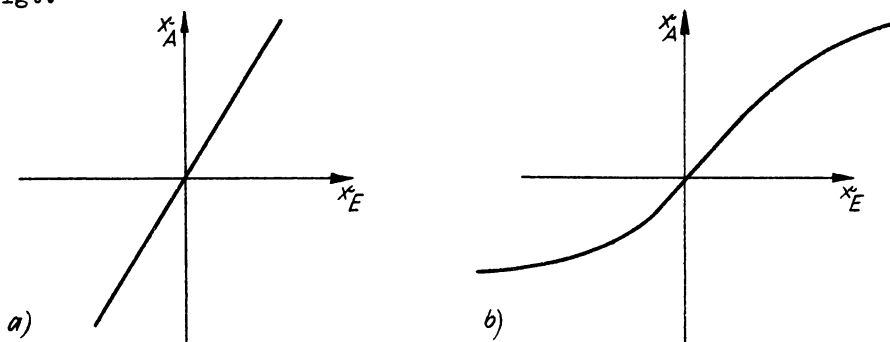


Bild 120a, b

a) Kennlinie eines idealen Verstärkers

b) Arbeitskennlinie eines realen Verstärkers

Geben wir  $x_E$  als Sinusspannung vor, setzen wir also  $x_E = X_E \cdot \sin \omega t$ , so haben wir für  $x_A(t)$  wegen der Krümmung der Kennlinie einen komplizierteren Ausdruck zu erwarten als im linearen Falle. Um zu einer Aussage zu kommen, nehmen wir an, daß der Arbeitsruhepunkt im Koordinaten-Nullpunkt liegt. Wir setzen weiterhin

$$x_A(t) = a_1 x_E + a_2 x_E^2 + a_3 x_E^3 + a_4 x_E^4 + \dots$$

und erhalten unter Berücksichtigung der obigen Beziehung

$$\begin{aligned} x_A(t) = & \frac{a_2}{2} X_E^2 + \frac{3}{8} a_4 X_E^4 + \dots \\ & + (a_1 X_E + \frac{3}{4} a_3 X_E^3 + \dots) \sin \omega t \\ & - (\frac{a_2}{2} X_E^2 + \frac{a_4}{2} X_E^4 + \dots) \cos 2\omega t \\ & - (\frac{a_3}{4} X_E^3 + \dots) \sin 3\omega t \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{a_4}{8} x_E^4 + \dots \right) \cos 4\omega t \dots$$

oder

$$x_A(t) = C_0 + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \sin 3\omega t + C_4 \cos 4\omega t + \dots$$

Neben der Grundwelle  $C_1 \sin \omega t$  tritt ein Gleichstromglied mit der Amplitude  $C_0$  und Oberwellen mit den Amplituden  $C_2, C_3, C_4 \dots$  auf, die von  $x_E$  und  $a_2, a_3, a_4$  abhängig sind.

2. Lose. Für eine wegschlüssige Verbindung zwischen treibendem und angetriebenem Teil werden mechanische Getriebe und Gelenke verwendet. Bei idealen Mechanismen ist zwischen Hin- und Rücklauf kein Unterschied festzustellen (Bild 121a). In der Praxis ist aber häufig bereichsweise die Verbindung zwischen treibendem und angetriebenem Teil, vor allem bei einer Bewegungsumkehr aufgehoben (Bild 121b).

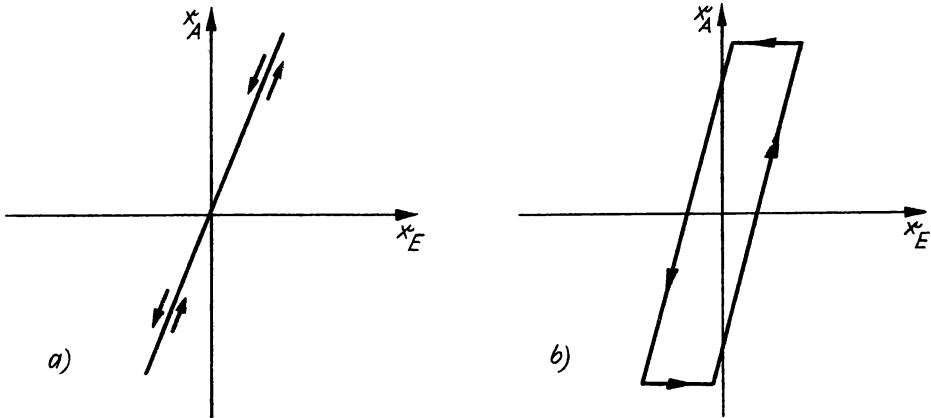


Bild 121a, b

a) ideales Getriebe

b) Getriebe mit Lose

Man spricht dann von Lose oder von totem Gang. Diese Lose ist bei mechanischen Anordnungen sowohl bei Translations- als auch bei Rotationsbewegungen je nach der Ausführung mehr oder weniger vorhanden. Man denke hierbei an das Spiel beim Eingriff von Zahnrädern. Nun werden aber Getriebe beim Aufbau von Regelkreisen häufig benutzt. Eine reine Lose wirkt im allgemeinen entdämpfend, d.h., die Güte der Regelung wird herabgesetzt. Bei geschickter Anwendung im Rückführkreis kann sie jedoch gelegentlich vorteilhaft sein. Weiter muß aber noch berücksichtigt werden, daß sich

die Losen im Laufe der Zeit, z.B. durch Abnutzung eines Getriebes, ändern. Die rechnerische Berücksichtigung der Wirkung einer Lose auf den Regelungsvorgang ist also aus dem genannten Grunde meist nur überschlägig möglich.

3. Trockene Reibung. Auf Seite 55 behandelten wir die Gleichung

$$M \frac{d^2 x_A}{dt^2} + D \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E$$

Wollen wir nur die freien Schwingungen untersuchen, die dieser Gleichung entsprechen, so lautet sie in allgemeinerer Form

$$M \frac{d^2 x_A}{dt^2} + D \frac{dx_A}{dt} + A x_A = 0$$

Die Lösungen dieser linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten konnten wir leicht erhalten, weil wir eine geschwindigkeitsproportionale Reibung ( $D \frac{dx_A}{dt}$ ) vorausgesetzt hatten. Es kann sich aber herausstellen, daß wir mit der Annahme einer viskosen Dämpfung den vorliegenden Verhältnissen nicht gerecht werden, weil trockene Reibung vorhanden ist. Diese kann in idealisierter Form angesetzt werden:

$$R_k = R_t \operatorname{sign} \left( \frac{dx_A}{dt} \right), \text{ dabei bedeutet } \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Als Differentialgleichung ergibt sich dann

$$M \frac{d^2 x_A}{dt^2} + R_t \operatorname{sign} \left( \frac{dx_A}{dt} \right) + A x_A = 0$$

Diese Gleichung ist nun nicht geschlossen lösbar.

Aus dieser Andeutung können Sie ersehen, daß bei Vorhandensein einer trockenen Reibung die Verhältnisse viel komplizierter sind als bei Voraussetzung geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung. In der Praxis linearisiert man deshalb immer dann, wenn die Berechtigung dazu auch nur einigermaßen gegeben ist.

4. Wir haben Ihnen in den Punkten 1 bis 3 des Abschnittes [37] Beispiele für Nichtlinearitäten gezeigt, die in Regelkreisen auftreten können. Sie haben damit schon den Eindruck gewonnen, daß die mathematische Behandlung von Regelkreisen, die nichtlineare Elemente erhalten, wesentlich schwieriger ist, als die von linearen Regelungssystemen. Im Rahmen dieser Lehrbriefreihe müssen wir daher auf eine rechnerische Untersuchung verzichten.



wir werden aber im 4. Lehrbrief einige technisch wichtige nicht lineare Regelkreise beschreiben.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
6. Kapitel: Stabilität von Regelkreisen (Fortsetzung) .....	121
30 Stabilitätskriterium nach KÜPFMÜLLER (Fortsetzung) ..	121
7. Kapitel: Rückführungen .....	124
31 Strukturstabilität - Strukturinstabilität .....	124
32 Arten der Rückführungen .....	130
33 Stabilisierende Mittel in elektrischen Reglern .....	150
8. Kapitel: Klassifizierung der Regler nach Aufbau und Verhalten .....	155
34 Einteilung der Regler nach ihrem Verhalten .....	155
9. Kapitel: Experimentelle Untersuchungen von Regelkreisen	165
35 Messungen an Regelkreisen .....	165
36 Einstellregeln .....	170
10. Kapitel: Nichtlinearitäten .....	174
37 Beschreibung einiger Nichtlinearitäten .....	174

