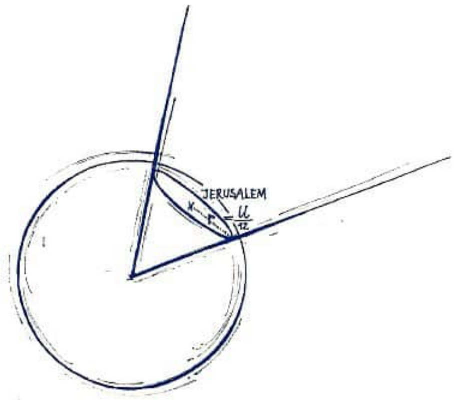
1 Keplers Hobby

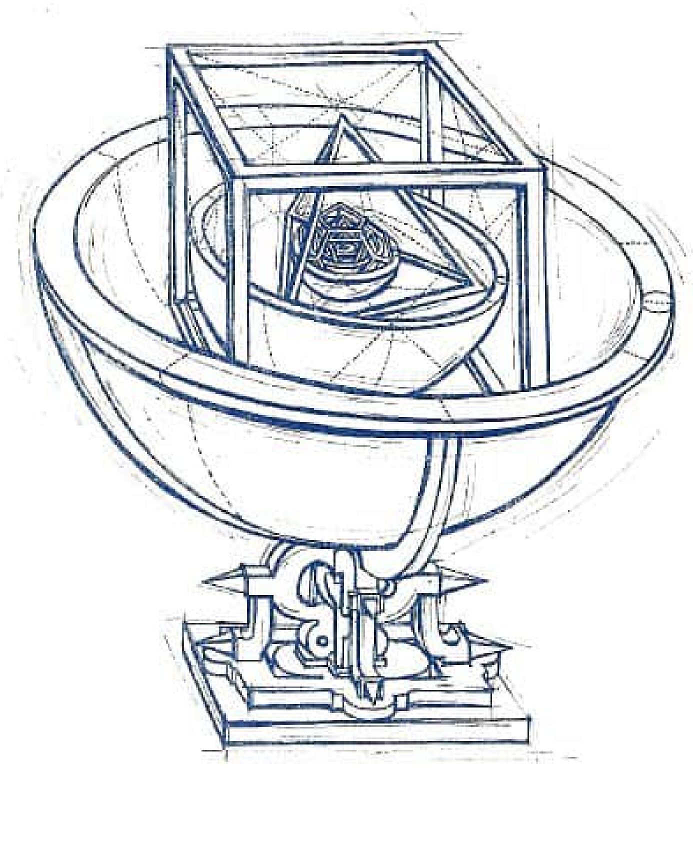
Um Keplers Leistungen gebührend zu würdigen, muss man sich den geistigen Tiefstand seiner Epoche vergegenwärtigen.
Am eindruckvollsten gelingt das an Hand der geradezu grotesk anmutenden Vorlesung seines Zeitgenossen und Brieffreundes Galilei, die dieser im Wintersemester 1587/88 an der Universität zu Pisa hielt. Auf Dante fußend bestimmte er doch allen Ernstes Ort und Gestalt der Unterwelt folgendermaßen:



Wenn man um Jerusalem einen Kreis vom Radius $\frac{1}{12}$ Erdumfang oder rund 3333 Kilometer schlägt und darüber einen Kegel mit der Spitze im Erdmittelpunkt errichtet, hat man die Hölle untergebracht. Auch die Größe des Höllenfürsten wurde von Galilei errechnet.
Während Dante bloß 3 Armlängen groß war, sollte Luzifer die stattliche Höhe von 2000 Armlängen besitzen. Beachtlich, vor allem der ganze Unfug, den der reife Galilei bestimmt als Jugendtorheit abtat, die er 24jährig beging.

So wie das Hobby des 24jährigen Galilei die Hölle war, war es für den 25jährigen Kepler der Himmel. In diesem Alter erschien sein "Mysterium cosmographicum" , das "Weltgeheimnis" , das bei seinem damaligen Vorgehen ewiges Geheimnis geblieben wäre.
Durch seinen Lehrer Maestlin in Tübingen lernte er das kopernikanische Weltbild kennen, insbesondere, dass sich die damals allein bekannten sieben Planeten in exzentrischen Kreisen um die Sonne bewegen. Der jugendliche Kepler erdachte dafür ein Modell, das vielleicht genial, aber bestimmt falsch war.

Wie auf dem Titelblatt seines Werkes zu ersehen ist, wurden Hohlkugeln den fünf regulären Körpern ein- und umgeschrieben, und zwar so, dass die Hohlkugeln und die regulären Körper abwechselnd ineinandergestellt waren. Die Dichte der Wandung der einzelnen Hohlkugeln wurde so gewählt, dass die entsprechende Planetenbahn gerade hineinpasste.

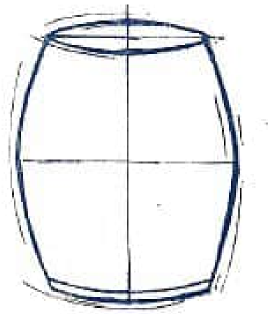


Beim Merkur wollte und wollte das nicht gelingen, so dass Kepler sein Prinzip "korrigieren" musste. Trotzdem hielt er an seiner Konstruktion fest, ja er nahm sie sehr lange Zeit übertrieben ernst. Doch sollte man Kepler dafür nicht allzu streng rügen, denn anderen erging es ähnlich.

Der Philosoph Hegel hat sich mehr als zweihundert Jahre später in Jena mit einer Arbeit habilitiert, in der er glaubte bewiesen zu haben, dass es nicht mehr als sieben Planeten geben kann, und die Astronomen tadelte, weil diese nach weiteren suchten.

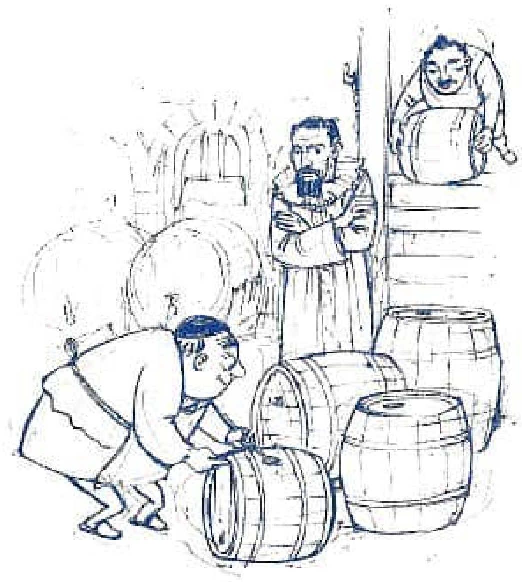
Ganz anders sind die späteren Arbeiten von Kepler zu werten. Eine rein mathematische Schrift, mit der wir beginnen wollen, die "Inhaltslehre von Fässern" enthält Betrachtungen, die zwar nicht streng sind, aber zahlreiche wertvolle Anregungen zur Höheren Mathematik darstellen. Die Schrift geht über die Behandlung der Rauminhalte von Umdrehungskörpern weit hinaus.

Wie Kepler auf solche Betrachtungen verfiel, berichtet er 1614:



"Als ich im November des letzten Jahres meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorgenden Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trank zu besorgen.

Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tag der Verkäufer mit einer Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung, ihrem Inhalt nach bestimmte.



Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fass.
Ich wunderte mich, dass die Querlinie durch die Fasshälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Fass mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen.

Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen."

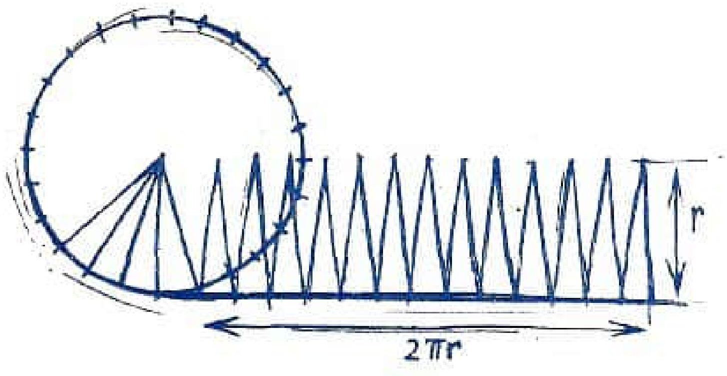
Somit diente Kepler doppelt, einmal seiner jungen Frau und zum anderen der Mathematik.

Gleich zu Anfang stellte er Überlegungen an, bei denen er sich auf Archimedes beruft, bei dem sie aber nicht stehen und auch nicht stehen können, weil sie Perlen keplerscher Erfindungsgabe sind.
Der gehässige Guldin will davon nur soviel wahrhaben, dass: "Kepler zwar den Archimedes

zitiert, wenn man aber dessen beide Bücher über die Kugel und den Zylinder durchblättert, so findet man darin nichts davon.” Leider sind solche ungerechten Anwürfe kein Einzelfall.

Um einen historischen Zugang zu den genannten Überlegungen zu finden, beginnen wir (frei nach der Bibel) am besten so:
Am Anfang war auch diesmal das Wort. Es hieß indivisibile, unteilbar, und wurde vom nachmaligen Erzbischof von Canterbury, Bradwardine, im vierzehnten Jahrhundert geprägt. In seinen Schriften sucht man freilich vergeblich nach einer genauen Erklärung, trotzdem er Doctor profundus hieß. Damals war man im Verteilen solcher Ehrentitel freigebig und nannte, um nur zwei weitere Beispiele anzuführen, Thomas von Aquino Doctor universalis und Raimundus Lullus, der die Erfindung einer Denkmaschine anstrebte, ohne selber vernünftig gedacht zu haben, Doctor illuminatus.
Man muss an Indianer denken, die ihre Häuptlinge ehedem ”Großer Bär” oder ”Mächtiger Büffel” tauften.

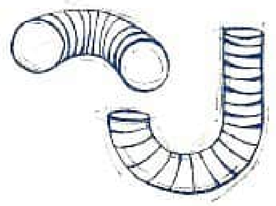
Suggestiver war es, von unendlich kleinen Größen zu reden, obschon diese einen ebenso wenig präzisen Sinn hatten wie die unteilbaren Größen des seligen Erzbischofs. Leider wird das auch heute noch übersehen, denn selbst in den besten Büchern über Mechanik werden virtuelle Verschiebungen als unendlich kleine Größen angesprochen, die es aber in der euklidischen Geometrie gar nicht geben kann.
Ihre Verwendung führte jedoch zu bedeutenden Erfolgen, mitunter freilich auch zu Misserfolgen, während die Höhere Mathematik, wie sie uns heute zu Gebote steht, nur Erfolge kennt. Allerdings wirkt sie recht nüchtern im Vergleich zum phantasievollen Voranstürmen ihrer Pioniere.



Genehmigen wir uns einige Kostproben keplerscher Erfindungskunst.
Man denke sich den Kreis in schmale Sektoren zerschnitten und diese zu einer Geraden ausgestreckt.
Es entsteht so ein kammförmiges Gebilde. Vermehrt man die Anzahl der Zacken ins Ungemessene, bis sie unendlich schmal ausfallen, dann bilden sie schließlich regelrechte Dreiecke, die über einer Strecke von der Länge des Kreisumfanges aufgebaut sind.

Die Lücken zwischen den einzelnen Zacken sind selbst zackenförmig und ergänzen den Kamm zu einem Rechteck von der Höhe des Kreishalbmessers. Die Fläche, die der Kamm selber einnimmt, beträgt die Hälfte der Rechtecksfläche.
Das führt unmittelbar auf die Formel für die Kreisfläche, zu der ja der Kamm wieder aufgerollt werden kann. Die Formel für den Umfang des Kreises wurde stillschweigend als bekannt vorausgesetzt.

Ein zweites Husarenstück bildet die Überlegung, mit der das Volumen eines Ringes, des Torus, bestimmt wird.
Der Ring werde durch senkrechte Ebenen, die strahlenförmig vom Mittelpunkt ausgehen, in dünne Scheiben geschnitten. Diese Scheiben fallen außen etwas dicker aus als innen.



Werden sie durch Anbringen von immer mehr Schnittebenen unendlich dünn, dann können sie durch überall gleich dicke Scheibchen ersetzt werden, denn was diesen außen an Dicke fehlt, haben sie innen zu viel. Sie können aufeinander getürmt werden und bilden dann einen Zylinder von einer Höhe, die dem Umfang der Mittellinie des Ringes gleich ist. Den Durchmesser des Zylinders bestimmt dagegen die Ringdicke.

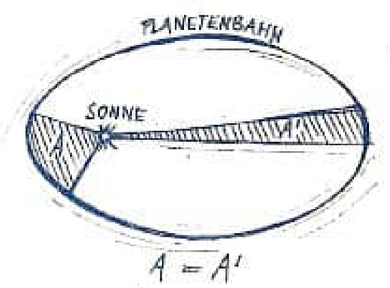
Die Bedeutung der "Inhaltslehre von Fässern" würdigte Laplace 1821 mit den Worten: "Kepler entwickelt in diesem Werk Auffassungen über das Unendliche, welche die Revolution der Geometrie gegen Ende des 17. Jahrhunderts beeinflussten; Fermat aber, den man als den eigentlichen Begründer der Differentialrechnung anzusehen hat, gründete seine schöne Methode, Extremwerte zu bestimmen, auf dieses Werk."

Ursprünglich wollte ja Kepler nur seinen Vorsatz ausführen und feststellen, wie weit die Messrute richtige Werte für die verschiedenen Fassinhalte liefern konnte. Die Lösung fand er in drei Tagen. Sie nahm sechs Seiten ein. Trotzdem fand er keinen Verleger dafür, so bekannt er auch schon damals war.

Damit blieb ihm nichts anderes übrig, als die inzwischen auf das Vielfache seines ursprünglichen Umfanges angewachsene Schrift auf eigene Kosten drucken zu lassen. Die Schrift erschien bei Plank, der eben eine Druckerei in Linz eröffnete, als dessen erster Druck.

Um die Leistungen von Kepler in der Astronomie zu würdigen, müssen wir etwas zurückgreifen. Die Zeiten, in denen er lebte, beherrschte noch die Inquisition, und so gab es Verfolgungen Andersgläubiger. Wegen einer Protestantenverfolgung musste Kepler Graz 1600 verlassen und wurde Adlatus von Tycho Brahe in Prag, dann ein Jahr später, nach dessen Tod, sein Nachfolger.

An Hand der sehr viel genaueren Beobachtungen seines Vorgängers konnte Kepler nach jahrelangen Rechnungen in der "Neuen Astronomie" 1609 die ersten zwei der nach ihm benannten Gesetze aufstellen. Das erste Gesetz betrifft die Bahnform und lautet:
Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.



Das zweite Gesetz, Flächensatz genannt, betrifft die Bewegung in der Bahn und lautet:
Die Planeten bewegen sich so, dass die Verbindungsgerade Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Eine Folge davon ist die veränderliche Geschwindigkeit, mit der sich die Planeten bewegen; in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne.

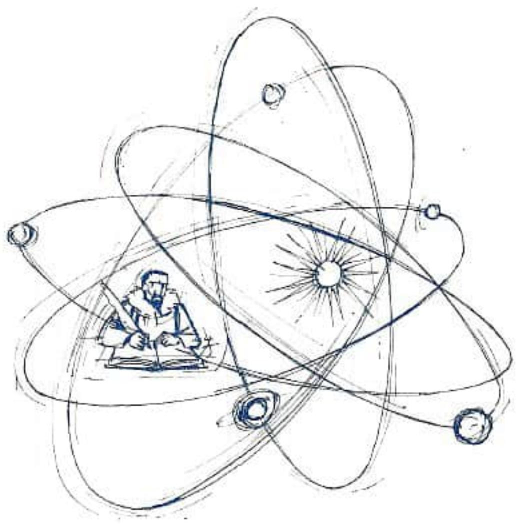
Zehn Jahre später, in den "Weltharmonien" , gelang ihm schließlich, das dritte nach ihm benannte Gesetz aufzufinden, auf der fortwährenden Suche nach dem Bau des Planetensystems, dem ja sein Erstlingswerk galt. Dieses dritte Gesetz stellt zwischen Bahngröße und Umlaufzeit eine Verbindung her und lautet:

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Wie neuartig den Zeitgenossen die Ellipsenbahnen der Wandelsterne vorkommen mussten, geht aus der Reaktion von Galilei hervor. In seiner Werbeschrift für Weltsysteme aus dem Jahr 1632, die ihm die Feindschaft des Papstes Urban VIII. und auf dessen Betreiben die Verurteilung durch die Inquisition einbrachte, nennt er Keplers Entdeckung Kinderei.
Dabei beruft er sich auf Aristoteles, der gelehrt hatte: "Es gibt keine ewige Bewegung außer der Kreisbewegung."

Das sagt derselbe Galilei, der durch seine Versuche die spekulative Mechanik des Aristoteles widerlegen konnte, ja die Physik endlich von der Dogmatik überhaupt erst säuberte! Nach allem vermochte sich Galilei doch noch nicht restlos freizudenken.

Wie gewaltig auch die Bedeutung der drei keplerschen Gesetze sein mochte, blieb daran doch unbefriedigend, dass sie nicht verrieten, warum sie gelten müssen. Diesen Grund hat erst Newton mit seinem Anziehungsgesetz aufgedeckt.



Heute können wir die drei Keplerschen Gesetze - das dritte sogar richtiggestellt, was für die Praxis allerdings nicht allzu viel bedeutet - aus der Formel für die Anziehung mit Hilfe der Höheren Mathematik in wenigen Zeilen herleiten.
Es ist noch von Interesse, auf die Vereinfachung hinzuweisen, welche die Höhere Mathematik im Laufe der Jahrhunderte erfahren hat, dank einer endgültigen Präzisierung ihrer Begriffsbildungen. Anfangs konnten sie nur führende Geister bewältigen, während sie heute bereits Anfängern gelehrt wird.