N. N. VOROBJOFF

GRUNDFRAGEN DER SPIELTHEORIE UND IHRE PRAKTISCHE BEDEUTUNG

DVW

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

N. N. VOROBJOFF

GRUNDFRAGEN DER SPIELTHEORIE UND IHRE PRAKTISCHE BEDEUTUNG

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1967

Übersetzung aus dem Russischen:
Diplom-Kaufmann Dr. Norbert M. Küssel, Wien

Originalausgabe:
Н. Н. Воробьев
Математическая теория игр

Общество по распространению
политических и научных знаний РСФСР
Ленинград 1963

Vom Autor verbesserte und erweiterte Auflage

ES 19 B 5, 19 A
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

Genehmigte Lizenzausgabe für die DDR und die übrigen sozialistischen Länder
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/170/67
Gesamtherstellung: Gutenberg Buchdruckerei und Verlagsanstalt,
Betrieb der VOB „Aufwärts", 53 Weimar, Marienstraße 14

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

An der Entwicklung der Spieltheorie, die zu den jüngsten Zweigen der modernen Mathematik gehört, wird gegenwärtig intensiv gearbeitet. Ihre theoretischen Resultate erlangen jene Komplexität, wie sie jeder gereiften mathematischen Disziplin eigen ist, und in mathematischen Fachkreisen wird die praktische Anwendung der Spieltheorie heute nicht nur als „prinzipiell möglich“, sondern bereits als „praktisch durchführbar“ angesehen. Nun können aber die Mathematiker nicht im Alleingang alle jene Fragen lösen, die mit der Anwendbarkeit einer mathematischen Theorie zusammenhängen; wie sich gezeigt hat, bedarf es hierzu vielmehr eines engen Kontaktes mit Vertretern anderer Disziplinen. Die Zusammenarbeit bei einer derartigen Aufgabe hat sich in einer Vielzahl anderer Fälle als fruchtbar erwiesen und erscheint gerade bei der praktischen Nutzung der Methoden und Ergebnisse der Spieltheorie besonders wichtig. Offenbar muß dann auch die Beschäftigung mit den grundlegenden Begriffen und Ideen der Spieltheorie für den großen Kreis der wissenschaftlich, wirtschaftlich und militärisch Interessierten auf dem Arbeitsgebiet eines jeden einzelnen überaus befruchtend wirken. Dieses Büchlein hat es sich zur Aufgabe gemacht, in diesem Sinne für die Spieltheorie die Werbetrommel zu rühren.

Beim Schreiben dieses Bändchens ist der Verfasser dem Grundsatz treu geblieben, sich des mathematischen Formalismus nur in einem solchen Ausmaß zu bedienen, wie es für ein sicheres Verständnis und ausreichendes Nachprüfen der hier mitgeteilten Überlegungen notwendig ist. Für den dargebotenen Stoff reichen nun die Kenntnis der in der (Schul-)Algebra verwendeten gebräuchlichsten Symbole und die Fähigkeit, einfachste Gleichungen zu lösen, völlig aus.

Da sich der Verfasser in erster Linie die Aufgabe gestellt hatte, die konkreten Anwendungsmöglichkeiten der mathematischen Spieltheorie für den mit diesen Problemen praktisch Konfrontierten zu umreißen, wurde den grundlegenden Fragen teilweise methodologischen Charakters ein wesentlich größerer Raum gewidmet, als dies in der mathematischen und erst recht in der populär-mathematischen Literatur gewöhnlich getan wird.

Zum Verständnis dieses Büchleins sind keinerlei Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Spieltheorie erforderlich. Es kann also als ausgesprochenes Einführungswerk in die Spieltheorie bezeichnet werden. Das soll jedoch nicht heißen, daß eine vorherige Lektüre entsprechender anderer grundlegender Werke dem Studium dieses Bändchens abträglich wäre. In diesem Zusammenhang sei etwa J. D. Williams, *The Complete Strategyst*, erschienen bei McGraw-Hill, 1954, genannt. Ein Leser, der bereits mit den Elementen der höheren Mathematik vertraut ist, kann seine Kenntnisse auf dem Gebiet der Spieltheorie mit dem Studium von J. C. C. McKinseys *Introduction to the Theory of Games*, McGraw-Hill, 1953, vertiefen. Allgemeine Fragen der Spieltheorie als mathematischer Disziplin behandeln R. D. Luce und H. Raiffa in ihrem Buche *Games and Decisions, Introduction and Critical Survey*, John Wiley and Sons, 1957. Eine wohl sehr umfangreiche, aber trotzdem ausreichend elementar gehaltene Schrift! Schließlich sei auch noch auf das Bändchen von J. S. Wentzel, *Elemente der Spieltheorie*, Leipzig 1966 (Übersetzung aus dem Russischen), hingewiesen.

Der Verfasser dankt allen seinen Freunden, den Vorständen der verschiedenen Forschungsinstitutionen, die das Manuskript kritisch gelesen haben. Besonderer Dank gebührt dem wissenschaftlichen Redakteur A. A. Korbut, der durch wertvolle Hinweise ganz erheblich zum Gelingen dieser Schrift beigetragen hat.

Klassische Modelle

„Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und die Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt.“[1]) Deshalb kann sich die Mathematik in ihren Anwendungen auch nicht unmittelbar mit der uns umgebenden Welt beschäftigen. Gegenstand der mathematischen Untersuchung sind nicht die Erscheinungen oder Prozesse des Lebens selbst, sondern deren Abbilder in Form mathematischer Modelle, die die Wirklichkeit auf eine sinnvolle Art idealisieren und schematisieren. Hier bedeutet der Ausdruck „sinnvoll“, daß das Modell, durch das bei der Untersuchung die Wirklichkeit ersetzt wird, alle wesentlichen Eigenschaften der als Mo-

---

1) F. Engels: *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft*; in: Marx, Engels, Werke, Band 20, Berlin 1962, Seite 36.

dell abzubildenden Wirklichkeit widerspiegeln soll; alle wesentlichen Eigenschaften, d. h. alle Züge, welche den Ausgang der zu untersuchenden Erscheinungsabläufe oder deren Ergebnisse bestimmen. In diesem Falle kann man nämlich die Ergebnisse, die man auf Grund der Untersuchung des Modells erhalten hat, auf die durch das Modell widergespiegelte Erscheinung anwenden.

Diese Methode der Konstruktion, der Untersuchung und der Benutzung adäquater Modelle für verschiedene Erscheinungen der uns umgebenden Welt taucht in elementarer Form schon mit dem Entstehen der Mathematik als Wissenschaft auf: Als Beispiel sei die klassische Geometrie genannt, die das Ergebnis der Arbeit vieler Generationen griechischer Mathematiker ist und die dann schließlich von Euklid etwa 300 v. u. Z. systematisiert wurde. Obwohl das Wort Geometrie ursprünglich nichts anderes bedeutete als Landvermessung und die Geometrie als Wissenschaft sozusagen als Grundlage des Vermessungs- und Bauwesens fungierte, ist die sogenannte euklidische Ebene, auf der sich alle Konstruktionen der *klassischen* Geometrie abspielen (die uns ohne besondere Veränderung überliefert wurde und bis heute in den Schulen der meisten Länder die Grundlage des Unterrichts in dieser Disziplin bildet), keineswegs ein ideales Abbild der mit ihrer Hilfe modellmäßig erfaßten Erdoberfläche. Denn selbst wenn man vom Erdrelief absieht, kann man die Erdoberfläche eigentlich nicht als eben bezeichnen. Trotz dieses Auseinanderklaffens von Modell und Wirklichkeit nimmt man die Erdoberfläche bis zum heutigen Tage im Hoch- und Tiefbau und bei der Behandlung vieler topographischer Probleme als eben an, ohne dadurch bemerkenswerte Informationsverluste im Rahmen des wissenschaftlichen Schließens in Kauf nehmen zu müssen. Hier ist nämlich die Krümmung der Erdoberfläche für die betreffenden Untersuchungen keine so wesentliche Eigenschaft, daß sie bei der Konstruktion des Modells unbedingt berücksichtigt werden müßte. Es versteht sich, daß die Beantwortung der Frage, ob diese oder jene Eigenschaft einer Erscheinung wesentlich oder unwesentlich ist, keinerlei absoluten Charakter hat, sondern in beträchtlichem Maße vom Ziele beziehungsweise von dem Niveau unserer Untersuchungen abhängt. Anders ausgedrückt, falls man, um bei dem eben gebrachten Beispiel zu bleiben, nicht Probleme des Bauwesens und elementare topographische Aufgaben zu lösen hat, sondern etwa Fragen der äußeren Ballistik (insbesondere im Zusammenhang mit weittragender Artillerie), muß die Krümmung der Erdoberfläche sehr wohl berücksichtigt werden, hier allerdings nur in Form einiger Korrekturen jener „Haupttheorie“, in der die Erde bis heute als eben angesehen wird. Ein

Übergang in den Bereich der Kartographie oder, sagen wir, der Theorie des Schießens mit interkontinentalen Raketen macht aber die Berücksichtigung der Krümmung der Erdoberfläche unabdingbar, selbst bei der Untersuchung der Grundlagen der betreffenden Theorie. Gilt es schließlich, noch Probleme höheren Niveaus zu lösen, sei es in den Weiten der Astronomie, sei es im Zusammenhang mit dem Auflassen kosmischer Raketen zu Planeten oder Fixsternen, so können wir bei unseren Überlegungen wiederum die Erdkrümmung vernachlässigen, weil man ja vom Standpunkt dieser Disziplinen die Erdkugel als materiellen Punkt auffassen kann und die wirkliche Oberflächenform der Erde praktisch keine Rolle spielt.

Als viel jüngeres Beispiel eines mathematischen Modells kann die Newtonsche Mechanik angesehen werden: In dem von Newton entwickelten Modell handelt es sich um homogene Körper, die sich mit beliebiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, ohne dabei ihre jeweilige Masse zu verändern. Die Übereinstimmung dieser Modellvorstellung mit einem überaus weiten Kreis physikalischer Erscheinungen wurde buchstäblich millionenfach in der Praxis geprüft, wobei sich stets die theoretischen Voraussagen mit den praktischen Ergebnissen in Einklang befanden. Allerdings wird die Anwendbarkeit dieses die Bewegung realer Körper im physikalischen Raum wiedergebenden Modells durch die in der Newtonschen Mechanik getroffenen Annahmen eingeschränkt. So geht man im Rahmen der Newtonschen Mechanik davon aus, daß alle Körper homogen sind und keinerlei Molekularstruktur aufweisen. Deshalb untersucht die Newtonsche Mechanik auch keinerlei Fragen der Deformation von Körpern durch mechanische Einwirkung, durch Wärmeeinwirkung oder durch ähnliche Ursachen. Ebenso verhindert die Annahme, die Masse eines Körpers sei konstant, die unmittelbare Anwendung der Sätze der Newtonschen Mechanik auf die Untersuchung der Bewegung von Körpern mit veränderlicher Masse. (Dazu zählen außer den Objekten der Atomphysik, den Düsenflugzeugen, Geschossen und Raketen auch solche prosaischen Dinge wie beispielsweise ein sich auf eine Trommel aufwickelndes Liftseil.) Gerechterweise muß allerdings gesagt werden, daß diese Schwierigkeiten mit Hilfe der Newtonschen Mechanik in Verbindung mit mathematischen Kunstgriffen insofern überwunden werden können, als man bei derartigen Überlegungen jeden Körper als aus einer bestimmten Anzahl kleinerer Körper zusammengesetzt ansehen kann, die durch molekulare Kräfte zusammengehalten werden. Man könnte dann den Flug einer Rakete als die zusammengesetzte Bewegung eines Systems von (Teil-)Körpern interpretieren, von denen jeder eine konstante Masse hat, deren relative Lage und deren relative Geschwindigkeit sich stetig ändern. Will man allerdings sogenannte Elementarteilchen mit ihrer von der Geschwindigkeit abhängigen Masse untersuchen, ist das Newtonsche Modell nicht nur nicht mehr unmittelbar anwendbar, sondern alle Schlußfolgerungen, die man auf Grund irgendeiner auf ihm beruhenden Theorie ziehen könnte, würden wesentlich von den Erfahrungswerten der Praxis abweichen. Die Newtonsche Mechanik muß daher für diese Zwecke durch die Einsteinsche Mechanik und andere Theorien der modernen Physik ersetzt werden. Im Grunde bedeutet dies nur, daß das alte, relativ einfache und in seinen Anwendungsmöglichkeiten vergleichsweise beschränkte Modell einem neueren, komplizierteren und in seinem Anwendungsbereich umfassenderen Modell Platz gemacht hat.

Die systematische Anwendung mathematischer Methoden bei der Konstruktion und der Analyse von Modellen, die schon seit dem Entstehen der Mathematik die Fragen beantworten halfen, mit denen sich die Mechanik, die Astronomie und die Physik beschäftigen, führte zu einer stürmischen Entwicklung dieser Wissenschaften. Man kann sich leicht vorstellen, wohin Physik und Technik gekommen wären, falls, sagen wir, anstelle der präzisen, quantitativen Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes „Die Anziehungskraft zweier punktförmiger Körper ist direkt proportional dem Produkt aus deren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung der beiden voneinander“ man mit verschwommenen Gesetzen etwa der folgenden Art operiert hätte: „Die Anziehungskraft zweier Körper ist um so größer, je größer die Masse eines jeden von ihnen ist, und um so kleiner, je größer ihre gegenseitige Entfernung ist.“ Selbstverständlich ist auch die zweite Formulierung qualitativ richtig, jedoch muß die Möglichkeit, sie praktisch anzuwenden, als recht dürftig angesehen werden.

Zeitgenössische Modelle

Die Fruchtbarkeit der Konstruktion mathematischer Modelle in den genannten Zweigen der Wissenschaft gibt zu der berechtigten Vermutung Anlaß, daß auch in anderen Disziplinen, etwa in den Wirtschaftswissenschaften, der Biologie, der Rechts- sowie der Kriegswissenschaft, die Verwendung mathematischer Modelle in dem gleichen Maße von Erfolg gekrönt sein wird. Diese Meinung stößt allerdings bisweilen auf Widerspruch.

Einer der Einwände gegen diese Meinung hängt damit zusammen, daß man die sogenannten „exakten" Wissenschaften allen übrigen Zweigen der Wissenschaft gegenüberstellt. Die Verfechter einer solchen Gegenüberstellung halten die Anwendung der Methode der Konstruktion mathematischer Modelle in den (nicht mathematischen) Naturwissenschaften und erst recht in den Wirtschafts- und Kriegswissenschaften für prinzipiell ungerechtfertigt und bezeichnen alle Versuche dieser Art als pseudowissenschaftlich. Dabei wird jedoch vergessen, daß die exakten Wissenschaften ja gerade deshalb zu exakten Wissenschaften geworden sind, weil die systematische Anwendung mathematischer Methoden und Resultate in ihnen ein integrierender Bestandteil geworden ist. Übrigens hat nach einer Äußerung Paul Lafargues auch Karl Marx die Ansicht vertreten, daß eine Wissenschaft erst dann wirklich entwickelt sei, wenn sie dahin gelangt sei, sich der Mathematik bedienen zu können.[1])

Ein anderer Einwand ist weniger kategorischer, ja nicht einmal grundsätzlicher, sondern, wenn man so sagen darf, technischer Art. Man spricht von der besonderen Komplexität der Probleme, die in der Biologie, der Wirtschaftswissenschaft, der Rechtswissenschaft und der Militärwissenschaft zu untersuchen sind. Diese Komplexität wird insbesondere darin gesehen, daß viele biologische, ökonomische und ähnliche Erscheinungen zu Resultaten führen, die vom Zufall abhängen, und daß die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Resultate eintreten, vielfach nur schwer zu bestimmen sind. Überdies ist sehr häufig die Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeiten mit der nötigen Genauigkeit durch statistische Analyse der empirischen Daten allein für uns überhaupt unmöglich. In der gleichen Lage würde man sich immer dann befinden, wenn sich Bedingungen und Charakter des Verlaufs der zu erforschenden Prozesse schnell ändern.

Mit den eben dargestellten Überlegungen wird jedoch nur ein tatsächlich vorhandener, wesentlicher Unterschied zwischen solchen Prozessen konstatiert, die von Wissenschaften untersucht werden, welche schon mit Erfolg „exakt" geworden sind, und solchen Vorgängen, deren wissenschaftliche Beschreibung bisher diesen Zustand noch nicht erreicht hat. Hieraus folgt aber nur, daß in den (nicht mathematischen) Natur- und den Gesellschaftswissenschaften die Anstrengungen nicht auf das Auffinden physikalisch-mechanischer Analogien gerichtet sein sollten. Anstelle des frommen Wunsches, die dort eingesetzten, in der Regel hier aber wesens-

[1]) „*Mohr und General*" — Erinnerungen an Marx und Engels; Dietz Verlag Berlin 1964, Seite 327.

fremden fertigen mathematischen Modelle sklavisch übernehmen zu können, sollte man sich vielmehr bemühen, arteigene, problemadäquate Modelle zu entwickeln, d. h. Modelle, welche die Besonderheiten der hier modellhaft darzustellenden Prozesse besser widerspiegeln. Statt dessen wird aber häufig aus einem nur zu begreiflichen Grunde die praktische Möglichkeit, entsprechende mathematische Modelle zu entwickeln, in Abrede gestellt.

Es ist klar, daß zur Konstruktion und zur Untersuchung mathematischer Modelle für ökonomische und biologische Erscheinungen häufig die Schaffung und Ausarbeitung neuer mathematischer Methoden erforderlich ist. Das ist aber keineswegs überraschend. Hat nicht auch Newton parallel zu seiner Mechanik den mathematischen Apparat der Differential- und Integralrechnung geschaffen? Zwei große Leistungen, die in engster gedanklicher Verbindung miteinander stehen! So berichtet etwa S. I. Wawilow: „. . . daß die mathematische Arbeit für Newton hauptsächlich nur die Bedeutung eines Hilfsmittels für die physikalischen Forschungen hatte.“[1]) Ungefähr ein Jahrhundert später führte die Entwicklung der Mechanik der Kontinua, d. h. der den Raum erfüllenden und die Körper umgebenden Medien, zur Schaffung der mathematischen Physik (in des Wortes heutiger Bedeutung), die ihrerseits eine der Hauptquellen solcher abstrakten mathematischen Disziplinen wie beispielsweise der Funktionalanalysis werden sollte.

Das Leben ist ein schlagender Beweis dafür, daß die oben angeführten Einwände in keiner Weise stichhaltig sind. In den vergangenen Jahrzehnten wurden in verschiedenen Wissenschaften eine ganze Reihe interessanter Modelle entwickelt, die von großem praktischem Nutzen waren und gleichzeitig die Mathematik mit neuen theoretischen Entdeckungen bereicherten.

Zu diesen vergleichsweise jungen Modellen zählt auch die Spieltheorie, mit der sich das vorliegende Büchlein beschäftigen wird.

Spiele: Modelle für Konfliktsituationen

In der Natur im allgemeinen und in der Gesellschaft im besonderen stößt man häufig auf Situationen, in denen verschiedene Beteiligte unterschied-

---

[1]) S. I. Wawilow: *Isaac Newton*, Akademie-Verlag, Berlin 1951, Seite 159 (Übersetzung aus dem Russischen).

liche Interessen haben und ihre Ziele auf verschiedenen Wegen erreichen wollen. Solche Situationen bezeichnet man oft als *Konfliktsituationen*, und das eine solche Situation wiedergebende Modell heißt *(strategisches) Spiel.*

An dieser Stelle soll gleich betont werden, daß hier der Ausdruck Konflikt nicht etwa nur für einander in Feindschaft gegenüberstehende Parteien verwendet wird. Denn die Gegensätzlichkeit von Interessen tritt nicht nur bei kriegerischen Auseinandersetzungen oder im Falle eines Rechtsstreits zutage, sondern auch bei wissenschaftlichen Streitfragen oder bei sportlichen Wettkämpfen, ja sogar bei Meinungsverschiedenheiten, etwa zwischen Eltern und Kindern, wenn z. B. diese noch nicht schlafen gehen wollen.[1]) Konfliktsituationen in diesem weitesten Sinn des Wortes begegnen uns buchstäblich auf Schritt und Tritt.

Im folgenden werden einige Beispiele gebracht werden, die den Kriegswissenschaften entnommen wurden. Das berechtigt jedoch nicht zur Annahme, daß das einzige oder zumindest das hauptsächlichste Anwendungsgebiet der Spieltheorie in der Lösung militärischer Probleme bestünde. (Es sei daran erinnert, daß die ausführliche Beschreibung des Würfelspiels in den meisten Lehrbüchern über Wahrscheinlichkeitsrechnung in der langen Liste der Anwendungsmöglichkeiten dieser Wissenschaft einen verhältnismäßig großen Platz einnimmt.) Genauso falsch wäre es aber, die Bedeutung der Spieltheorie für die Lösung militärischer Aufgaben zu unterschätzen. Auf alle Fälle hat sich die Verwendung militärischer Fachausdrücke für die Formulierung vieler Probleme, die theoretisch den Charakter strategischer Spiele besitzen, als überaus anschaulich und praktisch erwiesen.

Das Wort ‚Spiel‘ wird in der Umgangssprache hauptsächlich in zwei Bedeutungen benutzt: Unter ‚Spiel‘ wird einerseits ein System von (Spiel-) Regeln verstanden (z. B. „Schachspiel“), andererseits aber auch die Realisierung des Spielprozesses selbst (beispielsweise: der Favorit der Fußballmeisterschaften hat noch ein „Spiel“ auszutragen). Ohne auf die vielen anderen Bedeutungen des Wortes Spiel eingehen zu wollen, soll dieses Wort hier nur dem ersten der beiden hier angeführten Begriffsinhalte zugeordnet und für den zweiten der Terminus *Partie* gebraucht werden.

Jedes Spiel umfaßt nun drei Elemente: Die *Spieler* (das sind die Teilnehmer am Spiel), deren im Rahmen des gegebenen Spiels (d. h. durch die

---

[1]) Deshalb darf aber die Schärfe derartiger Konflikte keineswegs unterschätzt werden. „... Bei einem Zusammenstoß des Willens der Eltern mit dem der Kinder erweisen sich viele Kinder als „zäher“ als die Erwachsenen. Es ist erstaunlich, mit welcher Begabung die Kinder ihre Interessen durchzusetzen versuchen.“ Aus A. Seipt: *Das Glück ihres Kindes*, Učpedgiz, 1958, Seite 78.

Spielregeln) *zugelassene Verhaltensweisen* und deren *Interessen.* Eine exakte, mathematische Problemstellung setzt eine exakte Beschreibung dieser Elemente voraus.

Fragen im Zusammenhang mit den Spielern an sich sind die einfachsten, wenn die Teilnehmerzahl nicht sehr hoch ist, was meistens der Fall ist. Es können sich jedoch auch hier schon gewisse Schwierigkeiten ergeben. Eine dieser Schwierigkeiten besteht darin, daß als (einzelner) Spieler ein ganzes Kollektiv auftritt (man spricht dann von einer *Koalition*), das bestimmte einheitliche Interessen verteidigt. Deshalb sind sowohl das Dominospiel wie das Fußballspiel im Rahmen der Spieltheorie als ein Spiel mit zwei Spielern anzusehen — ein Umstand, der bei der Konstruktion von Modellen im Auge behalten werden muß. Ohne auf die ernsten und schwierigen Fragen einzugehen, die hier auftauchen können, wollen wir im weiteren annehmen, daß uns alle Spieler in einem untersuchten Spiel bekannt sind. Wir werden sie mit den laufenden Nummern 1, 2, . . . , n bezeichnen.

Falls einer der Spieler, beispielsweise der Spieler 1, eine Koalition ist, sich in Wirklichkeit also aus mehreren zu selbständigen Handlungen fähigen Personen zusammensetzt, so bezeichnet man diese Personen gewöhnlich mit 1A, 1B usw.

Nach Bestimmung und Bezeichnung aller beteiligten Spieler müssen für jeden einzelnen alle für ihn möglichen Verhaltensweisen ermittelt werden, die in der Spieltheorie *Strategien* genannt werden. Es sei gleich gesagt, daß der Ausdruck Strategie in der Spieltheorie nicht unbedingt mit der Vorstellung komplizierter Verhaltensweisen einer großen Menge von Menschen und Material zu verbinden ist, wie dies etwa im militärischen Bereich der Fall ist. Der mit diesem Ausdruck verbundene Begriff kann sich hier sogar dann als noch zu weit gefaßt herausstellen, wenn man unter Strategie etwa nur die Aufmarschpläne von einander bekämpfenden Streitkräften, die Existenz von Bundesgenossen etc. subsumiert. In manchen Spielen wird vielmehr unter Strategie einfach das Fällen einer überaus bescheidenen und leicht zu realisierenden Entscheidung verstanden: die Bestimmung des Zeitpunktes der Feuereröffnung auf einen bestimmten feindlichen Infanteristen, die Festlegung der Dosis einer Medizin von seiten des Arztes, der um das Leben eines Patienten kämpft, oder die „schwierige Wahl" der ihren Schmuck anlegenden Marina Mnischek[1]) zwischen Perlenkette und Smaragdbrosche (die sich dann bekanntlich für ein Diamantkollier

[1]) A. S. Puschkin: *Boris Godunow*, eine Szene, die im Haupttext nicht enthalten ist. Marina Mnischek: Ehrgeizige, machthungrige Frau des falschen Demetrius, beginnendes 17. Jhdt.

entschied). In vielen Spielen üben Zufallsgrößen einen Einfluß auf die Verhaltensweisen der Spieler aus: So kann sich auf die Durchführung geplanter militärischer oder landwirtschaftlicher Operationen das Wetter auswirken; dieser oder jener Apparat zur Regelung einer bestimmten Tätigkeit kann im entscheidenden Augenblick ausfallen; der Entschluß, am Abend ins Kino zu gehen, kann nicht in die Tat umgesetzt werden, weil für den interessierenden Film keine Karten mehr erhältlich sind usw. Daraus folgt, daß die Auswahl der jeweiligen Strategie von seiten der Spieler den Gang des Spieles nur in dem Sinne bestimmt, als sie zeigt, welche Ausgänge mit welcher Wahrscheinlichkeit im Ergebnis (auf Grund der getroffenen Auswahl) auftreten können. Eine solche Berücksichtigung des Zufallsmoments bringt in der Spieltheorie keinerlei zusätzliche, prinzipielle Schwierigkeiten mit sich und kann bei der Auswertung eines Spiels höchstens zu einem Anschwellen der reinen Rechenarbeit führen: Denn in jedem Fall kann in der Spieltheorie der Einfluß von zufällig auftretenden, außerhalb des Spiels liegenden Komponenten genauso wie jede andere Spielregel behandelt werden und braucht keine selbständige Rolle zu erhalten.

Indem wir schon etwas vorgreifen, möchten wir bemerken, daß neben äußeren Zufälligkeiten bei Spielen auch zufällige Erscheinungen zu betrachten sind, die dem Willen der Spieler entspringen. Gerade diese Tatsache vermittelt den Zusammenhang der Spieltheorie mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die zum Verständnis des Folgenden notwendigen Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden im Abschnitt „Zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten" zusammengestellt.

Somit bestimmt die Wahl der Strategie durch die einzelnen Spieler völlig den Verlauf und das Ergebnis eines Spiels. (Die weitere genaue Bestimmung des Ausgangs eines Spiels liegt dann bereits außerhalb des Willens der Spieler, um es noch präziser zu formulieren.) Deshalb ist für den Ausgang eines Spiels die Menge der von den Spielern ausgewählten Strategien von besonderer Bedeutung. Diese Menge wird *(Spiel-)Situation* genannt. Falls somit für den Spieler 1 die Menge (die Liste, das Verzeichnis) aller Strategien (seine Wahlmöglichkeiten für sein Verhalten) durch S_1 ausgedrückt wird und für den Spieler 2 eine Menge von S_2 Strategien existiert, . . . , und schließlich dem Spieler n die Menge S_n an Strategien zur Verfügung steht, so wird eine Spielsituation in einem solchen Spiel wiedergegeben durch

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

worin s_1 jene Strategie ist, für die sich der erste Spieler aus der Menge aller seiner Strategien S_1 entschieden hat, s_2 die vom zweiten Spieler aus S_2

gewählte Strategie ist usw. Die an einem Spiel teilnehmenden Spieler wollen zwar ihre Ziele möglichst vollständig erreichen, ihre eigentliche Rolle beschränkt sich aber auf die Schaffung einer bestimmten Spielsituation. Deshalb kann die Untersuchung eines Spiels nur dann einen Sinn haben, wenn die verschiedenen Spielsituationen von den Spielern verschieden bewertet werden.

Sind beispielsweise

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

zwei Spielsituationen, so muß unter Berücksichtigung der Spielregeln festgestellt werden, welche von ihnen vom Standpunkt des Spielers 1 den Vorrang verdient, welche vom Standpunkt des Spielers 2, usw.

Soweit verblieben wir mit der Benutzung rein qualitativer Überlegungen im Grunde auf „geisteswissenschaftlichem" Niveau, obwohl wir um klare Formulierungen bemüht waren.

Wollte man auf diesem Niveau auch weiterhin verbleiben, so könnten nur einige quantitative Behauptungen, etwa der folgenden Art, formuliert werden: Falls die Spielsituation $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ für den Spieler 1 vorteilhafter ist als die Spielsituation $s' = (s_1', s_2, \ldots, s_n)$ bei beliebigen $s_2, \ldots, s_n$, so muß der vernünftig handelnde Spieler 1 seine Strategie s_1 seiner anderen Strategie s_1' vorziehen. Diese Behauptung ist zweifellos richtig, wird einem aber auch ohne jede Spieltheorie klar und führt zu keinerlei inhaltsreichen praktischen Schlußfolgerungen. Es sind natürlich auch Fälle denkbar, in denen ein Mensch unter Einfluß der Umgebung nicht einmal zu derartig einfachen und offensichtlichen Überlegungen fähig ist und, sich selbst überlassen, ziemlich unsinnig handeln wird. In einem solchen Augenblick können ihm völlig triviale Binsenwahrheiten wichtig und nützlich erscheinen. In der Spieltheorie jedoch, wie sie hier verstanden wird, verhalten sich die Spieler wie ausgesprochen vernünftige, vorsichtig und kaltblütig denkende Menschen.

Somit bedarf es gerade hier des entscheidenden Schritts von den allgemeinen, rein qualitativen Überlegungen zu den konkreten, quantitativen, also von der „allgemeinen" Spieltheorie zur mathematischen Spieltheorie. Hierzu gibt es aber nur einen einzigen Weg: Anstatt anzudeuten, welche Spielsituation für einen bestimmten Spieler günstiger und welche weniger günstig ist, ist es notwendig, dieses Maß der Vorteilhaftigkeit *quantitativ* zu bestimmen, d. h., jeder Spielsituation eine bestimmte eindeutige Maßgröße für den Gewinn (die Einnahme, den Vorteil, den Nutzen) zuzuordnen, die unser Spieler in dieser Spielsituation erhalten würde. Da nun der Gewinn eines jeden Spielers in dieser oder jener Spielsituation von eben jener betreffenden Spielsituation abhängt, d. h. mit ihr in funktionalem Zusammenhang steht, wurde in der Spieltheorie dafür der Ausdruck *Gewinnfunktion* eines jeden einzelnen Spielers geprägt.[1])

Die Gewinnfunktion kann durch die verschiedenartigsten Einheiten ausgedrückt werden. In den meisten ökonomischen Fragen wird sie in Geldeinheiten ausgedrückt. Bei militärischen Überlegungen kann man als Gewinnfunktion die Verluste der anderen Seite nehmen. Bisweilen deutet man sie als die Zeit des reibungslosen Funktionierens eines bestimmten Systems, bisweilen wiederum als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein System im Laufe einer bestimmten Zeit störungsfrei funktionieren wird. Es sei darauf hingewiesen, daß sogar in ein und demselben Spiel die Gewinne der einzelnen Spieler mit verschiedenen Einheiten gemessen werden können.

Die Annahme, eine Spielsituation könne durch einen Spieler mit Hilfe einer einzigen Zahl bewertet werden, entspricht der Wirklichkeit zwar häufig, aber keineswegs immer. Es genügt, die bekannte Gegenüberstellung der Planerfüllung eines Betriebes in mengen- und wertmäßiger Hinsicht als Gegenbeispiel anzuführen. Genauso wäre die Charakterisierung durch eine einzige Zahl — falls das überhaupt gelingen sollte — zweifellos zu primitiv, um das Ergebnis einer militärischen Operation zu erfassen. Allerdings erschwert die Beschreibung des Gewinns durch ein System mehrerer Zahlen die Analyse eines Spiels ernsthaft. Im weiteren werden wir uns auf jene weitaus einfacheren Fälle beschränken, in denen der Gewinn eines Spielers in jeder Spielsituation einfach eine einzige Zahl ist.

Die Angabe der Gewinnfunktion der Spieler vollendet den Problemansatz eines Spiels.

Jetzt sind wir in der Lage, eine genaue, formale Darstellung eines Spiels im mathematischen Sinn des Wortes zu geben. Ein Spiel Γ gilt als eindeutig bestimmt durch die Angabe

a) aller Spieler: $1, 2, \ldots, n$;

b) der Mengen der Strategien der Spieler: $S_1, S_2, \ldots, S_n$;

c) der für jede Spielsituation sich ergebenden Gewinnfunktionen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ jedes einzelnen Spielers.

---

[1]) Für Gewinnfunktion sind auch die nutzentheoretisch weniger zutreffenden Ausdrücke Auszahlungsfunktion bzw. Payoff-Funktion gebräuchlich. Gewinn (Verlust) wird hier immer im Sinne von *Nutzen* verstanden.

Formal kann solch ein spieltheoretischer Problemansatz wiedergegeben werden durch

$$\Gamma = \{(1, 2, \ldots, n), (S_1, S_2, \ldots, S_n), (H_1, H_2, \ldots, H_n)\}. \tag{1}$$

Eine *Partie* eines Spiels Γ kann man sich somit folgendermaßen vorstellen: Die Spieler 1, 2, ..., n wählen unabhängig voneinander ihre Strategien $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und schaffen damit eben jene Spielsituation $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, entsprechend der jeder Spieler aus einer bestimmten Quelle den ihm in dieser Spielsituation zustehenden Gewinn erhält. So bekommt der erste Spieler $H_1(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, der zweite Spieler $H_2(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots$, und schließlich bekommt der n-te Spieler $H_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Ziele der Spieler und Zielverwirklichung

Der Wert der Gewinnfunktion für einen bestimmten Spieler in einer gegebenen Spielsituation zeigt, in welchem Maße diese Spielsituation für den Spieler günstig ist. Sie zeigt mit anderen Worten das Ausmaß, in dem der betreffende Spieler in der gegebenen Spielsituation seine Interessen verwirklichen kann. Es ist daher das Ziel eines jeden Spielers, in jedem beliebigen Spiel jene Spielsituation zu schaffen, in der seine Gewinnfunktion den größtmöglichen Wert aufweist.

Es sei betont, daß der Gewinn eines Spielers in einer bestimmten Spielsituation das Ergebnis einer gründlichen, allseitigen Bewertung derselben durch den Spieler ist. Deshalb kann das Streben, den Wert der Gewinnfunktion zu maximieren, nicht mit dessen ethischer Einstellung in Widerspruch geraten. Im Gegenteil, die moralische Bewertung jeder Spielsituation durch den Spieler ist damit beim Ansatz der Gewinnfunktion ebenfalls berücksichtigt.

Die Bestimmung der Spielsituation hängt jedoch vom Gesamtverhalten aller am Spiel teilnehmenden Spieler ab, so daß jeder einzelne Spieler auf deren Herausarbeitung nur einen beschränkten Einfluß ausüben kann. Infolgedessen wird jeder von ihnen in Anbetracht der Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Interessen (und die Spieltheorie untersucht ja gerade solche Vorgänge, in denen die Beteiligten unterschiedliche Interessen verfolgen!) bestrebt sein, den Ablauf der Ereignisse in seinem Sinn zu steuern, d. h., eine Spielsituation zu schaffen suchen, die ihm persönlich günstig erscheint. Falls jeder Spieler nun eigensinnig seinen Weg ginge und die tatsächlichen oder möglichen Handlungen seiner Partner im Spiel außer acht ließe, so würde das Ergebnis eines solchen Verhaltens, wie es für Schwäne, Krebse und Hechte typisch ist, eine Spielsituation herbeiführen, die überhaupt keinen der am Spiel Teilnehmenden befriedigen würde. Es versteht sich, daß die Frage, welches Verhalten der Spieler als vernünftig anzusehen ist, welche Grundsätze als Basis eines solchen vernünftigen Verhaltens gelten müssen, bei weitem nicht so einfach zu beantworten ist, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Die Auswahl der Kriterien für ein vernünftiges Verhalten der Spieler in einem Spiel gehört zu den wesentlichsten Aufgaben der Spieltheorie. Vollständig ist diese Aufgabe nur in einzelnen Spezialfällen gelöst, aber auch über Spiele der allgemeinen Art, wie sie durch (1) beschrieben sind, kann hier einiges gesagt werden.

Es sei bemerkt, daß ein notwendiges Kennzeichen für vernünftige Absichten und Verhaltensweisen eines Spielers die Durchführbarkeit dieser Vorhaben und damit die Realisierbarkeit der entsprechenden Strategie ist. Folglich muß jeder Spieler eine Spielsituation anstreben, die sich innerhalb des Spielprozesses auch tatsächlich herausbilden *kann*. Es seien nun die notwendigen Bedingungen herausgearbeitet, denen eine solche Spielsituation genügen muß:

Angenommen, die Situationen $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ und $s' = (s_1', s_2, \ldots, s_n)$ würden sich voneinander nur durch die Strategie des ersten Spielers unterscheiden, wobei $H_1(s) < H_1(s')$ ist, d. h., die zweite Spielsituation ist für den Spieler 1 vorteilhafter. In diesem Fall wird der Spieler 1, falls er durch irgendein Anzeichen gewahr wird, daß seine Mitspieler $2, 3, \ldots, n$ die Strategien $s_2, s_3, \ldots, s_n$ wählen, sich nicht zur Strategie s_1 entschließen, sondern dieser die Strategie s_1' vorziehen (oder vielleicht irgendeine für ihn noch günstigere Strategie wählen). Das bedeutet, daß die Absicht der Spieler $2, \ldots, n$, die Spielsituation s herbeizuführen, undurchführbar ist und von ihnen somit nicht als vernünftig bezeichnet werden kann. Im angeführten Beispiel würde nämlich der Spieler 1 ein Zustandekommen der Spielsituation s verhindern. Offensichtlich können analoge Beispiele gefunden werden, in denen jeder beliebige der übrigen Spieler als ein solcher Störer auftreten kann.

Dafür, daß eine Spielsituation $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ das Ziel vernünftig handelnder Spieler sein kann, ist also notwendig, daß sie folgende Eigenschaften aufweist:

$$H_1(s^*) \geqslant H_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*)$$

für jede beliebige Strategie s_1 aus S_1,

$$H_2(s^*) \geqslant H_2(s_1^*, s_2, \ldots, s_n^*)$$

für jede beliebige Strategie s_2 aus S_2,

. . . .

$$H_n(s^*) \geqslant H_n(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n)$$

für jede beliebige Strategie s_n aus S_n.

Spielsituationen mit den eben aufgezählten Eigenschaften werden *Gleichgewichtszustände* (oder Gleichgewichtssituationen) genannt. Diese sind es, die sich als Ergebnis einer vernünftigen Strategieauswahl von seiten der Spieler herausbilden können.

Ferner sei bemerkt, daß nur Gleichgewichtszustände Gegenstand von Vereinbarungen zwischen den Spielern sein können. Lassen wir nämlich einmal zu, die Spielteilnehmer würden miteinander vereinbaren, daß sie durch ihr Verhalten einen Nichtgleichgewichtszustand $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ schaffen. Dann muß für diesen Zustand s eine der oben angegebenen Bedingungen für einen Gleichgewichtszustand verletzt sein. Das bedeutet aber, daß wenigstens für einen Spieler i eine derartige Strategie s_i' gefunden werden kann, daß

$$H_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) < H_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n)$$

gilt. Auch wenn alle Spieler außer dem i-ten ehrlich alle ihre vereinbarten Vertragsverpflichtungen erfüllen, wird in diesem Falle dieser verbleibende Spieler i seine Verpflichtungen verletzen, um seinen Gewinn zu vergrößern.

Hier kann man dem Vertragsbrüchigen nicht einmal Ehrlosigkeit vorwerfen, denn die Vergrößerung der Gewinnfunktion ist das ethische Grundprinzip des Spielers. Es ist übrigens gar nicht nötig, sich unseren Spieler habgierig und von Gewinnsucht besessen vorzustellen. Seine Gewinnfunktion kann vielmehr äußerst edle Motive widerspiegeln, und das Verhalten, das auf die Vergrößerung des Gewinns abzielt, kann sogar heldenmütig sein.

Hiernach erhebt sich bei der Analyse eines jeden Spieles vor allem die Frage, ob Gleichgewichtszustände in diesem Spiel existieren. Diese Frage ist deshalb von so großer Bedeutung, weil im Falle einer verneinenden Antwort Spiele existieren würden, in denen die Spieler prinzipiell keine vernünftigen Spielmethoden finden könnten. Glücklicherweise ist dies nicht der Normalfall. Aber auch eine bejahende Antwort auf die gestellte Frage ist im allgemeinen derart eigentümlich, daß wir auf sie hier nicht näher eingehen wollen, sondern besser später auf sie zurückkommen.

Noch verwickelter erweist sich die Frage nach der Eindeutigkeit der Gleichgewichtszustände eines Spiels. Denn für den einen Spieler ist die eine Gleichgewichtssituation vorteilhaft, für den anderen eine andere, für einen dritten eine dritte, usw. Wenn also in einem Spiel mehrere Gleichgewichtssituationen vorhanden sind, wird es notwendig, aus den vielen Gleichgewichtssituationen diese oder jene auszuwählen, die dann für alle Spieler die besten sind. Das ist nun ein überaus ernstes und schwieriges Problem, das bis jetzt nur in einzelnen Fällen gelöst wurde. Allerdings ist für viele Spiele (übrigens für die praktisch interessantesten) diese Frage entweder bereits erfolgreich beantwortet oder wenigstens einigermaßen entschärft worden.

Zweipersonen-Nullsummenspiele

Von allen Spielen sind jene von besonderer Bedeutung, die nur zwei Beteiligte (den Spieler 1 und den Spieler 2) mit einander diametral entgegengesetzten Interessen aufweisen. Formal äußert sich der Interessengegensatz der Spieler darin, daß beim Übergang von einer Spielsituation s zur Situation s' der Spieler 1 genau soviel gewinnt (verliert), wie auf der anderen Seite der Spieler 2 verliert (bzw. gewinnt):

$$H_1(s) - H_1(s') = H_2(s') - H_2(s).$$

Die Gewinnsummen der Spieler sind mit anderen Worten in allen Spielsituationen einander gleich:

$$H_1(s) + H_2(s) = H_1(s') + H_2(s').$$

Wenn man über zahlenmäßige Gewinne spricht, wird meist stillschweigend vorausgesetzt, daß der Wert des empfangenen Gewinns für den Spieler *homogen* ist, d. h., daß jede dazugewonnene Einheit den Gewinn des Spielers gleichmäßig erhöht. Es versteht sich, daß diese Annahme in gewissen Fällen völlig naturgemäß ist und ohne jeglichen Vorbehalt angenommen werden kann. So vermehrte beispielsweise die erste Tonne Kohle, die in einer der Gruben des Donbassreviers im Jahre 1962 gefördert wurde, das Sozialprodukt unseres Landes um ebenso viel, wie etwa die tausendste oder die zehntausendste Tonne, die in der genannten Grube gefördert wurde.

In anderen Fällen kann eine Homogenität des Wertes des Gewinns wohl angenommen werden, aber nur bedingt: Der zehnte Traktor in einer Kolchose kann für diese völlig unentbehrlich sein, wogegen sie ohne den fünfzehnten sehr wohl auskommen kann, weil die erforderliche Arbeit bei einiger Anstrengung auch von vierzehn Traktoren erfolgreich geleistet werden kann. Es kann schließlich vorkommen, daß die Struktur des Gewinns grundsätzlich nicht homogen ist: So bedeutet die Vernichtung der ersten feindlichen Division den erfolgreichen Beginn eines Krieges, die Vernichtung der letzten feindlichen Division jedoch dessen erfolgreiche Beendigung.

Wie dem auch sei, im weiteren wollen wir uns auf jene Fälle beschränken, in denen die Gewinne der Spieler in ihrer Struktur homogen sind.

Unter der Bedingung, daß die Gewinne der Spieler homogen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Gewinnsumme der Spieler in jeder Spielsituation gleich Null ist. Man kann dabei den Gewinn des einen Spielers als den Verlust seines Gegners behandeln. Solche Spiele nennt man *Zweipersonen-Nullsummenspiele* (oder auch *antagonistische Spiele*).

Man darf ja nicht leichtfertig jedes spieltheoretische Problem als Zweipersonen-Nullsummenspiel auffassen. Man halte sich stets vor Augen, daß dem in der Spieltheorie untersuchten Antagonismus ein mathematischer, d. h. ein absoluter Begriff zugrunde liegt, der nichts weiter ist als die mathematische Widerspiegelung einer scharfen Konfliktbeziehung.

Dadurch unterscheidet sich der mathematische Begriff dieses Antagonismus von dem gleichnamigen philosophischen Begriff, der vor allem dialektisch ist und nicht in das Prokrustesbett der „gleichen Größe mit umgekehrtem Vorzeichen" gepreßt werden kann. Eine detaillierte Analyse der beiden angeführten Antagonismus-Begriffe ist ein ernstes philosophisches Problem, auf das wir hier nicht eingehen wollen. Wir werden uns nur auf einige Bemerkungen und Beispiele beschränken, die sich auf Antagonismen im formal-mathematischen Sinne beziehen.

Bei Zweipersonen-Nullsummenspielen gibt es grundsätzlich keine Vereinbarungen oder Absprachen zwischen den Spielern: Eine Abmachung zwischen den Spielern widerspräche dem Wesen der Sache. Falls nämlich einer der Spieler auf Grund der Vereinbarungen oder Abmachungen seinen Gewinn um eine bestimmte Summe vergrößern könnte, so hätte das zur Folge, daß sein Gegenspieler genau jene gleiche Summe verlieren würde. Somit wären für einen der Spieler Vereinbarungen unvorteilhaft, und er würde sich nicht darauf einlassen. Falls aber Vereinbarungen keinem einzigen Teilnehmer nützen, sind sie überhaupt zwecklos.

Es sei aber daran erinnert, daß sogar bei derart scharfen Konflikten, wie sie Kriege darstellen, die Tür zu Vereinbarungen im allgemeinen offen bleibt. Der Hinweis auf das Verbot einzelner Waffenarten (der chemischen und hoffentlich der Kernwaffen) und auf die Tätigkeit des Roten Kreuzes usw. möge genügen.

Außerdem brauchen sich, wenn man von der Stufe der kriegführenden Seiten auf die Stufe einzelner sich einander gegenüberstehender Kampfverbände übergeht, die Ziele der Gegner bei weitem nicht als so entgegengesetzt zu erweisen, wie es scheinen könnte. Gesetzt den Fall, der Spieler 1 verteidige irgendeinen Frontabschnitt X, der für unbehelligte Absetzbewegungen irgendwelcher eigener Verbände entscheidend ist, und der Spieler 2 greife diesen mit wesentlich überlegenen Kräften an. Der Spieler 2 tritt nun entsprechend dem ihm gegebenen Befehl zum Angriff auf den Frontabschnitt X an, weiß dabei aber nichts von Rückzugsabsichten der feindlichen Streitkräfte. Er ist sich dessen sicher, daß ihm die Einnahme dieses Frontabschnittes gelingen wird, möchte aber hierbei möglichst geringe Verluste erleiden. Es sind somit seine *Verluste*, die die Werte seiner Gewinnfunktion in den einzelnen Situationen bestimmen. Der Spieler 1 auf der anderen Seite läßt sich von der Überlegung leiten, daß er wohl den Frontabschnitt X aufgeben muß, daß dabei jedoch möglichst lange hinhaltender Widerstand geleistet werden soll. Die Gewinnfunktion des Spielers 1 wird somit von jener *Zeit* bestimmt, in der er den Frontabschnitt X noch halten kann.

Selbst der Antagonismus der Klasseninteressen zwischen Unternehmer und Arbeiter braucht nicht immer in angemessener Weise durch den mathematischen Begriff des Antagonismus in der Spieltheorie widergespiegelt zu werden. Die theoretische Möglichkeit und die praktische Wirklichkeit einer friedlichen Koexistenz sozialistischer und kapitalistischer Staaten, die Fruchtbarkeit von Verhandlungen und der Vorteil gegenseitiger Handelsbeziehungen überzeugen uns davon, daß auch in diesem Falle der mathematische Begriff des Antagonismus nur als grobe Näherung benutzt werden kann.

Schließlich können in einzelnen Fällen auch die gegenseitigen Beziehungen zwischen Bourgeoisie und Arbeiterklasse nicht einmal angenähert durch das spieltheoretische Modell des Nullsummenspiels erfaßt werden: „Es ist nicht ausgeschlossen", heißt es im Programm der KPdSU, „daß sich bei einem immer stärkeren Wachstum der Kräfte des Sozialismus, bei der Festigung der Arbeiterbewegung und der Schwächung der Position des Kapitalismus in manchen Ländern eine Situation ergeben kann, in der, wie Marx und Lenin voraussahen, es für die Bourgeoisie vorteilhafter sein wird, sich die wichtigsten Produktionsmittel abkaufen zu lassen, und es für das Proletariat vorteilhaft sein wird, sich loszukaufen".[1]) In Zweipersonen-Nullsummenspielen gibt es keine Aktionen, die für beide Seiten vorteilhaft sind.

Solche Beispiele, in denen sich die Gegensätzlichkeit der Interessen der Spieler nur als grobe Annäherung an die Wirklichkeit herausstellt, können noch viele angegeben werden.

Daneben gibt es aber eine ganze Reihe von Konfliktsituationen (auf einige werden wir im folgenden eingehen), für welche die Zweipersonen-Nullsummenspiele als völlig adäquate Modelle angesehen werden können.

Das Minimaxtheorem

Bei der Formulierung eines Zweipersonen-Nullsummenspiels ist es nicht notwendig, die Gewinnfunktion beider Spieler anzugeben. Da die Summe der Funktionswerte der Gewinnfunktionen der Spieler bei jedem Stand eines Zweipersonen-Nullsummenspiels gleich Null ist, unterscheiden sich die Gewinnfunktionen in einem solchen Spiel nur durch das umgekehrte Vorzeichen:

$$H_1(s) = -H_2(s).$$

Zur Konstruktion eines solchen Spiels genügt somit die Kenntnis einer der beiden Gewinnfunktionen. Gewöhnlich gibt man die Gewinnfunktion des Spielers 1 an, die gleichzeitig die „Verlustfunktion" des Spielers 2 ist.

Daher kann man das Problem eines Zweipersonen-Nullsummenspiels Γ durch den Ausdruck

$$\Gamma = \{A, B, H\}$$

charakterisieren, wobei A und B die Mengen der Strategien des ersten und des zweiten Spielers sind, während H die Gewinnfunktion des ersten Spielers ist. (In Zweipersonen-Nullsummenspielen ersetzt man die Bezeichnungen S_1 und S_2 aus Gründen der Einfachheit häufig durch die Buch-

[1]) *Programm und Statut der Kommunistischen Partei der Sowjetunion*, angenommen auf dem XXII. Parteitag der KPdSU 17. bis 31. Oktober 1961; Dietz Verlag, Berlin 1961.

staben A und B; desgleichen kann man den zu H gehörenden Index weglassen.)

Bei den Zweipersonen-Nullsummenspielen, ebenso wie bei allen anderen Spielen, müssen vernünftige Spieler einen Gleichgewichtszustand anstreben. Nun lassen sich bei Zweipersonen-Nullsummenspielen die im Abschnitt „Ziele der Spieler und Zielverwirklichung" formulierten Bedingungen für eine Gleichgewichtssituation (a^*, b^*) wie folgt beschreiben:

Bei jeder Strategie a aus A ist stets

$$H\ (a^*, b^*) \geqslant H\ (a, b^*),$$

und für jede Strategie b aus B ist

$$H\ (a^*, b^*) \leqslant H\ (a^*, b).$$

(Wir erinnern uns, daß in unserem Falle $H = H_1 = -H_2$ ist.)

Ein Zweipersonen-Nullsummenspiel kann als Wahl eines Punktes auf einem Gelände gedeutet werden, wobei der Spieler 1 die geographische Breite, der Spieler 2 hingegen die geographische Länge wählt; der Wert der Gewinnfunktion ist die Höhe des gewählten Punktes über dem Meeresspiegel. Falls es nun auf diesem Gelände eine sich über die übrige Oberfläche jäh erhebende Bergkette gibt, die sich über die ganze Breite des Geländes erstreckt, und sich in dieser Bergkette ein vergleichsweise niedriger Paß befindet, so entspricht dieser Paß („Sattel") dem Gleichgewichtszustand in dem von uns untersuchten Spiel. Wegen dieser Interpretationsmöglichkeit nennt man Gleichgewichtszustände in Zweipersonen-Nullsummenspielen oft *Sattelpunkte*.

Das vernünftige Verhalten der Spieler in einem Zweipersonen-Nullsummenspiel kann auch durch folgende Überlegungen festgestellt werden:

Nehmen wir an, daß sich der Spieler 1 im Zweipersonen-Nullsummenspiel $\Gamma = \{A, B, H\}$ innerhalb seiner Strategiealternativen etwa für die Strategie a entschließt. Sein Gewinn wäre dann im ungünstigsten Fall (beispielsweise, wenn der Spieler 2 über die vom Spieler 1 gewählte Strategie informiert wäre) gleich $\min\limits_{b} H\ (a, b)$.[1]) Da mit dieser Möglichkeit gerech-

---

[1]) Der Ausdruck $\min\limits_{x} A(x)$, worin $A(x)$ irgendeine von x abhängige Größe ist, bedeutet den kleinsten aller jener Werte, die die Größe $A(x)$ annehmen kann, wenn sich x ändert. Analog ist mit $\max\limits_{x} A(x)$ der größte aller Werte der Größe $A(x)$ gemeint.

net werden muß, hat der Spieler 1 seine Strategie a^* dermaßen zu wählen, daß er seinen Mindestgewinn maximiert:

$$\min_b H(a^*, b) = \max_a \min_b H(a, b).$$

Der Ausdruck, der auf der rechten Seite der angegebenen Gleichung steht, nämlich das Maximum, ist somit der garantierte (Mindest-)gewinn des Spielers 1.

Betrachten wir nun dieses Spiel mit den Augen des zweiten Spielers: Angenommen, er entschlösse sich für die Strategie b; dann entspräche wiederum im ungünstigsten Falle sein Verlust dem Ausdruck $\max_a H(a, b)$. Da auch der Spieler 2 eine für ihn möglichst ungünstige Entwicklung der Ereignisse in Betracht ziehen muß, hat er seine Strategie b^* so zu wählen, daß diese seinen größtmöglichen Verlust minimiert:

$$\max_a H(a, b^*) = \min_b \max_a H(a, b).$$

Das rechts stehende „Minimax" ist nun der denkbar größte, unvermeidbare Verlust des Spielers 2. Das bedeutet, daß der Spieler 2 dem Spieler 1 keinen größeren Gewinn zukommen lassen wird, als eben dieses Minimax; vorausgesetzt natürlich wiederum, daß er sich von vernünftigen Überlegungen leiten läßt.

Lassen sich folglich beide Spielteilnehmer von der Vernunft leiten, dann kann der Gewinn des ersten Spielers nicht kleiner werden als das Maximin $\max_a \min_b H(a, b)$ und nicht größer als das Minimax $\min_b \max_a H(a, b)$.

Sollte sich bei einem beliebigen Zweipersonen-Nullsummenspiel herausstellen, daß das Minimax $\min_b \max_a H(a, b)$ kleiner als das Maximin $\max_a \min_b H(a, b)$ ist, dann wäre das nach den eben durchgeführten Überlegungen ein Widerspruch, und für ein solches Spiel gibt es kein vernünftiges Verhalten der Spieler. Glücklicherweise ist jedoch das Maximin $\max_a \min_b H(a, b)$ nie größer als das Minimax $\min_b \max_a H(a, b)$, also

$$\max_a \min_b H(a, b) \leqslant \min_b \max_a H(a, b).$$

In der Tat gilt für beliebige a und b

$$H(a, b) \leqslant \max_a H(a, b)$$

und erst recht

$$\min_{b} H(a, b) \leqslant \max_{a} H(a, b).$$

Da diese Beziehung für jedes a gilt, gilt sie auch für jenes a, für welches $\min_{b} H(a, b)$ einen maximalen Wert hat:

$$\max_{a} \min_{b} H(a, b) \leqslant \max_{a} H(a, b).$$

Da diese Ungleichung ihrerseits für jedes b gilt, behält sie auch für jenes b ihre Gültigkeit, das den Ausdruck $\max_{a} H(a, b)$ zu einem Minimum macht:

$$\max_{a} \min_{b} H(a, b) \leqslant \min_{b} \max_{a} H(a, b),$$

was zu beweisen war.

Falls aber das Maximin und das Minimax gleich sind,

$$\max_{a} \min_{b} H(a, b) = \min_{b} \max_{a} H(a, b), \tag{2}$$

so ist der Gewinn des Spielers 1 eine völlig bestimmte Zahl. Der Spieler 1 kann sich diesen Gewinn immer sichern; eine größere Gewinnsumme allerdings gestattet ihm sein Gegener nicht. Diesen genauen Gewinn des Spielers 1 nennt man den *Wert* des Spiels. Die Teilnahme des Spielers 1 am Spiel bedeutet also, daß er vom Spieler 2 genau diese Summe zu erhalten hat. Statt des Ausdrucks Wert eines Spiels verwendet man auch oft den Ausdruck *Preis* eines Spiels, weil unter dem Wert eines Spiels jener gerechte Preis verstanden werden kann, den der Spieler 1 für das Recht seiner Teilnahme am Spiel Γ bezahlen würde. Den Wert eines Spiels Γ bezeichnet man gewöhnlich mit v_Γ oder einfach mit v.

Falls also die Minimaxgleichung (2) zutrifft, führt ein vernünftiges Verhalten beider Spielteilnehmer dazu, daß der Spieler 1 jene Summe gewinnt (bzw. der Spieler 2 entsprechend verliert), die gleich dem Wert des Spiels Γ ist. Andererseits muß ein vernünftiges Verhalten der Spieler zu einem Gleichgewichtszustand führen. Naturgemäß ist daher zu erwarten, daß die Spieler, wenn eine solche Minimaxgleichung gilt, eine Gleichgewichtssituation, d. h. einen Sattelpunkt verwirklichen. Das trifft nun tatsächlich zu.

Satz. *Ein Zweipersonen-Nullsummenspiel $\Gamma = \{A, B, H\}$ weist dann und nur dann einen Sattelpunkt auf, wenn das Maximin und das Minimax einander gleich sind, wenn also*

$$\max_{a} \min_{b} H(a, b) = \min_{b} \max_{a} H(a, b)$$

ist.

B e w e i s. *Die Bedingung ist notwendig.* Sei $(a^\star, b^\star)$ einer der Sattelpunkte des Spiels Γ. Das bedeutet, daß für alle a aus A und b aus B

$$H(a, b^\star) \leqslant H(a^\star, b^\star), \tag{3}$$

$$H(a^\star, b^\star) \leqslant H(a^\star, b) \tag{4}$$

gilt.

Die Ungleichung (3) gilt für jeden beliebigen Wert a aus A. Folglich ist diese Ungleichung auch für jenes a erfüllt, für das $H(a, b^\star)$ den größten Wert annimmt:

$$\max_a H(a, b^\star) \leqslant H(a^\star, b^\star). \tag{5}$$

Da weiterhin der Ausdruck $\max\limits_a H(a, b)$ von b abhängt, ist dieser eine Funktion von b. Und einer der Werte dieser Funktion ist eben der Ausdruck $\max\limits_a H(a, b^\star)$. Dieser Wert ist nun offenbar nicht kleiner als der kleinste Wert der betrachteten Funktion:

$$\min_b \max_a H(a, b) \leqslant \max_a H(a, b^\star). \tag{6}$$

Zusammen mit (5) ergibt dies

$$\min_b \max_a H(a, b) \leqslant H(a^\star, b^\star). \tag{7}$$

Analoge Überlegungen im Zusammenhang mit der Ungleichung (4) ergeben:

$$H(a^\star, b^\star) \leqslant \max_a \min_b H(a, b). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\min_b \max_a H(a, b) \leqslant \max_a \min_b H(a, b).$$

Da oben die umgekehrte Ungleichung bewiesen wurde, gilt also

$$\min_b \max_a H(a, b) = \max_a \min_b H(a, b). \tag{9}$$

Die Bedingung ist hinreichend. Das ergibt sich ganz einfach. Das Minimum auf der linken Seite von (9) muß für $b = b^\star$ erreicht werden und das Maximum auf der rechten Seite für $a = a^\star$. Dann kann die Gleichung (9) auch in der Form

$$\max_a H(a, b^\star) = \min_b H(a^\star, b)$$

dargestellt werden.

Dann ist aber offenbar

$$H\ (a^*,\ b^*) \leqslant \max_a H\ (a,\ b^*) = \min_b H\ (a,\ b) \leqslant H\ (a^*,\ b^*),$$

und das bedeutet

$$\max_a H\ (a,\ b^*) = H\ (a^*,\ b^*) = \min_b H\ (a^*,\ b). \tag{10}$$

Da aber bei beliebigem a aus A und b aus B

$$\min_b H\ (a^*,\ b) \leqslant H\ (a^*,\ b),$$

$$H\ (a,\ b^*) \leqslant \max_a H\ (a,\ b^*)$$

gilt, liefert uns Gleichung (10)

$$H\ (a,\ b^*) \leqslant (H\ a^*,\ b^*) \leqslant H\ (a^*,\ b),$$

was zu beweisen war.

Aus den bisherigen Überlegungen folgt, daß in einem Spiel Γ, dessen Maximin $\max_a \min_b H\ (a,\ b)$ und Minimax $\min_b \max_a H\ (a,\ b)$ gleich sind, das optimale Verhalten der Spieler ohne Schwierigkeiten ermittelt werden kann: Der Spieler 1 muß danach jene Strategie a^* wählen, die den Ausdruck $\min_b H\ (a,\ b)$ maximiert, der Spieler 2 hingegen jene Strategie b^*, die den Ausdruck $\max_a H\ (a,\ b)$ minimiert. Es handelt sich hier natürlich um das grundsätzliche Auffinden der entsprechenden Strategien von seiten der Spieler. Ihre tatsächliche Bestimmung und ihre Berechnung können bedeutende Schwierigkeiten bereiten.

Da diese Strategien dann zu jenen größtmöglichen Gewinnen verhelfen, die sich die Spielteilnehmer auf alle Fälle sichern können (oder zu kleinstmöglichen Verlusten führen und eine weitere Verminderung bereits ausgeschlossen ist), nennt man sie *optimale Strategien.*

Das Hauptproblem bei einer Spielanalyse liegt in der Ermittlung eines Gleichgewichtszustandes des Spiels. Deshalb nennt man auch einen Gleichgewichtszustand in einem Spiel dessen *Lösung.* Den Prozeß der Auffindung eines Gleichgewichtszustandes eines Spiels bezeichnet man gleichfalls als Lösung.

Die oben formulierte Gesetzmäßigkeit gestattet bereits eine unmittelbare, praktische Anwendung, auf die wir gleich eingehen werden.

Matrix-Spiele

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Spieler 1 und 2 im Nullsummen-Spiel $\Gamma = \{A, B, H\}$ jeweils über die endlich vielen Strategien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verfügen. Dann lassen sich die Werte der Gewinnfunktion bequem in Form folgender Tabelle anordnen:

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	$H(a_1, b_1)$	$H(a_1, b_2)$	...	$H(a_1, b_n)$
a_2	$H(a_2, b_1)$	$H(a_2, b_2)$	...	$H(a_2, b_n)$
...	....	....		....
a_m	$H(a_m, b_1)$	$H(a_m, b_2)$	...	$H(a_m, b_n)$

Da es aber völlig belanglos ist, wie wir die Strategien der Spieler nennen und wie wir sie anschreiben, wollen wir für die Strategien des ersten Spielers die Zahlen $1_1, 1_2, \ldots, 1_m$ und für die Strategien des zweiten Spielers die Zahlen $2_1, 2_2, \ldots, 2_n$ verwenden. Jede einzelne Situation läßt sich dann mit Hilfe eines Zahlenpaares der Form i, j darstellen, wobei i die Werte $1, 2, \ldots, m$ und j die Werte $1, 2, \ldots, n$ annehmen kann. Der Gewinn in einer dieser Situationen kann daher mit H_{ij} oder mit jedem anderen Buchstaben mit zwei Indizes (Unterscheidungszeichen) „ij" dargestellt werden. Meistens bezeichnet man den Gewinn in theoretischen Überlegungen mit a_{ij}. Unsere Tabelle kann somit in folgender Form dargestellt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine in dieser Form angeschriebene Tabelle wird in der Mathematik *Matrix* genannt. Die waagerechten Reihen einer Matrix heißen *Zeilen*, die senkrechten heißen *Spalten*. Da die Zahlen a_{ij}, die an den einzelnen Stellen einer solchen Matrix-Tabelle stehen, die an den Spieler 1 im Spiel Γ auszuzahlenden Gewinne symbolisieren, nennt man diese Matrix *Gewinnmatrix*.[1]) Auf Grund dieser Darstellungsmöglichkeit werden die Zweipersonen-Nullsummenspiele, in denen jeder Spieler über endlich viele Strategien verfügt, auch *Matrix-Spiele* genannt.

Will man betonen, daß in einem solchen Spiel der erste Spieler über m, der zweite Spieler hingegen über n Strategien verfügt, so spricht man von einem $(m \times n)$-Spiel.

Entsprechend der allgemeinen Erklärung eines Spielablaufes besteht der Verlauf einer Partie eines Matrix-Spieles mit der Gewinn-Matrix A darin, daß der Spieler 1 eine der Zeilen (beispielsweise die i-te) auswählt, der Spieler 2 hingegen (gleichzeitig) eine ihrer Spalten (etwa die j-te Spalte). Das Element a_{ij} der Matrix, das man im Ergebnis dieser Wahl erhält, ist der Gewinn des ersten Spielers.

Bei einem entsprechend den Regeln abgewickelten Spiel kann der Spieler 1 nicht weniger als das $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ erhalten, d. h. nicht weniger als das kleinste der (relativen) Maxima der Matrixspalten. Bei ordentlichem Spiel des Spielers 2 erhält Spieler 1 nicht mehr als das $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$, also nicht mehr als das größte (relative) Minimum der Matrixzeilen. Sind diese Matrixelemente einander gleich, so ist ihr gemeinsamer Wert der Wert des betreffenden Spiels, und die ihn herbeiführende Wahl der Matrixzeilen und Matrixspalten von seiten der Spieler ergibt einen Sattelpunkt.

Wollen wir nun einige Beispiele von Matrix-Spielen untersuchen!

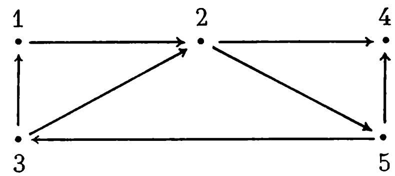
Zu Beginn soll ein Spiel gebracht werden, das zwar gespielt werden kann, als Einführungsbeispiel jedoch einfach gehalten ist und daher nicht als sehr interessant empfunden werden dürfte.

Beispiel 1. In einer bestimmten Menge von Punkten seien einige Punktepaare durch Pfeile verbunden. Dieses Punktesystem mit den verbindenden Pfeilen wollen wir ein Netz nennen. Die Strategie der Spieler besteht nun darin, daß jeder einen der Punkte beim Namen nennt. Wird dabei von beiden Spielern derselbe Punkt genannt oder werden zwei Punkte genannt, die nicht mit einem Pfeil verbunden sind, so ist in diesem Spiel der Gewinn jedes Spielers gleich Null. Werden hingegen zwei Punkte benannt, die mit einem Pfeil verbunden sind, so gewinnt jener Spieler

[1]) Anstelle von Gewinnmatrix sind auch die weniger zutreffenden Ausdrücke *Auszahlungsmatrix* oder *Payoff-Matrix* gebräuchlich.

eine Einheit, der den bei der Pfeilspitze gelegenen Punkt genannt hat. Spiele dieses Typs werden Netzspiele genannt.

Es soll nun ein konkretes Netzspiel untersucht werden:



Jeder Spieler hat hier fünf Strategien, und unser Spiel ist ein (5×5)-Spiel mit der Gewinnmatrix

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{l}\text{Zeilen-}\\ \text{minima}\end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{rrrrr} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0^{*} & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \longleftarrow \text{größtes Minimum} \\ -1 \end{array} \\
\begin{array}{l}\text{Spalten-}\\ \text{maxima}\end{array} & \begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & \nearrow & \end{array} & \\
 & \begin{array}{c}\text{kleinstes}\\ \text{Maximum}\end{array} &
\end{array}
$$

Hier sind die kleinsten Elemente in den Zeilen jeweils gleich -1, -1, -1, 0 und -1; das größte von diesen ist gleich Null. Andererseits sind die größten Elemente in den Spalten gleich 1, 1, 1, 0 und 1; das kleinste von diesen ist Null. Daher gilt in unserem Falle

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = 0 = \min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

Folglich bestehen die optimalen Strategien der Spieler darin, daß jeder von ihnen den Punkt 4 nennt. Der entsprechende Gleichgewichtszustand ist in der Matrix mit einem Sternchen kenntlich gemacht. Der Wert dieses Spiels ist gleich Null.

Beispiel 2. Oberst Blotto (eine anekdotische Gestalt, der traditionelle Held vieler spieltheoretischer Aufgaben militärischen Inhalts) verteidigt die zwei an der Front gelegenen Gebirgspässe A und B. Auf Grund der örtlichen Gegebenheiten läßt sich der Gebirgspaß B leichter verteidigen als der Gebirgspaß A. Dem Oberst sind drei Kampfverbände unterstellt. Der angreifende Feind verfügt über zwei analoge Kampfverbände und kann jeden von ihnen gegen einen beliebigen Gebirgspaß werfen. Falls ihm die Einnahme eines Gebirgspasses nicht gelingen sollte, will er wenigstens die Streitkräfte von Oberst Blotto möglichst schwächen. Für den Oberst ist der Verlust eines beliebigen Gebirgspasses gleichbedeutend mit der Einbuße zweier Einheiten seiner Streitkräfte. Beide Seiten sind entschlossen, ihr Ziel ohne Rücksicht auf Verluste zu erreichen, so daß der Kampf bis zur völligen Aufreibung des Gegeners fortgesetzt wird. Das erwartete gegenseitige Verlustverhältnis ist $1:1$ beim Gebirgspaß A und $1:2$ beim Gebirgspaß B zugunsten Blottos. Es wird angenommen, daß Oberst Blotto einen Gebirgspaß beherrscht, falls nach einem Kampf auf diesem keine intakten feindlichen Einheiten zurückbleiben (und zwar unabhängig davon, ob eigene Truppen Blottos anwesend sind).

Wie hat Oberst Blotto bei der gegebenen Lage seine Streitkräfte zur Verteidigung der Gebirgspässe zu verteilen? Welche Konsequenzen ergeben sich in dieser Hinsicht für den Einsatz der Streitkräfte seines Gegenrs beim Angriff auf die Gebirgspässe? Es wird angenommen, daß es im Verlaufe der Kampfhandlungen keiner der beiden Seiten möglich ist, ihre Verbände umzugruppieren.

Lösung. Oberst Blotto (der Spieler 1) verfügt in unserem Spiel über vier Strategien: Er kann den Gebirgspaß A mit 0, 1, 2 oder 3 Einheiten seiner Streitkräfte und den Gebirgspaß B mit 3, 2, 1 oder 0 Einheiten verteidigen. Sein Gegner hingegen (der Spieler 2) kann zwischen folgenden drei Strategien wählen: Er kann gegen A jeweils 0, 1 oder 2 Einheiten einsetzen und gegen B entsprechend 2, 1 oder 0.

Wir haben es also mit einem (4×3)-Spiel zu tun, dessen Matrix gemäß den vereinbarten Spielregeln folgende Gestalt hat:

Der Gegner setzt gegen A ein:

$$
\text{Blotto setzt auf A ein:}\quad
\begin{array}{c|ccc|}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 1 & -1\frac{1}{2}^{*} & -2 \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\
2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\
3 & -2 & -2 & 0
\end{array}
$$

Wollen wir uns den Vorgang der Aufstellung dieser Matrix am Beispiel der Gewinnberechnung Blottos für die Situation klar machen, in der er alle seine Streitkräfte am Gebirgspaß B einsetzt und sein Gegner den Gebirgspaß A mit einer Einheit angreift. (Das diesem Sachverhalt entsprechende Matrixelement ist mit einem Stern gekennzeichnet.)

In der zu besprechenden Situation verliert Blotto den Gebirgspaß A (was gleichbedeutend mit dem Verlust von zwei Einheiten ist), vernichtet jedoch am Gebirgspaß B eine feindliche Einheit und büßt dabei selbst eine halbe Einheit seiner Streitkräfte ein. Folglich verliert Blotto am Gebirgspaß A zwei Einheiten, gewinnt am Gebirgspaß B hingegen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Einheit. Sein Gesamtgewinn ist somit gleich $-2 + \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$ Einheiten.

Die kleinsten Elemente der einzelnen Zeilen sind hier -2, -2, 0 und 0, das größte dieser Minima ist gleich 0. Die größten Elemente der Spalten sind gleich 1, $\frac{1}{2}$ und 0 und das kleinste von den letztgenannten ist ebenfalls 0.

Da also in unserem Falle

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

ist, hat das Spiel einen Sattelpunkt, der dann erreicht wird, wenn sich der Spieler 1 für seine dritte Strategie entscheidet und der Spieler 2 ebenfalls seine dritte Strategie wählt.

Daraus folgt, daß Oberst Blotto dann die günstigste Variante wählt, wenn er den Gebirgspaß A mit zwei Einheiten seiner Streitkräfte, den Gebirgspaß B hingegen mit einer Einheit verteidigt. Seinem Gegner bleibt dann nichts Zweckmäßigeres zu tun übrig, als alle seine Streitkräfte gegen den Gebirgspaß A zu werfen. Das Ergebnis dieses Verhaltens besteht dann darin, daß Oberst Blotto die Gebirgspässe behält und die Verluste beider Seiten gleich groß sind (nämlich je zwei Einheiten).

Spiele gegen die Natur

Die Spieltheorie ist eine *mathematische* Disziplin, und deshalb ist die physikalische, biologische, rechtliche oder soziale Beschaffenheit der Spieler für uns völlig gegenstandslos, solange wir uns im Rahmen der Spieltheorie bewegen. Unter Spielern können daher sowohl einzelne natürliche Personen verstanden werden als auch ganze Kollektive (beispielsweise Mannschaften in sportlichen Wettkämpfen) oder juristische Personen (etwa Prozeßgegner vor Gericht), ebenso aber auch miteinander Krieg führende Organisationen sowie biologische Arten im Kampf ums Dasein. Bisweilen ist es zweckmäßig, der *Natur* die Rolle eines Spielers zuzuteilen. Die Ungewöhnlichkeit dieser Problemstellung, bei der die Natur als Spieler auftritt (d. h. als ein ganz bestimmte Interessen vertretender Teilnehmer), und die Bedeutung dieses Gebiets der Anwendung der Spieltheorie zwingen uns, auf die Spiele gegen die Natur genauer einzugehen.

Die Bezeichnung „Spiel gegen die Natur“ braucht uns übrigens nicht zu verwundern. Die Redewendung „Kampf mit den Naturgewalten“ hat sich schon längst eingebürgert, und im Grund genommen sind Spiele in unserem Sinne des Wortes einfach von Mathematikern beschriebene Kämpfe. Es versteht sich, daß man bei der Betrachtung jeder Naturerscheinung über dieses oder jenes Verhalten der „elementaren Gewalten“ sprechen kann, d. h. solcher Kräfte, die wir nicht beherrschen. Diese Verhaltensweisen nennt man naturgemäß Strategien der Natur. Daher gibt es bei der Bestimmung der ersten beiden Elemente eines Spiels (den Spielteilnehmern und deren Strategien) für den Fall eines Spiels gegen die Natur keine besonderen Schwierigkeiten. Was das dritte Element eines solchen Spiels, die Gewinnfunktion der Natur anbelangt, liegt die Sache erheblich komplizierter. Entsprechend den früher dargelegten Grundsätzen müßten wir der Natur in jeder Situation einen bestimmten Gewinn zuordnen und annehmen, daß sie ihr Verhalten entsprechend ihrer Gewinnfunktion bestimmt und sich dabei von dem Streben leiten läßt, dem Menschen einen möglichst großen Verlust zuzufügen. Es ist klar, daß diese naive Einstellung nicht nur als idealistisch vom philosophischen Standpunkt aus, sondern geradezu als dunkelster Aberglaube bezeichnet werden muß. Allerdings genügt es, einige Überlegungen über die Psychologie eines gegen die Natur antretenden Spielers heranzuziehen, um ein Spiel gegen die Natur als Zweipersonen-Nullsummenspiel qualifizieren zu können und damit den Gewinn der Natur in jeder einzelnen Situation als den mit umgekehrtem Vorzeichen versehenen Gewinn des gegen die Natur kämpfenden Spielers anzusehen.

Zunächst stellen wir fest, daß sich das Verhalten der Natur (einschließlich ihrer Reaktionen auf diesen oder jenen Eingriff des Menschen in den normalen Ablauf ihrer Prozesse) durch charakteristische Naturgesetze bestimmen läßt. Zu jedem Zeitpunkt können für jeden gegen die Natur antretenden Spieler alle diese Gesetzmäßigkeiten in drei Kategorien eingeteilt werden. Zur ersten Kategorie gehören die dem Spieler bekannten Gesetzmäßigkeiten, die für das betreffende Spiel wesentlich sind und deshalb berücksichtigt werden müssen. Diese Gesetzmäßigkeiten bestimmen das System, in dessen Rahmen sich die durch das Spiel nachzubildenden Erscheinungen vollziehen, und somit die Spielregeln. Insbesondere erlauben sie die Aufzählung aller Strategien der Natur in dem uns interessierenden Spiel.

Die zweite Kategorie umfaßt jene Gesetzmäßigkeiten der Natur, die für das Spiel wohl wesentlich, dem Spieler aber unbekannt sind. Gerade auf der Grundlage dieser Gesetzmäßigkeiten wählt die Natur während des Spielablaufes die eine oder andere ihrer Strategien aus. Zur dritten Kategorie schließlich zählen jene Gesetzmäßigkeiten, die für das Spiel unwesentlich sind und dieses in keiner Weise beeinflussen. (Soll ein sinnvolles, nützliches, adäquates Modell konstruiert werden, so dürfen in der dritten Kategorie nur jene Gesetzmäßigkeiten zusammengefaßt werden, die sich tatsächlich im Ablauf der untersuchten Erscheinungen nicht bemerkbar machen und die man daher unter den gegebenen Bedingungen vernachlässigen kann.)

Somit zeigt sich bei der Modellierung eines Kampfes gegen die Natur durch ein bestimmtes Spiel der Unterschied zwischen bekannten und unbekannten Naturgesetzen darin, daß die erstgenannten die Spielregeln einschließlich der Menge aller Strategien der Natur festlegen, wogegen die zweiten die Auswahl einer bestimmten Strategie aus dieser Menge seitens der Natur bestimmen.

Dadurch erklärt sich unter anderem der historische Charakter jedes spieltheoretischen Modells, das einen Kampf des Menschen gegen die Natur wiedergibt: Im Laufe der Zeit vergrößert sich die Anzahl der Spielregeln des Spiels, das als Modell einer gegebenen konkreten Erscheinung fungiert, und verringert sich die Anzahl der Strategien der Natur, und zwar in dem Maße, in dem die Anzahl der bekannten Naturgesetze wächst und die Anzahl der unbekannten Naturgesetze abnimmt. Im Idealfall, daß alle Gesetzmäßigkeiten, die wir bei einem bestimmten Stande der Forschung zu berücksichtigen haben, bekannt sind und die Forschung selbst auf höchstem Niveau steht, wird die Anzahl der Strategien der Natur auf eine einzige zusammenschrumpfen. Der Kampf gegen die Natur wird sich dann auf die denkbar beste Ausnutzung der erkannten Naturgesetze reduzieren und mathematisch nicht mit Hilfe der Spieltheorie, sondern auf irgendeine andere Weise modellmäßig erfaßt werden. Hieraus ergibt sich, daß die Anwendung der Spieltheorie in dieser oder jener Wissenschaft einer bestimmten Entwicklungsstufe dieser Wissenschaft entspricht. Solange durch die Wissenschaft noch nicht genügend Gesetzmäßigkeiten erkannt sind, besitzt die Natur in den Spielen, die den erforschten Erscheinungen entsprechen, noch zu viele Strategien, als daß diese Modelle erfolgreich untersucht werden könnten. Andererseits kann die Spieltheorie, sobald die theoretische Forschung *alle* Details irgendeiner Erscheinung erklärt hat, nichts mehr zu ihrer praktischen Verwertung (oder dem Kampf gegen sie) beitragen. Daher ist die Anwendbarkeit der Spieltheorie auf ein bestimmtes „mittleres Alter" einer Wissenschaft und einen „mittleren Erkenntnisstand" beschränkt. Da aber in den meisten zeitgenössischen Wissenschaften immer neue Richtungen auftauchen, während die alten Zweige der Forschung sich auf ein immer höheres und exakteres Niveau erheben, besteht keinerlei Anlaß zu der Befürchtung, es gebe für die Spieltheorie irgendwann einmal keine praktische Anwendungsmöglichkeit mehr. Selbstverständlich stößt die praktische Anwendung der Methoden der Spieltheorie auf technische Schwierigkeiten, bisweilen sogar auf recht ernste, doch davon soll weiter unten die Rede sein.

Wir wenden uns wieder der Gewinnfunktion der Natur zu. Entsprechend dem Verhalten eines gegen die Natur antretenden Spielers, der irgendein bestimmtes Ziel vor Augen hat, können wir jeder Situation, die im Ergebnis der Auswahl einer Strategie durch ihn und die Natur eintritt, eine Zahl zuordnen, die das Maß der Verwirklichung dieser Ziele charakterisiert. Daher können wir (wenigstens im Prinzip) von der Gewinnfunktion des Spielers sprechen. Die Natur wählt jedoch ihre Strategie nach Gesetzen, die dem Spieler nicht bekannt sind. Falls also ein gegen die Natur antretender Spieler mit äußerster Behutsamkeit vorgeht (und die Spieltheorie untersucht bei ihrem derzeitigen Stande gerade solche Spiele), muß er bei der Wahl seiner Strategie von der Annahme ausgehen, daß die tatsächliche Gesetzmäßigkeit der Natur, die ihm noch unbekannt ist, zu Verhaltensweisen der Natur führt, die für ihn am ungünstigsten sind. Hieraus folgt, daß es sich im betrachteten Fall tatsächlich um ein Zweipersonen-Nullsummenspiel handelt.

Gerade eine solche Strategie der Natur, die für den Spieler am ungünstigsten ist, wird in der Spieltheorie *optimale Strategie* der Natur genannt. Das hat nichts mit einer Vermenschlichung der Natur zu tun und besagt natürlich erst recht nicht, daß etwa die Natur der erklärte Gegner des Menschen sei.

Eines der einfachsten Beispiele eines Spiels gegen die Natur ist wohl das folgende:

Beispiel 3. An einem sonnigen Sonntagmorgen (die Sache spielt im Juli in Leningrad) unternimmt jemand (der Spieler 1) einen Ausflug, wobei er sich entschließt, das damit verbundene Vergnügen mit der Zahl 10 zu bewerten. Der Terminus ‚aufkommende Niederschlagsneigung' im Wetterbericht des Rundfunks für diesen Tag führt ihn zu dem Schluß, daß der Natur zwei Strategien zur Verfügung stehen: (1) Regen und (2) Trockenheit. (Da der Spieler 1 einige Gesetzmäßigkeiten der Natur kennt, schließt er von vornherein aus der Menge ihrer Strategien Schnee, Frost, Wirbelsturm, Überschwemmungen usw. aus.) Nun überdenkt der Spieler 1 seine eigenen Strategien. Es sind deren drei: (1) Verzicht auf den Ausflug (in diesem Fall ist sein Vergnügen am Ausflug unabhängig von der Strategie der Natur gleich Null); (2) Mitnahme einer leichten Regenhaut. (Die mit dem Tragen einer Regenhaut verbundene Unannehmlichkeit verringert sein Vergnügen bei trockenem Wetter auf 9. Gleichzeitig bewirkt das Vorhandensein des Mantels, daß der Ausflug sogar bei Regen eines gewissen Reizes nicht entbehrt; in diesem Falle bewertet der Spieler 1 das mit dem Ausflug verbundene Vergnügen mit 5); (3) Weggehen ohne Mantel (ungetrübtes Vergnügen bei trockenem Wetter und sehr mäßiges, nämlich nur das einer einzigen Einheit entsprechende bei Regen).
Die Matrix des beschriebenen (3×2)-Spiels hat somit offensichtlich folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Das größte Zeilenminimum der Matrix fällt mit ihrem kleinsten Spaltenmaximum zusammen; diese Zahl ist gleich 5. Der Spieler 1 hat folglich ein garantiertes Vergnügen von 5 Einheiten und muß hierfür seine zweite Strategie anwenden: Ausflug mit Regenmantel. Die für ihn ungünstigste Strategie der Natur ist die erste, also Regen.

Zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

Die mathematische Spieltheorie ist ziemlich eng mit der Wahrscheinlichkeitstheorie verknüpft. Daher dürfte es für den Leser zweckmäßig sein, an einige grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie zu erinnern.

Wir wollen uns hier auf eine ganz kurze Darlegung der grundlegenden Erkenntnisse auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränken, ohne dabei den geringsten Anspruch auf Vollständigkeit oder Exaktheit zu erheben.

Unter einem *Ereignis* versteht man all das, wovon es Sinn hat zu sagen, es geschehe oder es geschehe nicht, daß es getan wird oder nicht getan wird, daß es geschehen wird oder nicht geschehen wird. Ein Ereignis heißt *zufällig*, wenn sein Eintreten nicht genau, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden kann. Dabei wird unter der *Wahrscheinlichkeit* eines zufälligen Ereignisses das Maß für die Möglichkeit seines Eintretens verstanden. Wir nehmen nun an, daß wir mehrmals Bedingungen schaffen, unter denen ein bestimmtes zufälliges Ereignis stattfinden oder nicht stattfinden kann. In diesem Falle pflegt man zu sagen, daß eine Reihe von Versuchen ausgeführt wird, von denen einer ein Ergebnis hat, welches das uns interessierende Ereignis ist. Es zeigt sich dabei (diese Aussage ist die Quintessenz des sogenannten „Gesetzes der großen Zahlen"), daß die *Häufigkeit*, mit der unser Ereignis im Laufe der Versuche eintritt (d. h. die Anzahl, in der das bestimmte Ereignis auftritt, dividiert durch die Anzahl aller Versuche), bei einer hinreichend großen Zahl von Versuchen stets nahe bei der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses liegt. Dieser Umstand gab Veranlassung, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu definieren als Häufigkeit, mit der es in einer hinreichend langen Versuchsreihe auftritt. Es sei bemerkt, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ein objektives Charakteristikum dieses Ereignisses ist, auch dann, wenn die Möglichkeit seiner Realisierung nur ein einziges Mal betrachtet wird. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein objektives Charakteristikum der Bedingungen, unter denen ein Versuch abläuft. Beispielsweise spiegelt beim Werfen einer Münze die jedem möglichen Ausgang des Versuchs (d. h., ob die Münze mit der „Zahl" oder dem „Wappen" nach oben zu liegen kommt) zugeschriebene Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Symmetrie der Münze wider. Die Verallgemeinerung dieses Gedankens auf eine umfangreichere Klasse von Zufallserscheinungen führt uns zu folgender Definition:

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit. Sind alle Ergebnisse irgendeines Experiments gleichwahrscheinlich und gibt es n solcher Ergebnisse, dann ist die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ergebnisses gleich $\frac{1}{n}$.

Falls das Auftreten eines bestimmten Ereignisses im Eintreten eines bestimmten Ergebnisses unter m Ergebnissen unseres Versuches besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses gleich $\frac{m}{n}$.

Sind A und B *unvereinbare* Ereignisse (d. h., ist ein gleichzeitiges Auftreten von A und B unmöglich) mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eines davon auftritt, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse, $P(A) + P(B)$.

Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit eines *sicheren* Ereignisses, d. h. eines Ereignisses, das immer eintritt, gleich 1.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis A, dessen Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist, nicht eintritt, ist daher gleich $1 - P(A)$.

Es seien A und B zwei zufällige Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$. Diese Ereignisse nennt man voneinander *unabhängig*, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie beide eintreten, gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten $P(A)P(B)$ ist.

Fällt beispielsweise beim zweimaligen Werfen einer Münze jedesmal das Wappen nach oben, so sind das zwei unabhängige Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies eintritt, ist gleich $\frac{1}{4}$, und das ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß jedesmal die Münze mit dem Wappen nach oben fällt.

Die Ergebnisse von Experimenten können verschiedenartiger Natur sein. Von besonderer Wichtigkeit sind jene Experimente, deren Ergebnisse Zahlen sind. Ein solches Experiment kann als veränderliche Größe aufgefaßt werden, welche die verschiedenen Werte mit gewissen Wahrscheinlichkeiten annimmt. Beispielsweise sind die Augenzahl beim Würfeln, die Zahl der Treffer auf ein bestimmtes Ziel bei gegebenen Schießbedingungen usw. solche *Zufallsgrößen*. Bisweilen kann man auch den durch Elementarereignisse verursachten Schaden, ferner die Verluste an Soldaten in einer bevorstehenden kriegerischen Auseinandersetzung, die Ausschußquote bei einem bestimmten technologischen Prozeß usw. als Zufallsgrößen ansehen.

Den Zielen und dem Niveau der Darstellung dieses Büchleins entsprechend, beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher Zufallsgrößen, die endlich viele Werte

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

annehmen können.

Dann kann man sich jede Zufallsgröße X als System ihrer Werte und der Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Werte angenommen werden, vorstellen:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Da alle Wahrscheinlichkeiten offenbar nicht negativ sind, muß gelten:

$$p_1 \geqslant 0, \quad p_2 \geqslant 0, \quad \dots, \quad p_n \geqslant 0.$$

Da außerdem eine Zufallsgröße unbedingt einen und nur einen ihrer Werte annimmt, ist

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Eine wichtige Kennzahl einer Zufallsgröße ist ihr *Mittelwert*, gewöhnlich *mathematische Erwartung* (oder *Erwartungswert*) genannt. Der mit MX bezeichnete Mittelwert[1]) einer Zufallsgröße X ist gleich der Summe der Produkte aus den Werten der Zufallsgröße und den Wahrscheinlichkeiten dieser Werte:

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Man kann nun folgendes beweisen (diese Aussage wird ebenfalls Gesetz der großen Zahlen genannt): Ist

$$X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$$

eine Folge unabhängiger Verwirklichungen ein und desselben Experimentes X, d. h. eine Folge von Zufallsgrößen mit einer Struktur, wie sie der Ausdruck (11) aufweist, so unterscheidet sich das arithmetische Mittel der experimentell bestimmten Werte dieser Zufallsgrößen bei einer großen Zahl von Beobachtungen nur wenig vom gemeinsamen Erwartungswert:

$$\frac{1}{k}(X_1 + X_2 + \dots + X_k) \approx MX.$$

Das Zufallsmoment in Spielen

Es wurde bereits erwähnt, daß bisweilen das Verhalten von Spielern nicht nur von ihrem Willen abhängt, sondern daß auch der Zufall seinen

---

[1]) In der deutschsprachigen Literatur wird für den Erwartungswert gewöhnlich das Symbol E verwendet.

Einfluß ausübt, also den Spielausgang und damit auch die von den Spielern im Verlaufe eines Spiels zu erzielenden Gewinne beeinflußt. (Manchmal ist in einem Spiel das Zufallselement von seiten irgendeines Spielers sogar absichtlich eingebaut: diese Zufälligkeit bildet dann eben einen Bestandteil seiner Strategie. In der Spieltheorie besitzt dieser Umstand eine hervorragende Bedeutung; weiter unten werden wir ausführlich darauf eingehen.) Es sei betont, daß sich dabei eine vom Verhalten der Spieler völlig bestimmte Situation gesetzmäßig, eindeutig herausbildet. Sie selbst ist determiniert, die Gewinne der Spieler jedoch sind in einigen (oder in allen) Situationen Zufallsgrößen, d. h. veränderliche Größen, die mit dieser oder jener Wahrscheinlichkeit verschiedene Werte annehmen (vgl. den vorigen Abschnitt!).

Wir werden ferner annehmen, daß ein Spieler, der vor die Notwendigkeit gestellt ist, eine Strategie zu wählen, welche die möglichen Spielsituationen einschränkt, jene Situationen bevorzugen wird, in denen der mittlere Gewinn möglichst groß ist. Dies entspricht völlig unserer Vorstellung von dem Spieler als einem vernünftigen, kaltblütigen und vorsichtigen Menschen. Man kann allerdings die Neigung zur Vorsicht bei einem Spieler noch verstärken, indem man ihn veranlaßt, hohen Gewinnen gegenüber gleichgültig zu bleiben und hohe Verluste ängstlich zu meiden. Man kann umgekehrt aber auch annehmen, daß ein Spieler vabanque spielt, um größte Gewinne zu erzielen und dabei Verlusten, selbst verhältnismäßig hohen, gleichgültig gegenübersteht. Diese und viele andere „psychologische" Einstellungen eines Spielers zum Ausgang eines Spiels können uns, bei all ihrer Wichtigkeit, hier nicht interessieren. Wir wollen uns vielmehr auf die erste der aufgezählten Haltungen eines Spielers, nämlich die „mäßige Vorsicht" beschränken. Hierbei besteht das Ziel des ersten Spielers in einer Maximierung seines mittleren Gewinns, das seines Gegners hingegen in der Minimierung des mittleren Verlustes.

Unter dieser Annahme unterscheidet sich das Aufsuchen der optimalen Strategien in Spielen, die vom Zufall beeinflußt sind, praktisch durch nichts von der Lösung des analogen Problems in den früher untersuchten Spielen, die vom Einfluß des Zufalls frei sein sollten.

Beispiel 4. Wir wollen ein Artillerieduell eines Geschützes (Spieler 1) gegen ein anderes (Spieler 2) untersuchen, das unter folgenden besonderen Bedingungen ausgetragen wird:

Jeder der Spieler kann auf seinen Gegner nur einen einzigen Schuß abfeuern und dies außerdem nur in einem von zwei Zeitpunkten: F (=früh) und S (= spät). Falls der Spieler 1 früher als sein Gegner schießt oder gleichzeitig mit ihm, so setzt er seinen Gegner mit der Wahrscheinlichkeit, sagen wir, 0,6 außer Gefecht, wonach der Gegner nicht mehr einsatzfähig ist. Falls der Spieler 1 allerdings später als sein Gegner schießt, kann er ihn mit einer etwas größeren Wahrscheinlichkeit, beispielsweise mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 vernichten. Entsprechend soll der Spieler 2, wenn er früher als der Spieler 1 oder gleichzeitig mit ihm feuert, seinen Gegner mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 vernichten, wenn er dagegen später als jener schießt, mit der Wahrscheinlichkeit 0,8.[1]) Daß sich die Gegner durch gleichzeitiges Abfeuern der Geschütze gegenseitig vernichten, wird als Paar voneinander unabhängiger Ereignisse angesehen. Der Spieler 1 erzielt, wenn er das feindliche Geschütz vernichtet und sein eigenes behält, eine Gewinneinheit, sein Gegner aber verliert diese Einheit. In den übrigen Fällen erzielt jeder der Spielteilnehmer null Einheiten.

Die Lösung dieses Problems beginnt mit der Aufstellung der Gewinnmatrix, d. h. mit der Berechnung des Gewinns des ersten Spielers in den einzelnen Situationen.

Bezeichnen wir die Strategien des Spielers 1 mit 1_F und 1_S, die des Spielers 2 hingegen mit 2_F und 2_S, so haben wir es mit einem (2×2)-Spiel zu tun. Berechnen wir nun die Gewinne des Spielers 1 in den verschiedenen Situationen:

Situation $(1_F, 2_F)$. Dafür, daß der Spieler 1 den Gegenspieler vernichtet und dabei selbst unversehrt bleibt, ist hier mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}6 \cdot (1 - 0{,}5) = 0{,}3$ zu rechnen. In diesem Falle gewinnt er $+1$. Dafür, daß es ihm nicht gelingt, den Gegner zu vernichten und er selbst das Geschütz verliert, besteht die Wahrscheinlichkeit $(1 - 0{,}6) \cdot 0{,}5 = 0{,}2$, wobei sein Ergebnis -1 ist. In den übrigen Fällen erhält er Null. Der mittlere Gewinn des Spielers 1 in dieser Situation ist somit gleich

$$1 \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}2 = +0{,}1.$$

Situation $(1_F, 2_S)$. Falls der Spieler 1 den Gegner vernichtet (und er vermag dies mit der Wahrscheinlichkeit 0,6), gewinnt er in dieser Situation seine $+1$, womit das Spiel sein Ende findet. Verfehlt er jedoch sein Ziel (was mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 geschieht), so wird er selbst mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 abgeschossen. Folglich verliert der Spieler 1 in dieser Situation eine Einheit mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$. Der mittlere Gewinn des Spielers 1 ist in dieser Situation somit gleich

$$1 \cdot 0{,}6 + (-1) \cdot 0{,}32 = +0{,}28.$$

[1]) Die Zahlenwerte in diesem Beispiel sind völlig willkürlich gewählt.

Situation (1_S, 2_F). Der Spieler 1 gewinnt eine Einheit, wenn sein Gegenspieler danebenschießt, er selbst jedoch trifft. Das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - 0{,}5) \cdot 0{,}8 = 0{,}4$. Trifft allerdings sein Gegner, was mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 der Fall ist, so verliert er eine Einheit. In den übrigen Fällen erhält er wieder Null, und sein mittlerer Gewinn ist gleich

$$1 \cdot 0{,}4 + (-1) \cdot 0{,}5 = -0{,}1.$$

Situation (1_S, 2_S). Hier ist offenbar die Wahrscheinlichkeit jedes der Ergebnisse gleich den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in der Situation (1_F, 2_F) und der Gewinn des Spielers 1 gleich $+0{,}1$.

Die Gewinnmatrix des untersuchten Spiels hat also folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}28 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Das größte Zeilenminimum dieser Matrix ist gleich ihrem kleinsten Spaltenmaximum, und zwar $+0{,}1$. Daher ist der Wert des Spiels gleich $+0{,}1$ und die optimalen Strategien der Spieler sind 1_F und 2_F. (Es ist also möglichst früh zu schießen. Ein gewisser Vorteil des Spielers 1 über den Spieler 2 in diesem Spiel erklärt sich dadurch, daß das Ergebnis eines früheren Abfeuerns für ihn günstiger ist als für den Spieler 2.)

Spiele mit voneinander verschiedenen Maximin und Minimax (Nicht streng determinierte Spiele)

Wie schon an früherer Stelle geklärt wurde, ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Gleichgewichtszustandes (eines Sattelpunktes) in einem Matrixspiel die Gleichheit von Maximin und Minimax:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Wenn also diese Ausdrücke verschieden sind, d. h., wenn

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

ist (wir haben ja gezeigt, daß bei ungleichen Minimax und Maximin gerade diese Beziehung bestehen muß), kann das Spiel Γ keine Gleichgewichtszustände aufweisen.

Der Spieler 1 ist aber immer in der Lage, sich den Gewinn $\max_i \min_j a_{ij}$ zu sichern. Bei Gleichheit von Minimax und Maximin gewinnt der Spieler 1 also tatsächlich genau soviel, wie er in diesem Spiel überhaupt gewinnen kann. Daher bleibt ihm, wenn er diejenige Strategie wählt, die den Ausdruck $\min_j a_{ij}$ maximiert, im buchstäblichen Sinne des Wortes nichts besseres zu wünschen übrig. Sind jedoch Minimax und Maximin verschieden, bleibt also der tatsächlich garantierte Gewinn des Spielers 1 unter dem Gewinn, den er erzielen könnte, da kein grundsätzliches Hindernis existiert, so muß er natürlich irgendeine zusätzliche Möglichkeit suchen, den garantierten Gewinn zu vergrößern. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß dieses Suchen systematisiert werden kann.

Wir untersuchen zu diesem Zweck das wohl einfachste Matrixspiel, in dem Maximin und Minimax voneinander verschieden sind, nämlich das Matrixspiel

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Hier ist

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Alle bisher angestellten Überlegungen über vernünftiges Verhalten der Spieler sind also bei diesem Spiel nicht anwendbar. Dieses Spiel ist überdies ein Modell für sehr oft auftretende Erscheinungen. Wir würden uns nämlich jedesmal dann in der Lage eines Teilnehmers an einem solchen Spiel befinden, wenn wir zur Erreichung unserer Ziele zwischen zwei Verhaltensweisen wählen könnten und die uns bekannten Verhältnisse ebenfalls zweifacher Natur wären: entweder günstig für die erste Art und Weise des Verhaltens und ungünstig für die zweite oder umgekehrt. Diese Verhältnisse könnten insbesondere durch unseren Gegenspieler geschaffen werden und seine Strategien sein.

Analysieren wir ein Spiel mit der Matrix (12) am Beispiel des Zahl-Wappen-Spiels im folgender Form: Der Spieler 1 legt die Münze entweder mit der Vorderseite („Zahl") oder der Rückseite („Wappen") nach oben auf einen Tisch; der Spieler 2 hingegen, der die Lage der Münze nicht kennt, versucht zu erraten, auf welcher Seite sie liegt. Im Falle einer richtigen Antwort gewinnt der Ratende die auf dem Tisch liegende Münze, anderenfalls muß er dem Gegenspieler die gleiche Summe ausbezahlen.

Wollen wir annehmen, daß unsere Spieler dieses Match genügend lange („endlos") spielen, wobei jede ihrer Partien aus dem oben beschriebenen Spiel besteht. Welcher Taktik müssen sich die Spieler in diesem Match bedienen, um einen systematischen Gewinn zu erzielen (oder wenigstens keinen systematischen Verlust zu erleiden)?

Das primitivste Verhalten des Spielers 1 bestünde darin, daß er die Münze ausschließlich auf ein und dieselbe Seite legt. Angenommen, er würde die Münze immer mit dem Wappen nach oben auf den Tisch legen. Dann würde der Spieler 2 dies nach einigen Partien zweifellos bemerken und, wenn er stets Wappen rät, systematisch zu gewinnen beginnen. In Voraussicht der Wendung der Dinge kann nur in einem sehr beschränkten Spielergehirn der Gedanke aufkommen, es erwachse ein systematischer Gewinn, wenn die Münze immer mit dem Wappen nach oben gelegt wird; es ist klar, daß hier offenbar zwischen Zahl und Wappen irgendwie abgewechselt werden muß.

Nehmen wir jetzt an, der Spieler 1 habe sich entschlossen, die Münze bei jeder geradzahligen Partie mit dem Wappen nach oben zu legen, bei jeder ungeradzahligen dagegen mit der Zahl. Auch dann wird der Spieler 2 recht bald die Taktik seines Gegenspielers durchschauen und wieder systematisch zu gewinnen anfangen. Zu analogen Ergebnissen würde man auch kommen, wenn man annähme, daß der Spieler 1 seine Strategien zwar in irgendeiner spitzfindigeren, jedoch gesetzmäßigen Art und Weise wechseln würde.

Diese Überlegungen zeigen, daß sich der Spieler 1 beim Wechsel seiner Strategien für eine Taktik entscheiden muß, die gewährleistet, daß die Ergebnisse der vorhergegangenen Partien dem Gegner in den nachfolgenden Partien keinerlei Informationen über sein Verhalten liefern können.

Da ein wie immer gearteter systematischer Wechsel zwischen Zahl und Wappen vom Gegner nach einer genügend großen Anzahl von Partien erraten werden kann, muß das Auftreten der Zahl (des Wappens) der Münze in jeder Partie ein zufälliges Ereignis sein. Damit nun der zweite Spieler anhand seiner Beobachtungen keinerlei Informationen für die Zukunft gewinnen kann, müssen alle diese den einzelnen Partien entsprechenden Zufallsereignisse voneinander unabhängig sein.

Folglich werden wir annehmen, daß der Spieler 1 in jeder Partie mit der Wahrscheinlichkeit p die Münze mit dem Wappen nach oben legen wird. Dann wird der Spieler 2, wenn er ständig Wappen rät, mit der Wahrscheinlichkeit p richtig raten und vom ersten Spieler eine Einheit erhalten, der Spieler 1 hingegen wird mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ gewinnen. Der mittlere Gewinn des Spielers 1 ist somit gleich

$$1 \cdot (1 - p) + (-1) \cdot p = 1 - 2p. \tag{13}$$

Falls der Spieler 2 ständig Zahl raten sollte, so wäre der mittlere Gewinn des Spielers 1 je Partie gleich

$$(-1) \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = 2p - 1. \tag{14}$$

Vergleicht man die Ausdrücke (13) und (14), so sieht man, daß bei $p < \frac{1}{2}$ der Spieler 2 stets Wappen raten muß, dagegen bei $p > \frac{1}{2}$ Zahl. Das verhilft ihm im Mittel zu einem Gewinn von $\left|p - \frac{1}{2}\right|$ je Partie. Die einzige Möglichkeit, den Spieler 2 daran zu hindern, systematisch zu gewinnen, besteht für den Spieler 1 in der Wahl des Wertes $p = \frac{1}{2}$. Infolgedessen ist die einzig vernünftige Verhaltensweise für den Spieler 1 ein dem Zufallsprinzip entsprechendes Legen (Werfen) der Münze (wie es übrigens beim Zahl-Wappen-Spiel gerade praktiziert wird).

Es ist unschwer einzusehen, daß aus einem analogen Grunde der Spieler 2 ebenfalls keine bessere Methode finden kann, als zufallsbedingt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und unabhängig von Partie zu Partie Zahl oder Wappen zu raten.

Hierbei erzielt keiner der Spielteilnehmer im Mittel je Partie einen systematischen Gewinn.

Der hier anhand des Zahl-Wappen-Spiels beschriebene wahrscheinlichkeitstheoretische Lösungsweg für ein solches Problem wurde für eine ziemlich umfangreiche Klasse von Spielen schon in den zwanziger Jahren von Borel, von Neumann und Kalmár erarbeitet.[1]) In dieser Weise wurde die Spieltheorie von der Wahrscheinlichkeitstheorie durchdrungen und die enge Verbindung dieser beiden Disziplinen geschaffen.

Es leuchtet also ein, daß bei verschiedenen $\max_i \min_j a_{ij}$ und $\min_j \max_i a_{ij}$ die Heranziehung von Zufallsstrategien es jedem Spieler ermöglicht, zu seinem garantierten Gewinn einen bestimmten Teil des Differenzbetrages

$$\min_j \max_i a_{ij} - \max_i \min_j a_{ij}$$

hinzuzugewinnen.

[1]) Die Arbeit J. von Neumanns „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" findet sich in Math. Annalen *100* (1928), Seite 295—320.

In dem hier analysierten Beispiel des Zahl-Wappen-Spiels stellt sich diese Differenz als gänzlich aufgeteilt heraus. Dieser Sachverhalt ist für Matrix-Spiele typisch.

Gemischte Strategien

Betrachten wir nun die Ergebnisse einer Zufallsauswahl der Strategien durch die Spieler etwas näher.

Angenommen, wir hätten es mit einem Matrixspiel Γ zu tun, und seine Matrix sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wählt der erste Spieler seine Strategien zufällig aus, so gleicht dies einem Experiment, in dem seine Strategien (d. h. die Zeilen der Matrix A) irgendwelche Wahrscheinlichkeiten $x_1, x_2, \dots, x_m$ haben. Eine solche Zufallsauswahl ist aber ebenfalls eine Art des Verhaltens des Spielers 1, also im Grunde eine seiner Strategien. Um Strategien einer solchen Art von den ursprünglich definierten Strategien eines Spielers zu unterscheiden, nennt man sie *gemischte* Strategien. Die ursprünglich behandelten Strategien eines Spielers (d. h. die Zeilen einer Gewinnmatrix) nennt man im Gegensatz dazu *reine* Strategien.

In entsprechender Weise werden die gemischten Strategien des Spielers 2 definiert.

Da im Verlauf eines Zweipersonen-Nullsummenspiels von der Sache her die Spieler keinerlei Informationen austauschen können, muß die zufällige Wahl der Strategien durch den ersten Spieler unabhängig von der des zweiten erfolgen. Wenn daher der Spieler 1 seine i-te reine Strategie mit der Wahrscheinlichkeit x_i und der Spieler 2 seine j-te reine Strategie mit der Wahrscheinlichkeit y_j wählt, so wird die in diesem Spiel durch die Strategien 1_i und 2_j bestimmte Situation die Wahrscheinlichkeit $x_i y_j$ aufweisen.

Der Spielablauf im Spiel Γ nimmt also bei Anwendung gemischter Strategien seitens der Spieler die Gestalt eines Experimentes mit zufälligem Ausgang an, dessen Ergebnisse die Spielsituationen sind.

Dieses durch die gemischten Strategien der Spieler vollständig festgelegte Experiment mit zufälligem Ausgang nennt man *Situation bei gemischten Strategien.*

Da die Situation (X, Y) bei gemischten Strategien $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ein Experiment mit zufälligem Ausgang ist, dessen Ergebnisse wiederum Situationen bilden, denen jeweils ein genau bestimmter Gewinn zugerechnet wird, verwirklicht jede Situation bei gemischten Strategien eine zufällige Wahl einer bestimmten Zahl. Jeder Situation bei gemischten Strategien entspricht also eine bestimmte Zufallsgröße. Diese Zufallsgröße nimmt die Werte

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_1y_n, x_2y_1, \ldots, x_2y_n, \ldots, x_my_n$$

an.

Daher ist der Mittelwert dieser Zufallsgröße gleich

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1y_1 & + a_{12}x_1y_2 & + \cdots & + a_{1n}x_1y_n \\ + a_{21}x_2y_1 & + a_{22}x_2y_2 & + \cdots & + a_{2n}x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ + a_{m1}x_my_1 & + a_{m2}x_my_2 & + \cdots & + a_{mn}x_my_n . \end{array}$$

Dieser Mittelwert wird Gewinn des Spielers 1 in dem Spiel Γ bei einer Situation mit den gemischten Strategien (X, Y) genannt und in Analogie zum Gewinn in einer gewöhnlichen Situation mit $H_\Gamma(X, Y)$ bezeichnet.

Jetzt befinden wir uns wieder in einer gewohnten Lage. Der Spieler 1, der seine gemischte Strategie X auf willkürliche Weise wählt, sucht seinen Gewinn $H_\Gamma(X, Y)$ zu maximieren. Der Spieler 2, der seine gemischte Strategie Y willkürlich wählt, ist bestrebt, $H_\Gamma(X, Y)$ zu minimieren. Daher garantiert ein vernünftiges Verhalten des Spielers 1 diesem einen Gewinn, der nicht kleiner ist als

$$\max_X \min_Y H_\Gamma(X, Y), \tag{15}$$

hingegen läßt ein vernünftiges Verhalten des Spielers 2 für den Spieler 1 nur einen Gewinn zu, der nicht größer ist als

$$\min_Y \max_X H_\Gamma(X, Y). \tag{16}$$

Hier tritt aber ein bemerkenswerter Umstand zutage, der sich von unseren Überlegungen in den Abschnitten „Das Minimaxtheorem“ und „Spiele mit voneinander verschiedenen Maximin und Minimax“ grundlegend unterscheidet. *Das Maximin* (15) *und das Minimax* (16) *sind einander immer gleich.* Diese Aussage nennt man allgemein Minimax-Theorem. Auf Grund des Minimax-Theorems existieren für Matrix-Spiele bei gemischten Strategien stets Gleichgewichtszustände.

Der erste Beweis der Gleichheit des Maximin (15) mit dem Minimax (16) wurde im Jahre 1928 von John von Neumann gefunden; gegenwärtig existieren bereits ziemlich viele Beweise für diesen mathematischen Lehrsatz. Für einen Leser, der sich mit der Spieltheorie das erste Mal befaßt, ist das Studium jedes dieser Beweise eine recht schwierige Angelegenheit. Deshalb wollen wir hier auch nicht darauf eingehen.

Die grundsätzliche Bedeutung des Minimax-Theorems besteht darin, daß die obigen Überlegungen über vernünftige Verhaltensweisen der Spieler, die zu Sattelpunkten führen, bei *jedem* endlichen Zweipersonen-Nullsummenspiel anwendbar sind.

Der praktische Wert dieses Theorems ist bedeutend bescheidener. Er läuft einfach darauf hinaus, daß bei der Suche nach einem Sattelpunkt bei gemischten Strategien in jedem Matrix-Spiel Hoffnung auf Erfolg besteht. Das Minimax-Theorem selbst zeigt den Spielern in Matrix-Spielen keinen Weg zur Auffindung optimaler gemischter Strategien. Dieses Problem ist davon unabhängig und ziemlich schwierig. Gegenwärtig sind einige Lösungswege hierfür bekannt, die sich voneinander sowohl hinsichtlich der Kompliziertheit des verwendeten mathematischen Apparates als auch hinsichtlich des Ausmaßes der damit verbundenen Rechenarbeit sowie des Anwendungsbereiches unterscheiden. Außerdem gibt es eine ziemlich große Anzahl von Matrix-Spielen, für die es im Ergebnis der Anwendung dieses oder jenes speziellen Kunstgriffes gelang, optimale Strategien der Spieler zu finden.

Wir wollen jetzt annehmen, von einem der Spieler sei eine gemischte Optimalstrategie gefunden worden. Sie möge darin bestehen, daß die erste reine Strategie dieses Spielers von ihm mit der Wahrscheinlichkeit x_1 gewählt werden muß, die zweite mit der Wahrscheinlichkeit x_2 usw. Zur tatsächlichen Verwirklichung dieser gemischten Strategie muß irgendein Mechanismus geschaffen werden, der sich in sovielen Zuständen befinden kann, wie der Spieler reine Strategien hat, und der sich im Augenblick des Beobachtens mit der Wahrscheinlichkeit x_1 im ersten Zustand, mit der Wahrscheinlichkeit x_2 im zweiten usw. befindet. So kann man z. B. zur Verwirklichung einer gemischten Strategie, die mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine der reinen Strategien des Spielers ist und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine andere, eine Münze werfen und, wenn die Münze mit dem Wappen nach oben zu liegen kommt, gemäß der ersten Strategie handeln, andernfalls gemäß der zweiten.

Nun wollen wir einige Beispiele von Matrix-Spielen untersuchen, in denen die Spieler keine optimalen reinen Strategien haben. (Gemischte Optimalstrategien haben die Spieler ja auf alle Fälle!)

Beispiel 5. Ein gewisser Herr Petrow geht in Leningrad auf dem Newskij-Prospekt spazieren und sieht, daß in den Buchkiosken an allen Straßenkreuzungen eine überaus erfolgreiche Neuerscheinung des Büchermarktes verkauft wird. Petrow durchdenkt seine zwei Strategien, die darin bestehen, daß er entweder daß Buch kauft oder nicht kauft. (Es ist nämlich nicht ausgeschlossen, daß seine Frau, deren Arbeitsplatz in der Nähe eines ausgezeichneten Bücherkiosks gelegen ist, das Buch ebenfalls kauft.) Falls sich am Abend bei ihm zu Hause ein Buch befindet, so kann die Freude über dieses Ereignis mit zwei Einheiten bewertet werden. Befänden sich aber zwei derartige Bücher zu Hause, so würde der Ärger wegen des sinnlosen Kaufes eines zweiten Exemplars des gleichen Buches diese Freude auf eine einzige Einheit verringern. Falls schließlich das Buch überhaupt nicht gekauft wurde, so würde bei einer Reaktion der Frau: „Tölpel, war am Newskij und hat nicht gekauft ..." der Äger Petrows durch eine negative Größe, nämlich mit —2 Einheiten, zu bewerten sein.[1])

Somit besitzt die Natur (oder das Schicksal, wenn man will), die sich Herrn Petrow zum Werkzeug macht, gleichfalls zwei reine Strategien, und unser Petrow hat es als Spieler 1 im (2×2)-Spiel mit der Gewinnmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

zu tun.

Bei der Ermittlung des Maximins und des Minimax' stellt sich heraus, daß

$$\max_i \min_j a_{ij} = 1, \qquad \min_j \max_i a_{ij} = 2$$

ist. Das bedeutet, daß in diesem Spiel bei reinen Strategien kein Sattelpunkt existiert. Folglich müssen sich die Spieler gemischter Strategien bedienen.

Angenommen, der Spieler 1 spiele seine erste reine Strategie mit der Wahrscheinlichkeit p, seine zweite dementsprechend mit der Wahrschein-

[1]) Dieses Spiel beruht auf der Erscheinung, daß in der Sowjetunion Bücher sofort nach Erscheinen vergriffen zu sein pflegen. — *Anm. d. Übers.*

lichkeit $1 - p$. Dann ist der Gewinn, falls der Spieler 2 seine erste reine Strategie verwendet, gleich

$$1 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 - p.$$

Verwendet der Spieler 2 hingegen seine zweite reine Strategie, so ist der Gewinn des ersten Spielers gleich

$$2 \cdot p - 2 \cdot (1 - p) = 4\,p - 2.$$

Der Spieler 1 kann mit dem kleineren dieser beiden Gewinne rechnen. Wenn nun p von 0 bis 1 wächst, wächst der Gewinn $4\,p - 2$ von -2 bis $+2$, der Gewinn $2 - p$ verringert sich von 2 auf 1. Daher ist bei kleinem p

$$4\,p - 2 < 2 - p,$$

so daß $4\,p - 2$ der kleinere der beiden Gewinne ist. Das bedeutet, daß der kleinere Gewinn mit wachsendem p bis zu dem Zeitpunkt zunimmt, an dem er durch den Ausdruck $2 - p$ beschrieben wird und abzunehmen beginnt. Am Grenzpunkt, wo der Minimalgewinn am größten ist, müssen beide Gewinne einander gleich sein:

$$2 - p = 4\,p - 2.$$

Das ist für $p = \frac{4}{5}$ der Fall. Somit besteht die Optimalstrategie des Spielers 1 in der Wahl der ersten reinen Strategie mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ und der zweiten reinen Strategie mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Der Wert des Spiels ist dann gleich

$$2 - p = 2 - \frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Zur Verwirklichung seiner gemischten Optimalstrategie könnte man Petrow folgendes raten: Er soll einen alten Straßenbahnfahrschein oder beispielsweise auch einen Zehnrubelschein nehmen und die letzte Ziffer der darauf befindlichen Registriernummer feststellen. Ist diese Ziffer 0 oder 1, so soll er den Kauf unterlassen. $\left(\text{Das ereignet sich mit der Wahrscheinlichkeit von } \frac{2}{10}, \text{ d. h. } \frac{1}{5}.\right)$ In allen anderen Fällen $\left(\text{d. h. mit der Wahrscheinlichkeit } \frac{4}{5}\right)$ soll er das Buch kaufen.

Hier ist es eigentlich nicht angebracht, von einer optimalen Strategie des Spielers 2 zu sprechen. Denn dieser durch Frau Petrow verkörperte

Spieler ist in genau dem gleichen Maße wie Petrow selbst an einer familiären Freude interessiert. Es liegt somit keinesfalls in ihrem Interesse, den Gewinn des Ehemannes zu minimieren. Ihr Verhalten wird jedoch von einer Reihe von Bedingungen bestimmt, die dem vor einem Bücherkiosk grübelnden Mann unbekannt sind, und er kann annehmen, diese Bedingungen seien für ihn denkbar ungünstig.

Für den Fall, daß diese ungünstigen Bedingungen platzgreifen, sei angenommen, daß die Frau das Buch mit der Wahrscheinlichkeit q kaufen und es mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ nicht kaufen wird. Dann wird der „Verlust der Natur" beim Kauf des Buches durch Petrow im Mittel gleich

$$1 \cdot q + 2 \cdot (1 - q) = 2 - q$$

sein; kauft er das Buch jedoch nicht, so ist dieser Verlust gleich

$$2 \cdot q + (-2) \cdot (1 - q) = 4\,q - 2.$$

Durch Gleichsetzen dieser Ausdrücke erhalten wir $q = \frac{4}{5}$.

Beispiel 6. Das folgende Kinderspiel heißt „Stein — Papier — Schere". Dabei deuten zwei Spieler durch Gebärden gleichzeitig einen der drei in der Bezeichnung des Spiels aufgezählten Gegenstände an. (Hierbei dient die Faust als Symbol für den Stein, das Papier wird durch die flache Hand wiedergegeben und die Schere schließlich durch Auseinanderspreizen von Zeige- und Mittelfinger.) Falls beide Spieler die gleichen Gegenstände zeigen, ist der Gewinn eines jeden von ihnen gleich Null. In den übrigen Fällen gewinnt „Stein" gegenüber „Schere" 1 Einheit (der Stein zertrümmert die Schere) und verliert gegenüber „Papier" 1 Einheit (Papier wickelt den Stein ein). „Papier" hingegen verliert seinerseits gegenüber „Schere" 1 Einheit (die Schere schneidet das Papier). Dieses Spiel hat also folgende (3×3)-Gewinnmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß hier das Maximin und das Minimax voneinander verschieden sind. (Sie sind -1 und $+1$.) Die Spieler verfügen daher in diesem Spiel über keine optimalen reinen Strategien. Für die Lösung dieses Problems bedienen wir uns eines bereits verwendeten Verfahrens, das wir in entsprechender Weise für den Fall eines Spiels abändern, in dem für jeden einzelnen Spieler drei Strategien bestehen. Angenommen, der Spieler 1 würde seine Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten p, q und $1 - p - q$

verwenden. Dann erzielte er gegen die erste Strategie des Spielers 2 einen mittleren Gewinn von

$$0 \cdot p + (-1) \cdot q + 1 \cdot (1 - p - q) = 1 - p - 2q,$$

gegen die zweite gegnerische Strategie

$$1 \cdot p + 0 \cdot q + (-1) \cdot (1 - p - q) = 2p + q - 1$$

und schließlich gegen die dritte

$$(-1) \cdot p + 1 \cdot q + 0 \cdot (1 - p - q) = q - p.$$

Angenommen, der Spieler 2 verwende bei seiner gemischten Optimalstrategie alle drei reinen Strategien. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - p - 2q &= q - p, \\ 2p + q - 1 &= q - p. \end{aligned} \tag{17}$$

Wären die Verluste des Spielers 2 (vorausgesetzt, daß dieser seine reinen Strategien einsetzt) verschieden, so dürfte der Spieler tatsächlich genau jene Strategie (oder jene Strategien) überhaupt nicht benutzen, bei der sein Verlust am größten wäre.

Die Formeln (17) liefern uns

$$\begin{aligned} 3q &= 1 \\ 3p &= 1, \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$p = q = 1 - p - q = \frac{1}{3}.$$

Analog (nämlich auf Grund der Symmetrie der Rollen der Spieler) ergibt sich, daß auch der Spieler 2 jede seiner drei reinen Strategien mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ verwenden muß.

Der Wert des Spiels ist gleich Null.

Beispiel 7. Gesucht sind die optimalen Strategien der Spieler in einem Spiel mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da Minimax und Maximin (diese sind hier gleich $+1$ und -1) verschieden sind, muß man die Optimalstrategien der Spielteilnehmer unter den gemischten Strategien suchen.

Wir wollen wieder, wie schon an früherer Stelle, annehmen, die optimale Strategie des Spielers 1 bestehe darin, daß er die erste, zweite und dritte Matrixzeile entsprechend mit den Wahrscheinlichkeiten p, q und $1 - p - q$ wählt. Dann wird der Spieler 1, wenn der Spieler 2 die erste, zweite und dritte Matrixspalte wählt, den mittleren Gewinn

$$\begin{aligned} 2 \cdot p + (-2) \cdot q + (-1) \cdot (1 - p - q) &= 3\,p - q - 1, \\ (-2) \cdot p + 2 \cdot q + (-1) \cdot (-p - q) &= 3\,q - p - 1, \\ 1 \cdot p + 1 \cdot q + 0 \cdot (1 - p - q) &= p + q \end{aligned}$$

erzielen.

Nehmen wir an, daß der Spieler 2 in seiner optimalen Strategie alle drei reinen Strategien verwendet. Dann muß gelten

$$\begin{aligned} 3\,p - q - 1 &= p + q, \\ 3\,q - p - 1 &= p + q. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$p - q = \frac{1}{2},$$

$$q - p = \frac{1}{2},$$

was offensichtlich unmöglich ist. Falls somit der Spieler 2 seine optimale Strategie verwendet, darf er eine (und nur eine!) seiner reinen Strategien nicht verwenden:

Der Spieler 2 wird seine erste Strategie nicht verwenden, falls

$$3\,q - p - 1 = p + q, \tag{18}$$

sein Verlust aber unter den Verhältnissen der ersten Strategie größer als bei den übrigen ist. Aus (18) folgt aber

$$q = p + \frac{1}{2},$$

so daß

$$p + q = 2\,p + \frac{1}{2}$$

ist. Der Verlust unter den Verhältnissen der ersten Strategie ist jedoch

$$3\,p - q - 1 = 2\,p - \frac{1}{2},$$

also *kleiner*, was ein Widerspruch ist.

Zu einem analogen Widerspruch führt die Annahme, daß der Spieler 2 seine zweite reine Strategie nicht verwendet. Somit bleibt nur noch anzunehmen, daß der Spieler 2 seine dritte reine Strategie nicht verwendet, d. h.

$$3p - q - 1 = 3q - p - 1. \qquad (19)$$

Die Zahl $p + q$ ist aber größer als jede der beiden Seiten dieser Gleichung: Aus (19) folgt $p = q$, d. h., jede Seite von (19) ist gleich $2p - 1$, und diese Zahl ist tatsächlich kleiner als $p + q$ $(= 2p)$.

Analoge Überlegungen überzeugen uns davon, daß auch der Spieler 1 seine dritte Strategie nicht verwenden wird. Deshalb ist $1 - p - q = 0$ oder $p + q = 1$. Wegen $p = q$ erhalten wir $p = q = \frac{1}{2}$.

Daher muß der Spieler 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit seine ersten beiden Strategien verwenden. Analog muß der Spieler 2 handeln. Der Wert des Spiels ist gleich Null.

Der Begriff der Strategiendominanz

Wie wir sehen, führt schon der Übergang von Spielen, in denen die Spieler über je zwei Strategien verfügen, zu Spielen mit je drei Strategien zu ziemlich verwickelten Überlegungen. Ein weiteres Ansteigen der Anzahl der Strategien der Spieler kompliziert die Lösung eines Spiels noch weiter. Deshalb soll man jedesmal, wenn sich die Gelegenheit bietet, ein zu untersuchendes Spiel in ein anderes überführen, in dem die Spieler über eine geringere Anzahl von Strategien verfügen.

Die einfachste derartige Möglichkeit bietet sich im Falle der sogenannten *Dominanz der Strategien* an:

Man sagt, daß in einem Spiel mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die i-te Strategie des Spielers 1 über dessen k-te Strategie *dominiert*[1]), wenn

$$a_{i1} \geqslant a_{k1},\ a_{i2} \geqslant a_{k2},\ \ldots,\ a_{in} \geqslant a_{kn}$$

[1]) In diesem Zusammenhang ist auch der Ausdruck *majorisieren* gebräuchlich (vgl. J. von Neumann, O. Morgenstern: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961).

gilt (d. h., wenn die Elemente der i-ten Zeile der Gewinnmatrix nicht kleiner sind als die entsprechenden Elemente ihrer k-ten Zeile) und daß die j-te Strategie des Spielers 2 über dessen l-te Strategie dominiert, wenn

$$a_{1j} \leqslant a_{1l}, a_{2j} \leqslant a_{2l}, \ldots, a_{mj} \leqslant a_{m}$$

gilt (d. h., wenn die Elemente der j-ten Spalte der Matrix nicht größer sind als die entsprechenden Elemente ihrer l-ten Spalte).

Beispielsweise dominieren in einem Spiel mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

die erste und dritte Strategie des Spielers 1 über dessen zweite Strategie, und die erste und die zweite Strategie des Spielers 2 dominieren über dessen dritte Strategie.

Bei der Verwendung einer majorisierten Strategie kann der Spieler 1 unabhängig von dem Verhalten seines Gegners nicht mehr erzielen, als er bei der Verwendung einer dominierenden Strategie erhalten würde. Folglich kann sich sein Gewinn nur vergrößern, wenn er eine majorisierte Strategie durch eine dominierende ersetzt. Deshalb braucht der Spieler 1 seine majorisierte Strategie nicht zu benutzen, sondern kann sie behandeln, als sei sie durch die Spielregeln überhaupt nicht vorgesehen. Man braucht daher majorisierte Strategien in einem Spiel nicht zu berücksichtigen und kann die ihnen entsprechenden Zeilen der Gewinnmatrix streichen.

Aus dem gleichen Grunde darf man aus der Matrix die Spalten streichen, die den majorisierten Strategien des Spielers 2 entsprechen.

Bisweilen führt dieses Auslassen der majorisierten Strategien der Spieler zu einer schnelleren Lösung des Spiels.

Beispielsweise dominiert in einem Spiel mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

die erste Strategie des Spielers 1 über dessen dritte Strategie, so daß sich das Problem auf die Lösung eines Spiels mit der Gewinnmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

zurückführen läßt, in der wiederum jede der ersten beiden Strategien des Spielers 2 über die dritte Strategie dominiert. Deshalb kann dieses Spiel in ein Spiel mit der Gewinnmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

umgeformt werden; dieses Spiel können wir aber bereits lösen (siehe Beispiel 5!)

Spiele mit zweifach auftretendem Zufall

Im Beispiel 3 wurde ein Spiel untersucht, in dem der Zufall auf die Gewinne der Spieler einen Einfluß ausübt. In den Spielen, die in den Beispielen 5, 6 und 7 behandelt wurden, hat der Spieler selbst das Zufallselement in das Spiel einbezogen, um ein optimales Ergebnis zu erreichen. Offensichtlich muß man sich aber auch mit Spielen befassen, in denen der Zufall zweifach auftritt: sowohl unabhängig vom Willen der Spieler als auch ihrem Wunsche entsprechend.

Beispiel 8. Gesetzt den Fall, Oberst Blotto hätte wieder genau das gleiche Problem zu lösen wie in Beispiel 2, jetzt aber mit anderen Siegeserwartungen an jedem der Gebirgspässe. Wir wollen annehmen, die Wahrscheinlichkeiten für den Sieg von Oberst Blotto (Spieler 1) würden bei den verschiedenen Möglichkeiten der Verteidigung seiner Streitkräfte und der Streitkräfte des Gegners (Spieler 2) durch die folgenden Tabellen wiedergegeben:

Tabelle 1

Gebirgspaß A			
	0	1	2
0	1,0	0,0	0,0
1	1,0	0,5	0,25
2	1,0	0,75	0,5
3	1,0	0,875	0,688

Tabelle 2

Gebirgspaß B			
	0	1	2
0	1,0	0,0	0,0
1	1,0	0,75	0,563
2	1,0	0,938	0,844
3	1,0	0,984	0,949

Obwohl die Annahmen, auf denen diese Tabellen beruhen, ziemlich willkürlich sind, kann man sie exakt formulieren: Wir nehmen an, daß jede

Einheit der Streitkräfte von Oberst Blotto und seines Gegners entweder mit voller Kampfkraft eingesetzt oder gänzlich aus den Kampfhandlungen herausgehalten wird; die Kampfhandlungen an jedem der beiden Pässe bestehen aus einzelnen voneinander unabhängigen Treffen jeweils einer Einheit mit einer gegnerischen; die Wahrscheinlichkeit eines Sieges von Blotto ist bei jedem dieser Treffen an dem Gebirgspaß A gleich $\frac{1}{2}$, an dem Gebirgspaß B gleich $\frac{3}{4}$.

Die genannten Annahmen schaffen die Möglichkeit, alle in diesen Tabellen enthaltenen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Wollen wir als Beispiel die Wahrscheinlichkeit für den Sieg zweier Einheiten der Streitkräfte Blottos über eine Einheit der Streitkräfte seines Gegners am Gebirgspaß B bestimmen:

Nach den oben aufgestellten Bedingungen muß die Auseinandersetzung mit dem Kampf einer Einheit Blottos gegen die eine Einheit des angreifenden Feindes beginnen. Dieses Gefecht hat mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 einen Sieg Blottos und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 0{,}75 = 0{,}25$ Blottos Niederlage zur Folge. Im ersten Fall (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit 0,75) ist der Kampf beendet, und Blotto hält den Paß. Im zweiten Fall (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit 0,25) wirft Blotto die zweite Einheit seiner Streitkräfte in den Kampf und siegt mit der Wahrscheinlichkeit 0,75. Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Sieges für Blotto in unserer Situation am Gebirgspaß B gleich $0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}938$.

Im Unterschied zu der im Beispiel 2 beschriebenen Situation wird hier angenommen, daß das Ziel Blottos das Halten *beider* Gebirgspässe ist. Für Blotto ist es jedoch nicht absolut sicher, daß die Pässe in seiner Hand bleiben. Er betrachtet daher die Maximierung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses als ein vernünftiges Ziel seines Verhaltens. Genauso ist der Spieler 2 bestrebt, diese Wahrscheinlichkeit zu minimieren, d. h., er versucht, die Wahrscheinlichkeit für einen Durchbruch wenigstens an einem Paß zu maximieren.

Zur Aufstellung der Gewinnmatrix für das Spiel ist in folgender Weise eine Tabelle auszufüllen:

Wir wollen die Strategien Blottos, nach denen er 0, 1, 2, 3 Einheiten seiner Streitkräfte im Gebirgspaß A einsetzt, mit 1_0, 1_1, 1_2, 1_3 bezeichnen, für die Angriffe seines Gegners auf den Gebirgspaß A mit 0, 1, 2 Einheiten wollen wir die anwendbaren Strategien entsprechend mit 2_0, 2_1, 2_2 bezeichnen. Nun wollen wir nacheinander die Gewinne des Spielers 1 in jeder der zwölf möglichen Situationen berechnen.

In der Spielsituation $(1_0, 2_0)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Gebirgspaß A gehalten wird, gleich 1, und am Paß B verfügt der Spieler 1 über drei Einheiten seiner Streitkräfte gegenüber zwei Einheiten des Spielers 2. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Spielers 1 an dem Paß B und damit die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg an beiden Pässen gleich 0,949.

In den Spielsituationen $(1_0, 2_1)$ und $(1_0, 2_2)$ gelingt dem Spieler 2 der Durchbruch auf dem unverteidigten Paß ganz sicher. Der Gewinn des Spielers 1 ist in diesen Situationen daher gleich Null.

In der Situation $(1_1, 2_0)$ bleibt der Paß A in den Händen des Spielers 1, die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg am Paß B, wo zwei seiner Kampfverbände einem gleich starken Feind gegenüberstehen, ist gleich 0,844. Offensichtlich hält der Spieler 1 mit dieser Wahrscheinlichkeit auch beide Pässe.

Die Situation $(1_1, 2_1)$ bringt für den Spieler 1 am Gebirgspaß A einen Sieg mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5, am Paß B dagegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,938. Somit ist hier die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg an beiden Pässen gleich 0,469.

Die übrigen sieben Situationen werden auf analoge Weise bewertet, und wir gelangen zu folgender Matrix des Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0{,}949 & 0 & 0 \\ 0{,}844 & 0{,}469 & 0{,}250 \\ 0{,}562 & 0{,}562 & 0{,}500 \\ 0 & 0 & 0{,}984 \end{pmatrix}.$$

In dieser Matrix ist jedes Element der ersten Spalte größer als das entsprechende Element der zweiten Spalte oder zumindest diesem gleich. Deshalb wird in unserem Spiel die erste Strategie des Spielers 2 durch seine zweite Strategie majorisiert, und wir können, ohne daß der Spieler 2 hierdurch benachteiligt wird, diese seine erste Strategie aus unseren Betrachtungen ausklammern. Somit geht unser Problem jetzt in das Auffinden der Optimalstrategien der Spieler in einem (4×2)-Spiel mit der Gewinnmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}469 & 0{,}250 \\ 0{,}562 & 0{,}500 \\ 0 & 0{,}984 \end{pmatrix}$$

über.

In diesem Spiel werden wiederum die ersten beiden Strategien des Spielers 1 durch dessen dritte Strategie majorisiert, so daß sich unser Spiel schließlich auf folgendes (2×2)-Spiel reduziert:

$$\begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}500 \\ 0 & 0{,}984 \end{pmatrix}.$$

Dieses Spiel können wir schon mit einer bewährten Methode lösen: Wir lassen den Spieler 1 seine erste Strategie mit der Wahrscheinlichkeit p und seine zweite mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ spielen und setzen die damit verbundenen Gewinne einander unter der Bedingung gleich, daß der Spieler 2 entweder seine erste oder seine zweite Strategie verwendet. Das liefert uns

$$0{,}562\, p = 0{,}500\, p + 0{,}984\,(1 - p)$$

oder

$$1{,}046\, p = 0{,}984,$$

also

$$p = 0{,}938.$$

Der Wert des Spiels ist daher gleich

$$0{,}562\, p + 0\,(1 - p) = 0{,}562 \cdot 0{,}938 = 0{,}528.$$

Wir wollen nun die Optimalstrategie des Spielers 2 bestimmen. Falls er seine erste Strategie mit der Wahrscheinlichkeit q auswählt, hingegen die zweite mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$, so erhalten wir, wenn die Gewinne des Spielers 2 bei den verschiedenen Strategien des Spielers 1 gleich gesetzt werden,

$$0{,}562\, q + 0{,}5\,(1 - q) = 0{,}984\,(1 - q)$$

oder

$$1{,}046 q = 0{,}484,$$

also

$$q = 0{,}463.$$

Folglich besteht das optimale Verhalten von Oberst Blotto darin, daß er den Gebirgspaß A mit zwei seiner Einheiten mit der Wahrscheinlichkeit 0,938 und mit drei seiner Einheiten mit der Wahrscheinlichkeit 0,062 verteidigt. Falls die beschriebene Verteidigung der Pässe der Wirklichkeit entspricht und in einem tatsächlichen Feldzug mehrmals durchgeführt wird, so muß in der Regel der Gebirgspaß A mit zwei Einheiten der Streitkräfte

Blottos besetzt werden. Nur in einem Fall aus insgesamt sechzehn ist es für Blotto günstig, das Risiko auf sich zu nehmen, den Gebirgspaß B unverteidigt zu lassen. Das optimale Verhalten seines Gegners besteht darin, gegen den Gebirgspaß A zwei Einheiten mit einer etwas größeren Wahrscheinlichkeit einzusetzen als eine Einheit.

Es ist unschwer zu berechnen, daß im Vergleich zu einer ständigen Benutzung der Strategie 1_3 die Wahrscheinlichkeit eines Sieges Blottos bei optimalem Verhalten fast um 3% anwächst.

Verteidigung von n Pässen

Wir haben uns davon überzeugt, daß die praktische Lösung von Matrixspielen eine ziemlich aufwendige Angelegenheit ist. Immerhin kann jedoch jedes konkrete Matrixspiel irgendwie, sei es mit der Hand, sei es mit Hilfe von Rechenmaschinen, gelöst werden.

Wie man bei den angeführten Beispielen gesehen hat, ist die Lösung eines jeden Spiels leider ein Rechenprozeß von ganz individueller Eigenart. Es ist daher praktisch unmöglich, diesen durch eine einzige Formel zu erfassen. Von um so größerem Interesse sind daher jene Fälle, in denen die Lösung und der Wert der Spiele sich durch die eine oder andere Formel beschreiben lassen.

Wir wollen einen dieser Fälle genauer batrachten:

Beispiel 9. Angenommen, Oberst Blotto verfügt über eine einzige Kampfgruppe und muß n Gebirgspässe verteidigen (die von 1 bis n durchnumeriert seien). Sein Gegner, der ebenfalls über nur eine Einheit verfügt, kann jeden beliebigen dieser Gebirgspässe angreifen. Wir wollen unterstellen, daß der Spieler 2 einen unverteidigten Gebirgspaß ungehindert überqueren kann, hingegen an dem verteidigten Paß i ($i = 1, 2, \ldots, n$) vom Spieler 1 mit der Wahrscheinlichkeit p_i zurückgeworfen wird.

Der Gewinn wird für Blotto durch die Wahrscheinlichkeit dargestellt, mit der er den Gegner zurückweisen kann. Es versteht sich, daß die Lage von Oberst Blotto nicht beneidenswert ist, wenn es sich um eine große Zahl von Pässen handelt. Da er aber einen der Spieler der Spieltheorie verkörpert, verliert er nicht seine Kaltblütigkeit und ist bestrebt, die ihm nun einmal zur Verfügung stehenden Möglichkeiten in vernünftigster Weise zu nutzen.

Die Strategie des Spielers 1 wollen wir, wie bisher, mit 1_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, die Strategie des Spielers 2 mit 2_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnen. Die Spielmatrix hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Spiels basiert auf genau den gleichen Überlegungen wie die Lösungen der Spiele in den vorangegangenen Beispielen:

Angenommen, der Spieler 1 wähle seine gemischte Strategie

$$X = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Unabhängig davon, welche reine oder gemischte Strategie hier der Spieler 2 dann auch immer wählen würde, wird der Gewinn des Spielers 1 dabei nicht kleiner werden als

$$\min_i \frac{p_i}{n} > 0.$$

Das bedeutet, daß sich der Spieler 1, wenn er X wählt, einen positiven Gewinn sichert. Falls er statt dieser Strategie X seine optimale Strategie wählt, so sichert er sich nicht weniger, d. h. ebenfalls einen positiven Gewinn. Der Wert des Spiels ist also positiv.

Setzen wir jetzt voraus, daß eine solche optimale gemischte Strategie $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Spielers 1 existiert und daß er über eine solche reine Strategie 1_i verfügt, daß $x_i = 0$ ist.

Falls nun der Spieler 2 seine reine Strategie 2_i wählt, so erhält der Spieler 1 in der geschaffenen Situation offensichtlich null. Wenn also der Spieler 1 seine optimale Strategie spielt, kann der Wert des Spiels nicht positiv sein.

Unsere Annahme führte uns zu einem Widerspruch. Für jede optimale Strategie $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Spielers 1 ist somit jede Komponente x_i positiv, das heißt, es werden alle reinen 1_i Strategien mit positiven Wahrscheinlichkeiten gespielt.

Genauso müssen natürlich auch in einer beliebigen optimalen Strategie $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des Spielers 2 alle reinen Strategien eine positive Wahrscheinlichkeit aufweisen.

Auf Grund des Gesagten ist das tatsächliche Auffinden der optimalen Strategien der Spieler in unserem Spiel ohne Schwierigkeiten möglich.

Der Spieler 1, der an seiner Optimalstrategie X festhält, wird bei der Wahl der reinen Strategien $2_1, 2_2, \ldots, 2_n$ im Mittel die Gewinne

$$p_1x_1,\ p_2x_2,\ \ldots,\ p_nx_n$$

erzielen, die, wie leicht überprüft werden kann, jeweils gleich dem Wert des Spiels sein müssen:

$$\begin{aligned} p_1x_1 &= v, \\ p_2x_2 &= v, \\ &\ldots\ldots \\ p_nx_n &= v. \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v}{p_1}, \\ x_2 &= \frac{v}{p_2}, \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{v}{p_n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Addiert man alle diese Gleichungen, so erhält man

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right); \tag{22}$$

wegen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

folgt aus (22) schließlich

$$v = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}}.$$

Die Gleichungen (21) liefern uns somit die Werte

$$x_1 = \frac{1}{p_1\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)},$$

$$x_2 = \frac{1}{p_2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)},$$

$$x_n = \frac{1}{p_n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)}.$$

Symmetrische Überlegungen führen uns zu der optimalen Strategie des Spielers 2:

$$y_1 = \frac{1}{p_1\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)},$$

$$y_2 = \frac{1}{p_2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)}, \tag{23}$$

$$y_n = \frac{1}{p_n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)}.$$

Es zeigt sich also, daß der Spieler 1 um so häufiger auf einem bestimmten Gebirgspaß Verteidigungsstellungen beziehen muß, je geringer die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß diese Verteidigung sich als erfolgreich erweist. Auf den ersten Blick erscheint diese Aussage paradox. Sie ist jedoch keineswegs verwunderlich. Die Formeln (23) zeigen in der Tat, daß der Spieler 2 einen Gebirgspaß um so öfter angreifen muß, je größer die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs an diesem Gebirgspaß sind. Es versteht sich aber, daß der am allerwahrscheinlichsten angegriffene Paß auch am häufigsten verteidigt werden muß.

Bei der Lösung dieses Spiels lag das Hauptproblem in der Bestimmung der reinen Strategien, die in der optimalen Strategie mit einer von null verschiedenen Wahrscheinlichkeit gespielt werden (d. h. bei der Frage, welche reinen Strategien praktisch vorkommen werden). Nach der Klärung dieser Frage lief die Lösung der Aufgabe auf eine unkomplizierte Berechnung hinaus. Eine ähnliche Situation fanden wir auch bei der Untersuchung des Beispiels 7 vor. Dieser Umstand ist charakteristisch für die Lösung einer ziemlich großen Klasse von Spielern, im besonderen für die Lösung von Matrix-Spielen.

Näherungsweise Ermittlung der Optimalstrategien und des Wertes eines Spiels

Vermutlich kann sich der Leser auf Grund des in den letzten Abschnitten Gesagten schon eine Vorstellung von den Schwierigkeiten und dem Aufwand machen, die mit der Lösung eines Matrix-Spiels verbunden sind. Der Löwenanteil dieser Arbeit erweist sich jedoch häufig auf Grund folgender zwei Überlegungen als überflüssig: Erstens sind die Gewinne der Spieler in einzelnen Situationen durchaus nicht immer in Form genauer Meßwerte bestimmbar. Im Gegenteil, jede Zahl in der Gewinnmatrix ist mit einer Reihe von Fehlern behaftet, die sich bei der Ermittlung der Daten für die beobachtete Erscheinung angesammelt oder sich bei der statistischen Analyse dieser Daten eingeschlichen haben oder die sich schließlich daraus ergeben, daß bei der Konstruktion des Modells Annahmen gemacht werden, die der Mathematiker schamhaft „ganz plausibel“ nennt. Es ist klar, daß sich unter solchen Bedingungen eine übertriebene Genauigkeit bei der Bestimmung des Wertes eines Spiels und der optimalen Strategien der Spieler als ein durch nichts gerechtfertigter Luxus erweist. Zweitens hat ein unbedeutender Fehler in der Gewinnabschätzung durch einen Spieler meist keine praktisch ernst zu nehmenden Folgen; eine kleine Abweichung von der optimalen Strategie durch den Spieler zieht häufig auch eine kleine Änderung seines Gewinnes nach sich. (Dies ist allerdings nicht immer der Fall. Ein Gegenbeispiel wird schon im folgenden Abschnitt gebracht werden.)

Jede Methode zur näherungsweisen Lösung von Spielen verdient daher die aufmerksamste Beachtung. Die Spieltheorie verfügt heute über einige Methoden zur näherungsweisen Lösung von Matrix- Spielen. Hier soll die einfachste, die sogenannte *Iterationsmethode*, beschrieben werden.

Angenommen, wir hätten es mit einem Matrix-Spiel Γ mit der Gewinnmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zu tun, das sich zwischen den Spielern 1 und 2 mehrfach wiederholt; d. h., es soll sich gewissermaßen im Rahmen des Spiels Γ ein Match entwickeln, bei dem die Zahl der Partien nicht begrenzt ist. Wir wollen annehmen, daß unsere Spieler in diesem Match in folgender Weise vorgehen:

Zuerst wählt der Spieler 1 willkürlich eine nicht näher bestimmte reine Strategie aus, sagen wir mit der Nummer i_1. Aus Gründen der Einheitlichkeit wollen wir sie wie eine gemischte Strategie behandeln und mit X_1 bezeichnen. Hernach reagiert der Spieler 2, der von dieser Wahl des Spielers 1 Kenntnis erhält, auf die unter diesen Verhältnissen beste Weise, d. h., er wählt seine Strategie so, daß er die kleinste Zahl verspielt, die in der i_1-ten Zeile der Matrix A steht. Nehmen wir an, daß er somit die Strategie mit der Nummer j_1 wählen muß. (Wir wollen sie mit Y_1 bezeichnen.) Unmittelbar danach beginnt der Spieler 1, indem er nicht mehr an die Beweggründe denkt, die den Gegenspieler zur Wahl seiner Strategie veranlaßten, anzunehmen, daß dieser so verfährt, weil er sich durch gewisse eigene Beweggründe leiten läßt. Deshalb wählt der Spieler 1 seine Strategie i_2 derart, daß sein Gewinn bei Anwendung der Strategie j_1 seitens des Gegners maximiert wird. Nun ist wieder der Spieler 2 an der Reihe. Dieser merkt sich von all dem Vorgefallenen nur, daß der Spieler 1 einmal die Strategie i_1 und einmal die Strategie i_2 anwandte, und gelangt zu dem Schluß: Der Spieler 1 entschloß sich zur gemischten Strategie X_2, in der die Strategien i_1 und i_2 jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ aufweisen. (Natürlich können zufällig die Strategien i_1 und i_2 identisch sein. Dann müßte der Spieler 2 in diesem Augenblick den Schluß ziehen, daß der Spieler 1 bei der reinen Strategie bleibt.)

Unter Zugrundelegung dieser Annahme berechnet er nun seine mittleren Gewinne für alle seine reinen Strategien und wählt von ihnen jene aus, bei der sein Verlust minimiert wird (dies sei die Strategie mit der Nummer j_2). Dann registriert der Spieler 1, der auf genau die gleiche Weise überlegt, daß der Spieler 2 die gemischte Strategie Y_2 verwendet, und findet seinerseits eine geeignete Strategie i_3, und der Vorgang der aufeinanderfolgenden Strategiewahl seitens der Spieler setzt sich in diesem Sinne auf unbestimmte Dauer fort. Jeder Spieler zählt zu jedem Zeitpunkt die Vorkommenshäufigkeit der reinen Strategien des Gegenspielers zusammen. Indem er nun das Gesetz der großen Zahlen vollständig unkritisch anwendet, behandelt er diese Häufigkeiten der reinen Strategien als Wahrscheinlichkeiten in einer gewissen gemischten Strategie (X_n bzw. Y_n) des Gegners, von der er auch bei der Suche nach der wirksamsten Gegenmaßnahme ausgeht.

Man kann zeigen, daß mit wachsender Anzahl der Schritte des beschriebenen Vorganges die gemischten Strategien, die von den Spielern ihren Gegnern zugeschrieben werden, sich deren Optimalstrategie nähern. Diesen Vorgang des näherungsweisen Auffindens der optimalen Strategien nennt man *Iterationsprozeß* und die einzelnen aufeinanderfolgenden Schritte *Iterationen.*

Beispiel 10. Betrachten wir das uns schon geläufige Spiel mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(vgl. Beispiel 5).

In diesem Spiel kann die Berechnung der Optimalstrategien der Spieler nach der Iterationsmethode an Hand der folgenden Tabelle dargestellt werden. (Die willkürliche Wahl des Spielers 1 möge im ersten Schritt auf seine erste Strategie fallen.)

n	X_n	$j_n = 1$	$j_n = 2$	j_n	Y_n	$i_{n+1} = 1$	$i_{n+1} = 2$	i_{n+1}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$(1,\ 0)$	1	2	1	$(1,\ 0)$	1	2	2
2	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$	$1\frac{1}{2}$	0	2	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$	$1\frac{1}{2}$	0	1
3	$(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$	$1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
4	$(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4})$	$1\frac{1}{4}$	1	2	$(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4})$	$1\frac{3}{4}$	-1	1
5	$(\frac{4}{5},\ \frac{1}{5})$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{5}$	1*	$(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5})$	$1\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1
6	$(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6})$	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{4}$	1	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$	$1\frac{1}{2}$	0	1
7	$(\frac{6}{7},\ \frac{1}{7})$	$1\frac{1}{7}$	$1\frac{3}{7}$	1	$(\frac{4}{7},\ \frac{3}{7})$	$1\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1
8	$(\frac{7}{8},\ \frac{1}{8})$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	1	$(\frac{5}{8},\ \frac{3}{8})$	$1\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	1
9	$(\frac{8}{9},\ \frac{1}{9})$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{5}{9}$	1	$(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
. .	. . . .	. . .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	. .

Wir sehen, daß in den Spalten 3 und 4 der Tabelle die Gewinne des die Strategie X_n benützenden Spielers 1 stehen, falls sein Gegenspieler die eine oder andere seiner reinen Strategien verwendet. Das bedeutet, daß die

*) Hier kann der Spieler 2 mit gleichem Grund eine beliebige seiner reinen Strategien wählen. Wollen wir annehmen, daß er die erste Strategie wählt.

kleinste dieser Zahlen jenen Gewinn darstellt, den sich der Spieler 1 sichern kann, wenn er die Strategie X_n wählt. Folglich kann die kleinere der in den Spalten 3 und 4 stehenden Zahlen den Wert des Spiels nicht übersteigen.

In den Spalten 7 und 8 der Tabelle stehen andererseits die möglichen Verluste des Spielers 2, wenn dieser die Strategie Y_n verwendet. Die größte dieser Zahlen ist der Verlust des Spielers 2 im ungünstigsten Fall, und deshalb kann sie nicht kleiner sein als der Wert des Spiels.

In dieser Weise bleibt bei der Aufstellung der Tabelle der Wert des Spiels von oben und von unten her beschränkt. Falls jedoch diese Schranken übereinstimmen, kann auch der Wert des Spiels genau bestimmt werden. So erweist sich zufällig in unserem Beispiel die Strategie X_5 als optimal. Wir beachteten dies nicht und gingen zu weiteren Iterationen über.

Dieses Verfahren führt im allgemeinen außerordentlich langsam zum Ziel. Zur Ermittlung von optimalen Strategien, die den Spielern Gewinne erbringen, welche sich von den optimalen erst in der zweiten oder dritten Dezimale unterscheiden, müssen oft hunderte von Iterationen ausgeführt werden. Dabei verschlechtert sich die Konvergenz mit wachsender Zahl der Strategien der Spieler merklich. Die Iterationsmethode besitzt somit für die Lösung von Spielen nur dann praktische Bedeutung, wenn die Berechnungen auf hinreichend schnell arbeitenden Rechenanlagen ausgeführt werden können.

Unendliche Spiele

Bisher untersuchten wir Spiele, in denen jeder Spieler über endlich viele Strategien verfügte. Hier ist nicht der Ort, um philosophische Überlegungen darüber anzustellen, ob in Wirklichkeit die Anzahl der möglichen Entscheidungen, die ein Spieler treffen kann, endlich oder unendlich ist. Bei allem theoretischem Interesse, das sie verdient, würde uns diese Frage weit von der Spieltheorie wegführen. Am einfachsten nimmt man an, ein endliches Spiel sei dann ein adäquates Modell einer Erscheinung, wenn die Spieler jede ihrer Strategien von jeder anderen unterscheiden können.

Leider haben nicht alle Spiele diese Eigenschaft: Falls die Strategie des Spielers in der Wahl des Augenblicks für das Abfeuern eines Schusses besteht oder in der Wahl eines Zielpunktes oder etwa der Wahl eines Manövers eines Flugzeuges, so ist ein Spiel, das ein Modell einer solchen Erscheinung ist, genau genommen unendlich.

Die Theorie der unendlichen Zweipersonen-Nullsummenspiele (von den unendlichen Nichtnullsummenspielen ganz zu schweigen) ist trotz der ziemlich großen Forschungsarbeit, die ihr gewidmet wurde, noch bei weitem nicht in dem Maße entwickelt, wie es für praktische Anwendungen nötig ist. Während in der Theorie der Matrixspiele alle grundlegenden, prinzipiellen Fragen schon gelöst und die Bemühungen in erster Linie auf das Finden der leistungsfähigsten Lösungsmethoden gerichtet sind, ist die tatsächliche Ermittlung der optimalen Strategien eines unendlichen Spiels nicht nur ein rechentechnisches, sondern auch ein theoretisches Problem.

Bei der Analyse und Lösung unendlicher Spiele gelingt es bisweilen, sich den Umstand zunutze zu machen, daß in vielen Fällen eine unbedeutende Veränderung der Strategie zu einer ebenfalls unbedeutenden Änderung des Gewinnes eines Spielers führt. Falls dies nämlich für ein gewisses Spiel richtig ist, kann man unter allen reinen Strategien eines Spielers endlich viele solcher Strategien herausgreifen, daß sich jede Strategie in der Nähe einer der herausgegriffenen befindet. Auf diese Weise läßt sich unser unendliches Spiel angenähert durch ein endliches Spiel beschreiben.

Diese Methode läßt sich jedoch bei weitem nicht für alle Zweipersonen-Nullsummenspiele anwenden. Betrachten wir zum Beispiel ein Spiel vom sogenannten „Duelltyp". Ein solches Spiel ist das folgende:

Der Spieler 1 und der Spieler 2 bewegen sich im Verlaufe eines bestimmten Zeitintervalls aufeinander zu. Jeder von ihnen kann in jedem Moment dieses Intervalls einen einzigen Schuß auf seinen Gegner abfeuern. Die Wahrscheinlichkeit einer Verletzung des Gegners ist bekannt und wächst mit der Verringerung des Abstandes zu ihm. Es ist zu entscheiden, in welchem Augenblick es am zweckmäßigsten ist, zu schießen. Das war etwa das Problem, das Onjegin und Lenskij bei ihrem Duell empirisch zu lösen hatten.

In Spielen vom Duelltyp kann schon eine kleine Änderung der Strategie beträchtliche Folgen haben. Falls die Wahrscheinlichkeit für eine Verletzung des Gegners für jeden der Spieler bei einer bestimmten Entfernung, sagen wir, gleich 0,7 ist und der erste Spieler um eine halbe Sekunde früher schießt als der zweite, so ist tatsächlich die Wahrscheinlichkeit seines Sieges jedenfalls *nicht kleiner als* 0,7. (Ihr genauer Wert hängt von einer Reihe anderer Duellbedingungen ab.) Schießt jedoch unter eben diesen Bedingungen der erste Spieler um eine halbe Sekunde später als der zweite, *so übersteigt die Wahrscheinlichkeit seines Sieges den Wert* 0,3 *nicht.* Daher führt eine Änderung des Schießzeitpunktes von insgesamt nur einer Sekunde zu einer Änderung der Wahrscheinlichkeit eines Sieges um mehr als das Doppelte. Es leuchtet ein, daß Spiele vom Duelltyp nicht mit Hilfe der beschriebenen Methode auf endliche Spiele zurückgeführt werden können. Sie lassen sich nur durch Benutzung überaus scharfsinniger Überlegungen der modernen mathematischen Analysis behandeln.

Positionsspiele

Wenn wir alle bisher behandelten Spiele analysieren, zeigt sich, daß in jedem von ihnen die Strategien der Spieler im Grunde keinerlei individuelle Eigenschaften besitzen. Bei einem Matrix-Spiel können in der Tat weder die Bedingungen der durch das Spiel darzustellenden Erscheinung, noch ihr Inhalt, ja nicht einmal ihre Struktur wiedergegeben werden. In solchen Spielen kann man die Strategien der Spieler nur an Hand der Gewinne unterscheiden, zu denen sie führen. In Wirklichkeit besitzt eine Strategie als geplante Verhaltensweise jedoch eine Reihe von Eigenschaften, die dieser Verhaltensweise als solcher eigen sind und nicht von ihrer Zweckmäßigkeit abhängen. (Zum Beispiel verfügt Oberst Blotto, der mit drei Kampfverbänden die Gebirgspässe A und B verteidigt, über ein und dieselbe Strategie, ob nun sein Gegner zwei oder vier Einheiten einsetzen kann; ein Damengambit in einer Schach-Eröffnung ist in einer Partie eines Matches um die Weltmeisterschaft dasselbe wie in einem Turnier zwischen Anfängern usw.)

Von allen Eigenschaften der Strategien, die wir bisher ignoriert haben, wollen wir insbesondere hervorheben, daß die Strategie als Verhaltensweise eines Spielers eine zeitliche Ausdehnung aufweisen kann. Die Wahl einer Strategie darf man sich in der Tat häufig nicht als einmaliges Treffen einer Entscheidung in einem bestimmten Augenblick vorstellen, bei der Umstände und Wechselfälle der Zukunft, die einem später begegnen können, berücksichtigt werden, sondern als komplizierten Prozeß eines fortgesetzten Fassens von Teilentschlüssen, von denen jeder den vorangegangenen präzisiert. Dabei kann ein Spieler während des Spielprozesses Kenntnisse über getroffene und verwirklichte Entscheidungen des Gegners sowie über Ergebnisse auf Grund des Eingreifens von Zufallsfaktoren erlangen. Ein Spieler kann im Verlauf eines Spiels aber auch Information verlieren, indem er diese oder jene Fakten vergißt, die für den Spielverlauf wesentlich sind. Eine derartige „Vergeßlichkeit" muß nicht der Zerstreutheit oder anderen menschlichen Schwächen eines Spielers zugeschrieben werden, obwohl auch mit diesen nicht selten zu rechnen ist. Gewöhnlich spiegelt in der Spieltheorie der Mangel an Kenntnissen eines Spielers über seine vergangenen Handlungen nur jenen Umstand wider, daß der „Spieler" aus mehreren Personen oder Kollektiven besteht, die während des Spielablaufs nicht miteinander in Verbindung stehen, so daß ein Mitglied einer solchen Koalition gar nicht zu wissen braucht, welche Handlungen sein Mitspieler ausgeführt hat. Er muß sich außerdem vor Augen halten, daß er jede Information in einer festgesetzten Ordnung aufbewahren muß, die er sich ebenfalls zu merken hat und deren Umfang beschränkt ist.

Das Bestreben, in der Spieltheorie die Seiten der Erscheinungen im Modell nachzubilden, führte zur Schaffung und Entwicklung jener Zweige der Theorie, die auf der Untersuchung der Spiele insbesondere vom Standpunkt der Individualisierung der Strategien der Spieler und ihrer schrittweisen Verwirklichung während des Spielablaufes beruhen.

Charakteristische Beispiele von Spielen eines solchen Typus sind das Schach- und das Damespiel. Für uns sind jetzt in diesen Spielen folgende Eigenschaften wesentlich: Erstens besteht jede Partie eines solchen Spiels aus einer Aufeinanderfolge von Positionen, wobei in jeder Position bekannt ist, welcher Spieler am Zuge ist. Zweitens gibt es in jeder Position eine bestimmte Menge von Zügen, die in dieser Position durch die Spielregeln zugelassen sind, wobei jeder von diesen Zügen eine gegebene Position in eine andere Position überführt. Drittens werden einzelne Positionen als endgültig erklärt. Und viertens schließlich erzielen die Spieler in jeder Endposition ihre Gewinne. $\left(\text{Bei Schach und Dame sind sie gewöhnlich gleich den Zahlen } 0,\, 1 \text{ oder } \frac{1}{2}.\right)$ Für einen nörglerischen Schachspieler sei bemerkt, daß die Ankündigung eines Remis (= Unentschieden) durch einen Spieler, der die Möglichkeit hat, ewiges Schach zu bieten oder dreimal dieselbe Position herbeizuführen, als spezieller Zug angesehen werden kann, der zu einer Endposition führt. Dagegen brauchen wir das Aufgeben einer Partie oder das Anbieten eines Remis hier überhaupt nicht zu betrachten, da sowohl das eine als auch das andere die Überzeugung wiedergibt, daß eine endgültige Verlust- oder Remisposition eintreten wird. Wenn man will, kann man diese Handlungen als Zuendespielen einer Partie in Gedanken ansehen.

Zu den auf einem Schachbrett gespielten Spielen gehört auch das alte Kinderspiel „Wolf und Schafe“ und das sich in letzter Zeit in Leningrad wachsender Beliebtheit erfreuende „Kusi-kusi“Spiel[1]).

Alle diese Spiele, die in ihrem Stil und in ihrem Schwierigkeitsgrad überaus verschieden sind, haben eine bemerkenswerte Eigenschaft gemeinsam: Jeder Spieler besitzt in diesen Spielen reine optimale Strategien. Das heißt, daß in diesen Spielen entweder einer von den Spielern die Möglichkeit hat (im Prinzip, versteht sich), den Gewinn schon in der Anfangsposition zu erzwingen, oder daß jede Maßnahme eines Spielers in einem solchen Maße durch eine erfolgreiche Gegenmaßnahme des anderen paralysiert werden kann, daß die Partie unvermeidlich unentschieden endet. Diese Tatsache wurde, was das Schachspiel betrifft, schon im Jahre 1911 von dem berühmten Mathematiker Ernst Zermelo bewiesen und ist historisch gesehen die erste Aussage der mathematischen Spieltheorie[2]). Zermelo setzte auseinander, daß die Ursache dieser Vorherbestimmbarkeit des Ausgangs von Schachpartien ausschließlich bei jenem scheinbar harmlosen Umstand liegt, daß im Ablauf einer Schachpartie die Spieler jede Position beobachten können. Obwohl solche Gewinn- oder Remisalgorithmen für das Schachspiel sicher existieren, ist es bis heute noch niemandem gelungen, diese auch zu finden, und in Anbetracht der riesigen Zahl an möglichen Varianten, die bei Schachpartien auftreten können, wird die Geschichte der nächsten Zeit hier wohl kaum über ein Gelingen berichten können. Denn jeder Spieler kann wohl beim Spielverlauf die Positionen genau „beobachten“, er ist aber nicht in der Lage, sie auch zu „durchschauen“, d. h., sich alle in ihnen enthaltenen Möglichkeiten bis zum Ende vorzustellen.

Zermelo formulierte seine Aussagen unter Bezugnahme auf das Schachspiel. Er selbst wies jedoch darauf hin — und seine Überlegungen führen zu diesem Schluß —, daß der Ausgang des Spiels nicht nur für das Schach, sondern für alle jene Spiele eindeutig bestimmt ist, in denen die Spieler in

---

[1]) Die Spielregeln des „Kusi-kusi“-Spiels sind höchst einfach: Die Weißen stellen acht Damesteine auf die erste Horizontale, die Schwarzen dagegen auf die achte, wonach abwechselnd gezogen wird. Jeder Zug besteht aus der Bewegung eines eigenen Damesteines in der Vertikalen nach vorn oder zurück über eine beliebige Anzahl von Feldern, jedoch nur bis zu einem feindlichen Damestein. Der Spieler, der keine Möglichkeit mehr hat, den nächstfolgenden Zug auszuführen, hat verloren.

[2]) E. Zermelo: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 1912), Cambridge 1913, S. 501—504.

jedem Zeitpunkt vollständig die Position kennen, die sich herausgebildet hat. Wer als Kind gern das „Wolf und Schafe“-Spiel gespielt hat, hat vermutlich ziemlich bald eine Gewinnmethode zugunsten der „Schafe“ gefunden.

Eine Gewinnmethode für das „Kusi-kusi“-Spiel ist komplizierter, kann aber bei aufmerksamer, genauer Analyse ebenfalls gefunden werden.

Ein Beweis des Satzes von Zermelo wurde für das „Kusi-kusi“-Spiel von der in der Leningrader Staatsuniversität konstruierten Relaismaschine Kusiak geliefert. Die Maschine bestimmt für jede Position, die sich im Verlauf einer „Kusi-kusi“-Partie herausbildet, ob sie sich den Gewinn sichern kann oder bei richtigem Spiel des Gegners verlieren muß. Im ersten Fall führt sie die Partie sicher zum siegreichen Ende, im zweiten hingegen wartet sie geduldig, indem sie den Verlust der Partie so weit wie möglich hinausschiebt, ob nicht ihr Gegenspieler, ein Mensch, irgendeinen Fehler macht (und Irren ist menschlich!), um ihn dafür unerbittlich zu bestrafen.

Schließlich kommt es auch beim russischen Damespiel darauf an, ein Verfahren zu finden, das universell zum Gewinn oder universell zum Remis führt. In einem beträchtlichen Maße wird gerade durch diese Überlegungen die Verdrängung des russischen Damespiels durch das Hundertfelderspiel klar.

Der Terminus ‚Position‘ wird häufig in Verbindung mit Spielen gebraucht, die auf einem Schachbrett gespielt werden. Offenbar kann man jedoch auch beim Dominospiel, bei Kartenspielen, bei sportlichen Wettkämpfen (und überhaupt bei allen Spielen, die Modelle von länger dauernden Zweikämpfen sind) von Positionen sprechen, man kann von Zügen sprechen, die eine Position in eine andere überführen, von Endpositionen usw. Deshalb werden alle Spiele dieses Typus unter der gemeinsamen Bezeichnung *Positionsspiele* zusammengefaßt.

Die Züge in Positionsspielen werden nicht immer dem Willen des Spielers entsprechend ausgeführt. Bisweilen spielt beim Übergang von einer Position in eine andere auch der Zufall eine Rolle. Zu dieser Art von „zufälligen Zügen“ gehören das Kartengeben, die Verteilung der Dominosteine, die Auslosung bei Turnieren (wobei ein Turnier als Spiel mit mehreren Teilnehmern angesehen wird) oder beispielsweise der Torschuß eines Fußballspielers, der, wie übrigens jeder andere Schuß auch, sein Ziel nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erreicht. Die Regeln jedes Positionsspiels müssen festlegen, in welchem Maße ein sich in einer bestimmten Position befindender Spieler die Ergebnisse der Handlungen der anderen Spieler und die Resultate des Hinzutretens von Zufallsfaktoren in das Spiel kennt sowie die Resultate seiner eigenen Handlungen in den vorangegangenen Etappen des Spiels. Kurz gesagt, der Spieler muß in jedem Augenblick des Spiels wissen, inwieweit ihm die von ihm eingenommene Position bekannt ist, von welcher Art die Menge der Positionen ist, in die er bestimmt kommen wird, wenn er schon nicht imstande ist, seine Situation genauer festzustellen. Diese Menge, die die Information des Spielers über die Sachlage im Spiel in einem Moment charakterisiert, heißt *Informationsmenge.*

Der Begriff der Informationsmenge soll am Beispiel eines Dominospiels illustriert werden, in dem die Partner 1A und 1B gegen 2A und 2B spielen. Wir nehmen an, daß sich gegen Ende der Partie beim Zug von 2B folgende Position herausgebildet hat: Die ausgelegte Kette der Steine endet auf Felder mit einem bzw. zwei Punkten, und 2B hat die Steine 1 : 1 und 1 : 2 in Händen. Wenn sich 2B die aneinandergelegte Kette der Steine ansieht, kann er sagen, daß die übrigen um den Tisch sitzenden Spieler je einen Stein mit den Punktzahlen 2 : 2, 3 : 3 und 4 : 4 haben. Da im Verlauf dieser Partie keiner der Spielenden seine Steine sämtlich los wurde, verfügt 2B über keinerlei sichere Informationen darüber, welcher dieser Steine sich in den Händen welches Mitspielers befindet. Hier besteht die Informationsmenge im gegebenen Zeitpunkt für 2B aus sechs Positionen, je nachdem, wer die restlichen Steine besitzt:

	1	2	3	4	5	6
1A	2 : 2	2 : 2	3 : 3	3 : 3	4 : 4	4 : 4
1B	3 : 3	4 : 4	2 : 2	4 : 4	2 : 2	3 : 3
2A	4 : 4	3 : 3	4 : 4	2 : 2	3 : 3	2 : 2

Weil beim Schach und ähnlichen Spielen die Spieler in jedem Augenblick ihre Position genau kennen, bestehen hier die Informationsmengen aus einer einzigen Position. Solche Spiele heißen *Spiele mit vollständiger Information.* In diesen ist der Gewinn eines Spielers eindeutig durch dessen Fähigkeit bestimmt, seine optimale Strategie zu finden. In dieser Beziehung sind die Spiele mit vollständiger Information das genaue Gegenteil jener Glücksspiele, in denen der Gewinn eines Spielers ausschließlich vom „Glück", d. h. von zufälligen Ereignissen abhängt.

Ursprünglich sahen wir ein Spiel als gegeben an durch den Hinweis auf die daran teilnehmenden Spieler, die Aufzählung der Menge ihrer Strategien und die Angabe der Gewinnfunktion auf der Menge aller Situationen. Auf den ersten Blick könnte es nun scheinen, daß man die Positionsspiele irgendwie anders formulieren könne, ja daß sie sogar Spiele eines allgemeineren Typus seien. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht so. Die Positionsspiele sind Spezialfälle der früher behandelten Spiele, die nur aus Gründen der Anschaulichkeit anders beschrieben wurden. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, sich in Positionsspielen die Spieler, ihre Strategien und die Gewinnfunktionen vorzustellen.

In einem Positionsspiel besteht das Verhalten eines Spielers in der Wahl seines Zuges in jeder der Positionen, in denen er am Zuge ist. In Wirklichkeit kennt ein Spieler die Position, in der er sich befindet, nicht immer genau, sondern nur die diese Position enthaltende Informationsmenge. Deshalb muß sich der Spieler für seinen Zug entscheiden, ohne daß er seine Position genau kennt. Das bedeutet, daß der Spieler ein und dieselbe Fortsetzung für alle Positionen einer Informationsmenge wählt. Daher kann man von den Zügen in einer gegebenen Informationsmenge sprechen. Diese Züge heißen in der Spieltheorie *Alternativen.*

Bei unserem Dominospiel z. B. verfügt der Spieler 2 (wir erinnern uns, daß dort der Spieler 2 aus zwei natürlichen Personen, 2A und 2B, besteht; hier handelt gerade der Partner 2B) unter den Bedingungen der oben beschriebenen Informationsmenge über drei Alternativen:

1) Er kann den Stein 1 : 2 mit dem einen Punkt an die Kette anlegen.
2) Er kann diesen Stein mit den zwei Punkten an die Kette anlegen.
3) Er kann den Stein 1 : 1 anlegen.

Bei der Wahl der ersten und dritten Alternative gewinnt der Spieler 2 nur dann, wenn die Position Nr. 4 oder die Position Nr. 6 vorliegen. Bei der Wahl der zweiten Alternative forciert der Spieler 2 den Gewinn unabhängig davon, welche Position tatsächlich vorliegt. Daher ist die Strategie eines Spielers in einem Positionsspiel ein System von Vorschriften, das anzeigt, welche Alternative er in jeder Informationsmenge auszuwählen beabsichtigt.

Den Begriff der Strategie kann man am Beispiel eines „kleinen" Schachspiels erläutern, das man Problem nennt. Die Lösung eines Problems ist die Strategie jenes Spielers, dem im Problem folgende Aufgabe gestellt wird: Es sind die Züge für den Fall einer beliebigen Antwort des Gegenspielers anzugeben.

Nach der Wahl der jeweiligen Strategien seitens der Spieler bildet sich eine bestimmte Situation heraus, welche die Übergänge von jeder Position in die folgende vollständig bestimmt. Falls also zwei Schachspieler unabhängig voneinander niederschreiben, wie jeder von ihnen in jeder der auf dem Brett möglichen Positionen ziehen wird (das Schachspiel ist ja ein Spiel mit vollständiger Information, so daß jede Position auch eine Informationsmenge ist), so wird dadurch die Endposition, wie leicht zu sehen ist, eindeutig bestimmt. Wir müssen also jeder Situation die Gewinne der Spieler bei der endgültigen Position zuordnen, zu der sie führt.

Hieraus folgt, daß Schach als endliches Zweipersonen-Nullsummenspiel als Matrix-Spiel dargestellt werden kann. Natürlich ist in Anbetracht der ungeheuren Zahl von Strategien, über die die Spieler beim Schachspiel verfügen, die praktische Aufstellung einer solchen Matrix unmöglich, wenn es auch ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, sich dies vorzustellen. Da beim Schachspiel die Spieler über reine optimale Strategien verfügen, weist diese Matrix einen Sattelpunkt auf.

Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie

Zum Schluß soll noch auf die praktische Anwendbarkeit der Spieltheorie eingegangen werden.

Hauptgrund für die Entstehung der Spieltheorie als wissenschaftlicher Richtung war das Bestreben, die Struktur jener Konfliktsituationen, auf die man in den verschiedensten Gebieten menschlicher Tätigkeiten stößt, exakt wiederzugeben, ihre wesentlichen Eigenschaften aufzudecken und Leitsätze für ein vernünftiges Verhalten der Konfliktteilnehmer auszuarbeiten. Daher liegen Sinn und Ziel der Spieltheorie in ihrer praktischen Anwendung. Von der praktischen Anwendbarkeit der Spieltheorie überzeugen uns zahlreiche Beispiele. Die einfachsten von ihnen wurden in diesem Büchlein angegeben. Trotzdem dürfte die Beantwortung der Frage, ob es möglich und zweckmäßig sei, für die eine oder andere konkrete Erscheinung die Spieltheorie praktisch zu benutzen, nicht immer einfach sein.

Wollen wir die Spieltheorie bei einer bestimmten uns interessierenden praktischen Frage verwenden, so müssen wir uns vor allem über die prinzipielle Möglichkeit einer solchen Anwendung Rechenschaft geben. Nehmen wir beispielsweise an, daß wir den für uns günstigsten Wert einer gewissen Größe ermitteln wollen (etwa den größten ökonomischen Wirkungsgrad einer gegebenen Maßnahme, den größten Prozentsatz an Qualitätserzeugnissen, die bei einer bestimmten Produktionslage auf den Markt gelangen, die kleinste Wahrscheinlichkeit einer Beschädigung oder Havarie usw.). Dabei seien uns alle Faktoren, von denen die gegebene Größe abhängt, bekannt oder aber sie mögen sich durch uns kontrollieren lassen. Offensichtlich ist in diesem Falle eine Anwendung der Spieltheorie sinnlos. Hier haben wir es nur mit einem einzigen an der Erscheinung Beteiligten zu tun, der seine vollständig bestimmten Interessen verwirklichen will und kann. Bei all der Wichtigkeit solcher Aufgaben und bei allen mathematischen Schwierigkeiten, die bei ihrer Lösung auftreten können, haben sie mit spieltheoretischen Aufgabenstellungen wenig gemein.

Ehe man über die Anwendbarkeit der Spieltheorie zur Untersuchung bestimmter Erscheinungen spricht, muß man sich also darüber klar werden, ob dabei wenigstens zwei Beteiligte mit verschiedenen Interessen auftreten, die durch ihr Verhalten nach einer Verwirklichung dieser Interessen trachten können. Erst nachdem solche Beteiligte gefunden sind und ihre Interessen (wenigstens qualitativ oder in allgemeinsten Zügen) festgelegt sind, kann die Frage einer Anwendung spieltheoretischer Methoden bei der Untersuchung dieser Erscheinungen sinnvoll aufgeworfen werden.

Selbstverständlich kann ein und dieselbe Erscheinung bei verschiedenartigem Herangehen modellmäßig verschieden erfaßt werden: So kann etwa die Zahl der an einem Spiel Beteiligten von der Konstruktion eines solchen Modells abhängen. Der Kampf eines Arztes mit einer Krankheit kann beispielsweise in erster Näherung als Zweipersonen-Nullsummenspiel gegen Naturkräfte aufgefaßt werden. Bei genauerem Herangehen an die Frage kann es sich jedoch als notwendig erweisen, in die Überlegungen noch einen dritten Spieler, den Patienten, einzubeziehen, dessen tatsächliche Interessen sich nicht immer mit den Interessen des Arztes zu decken brauchen. (Manche Behandlungsmethoden können sich bei einem bestimmten Kranken als schädlich erweisen, was der Arzt nicht zu wissen braucht usw.) Ein Geisteskranker wiederum, der sich gesund fühlt, kann jeder Behandlung auch aktiv entgegenwirken. Schließlich können die Interessen des Arztes, der diese oder jene Parameter zu maximieren sucht, die die Gesundheit des Patienten charakterisieren, mit den Interessen des Kranken in Widerspruch geraten, falls der Kranke bestrebt ist, die medizinische Behandlungsdauer zu minimieren, um möglichst bald wieder in den Arbeitsprozeß eingegliedert werden zu können.

Gilt es, in der Landwirtschaft eine Maßnahme zur Schädlingsbekämpfung auszuarbeiten, kann man die Untersuchung des Spiels auf Mensch gegen Schädling beschränken. Außerdem kann man bei der Erforschung biologischer Bekämpfungsmittel auch die Hinzuziehung anderer Spielteilnehmer erwägen: andere biologische Aspekte, die dem Menschen im Kampf mit seinem Hauptfeind helfen oder ihn dabei stören.

Bei der spieltheoretischen Interpretation eines Gerichtsprozesses können wir diesen als Zweipersonenspiel auffassen: Anklage und Verteidigung oder Kläger und Beklagter. Allerdings ist es manchmal zweckmäßig, auch einige Zeugen als Spieler aufzunehmen, weil nicht jeder Mensch dazu fähig ist, die ihm bekannten Tatsachen „sine ira et studio" zum Ausdruck zu bringen.

Bei der Konstruktion eines spieltheoretischen Modells jedes konkreten Kampfes müssen wir also genau wissen, welche Konfliktteilnehmer uns gerade interessieren. Nach der Festlegung der Spielteilnehmer müssen wir klarstellen, was unter einer Strategie des einen oder anderen Spielers zu verstehen ist. Eine Strategie braucht ja nicht nur das Verhalten eines Spielers im Spiel selbst zu betreffen, sondern kann auch den vorher aufgestellten Plan dieses Verhaltens umfassen. So bildet im Zusammenhang mit dem Militärwesen die Ausrüstung mit irgendeiner Waffenart einen Bestandteil der Strategie. Selbst die Bedienungsanleitung für den praktischen Einsatz dieser Waffe kann zu den Elementen der Strategie gezählt werden. In die Strategie können selbst Instruktionen über die Ausbildung der Kader einbezogen werden, die mit dieser Technik umzugehen haben, usw.

Auf dem Produktionssektor brauchen die Strategien eines Gütekontrolleurs, der die Ausschußquoten zu überwachen hat, nicht nur aus Annahme oder Ablehnung einer Warenpartie auf der Grundlage von Stichproben zu bestehen, sondern können auch einige Eingriffe in den Gang der Produktion umfassen.

Obwohl die aufgezählten Probleme aufmerksame Beachtung erfordern, haben sie qualitativen Charakter und sind deshalb in der Regel ohne Schwierigkeiten lösbar.

Ein völlig anderes Bild bietet sich bei der Konstruktion eines Spiels im Zusammenhang mit der Bestimmung der Gewinnfunktionen der Spieler. Diese Frage ist außerordentlich schwierig. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß sie unmöglich allein mit den Mitteln der Mathematik gelöst werden kann (daß es Fragen gibt, die über ihren Zuständigkeitsbereich hinausgehen, darf aber nicht als Schwäche der Mathematik gedeutet werden!), sondern die Hinzuziehung einer großen Anzahl höchst konkreter Überlegungen erfordert.

So ist es bei der Untersuchung verschiedener Methoden zur Schädlingsbekämpfung in der Landwirtschaft notwendig, sich über den Aufwand, der mit der Anwendung dieser Methoden verbunden ist, sowie über den endgültigen Effekt ein klares Bild zu machen. Diese Daten kann man nur aus Experimenten der landwirtschaftlichen Praxis erhalten.

Der Wert einer Gewinnfunktion bei Spielen, die Probleme aus dem Militärwesen betreffen, wird auf der Grundlage einer statistischen Auswertung der Verluste beim Kampf in einem analogen Fall und der zahlenmäßigen Bewertung der Wichtigkeit der zu erobernden oder zu verteidigenden Objekte bestimmt.

Die Gewinnfunktionen in Spielen, welche technische Produktionskontrolle abbilden, kann man ermitteln, wenn man den mit der Produktionskontrolle verbundenen Aufwand kennt: etwa den Schaden, wenn der Ausschuß nicht ausgemerzt wird, und die Verluste, die auftreten, wenn Maschinen ausfallen, weil der Gütekontrolleur eine über der Toleranzgrenze liegende Ausschußquote festgestellt hat. Diese Aufwendungen und Verluste können nur durch sehr qualifizierte betriebswirtschaftliche Berechnungen ermittelt und gegenübergestellt werden.

Was wir hier gesagt haben, macht bis zu einem gewissen Grad verständlich, warum die Methoden und Ergebnisse der Spieltheorie zur Zeit noch ziemlich langsam in die Praxis eindringen, obwohl die prinzipielle Möglichkeit eines solchen Eindringens in vielen Fällen offensichtlich und fast allgemein anerkannt ist. Die Verwirklichung der mit dem Einsatz der Spieltheorie verbundenen Möglichkeiten würde aber auch dort auf optimale Weise zu handeln gestatten, wo bis jetzt noch Entscheidungen überwiegen, die auf der Intuition, dem sogenannten „gesunden Menschenverstand“, ja oft sogar auf Vorurteilen beruhen.

Termini der Spieltheorie

deutsch (alphabetisch geordnet) — englisch — russisch

Alternative — alternative — альтернатива

Auszahlungsfunktion (= Gewinnfunktion) — payoff function — функция выигрыша

Auszahlungsmatrix (= Gewinnmatrix) — payoff matrix — матрица выигрышей

Blotto-Spiele — Blotto-games — Блотто-игры

gemischte Strategie — mixed strategy (= randomized strategy) — смешанная стратегия

Gleichgewichtszustand — equilibrium point — ситуация равновесия

Informationsmenge — information set — информационное множество

Iteration — iteration — итерация

Koalition — coalition — команда

Konvergenz — convergence — сходимость

Lösung — solution — решение

Matrix-Spiel — matrix game — матричная игра

Maximin — maximin — максимин

Minimax — minimax — минимакс

optimal — optimal — оптимальный

Partie — play — партия

Positionsspiel — position game — позиционная игра

reine Strategie — pure strategy — чистый стратегия

Sattelpunkt — saddle point (= specially strictly determined game) — седловая точка

Spielregeln — rules of the game — правила игры

Stichprobe — sample — выборочная проверка (= выборочная проба)

Strategie — strategy — стратегия

Strategiendominanz (= Majorisierung) — domination — доминирование

Theorie der strategischen Spiele — theory of games — теория игр

vollständige Information — perfect information — игры с полной информацией

Wahl — choice — выбор

Wert des Spiels — value of the game — значение игры

Zug — move — ход

Zweipersonen-Nullsummenspiele — zero-sum two-person games (= strictly competitive games) — антагонистические игры (= игры с нулевой суммой, нулевые игры)

Namen- und Sachverzeichnis