

ELEMENTARE STATIK

AUTORENKOLLEKTIV



Grundlagen
der Technischen
Mechanik

Grundlagen der Technischen Mechanik
Elementare Statik

Grundlagen der Technischen Mechanik



ELEMENTARE STATIK

Verfaßt von einem Autorenkollektiv

5. Auflage

Mit 105 Bildern, 37 Lehrbeispielen und einem Anhang

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Ingenieur- und Fachschulen der DDR anerkannt
Berlin, November 1984

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Das Lehrwerk

Grundlagen der Technischen Mechanik

erscheint voraussichtlich in 5 Bausteinen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad:

Elementare Statik, Statik

Elementare Festkörperbeanspruchung, Festkörperbeanspruchung,

Kinematik — Kinetik

verfaßt von einem Autorenkollektiv

unter Federführung von FSD Dipl.-Ing. J. Winkler, Karl-Marx-Stadt

Herausgeber:

Institut für Fachschulwesen der DDR

Karl-Marx-Stadt

Autoren des Lehrteils:

Oberlehrer Dipl.-Ing. G. Groß, Karl-Marx-Stadt

Dipl.-Ing. J. Winkler, Karl-Marx-Stadt

Autor des Übungsteils:

Dipl.-Ing. G. Sander, Jena

Gutachter dieses Bausteins:

Dipl.-Ing. B. Hosemann, Dresden

Oberlehrer Ing. H. Müller †, Karl-Marx-Stadt

Dipl.-Ing. K. H. Senf, Friesack

Dipl.-Ing. A. Weigel, Karl-Marx-Stadt

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1986

5. Auflage

Lizenznummer 114-210/21/85

LSV 3023

Verlagslektor: Sonja Klauf

Gestaltung: Lothar Gabler

Printed in GDR

Fotomechanischer Nachdruck: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 15. 10. 1984

Bestellnummer: 546 037 7

00560

Der vorliegende Baustein ist als erster des Lehrwerks Grundlagen der Technischen Mechanik erschienen. Seine Verwendung als Studienliteratur ist z. B. für Ingenieurschulen der Verarbeitungs- und Elektrotechnik, des wissenschaftlichen Gerätebaues und für die Ausbildung von Ingenieurpädagogen gedacht.

Dieser breite Nutzerkreis verlangte die Berücksichtigung einiger Lehrprogramme, um nach Inhalt und Umfang dem Lehrfach *Technische Mechanik* geeignete Studienliteratur für das Direkt-, Fern- und Abendstudium zur Verfügung zu stellen. Der gewählte Titel des ersten Bandes *Elementare Statik* bezieht sich nicht in erster Linie auf vereinfachte Darstellungen, sondern auf theoretische und inhaltliche Konzeptionen bei der Vermittlung und Festigung *elementar notwendiger Grundlagen* der Statik. Auf diese Grundlagen sollen sich die anschließenden Bände *Elementare Festkörperbeanspruchung* und *Kinematik – Kinetik* stützen, damit die Studenten ihr erworbenes Wissen und Können im gesamten Lehrfach anwenden und vertiefen können.

Mit den neuen Elementen der Wissensvermittlung wurde die Aneignungs- und Fähigkeitsstufe des Lernprozesses weiter vertieft. Dem Lernenden wird gezeigt, wie man vom *technischen Gebilde* zum *Modell der Statik*, zum *Strukturbild* kommt und wie man das Strukturbild mit den Eigenschaften der Kraftwirkungslinien, die als Belastung und durch Stützsymbole vorgegeben sind, bearbeitet. Die Lehrpraxis hat gezeigt, daß damit eine bessere Aufbereitung statischer Aufgaben bis zur Anwendung der zeichnerischen oder rechnerischen Lösungsverfahren möglich ist. Diese Modellierung schließt, je nach Erkenntnisstand, eine weitgehende Kontrolle der Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, zwischen Strukturbild und technischem Gebilde ein.

Zeichnerische Lösungen haben hohen Bildungscharakter. Hier erarbeitet sich der Lernende das Kräftesystem mit seinen zur Lösungsdurchführung notwendigen Hilfskräften. Die rechnerische Lösung wird mit ihren Bestandteilen, statisches Kräfte- oder statisches Momentengleichgewicht, direkt angesprochen. Hier werden Kontrollrechnungen, Kräftebilanzen eingeschlossen, um Teilergebnisse auf ihre Zuverlässigkeit oder auf Fehler und Schwächen zu überprüfen. Bereits diese Tätigkeitsmerkmale führen den Studenten in die Arbeitsweise der Praxis ein.

Die algorithmischen Übersichten im Anlagenteil verfolgen das Ziel, problemorientiert in Aufgabenkomplexe und in ihre Zusammenhänge einzuführen. Sie sollen zum systematischen Durchdringen des Lösungsweges anregen.

Der Lehrstoff enthält schrittweise *Lehrbeispiele* ► und als Empfehlungen *Übungshinweise* ■, die drucktechnisch durch spezielle Randmarken gekennzeichnet sind. Da der Lernende nicht nur Aufgaben lösen soll, sondern auch die Motive praktischer Aufgabenstellungen

erfassen muß, wurden hier technische bzw. technisch-ökonomische Gesichtspunkte eingeflochten. Wichtige Formeln und Merksätze werden durch ● hervorgehoben.

Mit den *Übungen im Anlagenteil* und rückkoppelnd auch zu den Lehrbeispielen kann man das eigene Wissen und Können überprüfen oder sich wiederholend auf Leistungskontrollen vorbereiten. Verfasser und Verlag hoffen, daß mit dem vorliegenden Lehrbuch ein erfolgreiches Studium der wichtigsten Grundlagen zur Statik möglich ist. Für kritische Hinweise zur Verbesserung des Inhaltes und seiner Darstellungen sind wir dankbar.

Federführender und Verlag

<i>Einführung in die Technische Mechanik . .</i>	9
1. Grundbegriffe .	11
1.1. Kräfte .	11
1.1.1. Kennzeichnung der Kräfte	11
1.1.2. Darstellung der Kräfte	12
1.1.3. Kräftezusammensetzung, Kräftezerlegung; statisches Kräftegleichgewicht .	13
1.1.4. Zeichnerische und rechnerische Elementaraufgaben	18
1.2. Momente .	22
1.2.1. Kennzeichnung der Momente .	22
1.2.2. Statische Momente	24
1.2.3. Parallelverschiebung einer Kraft	24
1.2.4. Zeichnerische und rechnerische Elementaraufgaben	25
1.3. Freimachen, Schneiden, Überlagern	27
1.4. Das technische Gebilde als Modell	29
1.4.1. Modellentwicklungen	29
1.4.2. Modellbearbeitungen	38
2. Zeichnerische und rechnerische Arbeitsverfahren für Kräfte in der Ebene .	41
2.1. Zentrales Kräftesystem .	41
2.1.1. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften .	41
2.1.1.1. Zeichnerisches Verfahren – Krafteck .	41
2.1.1.2. Rechnerisches Verfahren	42
2.1.2. Gleichgewicht am Körper	43
2.1.2.1. Zeichnerische Lösung – geschlossenes Krafteck . . .	43
2.1.2.2. Rechnerische Lösung – statisches Kräftegleichgewicht	47
2.1.3. Gleichgewicht für Körpersysteme	49
2.2. Allgemeines Kräftesystem	54
2.2.1. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften .	54
2.2.1.1. Zeichnerische Verfahren – Seileck, Hilfskräfte .	54
2.2.1.2. Rechnerisches Verfahren .	56
2.2.2. Gleichgewicht am Körper	57
2.2.2.1. Zeichnerische Lösungen – <i>Culmann</i> -Verfahren, Kraft- und Seileckverfahren .	58
2.2.2.2. Rechnerische Lösung – statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht .	62

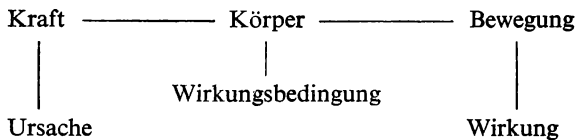
3.	<i>Rechnerische Arbeitsverfahren für Kräfte im Raum</i>	71
3.1.	Kennzeichnungen für Kräfte im Raum .	71
3.2.	Gleichgewichtsbedingungen	72
3.3.	Anwendung auf ein technisches Gebilde	72
4.	<i>Anwendung und Vertiefung der Arbeitsverfahren</i>	75
4.1.	Schwerpunktsermittlungen	75
4.1.1.	Körper-, Flächen- und Linienschwerpunkt	76
4.1.2.	Bestimmung des Schwerpunktes mit dem Verfahren der Statik	77
4.1.3.	Anwendung auf den Flächenschwerpunkt .	77
4.2.	Standsicherheit	80
4.3.	Reibung .	81
4.3.1.	Grundlagen für Reibkräfte nach <i>Coulomb</i>	81
4.3.1.1.	Rechnerische Lösungen mit dem statischen Kräftegleichgewicht	82
4.3.1.2.	Zeichnerische Lösungen mit der Widerstandskraft	84
4.3.2.	Technische Anwendungen	85
4.3.2.1.	Gleiten oder Kippen .	85
4.3.2.2.	Reibung in Keilnuten .	86
4.3.2.3.	Reibung an Backenbremsen	87
4.3.2.4.	Reibung an Schrauben	89
4.3.2.5.	Übertragung von Antriebsmomenten durch Reibräder	90
4.3.3.	Seil- und Bänderreibung .	90
4.3.4.	Rollreibung	92
4.4.	Gleichgewicht für Körpersysteme	93
	<i>Literaturhinweise</i>	100
	<i>Anhang .</i>	101
	Übungsaufgaben .	102
	Lösungen zu den Übungsaufgaben .	113
	Anlagen	136
	<i>Sachwortverzeichnis</i>	145

Einführung in die Technische Mechanik

Fragen zur Technischen Mechanik wurden bereits im Lehrfach Physik berührt. Die Physik untersucht den Bewegungszustand eines Körpers, der durch äußere Kräfte beeinflusst wird. Sie stellt hierzu Gesetzmäßigkeiten als Lehrsätze, Axiome, Hypothesen auf und beschreibt sie mit Funktions- oder Bestimmungsgleichungen bzw. mit grafischen Darstellungen.

Die Technische Mechanik erweitert diese physikalischen Erkenntnisse auf technische Anwendungsbereiche. Sie entwickelt für die in der Technik verwendeten Objekte (technische Gebilde) geeignete Untersuchungsverfahren. Dadurch hilft sie dem Ingenieur, seine praxisbezogenen Aufgaben mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Methoden zu lösen und auch technisch-ökonomisch zu beurteilen.

Der kausale Zusammenhang zwischen



schließt Körper aller Aggregatzustände (fest, flüssig, gasförmig) ein. Die Technische Mechanik muß auch diesen Unterscheidungsmerkmalen Rechnung tragen. Dadurch entstand ein sehr großes Lehrgebiet, das aus Gründen der Zweckmäßigkeit unterteilt wurde. Wir wollen uns mit dieser Gliederung nicht weiter beschäftigen, sondern nur erwähnen, daß Lehrbereiche zur Untersuchung plastischer, flüssiger, gasförmiger Stoffe ihre eigenen und spezifischen Gesetzmäßigkeiten haben.

- Wir beschränken uns auf technische Gebilde aus festen Werkstoffen.

Kraft und Bewegung, Ursache und Wirkung, führen zur Beanspruchung des technischen Gebildes. Es ändert seine Gestalt, in ihm treten Spannungen auf. Diese Beanspruchung entsteht durch Kräfte auf das technische Gebilde, durch dessen Belastung.

Den Bewegungszustand gliedern wir in zwei Formen:

1. Es tritt *keine* Beschleunigung oder Verzögerung ($a = 0$) auf. Kräfte wirken dann bei konstanter Geschwindigkeit ($v = \text{konst.}$) oder im Ruhezustand ($v = 0$). Diese kinematische Voraussetzung gehört zur *Statik*.
2. Der Bewegungszustand verläuft *beschleunigt oder verzögert* ($a \neq 0$); seine Geschwindigkeitsänderungen sind zeitabhängig. In diese Vorgänge können wir auch technische Schwingungen einbeziehen. Die Untersuchung solcher Kräftewirkungen gehört zur *Kinetik*.

Erst nachdem Belastungsfragen geklärt sind, kann man die *Beanspruchung* eines festen Körpers, seine *Formänderung* und seine *Spannungsaufnahme*, ermitteln. Unzulässige Verformungen beeinträchtigen die Funktion des Bauteiles, und hohe Spannungen können im Grenzfall seinen Bruch herbeiführen.

Nach den Forderungen der Lehrprogramme gliedert sich demnach diese Studienliteratur zur Technischen Mechanik in die Hauptteile

Elementare Statik
Elementare Festkörperbeanspruchung
Kinematik – Kinetik.

Wir wollen mit dem ersten beginnen.

Zuvor jedoch ein notwendiger Hinweis zu den verwendeten Einheiten. Das Internationale Einheitensystem (SI) enthält für mechanische Größen folgende Basiseinheiten:

für die Länge das Meter	m
für die Masse das Kilogramm	kg
für die Zeit die Sekunde	s

Dezimale Vielfache oder Teile davon sind zulässig und für die Technik oft zweckmäßig. Daraus lassen sich die nachfolgenden Größen und ihre Einheiten ableiten.

Größe	Einheit
Kraft	N (Newton) = kgms^{-2}
Druck, Spannung	Nm^{-2} oder $\text{Nmm}^{-2} = \text{MPa}$ (Megapascal)
Geschwindigkeit	ms^{-1}
Beschleunigung	ms^{-2}

1.1. Kräfte

1.1.1. Kennzeichnung der Kräfte

Nach ihren Wirkungen und nach dem Ort ihres Auftretens lassen sich Kräfte in Aktions- und Reaktionskräfte sowie in äußere und innere Kräfte einteilen.

Befassen wir uns zuerst mit den *äußeren* Kräften, also mit den Kräften *am* Körper.

Hierzu ein *Beispiel*. Die Scheibe (Bild 1) ist nach dem Prinzip einer Spannvorrichtung gegen das Prisma fest einzuspannen. Zu diesem Zweck wirkt in *A* die Druckkraft *F*. Sie greift aktiv an der Scheibe an und belastet sie. Daher bezeichnet man *F* als Aktionskraft oder als

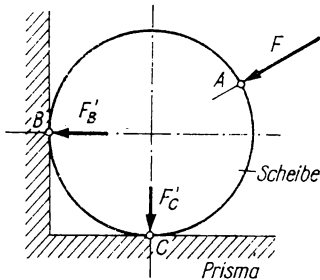


Bild 1. Belastung der Körper: Scheibe und Prisma

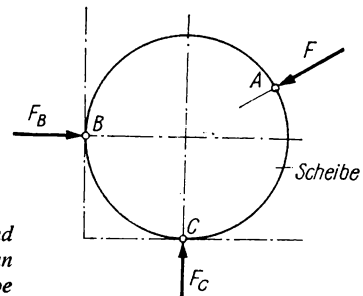


Bild 2. Aktions- und Reaktionskräfte an der Scheibe

Belastung. Da die Scheibe sich nicht bewegen soll (durch das Prisma ist eine feste Anlage vorhanden), gibt es auf Grund der geometrischen Gestaltung beider Körper gemeinsame Berührungspunkte, Kontaktstellen *B* und *C*. Hier entstehen, verursacht durch *F*, die Kräfte F'_B und F'_C . Vom Prisma aus wirken auf die Scheibe Gegenkräfte F_B , F_C (Bild 2). Sie haben widerstrebenden Charakter, wirken zur Belastung *F* reaktiv auf die Scheibe und stützen sie. Man bezeichnet sie als Reaktionskräfte, auch als Stützreaktionen.

Da die feste Einspannung der Scheibe ihre Bewegung ausschließt, stellt sich in dem Kräftesystem F , F_B , F_C statisches Gleichgewicht ein.

Nun zu den *inneren* Kräften, zu den Kräften *in* ein und demselben Körper.

Innere Kräfte lassen sich mit gedachten Schnitten veranschaulichen. Zu diesem Zweck trennt man die Scheibe nach Bild 3 in zwei Teile und trägt längs der Schnittlinien innere Kräfte, Schnittkräfte F_s , an. Sie müssen, auf Grund des festen Zusammenhangs der Körperteilchen, reaktiv zu den äußeren Kräften wirken. Man bezeichnet sie als Schnittreaktionen.

Belastungen und Stützkkräfte wirken am Körper. Für die abgeschnittenen Teile nehmen sie den Charakter aktiver Kräfte ein. Auch für jeden Körperteil gilt das *Wechselwirkungsgesetz* der Kräfte: *Aktion = Reaktion*. Daher müssen sich sowohl F und F_S als auch F_B , F_C mit F_S im statischen Gleichgewicht befinden. Das gilt auch für die Schnittkräfte selbst. Je nach Aufgabenstellung muß man zwischen Stütz- und Schnittreaktionen unterscheiden.

- Stützreaktionen wirken am Körper (äußere Kräfte).

Schnittreaktionen wirken im (gedacht geschnittenen) Körper. Sie gehören zu den inneren Kräften.

1.1.2. Darstellung der Kräfte

Kräfte werden von ihrem Angriffspunkt aus als gerichtete Größen, als Vektoren, abgebildet. Sie haben demnach eine Wirkungslinie, einen Wirkungssinn und einen Betrag (Bild 4). Die *Wirkungslinie* einer Kraft geht durch den Kraft-Angriffspunkt und kennzeichnet den Verlauf der Krafrichtung.

Man kann sich zur Festlegung des Richtungswinkels α z. B. auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehen.

Der *Wirkungssinn* einer Kraft muß mit der eingezeichneten Pfeilspitze übereinstimmen. Nach Bild 1 wurde damit die Wirkung einer Druckkraft auf die Scheibe angegeben.

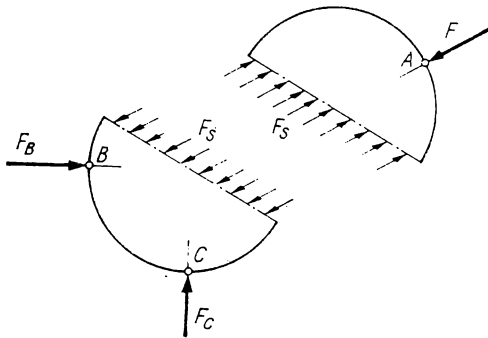


Bild 3. Äußere Kräfte und Schnittkräfte

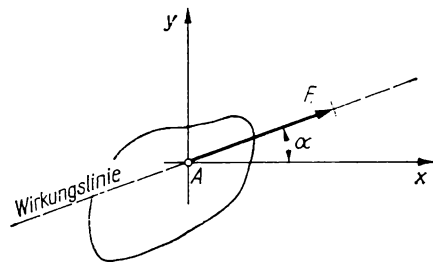


Bild 4. Darstellung einer Kraft

- Kraftvektoren darf man längs ihrer Wirkungslinie verschieben.

Praktisch muß jedoch ihr Angriffspunkt zum Körper gehören oder durch eine feste Verbindung (z. B. durch einen Stab) mit ihm gesichert sein (Bild 5).

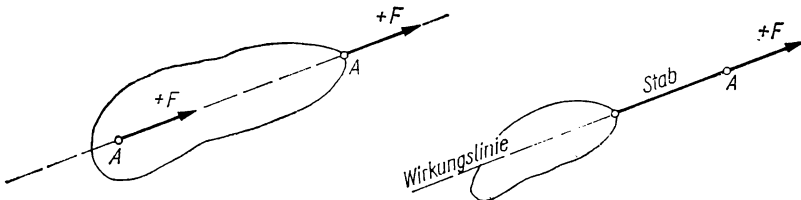


Bild 5. Verschiebung einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie

Der *Betrag* einer Kraft wird durch die maßstabsgetreue Länge des Kraftvektors (maßstäbliche Kraftstrecke) abgebildet. Wir vereinbaren für alle maßstäblichen Abbildungen die Proportion

$$M = \frac{\text{Abbildungsgröße}}{\text{wirkliche Größe}}$$

und daher speziell für den *Kräftemaßstab*

$$M_F = \frac{\text{Länge des Kraftvektors auf der Zeichnung}}{\text{Betrag der Kraft}}$$

Beispiel:

Eine Kraft von 50 N soll als Vektor mit 50 mm Länge gezeichnet werden. In diesem Fall beträgt der Kräftemaßstab

$$M_F = \frac{50 \text{ mm}}{50 \text{ N}} = 1 \frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

1.1.3. Kräftezusammensetzung, Kräftezerlegung; statisches Kräftegleichgewicht

Kräfteparallelogramm

● Kräfte lassen sich zur Resultierenden (resultierende Kraftwirkung mehrerer Kräfte) zusammenfassen oder in ihre Komponenten zerlegen.

Ermittlung der Resultierenden

Für zwei Kräfte, die einen gemeinsamen Angriffspunkt (Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien) haben, kann man mit dem Kräfteparallelogramm ihre Resultierende zeichnerisch bestimmen (Bild 6). Die Resultierende F_R oder die Einzelkräfte F_1 , F_2 zusammen ergeben

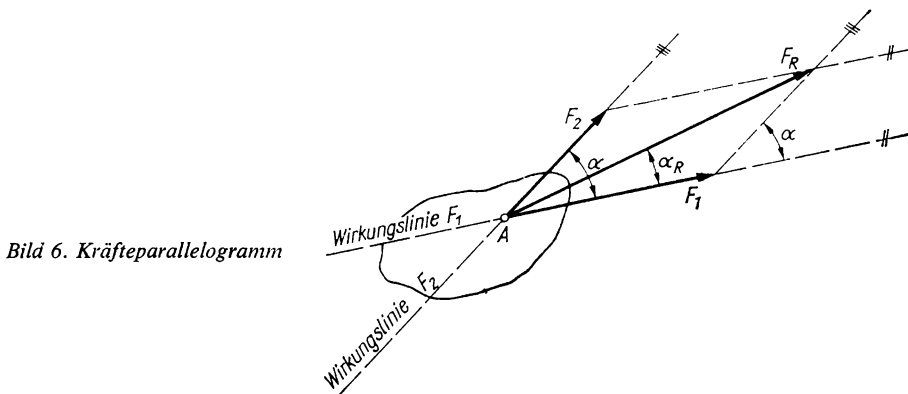


Bild 6. Kräfteparallelogramm

eine gleiche Kraftwirkung; denn alle drei Kräfte haben einen gemeinsamen Angriffspunkt. Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß sich auf diese grafische Addition viele zeichnerische Lösungen der Statik gründen.

Rechnerisch findet man den Betrag der Resultierenden nach dem Cosinussatz zu

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos (180^\circ - \alpha)}$$

$$\bullet \quad F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

und die Richtung ihrer Wirkungslinie (Winkel α_R) nach dem Sinussatz aus

$$\frac{\sin \alpha_R}{\sin (180^\circ - \alpha)} = \frac{F_2}{F_R}$$

zu

$$\bullet \quad \sin \alpha_R = \frac{F_2}{F_R} \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{F_2}{F_R} \sin \alpha \quad (2)$$

Beispiele zu verschiedenen Richtungswinkeln für die Einzelkräfte (Variation des Winkels α)

1. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (Bild 7.1)

Im zweiten Quadranten wird der Cosinus des Winkels α negativ. Die Resultierende beträgt dann mit dem absoluten Winkelwert

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

Sie kann dem Betrag nach kleiner als die größte Einzelkraft werden.

2. $\alpha = 180^\circ$ (Bild 7.2)

Für diesen Fall wird $\cos 180^\circ = -1$ und damit

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2$$

Die Resultierende entspricht der Differenz beider Einzelkräfte.

3. $\alpha = 360^\circ$ (Bild 7.3)

Hier ergibt sich mit $\cos 360^\circ = +1$ die Resultierende zu

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$$

Die Resultierende entspricht der Summe beider Einzelkräfte. Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit $\alpha = 0^\circ$.

4. $\alpha = 90^\circ$ (Bild 7.4)

Da $\cos 90^\circ = 0$, erhalten wir

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Die Resultierende wird nach *Pythagoras* als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes berechnet. Diese besondere Lage ist für rechnerische Lösungen sehr vorteilhaft, weil man sich auf die geometrischen Eigenschaften eines rechtwinkligen Dreieckes beziehen kann.

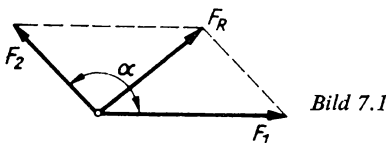


Bild 7.1

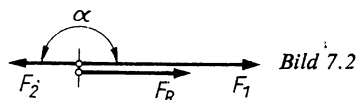


Bild 7.2

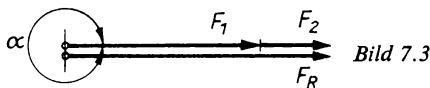


Bild 7.3

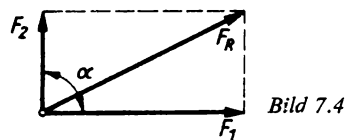


Bild 7.4

Bild 7. Beispiele zum Kräfteparallelogramm

Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten

Eine Kraft läßt sich zeichnerisch eindeutig in zwei Kräfte zerlegen, wenn ihre Wirkungslinien vorgegeben sind. Wir konstruieren nach Bild 8 mit Parallelen zu den Wirkungslinien 1.1 und 1.2 das zugehörige Kräfteparallelogramm und begrenzen damit auf ihnen die Komponenten $F_{1,1}$ sowie $F_{1,2}$.

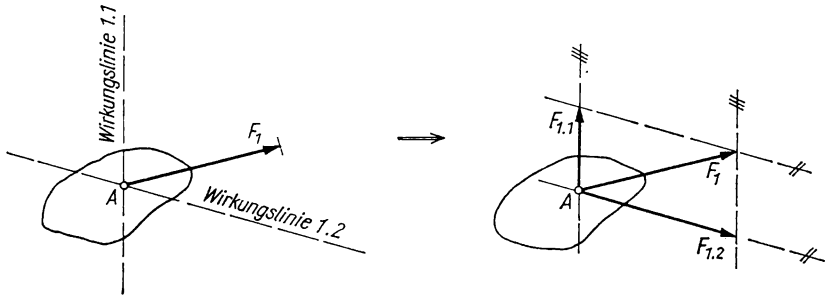


Bild 8. Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten

Statisches Kräftegleichgewicht

● Zwei Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn sie eine gemeinsame Wirkungslinie haben, entgegengesetzt gerichtet und gleich groß sind (Bild 9). Ihre gegenseitigen Wirkungen heben sich auf (Wechselwirkungsgesetz).

Drei Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn daher die dritte Kraft F_3 die Wirkung der Resultierenden aus F_1 und F_2 aufhebt (Bild 10).

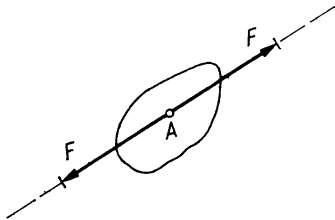


Bild 9. Zum Gleichgewicht für zwei Kräfte

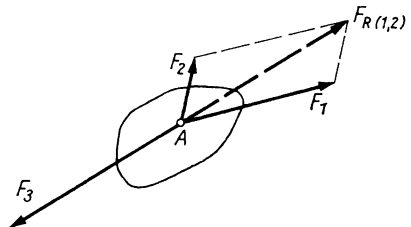


Bild 10. Zum Gleichgewicht für drei Kräfte

Krafteck

Die Kräfteparallelogramme enthalten zwei identische Kraftecke (Bild 11). Daher genügt es, die Kräfte mit jeweils nur einem Dreieck, dem Krafteck, abzubilden. Sie erkennen weiterhin, daß man die Einzelkräfte eines gemeinsamen Angriffspunktes in beliebiger Folge

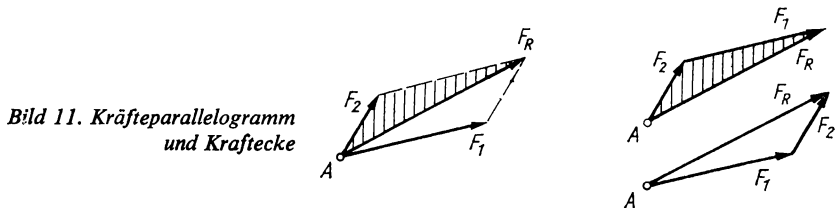


Bild 11. Kräfteparallelogramm und Krafteck

aneinanderfügen kann. In beiden Fällen wird die gleiche Resultierende nach der Vektoraddition $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ gefunden. Für drei Kräfte (Bild 12) kann man z. B. wahlweise ihre Resultierende mit den gezeichneten Kraftecken ermitteln. Wir wählen einen Kräftemaßstab, beginnen mit \mathbf{F}_1 , schließen \mathbf{F}_2 und schließlich \mathbf{F}_3 an. Die Verbindung vom Anfangs- bis zum Endpunkt des Kräftezuges entspricht der resultierenden Kraftwirkung nach $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$. Im zweiten Fall wurde mit \mathbf{F}_1 begonnen, dann \mathbf{F}_3 angefügt und schließlich \mathbf{F}_2 . Die Vektoraddition lautet dann $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_2$. Da Summanden vertauschbar sind, müssen beide Ergebnisse übereinstimmen.

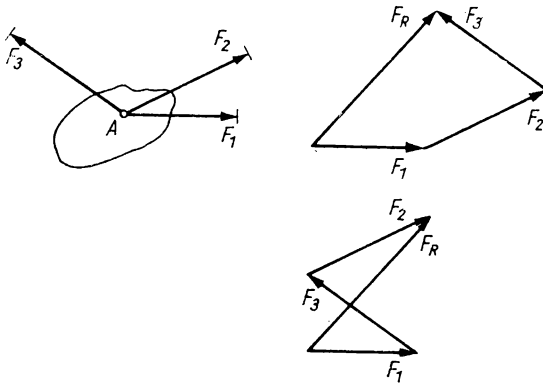


Bild 12. Resultierende für drei Kräfte

Für n Kräfte erweitern wir die Gleichung und schreiben

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

oder in der allgemeinen Form ($i = 1, \dots, n$)

- $$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (3)$$

Jede Gleichgewichtskraft hebt die Wirkung der Resultierenden auf. Für diesen Zustand muß daher ein geschlossenes Krafteck mit fortlaufendem Umfahrungssinn entstehen. Der Körper nach Bild 13, dessen Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, befindet sich im statischen Gleichgewicht. Das Krafteck ist geschlossen. Die Resultierende wird zu Null. Wir erhalten damit als Bedingung für das statische Kräftegleichgewicht

- $$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad (4)$$

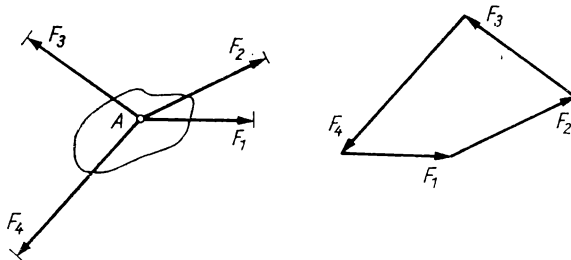


Bild 13. Gleichgewichtskraft für drei Kräfte

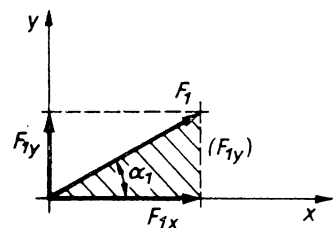


Bild 14. Kraft und ihre Komponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem

Rechtwinklige Kraftecke

Die geometrischen Zusammenhänge für rechtwinklige Dreiecke lassen sich auf rechnerische Lösungen der Statik vorteilhaft anwenden, wenn als Bezugsbasis ein rechtwinkliges Koordinatensystem gewählt wird. Nach Bild 14 betragen die Komponenten der Kraft F_1

$$(\text{aus } \sin \alpha_1 = F_{1y}/F_1) \Rightarrow F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1$$

$$(\text{aus } \cos \alpha_1 = F_{1x}/F_1) \Rightarrow F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1$$

und die Resultierende F_1' aus den Komponenten F_{1x} , F_{1y}

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2}$$

Diese Grundaufgaben, Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten, Zusammenfassung der Komponenten zu ihrer Resultierenden, muß man beherrschen.

Wir wenden sie auf zwei Kräfte mit *gemeinsamem* Angriffspunkt in A an (Bilder 15, 16).

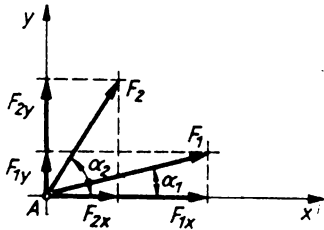


Bild 15. Komponenten-darstellung für zwei Kräfte

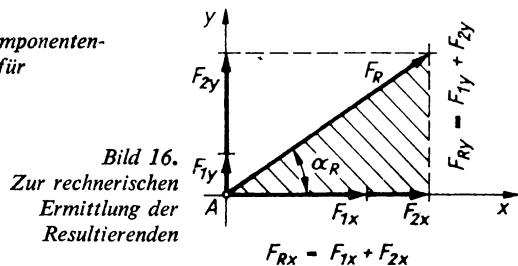


Bild 16. Zur rechnerischen Ermittlung der Resultierenden

Der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems wird dem Angriffspunkt der Kräfte zugeordnet. Nach Bild 15 gilt für die Komponenten

auf der Abszissenachse: $F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2$$

auf der Ordinatenachse: $F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2$$

und für die resultierende Wirkung

in x -Richtung: $F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2$

in y -Richtung: $F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2$

Diese Gleichungen lassen sich für n Kräfte ($i = 1, \dots, n$) erweitern.

$$\bullet \quad F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \quad (5)$$

$$\bullet \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \quad (6)$$

Der Betrag für die Resultierende ergibt sich nach Bild 16 zu

$$\bullet \quad F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad (7)$$

und ihr Richtungswinkel nach der Tangensfunktion zu

$$\bullet \quad \tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \quad (8)$$

Bezüglich des rechtwinkligen Koordinatensystems führt die Beziehung für das statische Kräftegleichgewicht $F_R = \sum_{i=1}^n F_i = 0$ nach Gl. (4) auf die Gleichungen

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \quad (9)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \quad (10)$$

Man spricht von einem statischen Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung.

1.1.4. Zeichnerische und rechnerische Elementaraufgaben

► Lehrbeispiel 1

Durch Seile werden zwei Kräfte übertragen: $F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 500 \text{ N}$; Schnittwinkel ihrer Wirkungslinien $\alpha = 60^\circ$. Mit dem Kräfteparallelogramm ist zeichnerisch und rechnerisch ihre resultierende Wirkung zu ermitteln.

Zeichnerische Lösung (Bild 17):

Wir wählen zur zeichnerischen Darstellung der beiden Kraftvektoren den Kräftemaßstab $M_F = 10 \text{ mm}/100 \text{ N}$ und haben daher die Kräfte mit den Längen $\langle F_1 \rangle = 30 \text{ mm}$, $\langle F_2 \rangle = 50 \text{ mm}$ zu begrenzen. Das Kräfteparallelogramm ergibt $\langle F_R \rangle = 70 \text{ mm}$. Daher beträgt die Resultierende $F_R = \langle F_R \rangle / M_F = 70 \text{ mm} / \frac{10 \text{ mm}}{100 \text{ N}} = 70 \text{ mm} \left(\frac{100 \text{ N}}{10 \text{ mm}} \right) = 700 \text{ N}$.

Die Bilder zu den grafischen Lösungen haben aus drucktechnischen Gründen eine Maßstabsleiste. Mit ihr kann man durch Ausmessen die Ergebnisse sofort bestimmen. Das Kräfteparallelogramm führt auf den Richtungswinkel $\alpha_R = 38^\circ$.

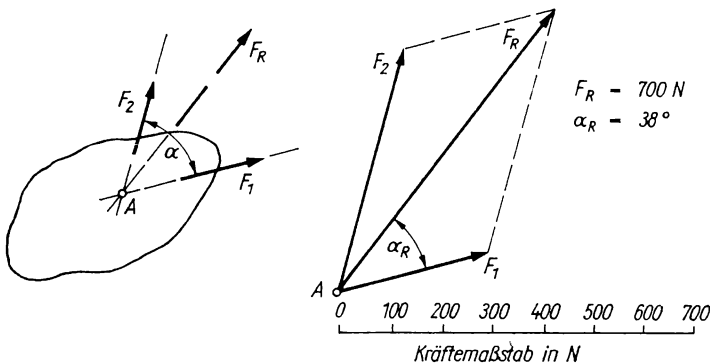


Bild 17. Kräfteparallelogramm zur zeichnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 1

Rechnerische Lösung:

Betrag der Resultierenden nach Gl. (1)

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \\ &= 100 \text{ N} \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0,5} \\ &= 100 \text{ N} \sqrt{9 + 25 + 15} = 100 \text{ N} \sqrt{49} = 700 \text{ N} \end{aligned}$$

Richtungswinkel nach Gl. (2)

$$\sin \alpha_R = \frac{F_2}{F_R} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha_R = \frac{F_2}{F_R} \sin 60^\circ = \frac{500 \text{ N}}{700 \text{ N}} 0,866 = 0,62 \Rightarrow \alpha_R = 38,2^\circ$$

Der Richtungswinkel wurde mit dem Rechenstab ermittelt. Dort kann man sofort die Winkelgrade ablesen; zusätzliche Umrechnungstabellen sind hier nicht notwendig. Vergleicht man die Ergebnisse, dann ist festzustellen, daß die zeichnerisch gefundenen mit den rechnerischen übereinstimmen.

► Lehrbeispiel 2

Die Aufgabe nach Lehrbeispiel 1 ist rechnerisch über Komponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem zu lösen.

Lösung:

Wir decken nach Bild 18 die x -Achse mit der Wirkungslinie für F_1 .

Betrag der Resultierenden

Komponenten in x -Richtung nach Gl. (5)

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_1 + F_{2x} = F_1 + F_2 \cos 60^\circ \\ &= 300 \text{ N} + 500 \text{ N} \cdot 0,5 = 550 \text{ N} \end{aligned}$$

Komponente in y -Richtung nach Gl. (6)

$$F_{Ry} = F_2 \sin 60^\circ = 500 \text{ N} \cdot 0,866 = 433 \text{ N}$$

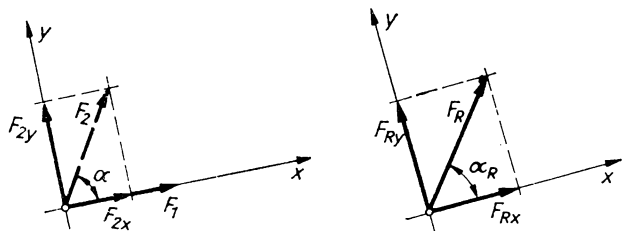
Resultierende nach Gl. (7)

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 100 \text{ N} \sqrt{5,5^2 + 4,33^2} \\ &= 100 \text{ N} \sqrt{30,25 + 18,75} = 100 \text{ N} \sqrt{49} \\ &= 700 \text{ N} \end{aligned}$$

Richtungswinkel der Resultierenden nach Gl. (8)

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{433 \text{ N}}{550 \text{ N}} \Rightarrow \alpha_R = 38,2^\circ$$

Bild 18. Zur rechnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 2



► Lehrbeispiel 3

Einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen nach Bild 19 die eingezeichneten Kräfte $F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$, $F_3 = 25 \text{ N}$. Ihre Richtungswinkel (gemeinsame Bezugslinie) betragen $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 70^\circ$, $\alpha_3 = 300^\circ$. Gesucht sind nach dem Kräfteckverfahren die Resultierende F_R und die Gleichgewichtskraft F_4 . Anschließend soll die Resultierende rechnerisch ermittelt werden.

Zeichnerische Lösung (Bild 19.1):

Zuerst zeichnet man den Strukturplan, also von dem gemeinsamen Angriffspunkt aus die drei Kraftrichtungen mit den Winkeln $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 70^\circ$ und $\alpha_3 = 300^\circ$. Dann ist ein Kräftemaßstab zu wählen, um die drei Vektoren (parallel zu ihren Wirkungslinien) maßstabsgetreu abbilden zu können. Hier wurde mit F_1 begonnen und F_2 , F_3 angefügt. Die Verbindung vom Anfang bis zum

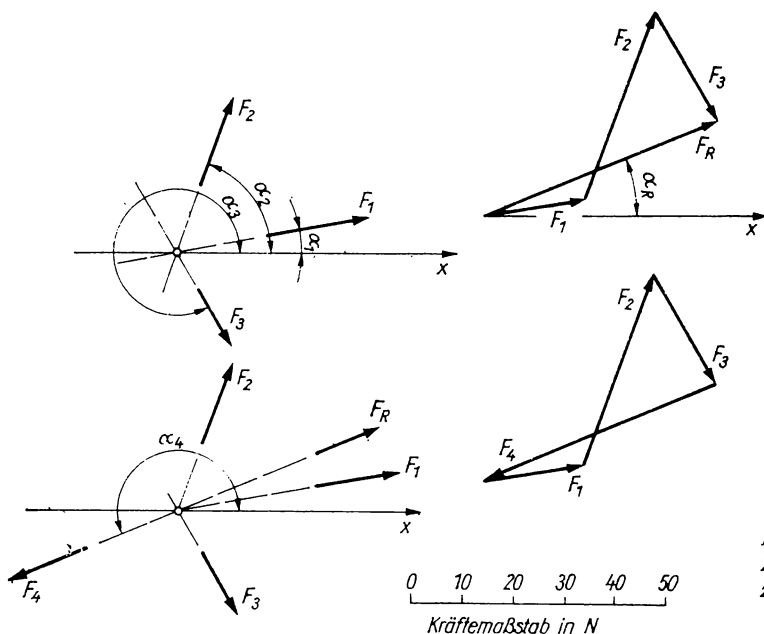


Bild 19.1
Zeichnerische Lösung
zu Lehrbeispiel 3

Ende des Kräftezuges entspricht der Resultierenden. Man mißt die Vektorlänge ab, rechnet mit dem Kräftemaßstab um und erhält $F_R = 50 \text{ N}$. Weiterhin läßt sich der Richtungswinkel ausmessen. Er beträgt $\alpha_R = 22^\circ$.

Die Gleichgewichtskraft muß den Kräftezug mit fortlaufender Vektorenfolge schließen. Daher erhält F_4 den zu F_R entgegengesetzten Vektoren Pfeil. Die absoluten Beträge beider sind gleich groß. Überträgt man die Gleichgewichtskraft in den Strukturplan, dann wirkt sie am Angriffspunkt unter dem Winkel

$$\alpha_4 = (180^\circ + 22^\circ) = 202^\circ.$$

Rechnerische Lösung (in Übereinstimmung mit Bild 19.2):

Enthalten die Gln. (5) und (6) zur Ermittlung der Resultierenden mehrere Summanden, dann läßt sich die Rechnung auch *tabellarisch* durchführen. Wir fassen daher wie folgt zusammen:

Kraft Nr.	Betrag F_i in N	Winkel α_i in $^\circ$	Komponenten in x-Richtung $F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$ in N	in y-Richtung $F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$ in N
1	20	10	+19,7	+ 3,48
2	40	70	+13,65	+37,6
3	25	300	+12,5	−21,65
Σ	–	–	+45,85	+19,43

Bemerkungen zum Inhalt der Tabelle: Die Beträge für die Komponenten lassen sich sofort auf dem Rechenstab ablesen. Wir stellen zu diesem Zweck auf den Skalen für die Winkelfunktionen die Sinus- oder Cosinuswerte ein und multiplizieren mit dem Betrag der Kraft. Das zugehörige Vorzeichen muß mit dem Vorzeichen der Winkelfunktion im entsprechenden Quadranten übereinstimmen. Der Winkel $\alpha_1 = 10^\circ$, 1. Zeile, liegt im 1. Quadranten. Dafür sind die Sinus- und Cosinuswerte positiv. Der Winkel $\alpha_3 = 300^\circ$, 3. Zeile, liegt hingegen im 4. Quadranten. In diesem Fall

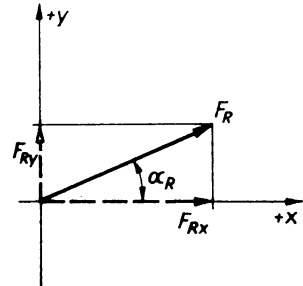
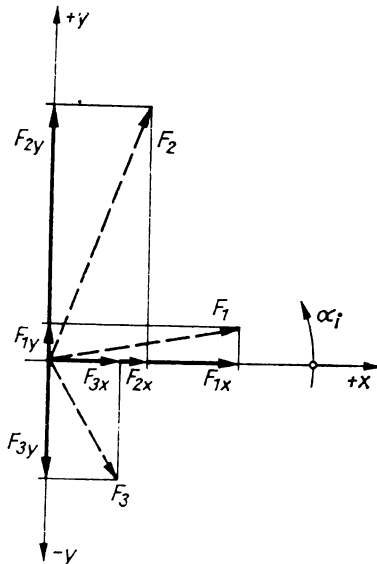


Bild 19.2. Rechnerische Lösung nach Lehrbeispiel 3

nimmt die Cosinusfunktion einen positiven, die Sinusfunktion dagegen einen negativen Wert an. Demzufolge erhält die Komponente $F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3$ ein positives Vorzeichen; die Komponente $F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3$ hingegen ein negatives Vorzeichen.

Die Summenbeträge der Tabelle sind wie folgt weiter zu verarbeiten:

Betrag der Resultierenden nach Gl. (7)

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 10 \text{ N} \sqrt{4,59^2 + 1,94^2} = 49,8 \text{ N}$$

Richtungswinkel der Resultierenden nach Gl. (8)

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{+19,43 \text{ N}}{+45,85 \text{ N}} = + \dots$$

Das positive Vorzeichen weist darauf hin, daß der Richtungswinkel für die Resultierende im 1. oder 3. Quadranten liegt. Da beide Komponenten *positiv* sind, kommt hier der 1. Quadrant in Frage. Wir lesen unmittelbar auf dem Rechenstab $\alpha_R = 23^\circ$ ab.

Die rechnerisch gefundenen Werte stimmen mit den zeichnerisch ermittelten überein. Rechnung und Zeichnung können zur Kontrolle wichtiger Ergebnisse notwendig sein. Zeichnerische Ergebnisse weichen oft von den rechnerisch ermittelten geringfügig ab. Hier wirken vielfach subjektive Einflüsse (Zeichnungsgenauigkeit u. a.). Damit führen die rechnerischen Verfahren augenscheinlich zu verfeinerten Ergebnissen. Bei technischen Aufgabenstellungen gehen jedoch vielfach fundierte Erfahrungswerte in den Lösungsweg ein, so daß in den meisten Fällen die mit grafischen Verfahren erreichbare Genauigkeit genügt. Ergebnisse aus zeichnerischen Verfahren haben den großen Vorteil, daß Stellenfehler kaum auftreten können. Das ist aber sehr wichtig.

■ Übungen 1 bis 5

1.2. Momente

1.2.1. Kennzeichnung der Momente

Nach dem Gegenwirkungsprinzip besteht für zwei Kräfte statisches Kräftegleichgewicht, wenn beide eine *gemeinsame* Wirkungslinie haben, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Diesen bekannten Sachverhalt zeigt nochmals Bild 20. Verläßt jedoch eine der beiden

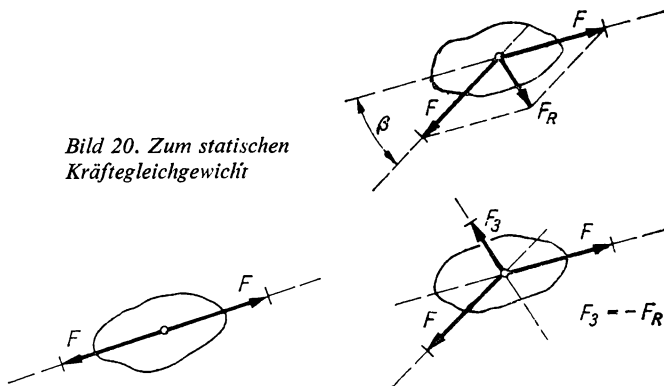


Bild 20. Zum statischen Kräftegleichgewicht

Kräfte durch Drehung ihrer Wirkungslinie um den Winkel β die gemeinsame Richtung, dann entsteht eine *resultierende* Kraft. Das statische Gleichgewicht ist gestört. Es wird erst durch eine dritte Kraft $F_3 = -F_R$ wieder herbeigeführt.

Kräftepaar – statisches Moment

Es ist aber auch der Fall denkbar, daß die Kraft nicht durch Drehung ihres Vektors die gemeinsame Wirkungslinie verläßt, sondern durch eine Parallelverschiebung um den Abstand a (Bild 21). Dann entstehen zwei parallele Wirkungslinien mit gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Kräften. Man spricht von einem Kräftepaar. Kräftepaare

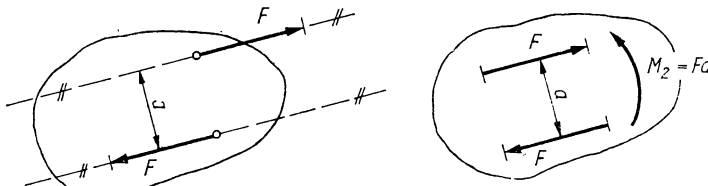


Bild 21. Kräftepaar und statisches Momentengleichgewicht

bewirken eine Drehung am Körper. Das im Bild 21 eingezeichnete Kräftepaar wird den Körper im Uhrzeigersinn drehen; es entsteht ein statisches Moment vom Betrag $M_1 = Fa$. Es kann nur durch ein gleich großes Gegenmoment M_2 (gleicher Betrag, jedoch entgegengesetzte Drehwirkung) aufgehoben werden. Erst dann ändert der Körper seinen Bewegungszustand nicht. Er unterliegt nun dem statischen Momentengleichgewicht.

Moment aus Kraft und Hebelarm

Sie haben sicher schon einmal eine Schraubenmutter fest angezogen. Dann wissen Sie auch, daß man mit längeren Mutterschlüsseln die gleiche Schraubenverbindung kräftiger anziehen

kann. Anders ausgedrückt: Mit der Anzugskraft um die Längsachse der Schraube wurde ein Moment aus Kraft und Hebelarm erzeugt. Es vergrößert sich (siehe Bild 22) mit zunehmendem Hebelarm. Ist dieses Moment ein anderes als das des Kräftepaars? Bei genauerer Betrachtung des vollständigen Kräftezustandes nicht; denn reine Drehungen im Sinne

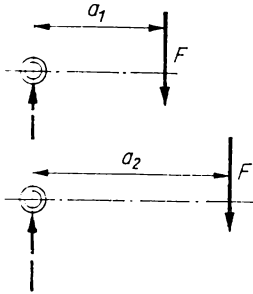


Bild 22. Moment aus Kraft und Hebelarm

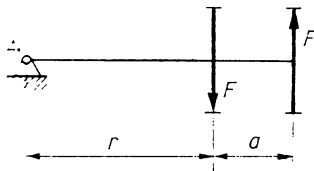


Bild 23. Bezugspunkte für Momente

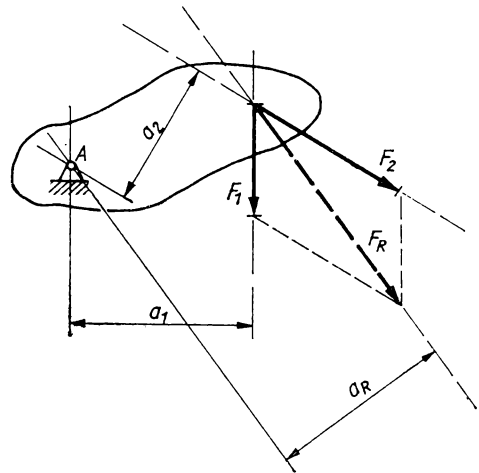


Bild 24. Moment der Einzelkräfte und Moment der Resultierenden

statischer Momente sind nur möglich, wenn auch statisches Kräftegleichgewicht herrscht. Die hierzu notwendige gleich große Gegenkraft tritt nämlich bei diesem Vorgang quer zur Schraubenachse auf.

Vorzeichenregel

Unterschiedliche Drehrichtungen statischer Momente verlangen die Vereinbarung einer Vorzeichenregel. Man hat sich auf den *mathematisch positiven Drehsinn* festgelegt. Demnach erhalten Momente ein positives Vorzeichen, wenn ihre Drehrichtung der Quadrantenfolge des rechtwinkligen Koordinatensystems entspricht. Damit ist nach Bild 21 dem Kräftepaar ein negatives und dem Moment (mit Drehrichtungspfeil angedeutet) ein positives Vorzeichen zuzuordnen.

Bezugspunkte für Momente

Bezugspunkte für Momente müssen nicht immer auf der Wirkungslinie der Gegenkraft angenommen werden. Im Bild 23 liegt der Bezugspunkt (Drehpunkt A) außerhalb des Kräftepaars. Beide Kräfte haben Hebelarme (senkrechte Entfernung zur Wirkungslinie). Dadurch entstehen Momente.

$$\begin{aligned} M_A &= -Fr + F(a + r) \\ &= -Fr + Fa + Fr = Fa \end{aligned}$$

Dieser mathematische Ausdruck ist aber identisch mit der Wirkung des Kräftepaars allein. Man sieht an dieser kleinen Rechnung, daß Bezugspunkte für Momente frei wählbar sind.

1.2.2. Statische Momente

Statische Momente entstehen durch mehrere Kräfte, deren zugehörige Hebelarme vom gleichen Bezugspunkt aus gemessen werden müssen. Die beiden Kräfte F_1 und F_2 (Bild 24, Seite 23) haben bezüglich A Hebelarme a_1 und a_2 . Es entsteht ein Gesamtmoment

$$M_A = -F_1 a_1 - F_2 a_2$$

Faßt man die beiden Kräfte zur Resultierenden zusammen, dann beträgt das Moment aus der Resultierenden F_R mit ihrem Hebelarm a_R

$$M_A = -F_R a_R$$

Diese resultierende Wirkung ist sicher gleichbedeutend mit der der Teilkräfte. Man spricht vom *Satz der statischen Momente*:

- Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aus den Einzelkräften.

Diese Aussage läßt sich für i Momente ($i = 1, \dots, n$) wie folgt mathematisch formulieren:

$$F_R a_R = F_1 a_1 + F_2 a_2 + \dots + F_n a_n$$

- $$F_R a_R = \sum_{i=1}^n F_i a_i \quad (11)$$

1.2.3. Parallelverschiebung einer Kraft

Das Kräftepaar, zwei gleich große Kräfte, entgegengesetzt gerichtet und mit parallelen Wirkungslinien, ergibt ein statisches Moment. Parallele Lageänderungen der Kraftwirkungslinien müssen demnach zu Momentenänderungen führen. Betrachten wir hierzu Bild 25. Die Konsole wird (1. Belastungslage) durch die Kraft F im Abstand a_1 belastet. Verschiebt man diese Belastung parallel nach rechts bis zum Abstand a_2 (2. Belastungslage), dann hat sich am vertikalen Kräftezustand nichts geändert. Die Momentenwirkung auf den Ständer ist jedoch größer geworden; die Standsicherheit kann gefährdet sein. Wie läßt sich diese Momentenänderung allgemein darstellen? Wir tragen nach Bild 25 in die neue Lage, parallel

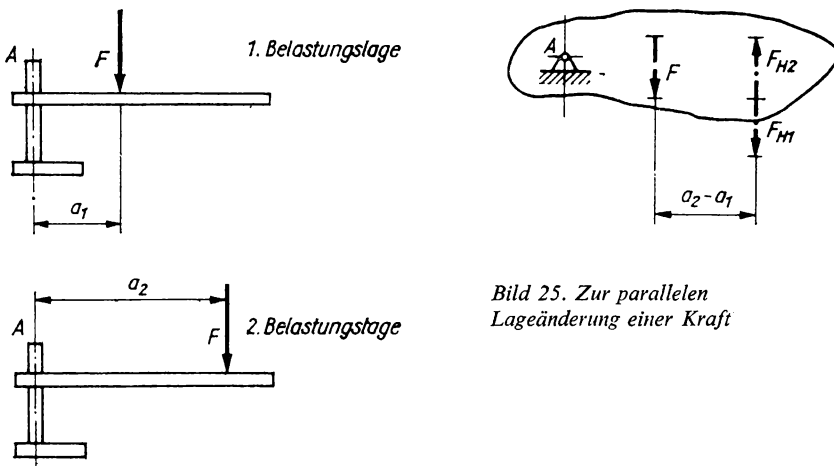


Bild 25. Zur parallelen Lageänderung einer Kraft

zu F , zwei Hilfskräfte ein. Ihre Beträge entsprechen der Belastung ($F = F_{H1} = F_{H2}$). Dadurch ändert sich an der Gesamtbelastung nichts; denn beide Hilfskräfte heben sich gegenseitig auf. Die Wirkung dieser drei Kräfte läßt sich nun wie folgt analysieren: F_{H1} kennzeichnet die Belastung F in der zweiten Belastungslage. Die beiden übrigen Kräfte F und F_{H2} ergeben ein Kräftepaar und damit ein statisches Moment vom Betrag $M = F(a_2 - a_1)$. Soll der gesamte Gleichgewichtszustand am Körper erhalten bleiben, dann müssen wir den durch Parallelverschiebung der Kraft entstandenen Momentenzuwachs kompensieren, d. h., wir müssen ein Gegenmoment vom gleichen Betrag hinzufügen (Bild 26).

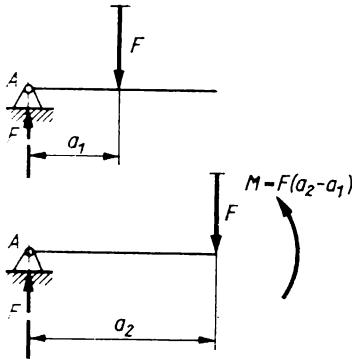


Bild 26. Zur Parallelverschiebung einer Kraft

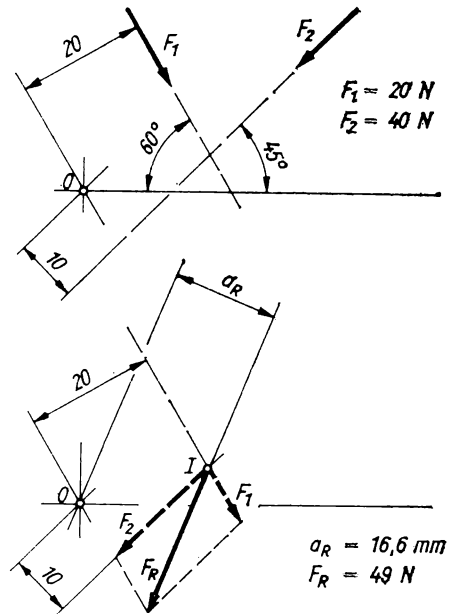


Bild 27. Zu Lehrbeispiel 4

0 20 40 60
Kräftemaßstab in N

1.2.4. Zeichnerische und rechnerische Elementaraufgaben

► Lehrbeispiel 4

Die Kräfte F_1 und F_2 (Bild 27) haben bezüglich O statische Momente. Gesucht ist das statische Moment der Resultierenden. Lage und Größe der Resultierenden sind zeichnerisch zu ermitteln.

Lösung:

Wir zeichnen mit den beiden Kräften, gemeinsamer Schnittpunkt I , das Kräfteparallelogramm. Es ergibt sich $F_R = 49$ N. Vom Bezugspunkt O aus läßt sich ihr Hebelarm $a_R = 16,6$ mm abmessen. Das Moment der Einzelkräfte muß dem Moment der Resultierenden entsprechen.

Moment der Einzelkräfte um O :

$$\Sigma M_O = -F_1 a_1 - F_2 a_2 = -20 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm} - 40 \text{ N} \cdot 10 \text{ mm}$$

$$\Sigma M_O = -800 \text{ Nmm}$$

Moment der Resultierenden um O (aus zeichnerischen Zwischenwerten):

$$M_O = -F_R a_R = -49 \text{ N} \cdot 16,6 \text{ mm} = -813 \text{ Nmm}$$

Beide Momente, soweit man das zeichnerisch ermitteln kann, stimmen überein.

► Lehrbeispiel 5

Für die vier Kräfte nach Bild 28 soll der Hebelarm der Resultierenden rechnerisch ermittelt werden.

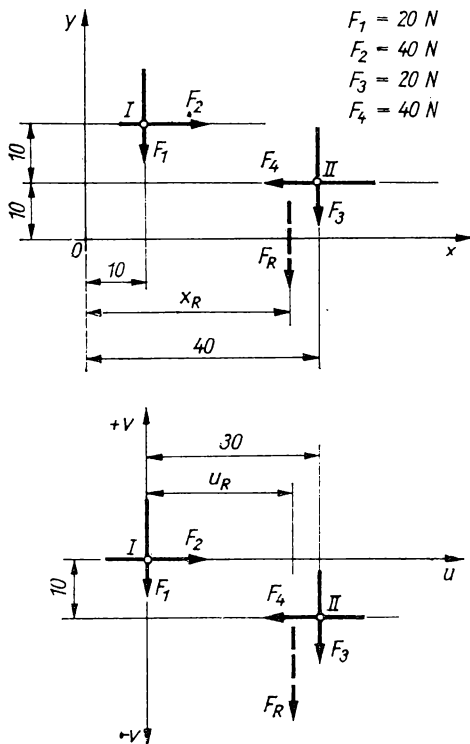


Bild 28. Zu Lehrbeispiel 5

Lösung

Wir beziehen uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Summe der Momente um O (Ursprung des x,y -Koordinatensystems) durch die Kräfte F_1 bis F_4 :

$$\begin{aligned} \Sigma M_O &= -F_1 x_1 - F_2 y_2 - F_3 x_3 + F_4 y_4 \\ &= -20 \text{ N} \cdot 10 \text{ mm} - 40 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm} - 20 \text{ N} \cdot 40 \text{ mm} + 40 \text{ N} \cdot 10 \text{ mm} \\ &= -1800 \text{ Nmm} + 400 \text{ Nmm} = -1400 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Moment der Resultierenden um O :

$$M_O = -F_R x_R$$

Die hier fehlende Resultierende ist aus der Wirkung ihrer Einzelkräfte zu ermitteln. In horizontaler Richtung heben sich die beiden Kräfte F_2 und F_4 auf. Die Resultierende kann daher nur die eingezeichnete vertikale Lage einnehmen. Ihr Betrag entspricht der Summe beider Einzelkräfte, so daß $F_R = F_1 + F_3 = 40 \text{ N}$ wird. Nach dem Satz der statischen Momente – Gl. (11) – entspricht das

Moment der Resultierenden der algebraischen Summe aus den Einzelmomenten. Daher folgt

$$x_R = \frac{\Sigma M_O}{F_R} = \frac{1400 \text{ Nmm}}{40 \text{ N}} = 35 \text{ mm}$$

Der Hebelarm für die Resultierende läßt sich auch mit einem anderen Bezugspunkt ermitteln. Wir wählen zu diesem Zweck ein neues Koordinatensystem (u, v) mit Ursprung im Schnittpunkt I der beiden Kräfte F_1, F_2 . Dadurch entfällt für sie die Momentenwirkung, die Rechnung wird kürzer. Summe der Momente um I (Ursprung des u, v -Koordinatensystems) durch die Kräfte F_3, F_4 :

$$\begin{aligned}\Sigma M_I &= -F_3 u_3 - F_4 v_4 = -20 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm} - 40 \text{ N} \cdot 10 \text{ mm} \\ &= -1000 \text{ Nmm}\end{aligned}$$

Moment der Resultierenden um I :

$$M_I = -F_R u_R$$

Am Kräftezustand hat sich durch die Wahl des neuen Bezugspunktes nichts geändert. Es bleibt bei $F_R = 40 \text{ N}$ (vertikale Richtung). Damit wird

$$u_R = \frac{\Sigma M_I}{F_R} = \frac{1000 \text{ Nmm}}{40 \text{ N}} = 25 \text{ mm}$$

Beide Hebelarme ($x_R = 35 \text{ mm}$ und $u_R = 25 \text{ mm}$) bestimmen die gleiche Lage der Resultierenden; denn es ist

$$x_R = 10 \text{ mm} + u_R = 35 \text{ mm}$$

■ Übungen 6 und 7

1.3. Freimachen, Schneiden, Überlagern

Freimachen oder Schneiden fester Körper sind Arbeitstechniken der Technischen Mechanik zur Aufbereitung ihrer Aufgaben. Wir müssen aus dem gesamten und oft umfangreichen technischen Gebilde, also aus einer Maschine oder aus einem Gerät, den einzelnen Untersuchungsgegenstand herauslösen und dort den statischen Kräftezustand eintragen. Dann erst lassen sich mit den bewährten Arbeitsmethoden der Statik die gesuchten äußeren oder inneren Kräfte, die Kräfte an oder in Tragelementen, Maschinen- oder Bauteilen bestimmen.

Freimachen

zur Kennzeichnung der Kräfte *am* Körper.

Aus der festen Verbindung des technischen Gebildes ist derjenige Körper vereinzelt herauszuzeichnen, für den die Stützreaktionen ermittelt werden sollen. Dann sind die Berührungstellen mit den benachbarten Körpern zu kennzeichnen. Hier trägt man alle Kräfte so an, wie sie auf den vereinzelt Körper einwirken.

Beispiel: Die Walze (Bild 29) liegt in einem Prisma auf dem Arbeitstisch. Wir wollen den Kräftezustand an der Walze kennzeichnen. Die Walze, als Untersuchungsgegenstand, ist von ihrer Umgebung zu lösen. An ihr tragen wir die Berührungs- oder Kontaktstellen A, B zum Nachbarkörper ein (Bild 29.1). Nun sind alle Kräfte einzuzichnen, die auf die Walze einwirken. Das sind als Belastung deren Eigengewicht $G = mg$ (vertikale Wirkungslinie durch den Massenmittelpunkt) und als Stützreaktionen die Stützkkräfte F_A, F_B . Dadurch entsteht Bild 29.2.

Soll das Prisma freigemacht werden, dann ist dieser Körper vereinzelt herauszuzeichnen. Das Prisma wird in (1) und (2) von der Walze sowie in C und D vom Arbeitstisch berührt (Bild 29.3). Hier tragen wir die Belastungen F_1 , F_2 sowie die Stützkkräfte F_C , F_D an. Nach dem Gegenwirkungsprinzip ist $F_1 = F_A$ und $F_2 = F_B$.

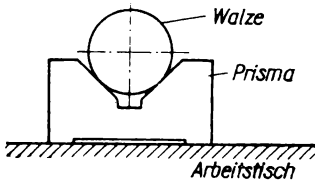


Bild 29. Freimachen:
Kräfte an den Körpern

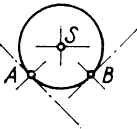


Bild 29.1

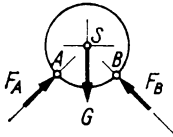


Bild 29.2

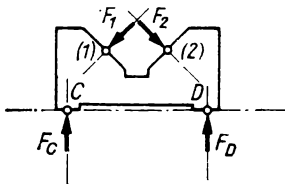


Bild 29.3

Bild 30. Schneiden:
Kräfte im Körper (Seil)

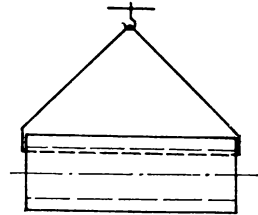


Bild 30.1

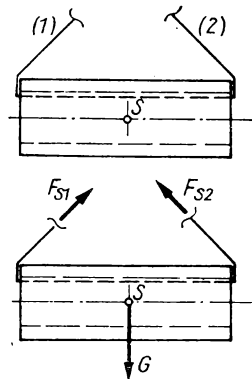


Bild 30.2

Schneiden

zur Kennzeichnung der Kräfte *im* Körper.

Aus dem technischen Gebilde ist die feste Verbindung desjenigen Körpers durch Schnitte zu trennen, für den die Schnittreaktionen ermittelt werden sollen. Am abgetrennten Körper sind alle Kräfte so einzutragen, wie sie auf ihn einwirken.

Beispiel: Ein Kran soll Rohre transportieren. Das Rohr ist mit dem Tragelement Seil am Kranhaken befestigt (Bild 30). Wir wollen zur Ermittlung der Seilkräfte den zugehörigen Kräftezustand kennzeichnen. Zu diesem Zweck muß man die Seilstränge schneiden (Bild 30.1) und dann Kräfte eintragen. Das sind die Belastung des Seiles durch das Rohrgewicht $G = mg$ und die Schnittkräfte F_{S1} , F_{S2} in den beiden Seilsträngen. Dadurch entsteht Bild 30.2.

Das Lösungsprinzip Überlagern wird auf umfangreichere Aufgaben angewendet, deren Ergebnisse sich nicht sofort mit den elementaren Arbeitsverfahren der Statik finden lassen. Man teilt zu diesem Zweck die gesamte Kräfteanordnung am Körper in geeignete einfache

Teilwirkungen auf, ermittelt diese und faßt sie wirkungsgerecht zusammen. Dieser Lösungsweg wird auch als lineare Superposition bezeichnet und in der Statik z. B. bei Gelenkträgern angewendet. Mit diesem Hinweis wollen wir uns hier begnügen.

■ Übungen 8 bis 10

1.4. Das technische Gebilde als Modell

1.4.1. Modellentwicklungen

Die mechanischen Eigenschaften fester Körper sind im speziellen technischen Fall an das technische Gebilde, also an die Eigenschaften einer Maschine, einer Baugruppe oder eines Bauteiles gebunden.

Bei statischen Aufgaben haben wir unter der Bedingung konstanter Geschwindigkeit (einschließlich Ruhezustand) überwiegend Kräfte zu ermitteln, die das technische Gebilde belasten und stützen. Diese Kräfte sind jedoch nicht unmittelbar sichtbar. Wir wissen nur, daß sie aufgenommen und übertragen werden.

Das Gewicht eines Bauteiles kann in die technische Zeichnung als senkrecht nach unten wirkender Vektor eingetragen werden. Seine Wirkungslinie geht durch den Schwerpunkt hindurch. Damit machen wir diese Kraft sichtbar. Wir zeichnen ihre Lage (im Schwerpunkt des Körpers), ihre Wirkung (vertikale Wirkungslinie) und ihren Wirkungssinn (Pfeilrichtung nach unten). Diese Darstellung einer Kraft nach Ort (auch Angriffspunkt), Wirkungslinie und Wirkungssinn genügt vorerst. Ein bestimmter Betrag ist damit noch nicht festgelegt; denn die Länge des Vektors wird auf seiner Wirkungslinie nicht maßstäblich gezeichnet. Weitere Kräfte stellt man in gleicher Weise dar. Ihr Wirkungsort ist durch die Berührung benachbarter Bauteile gegeben. Hier werden Kräfte übertragen, das technische Gebilde belastet oder gestützt.

Hierzu ein Beispiel:

Bild 31 zeigt als technisches Gebilde einen Lampenträger, der das Gewicht der Beleuchtungseinrichtung – gekennzeichnet durch G_1 – aufzunehmen hat. Auch das Gewicht G_2 des Schwenkarmes, das in seinem Schwerpunkt wirkt, soll berücksichtigt werden. Damit kennen wir die Belastung des technischen Gebildes. Wo treten die Stützkkräfte auf? Der Lampenträger ist in A und B_1 fest und drehbar mit der Säule verbunden. Dort befinden sich seine Berührungsstellen zum Nachbarkörper. Wir machen ihn hier frei und tragen Kräfte ein, die die vereinzelte Baugruppe stützen. (Man kann gedanklich bei A und B_1 den Lampenträger mit beiden Händen stützen und die dabei aufzuwendenden Kräfte sinngemäß als Vektoren in das Bild eintragen.)

Hierzu folgende Überlegungen:

1. In A ist der Schwenkarm drehbar gelagert, jedoch fest mit der Säule verbunden. Hier sind Drehungen möglich, aber keine vertikalen und horizontalen Lageänderungen. Die resultierende Stützkraft F_A könnte schräg nach links oben wirken. Ihre genaue Richtung ist noch unbekannt. Daher trägt man einstweilen ihre beiden Komponenten F_{Ay} und F_{Ax} ein.

2. In B_1 ist eine Stütze befestigt, die die gesamte Einrichtung in ihrer Gleichgewichtslage hält. Der Schwenkarm würde sonst durch die beiden Gewichtsflüsse um A nach unten drehen. Diese Stütze enthält eine hydraulisch wirkende Rückstellvorrichtung, um jede notwendige Lage der Beleuchtungseinrichtung zu stabilisieren. Nach Zeichnung nimmt sie den Richtungswinkel α ein. Da Bauteil B an seinen beiden Enden drehbar gelagert ist und der Hydraulikkolben mit seiner Kolbenstange einwandfrei aus- und einfahren soll, darf nur in Bauteil-Längsrichtung eine Stützkraft wirken. Man bezeichnet solche Stützeinrichtungen als Pendelstützen. Ihre Richtungen stimmen mit der Wirkungslinie überein. Wir können den Vektor für F_B einzeichnen.

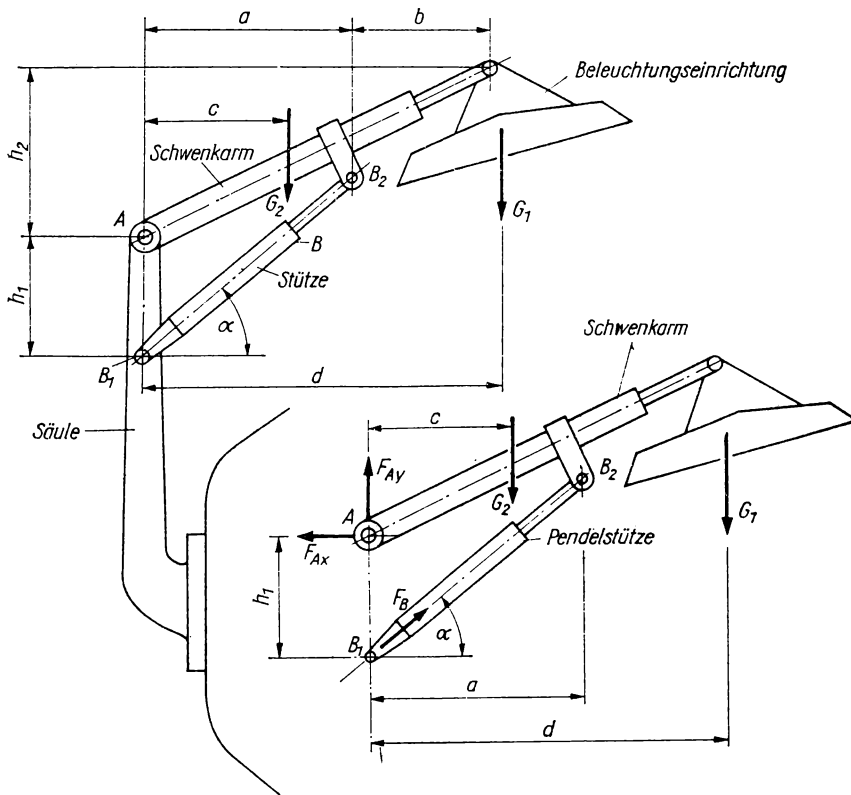


Bild 31.1

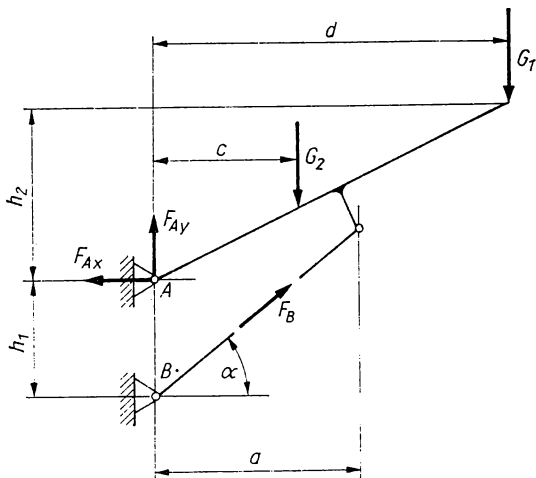


Bild 31.2

Bild 31. Technisches Gebilde: Lampenträger

31.1. Freigemachtes technisches Gebilde

31.2. Strukturbild

In allen Fällen mußten wir uns für einen Wirkungssinn der Stützreaktionen entscheiden. Es wurden Pfeilrichtungen eingetragen, die der notwendigen Stützwirkung entsprechen können. Erst die zeichnerische oder rechnerische Lösung wird uns den tatsächlichen Wirkungssinn liefern und damit die getroffenen Festlegungen bestätigen oder negieren. Der Lernende, dem die Eintragung der Kraftpfeile am Anfang sicher nicht leicht fällt, kann keinen absoluten Fehler machen. Er arbeitet sich aber bereits mit diesen Festlegungen und Annahmen in die Aufgabe ein und wird in zunehmendem Maße eine bessere Übereinstimmung zwischen angenommener und tatsächlicher Pfeilrichtung erreichen. Einwandfrei sind jedoch Wirkungsort und -linie der Stützkkräfte festzulegen.

Das freigemachte technische Gebilde nach Bild 31.1 enthält noch Einzelheiten der Bauteilformen, die für statische Aufgaben nicht notwendig sind. Wir dringen erst mit ihren Abstraktionsformen zum Kern der Aufgabenstellung „Darstellung der Kräfteanordnung zwischen Belastung und Stützung“ vor. Daher erfaßt das Strukturbild (Bild 31.2) nur noch wesentliche Elemente: die Belastungen, Symbole für das Festlager und für die Pendelstütze sowie feste Verbindungen zwischen ihnen. Solche Modelldarstellungen realisieren eine Vielfalt konkreter technischer Gebilde. Sie haben sich als Ausgangspunkt für die Lösungsverfahren der Statik gut geeignet.

Fassen wir zusammen:

Das Strukturbild der Statik (hier für den Lampenträger) berücksichtigt folgende Gesichtspunkte:

1. Die geometrischen Eigenschaften des technischen Gebildes (Längen a , d , h_1 , h_2 und Winkel α);
2. die wirkende Belastung (Gewichte G_1 und G_2 mit ihren Abständen d und c);
3. die Abstützung (Festlager A und Pendelstütze B)

Im Festlager wirkt F_A . Hier ist nur ein Punkt ihrer Wirkungslinie bekannt. Die Eigenschaften dieses Lagers werden durch zwei Komponenten F_{Ax} , F_{Ay} angegeben. In Richtung der Pendelstütze B wirkt F_B ;

4. die abstrahierten Bauteilformen (Feste Verbindungselemente zwischen Belastung und Stützung).

Zu den geometrischen Eigenschaften eines mechanischen Modells der Statik ist noch eine wichtige Festlegung zu treffen.

Belastete Bauteile verformen sich. Dadurch entstehen geringfügige Lageabweichungen, die von allen Kräften, also auch von den Stützkkräften, abhängig sind. Da letztere erst ermittelt werden müssen, sind wir im Rahmen der Statik auch noch nicht in der Lage, diese geometrischen Änderungen im voraus zu bestimmen.

- Die Kennzeichnung „fester Körper“ schließt im Rahmen der Statik den absolut „starrten Körper“ ein, der durch Kräfte keine Formänderungen erhält.

Ein weiteres Beispiel:

Bild 32 zeigt eine Förderbrücke mit Laufkran. Als Belastungen wirken G_1 (unmittelbare Lastaufnahme), G_2 (Eigengewicht des Laufkranes) und F_q (Eigengewicht des schweren Brückenträgers). Wir wollen die Stützkkräfte der Förderbrücke kennzeichnen. Die linke Stütze ist als Pendelstütze ausgebildet, da sie oben und unten gelenkig verbunden ist. Dort wirkt F_A . Die rechte Stütze ist oben starr und biegesteif mit dem Brückenträger verbunden. Dadurch wurde der Träger als Halbrahmen ausgebildet. Unten befindet sich die gelenkige Verbindung zum Fundament. Das Festlager wirkt mit seinen Stützkomponten F_{Bx} , F_{By} .

Wir betrachten das Strukturbild mit seinen abstrahierten Bauteilformen (Bild 32.1).

Belastungen

Last- und Eigengewichte G_1 , G_2 , F_q mit ihren Abständen a , b , c .

Zur Kennzeichnung der Masseverteilung des Brückenträgers wurden Streckenlasten q_1 , q_2 (Belastungen je Längeneinheit) eingetragen. Beide wirken mit ihrer Stärke (Intensität) über die zugehörige Lastverteilungsstrecke. Ihr resultierender Betrag F_q ergibt sich aus dem Flächeninhalt der gezeichneten Lastverteilung. Ihr Angriffspunkt befindet sich im Schwerpunkt dieser Fläche.

Stützreaktionen

Pendelstütze A , drehbar an beiden Enden gelagert, Stützkraft F_A . Festlager B mit den beiden Stützkomponenten F_{Bx} , F_{By} .

Abstand der beiden vertikalen Stützkraften mit l .

Bauteilabstraktionen

Träger mit biegesteifer Ecke. Abstand d von B bis zur Schwerlinie des Mittelstückes. Die Länge der Pendelstütze ist für die Ermittlung der Stützkraft unbedeutend; denn die mit ihr vorgegebene vertikale Wirkungslinie wird durch die Stützweite l bestimmt.

Diese Aufgabe läßt sich auch noch anders modellieren. Wir wollen davon ausgehen, daß die Belastungen G_1 , G_2 über die Radkräfte des Laufkranes übertragen werden. Dann muß man gedanklich den Laufkran von der Brücke lösen und an den vorher gemeinsamen

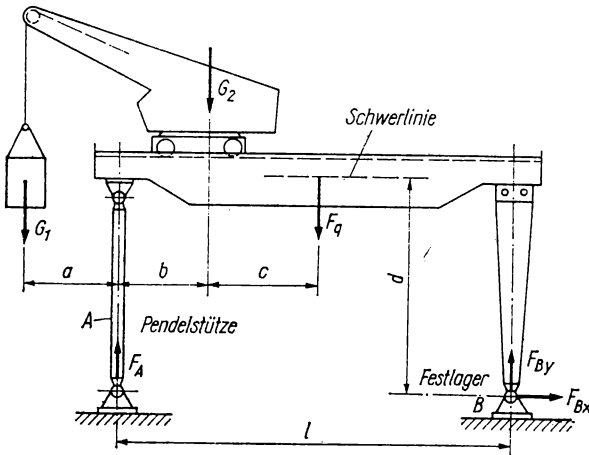


Bild 32. Schematische Darstellung zum technischen Gebilde: Förderbrücke mit Laufkran

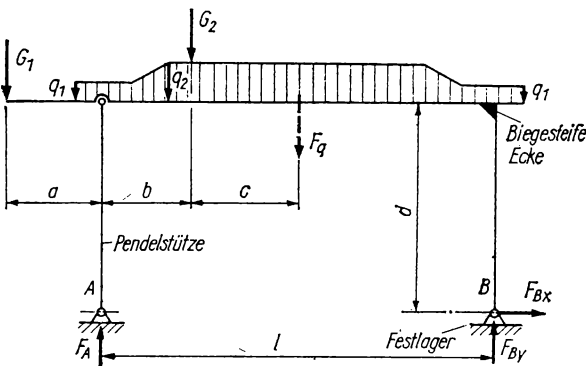


Bild 32.1. Strukturbild zur Förderbrücke mit Gewichtsbelastung

Berührungsstellen, den Rädern, seine Stützkräfte eintragen. Das so vereinzelt technische Gebilde zeigt Bild 32.2.

Belastungen G_1 und G_2 , Abstände e und f . Stützkräfte an den Rädern F_{A1} und F_{B1} mit dem Achsabstand l_1 .

Nach dem Gegenwirkungsprinzip wirken diese Stützkräfte belastend auf die Förderbrücke. Man muß daher hier nun F_{A1} und F_{B1} entgegengesetzt wirkend als Belastungen antragen

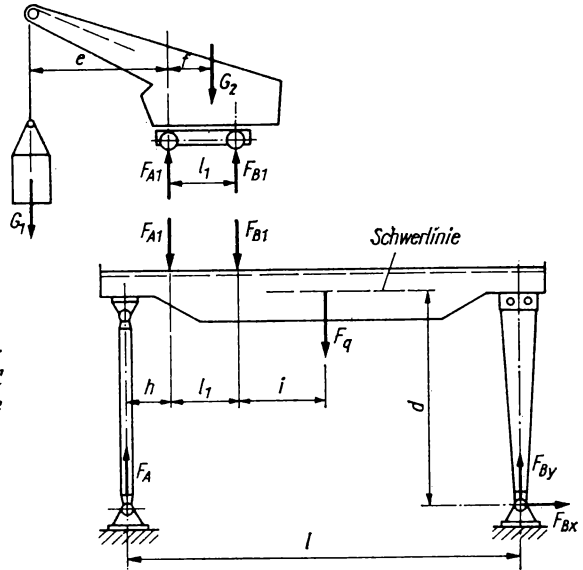


Bild 32.2. Schematische Darstellung des freigemachten Laufkranes und der freigemachten Förderbrücke

und die zugehörigen Abstände h , l_1 , i festlegen. Damit entsteht ein neues Strukturbild (Bild 32.3), das die unmittelbare Belastung durch den Laufkran enthält. An der Situation der Stützkräfte hat sich nichts geändert, denn es ist leicht einzusehen, daß im ersten Fall

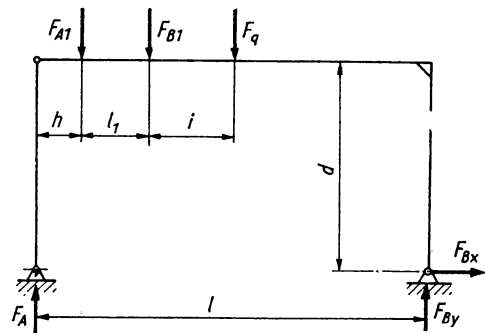


Bild 32.3. Strukturbild zur Förderbrücke mit Radlasten

Belastung nach Bild 32) die Förderbrücke die direkten Arbeitslasten und im zweiten Fall Belastung nach Bild 32.2) die aus den Arbeitslasten entstehenden Radlasten aufzunehmen hat.

Ein weiteres Beispiel:

Bild 33 zeigt einen Ausschnitt von der linken Lagerung einer Trommel. Die Konstruktion sieht einen fest eingespreßten Lagerbolzen vor. Für diesen Lagerbolzen ist das Strukturbild zu zeichnen. Die Belastung der Trommel verursacht im Gehäuselager eine Stützkraft. Wir wollen sie mit F bezeichnen. Vereinzelt man den Bolzen und trägt die auf ihn einwirkenden Kräfte ein, dann entsteht zunächst für ihn die Belastung aus F mit dem Hebelarm l bis zum Rand der Trommel. In der Trommelnabe ist der Bolzen fest eingespannt. Er wird dort gestützt. Welche Stützreaktionen müssen die einwandfreie Funktion dieses Bauteiles garantieren? Wir nehmen an, daß längs der festen Einspannung Kräfte wirken, die an den Rändern der Trommelnabe am größten sind und von dort aus linear abnehmen. Zu dieser Festlegung eine Zwischenbemerkung: Annahmen über Lastverteilungen gewinnt man anschaulich durch Formänderungsbetrachtungen mit Gummimodellen. In diesem Fall denkt man sich den starren Bolzen in eine Gummitrommel eingespannt. Die Belastung F wird dann die Nabe der Trommel verformen. Diese Formänderungen sind an ihrem inneren und äußeren Rand am größten und nehmen von dort aus ab. Da wir aber in der Statik den starren Körper, also auch starr wirkende Verbindungselemente voraussetzen, müssen zugehörige Kräfte mögliche Formänderungen wieder rückgängig machen. Wir geben dafür die Lastverteilung an (Bild 33.1). Ihre resultierende Kraft wirkt im Schwerpunkt der Lastverteilung, hier im Schwerpunkt der beiden Dreiecksflächen. Dadurch erhält man die beiden Stützkräfte F_A , F_B für den freigemachten Bolzen nach Bild 33.2. Das ist aber noch nicht das Strukturbild mit den notwendigen Bauteilabstraktionen, denn die ausgeführten Durchmesser d_1 und d_2 werden bei dieser Aufgabe nicht benötigt. Wir verzichten darauf und zeichnen einen fest eingespannten Träger mit der Belastung F und mit den Stützkraften F_A , F_B innerhalb der festen Einspannung (Bild 33.3). In vielen Fällen wird diese Kräfteanordnung noch weiter vereinfacht, um Kräfte und Momente als Stützreaktionen einer festen Einspannung zu kennzeichnen. Die Belastung des einseitig fest eingespannten Trägers (Strukturbild 33.4) besteht aus zwei Teilen, aus der Vertikalbelastung F und aus dem Belastungsmoment $M = Fl$. Beide Wirkungen sind von der Einspannung aufzunehmen. Daher muß zu F eine gleich große Gegenkraft, die Einspannkraft F_E , wirksam werden und zum Belastungsmoment ein gleich großes Gegenmoment, das Einspannmoment M_E .

■ Übungen 11 und 12

Bild 33. Technisches Gebilde zum Lagerbolzen einer Trommel

Bild 33.1. Kräfteverteilung in der Nabe

Bild 33.2. Belastung und Stützkraften am Lagerbolzen

Bild 33.3. Strukturbild des Lagerbolzens mit Belastung und Stützkraften

Bild 33.4. Strukturbild des Lagerbolzens mit Belastung, Einspannkraft und Einspannmoment

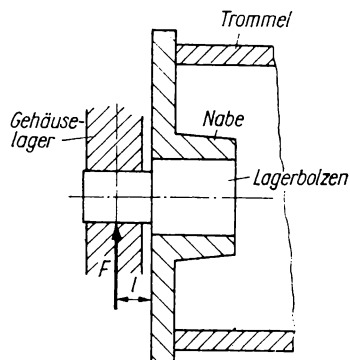


Bild 33

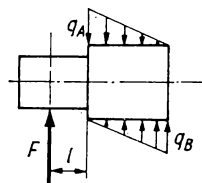


Bild 33.1

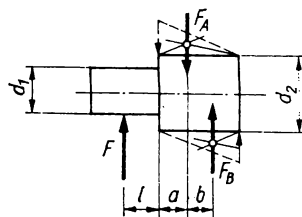


Bild 33.2

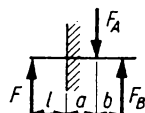


Bild 33.3

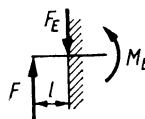


Bild 33.4

Zum Abschluß dieses Abschnittes noch ein Beispiel zur Entwicklung *räumlicher* Struktur-
bilder.

Bild 34 zeigt, räumlich skizziert, eine Welle mit Seiltrommel und ihrem Antriebsrad. Durch
das Heben der Last entsteht im Seil die Seilkraft F_S . Diesen Arbeitswiderstand hat der
Antriebsmotor aufzubringen. Er wirkt über Zahnradgetriebe auf die Welle der Seiltrommel.

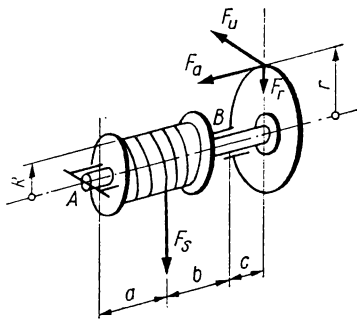


Bild 34
Schematische Darstellung
zur Seiltrommelwelle

Bild 34.1
Räumliches Strukturbild

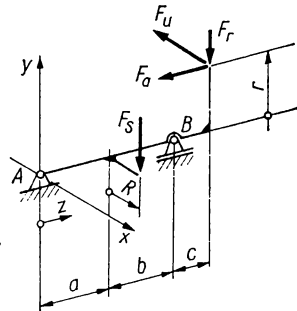


Bild 34.2. Strukturbild
der y,z-Ebene

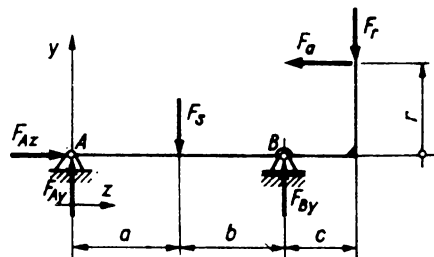
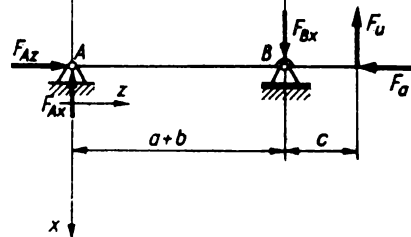


Bild 34.3. Strukturbild
der x,z-Ebene



Hier befindet sich das letzte Zahnrad. Die Konstruktion sieht dafür eine Schrägverzahnung
vor. Eine solche Verzahnungsgeometrie bedingt drei Zahnkraftkomponenten: Umfangs-
kraft F_a , Radialkraft F_r und Axialkraft F_a . Alle vier Belastungskräfte, die wir als gegeben
voraussetzen, sind von den Lagern der Welle aufzunehmen. Hier wird das technische Gebilde
gestützt.

Durch die Axialkraft F_a könnte die Welle axial verschoben werden. Diese Tendenz ist von
einem Lager zu verhindern. Die Skizze deutet an, daß Lager A die Welle axial sichern soll.
Hier befindet sich demnach das *Festlager*. Das zweite Lager, hier Lager B, muß dann axiale
Verschiebungen zulassen, damit sich z. B. die mit der Belastung und durch Temperatur-
einwirkungen verbundenen Formänderungen in axialer Richtung ungehindert ausbilden
können. Man bezeichnet solche Lager als *Loslager*.

Dem räumlichen Strukturbild (Bild 34.1) wird ein räumliches Koordinatensystem zugeordnet. Sein Ursprung befindet sich im Festlager A . Man erkennt folgende Modellelemente:

Festlager A zur Stützung in den drei Koordinatenrichtungen. Hier können demnach drei Stützkomponenten wirksam werden.

Loslager B zur Stützung in zwei Koordinatenrichtungen, das aber eine ungehinderte Verschiebung in z -Richtung zuläßt. Dieses Lagersymbol erhält daher parallel zur z -Richtung einen Doppelstrich. Stützkkräfte können nur senkrecht dazu aufgenommen werden.

Belastung durch F_s am Trommelradius R und durch die Zahnkräfte F_u, F_r, F_a am Zahnradradius r .

Bauteilabstraktionen als einfache, starr wirkende Verbindungen zwischen Belastung und Lagerung. Hauptverbindung längs der Wellenachse und Nebenverbindungen zur Seilkraft F_s sowie zu den Zahnkraftkomponenten. Diese Stücke sind biegesteif mit dem Hauptträger verbunden. Wir geben diese Eigenschaft durch die eingezeichneten Verstärkungen an.

Räumliche Strukturbilder sind für den Lernenden noch nicht genügend aufbereitet. Man bedient sich daher nun der Methode des technischen Zeichnens und bildet räumliche Darstellungen in zugeordneten Ebenen als Aufriß, Grundriß, Seitenriß ab. Zur Kennzeichnung der Stützkkräfte genügt bei dieser Aufgabe je ein Strukturbild für die Vertikal- und Horizontalebene. Sie entsprechen dem Auf- und Grundriß.

Strukturbild der Vertikalebene (y,z -Ebene) nach Bild 34.2:

Belastungen: Seilkraft F_s , Zahnkraftkomponenten F_r, F_a .

Die Umfangskraft wirkt in x -Richtung. Sie kann hier nicht als pfeilgerichtete Strecke abgebildet werden.

Lagerung: Festlager A mit den Stützkraftkomponenten F_{Az}, F_{Ay} .

Loslager B nur mit der Stützkraftkomponente F_{By} . In z -Richtung kann durch die freie Beweglichkeit dieses Lagers keine Stützkraft wirken.

Bauteilabstraktionen: Abgewinkelter Träger mit biegesteifer Ecke von A bis zu den Flanken des Zahnrades.

Strukturbild der Horizontalebene (x,z -Ebene) nach Bild 34.3:

Belastungen: Zahnkraftkomponenten F_u, F_a . Radial- und Seilkraft wirken senkrecht zur Ebene. Sie lassen sich hier nicht als pfeilgerichtete Strecke eintragen.

Lagerung: Festlager A mit Axialkraft F_{Ax} und Radialkraft F_{Ax} .

Loslager mit der Radialkraft F_{Bx} .

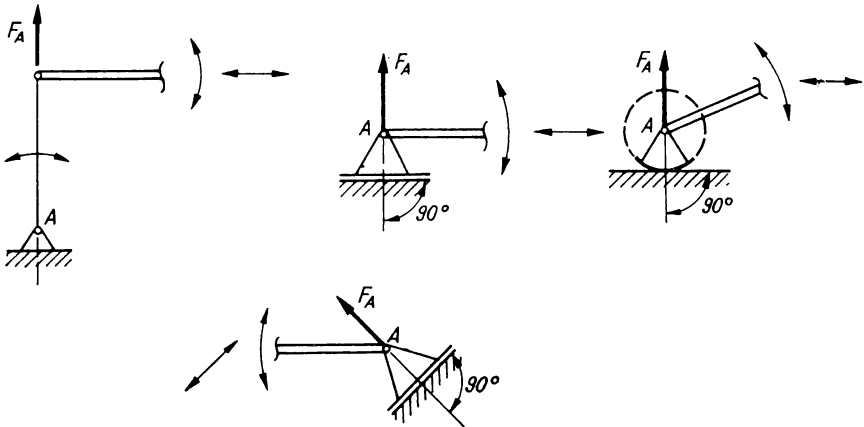
Bauteilabstraktionen: Längsverbindung vom Festlager bis zum Zahnrad.

Auch dieses Beispiel zeigt deutlich, wie klar und anschaulich die gesamte Kräfteanordnung des technischen Gebildes mit dem Strukturbild wird. Die Belastungen sind als Arbeitswiderstände gegeben oder ohne besonderen Aufwand zu ermitteln. Für die Stützkkräfte wurden Stütz- oder Lagersymbole vereinbart. Man muß sie, wie auch andere schematisierte Darstellungen der Technik, nach festgelegten Eigenschaften beurteilen können. Wir stellen sie in Bild 35 zusammen.

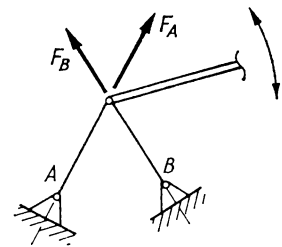
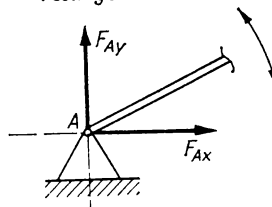
● *Pendelstützen und Loslager* gewährleisten eine ungehinderte Drehung der angeschlossenen Bauteile sowie ihre Verschiebung senkrecht zur Stützrichtung. Diese Lageänderungen werden durch Kräfte nicht aufgenommen. Die Wirkungslinie der Stützkraft stimmt mit der Pendelstützeinrichtung überein. Beim Loslagersymbol verläuft die Kraftrichtung senkrecht zur Auflage.

- *Festlager* gewährleisten nur eine ungehinderte Drehung der angeschlossenen Bauteile. Verschiebungen sind ausgeschlossen. Von der resultierenden Kraftwirkungslinie kennen wir nur einen Punkt, den Angriffspunkt. Wir geben von dort aus zwei Komponenten an. Bei der Darstellung eines Festlagers durch zwei Pendelstützen sind mit ihnen zwei Wirkungslinien vorgegeben.

Pendelstütze, Loslager



Festlager



Feste Einspannung

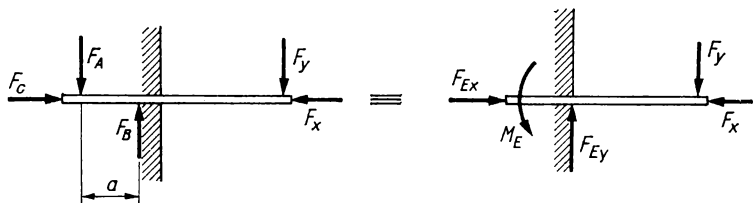


Bild 35. Stützsymbole in den Strukturbildern

- *Feste Einspannungen* lassen weder Drehungen noch Verschiebungen der angeschlossenen Bauteile zu. In der festen Einspannung wirken drei Kräfte, die Einspannkräfte und ein Einspannmoment erzeugen müssen. Diese identische Ersatzlösung genügt, wenn die Stützverhältnisse in der Einspannung nicht näher untersucht werden sollen.

■ Übung 13

1.4.2. Modellbearbeitungen

Mit der Entwicklung statischer Modelle wurden Kräfteanordnungen sichtbar gemacht, die das technische Gebilde belasten und stützen. Dazu enthält das Strukturbild Belastungsangaben, Stützsymbole mit vereinbarten Stützreaktionen und notwendige Bauteilabstraktionen, um für die weitere Bearbeitung dieser Aufgaben nur noch wichtige, wesentliche Merkmale zu erhalten. Praxis (technische Gebilde) und Theorie (Strukturbild) müssen übereinstimmen. Falsche Übertragungen führen zu Fehlentscheidungen, weil sie nicht mehr die objektive Realität widerspiegeln.

Zur Ermittlung der gesuchten Kräfte sind weitere Eigenschaften der gesamten Kräfteanordnung zu suchen. Dazu muß der Bearbeiter das Modell noch weiter durchdringen. Je gründlicher das geschieht, desto besser wird er in der Lage sein, mit einer ökonomisch vertretbaren Arbeitsweise zum Ziel zu kommen. Jede oberflächliche Betrachtung hingegen führt selten zum Endergebnis. Sie enthält oft die Gefahr, in der Aufgabe steckenzubleiben.

Systematische Kräfteanordnungen nach dem Strukturbild führen für Kräfte in der Ebene zu folgenden Einteilungsgesichtspunkten:

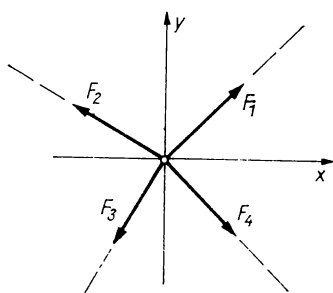


Bild 36. Zum zentralen Kräftesystem der Ebene

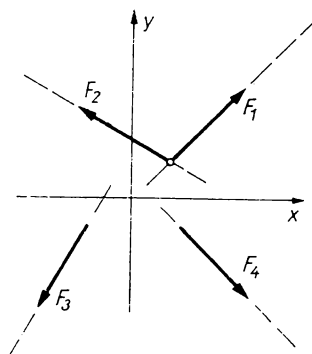


Bild 37. Zum allgemeinen Kräftesystem der Ebene

- **Zentrales Kräftesystem** (Bild 36)

Sämtliche Kraftwirkungslinien schneiden sich in einem Punkt. Es liegt ein Kräftebüschel vor.

- **Allgemeines Kräftesystem** (Bild 37)

Alle Kraftwirkungslinien schneiden sich nicht in einem Punkt. Es handelt sich um eine Kräftegruppe.

Konzentrieren wir uns daher nun auf die Kraftwirkungslinien im Strukturbild. Wir legen für unsere Arbeitsweise fest:

- Den gemeinsamen Schnittpunkt, die Vereinigung der Kraftwirkungslinien, nennen wir *Wirkungsknoten*.

Das zentrale Kräftesystem – nur ein gemeinsamer Schnittpunkt – enthält daher nur einen Wirkungsknoten. Beim allgemeinen Kräftesystem der Ebene lassen sich hingegen mehrere Wirkungsknoten konstruieren. Trotzdem gibt es beim zentralen Kräftesystem zwei unterschiedliche Aufgabensituationen.

Hierzu die beiden Beispiele:

1. Bild 38 (Ausschnitt aus Bild 32) zeigt die durch Seilschnitte herausgetrennte Rolle. Die Seilrolle ist drehbar gelagert; Verschiebungen sind nicht möglich. Welche Kraft hat das Festlager A aufzunehmen? Wir bearbeiten das Modell. Nur drei Kräfte wirken insgesamt an der Rolle, die beiden Seilkräfte $F_S = G_1$ und die Stützkraft F_A . Das müßte ein zentrales Kräftesystem werden. Wir arbeiten mit den Kraftwirkungslinien. Die beiden Seilkräfte schneiden sich im Wirkungsknoten I . Die dritte Kraft hat als Lager- oder Stützkraft ihren Angriffspunkt in A . Ihre Wirkungslinie ist scheinbar noch unbekannt. Statisches Kräftegleichgewicht liegt jedoch dann vor, wenn sich alle drei Kräfte in einem Punkt schneiden. Daher bestimmen die beiden Punkte, Kraftangriffspunkt A und Wirkungsknoten I , die Wirkungslinie für F_A . Erst durch diese Konstruktion erkennt man das zentrale Kräftesystem mit Wirkungsknoten.

2. Bild 39 (ebenfalls ein Ausschnitt aus Bild 32) zeigt die angehängte Last. Wir schneiden das Hubseil und stellen zuerst fest, daß nach dem Gegenwirkungsprinzip die Schnittkraft (Seilkraft) F_S dem angehängten Gewicht G_1 entspricht. Das Seil oder die Kette um den Transportbehälter wird nach dessen Maßen gespreizt. Wir schneiden beide Seilstränge und tragen die Schnittkräfte F_{S1} , F_{S2} ein. Insgesamt wirken auch bei dieser Aufgabe drei Kräfte. Ihr gemeinsamer Schnittpunkt ist jedoch mit dem Strukturbild schon gegeben. Das ist im Gegensatz zur Aufgabe nach Bild 38 eine vereinfachte Situation, die wir besonders ansprechen wollen.

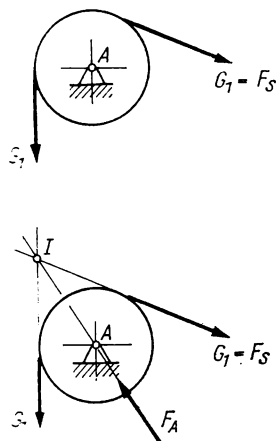


Bild 38
Zentrales Kräftesystem
mit Wirkungsknoten

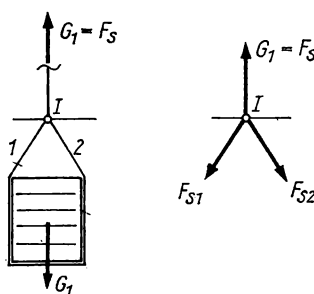


Bild 39. Zentrales Kräftesystem
mit Strukturknoten

● Der mit dem Strukturbild bereits bekannte Schnittpunkt von Kraftwirkungslinien wird *Strukturknoten* genannt.

Das zentrale Kräftesystem ist bei einer solchen Aufgabenstellung schon gegeben. Das allgemeine Kräftesystem der Ebene regt schon durch die Bezeichnung „allgemein“ zum weiteren Durchdenken der Kräftegruppe an. Die Vielfalt solcher Aufgaben läßt sicher zwei, drei und mehr Schnittpunkte zu. Zwei Strukturbilder sollen das verdeutlichen. Bild 40 zeigt einen durch F belasteten Träger mit seinen drei Pendelstützen a , b , c . Welches Kräftesystem liegt vor?

Die Kraftwirkungslinie für F ist gegeben. Pendelstützen können nur Kräfte in ihren Richtungen aufnehmen. F_a , F_b , F_c stimmen mit ihnen überein. Wir suchen oder konstruieren gemeinsame Schnittpunkte. Lagerstelle B ist zugleich Schnittpunkt der beiden Kräfte F_b und F_c . Hier liegt ein Strukturknoten vor. Lagerstelle A enthält nur eine Wirkungslinie, die von F_a . Sie kann aber mit der Wirkungslinie von F in I geschnitten werden. Hier befindet sich ein Wirkungsknoten. Weitere Kraftwirkungslinien gibt es nicht. Das bearbeitete Struk-

turbild enthält zwei Schnittpunkte. Daher gehört diese Aufgabe zum allgemeinen Kräftesystem mit je einem Struktur- und Wirkungsknoten.

Hinweis: Zwei Schnittpunkte erhält man auch durch F_a mit F_c (Strukturknoten in A) sowie durch F mit F_b (Wirkungsknoten auf der verlängerten Pendelstütze b). Die vorher festgelegte Einordnung dieser Aufgabe wird dadurch nicht beeinträchtigt, auch nicht das nachfolgende Lösungsverfahren.

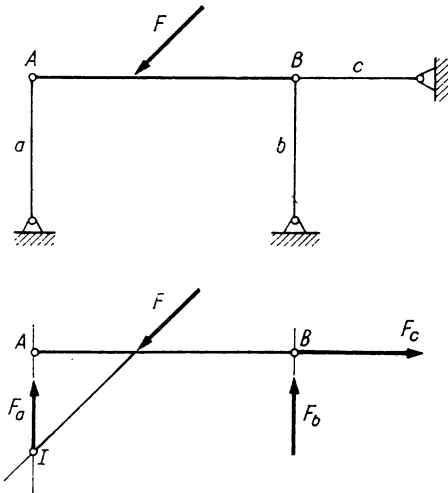


Bild 40. Allgemeines Kräftesystem mit je einem Struktur- und Wirkungsknoten

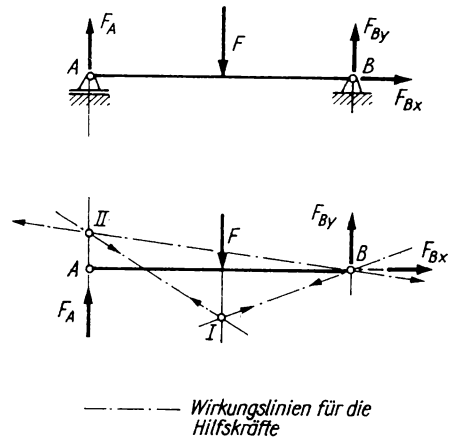


Bild 41. Allgemeines Kräftesystem mit zwei Wirkungs- und einem Strukturknoten

Die Aufgabe nach Bild 41 läßt keine zwei Schnittpunkte zu, weil F und F_A parallel zueinander gerichtet sind. Wir werden aber später noch zeigen, daß in diesem Fall durch das Eintragen weiterer Wirkungslinien für angenommene Hilfskräfte die drei eingezeichneten Schnittpunkte – Strukturknoten B , Wirkungsknoten I und II – entstehen. Ein solches Lösungsverfahren liegt allen Kräfteanordnungen zugrunde, deren Wirkungslinien sich nicht in einem oder in zwei Schnittpunkten vereinigen lassen.

■ Übungen 14 und 15

2.1. Zentrales Kräftesystem

Die Grundbegriffe in Abschn. 1.1. setzen den gemeinsamen Schnittpunkt aller Kraftwirkungslinien und damit das zentrale Kräftesystem voraus. Wir können hier diesen Lehrstoff weitgehendst wiederholen.

2.1.1. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften

2.1.1.1. Zeichnerisches Verfahren – Krafteck

Zeichnerisch lassen sich Kräfte zu ihrer Resultierenden zusammenfassen oder eine Kraft in ihre Komponenten zerlegen. Wir beziehen uns auf das Krafteckverfahren und zeichnen parallel zu den gegebenen Wirkungslinien maßstabgerecht Kraftvektoren als pfeilgerichtete Strecken. Die Resultierende entspricht dem Verbindungsvektor von Anfang bis zum Ende der Vektorenfolge. Bei der Komponentenermittlung muß man den umgekehrten Weg gehen. Hier ist eine Kraft und damit die Resultierende der beiden Komponenten gegeben. Wir legen durch ihren Anfangs- und Endpunkt je eine der beiden Wirkungslinien und begrenzen mit dem gefundenen Schnittpunkt die gesuchten Kraftvektoren.

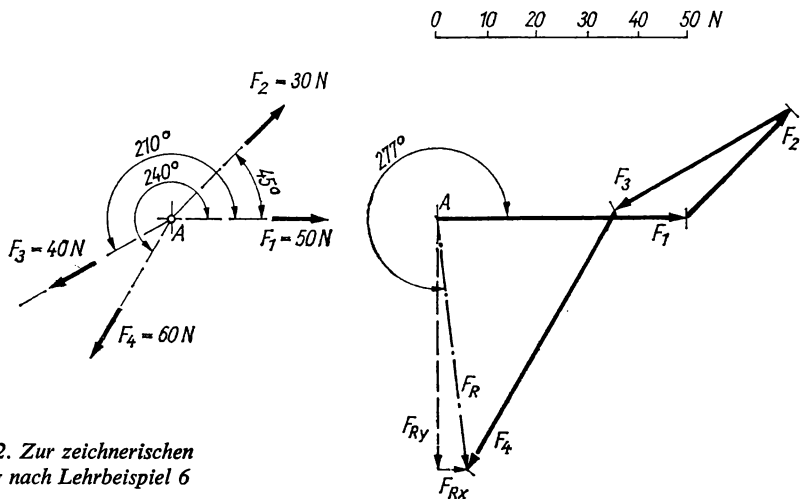


Bild 42. Zur zeichnerischen
Lösung nach Lehrbeispiel 6

► Lehrbeispiel 6

Vier Kräfte wirken nach Bild 42. Gesucht ist ihre Resultierende. Anschließend ist die Resultierende in ihre vertikale (y -Richtung) und horizontale (x -Richtung) Komponente zu zerlegen.

Lösung:

Wir zeichnen mit den gegebenen Richtungswinkeln die Wirkungslinien und parallel dazu die Vektorenfolge nach den gegebenen Beträgen (Kräftemaßstab wählen!). Die Zeichnung liefert $F_R = 50 \text{ N}$ und $\alpha_R = 277^\circ$. Wenn man z. B. mit $M_F = 1 \text{ mm/N}$ arbeitet, dann ergibt sich zuerst $\langle F_R \rangle = 5 \text{ cm}$ und damit ein Betrag $F_R = \langle F_R \rangle / M_F = 50 \text{ mm} / (1 \text{ mm/N}) = 50 \text{ N}$.

Hinweis: Die Vektoren können in beliebiger Folge aneinander gereiht werden. Das Ergebnis wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Mit der Bedingung „vertikale und horizontale Komponenten“ sind Wirkungslinien für die Kraftzerlegung gegeben. Wir legen z. B. an den Anfangspunkt von F_R eine vertikale Wirkungslinie und an ihren Endpunkt eine horizontale Wirkungslinie. Ihr Schnittpunkt begrenzt beide Kräfte. Die Pfeile sind so einzutragen, daß sie den Weg vom Anfang bis zum Ende der Resultierenden beschreiben. Wir messen ab und erhalten $F_{Ry} = 49,5 \text{ N}$; $F_{Rx} = 6,5 \text{ N}$.

2.1.1.2. Rechnerisches Verfahren

Rechnerisch beziehen wir uns auf die geometrischen Zusammenhänge bei rechtwinkligen Dreiecken. Man ordnet dem gemeinsamen Schnittpunkt den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems zu, rechnet mit Kräften bzw. deren Komponenten in diesen Richtungen und wendet zur Ermittlung der Resultierenden die Gln. (5) bis (8) aus 1.1.3. an. In diesen Rechnungen ist die Methode der Kraftzerlegung enthalten.

► Lehrbeispiel 7

Die Aufgabe nach Lehrbeispiel 6 ist rechnerisch auszuführen.

Lösung:

Wir beziehen uns auf Bild 43, das im vollständigen Koordinatensystem die Komponenten enthält, und rechnen diesmal mit spitzen Winkeln. Dadurch betragen die Komponenten der Kräfte (Rechnungen mit dem Rechenstab)

in x -Richtung: $F_{1x} = F_1 = 50 \text{ N}$; $F_{2x} = F_2 \cos 45^\circ = 21,2 \text{ N}$

$$F_{3x} = F_3 \cos 30^\circ = 34,6 \text{ N}$$

$$F_{4x} = F_4 \sin 30^\circ = 30 \text{ N}$$

in y -Richtung: $F_{1y} = 0$; $F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ = F_{2x} = 21,2 \text{ N}$

$$F_{3y} = F_3 \sin 30^\circ = 20 \text{ N}$$

$$F_{4y} = F_4 \cos 30^\circ = 52 \text{ N}$$

Nach Bild 43 liegen diese Komponenten auf positiven oder negativen Koordinatenrichtungen. Wir beachten dies und schreiben analog den Gln. (5) und (6)

$$F_{Rx} = +F_1 + F_{2x} - F_{3x} - F_{4x}$$

$$= +50 \text{ N} + 21,2 \text{ N} - (34,6 + 30) \text{ N} = +71,2 \text{ N} - 64,6 \text{ N}$$

$$= +6,6 \text{ N} \quad (\text{Das Pluszeichen gibt an, daß die } x\text{-Komponente der Resultierenden auf der positiven } x\text{-Achse liegt.})$$

$$F_{Ry} = +F_{2y} - F_{3y} - F_{4y} = +21,2 \text{ N} - (20 + 52) \text{ N} = -50,8 \text{ N}$$

(Das Minuszeichen weist darauf hin, daß die y -Komponente der Resultierenden auf der negativen y -Achse liegt.)

Positive x -Komponente und negative y -Komponente legen die Richtung der Resultierenden für den 4. Quadranten fest.

Betrag der Resultierenden nach Gl. (7):

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 10 \text{ N} \sqrt{0,66^2 + 5,08^2} = 51,2 \text{ N}$$

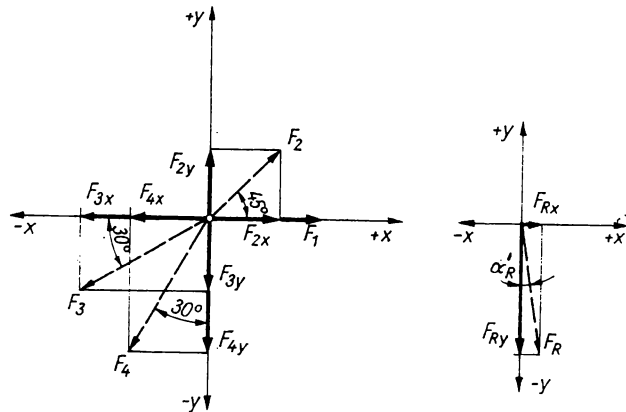
Richtungswinkel der Resultierenden von der negativen y -Achse aus (Bild 43) mit den Absolutbeträgen der Komponenten

$$\tan \alpha'_R = \frac{F_{Rx}}{F_{Ry}} = \frac{6,6 \text{ N}}{50,8 \text{ N}} = 0, \dots \Rightarrow \alpha'_R = 7,4^\circ$$

Das entspricht einem Winkel von der positiven x -Achse aus und nach der Quadrantenfolge $\alpha_R = (270^\circ + \alpha'_R) = 277,4^\circ$.

Zeichnerisch und rechnerisch gefundene Ergebnisse stimmen weitestgehend überein.

Bild 43. Zur rechnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 7



2.1.2. Gleichgewicht am Körper

In der Statik werden fast durchweg Gleichgewichtszustände technischer Gebilde untersucht. Aufgaben zur Kraftzerlegung und zur Ermittlung der Resultierenden haben vorbereitenden Charakter. Auch hier können wir die Erkenntnisse des Grundlagenabschnittes für Kräfte anwenden. Wir wissen bereits, daß zeichnerisch der Gleichgewichtszustand durch ein geschlossenes Krafteck mit fortlaufender Vektorenfolge herbeigeführt wird und daß rechnerisch nach den Gln. (9) und (10) statisches Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung vorhanden sein muß. Diese Gesetzmäßigkeiten sind nun auf technische Gebilde anzuwenden.

2.1.2.1. Zeichnerische Lösung – geschlossenes Krafteck

Die zeichnerische Lösung beginnt mit dem Strukturplan; denn das Strukturbild des technischen Gebildes ist maßstäblich zu entwerfen. Wir brauchen dazu den

$$\text{Längenmaßstab } M_L = \frac{\text{Längen auf der Zeichnung}}{\text{Längen des technischen Gebildes}}$$

Danach ist das Krafteck (Kräftemaßstab M_F annehmen!), geschlossener Zustand, fortlaufende Vektorenfolge, zur Festlegung des statischen Gleichgewichtes zwischen Belastung und Stützung zu zeichnen.

► Lehrbeispiel 8

Der Laufkran nach Bild 32 transportiert Behälter. Durch die Abmessungen des Behälters nehmen die angehängten Seile den Spreizwinkel $\alpha = 60^\circ$ ein (Bild 44). Welche Zugkräfte haben die Seile aufzunehmen?

Lösung:

Wir schneiden zuerst das Hubseil. In ihm tritt nach dem Gegenwirkungsprinzip die Kraft $F_S = G$ auf. Dann sind zwei Schnitte im Anhängeseil notwendig, um den Strukturplan mit dem Strukturknoten A zu zeichnen. Das nun folgende geschlossene Krafteck mit fortlaufender Vektorenfolge Gleichgewichtszustand der drei Kräfte mit gemeinsamem Schnittpunkt, führt auf $F_{S1} = F_{S2} = 0,58 G$. Die gefundenen Pfeilrichtungen stimmen mit denen des Strukturplanes überein. Sie wirken, wie angenommen, als Zugkräfte.

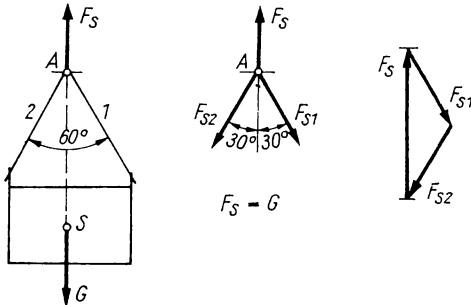


Bild 44. Strukturplan und Krafteck zu Lehrbeispiel 8

► Lehrbeispiel 9

Der Transportbehälter ist breiter. Dafür stehen aber nur wenig längere Anhängeseile zur Verfügung. Bei ihnen beträgt der Spreizwinkel $\alpha = 120^\circ$ (Bild 45). Wie groß sind nun die Seilkräfte?

Lösung:

Mit den geänderten Wirkungslinien erhält man $F_{S1} = F_{S2} = G$. Wir erkennen daraus, daß stärker gespreizte Anhängeseile größere Kräfte aufnehmen müssen, die die angehängte Last übersteigen können. **Achtung beim innerbetrieblichen Transport!**

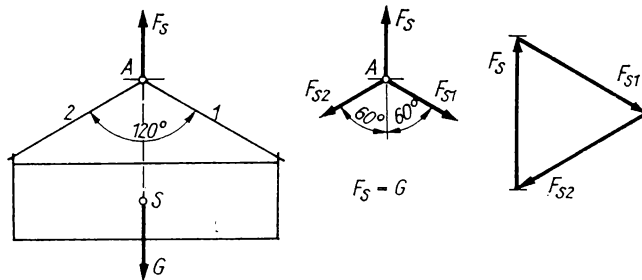


Bild 45. Strukturplan und Krafteck zu Lehrbeispiel 9

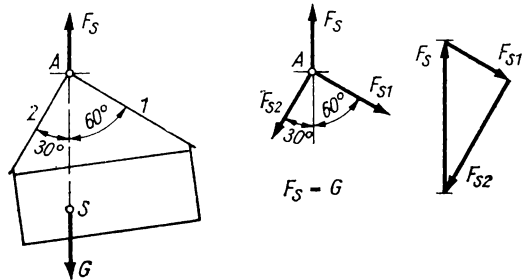
► Lehrbeispiel 10

Die Masseverteilung im Transportbehälter ist ungleichmäßig, so daß er geneigt am Hubseil hängt (Bild 46). Wir setzen $\alpha_1 = 60^\circ$ und $\alpha_2 = 30^\circ$ voraus. Welche Kräfte im Anhängeseil treten auf?

Lösung:

Die zeichnerische Lösung nach Bild 46 ergibt $F_{S1} = 0,5G$; $F_{S2} = 0,87G$.

Bild 46. Strukturplan und Krafteck zu Lehrbeispiel 10



► Lehrbeispiel 11

Die vier Kräfte nach Lehrbeispiel 6 sind als Belastung von zwei Streben (Pendelstützen) aufzunehmen. Welche Stützkräfte treten in A und B auf (Bild 47)?

Lösung:

Wir schneiden die Pendelstützen und zeichnen den Strukturplan. Gemeinsamer Schnittpunkt im Strukturknoten A. Das zugehörige Krafteck entsteht zuerst aus den Belastungen $F_1 \dots F_4$ und wird mit Wirkungslinien parallel zu den Richtungen der Pendelstützen geschlossen. Man muß also z. B. Richtung A an das Ende des Kräftezuges und Richtung B an dessen Anfang legen. Beide Wirkungslinien ergeben einen Schnittpunkt, der die Vektorenlängen begrenzt. Wir finden $F_A = +31 \text{ N}$; $F_B = +32 \text{ N}$. Beide Stützkräfte sind Zugkräfte (+-Zeichen), da ihre Pfeilrichtungen mit Zug-Schnittkräften übereinstimmen.

Hinweis: Die Wirkungslinien der Stützkräfte kann man auch in der anderen Folge, Wirkungslinie B an das Ende und Wirkungslinie A an den Anfang des Kräftezuges $F_1 \dots F_4$, antragen. Das Ergebnis wird dadurch nicht beeinträchtigt.

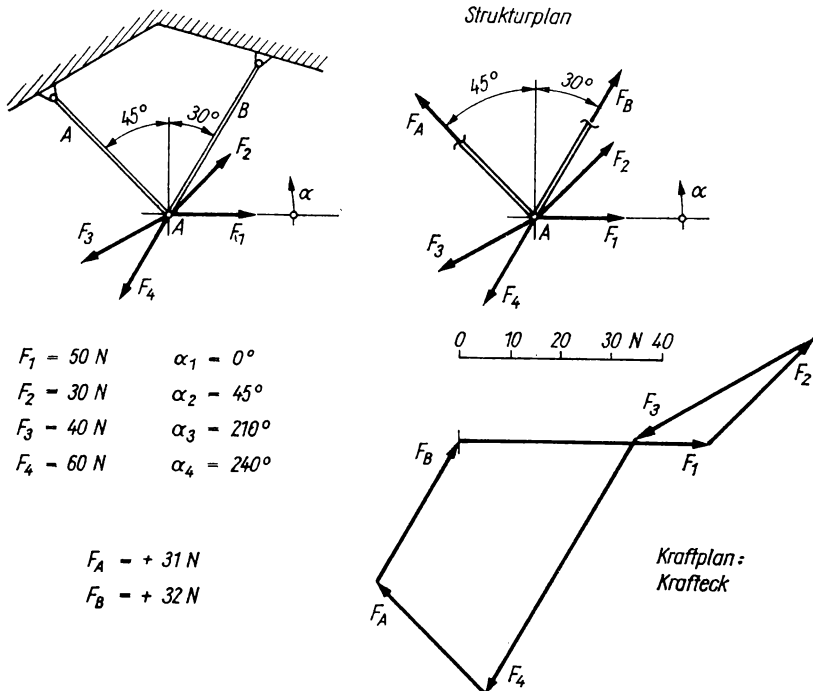


Bild 47. Skizze des technischen Gebildes, Strukturplan und Krafteck (Kraftplan) zu Lehrbeispiel 11

► Lehrbeispiel 12

Mit dem skizzierten Knotenblech (Bild 48) sind drei Stäbe durch Schweißen zu verbinden. Im Stab 1 wirkt die Zugkraft $F_{S1} = 20 \text{ kN}$. Welche Kräfte in den Stäben 2, 3 gewährleisten statisches Gleichgewicht?

Lösung:

Da das zentrale Kräftesystem noch nicht sichtbar ist, konstruieren wir durch Verlängerung der Wirkungslinien den Wirkungsknoten I . (Die drei Kräfte müssen sich in einem Punkt schneiden, sonst treten zusätzliche Momente auf.) Dann kann das Kräfteck gezeichnet werden. Es ergibt sich $F_{S2} = +16,6 \text{ kN}$; $F_{S3} = +10,2 \text{ kN}$.

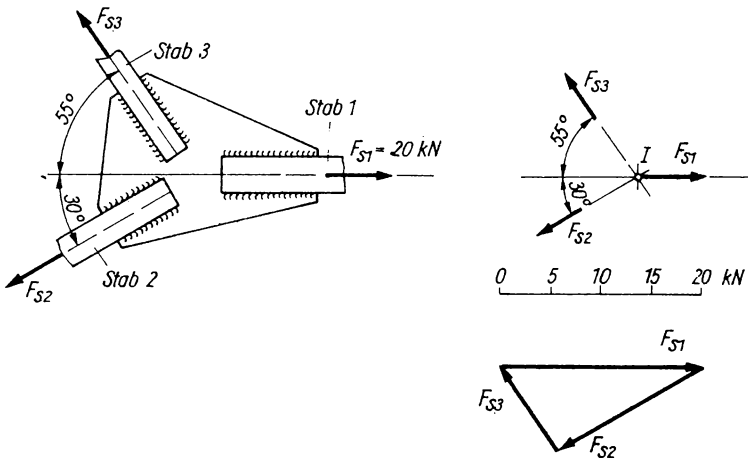


Bild 48. Skizze des technischen Gebildes, Strukturplan und Kräfteck zu Lehrbeispiel 12

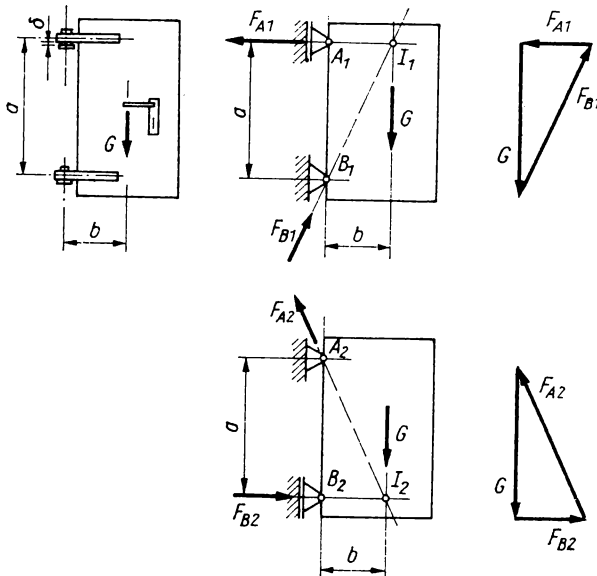


Bild 49. Zeichnerische Lösungen zu Lehrbeispiel 13

► Lehrbeispiel 13

Das Gewicht G einer Tür (Bild 49) ist von ihren Lagern aufzunehmen. Wir wollen zwei Fälle untersuchen. Im ersten Teil der Aufgabe soll das Türband oben vertikales Spiel zur Türangel haben und im zweiten Teil der Aufgabe unten. Welche Stützkkräfte müssen wirken?

Lösung:

Die Bedingung *vertikales Spiel* wird von einem Loslager erfüllt. Es ist in den Strukturplan so einzuzeichnen, damit in senkrechter Richtung keine Kräfte wirken können. Nun tragen wir die Stützkraft für das Loslager ein. Sie führt mit G auf den jeweiligen Wirkungsknoten I . Hier liegt auch der Schnittpunkt für die Stützkraft des Festlagers. Das zentrale Kräftesystem liegt vor. Das zugehörige Krafteck ist zu zeichnen.

■ Übungen 16 und 17

2.1.2.2. Rechnerische Lösung – statisches Kräftegleichgewicht

Für die rechnerische Lösung stehen aus Abschn. 1.1.3. die beiden Gln. (9) und (10) zur Formulierung des statischen Kräftegleichgewichts in horizontaler und vertikaler Richtung zur Verfügung. Natürlich kann man auch das Krafteck der zeichnerischen Lösung geometrisch erfassen, so daß in einfachen Fällen die Lösung schneller anfällt. Der Bearbeiter muß entscheiden, welche Lösung rationeller ist.

► Lehrbeispiel 14

Die Seilkräfte nach den Lehrbeispielen 8, 9 sind rechnerisch zu ermitteln.

Lösung:

Die zeichnerische Lösung führte auf gleichschenklige Kraftecke. Man kann sie nach Bild 50 in zwei identisch rechtwinklige Dreiecke verwandeln und mit ihnen die Bestimmungsgleichung formulieren:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{G/2}{F_{S1}} \quad \text{bzw.} \quad F_{S1} = F_{S2} = \frac{G}{2 \cos \alpha/2}$$

Damit erhält man

$$\text{bei } \alpha = 60^\circ: F_{S1} = F_{S2} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ} = \frac{G}{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}} = 0,58G$$

$$\text{bei } \alpha = 120^\circ: F_{S1} = F_{S2} = \frac{G}{2 \cos 60^\circ} = \frac{G}{2 \cdot \frac{1}{2}} = G;$$

also gleiche Ergebnisse wie bei der zeichnerischen Lösung.

► Lehrbeispiel 15

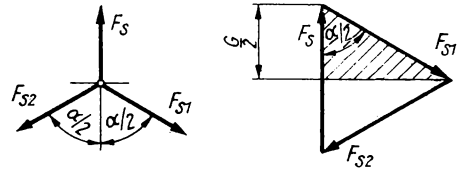
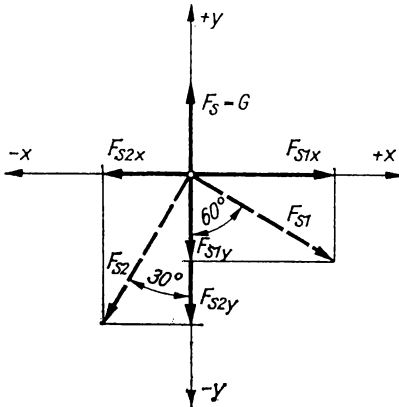
Es soll auch die Aufgabe nach Lehrbeispiel 10 rechnerisch gelöst werden.

Lösung:

Wenn man die zeichnerische Lösung nach Bild 46 betrachtet, dann kann das Krafteck wohl auch in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Sie sind aber nicht symmetrisch. In solchen Fällen ist die allgemeine Lösungsmethode, Anwendung der Gleichungen für das statische Kräftegleichgewicht, geeigneter. Dazu muß man sich auf eine skizzenhafte Aufbereitung des Strukturbildes, auf die Strukturskizze, für diese Aufgabe nach Bild 51, beziehen. Sie enthält alle Kräfte bzw. deren Komponenten in Koordinatenrichtungen.

Rechnungen mit statischen Gleichgewichtsbedingungen kommen häufig vor. Daher wurden für den Lösungsansatz folgende Symbole eingeführt:

- Gleichungen für das vertikale Kräftegleichgewicht $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ erhalten einen vertikalen Pfeil \uparrow
- und Gleichungen für das horizontale Kräftegleichgewicht $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ einen horizontalen Pfeil \rightarrow .



$F_S = G$
Bild 50. Strukturskizze und Krafteck zu Lehrbeispiel 14

Bild 51. Strukturskizze zu Lehrbeispiel 15

Wir lesen aus der vorliegenden Strukturskizze für das statische Kräftegleichgewicht folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l}
 \uparrow & +G - F_{S1y} - F_{S2y} = 0 \\
 & +G - F_{S1} \cos 60^\circ - F_{S2} \cos 30^\circ = 0 \\
 & +G - \frac{1}{2} F_{S1} - \frac{1}{2} \sqrt{3} F_{S2} = 0 \\
 \hline
 \rightarrow & -F_{S2x} + F_{S1x} = 0 \\
 & -F_{S2} \sin 30^\circ + F_{S1} \sin 60^\circ = 0 \\
 & -\frac{1}{2} F_{S2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} F_{S1} = 0
 \end{array}$$

Diese Gleichungen stellen das mathematische Gleichungssystem zur Ermittlung der beiden Unbekannten dar. Man kann z.B. aus der zweiten Gleichung $F_{S2} = \sqrt{3} F_{S1}$ ermitteln und diesen Wert in die erste Gleichung einsetzen. Dann wird

$$+G - \frac{1}{2} F_{S1} - \frac{1}{2} \sqrt{3} (\sqrt{3} F_{S1}) = 0$$

$$F_{S1} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = G \quad \text{oder} \quad F_{S1} = 0,5G$$

und damit

$$F_{S2} = \sqrt{3} F_{S1} = \sqrt{3} \frac{G}{2} = 0,866G$$

Hinweis: Der Strukturplan zu Lehrbeispiel 13 enthält keinen Richtungswinkel für die Kraft im Festlager. Natürlich könnte man ihn mit den angegebenen Maßen berechnen. Das setzt aber eine zeichnerische Aufbereitung solcher Aufgaben, die einen Wirkungsknoten enthalten, voraus. Eingebürgert hat sich jedoch die teilweise Rechnung mit dem statischen Momentengleichgewicht $\sum_{i=1}^n M_i = 0$. Diese rechnerische Lösung wird beim allgemeinen Kräftesystem angewendet. Wir werden sie uns dort erarbeiten und üben. Hier nur der prinzipielle Lösungsweg.

Nach der Strukturskizze (Bild 52) ist anzusetzen:

Statisches Momentengleichgewicht um B (Ursprung des Koordinatensystems):

$$+F_A a - Gb = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_A = \frac{b}{a} G$$

Die Stützkraft des Loslagers wurde ermittelt.

Nun statisches Kräftegleichgewicht:

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow & -F_A + F_{Bx} = 0 \quad \text{oder} \quad F_{Bx} = F_A \\ \uparrow & +F_{By} - G = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_{By} = G \end{array}$$

Resultierende Kraft im Festlager $F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2}$

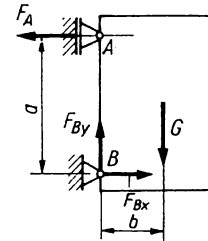


Bild 52. Strukturskizze zur rechnerischen Ermittlung der Stützkkräfte einer Tür

■ Übungen 18 bis 20

2.1.3. Gleichgewicht für Körpersysteme

Die Verbindung einiger Stäbe zur Aufnahme von Belastungen führt zu Körpersystemen mit Strukturknoten. In der Praxis findet man zugehörige technische Gebilde als Stabwerke, Fachwerke (z. B. Verstrebungen von Dachbindern oder bei Wanddrehkränen). Die einzelnen Stäbe sind hier oft fest miteinander verschweißt oder vernietet. Trotzdem wird in allen Fällen eine gelenkige Verbindung vorausgesetzt. Dadurch haben die Stäbe nur Zug- oder Druckkräfte aufzunehmen.

Aufbereitung der zeichnerischen Lösung:

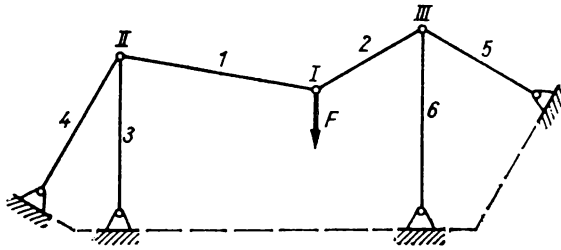
Die zeichnerische Lösung beginnt mit dem Strukturplan. Bild 53 zeigt ein Stabwerk, das die Belastung F aufzunehmen hat. Diese Belastung wird unmittelbar von zwei Seilen gehalten, die an beiden Enden zu je zwei Pendelstützen führen. Die Geometrie der Stabverbindungen $I \dots 6$ stimmt mit den Wirkungslinien der zugehörigen Stabkräfte $F_{s1} \dots F_{s6}$ überein. Man erkennt ihre Strukturknoten I, II und III . Dadurch läßt sich das Körpersystem in drei Teilsysteme zerlegen.

Strukturknoten I: Seile 1 und 2 schneiden. Belastung F ist im statischen Gleichgewicht mit F_{s1} und F_{s2} . Die Wirkungslinien sind bekannt. Wir zeichnen das zugehörige Krafteck (Kraftfolge nach angegebenem Umlaufsinn) und erhalten damit die Vektoren für F_{s1} , F_{s2} . Ihre Pfeilrichtungen sind in den Strukturplan zu übertragen.

Strukturknoten II: Seil 1 und Pendelstützen 3, 4 schneiden. Nach dem Gegenwirkungsprinzip muß am Strukturknoten die nun bekannte Seilkraft F_{s1} als Zugkraft vorausgesetzt werden. Die Wirkungslinien für F_{s3} , F_{s4} sind bekannt. Krafteck nach eingetragener Stabfolge konstruieren. Wir erhalten F_{s3} , F_{s4} . Ihre Pfeilrichtungen sind in den Strukturplan einzutragen.

Strukturknoten III: Seil 2 und Pendelstützen 5, 6 schneiden. Statisches Kräftegleichgewicht im Seil 2 verlangt die eingetragene Pfeilrichtung für F_{s2} (aus dem Ergebnis des Krafteckes für Strukturknoten I). Die Wirkungslinien für F_{s5} , F_{s6} sind bekannt. Wir beachten die

einheitliche Stabfolge (von der gegebenen Kraft aus im Uhrzeigersinn) und zeichnen das Krafteck. Nun können auch die letzten Kraftpfeile in den Strukturplan übertragen werden. Bis auf die zwingend vorgeschriebene Stabfolge zur Zeichnung der Kraftecke ist hier nichts Neues vermittelt worden. Wenn man aber z. B. die Kraftecke ausschneiden und so zusam-



Strukturknoten	Strukturpläne	Kraftpläne	Cremonaplan
I			
II			
III			

Bild 53. Lösungsschritte zum Cremona-Plan

menkleben würde, daß sich *gleiche* Kraftvektoren decken, dann entsteht ein *Gesamtkraftplan*, der *Cremona-Plan* (*Luigi Cremona*, 1830 bis 1903: Ausarbeitung zur Fachwerktheorie). Dieses Verfahren ist rationell, weil doppelt gezeichnete Vektoren nur einmal gezeichnet werden müssen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und des sicheren Abmessens der Kraftstrecken erhält der *Cremona-Plan* *keine* Kraftpfeile. Sie sind bei seiner Erarbeitung schrittweise in den Strukturplan einzutragen.

► Lehrbeispiel 16

Bild 54 zeigt den Strukturplan für einen einfachen Wanddrehkran, der maximal mit $F = 20 \text{ kN}$ belastet werden soll. Gesucht sind die Stabkräfte in den Stäben 1 bis 5 sowie die Stützkkräfte in A und B.

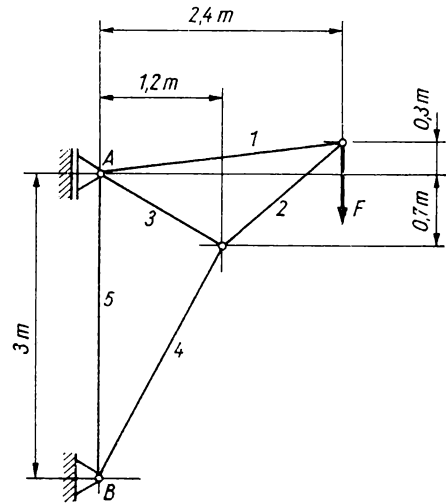


Bild 54. Strukturplan für den Wanddrehkran nach Lehrbeispiel 16

Lösung nach Bild 55:

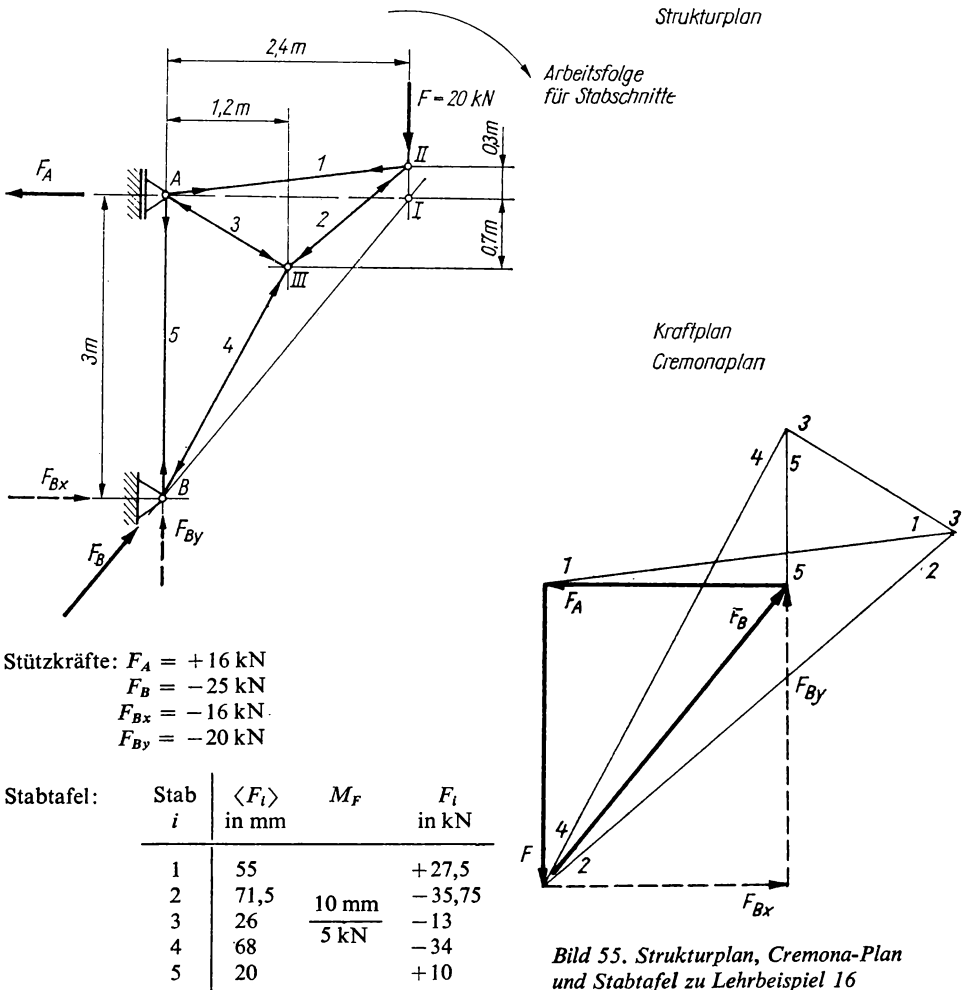
Zuerst ermitteln wir die Stützkkräfte. F_A mit F schneiden sich im Wirkungsknoten I. Richtung B-I ist Wirkungslinie von F_B . Der *Cremona-Plan* wird mit dem zugehörigen Krafteck begonnen. Nach der vorgegebenen Arbeitsfolge fügen wir an F zuerst F_B , dann F_A an. Die gefundenen Vektoren kann man abmessen und in die vorbereitete Stabtafel eintragen. Eine Umrechnung mit dem Kräftemaßstab ergibt den Betrag der Kraft.

Zur schrittweisen Ermittlung der Stabkräfte:

Man kann immer nur eine bekannte Kraft mit zwei unbekannten Kräften zum Krafteck zusammenfassen. Hier könnte mit Strukturknoten II begonnen werden, aber auch mit Strukturknoten B. Wir beginnen mit II. Nach der vereinbarten Arbeitsfolge entsteht ein Krafteck aus F mit 2 und 1. Geschlossenes Krafteck und fortlaufende Vektorenfolge erfordern die eingetragenen Kraftpfeile. Diese Schnittkräfte (Schnitte rund um den Strukturknoten II) wirken auf die Schnittfläche bzw. von ihr weg. Daher ist F_{S2} eine Druckkraft (negatives Vorzeichen in der Stabtafel) und F_{S1} eine Zugkraft (positives Vorzeichen in der Stabtafel). Man spricht analog von Zug- oder Druckstäben. Zur Kennzeichnung der Gegenkraft im gleichen Stab sind nun die entsprechenden Kraftpfeile einzutragen.

Wir bearbeiten Strukturknoten III. Bekannt ist F_{S2} ; unbekannt die Kräfte in den Stäben 4 und 3. Die Kraftstrecke 2...2 des *Cremona-Planes* ist mit diesen Kraftrichtungen zum Krafteck zu vervollständigen. Fortlaufender Umlaufungssinn (Pfeilrichtung für 2 am Knoten III ist nunmehr bekannt) führt zu den eingezeichneten Kraftpfeilen. F_{S4} und F_{S3} sind Druckkräfte. Gegenpfeile im gleichen Stab eintragen. Nun fehlt für das statische Kräftegleichgewicht am Strukturknoten A nur noch Stabkraft 5. Wir beginnen im *Cremona-Plan* mit allen bekannten Kräften, also mit F_A ; fahren

die Kraftstrecke 1...1 ab, dann 3...3 und ergänzen das Krafteck mit einer Wirkungslinie parallel zu Stab 5 bis zum Anfang des gesamten Kräftezuges, also bis zum Anfang von F_A . Nach diesem Umräumungssinn ist der Pfeil für F_{S5} einzutragen.



Der Kraftplan ist fertig. Wir können noch das schon vorhandene Krafteck zum Strukturknoten B kontrollieren. Es ist geschlossen und stimmt mit den Gegenpfeilen der Stäbe 5, 4 überein. Alle abgemessenen Kraftstrecken sind in die Stabtafel einzutragen, mit dem gemeinsamen Kräftemaßstab zu dividieren und als Kraftbeträge auszuweisen.

■ Übung 21

Zusammenfassung

Das zentrale Kräftesystem setzt den gemeinsamen Schnittpunkt aller Kraftwirkungslinien voraus. Im technischen Gebilde kann dieser Schnittpunkt durch die Anordnung von Seil- oder gelenkigen Stabverbindungen gegeben sein. Das Strukturbild enthält dann einen

Strukturknoten. Um ihn schneiden wir die angeschlossenen Verbindungselemente und tragen Schnittkräfte an. Dadurch wird das Kräftebündel sichtbar.

Die Bedingungen für dessen statischen Gleichgewichtszustand lassen sich zeichnerisch und rechnerisch ermitteln.

Zur zeichnerischen Lösung gehören genau maßstäbliche Darstellungen, der Strukturplan und das geschlossene Krafteck mit fortlaufender Vektorenfolge. Die rechnerische Lösung setzt eine aufbereitete Strukturskizze mit Kräften bzw. deren Komponenten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, Ursprung im Strukturknoten, voraus. Nach dieser Abbildung sind die beiden Gleichungen für das statische Kräftegleichgewicht in beiden Koordinatenrichtungen aufzustellen. Aus diesem Gleichungssystem erhält man die gesuchten Größen.

Enthält das Strukturbild keinen Strukturknoten, dann ist trotzdem ein zentrales Kräftesystem nicht auszuschließen. In diesem Fall ist das Strukturbild mit den bekannten Wirkungsbedingungen für die Kräfte so lange zu bearbeiten, bis der *Wirkungsknoten* vorliegt. Erst dann ist die zeichnerische Lösung möglich.

Die rechnerische Lösung solcher Aufgaben wird oft nach den Bedingungen des allgemeinen Kräftesystems durchgeführt; denn die Lage des Wirkungsknotens im Koordinatensystem müßte erst ermittelt werden.

Sollte man bei dieser Lösungsaufbereitung erkennen, daß die Kraftwirkungslinien *keinen gemeinsamen Schnittpunkt* haben können, dann ist die Aufgabe hier nicht lösbar. Es liegt ein *allgemeines Kräftesystem* vor, das wir in den nachfolgenden Abschnitten untersuchen werden.

Als Zusammenfassung für viele Aufgaben kann die algorithmische Darstellung nach *Anlage A 1* (Übersichts- und Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der Stütz- oder Stabkräfte beim zentralen Kräftesystem) dienlich sein. Mit solchen problemorientierten Darstellungen werden in logischer Folge Hauptschritte der Aufgabenlösung als Bearbeitungs- oder Entscheidungsaktivitäten angegeben. Sie enthalten auch die Möglichkeit, nach persönlichen Bedürfnissen weitere, subjektiv verfeinerte Lösungsschritte einzutragen.

Diese Anlagen enthalten nach TGL 22451 einige Symbole:

	Symbole
Beginn und Ende der Aufgabenlösung	Start, Stop
Ein- und Ausgangsgrößen	nach Nr. 1, 9, 17
Entscheidungsaktivitäten mit den	
Ausgängen j (ja) und n (nein)	nach Nr. 2, 4, 13
Bearbeitungsaktivitäten	nach Nr. 3, 5, 6, ...

Zur Aufgabenstellung gehört das Modell der Statik, im vorliegenden Fall das Strukturbild zum zentralen Kräftesystem. Nun ist zu entscheiden, ob die Aufgabe zeichnerisch oder rechnerisch gelöst werden soll.

Zur zeichnerischen Lösung (Ausgang j):

– Anfertigung des Strukturplanes, eine maßstäbliche Zeichnung zum Strukturbild der Aufgabenstellung.

– Mit dieser Zeichnung erhält man Kenntnis darüber, ob der gemeinsame Schnittpunkt aller Kraftwirkungslinien schon vorliegt. Ist das der Fall (Ausgang j), dann läßt sich sofort das zugehörige Krafteck zeichnen. Wir erhalten die gesuchten Vektoren, tragen die gefundenen Kraftpfeile in den Strukturplan ein und rechnen die Kraftstrecken in Kraftbeträge um.

– Schließlich fassen wir die gesuchten Größen zusammen (Nr. 9) und beurteilen die Ergebnisse. Die Aufgabe ist gelöst.

Ist der gemeinsame Schnittpunkt noch nicht vorhanden, dann liegt ein zentrales Kräftesystem mit Wirkungsknoten vor. Dieser Wirkungsknoten und die fehlende Wirkungslinie für die Stützkraft des Festlagers sind zu konstruieren. Erst dann kann man mit dem Lösungsschritt Nr. 6 weiter arbeiten.

Die *rechnerische Lösung* beginnt mit Nr. 12. Ihre Durchführung läßt sich in ähnlicher Weise aus der Darstellung lesen.

Stab- oder Fachwerke lassen sich als *Körpersysteme mit Strukturknoten* in diesen Abschnitt einordnen. Vorausgesetzt werden Belastungsanordnungen und gelenkig miteinander verbundene Stäbe, in denen nur Zug- oder Druckkräfte wirken können. Nach Bestimmung der Kräfte am komplexen technischen Gebilde, den Stützkraften, sind die inneren Kräfte, die Stabkräfte, zu ermitteln. Analoge Aufgaben dieses Abschnittes lassen sich nach Bearbeitungsaktivitäten zeichnerisch mit dem *Cremona-Plan* lösen. Eine algorithmische Darstellung hierzu zeigt *Anlage A 2*.

2.2 Allgemeines Kräftesystem

2.2.1. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften

2.2.1.1. Zeichnerische Verfahren – Seileck, Hilfskräfte

Die Wirkungslinien einer Kräftegruppe lassen sich *nicht* zu einem Schnittpunkt zusammenfassen. Wir müssen uns weitere zeichnerische Arbeitsverfahren erarbeiten, die sich für Aufgaben mit zwei oder mehreren Wirkungsknoten eignen. Betrachten Sie hierzu Bild 56. Von den vier an der Scheibe wirkenden Kräften lassen sich je zwei zu einem Schnittpunkt vereinigen. Dadurch entstehen die beiden Wirkungsknoten *I* und *II*.

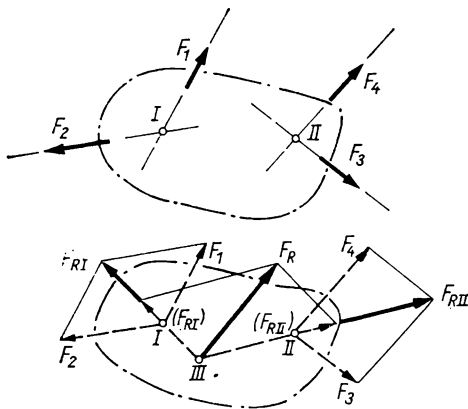


Bild 56. Schrittweise Ermittlung der Resultierenden für vier Kräfte mit zwei Schnittpunkten

Wir stellen uns die Aufgabe, die Resultierende der vier Kräfte zu ermitteln. In einfachster Weise gelingt das durch eine schrittweise Konstruktion der Kräfteparallelogramme. F_1 und F_2 am Wirkungsknoten *I* liefern die Resultierende F_{RI} . Am Wirkungsknoten *II* werden die Kräfte F_3 und F_4 zu F_{RII} zusammengefaßt. Die Wirkungslinien der Resultierenden schneiden

sich im Wirkungsknoten *III*. Trägt man von dort aus die resultierenden Vektoren an, dann wird mit dem dritten Kräfteparallelogramm die gesamte Resultierende F_R gefunden. Sie ersetzt die Kräftegruppe $F_1 \dots F_4$. Dieses soeben beschriebene Verfahren versagt, wenn die Wirkungslinien der zusammenzufassenden Kräfte parallel verlaufen oder wenn die Schnitt-

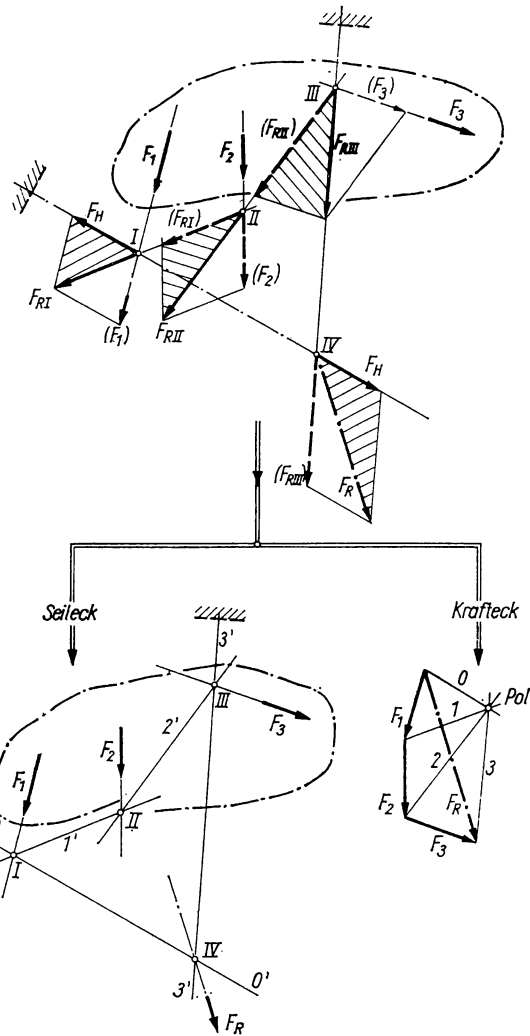


Bild 57. Entwicklungsplan zum Kräfte- und Seileckverfahren

punkte zeichnerisch ungünstig zu ermitteln sind. In solchen Fällen kann durch Hilfskräfte die gewünschte Lösung gefunden werden.

Wir wollen dieses Verfahren an einem Beispiel (Bild 57) erläutern. Für die Kräftegruppe $F_1 \dots F_3$ soll ihre Resultierende F_R schrittweise mit Kräfteparallelogrammen ermittelt werden. Den gegebenen Kräften fügen wir Hilfskräfte F_H so hinzu, daß sich diese gegenseitig aufheben. Sie sind gleich groß entgegengesetzt gerichtet und liegen auf einer Wirkungs-

linie. Wir fassen zusammen:

F_H mit F_1 am Wirkungsknoten I zu F_{RI}
 F_{RI} mit F_2 am Wirkungsknoten II zu F_{RII}
 F_{RII} mit F_3 am Wirkungsknoten III zu F_{RIII}
 F_{RIII} mit F_H am Wirkungsknoten IV zu F_R

Diese Arbeitsweise ist zeitraubend und für umfangreiche Kräftegruppen in zunehmendem Maße unübersichtlich. Deshalb wenden wir uns einem neuen Verfahren zu. Wir lösen den Entwicklungsplan (Bild 57) nach seinen Hauptbestandteilen, dem Kraft- und Seileck, auf. Schichtet man die schraffierten Dreiecke so aneinander, daß sich gleiche Vektoren überdecken, dann entsteht als Kraftplan das Krafteck. Die Vektoren der Hilfskräfte und die der Zwischenresultierenden schneiden sich in einem Punkt, dem Pol, und werden Polstrahlen genannt. Künftig werden diese Polstrahlen mit Zahlen $0, 1, 2, 3 \dots$ bezeichnet. Zur Konstruktion des Wirkungsknotens IV , als Punkt der gesuchten Wirkungslinie für F_R , sind nun noch in den Strukturplan die Wirkungslinien dieser Vektoren mit ihrem gemeinsamen Schnittpunkt konstruktiv festzulegen. Analog zum Kraftplan erhalten diese die Bezeichnung $0', 1', 2', 3' \dots$. Das Seileck ist fertig.

Die Bezeichnung „Seileck“ hängt mit folgender Überlegung zusammen: Stellen Sie sich ein fest gespanntes Gummiseil, eingespannt an den schraffierten Stellen, vor. Die an den Wirkungsknoten angehängten Belastungen F_1, F_2, F_3 würden das Gummiseil in der gezeichneten Weise absenken und knicken. Im Seil treten Spannkkräfte auf, die den Kraftlinien $0, 1, 2, 3$ des Kraftecks entsprechen.

Wir fassen nach Bild 57 die *Kraft- und Seileckkonstruktion* zusammen:

1. Zuerst wird das *Krafteck* gezeichnet.

Kräftemaßstab m_F , Vektoren F_1, F_2, F_3 und nach Annahme eines Pols die Polstrahlen $0, 1, 2, 3$. Der Vektor für die gesuchte Resultierende ergibt sich als Vektorsumme aus den einzelnen Belastungen. Wir kennen jedoch noch nicht die Lage seiner Wirkungslinie.

2. Das *Seileck*, zur Konstruktion eines Punktes der Wirkungslinie von F_R (Wirkungsknoten IV), entsteht mit der parallelen Übertragung aller Polstrahlen.

Wir nehmen den Wirkungsknoten I auf der Wirkungslinie von F_1 beliebig an und vereinigen dort die Seilstrahlen $0'$ mit $1'$, denn diese drei Wirkungslinien gehören zu den Kraftvektoren $F_1, 0$ und 1 im zugehörigen Teilkrafteck. Seilstrahl $1'$ ist mit der Wirkungslinie von F_2 zu schneiden. Dadurch ergibt sich der Wirkungsknoten II zwangsläufig, weil auch Kraftvektor 1 zum Teilkrafteck $F_2, 1, 2$ gehört. Wir legen durch II die Wirkungslinie $2'$ und haben sie nach dem zugehörigen Teilkrafteck mit der Wirkungslinie von F_3 zu schneiden. Dadurch entsteht III als Schnittpunkt von $2'$ und F_3 . Hier muß auch als dritte Kraft $3'$ schneiden. Schließlich findet man den Schnittpunkt IV durch Schnitt der Seilstrahlen $0'$ und $3'$, weil das zugehörige Teilkrafteck aus $0, 3, F_R$ besteht.

■ Übung 22

Bild 58 zeigt, wie man eine gegebene Kraft in drei Komponenten, deren Wirkungslinien bekannt sind und sich in zwei Schnittpunkten schneiden, zerlegt.

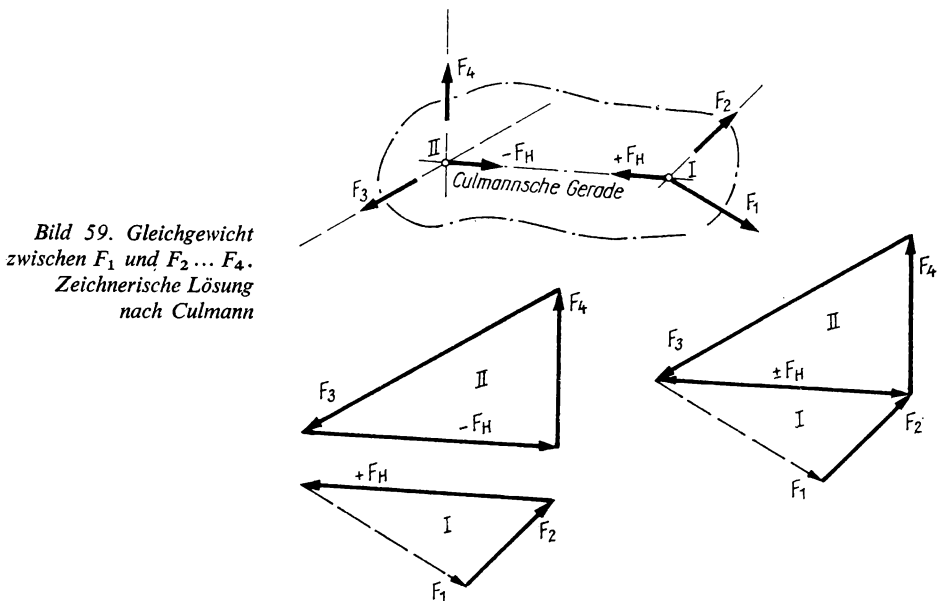
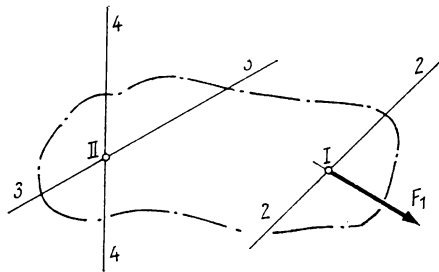
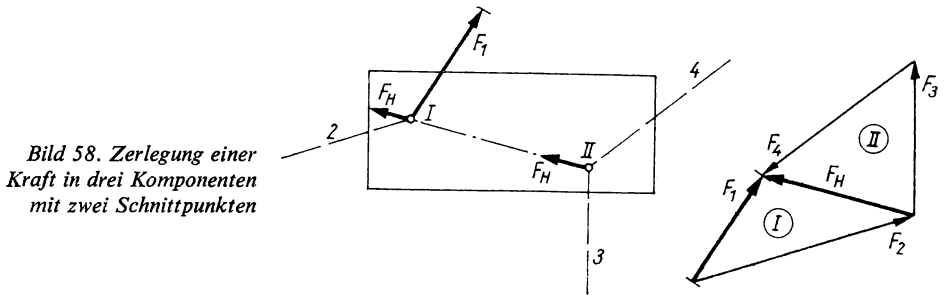
Wir zerlegen die Kraft F_1 am Wirkungsknoten I in F_2 und eine Hilfskraft F_H . Ihre Richtung wählen wir so, daß auch eine Zerlegung am Wirkungsknoten II möglich wird. Die Wirkungslinie der Hilfskraft muß demnach der Verbindungsgeraden zwischen I und II entsprechen. F_H kann dadurch am Wirkungsknoten II in F_3 und F_4 zerlegt werden.

2.2.1.2. Rechnerisches Verfahren

Auf die Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem soll an dieser Stelle nicht noch einmal eingegangen werden. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Gln. (5), (6), (7), (8), (11) im Abschnitt 1.

2.2.2. Gleichgewicht am Körper

Kräftegruppen am Körper befinden sich im Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Komponenten in zueinander senkrechten Richtungen und die Summe ihrer Momente gleich Null sind. Diese Gleichgewichtsbedingungen spielen in der Statik eine wichtige Rolle. Die folgenden Ausführungen sollen das veranschaulichen.



2.2.2.1. Zeichnerische Lösungen – Culmann-Verfahren, Kraft- und Seileckverfahren

Die Scheibe nach Bild 59, belastet durch F_1 , soll durch drei weitere Kräfte mit vorgegebenen Wirkungslinien in das statische Gleichgewicht gebracht werden. Die Wirkungslinien der insgesamt vier Kräfte schneiden sich in I und II . Gleichgewicht erhalten wir dann, wenn diese vier Kräfte ein geschlossenes Krafteck ergeben. Um das Krafteck zeichnen zu können, benötigen wir zunächst Hilfskräfte, die das Gleichgewicht nicht stören.

Nach *Culmann* findet man ihre Wirkungslinie, wenn man die beiden Schnittpunkte durch eine Gerade (*Culmannsche Gerade*) verbindet (*Karl Culmann*, 1821 bis 1887: Ausarbeitungen zur grafischen Statik). Nun stellen wir das Gleichgewicht am Wirkungsknoten I zwischen F_1 , einer Kraft in Richtung 2 und der Hilfskraft auf der Verbindungsgeraden her. Wir erhalten Krafteck I . Am Wirkungsknoten II wird nun Gleichgewicht mit der Gegenkraft $-F_H$ und Kräften in den Richtungen 3, 4 hergestellt. Das ergibt Krafteck II . Zeichnet man beide Kraftecke als Doppelkrafteck ($\pm F_H$ überlagert), so ergibt sich das gesuchte geschlossene Krafteck mit fortlaufender Vektorfolge. Wir erkennen, daß die Hilfskräfte $+F_H$ und $-F_H$ äußerlich nicht in Erscheinung treten, da sie sich gegenseitig aufheben.

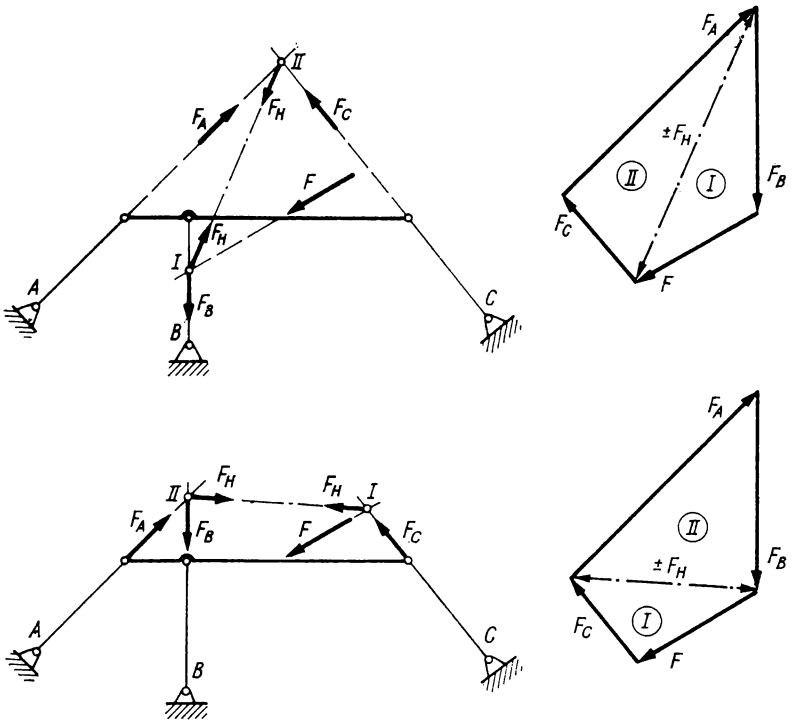


Bild 60. Lösungsbeispiele zum Verfahren nach Culmann

Bild 60 zeigt zwei Anwendungen für die zeichnerische Lösung. Der mit F belastete Träger soll durch drei Pendelstützen abgestützt werden. Gesucht sind ihre Stützkraften. In den Strukturplan können wir die Wirkungslinien der insgesamt vier Kräfte eintragen. Die Wirkungslinie für F ist unmittelbar gegeben. In den Richtungen der Pendelstützen treten F_A , F_B , F_C auf. Wenn es gelingt, diese vier Wirkungslinien in insgesamt zwei Schnitt-

punkten zu vereinigen, dann liegt ein Beispiel vor, dessen zeichnerische Lösung Sie kennen. Wir geben zwei Lösungsvarianten an, die zum gleichen Ergebnis führen. Im ersten Fall wurde F mit F_B zum Schnitt gebracht (Wirkungsknoten I) und dann F_A mit F_C (Wirkungsknoten II). Im zweiten Fall schneiden sich die Wirkungslinien von F und F_C in I und die von F_A und F_B in II .

► Lehrbeispiel 17

Bild 61 zeigt eine Scheibe vom Gewicht G . Das Gewicht der Scheibe soll durch drei Tangentialpendelstützen statisch aufgenommen werden. Gesucht sind zeichnerisch die Kräfte in den Pendelstützen.

Lösung (Bild 61.1)

Das Doppelkrafteck führt auf $F_A = \frac{1}{2} G$, $F_B = G$ und $F_C = \frac{1}{2} G$.

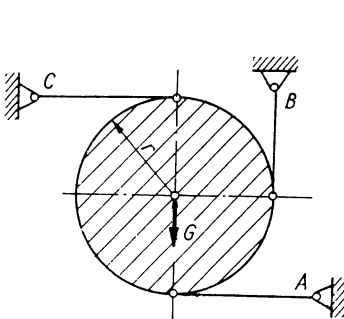


Bild 61. Zeichnerische Lösung zu Lehrbeispiel 17

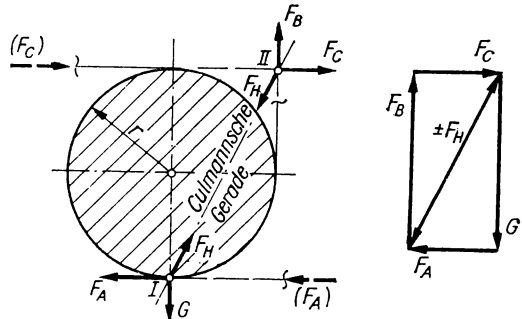


Bild 61.1

■ Übungen 23 bis 25

Nun zum statischen Gleichgewicht beim Kraft- und Seileckverfahren. Wir schließen an das Beispiel nach Bild 57 an und stellen uns die Aufgabe, mittels Stützkraften das statische Gleichgewicht am Körper herzustellen. Bild 62 enthält zur Vereinfachung der Darstellung nur die Resultierende F_R der Kräftegruppe. Mit ihr, den Polstrahlen $0, 3$ und mit den beiden Stützkraften F_A (im Festlager), F_B (in der Pendelstütze), sind zwei Kraftecke zu zeichnen.

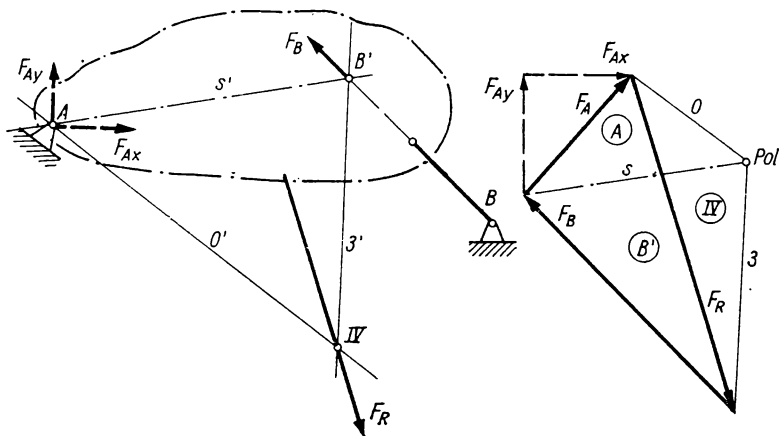


Bild 62. Schlußlinie und Stützkkräfte beim Kraft- und Seileckverfahren

Dazu benötigen wir einen weiteren Polstrahl s , parallel zur Schlußlinie s' aus der Seileckkonstruktion. Dann gehört zum Wirkungsknoten B' das Krafteck $s, 3, F_B$ und zum Strukturknoten A das Krafteck $0, s, F_A$. Die Stützreaktionen sind gefunden. Die Konstruktion der Schlußlinie ist nach Bild 62 einfach zu erkennen. Man beachte bei der Übertragung der Polstrahlen vom Kräfteplan in den Strukturplan, daß entweder der erste oder der letzte Polstrahl durch den Strukturknoten A (Festlager) gezogen werden muß; denn von der gesuchten Wirkungslinie für F_A ist zunächst nur ein Punkt bekannt. Die Wirkungslinie für F_B ist hingegen gegeben (Pendelstütze) und liefert mit $3'$ den Wirkungsknoten B' .

- Die Schlußlinie entspricht der Verbindungsgeraden von Struktur- und Wirkungsknoten.

Als zusammenfassende Wiederholung zur zeichnerischen Ermittlung von Stützreaktionen betrachten wir das nachfolgende Lehrbeispiel.

► Lehrbeispiel 18

Bild 63 zeigt einen schräg angeordneten Träger, der mit F_1, F_2 parallel belastet wird. Zur Ermittlung der Stützkkräfte ist das Kraft- und Seileckverfahren anzuwenden; denn die gesamte Kräftegruppe aus Belastungen und Stützreaktionen kann weder zu einem noch zu zwei Schnittpunkten zusammengefaßt werden. Wir beginnen das Krafteck mit F_1, F_2 und nach Annahme eines Poles mit den Polstrahlen $0, 1$ und 2 . Dann sind im Strukturplan die Wirkungslinien dieser Kräfte zugehörig zu schneiden, d. h., wir zeichnen das Seileck. Betrachten wir die Stützsymbole, dann gibt uns Festlager A mit seinem Strukturknoten einen Punkt der Wirkungslinie für F_A an. Daher ist Polstrahl 0

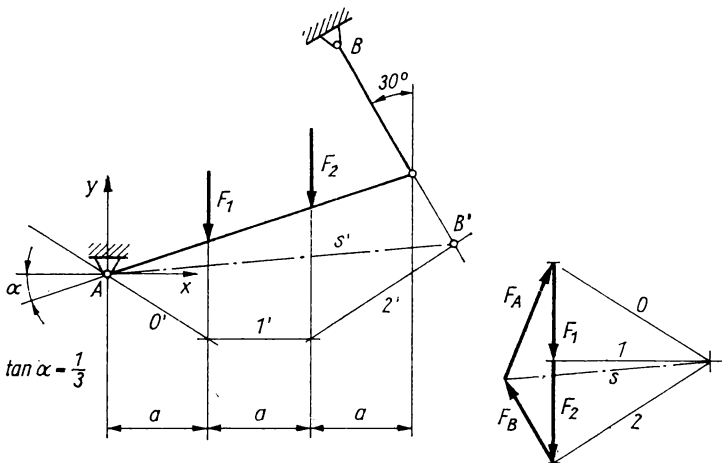


Bild 63. Strukturplan, Kraft- und Seileck zu Lehrbeispiel 18

parallel bis zum Schnitt mit A zu verschieben. Wir erhalten den Seilstrahl $0'$. Polstrahl 0 ist im statischen Gleichgewicht mit F_1 und mit Polstrahl 1 ; also müssen sich $0', 1'$ auf der Wirkungslinie von F_1 schneiden. In zugehöriger Weise gilt das auch für F_2 . Hier herrscht nach Krafteck statisches Gleichgewicht zwischen $1, 2$ und F_2 . Bis hierher enthält das zeichnerische Verfahren Schnittpunkte für die Kräfte F_A, F_1 und F_2 . Verlängert man Seilstrahl $2'$ bis zum Schnitt mit der Wirkungslinie von F_B , dann ergibt sich Wirkungsknoten B' . Die Verbindungsgerade: Strukturknoten – Wirkungsknoten führt zur Schlußlinie s' . Sie ist mit paralleler Richtung durch den Pol zu zeichnen: Polstrahl s . Da sich in B' die Wirkungslinien der drei Kräfte $2', s'$ und F_B schneiden, muß mit der bekannten Wirkungslinie von F_B das zugehörige Krafteck mit fortlaufender Vektorfolge gezeichnet werden. Damit erhält auch der Polstrahl s seine Länge. Beide Polstrahlen, s und 0 , sind durch F_A zu einem

Krafteck zu verbinden. Erst zuletzt erhalten wir Richtung und Größe der Stützkraft für das Festlager. Die Pfeile für die Belastungs- und Stützvektoren haben einer umlaufenden Vektorenfolge zu entsprechen. Im Krafteck folgen nach F_1 , F_2 die Stützvektoren F_B , F_A .

► Lehrbeispiel 19

Der Träger nach Bild 64 entspricht z. B. einer Welle, durch A und B zweifach gelagert und über zwei Zahnräder mit $2F$, F belastet. Für die Lager und Zahnräder sind verschiedene Anordnungen möglich. In den ersten beiden Fällen befinden sich die Zahnräder zwischen den Lagern, geändert

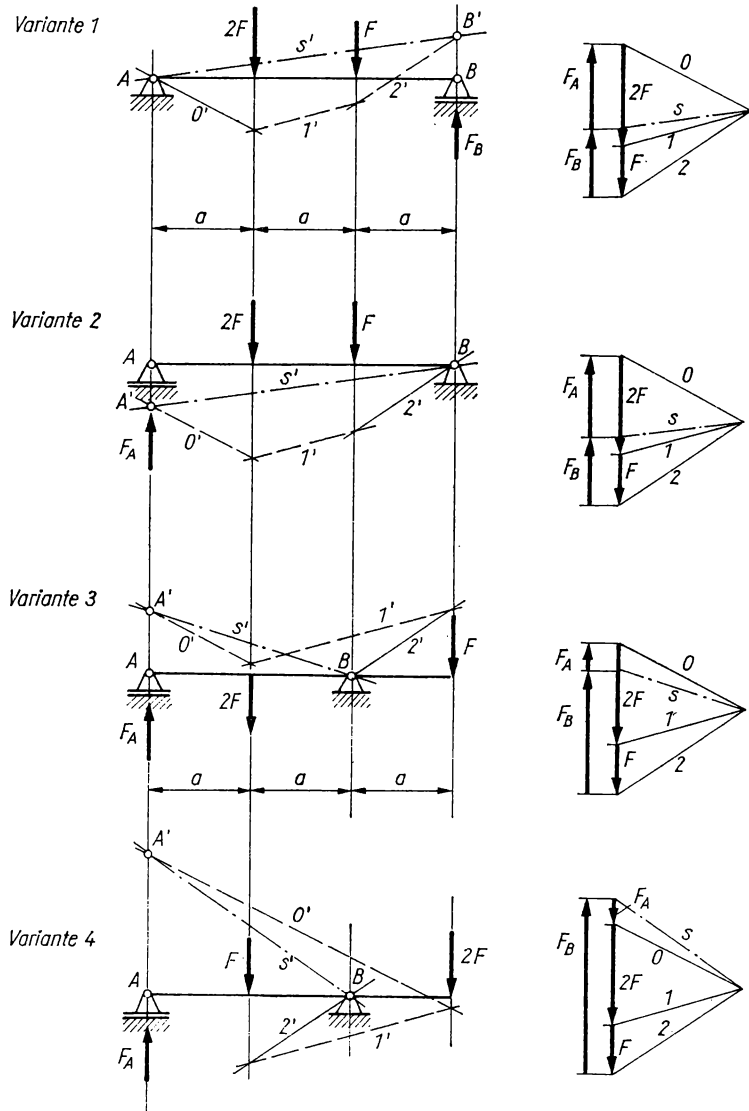


Bild 64. Zeichnerische Lösungen zu Lehrbeispiel 19

wurde die Lagerkonstruktion (Festlager links oder rechts). Im dritten Fall vertauschen wir Festlager mit Zahnrad und bei der vierten Anordnung schließlich die beiden Zahnräder. Gesucht sind für jeden Fall die Stützreaktionen zur Auswahl der Wälzlager.

Wichtige Gesichtspunkte zur zeichnerischen Lösung:

Da nur vertikale Belastungen vorhanden sind, können sich die Stützkkräfte in den ersten beiden Anordnungen nicht unterscheiden. Die Seileckkonstruktion ist jeweils im Strukturknoten zu beginnen; im ersten Fall in A und im zweiten Fall in B . Grundsätzlich fängt man dort mit dem ersten oder letzten Polstrahl an. Im ersten Beispiel übertragen wir als ersten Polstrahl 0 zum Seilstrahl $0'$ und im zweiten Beispiel den Polstrahl 2 zum Seilstrahl $2'$. Die Stützreaktionen F_A , F_B unterscheiden sich nicht voneinander. Hier können gleiche Wälzlager eingesetzt werden.

Die letzten beiden Varianten führen zu recht unterschiedlich großen Lagerreaktionen. Auch hier beginnt die Seileckkonstruktion jeweils im Strukturknoten B . Das Seileck wurde mit $2'$ begonnen. Die zeichnerische Lösung zur letzten Variante bestätigt die nach Strukturplan angenommene Vektorenrichtung für F_A nicht. F_A wirkt entgegengesetzt. Die Stützreaktion F_B wird größer als die Summe der gesamten Belastung. Hier ist ein ungerechtfertigt hoher Aufwand zum Nutzen, die Belastungen abzustützen, erforderlich. Die gefundene entgegengesetzte Stützreaktion F_A ist einleuchtend; denn mit $2F$ rechts vom Lager B besteht die Tendenz, den Träger vom Lager A abzuheben.

► Lehrbeispiel 20

Auch mit der Aufgabe nach Bild 65, Seite 63, wollen wir die Größe der Stützreaktionen bei geänderten Wirkungsbedingungen durch die Lagerkonstruktionen ermitteln und einschätzen.

Gegeben ist ein Teilrahmen als Träger, belastet mit F unter 15° zur Horizontalen und mit F als Vertikalbelastung sowie durch Fest- und Loslager abgestützt. Der Unterschied zwischen beiden Aufgaben besteht in der Vertauschung beider Lagertypen.

Wichtige Gesichtspunkte zur zeichnerischen Lösung:

Im ersten Beispiel führt das Loslager A zur Wirkungslinie der Stützreaktion F_A . Festlager mit Strukturknoten B legt den Anfang für die Polstrahlen-Übertragung fest. Wir beginnen dort mit $2'$ und finden auf der Wirkungslinie von F_A den Wirkungsknoten A' . Schlußlinie zwischen Struktur- und Wirkungsknoten ($B \dots A'$). Entsprechend der Wirkungslinie von F_A finden wir zwischen 0 und s im Krafteck den Vektor für F_A . Zum geschlossenen Kräftezug gehört noch die Kraft F_B . Sie bildet ein Dreieck mit 2 und s ; denn im Strukturknoten B schneiden sich die Wirkungslinien von $2'$, s' mit F_B .

Beim zweiten Beispiel müssen wir im Strukturknoten A beginnen. Wir übertragen dort den Polstrahl 0 zum Seilstrahl $0'$ und finden schließlich auf der vorgegebenen Wirkungslinie für F_B den Wirkungsknoten B' . Parallel zur Wirkungslinie für F_B liegt im Krafteck zwischen 2 und s der Stützvektor F_B und dann nach Größe und Richtung der Stützvektor F_A (analog zum Strukturknoten A zwischen 0 und s).

Vergleicht man die Stützreaktionen miteinander, dann müßte man die Lager nach der zweiten Variante konstruktiv festlegen. Hier treten kleinere Stützkkräfte auf.

Auch dieses Lehrbeispiel zeigt Ihnen, wie man durch Variation einer Aufgabe zu einem kleinen Aufwand, hier kleinen Stützreaktionen, kommen kann. Wir haben zugleich mit diesen Optimierungsgesichtspunkten ein Leichtbauprinzip angesprochen.

■ Übungen 26 bis 28

2.2.2.2. Rechnerische Lösung – statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht

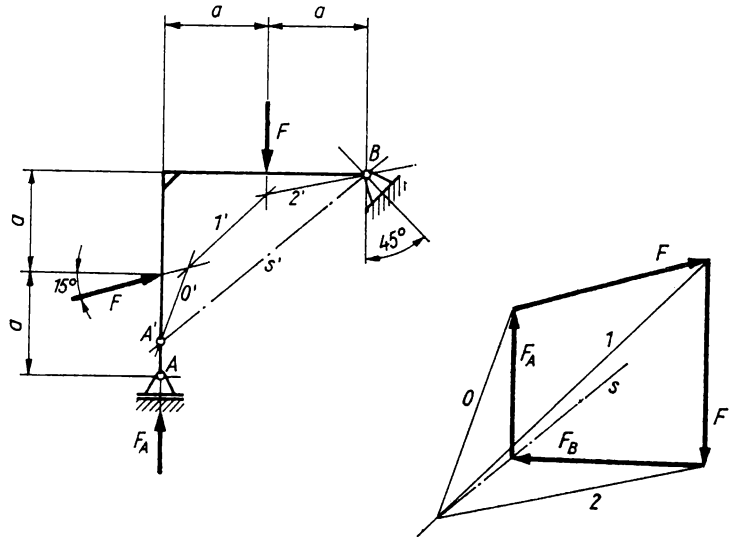
Zur Formulierung des statischen Gleichgewichtes stehen uns drei Gleichungen, die Gleichung für das statische Momentengleichgewicht und die beiden Gleichungen für das statische Kräftegleichgewicht in vertikaler und horizontaler Richtung, zur Verfügung.

Symbolische Schreibweise

$$\begin{array}{ll} \sum M_i = 0 & \zeta \text{ (Bezugspunkt)} \\ \sum F_{iy} = 0 & \uparrow \\ \sum F_{ix} = 0 & \rightarrow \end{array}$$

Wir beginnen allgemein mit Gleichungen für das statische Momentengleichgewicht und verwenden eine Gleichung für das statische Kräftegleichgewicht für Kontrollrechnungen, Kräftebilanzen, um die rechnerisch gefundenen Werte weitgehendst abzusichern.

Variante 1



Variante 2

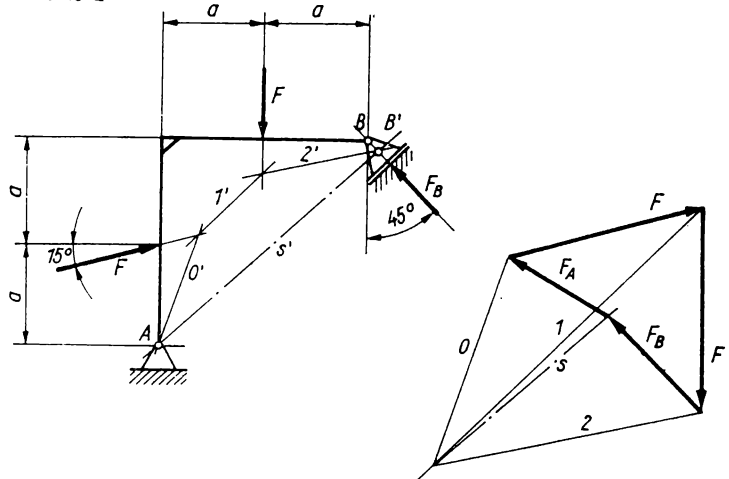


Bild 65. Zeichnerische Lösungen zu Lehrbeispiel 20

Hierzu einige Anwendungen.

► Lehrbeispiel 21

Bild 66 zeigt für den Träger die bereits aufbereitete Strukturskizze mit den Vertikalbelastungen und den Stützkomponenten. Durch die bekannte Wirkungslinie für F_B betragen dort die Komponenten:

$$F_{Bx} = \frac{1}{2} F_B, F_{By} = \frac{1}{2} \sqrt{3} F_B$$

Lösung:

Statisches Momentengleichgewicht um den Drehpunkt A:

$$\zeta A \quad \left| \quad -Fa - F2a + \frac{1}{2} \sqrt{3} F_B 3a + \frac{1}{2} F_B a = 0 \right.$$

Wir drücken mit dieser Gleichung aus, daß bezüglich A gleichsinnig und entgegengesetzt drehende Momente wirken.

Kräfte, die bezüglich A im Uhrzeigersinn wirken, erhalten ein negatives Vorzeichen und diejenigen, die entgegen dem Uhrzeigersinn wirken, ein positives Vorzeichen. Als Hebelarme sind immer die senkrechten Abstände der Wirkungslinien vom Bezugspunkt aus einzusetzen.

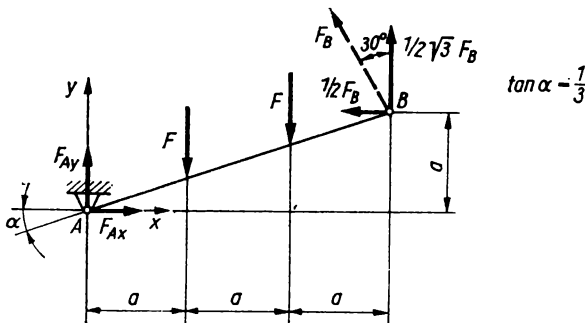


Bild 66. Strukturskizze zu Lehrbeispiel 21

Obige Gleichung lösen wir nach F_B auf.

$$F_B = \frac{3F}{\frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)} = \frac{3}{3,098} F$$

$$F_B = 0,97F$$

Statisches Momentengleichgewicht um B:

$$\zeta B \quad \left| \quad Fa + F2a + F_{Ax}a - F_{Ay}3a = 0 \right.$$

Diese Gleichung enthält noch zwei Unbekannte und ist zunächst nicht lösbar.

Wir arbeiten daher mit einer Gleichung für das statische Kräftegleichgewicht weiter.

Statisches Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung:

$$\rightarrow \quad \left| \quad \begin{aligned} F_{Ax} - \frac{1}{2} F_B &= 0 \\ F_{Ax} &= \frac{1}{2} F_B = 0,485F \end{aligned} \right.$$

Mit

$$F_{Ax} = 0,485F$$

erhält man

$$F_{Ay} = \frac{1}{3} F \cdot 3,485 = 1,162F$$

Nun steht noch eine Gleichung für das statische Kräftegleichgewicht zur Verfügung. Wir wollen diese zur Kontrollrechnung verwenden und stellen eine Kräftebilanz auf.

$$\begin{array}{r|l} \uparrow & F_{Ay} + F_{By} = 2F \\ & 1,162F \quad 2F \\ & 0,84 F \quad \quad \\ \hline & 2,002F \quad 2F \end{array}$$

Die Kontrolle ist erfüllt. Abweichungen sind mit dem Runden rechnerischer Werte zu begründen.

Gesamtreaktion F_A :

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = F \sqrt{0,485^2 + 1,162^2} = 1,26F$$

► Lehrbeispiel 22

Zum Lehrbeispiel 19 sollen die Stützreaktionen rechnerisch ermittelt werden. Wir verwenden dazu die aufbereiteten Strukturskizzen nach Bild 67.

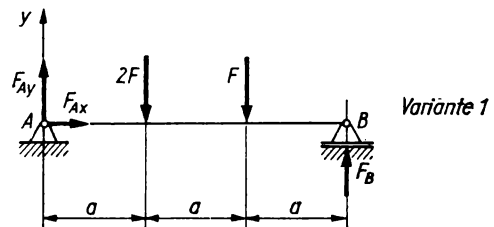
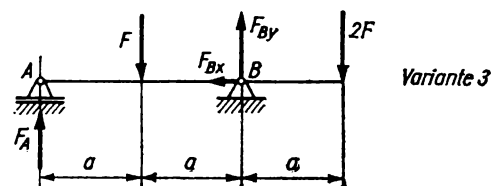
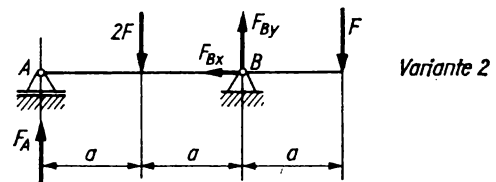


Bild 67. Strukturskizzen zu
Lehrbeispiel 22



Lösung:.

Variante 1:

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -2Fa - F2a + F_B 3a = 0 \Rightarrow F_B = \frac{4}{3} F \\ \zeta B & Fa + 2F2a - F_{Ay} 3a = 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{5}{3} F \\ \rightarrow & F_{Ax} = 0 \end{array}$$

Vertikale Kräftebilanz

$$\begin{array}{l|l} \uparrow & \begin{array}{r} F_{Ay} + F_B = 2F + F \\ \hline \frac{5}{3} F \quad 3F \\ \hline \frac{4}{3} F \\ \hline 3F \quad 3F \end{array} \end{array} \quad \text{Kontrollrechnung erfüllt}$$

Variante 2:

$$\begin{array}{l|l} \zeta B & -F_A 2a + 2Fa - Fa = 0 \\ & F_A = \frac{1}{2} F \\ \zeta A & -2Fa + F_{By} 2a - F3a = 0 \\ & F_{By} = 2,5F \end{array}$$

Vertikale Kräftebilanz

$$\begin{array}{l|l} \uparrow & \begin{array}{r} F_{By} + F_A = 3F \\ \hline 2,5F \quad 3F \\ \hline 0,5F \\ \hline 3,0F \quad 3F \end{array} \end{array} \quad \text{Kontrollrechnung erfüllt}$$

Variante 3:

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -Fa + F_{By} 2a - 2F3a = 0 \\ & F_{By} = 3,5F \\ \zeta B & -F_A 2a + Fa - 2Fa = 0 \\ & F_A = -0,5F \end{array}$$

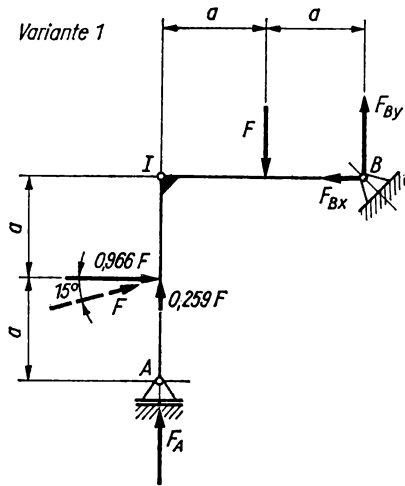
Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß die Stützreaktion F_A entgegen unserer Annahme wirkt. Mit dieser Vorzeichenkorrektur führen wir die vertikale Kräftebilanz durch.

$$\begin{array}{l|l} \uparrow & \begin{array}{r} F_{By} = -F_A + F + 2F \\ \hline 3,5F \quad -(-0,5F) \\ \hline 3,0F \\ \hline 3,5F \quad 3,5F \end{array} \end{array} \quad \text{Kräftebilanz erfüllt}$$

► Lehrbeispiel 23

Nach den qualitativen Einschätzungen der zeichnerischen Lösung zu Lehrbeispiel 20 wollen wir das Urteil quantitativ belegen.

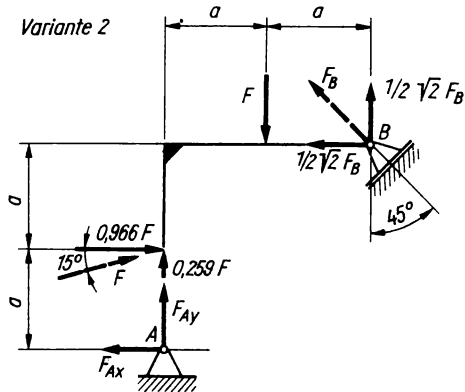
Aufbereitete Strukturskizzen nach Bild 68.



$$F \cos 15^\circ = 0,966 F$$

$$F \sin 15^\circ = 0,259 F$$

Bild 68. Strukturskizzen
zu Lehrbeispiel 23



Lösung:

Variante 1:

$$\begin{aligned} \zeta_B \quad & +Fa + 0,966Fa - 0,259F \cdot 2a - F_A \cdot 2a = 0 \\ & F_A = \frac{1}{2} F(1 + 0,966 - 0,518) = 0,724F \\ \zeta_I \quad & + 0,966Fa - Fa + F_{By} \cdot 2a = 0 \\ & F_{By} = \frac{1}{2} F(1 - 0,966) = 0,017F \\ \rightarrow \quad & + 0,966F - F_{Bx} = 0 \\ & F_{Bx} = 0,966F \end{aligned}$$

Vertikale Kräftebilanz

$$\begin{array}{r|l} \uparrow & F_A + F_{By} = F - 0,259F \\ & \hline & 0,724F \qquad 0,741F \\ & 0,017F \\ & \hline & 0,741F \qquad 0,741F \quad \text{Kontrollrechnung erfüllt} \end{array}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = F \sqrt{0,966^2 + 0,017^2} \approx 0,966F$$

Variante 2:

$$\begin{aligned}
 \zeta_A \quad & -0,966Fa - Fa + \frac{1}{2}\sqrt{2}F_B 2a + \frac{1}{2}\sqrt{2}F_B 2a = 0 \\
 & F_B = \frac{1,966}{2\sqrt{2}}F = 0,695F \\
 \rightarrow \quad & -F_{Ax} + 0,966F - \frac{1}{2}\sqrt{2}F_B = 0 \\
 & F_{Ax} = 0,966F - 0,492F = 0,474F \\
 \zeta_B \quad & +Fa + 0,966Fa - 0,259F 2a - F_{Ay} 2a - F_{Ax} 2a = 0 \\
 & \text{mit } F_{Ax} = 0,474F \\
 & F_{Ay} = \frac{1}{2}F(1 + 0,966 - 0,518 - 0,948) = 0,25F
 \end{aligned}$$

Vertikale Kräftebilanz

$$\begin{array}{rcl}
 \uparrow & F_{Ay} + \frac{1}{2}\sqrt{2}F_B = F - 0,259F & \\
 & \hline
 & 0,25F & 0,741F \\
 & 0,492F & \\
 & \hline
 & 0,742F & 0,741F \quad \text{Kontrollrechnung erfüllt}
 \end{array}$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = F\sqrt{0,474^2 + 0,25^2} = 0,54F$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

1. Variante $F_A = 0,724F$; $F_B = 0,966F$

2. Variante $F_A = 0,54F$; $F_B = 0,695F$

Die Rechnung bestätigt, daß durch geänderte Anordnung der Stützelemente Variante 2 kleinere Stützreaktionen erfordert.

► Lehrbeispiel 24

Bisher hatten wir Stützreaktionen ermittelt, die nur Einzelkräfte als wirkende Belastung aufzunehmen hatten. Der Rahmen nach Bild 69 soll hingegen Streckenlasten tragen. Entlang seiner Höhe wird er gleichmäßig horizontal belastet. Die Streckenlast hat hier eine unveränderliche Intensität vom Betrag $q_1 = 200 \text{ N/m}$. Über seine Breite wird eine linear ansteigende Belastungsverteilung vorausgesetzt. Die Belastung nimmt von Null bis zum Wert $q_2 = 200 \text{ N/m}$ gleichmäßig zu. Diese oder andere Belastungsverteilungen ersetzt man durch ihre resultierende Belastung F_q . Sie wirkt im Schwerpunkt und entspricht dem Flächeninhalt der Belastungsfläche. Für dieses Beispiel erhalten wir die Einzelkräfte $F_{q1} = q_1 \cdot 2 \text{ m} = 200 \text{ N/m} \cdot 2 \text{ m} = 400 \text{ N}$ (aus der Rechteckfläche), $F_{q2} = \frac{1}{2} q_2 \cdot 3 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N/m} \cdot 3 \text{ m} = 300 \text{ N}$ (Dreieckfläche).

Den Schwerpunkt der resultierenden Kraftwirkungslinien finden wir beim Rechteck als Schnittpunkt der Diagonalen, beim Dreieck als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (siehe Anlage A 5).

Ermittlung der Stützreaktionen:

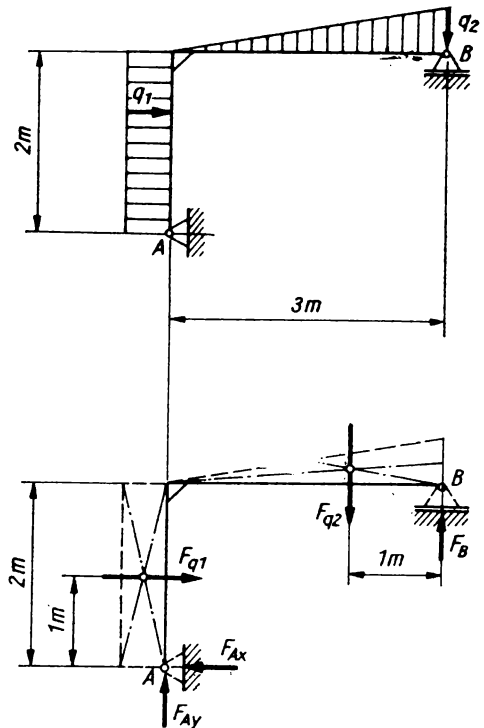
$$\begin{aligned}
 \zeta_A \quad & -F_{q1} \cdot 1 \text{ m} - F_{q2} \cdot 2 \text{ m} + F_B \cdot 3 \text{ m} = 0 \\
 & F_B = \frac{1}{3 \text{ m}} (400 \text{ Nm} + 600 \text{ Nm}) = 333 \text{ N} \\
 \rightarrow \quad & F_{Ax} = F_{q1} = 400 \text{ N} \\
 \zeta_B \quad & F_{q2} \cdot 1 \text{ m} + F_{q1} \cdot 1 \text{ m} - F_{Ax} \cdot 2 \text{ m} - F_{Ay} \cdot 3 \text{ m} = 0 \\
 & F_{Ay} = \frac{1}{3 \text{ m}} (300 + 400 - 800) \text{ Nm} = -33 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß F_{Ay} entgegen der eingezeichneten Richtung wirkt.
Kontrollrechnung: Vertikale Kräftebilanz nach Strukturskizze

↑	$\frac{F_{Ay} + F_B = F_{q2}}{}$	
	$\frac{- 33 \text{ N} \quad 300 \text{ N}}{}$	
	$\frac{+ 333 \text{ N}}{}$	
	$300 \text{ N} \quad 300 \text{ N}$	Kräftebilanz erfüllt

■ Übung 29 bis 35

Bild 69. Strukturskizzen zu Lehrbeispiel 24



Zusammenfassung

Beim allgemeinen Kräftesystem schneiden sich die Kraftwirkungslinien *nicht* in einem Punkt. Die Kräftegruppe kann Verschiebungen und Drehungen am technischen Gebilde verursachen. Deshalb sind hier die Grundlagen aus den Abschnitten „Kräfte“ und „Momente“ anzuwenden.

Zeichnerische Lösungen beziehen sich auf den elementaren Sachverhalt, daß beim statischen Gleichgewicht Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt und ein geschlossenes Kräfteck mit fortlaufender Vektorenfolge haben müssen. Da das mit den gegebenen und gesuchten Kräften nicht sofort möglich ist, muß man Hilfskräfte einführen. Dadurch entsteht schrittweise das Kraft- und Seileck. Beim Kräfteck zeichnet man zu den vorhandenen Kräften je zwei Hilfskräfte, die sich alle im Pol schneiden. Das Seileck ist dann so zu konstruieren, daß sich die zu einem Dreieck gehörenden Kraftvektoren in einem Punkt, dem Wirkungsknoten, schneiden.

Rechnerische Lösungen sind mit den Gleichungen des statischen Kräfte- und Momentengleichgewichtes durchzuführen. Bei dieser Rechnung empfiehlt es sich, eine Gleichung des statischen Kräftegleichgewichtes als Kräftebilanz zu verwenden, um die Ergebnisse zu kontrollieren.

Hauptschritte der Lösung wurden auch hier algorithmisch (*Anlage A 3*) zusammengestellt.

Bei einigen Aufgaben schneiden sich alle Wirkungslinien *nur in zwei* Punkten. Hier ist die Anwendung des Kraft- und Seileckverfahrens *nicht notwendig*. Man löst zeichnerisch nach *Culmann*. Die beiden Schnittpunkte (oft Wirkungsknoten) werden durch eine Kraftlinie (die *Culmannsche Gerade*) verbunden. Auf ihr wirken, entgegengesetzt gerichtet, die beiden Hilfskräfte. Mit den zwei Schnittpunkten und ihren zugehörigen Kräften entstehen zwei Kraftecke (das Doppelkrafteck) mit fortlaufender Vektorenfolge.

Die zusammenfassende Darstellung aller Arbeitsverfahren für Kräfte in der Ebene enthält *Anlage A 4*.

3.1. Kennzeichnungen für Kräfte im Raum

Zur Kennzeichnung einer Kraft F im Raum legen wir ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen x , y , z fest (Bild 70). Die Kraft F ist dann als Raumdiagonale eines Quaders darstellbar. Bezüglich der drei aufeinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen ergeben sich Komponenten F_x , F_y , F_z .

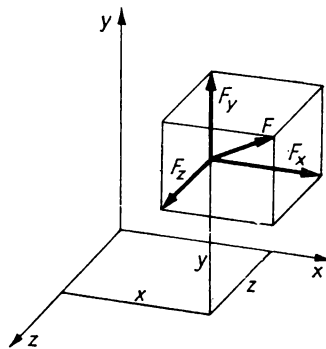


Bild 70.1

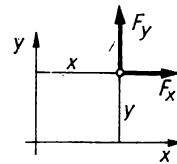


Bild 70.3

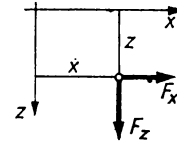
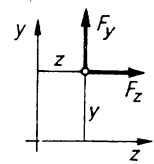


Bild 70.2

Bild 70. Komponenten einer räumlich wirkenden Kraft
Bild 70.1. ... 70.3. Darstellung in zugeordneten Ebenen

Den Betrag der Kraft findet man nach *Pythagoras*

$$\bullet \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (12)$$

Ein räumliches Kräftebündel ersetzt man zunächst durch seine resultierenden Komponenten.

$$\bullet \quad F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (13)$$

$$\bullet \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (14)$$

$$\bullet \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (15)$$

Mit ihnen erhält man den Betrag der Resultierenden zu

$$\bullet \quad F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} \quad (16)$$

Kräfte und ihre Abstände von den Achsen des gewählten Koordinatensystems ergeben statische Momente. Sie betragen z. B. mit den Komponenten nach Bild 70

um die x -Achse (Bild 70.3)

$$\sum M_x = -F_z y + F_y z$$

um die y -Achse (Bild 70.2)

$$\sum M_y = -F_z x + F_x z$$

um die z -Achse (Bild 70.1)

$$\sum M_z = -F_x y + F_y x$$

Diese Momente könnte man als Komponenten des resultierenden Momentes vom Betrag

$$M_R = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

darstellen.

3.2. Gleichgewichtsbedingungen

Das statische Gleichgewicht einer räumlichen Kräftegruppe verlangt sowohl statisches Kräftegleichgewicht als auch statisches Momentengleichgewicht. Das ist dann der Fall, wenn die resultierenden Komponenten der Kräfte und Momente zu Null werden. Demnach sind sechs Gleichgewichtsbedingungen zu beachten.

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (17) \quad \bullet \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \quad (20)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (18) \quad \bullet \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \quad (21)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (19) \quad \bullet \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \quad (22)$$

3.3. Anwendung auf ein technisches Gebilde

Technische Anwendungsfälle führen oft auf ein räumliches Strukturbild. In 1.4. wurde die Entwicklung eines räumlichen Strukturbildes dargestellt und gezeigt, daß eine Zerlegung in zwei ebene Strukturbilder möglich ist. Zur Bearbeitung räumlicher Kräftesysteme bedarf es deshalb keiner besonderen Arbeitsverfahren. Wir wenden die Arbeitsverfahren für Kräfte in der Ebene in zwei senkrechten Ebenen an.

► Lehrbeispiel 25

Am Seil der im Bild 71 dargestellten Winde hängt eine Last von 800 N, die gleichmäßig gehoben wird. Zu ermitteln sind mit

$$\begin{array}{lll} a = 350 \text{ mm} & r = 300 \text{ mm} & F_r = 0,4F_u \\ b = 450 \text{ mm} & R = 150 \text{ mm} & F_a = 0,3F_u \\ c = 200 \text{ mm} & & \end{array}$$

die Kräfte F_u , F_a , F_r am Antriebsrad und die Stützreaktionen in den Lagern. (Die Bestimmungsgleichungen für F_r und F_a wurden für diese Aufgabe festgelegt. Sie gelten nicht allgemein.)

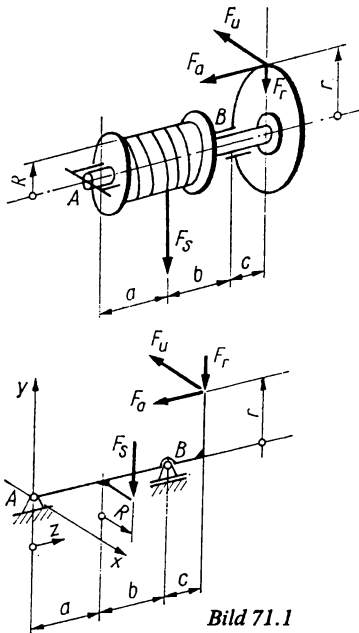


Bild 71.1

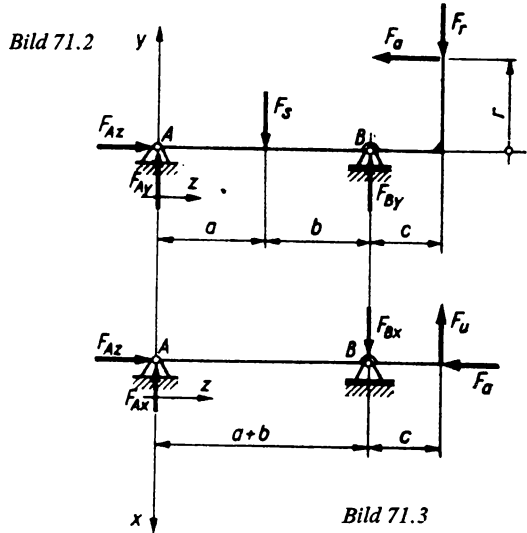


Bild 71.3

Bild 71. Skizzen des technischen Gebildes und Strukturskizzen zu Lehrbeispiel 25

Lösung:

Statisches Momentengleichgewicht bezüglich der *Wellenachse* (Bild 71.1)

$$F_u r - F_s R = 0$$

$$F_u = F_s \frac{R}{r} = 800 \text{ N} \frac{150 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 400 \text{ N}$$

$$F_a = 0,3 \cdot 400 \text{ N} = 120 \text{ N}$$

$$F_r = 0,4 \cdot 400 \text{ N} = 160 \text{ N}$$

Gleichgewicht in der *Vertikalebene* (y, z -Ebene, Bild 71.2):

$$\begin{aligned} \zeta_A \quad & -F_s a + F_{By}(a+b) + F_a r - F_r(a+b+c) = 0 \\ & F_{By} = \frac{800 \text{ N} \cdot 350 \text{ mm} - 120 \text{ N} \cdot 300 \text{ mm} + 160 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} \\ & F_{By} = 505 \text{ N} \\ \zeta_B \quad & -F_{Ay}(a+b) + F_s b + F_a r - F_r c = 0 \\ & F_{Ay} = \frac{800 \text{ N} \cdot 450 \text{ mm} + 120 \text{ N} \cdot 300 \text{ mm} - 160 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} \\ & F_{Ay} = 455 \text{ N} \end{aligned}$$

Kontrollrechnung:

$\uparrow y$	$F_{Ay} + F_{By} = F_s + F_r$
	455 N 800 N
	505 N 160 N
	960 N 960 N

$\rightarrow z$	$F_{Az} = F_a = 120 \text{ N}$
-----------------	--------------------------------

Gleichgewicht in der *Horizontalebene* (x ; z -Ebene, Bild 71.3):

ζA	$-F_{Bx}(a + b) + F_u(a + b + c) = 0$
	$F_{Bx} = \frac{400 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{800 \text{ mm}}$
	$F_{Bx} = 500 \text{ N}$
ζB	$-F_{Ax}(a + b) + F_u c = 0$
	$F_{Ax} = \frac{400 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{800 \text{ mm}}$
	$F_{Ax} = 100 \text{ N}$

Kontrollrechnung:

$\uparrow y$	$F_{Ax} + F_u = F_{Bx}$
	100 N 500 N
	400 N
	500 N 500 N

Im Festlager A wirken

die Axialkraft $F_{Az} = 120 \text{ N}$,

die Radialkraft $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 100 \sqrt{1^2 + 4,55^2} \text{ N}$
 $F_A = 466 \text{ N}$

und im Loslager B

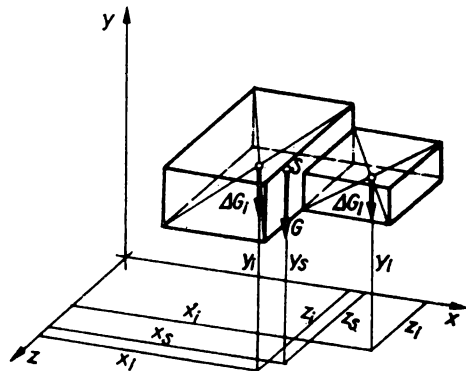
die Radialkraft $F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = 100 \sqrt{5^2 + 5,05^2} \text{ N}$
 $F_B = 710 \text{ N}$

■ Übungen 36 bis 38

4.1. Schwerpunktermittlungen

Bei einigen Aufgaben der Technischen Mechanik muß man die Lage des Schwerpunktes kennen. Kann beispielsweise der Anteil des Eigengewichtes einer Konstruktion an der statischen Belastung nicht vernachlässigt werden, so ist die Kenntnis des Körperschwerpunktes als Angriffspunkt des Gesamtgewichtes von Bedeutung. Spannungsermittlungen bei Biegung beziehen sich auf den Flächenschwerpunkt, und der Linienschwerpunkt wird bei der Konstruktion von Schneidwerkzeugen benötigt.

Bild 72. Körper mit Teilgewichten zur Ermittlung seines Schwerpunktes



Wir gehen zunächst nochmals auf die bereits bekannte Definition des Schwerpunktes ein. Jeder Körper unterliegt der Erdanziehungskraft (Schwerkraft). Sie wirkt in seinem Schwerpunkt. Um ihn zu ermitteln, zerlegt man den Körper in kleine Teile vom Gewicht ΔG (Bild 72) und wendet den Satz der statischen Momente an:

$$\bullet \quad Gx_s = \sum_{i=1}^n \Delta G_i x_i \quad (23)$$

$$\bullet \quad Gy_s = \sum_{i=1}^n \Delta G_i y_i \quad (24)$$

$$\bullet \quad Gz_s = \sum_{i=1}^n \Delta G_i z_i \quad (25)$$

Hierin sind

x_s, y_s, z_s die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes;
 x_i, y_i, z_i Koordinaten des Schwerpunktes der einzelnen Gewichtsteile.

4.1.1. Körper-, Flächen- und Linienschwerpunkt

Bei konstanter Fallbeschleunigung g und Dichte ϱ erhält man die Schwerpunktkoordinaten eines Körpers aus dessen Volumenanteilen ΔV_i . Wir schreiben zu diesem Zweck

$$\Delta G_i = \varrho g \Delta V_i$$

und

$$G = \varrho g V$$

Dann lautet Gl. (23)

$$V x_s = \sum_{i=1}^n x_i \Delta V_i,$$

aufgelöst nach der Koordinate für den Volumenschwerpunkt

$$\bullet \quad x_s = \frac{\sum \Delta V_i x_i}{V} \quad (26)$$

In gleicher Weise entsteht aus den Gln. (24), (25)

$$\bullet \quad y_s = \frac{\sum \Delta V_i y_i}{V} \quad (27)$$

$$\bullet \quad z_s = \frac{\sum \Delta V_i z_i}{V} \quad (28)$$

Für Körper mit konstanter Dicke d gilt

$$\Delta V_i = \Delta A_i d \quad \text{und} \quad V = A d$$

Wir gelangen damit zu den Schwerpunktkoordinaten einer Fläche

$$\bullet \quad x_s = \frac{\sum \Delta A_i x_i}{A} \quad (29)$$

$$\bullet \quad y_s = \frac{\sum \Delta A_i y_i}{A} \quad (30)$$

Die z -Koordinate verschwindet (Bild 73).

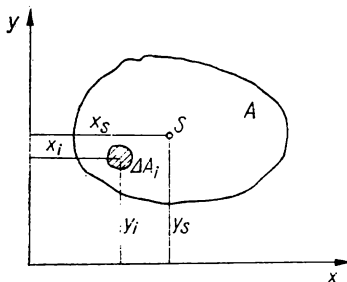


Bild 73. Koordinaten zur Ermittlung des Flächenschwerpunktes

Denkt man sich eine Fläche zur Linie zusammengeschrunpft, so sind die Teilflächen ΔA_i in Liniestücke Δl_i übergegangen. Wir erhalten für die Koordinaten des Linienschwerpunktes

$$\bullet \quad x_s = \frac{\sum \Delta l_i x_i}{l} \quad (31)$$

$$\bullet \quad y_s = \frac{\sum \Delta l_i y_i}{l} \quad (32)$$

4.1.2. Bestimmung des Schwerpunktes mit dem Verfahren der Statik

Die Ermittlung des Schwerpunktes entspricht im Prinzip der analogen Aufgabe, die Lage einer resultierenden Kraft zu suchen. Flächen- und Linienschwerpunkte geometrischer Grundfiguren sind bekannt. Eine ausgewählte Zusammenstellung enthält *Anlage A 5*. Bei zusammengesetzten Flächen und Linienzügen rechnet man unter Bezugnahme auf die Gln. (29) bis (32) tabellarisch.

4.1.3. Anwendung auf den Flächenschwerpunkt

► Lehrbeispiel 26

Für die Fläche nach Bild 74 sind die Koordinaten des Schwerpunktes rechnerisch zu ermitteln.

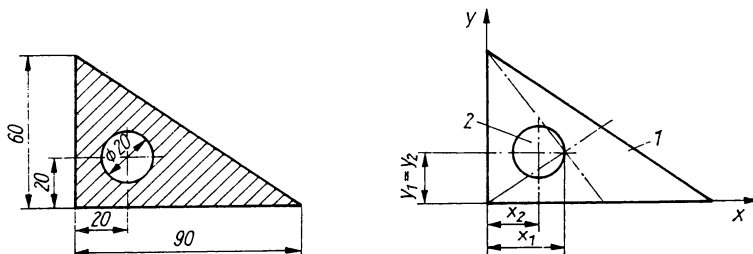


Bild 74. Fläche zu Lehrbeispiel 26

Lösung:

Die dargestellte Fläche enthält als Grundfiguren das Dreieck und den Kreis. Dreieck sei Teilfläche 1, Kreis Teilfläche 2. Beim Summieren müssen die Anteile für die Kreisfläche negative Vorzeichen erhalten. Das Koordinatensystem legen wir an die Kanten der Dreiecksfläche.

i	ΔA_i in cm ²	x_i in cm	y_i in cm	$\Delta A_i x_i$ in cm ³	$\Delta A_i y_i$ in cm ³
1	27,0	3	2	81,0	54,0
-2	-3,14	2	2	-6,28	-6,28
Σ	23,86	—	—	74,72	47,72

Koordinaten des Flächenschwerpunktes nach Gln. (29) und (30):

$$x_s = \frac{\Sigma \Delta A_i x_i}{A} = \frac{74,72}{23,86} \text{ cm} = 3,13 \text{ cm}$$

$$y_s = \frac{\Sigma \Delta A_i y_i}{A} = \frac{47,72}{23,86} \text{ cm} = 2,00 \text{ cm}$$

► Lehrbeispiel 27

Für den Trägerquerschnitt (Bild 75), der aus Rechtecken und standardisierten Winkelprofilen (TGL 0-1028) besteht, ist der Flächenschwerpunkt rechnerisch zu ermitteln.

Lösung:

Die Schwerpunktslagen für beide Profile entnehmen wir TGL-Blättern oder Taschenbüchern. Bild 75.2 gibt die Maße an. Aus Symmetriegründen deckt sich diesmal die y -Achse mit der vertikalen

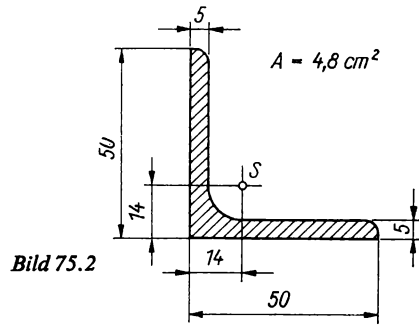
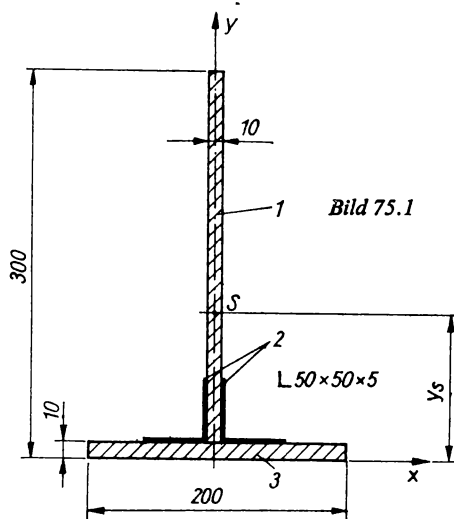


Bild 75. Querschnitt zu Lehrbeispiel 27

Schwerachse des Querschnittes. Dadurch erübrigt sich die Berechnung von x_s . Symmetrieachsen sind stets Schwerachsen. Bei mehrfach symmetrischen Flächen liegt demnach der Schwerpunkt im Schnittpunkt ihrer Symmetrieachsen. Die symmetrisch angeordneten Winkelprofile können rechnerisch zusammengefaßt werden.

i	ΔA_i in cm^2	y_i in cm	$\Delta A_i y_i$ in cm^3
1	29	15,5	449,5
2	9,6	2,4	23,04
3	20	0,5	10,0
Σ	58,6	—	482,54
$y_s = \frac{\Sigma \Delta A_i y_i}{A} = \frac{482,54}{58,6} \text{ cm} = 8,2 \text{ cm}$			

Die zeichnerische Lösung entspricht der Bestimmung der Lage einer Resultierenden mittels Seileckkonstruktion. Ebenso wie bei der rechnerischen Lösung wird die Fläche in Teilflächen aufgeteilt, deren Flächeninhalte man Vektoren zuordnet, die den jeweiligen Flächen proportional sind. In einer dem Kräfteck analogen Vektorenfolge entsteht der resultierende Vektor für die Gesamtfläche. Die Schwerpunktslage der Teilflächen ist Angriffspunkt zugehöriger Vektoren. Dadurch entsteht das Seileck mit der resultierenden Schwerpunktslage. Bei asymmetrischen Flächen muß man das Verfahren zweimal durchführen, um mit zwei Schwerachsen den Schwerpunkt der Fläche zu finden. Es empfiehlt sich, die Flächenvektoren vertikal und horizontal abzubilden.

► Lehrbeispiel 28

Für die Querschnittsfläche (Bild 76) ist der Schwerpunkt zeichnerisch zu bestimmen.

Lösung:

Die Einteilung erfolgt in drei Flächen A_1 , A_2 , A_3 , von denen Flächeninhalt und Schwerpunktslagen bekannt sind.

$$A_1 = 3 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 6 \text{ cm}^2$$

Zur Darstellung der Vektoren verwenden wir einen Flächenmaßstab M_A . Die Vektoren, vertikal und horizontal wirkend angenommen, können in einer Figur dargestellt werden. Durch die zwei-

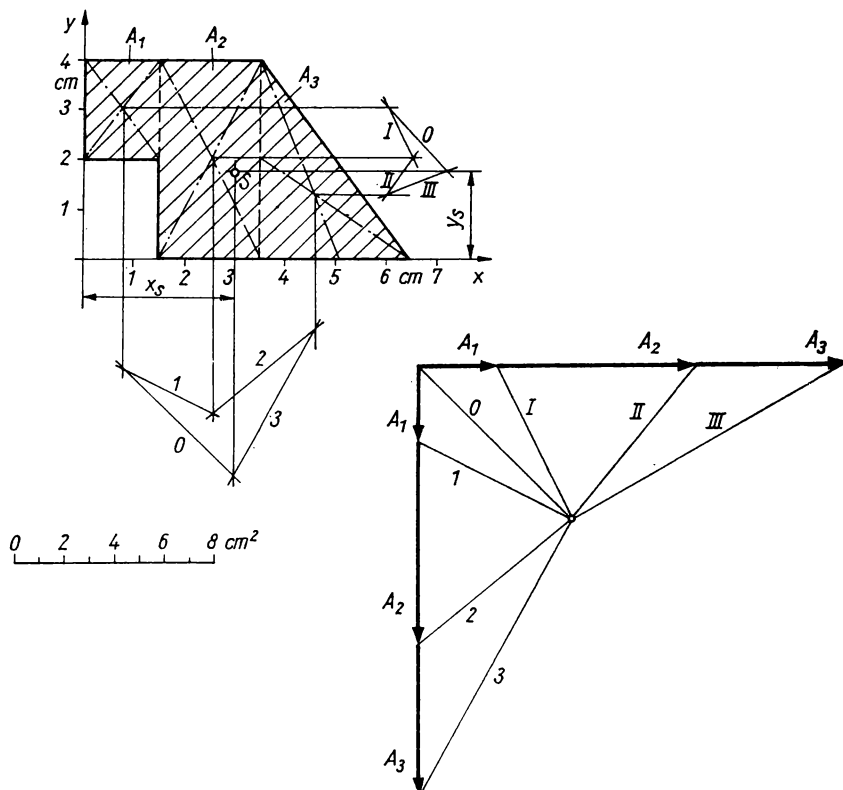


Bild 76. Zur zeichnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 28

malige Anwendung der Kraft- und Seileckkonstruktion ergeben sich die Wirkungslinien der Resultierenden in vertikaler und horizontaler Richtung. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Schwerpunkt. Die zeichnerische Lösung führt auf

$$x_s = 2,9 \text{ cm} \quad \text{und} \quad y_s = 1,9 \text{ cm}$$

■ Übung 39 bis 44

4.2. Standsicherheit

Freistehende Körper können durch äußere Kräfte gekippt werden. Eine Körperkante ist dabei Kippkante. Der im Bild 77 dargestellte Körper kippt möglicherweise um die Körperkante $a \dots b$. Die äußeren Kräfte und das Eigengewicht bilden bezüglich der Kippkante statische Momente. Diese Momente wirken entweder dem Kippen entgegen oder verursachen es. Die Summe der das Kippen verursachenden Momente führt zum *Kippmoment* M_K und die Summe der gegen das Kippen wirkenden Momente zum *Standmoment* M_{St} . Setzt man beide ins Verhältnis, dann ergibt sich die *Standicherheit* S .

$$\bullet \quad S = \frac{M_{St}}{M_K} \quad (33)$$

Das führt zu folgenden Kriterien:

$S > 1$ Kippen ist ausgeschlossen, der Körper, das technische Gebilde steht mit Sicherheit

$S = 1$ instabiler Grenzfall

$S < 1$ Körper kippt

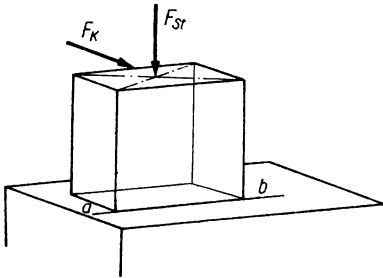


Bild 77. Prinzipdarstellung zur Standsicherheit

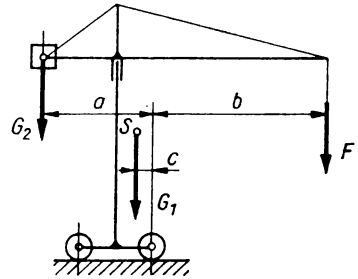


Bild 78. Zu Lehrbeispiel 29

► Lehrbeispiel 29

Für den Turmdrehkran (Bild 78) ist die Nutzlast F für $S = 2$ zu ermitteln. Das Gegengewicht $G_2 = 30 \text{ kN}$ und das Eigengewicht $G_1 = 100 \text{ kN}$ sind bekannt.

Lösung:

Mit den Hebelarmen $a = 8 \text{ m}$, $b = 20 \text{ m}$ und $c = 2 \text{ m}$ erhält man bezüglich der Kippkante:

$$M_K = Fb$$

$$M_{St} = G_1c + G_2a$$

in Gl. (33) eingesetzt

$$S = \frac{G_1c + G_2a}{Fb}$$

$$F = \frac{G_1c + G_2a}{Sb} = \frac{100 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m}}{2 \cdot 20 \text{ m}} = 11 \text{ kN}$$

■ Übung 45

4.3. Reibung

4.3.1. Grundlagen für Reibkräfte nach Coulomb

Bewegt sich der Körper auf einer geneigten Ebene (Bild 79) nicht, dann befindet er sich im statischen Gleichgewicht. Das ist natürlich nur möglich, wenn die in x -Richtung wirkende Komponente des Gewichtes $G \sin \alpha$ durch eine *Gegenkraft* aufgehoben wird. Diese Kraft existiert. Sie wirkt als *Reibkraft in der Berührungsebene beider Körper* und beträgt nach *Coulomb* (Charles Augustin de Coulomb, 1736 bis 1806: Untersuchungen über die Reibung):

$$\bullet \quad F_R = \mu_0 F_N \quad (34)$$

F_R Reibkraft

μ_0 Reibungszahl der Haftreibung

F_N Normalstützkraft

Wir unterscheiden zwischen Haft- und Gleitreibung. Bei der Haftreibung ist die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Berührungsflächen gleich Null, während sie bei der Gleitreibung verschieden von Null ist. Zur Kennzeichnung der Haftreibung wird die Reibungszahl mit dem Index 0 versehen. Reibungsfaktoren μ bzw. μ_0 sind durch physikalische Versuche bekannt (Werte nach *Anlage A 6*). Sie berücksichtigen nur näherungsweise die Reibungsverhältnisse zwischen beiden Körpern, weil diese Faktoren nur von der Werkstoffpaarung und von ihrer Oberflächenbeeinflussung – trocken oder geschmiert – angegeben werden. Man kann mit ihnen z. B. nicht den Oberflächenzustand, die Rauheit der Oberfläche oder weitere Schmiermitteleigenschaften, wie Viskositätsänderungen bei verschiedenen Temperaturen, erfassen. Für die Festlegung der Reibkräfte ist zu beachten:

● Reibkräfte

wirken *zwischen* den sich berührenden Körpern,
sind der angestrebten *Bewegungsrichtung entgegengesetzt* (Hemmwirkung)
und neben μ bzw. μ_0 von der *Normalstützkraft* abhängig.

Diese Zusammenhänge wollen wir veranschaulichen.

Wir fragen, wann der Körper auf geneigter Bahn gleitet. Das Gewicht G zerlegen wir in die beiden Komponenten $G \sin \alpha$ und $G \cos \alpha$. Die in x -Richtung wirkende Komponente

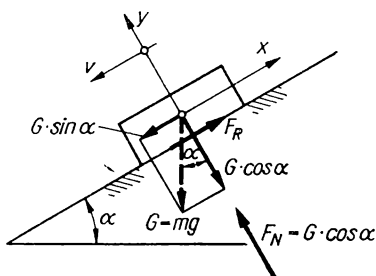
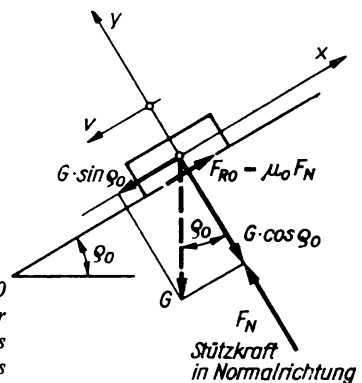


Bild 79
Zum Prinzip
der Gleitreibung

Bild 80
Strukturskizze zur
Ermittlung des
Reibungswinkels



ist bestrebt, den Körper abwärts zu bewegen. Senkrecht zur Bahn wirkt $G \cos \alpha$ als Normalbelastung. Wir finden in Übereinstimmung mit dem statischen Kräftegleichgewicht in y -Richtung die Normalstützkraft zu $F_N = G \cos \alpha$. Für das statische Kräftegleichgewicht in Gleitrichtung sind die beiden Kräfte $G \sin \alpha$ und $F_R = \mu_0 F_N$ zu betrachten. Wird der Neigungswinkel verändert, so entsteht ein Grenzzustand zwischen Haften und Gleiten. Er ist durch $\alpha = \varrho_0$ gekennzeichnet. Hierfür gilt nach Bild 80:

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow x & -G \sin \varrho_0 + \mu_0 F_N = 0 \\ & -G \sin \varrho_0 + \mu_0 G \cos \varrho_0 = 0 \end{array}$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin \varrho_0}{\cos \varrho_0} = \tan \varrho_0 = \mu_0$$

● Die Reibungszahl μ_0 entspricht dem Tangens des Reibwinkels ϱ_0 .

Die Größe des Gewichtes ist für diesen Vorgang bedeutungslos. Ebenso gilt für die gleichförmige Abwärtsbewegung $\mu = \tan \varrho$. Da erfahrungsgemäß die Reibungszahlen für eine gleichförmige Bewegung kleiner sind als die Haftreibungszahlen, muß die Bahnneigung nach Einleitung der Bewegung sofort bis auf ϱ verringert werden, um eine Beschleunigung auszuschließen.

4.3.1.1. Rechnerische Lösungen mit dem statischen Kräftegleichgewicht

Ein Körper auf geneigter Ebene soll durch eine Haltekraft gleichförmig abwärts bewegt werden. Wenn die Winkel α und β (Bild 81), das Gewicht G des Körpers und die Reibungs-

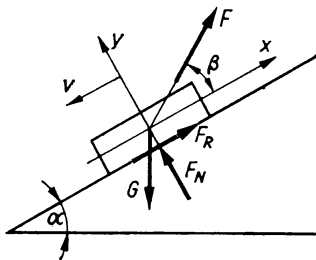
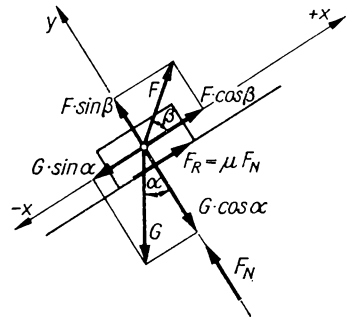


Bild 81
Strukturskizze zur
Ermittlung der
Haltekraft



zahl μ bekannt sind, dann läßt sich die Haltekraft F bestimmen. Zur Kennzeichnung der möglichen Abwärtsbewegung wird die Geschwindigkeitsrichtung v in die Strukturskizze eingetragen. Die Reibkraft wirkt ihr entgegen.

Statisches Kräftegleichgewicht nach Strukturskizze:

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow x & -G \sin \alpha + \mu F_N + F \cos \beta = 0 \\ \uparrow y & -G \cos \alpha + F_N + F \sin \beta = 0 \end{array}$$

Die zweite Gleichung wird nach F_N aufgelöst.

$$F_N = G \cos \alpha - F \sin \beta$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die erste Gleichung ein:

$$-G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha - \mu F \sin \beta + F \cos \beta = 0$$

und erhalten

$$\bullet \quad F = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta} G \quad (35)$$

Bei einer gleichförmigen Aufwärtsbewegung haben wir nach Strukturskizze (Bild 82) wie folgt zu schreiben:

$$\begin{array}{l} \rightarrow x \quad F \cos \beta - G \sin \alpha - \mu F_N = 0 \\ y \uparrow \quad F \sin \beta + F_N - G \cos \alpha = 0 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$F_N = G \cos \alpha - F \sin \beta$$

und

$$\bullet \quad F = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} G \quad (36)$$

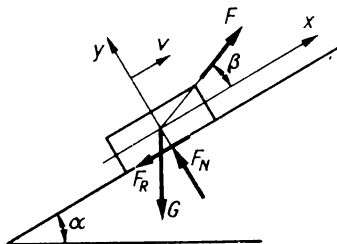
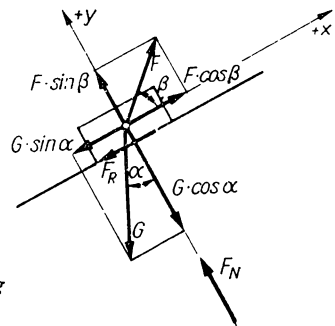


Bild 82. Strukturskizze zur gleichförmigen Aufwärtsbewegung



► Lehrbeispiel 30

Der Gleitkörper vom Gewicht G_1 (Bild 83) soll sich in jeder Lage im Ruhezustand befinden. Welche Größe muß das Ausgleichsgewicht G_2 haben, wenn die Reibung an der Rolle unberücksichtigt bleibt?

Gegeben: $G_1 = 10 \text{ N}$, $\mu_0 = 0,2$, $\alpha = 60^\circ$

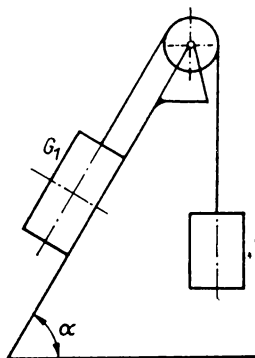


Bild 83. Zu Lehrbeispiel 30

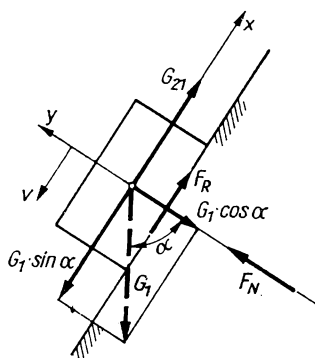


Bild 83.1

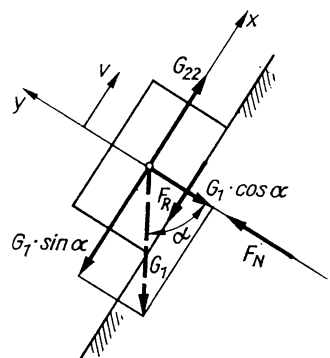


Bild 83.2

Lösung:

G_{21} verhindert die *Abwärtsbewegung* von G_1 (Bild 83.1).

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow x & -G_1 \sin \alpha + G_{21} + \mu_0 F_N = 0 \\ y \uparrow & F_N - G_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_N = G_1 \cos \alpha; \end{array}$$

eingesetzt in

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow x & -G_1 \sin \alpha + G_{21} + \mu_0 G_1 \cos \alpha = 0 \\ & G_{21} = G_1 (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) = 10 \text{ N}(0,866 - 0,2 \cdot 0,5) \\ & G_{21} = 7,66 \text{ N} \end{array}$$

G_{22} verhindert die *Aufwärtsbewegung* (Bild 83.2)

Es ist sofort zu erkennen, daß sich hier lediglich die Richtung der Reibkraft ändert. Man erhält

$$G_{22} = G_1 (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = 10 \text{ N}(0,866 + 0,2 \cdot 0,5)$$

$$G_{22} = 9,66 \text{ N}$$

Wir wählen $G_2 = 8,5 \text{ N}$. Damit gilt

$$G_{21} < G_2 < G_{22}$$

Der Körper vom Gewicht G_1 wird mit Sicherheit im Ruhezustand gehalten.

4.3.1.2. Zeichnerische Lösungen mit der Widerstandskraft

Mit der Reibkraft (Bild 84.1) und der Normalstützkraft entsteht als Resultierende die Widerstandskraft F_W . Sie ist nach der Beziehung

$$\bullet \quad \tan \varrho_0 = \frac{F_{R0}}{F_N} = \frac{\mu_0 F_N}{F_N} = \mu_0 \quad (37)$$

um den Reibwinkel ϱ_0 entgegen der Bewegungsrichtung (Hemmwirkung) aus der Normalstützkraft-Richtung geneigt.

Für den Grenzzustand zwischen Haften und Gleiten (Bild 84.2) muß G mit F_W eine gemeinsame Wirkungslinie haben. Das Kräfteck besteht für diesen Sonderfall nur aus zwei Kräften und kennzeichnet das statische Kräftegleichgewicht durch Aktions- und Reaktionskraft, durch Gewicht und reibungsbedingte Hemmwirkung der Widerstandskraft F_W .

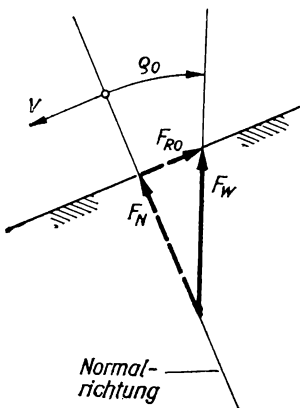


Bild 84. Zur Festlegung der Widerstandskraft

Bild 84.1

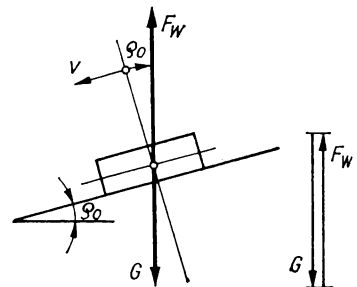


Bild 84.2

► Lehrbeispiel 31

Bild 85 zeigt eine Konsole, reibungsbehaftet mit der Säule verbunden. Welche Kraft F ist aufzuwenden, um das Gewicht gleichförmig zu heben? Reibungszahl $\mu = 1/5$. Gestucht ist zeichnerisch das Verhältnis Nutzen zu Aufwand, d. h. das Verhältnis der Last zur Aufzugskraft.

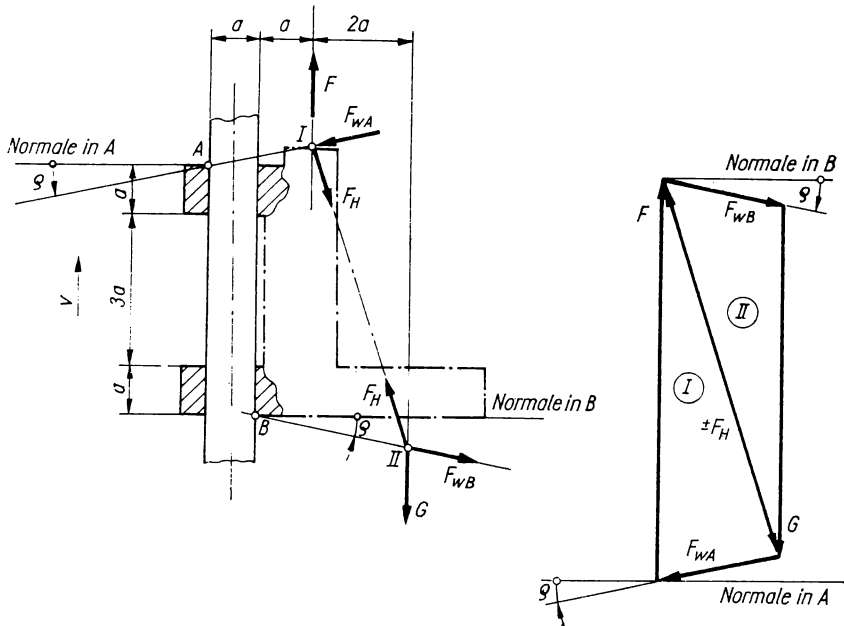


Bild 85. Zur zeichnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 31

Lösung:

Die Konsole wird an der Säule gestützt, Stützstellen A, B . Dort wirken Normal- und Reibkräfte. Die Widerstandskräfte, als Resultierende aus beiden, sind aus der Normalstützrichtung entgegen der Aufzugsbewegung um den Reibwinkel ϱ zu drehen. Wir verwenden zur Konstruktion der Wirkungslinie von F_w das Kathetenverhältnis nach der Tangensfunktion $\mu = \tan \varrho$, in diesem Fall, Reibungszahl $\mu = 1/5$, das Verhältnis 1 : 5. Diese Widerstandskräfte sind in A und B als F_{wA} und F_{wB} in den Strukturplan einzutragen. Wir kennen nun die Wirkungslinien von vier Kräften, die sich zu zwei Schnittpunkten vereinigen lassen. Die zeichnerische Lösung nach *Culmann* ergibt bei angenommenem G den Vektor für F . Wir finden als Verhältnis der Belastung zur Aufzugskraft

$$\frac{G}{F} = \frac{7}{8}$$

■ Übung 46 bis 49

4.3.2. Technische Anwendungen

4.3.2.1. Gleiten oder Kippen

Ein Gleitkörper vom Gewicht G (Bild 86) soll auf seiner Unterlage verschoben werden. Die hierzu erforderliche Kraft kann man mit dem statischen Kräftegleichgewicht

$$F - F_R = 0 \quad \text{oder} \quad F = \mu F_N = \mu G$$

ermitteln. Bei ungünstigem Kraftangriff besteht jedoch die Gefahr des Kippens. Deshalb ist eine Untersuchung auf Standsicherheit angebracht. In vorliegendem Fall erhalten wir mit dem Standmoment

$$M_{st} = G \frac{a}{2}$$

und dem Kippmoment

$$M_k = Fh = \mu Gh$$

für die Standsicherheit den Ausdruck

$$S = \frac{M_{st}}{M_k} = \frac{Ga}{2\mu Gh} = \frac{a}{2\mu h}$$

Danach ist die Standsicherheit der Länge a direkt, der Reibungszahl μ und der Angriffshöhe h umgekehrt proportional. Zu ihrer Erhöhung kann man sowohl a vergrößern als auch die Kraftangriffshöhe h verkleinern.

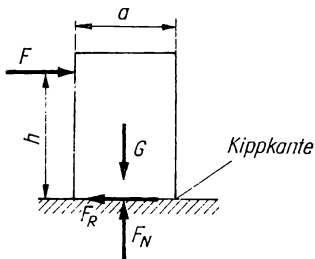


Bild 86. Prinzipdarstellung zur Standsicherheit beim Gleiten

► Lehrbeispiel 32

Der Körper nach Bild 86, Gewicht $G = 400 \text{ N}$, Länge seiner Körperkante $a = 600 \text{ mm}$, soll gleitend ($\mu = 0,2$) verschoben werden. Gesucht sind Verschiebekraft F und maximale Angriffshöhe h , damit die konstante Bewegung gerade noch möglich ist.

Lösung:

Zur Verschiebung auf der waagerechten Unterlage benötigt man die Kraft

$$F = \mu G = 0,2 \cdot 400 \text{ N} = 80 \text{ N}$$

Für den Grenzfall, Standsicherheit $S = 1$, ergibt sich mit

$$S = 1 = \frac{a}{2\mu h}$$

eine Angriffshöhe von

$$h = \frac{a}{2\mu} = \frac{600 \text{ mm}}{2 \cdot 0,2} = 1500 \text{ mm}$$

Um die Kippgefahr mit Sicherheit auszuschließen, muß h kleiner als 1,5 m sein. Bei größeren Werten kippt der Körper, er *gleitet nicht*.

4.3.2.2. Reibung in Keilnuten

Die Stützkraft F_B der Prismenführung (Bild 87) kann nicht sofort als Normalstützkraft zur Ermittlung von Reibkräften herangezogen werden, weil sie nicht normal zur Gleitfläche gerichtet ist. In solchen Fällen muß man bei symmetrischer Prismenführung F_B mit dem doppelten Öffnungswinkel 2δ in Normalstützkkräfte umrechnen.

Das zugehörige Krafteck liefert die Beziehung

$$F_N' = \frac{F_B}{2 \sin \delta}$$

Als Summe der Reibkräfte in beiden Ebenen der Flanken wird dann

$$F_R = \mu 2F_N = \mu \frac{2F_B}{2 \sin \delta} = \mu \frac{F_B}{\sin \delta}$$

Vielfach rechnet man bei Prismenführung die Tabellenwerte für μ nach der Beziehung

$$\mu' = \frac{\mu}{\sin \delta} \text{ um. Dann steht für obigen Ausdruck}$$

$$F_R = \mu' F_B$$

Bei kleinem Öffnungswinkel erhöht sich demnach die Reibkraft, so daß die erzielte Führungswirkung durch eine Erhöhung der Reibungsverluste erkauft wird. Andererseits nutzt man diese Erkenntnis z. B. bei der Kraftübertragung durch Riemetrieb aus. Größere Umfangskräfte lassen sich mit Keilriemen (nicht mit Flachriemen) übertragen.

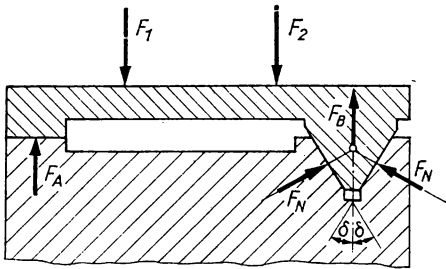


Bild 87
Zur Reibung
in Prismen-
führungen

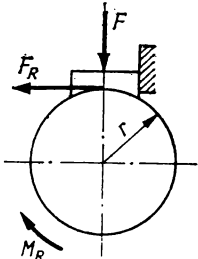


Bild 88
Zur Reibung an
Backenbremsen

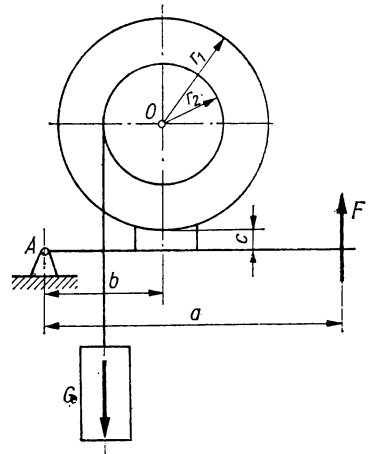
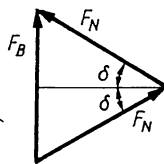


Bild 89
Schematische
Darstellung
der Bremsein-
richtung nach
Lehrbeispiel 33

4.3.2.3. Reibung an Backenbremsen

Bremsbacken sind mit der Kraft F gegen das drehende Rad zu drücken. Dadurch entsteht zwischen Bremsbacken und Radoberfläche eine Reibkraft. Sie wirkt der Drehrichtung des Rades entgegen (Bild 88). Statisches Momentengleichgewicht um die Drehachse des Rades ergibt das Bremsmoment

$$\bullet \quad M_R = F_R r \quad (38)$$

► Lehrbeispiel 33

Mit welcher Kraft F muß am Hebel der Bremseinrichtung nach Bild 89 gedrückt werden, um ein gleichförmiges Absenken der Last G zu ermöglichen? Gegebene Größen: $r_1 = 600 \text{ mm}$, $r_2 = 150 \text{ mm}$, $a = 1500 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, $c = 100 \text{ mm}$, $\mu = 0,4$, $G = 3000 \text{ N}$.

Lösung:

Wir machen die Bremsscheibe und den Bremshebel frei und erhalten Strukturskizzen nach den Bildern 90.1 und 90.2. Nun lassen sich für beide die statischen Gleichgewichtsbedingungen formulieren.

Statisches Momentengleichgewicht für die *Scheibe* (Bild 90.1):

$$\begin{aligned} \zeta O \quad & Gr_2 - F_R r_1 = 0 \\ & F_R = G \frac{r_2}{r_1} = \mu F_N \\ & F_N = G \frac{r_2}{\mu r_1} \end{aligned}$$

für den *Hebel* (Bild 90.2):

$$\begin{aligned} \zeta A \quad & Fa - F_N b - F_R c = 0 \\ & Fa - G \frac{r_2}{\mu r_1} b - G \frac{r_2}{r_1} c = 0 \end{aligned}$$

Daraus entsteht

$$\begin{aligned} F &= G \frac{r_2}{r_1 a} \left(\frac{b}{\mu} + c \right) \\ F &= 3000 \text{ N} \frac{150 \text{ mm}}{600 \text{ mm} \cdot 1500 \text{ mm}} \left(\frac{300 \text{ mm}}{0,4} + 100 \text{ mm} \right) \\ F &= 425 \text{ N} \end{aligned}$$

Wird der Hebel konstruktiv so gestaltet, daß die Wirkungslinie von F_R den Drehpunkt A schneidet (Bild 90.3), dann verringert sich die Druckkraft F .

$$\begin{aligned} \zeta A \quad & Fa - F_N b = 0 \\ & F = F_N \frac{b}{a} = G \frac{r_2 b}{\mu r_1 a} \\ & F = 3000 \text{ N} \frac{150 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm}}{0,4 \cdot 600 \text{ mm} \cdot 1500 \text{ mm}} = 375 \text{ N} \end{aligned}$$

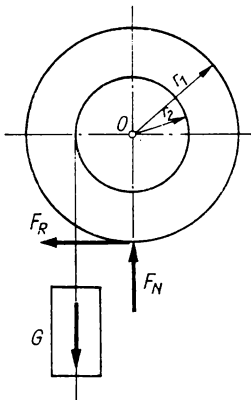


Bild 90.1

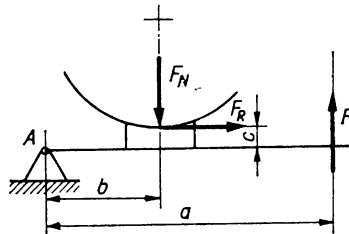


Bild 90.2

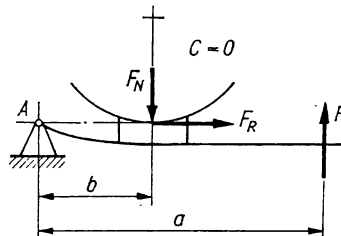


Bild 90. Zur rechnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 33

Bild 90.3

4.3.2.4. Reibung an Schrauben

Eine Schraube mit Flachgewinde soll das Gewicht G heben oder senken (Bild 91). Wir wollen dazu das erforderliche Drehmoment M bestimmen. Die Abwicklung eines Gewindenganges entspricht einer geneigten Ebene mit der Grundlinie πd_2 und der Höhe P . Bei

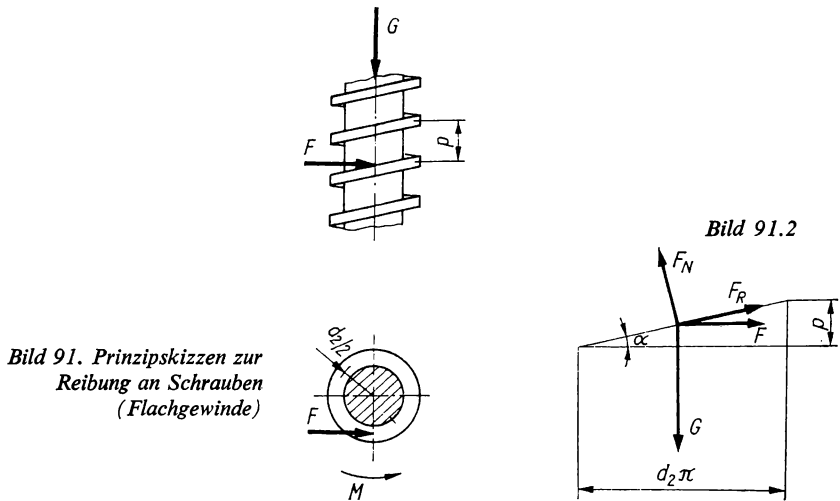


Bild 91. Prinzipskizzen zur Reibung an Schrauben (Flachgewinde)

Drehung der Spindel bewegt sich demnach die Last G wie auf einer geneigten Bahn. Dadurch wirken die Kräfte nach Bild 91.2 und das Drehmoment $M = F \frac{d_2}{2}$. Nach Gl. (35) Abschn. 4.3.1.1., wird mit $\beta = -\alpha$

$$F = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} G$$

Setzt man für $\mu = \tan \varrho$ und erweitert mit $\frac{1}{\cos \alpha}$, so wird

$$F = G \frac{\tan \alpha - \tan \varrho}{1 + \tan \varrho \tan \alpha}$$

bzw. mit dem Additionstheorem für Tangens

$$F = G \tan (\alpha - \varrho)$$

Das Drehmoment zum Senken der Last beträgt daher

$$M = \frac{d_2}{2} = G \tan (\alpha - \varrho) \frac{d_2}{2}$$

oder für das Heben der Last G

$$M = G \tan (\alpha + \varrho) \frac{d_2}{2}$$

Ist bei großer Reibung $\varrho > \alpha$, dann ist beim Senkvorgang ein Moment aufzuwenden. Das ist z. B. beim Spindel-Wagenheber der Fall. Hier muß die Schraubenspindel bei jeder Hubhöhe sicher halten. Solche Schrauben sind selbsthemmend.

■ Übung 50

4.3.2.5. Übertragung von Antriebsmomenten durch Reibräder

Das horizontale Tellerrad des Reibradgetriebes (Bild 92) wird durch die Feder gegen das vertikale Reibrad gedrückt. Dadurch entstehen reibungsbedingte Momente, die ohne Schlupf übertragen werden sollen. Wir müssen daher mit den Koeffizienten der Haftreibung rechnen. Das Moment für das Tellerrad läßt sich nach Bild 92.2 wie folgt bestimmen: Die Feder wirkt mit ihrer Kraft F_F auf das Tellerrad und erzeugt vom Reibrad her die gleich große Reaktionskraft F_N . Da sie senkrecht zum Berührungsradius a wirkt, entsteht dort die Reibkraft

$$F_R = \mu_0 F_N$$

Statisches Momentengleichgewicht führt für das Tellerrad zum gesuchten Drehmoment

$$M = \mu_0 F_F a$$

Dieses Moment wächst linear mit dem Reibkreisradius a . Zu kleine Übertragungsradien sind daher nicht zweckmäßig.

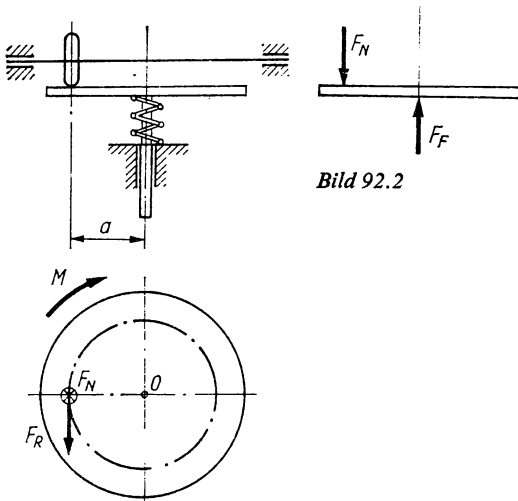


Bild 92. Prinzipskizzen zur Reibung an Reibrädern

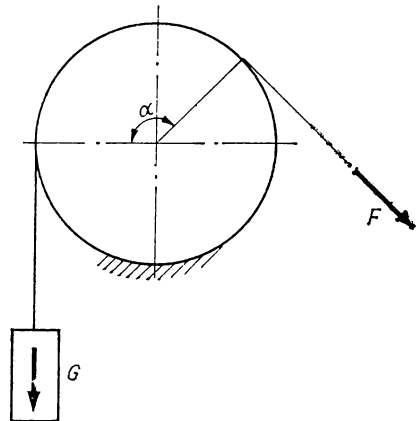


Bild 93. Prinzipskizze zur Seil- oder Bandreibung

4.3.3. Seil- und Bandreibung

Die am Seil oder Band wirkende Zugkraft F (Bild 93) soll über den feststehenden Zylinder das Gewicht G heben. Da das Seil über den Zylinder gleitet, entsteht entgegen dieser Bewegung eine Reibkraft F_R . Die Zugkraft F muß beide, Gewicht und Reibkraft, überwinden. Bei kleinen Geschwindigkeiten (Fliehkräfte ausgeschlossen) rechnet man nach Euler mit der Seilreibungsgleichung

$$\bullet \quad F = G e^{\mu \alpha} \quad (39)$$

e Eulersche Zahl $e = 2,72$ (Basis der natürlichen Logarithmen)

μ Reibungszahl der Gleitreibung

α Umschlingungswinkel im Bogenmaß

(Werte für Seilreibungsfaktoren $e^{\mu \alpha}$ nach Anlage A 7)

Wird hingegen die Last mit konstanter Geschwindigkeit abwärts bewegt, so wird ein Teil von ihr durch die Reibkraft aufgenommen. Es muß $F < G$ sein. In diesem Fall ist in Gl. (39) μ durch $-\mu$ zu ersetzen.

●
$$F = G e^{-\mu\alpha} \quad (40)$$

Die Eulersche Beziehung der Seilreibung ist auch dann gültig, wenn die Scheibe das Seil mitnimmt. Dann unterstützt in Drehrichtung die Reibkraft den Hub- oder Senkvorgang.

► Lehrbeispiel 34

Eine Last vom Gewicht G soll durch Bremsscheibe und -hebel (Bild 94.1) gleichförmig gesenkt werden. Wie groß muß F sein, wenn $G = 2000 \text{ N}$, $\mu = 0,5$, $a = 2R = 600 \text{ mm}$, $r = 150 \text{ mm}$, $b = 1500 \text{ mm}$ gegeben sind?

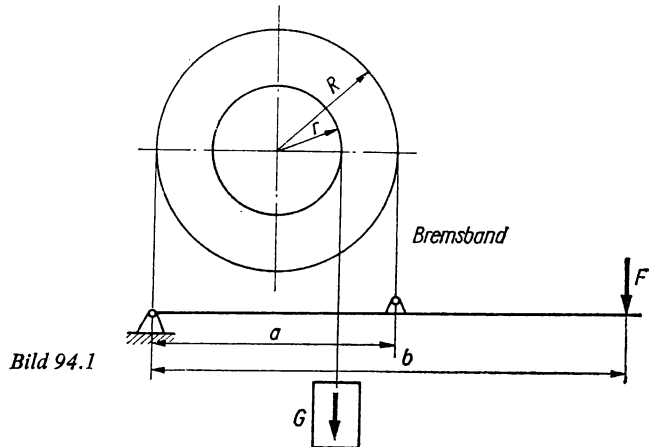
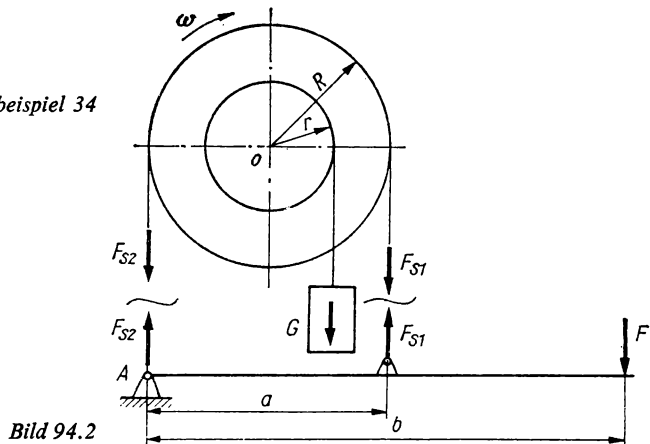


Bild 94. Zu Lehrbeispiel 34



Lösung:

Schnitte durch das Bremsband (Bild 94.2) trennen das technische Gebilde in zwei Teile (Trommel sowie Hebel mit Bremsband). In Drehrichtung will die Reibkraft das Bremsband mitnehmen. Daher ist F_{S2} größer als F_{S1} .

Dafür läßt sich schreiben:

$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu\alpha}$$

Statisches Momentengleichgewicht für die *Trommel*:

$$\zeta O \quad \left| \begin{array}{l} -Gr - F_{S1}R + F_{S2}R = 0 \quad \text{oder} \\ -Gr - F_{S1}R + F_{S1} e^{\mu\alpha} R = 0 \end{array} \right.$$

bzw.
$$F_{S1} = G \frac{r}{R(e^{\mu\alpha} - 1)}$$

Statisches Momentengleichgewicht für den *Hebel*:

$$\zeta A \quad \left| \begin{array}{l} F_{S1}a - Fb = 0 \\ F = F_{S1} \frac{a}{b} \end{array} \right.$$

In diese Gleichung setzen wir den Ausdruck für F_{S1} ein und erhalten

$$F = G \frac{a}{b} \frac{r}{R} \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 2000 \text{ N} \frac{600 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm}}{1500 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm}} \cdot \frac{1}{5 - 1} = 100 \text{ N}$$

■ Übung 51

4.3.4. Rollreibung

Rollreibung führt zu kleineren Reibungswiderständen als Gleitreibung. Wir stellen uns eine Rolle vor und betrachten die Deformation der Rollbahn (Bild 95). Es entsteht eine seitlich versetzte Berührungsfläche. Senkrecht zu ihr wirkt die Widerstandskraft F_W . Ihre Komponenten sind F_N (Normalkraft) und F_T (Tangentialkraft). Da die Normalkraft F_N um den Hebelarm der Rollreibung f in Bewegungsrichtung versetzt wirkt, entsteht als Hemmwirkung das Reibmoment

$$M = F_N f = G f$$

Die zur Bewegung notwendige Vorschubkraft F ergibt sich aus dem statischen Momentengleichgewicht um 0 zu

$$Fr - Gf = 0$$

●
$$F = G \frac{f}{r} \quad (41)$$

(Hebelarme der Rollreibung s. *Anlage A 8*)

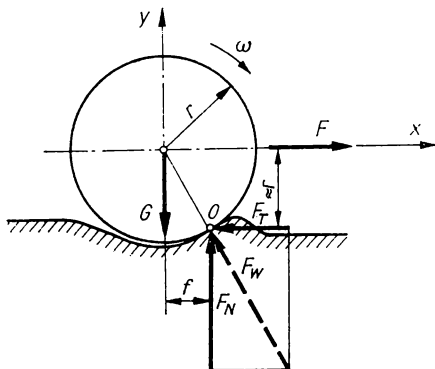


Bild 95. Prinzipskizze zur Rollreibung

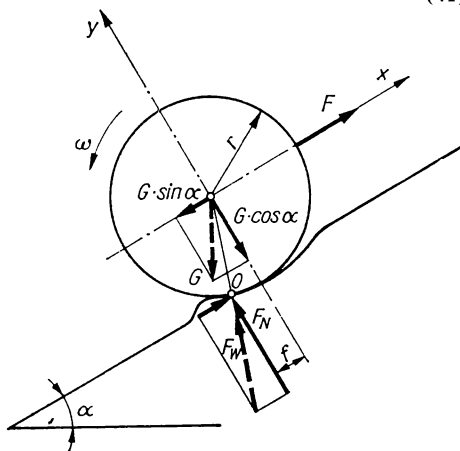


Bild 96. Strukturskizze zu Lehrbeispiel 35

► Lehrbeispiel 35

Welche Haltekraft F ist erforderlich, wenn die Walze nach Bild 96 mit konstanter Geschwindigkeit abwärts rollen soll?

Lösung:

Für das Momentengleichgewicht um O folgt:

$$\sum \mathcal{O} \quad \left| \begin{array}{l} G \sin \alpha r - G \cos \alpha f - Fr = 0 \\ F = G \left(\sin \alpha - \frac{f}{r} \cos \alpha \right) \end{array} \right.$$

Beim Sonderfall $F = 0$ rollt die Walze nur durch ihr Eigengewicht. Man erhält dann

$$0 = G \left(\sin \alpha - \frac{f}{r} \cos \alpha \right)$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{f}{r}$$

bzw.

$$f = r \tan \alpha$$

Mit dieser Gleichung läßt sich der Hebelarm der Rollreibung f auch experimentell bestimmen.

■ Übung 52

4.4. Gleichgewicht für Körpersysteme

Es gibt Körpersysteme, bei denen man nicht sofort die gesuchten Stützreaktionen mit den drei statischen Gleichgewichtsbedingungen ermitteln kann. Das ist z. B. für den Gelenkträger (Strukturbild 97) der Fall. Hier gibt es zwei Festlager, die durch das Gelenk notwendig sind. Als Stützreaktionen wirken sowohl in A als auch in B zwei Stützkraftkomponenten. Da für die rechnerische Lösung nur drei statische Gleichgewichtsbedingungen zur

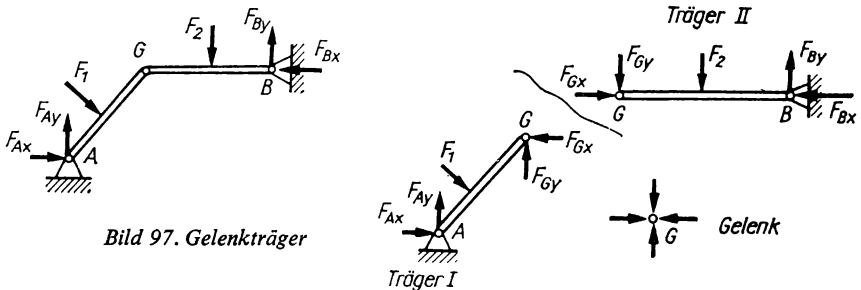


Bild 97. Gelenkträger

Verfügung stehen, ist ihre Ermittlung scheinbar nicht möglich. Man müßte den Gelenkträger statisch unbestimmten Systemen zuordnen. Das ist jedoch nicht richtig, denn das vorhandene Verbindungsgelenk G überträgt keine Momente und führt das Körpersystem auf zwei Teilsysteme, die statisch bestimmt sind, zurück. Durch Trennung im Gelenk erhalten wir zwei Träger mit je zwei Stützkraftkomponenten (äußere Kräfte) und zwei Schnittkraftkomponenten (innere Kräfte). Schnittkräfte sind nach dem Wechselwirkungsgesetz gleich groß, so daß für den Gelenkträger insgesamt nur sechs Kräfte zu ermitteln

sind. Diese sechs Kräfte beziehen sich auf zwei Teilaufgaben.

Der Gelenkträger ist mit seinen zwei Teilsystemen durch Anwendung von zwei mal drei Gleichgewichtsbedingungen statisch bestimmt:

Die Ermittlung der Stützkkräfte für beide Festlager ist möglich.

Auch das Körpersystem nach Strukturbild 98 hat zwei Festlager und ein Loslager. Die gesuchten fünf Stützkraftkomponenten sind mit drei Gleichgewichtsbedingungen nicht ermittelbar. Wir erkennen aber einen Verbindungsstab. In ihm wirken wechselseitig Schnittkräfte F_D . Schneidet man dort, dann entstehen zwei Teilsysteme.

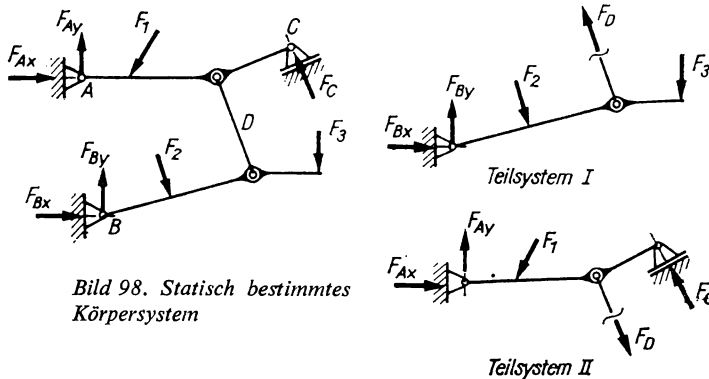


Bild 98. Statisch bestimmtes Körpersystem

Teilsystem I mit Festlager (zwei Stützkraft-Komponenten) und im Sinne einer Pendelstütze mit einer Stützkraft F_D . Alle drei lassen sich rechnerisch ermitteln.

Teilsystem II wird durch die bekannte Kraft F_D belastet. Mit den Belastungen F_1, F_D kann man nun auch die gesuchten Stützkkräfte F_{Ax}, F_{Ay}, F_C ermitteln.

Durch Trennung des Verbindungsstabes entstehen auch hier zwei statisch bestimmte Teilaufgaben mit zwei mal drei gesuchten Größen.

● Körpersysteme, deren Anzahl äußerer Stützreaktionen nicht ganzzahlig durch drei teilbar ist, muß man demnach durch geeignete Schnitte in ihre Teilsysteme zerlegen. Dadurch erhält man statisch bestimmte Teilaufgaben. Ihre rechnerische Lösung ist mit den drei Gleichgewichtsbedingungen möglich.

Es ist zweckmäßig, alle Stütz- und Schnittkräfte in das Strukturbild einzutragen und Teilsysteme so festzulegen, daß jeweils drei gesuchte Größen vorhanden sind. Gelingt das nicht, dann ist das Körpersystem statisch unbestimmt. Die Stütz- und Schnittreaktionen lassen sich mit den Verfahren der Statik nicht lösen.

Als *Hinweis* das Beispiel nach Bild 99. Hier kann man durch die feste Einspannung bei A insgesamt sieben Stütz- und Schnittreaktionen abzählen. Diese Anzahl gesuchter Größen ist nicht ganzzahlig durch drei teilbar. Es liegt ein statisch unbestimmtes Körpersystem vor.

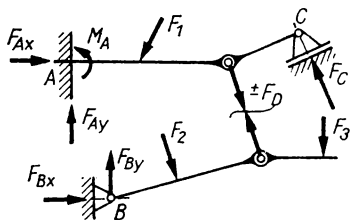


Bild 99. Statisch unbestimmtes Körpersystem

► Lehrbeispiel 36

Für das Tragwerk (Bild 100), belastet mit $q = \frac{F}{a}$ und F , sind die Stützkkräfte zeichnerisch und rechnerisch zu ermitteln.

Lösungsaufbereitung (Bild 100.1):

A und B sind Festlager. Hier wirken zwei Stützkraftkomponenten. C ist als Pendelstütze ausgebildet. In ihr tritt F_C auf. Zu ermitteln wären demnach insgesamt fünf Stützkkräfte. Schneidet man den Stab 2, dann führt das zu den beiden Teilsystemen

1. Träger mit konstanter Streckenlast; Festlager und Pendelstütze, Stützkkräfte F_{Ax} , F_{Ay} und F_{S2}
 2. Scheibe, belastet mit F und F_{S2} ; Festlager und Pendelstütze, Stützkkräfte F_{Bx} , F_{By} und F_C
- Die Aufgabe lässt sich zeichnerisch und rechnerisch lösen.

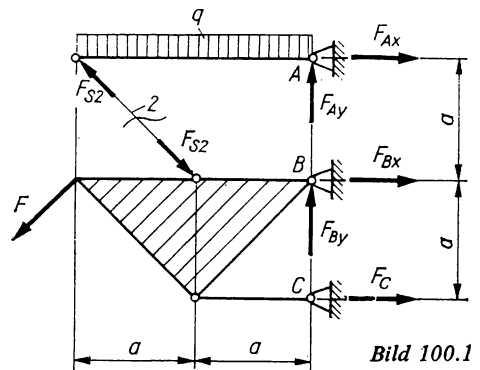
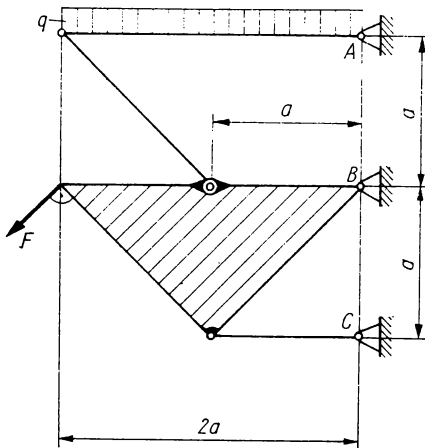


Bild 100. Tragwerk zu Lehrbeispiel 36

Zeichnerische Lösung (Bild 101, Seite 96):

Resultierende Streckenlast $F_q = 2F$ des Trägers und Stützkraft F_{S2} führen auf den Wirkungsknoten I . Damit wird die Wirkungslinie für F_A bekannt.

Das Krafteck führt auf $F_{S2} = F_A = 1,4F$

Belastung F und $F_{S2} = 1,4F$ der Scheibe (Eigengewicht vernachlässigt) ergeben mit dem Seileckverfahren die Stützkkräfte F_B und F_C .

Rechnerische Lösung (Bild 102, Seite 96):

Träger (Bild 102.1)

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & +2Fa - \frac{1}{2}\sqrt{2} F_{S2} 2a = 0 \\ & F_{S2} = F\sqrt{2} = 1,414F \end{array}$$

Der gleichmäßig belastete Träger wird durch Vertikalkomponenten symmetrisch gestützt. Daher ist

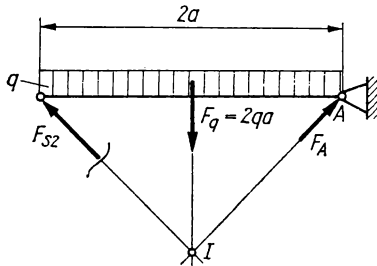
$$\begin{array}{l|l} \uparrow & F_{Ay} = \frac{1}{2}\sqrt{2} F_{S2} = F \\ \rightarrow & -\frac{1}{2}\sqrt{2} F_{S2} + F_{Ax} = 0; \quad F_{Ax} = \frac{1}{2}\sqrt{2} F_{S2} = F \end{array}$$

Resultierende Stützkraft in A

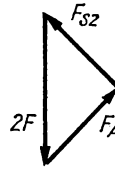
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{2} F = 1,414F$$

Strukturpläne

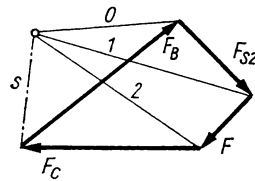
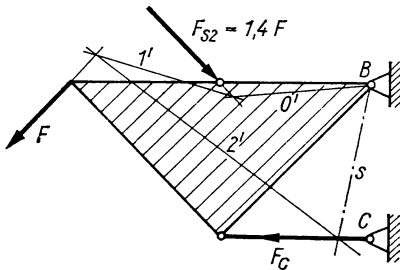
Kraftpläne



$$F_q = 2qa = 2 \frac{F \cdot a}{a} = 2F$$



$$F_{S2} = F_A = 1,4 F$$



$$F_C = 2,4 F$$

$$F_B = 2,7 F$$

Bild 101. Zur zeichnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 36

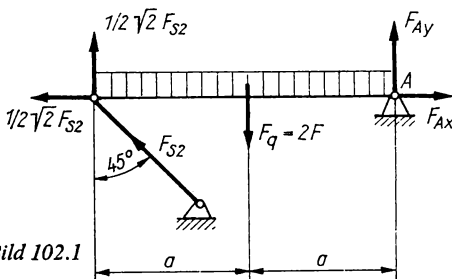


Bild 102.1

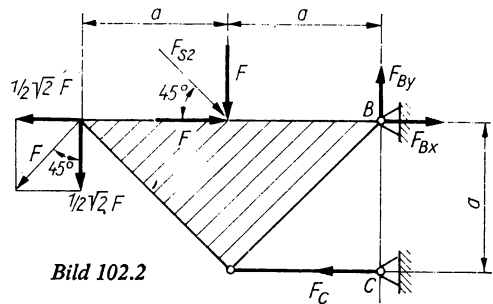


Bild 102.2

Bild 102. Zur rechnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 36

Scheibe (Bild 102.2)

$$\begin{array}{l|l}
 \curvearrowright B & \begin{array}{l} Fa + \frac{1}{2} \sqrt{2} F 2a - F_C a = 0 \\ F_C = F(1 + \sqrt{2}) = 2,414F \end{array} \\
 \uparrow & -\frac{1}{2} \sqrt{2} F - F + F_{By} = 0 \Rightarrow F_{By} = 1,707F \\
 \curvearrowright C & \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sqrt{2} Fa + \frac{1}{2} \sqrt{2} F 2a + Fa - Fa - F_{Bx} a = 0 \\ F_{Bx} = F(\frac{1}{2} \sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2,121F \end{array}
 \end{array}$$

Kontrollrechnung mit horizontaler Kräftebilanz

$$\begin{array}{l|l}
 \rightarrow & \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sqrt{2} F + F_C = F + F_{Bx} \\ \hline 0,707F \qquad F \\ 2,414F \qquad 2,121F \\ \hline 3,121F \qquad 3,121F \end{array}
 \end{array}$$

Kontrollrechnung erfüllt

Resultierende Stützkraft in B

$$\begin{aligned}
 F_B &= \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = F \sqrt{2,121^2 + 1,707^2} \\
 F_B &= F \sqrt{7,41} = 2,72F
 \end{aligned}$$

Die rechnerischen Ergebnisse stimmen mit den zeichnerischen überein.

► Lehrbeispiel 37

Die Aufgabe nach Bild 103 enthält zwei Träger, je mit einer Einzellast belastet, die gelenkig miteinander verbunden sind. Insgesamt liegen drei Gelenke vor; die beiden Gelenke der Festlager und das Verbindungsgelenk G. Man spricht daher auch von einem *Dreigelenkbogen*. Zu bestimmen sind zeichnerisch und rechnerisch die Stützkräfte.

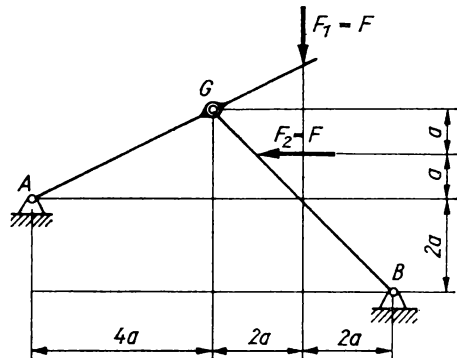


Bild 103. Gelenkträger zu Lehrbeispiel 37

Lösung:

Zeichnerische Lösung (Bild 104):

Aufgaben, bei denen die drei Gelenke nicht auf einer Geraden liegen, werden in einfache Teilaufgaben zerlegt, deren Ergebnisse man überlagert (lineare Superposition). Zu diesem Zweck entfernt man je eine Belastung (oder die Resultierende einer Belastungsgruppe) von den durch das Gelenk G verbundenen Trägern. Das führt auf zwei Träger mit je einem Festlager und je einer Pendelstütze (Bilder 104.1 und 104.2). Im ersten Fall ist der Träger mit F_1 belastet. Er wird durch A_1 und durch die Pendelstütze B_1 gestützt. Im zweiten Fall erkennen wir den durch F_2 belasteten Träger-

sein Festlager B_2 und seine Pendelstütze A_2 . Dafür sind die Kraftecke zu zeichnen. Das gesamte Ergebnis der Stützkkräfte entsteht durch Zusammenfassung der bisher gefundenen Stützkomponenten (Bild 104.3).

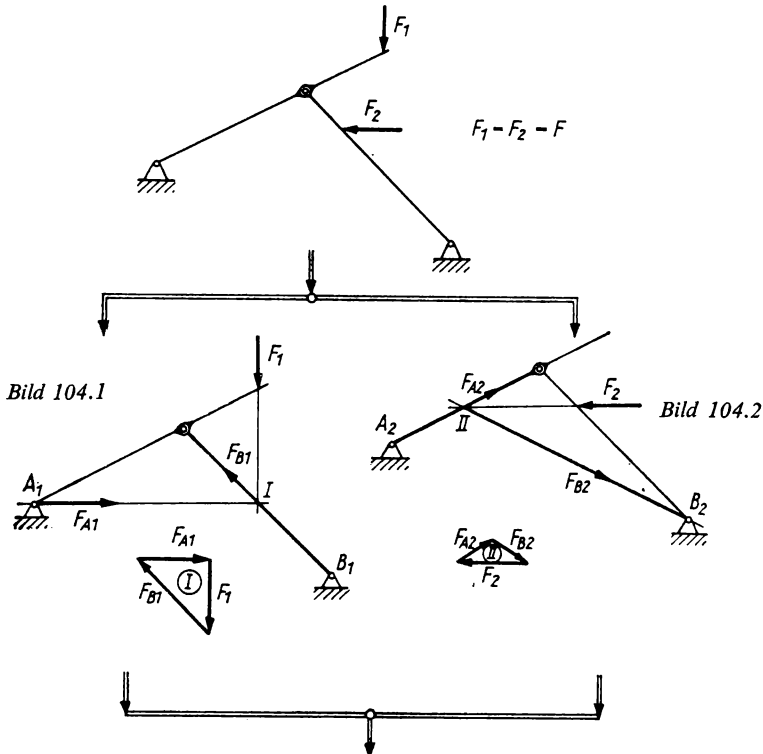
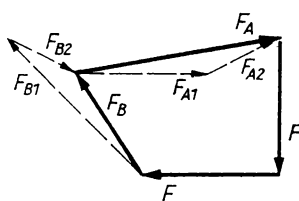


Bild 104.3



$$F_A = 1,5 F$$

$$F_B = 0,9 F$$



Bild 104. Zur zeichnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 37

Rechnerische Lösung (Bild 105):

Der rechnerischen Lösung liegen zwei Strukturskizzen zugrunde, die durch Gelenktrennung entstehen.

Statisches Momentengleichgewicht um beide Festlagerknoten

$$\begin{array}{l|l} \zeta_A & +F_{Gy} 4a - F_{Gx} 2a - F 6a = 0 \\ \zeta_B & +F 3a + F_{Gy} 4a + F_{Gx} 4a = 0 \end{array}$$

Mit diesem Gleichungssystem ermitteln wir die Komponenten der Gelenkkraft.

Beide Gleichungen sind zu subtrahieren. Dadurch entsteht

$$-9F - 6F_{Gx} = 0$$

$$F_{Gx} = -\frac{3}{2}F$$

Diesen Betrag eingesetzt, liefert

$$F_{Gy} = \frac{3}{4}F$$

Statisches Kräftegleichgewicht

$$\begin{array}{l} \rightarrow \quad F_{Ax} + F_{Gx} = 0 \quad \Rightarrow F_{Ax} = -F_{Gx} = \frac{3}{2}F \\ \quad \quad F_{Bx} - F - F_{Gx} = 0 \Rightarrow F_{Bx} = F + F_{Gx} = -\frac{1}{2}F \\ \uparrow \quad \quad F_{Ay} + F_{Gy} - F = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -F_{Gy} + F = \frac{1}{4}F \\ \quad \quad F_{By} - F_{Gy} = 0 \quad \Rightarrow F_{By} = F_{Gy} = \frac{3}{4}F \end{array}$$

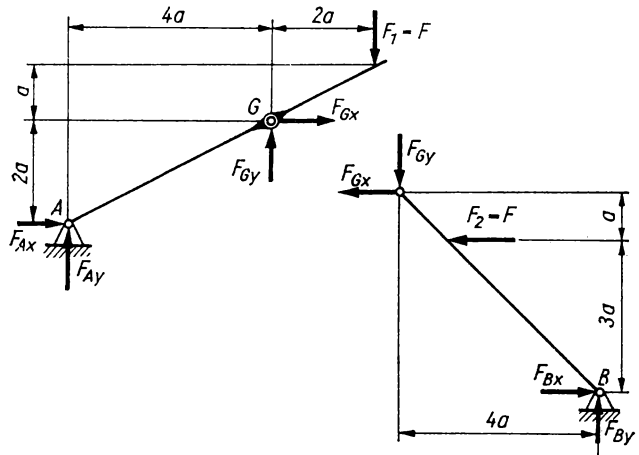


Bild 105. Zur rechnerischen Lösung nach Lehrbeispiel 37

Resultierende der Stützkräfte

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \frac{F}{4} \sqrt{6^2 + 1^2} = \frac{F}{4} \sqrt{37} = 1,52F$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \frac{F}{4} \sqrt{2^2 + 3^2} = \frac{F}{4} \sqrt{13} = 0,9F$$

Resultierende der Gelenkkraft

$$F_G = \sqrt{F_{Gx}^2 + F_{Gy}^2} = \frac{F}{4} \sqrt{6^2 + 3^2} = \frac{F}{4} \sqrt{45} = 1,68F$$

■ Übung 53

Lehr- und Fachbücher

- [1] Autorenkollektiv: Technische Mechanik für Ingenieurschulen, Bd. I, 7. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
- [2] Göldner, H., und F. Holzweißig: Leitfaden der Technischen Mechanik, 8. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1984

Nachschlagebücher, Wissensspeicher

- [1] Autorenkollektiv: Das Grundwissen des Ingenieurs, 10. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
- [2] Beckert, M. (Herausgeber): Wissensspeicher für Technologen, Technische Mechanik – Werkstoffe – Werkstoffprüfung, 1. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
- [3] Winkler, J., und H. Aurich: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer – Technische Mechanik, 3. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1985

ANHANG

Übungsaufgaben

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Anlagen

Übungsaufgaben

1. Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Resultierende der beiden Kräfte im Bild Ü 1.
2. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch diejenige Kraft F_3 , die mit den senkrecht zueinanderstehenden Kräften $F_1 = 4,2 \text{ N}$; $F_2 = 3,6 \text{ N}$ im Gleichgewicht steht.
3. Ein Körper der Masse $m = 5 \text{ kg}$ befindet sich auf einer geneigten Ebene (Bild Ü 3). Berechnen Sie die Größe der Komponenten seines Gewichtes, die senkrecht und parallel zur Neigungsebene gerichtet sind.
4. Über Rolle und Seil wird nach Bild Ü 4 eine Masse vom Gewicht G mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Konstruktion des Kranes ist so gestaltet, daß die Seilrichtung oben 30° gegenüber der Horizontalen beträgt. Kraft im Seil und Gewicht sind (Reibung vernachlässigt) nach dem Gegenwirkungsprinzip gleich groß. Beide haben in I ihren Schnittpunkt.

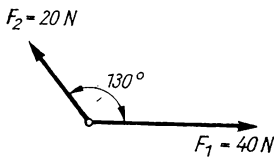


Bild Ü 1

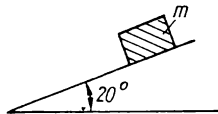


Bild Ü 3

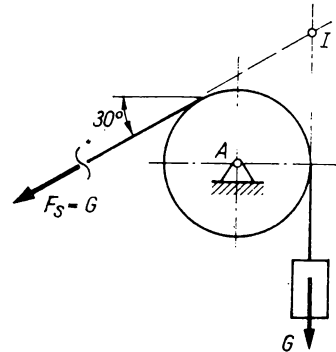


Bild Ü 4

Gesucht sind:

- 4.1. die Kennzeichnung der Kräfte (Tabelle ankreuzen) für das Seil und für die Rolle,
- 4.2. die resultierende Belastung F_R für die Rolle (Kräfteparallelogramm),
- 4.3. die von den Lagern der Rolle aufzunehmende Kraft F_A (Krafteck),
- 4.4. die Belastung der Rolle F'_R , wenn das Seil oben horizontal gerichtet ist (Krafteck).
5. Nach Bild Ü 5 wirken (gemeinsamer Schnittpunkt) vier Kräfte: $F_1 = 10 \text{ N}$; $F_2 = 20 \text{ N}$; $F_3 = 40 \text{ N}$; $F_4 = 10 \text{ N}$; $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 50^\circ$; $\alpha_3 = 120^\circ$; $\alpha_4 = 210^\circ$. Gesucht ist zeichnerisch (Krafteck) und rechnerisch (Tabelle anwenden) ihre Resultierende F_R .

Äußere Kraft	Innere Kraft	Aktionskraft	Reaktionskraft
für das Seil			
G			
F_s			
für die Rolle			
G			
F_s			
F_A			

6. Beim Bohren hat die Platte (Bild Ü 6) drei gleich große Momente $M = 2000 \text{ Nmm}$ aufzunehmen. Die dadurch verursachte Drehung ist durch zwei Befestigungsstifte aufzuheben. Wie groß sind die Reaktionskräfte F an den Stiften?
7. Für die zwei Kräfte F_1, F_2 (Bild Ü 7) ist die Summe ihrer statischen Momente
 - 7.1. aus den Kräften F_1, F_2 ,
 - 7.2. aus ihren Komponenten zu errechnen.
8. Ein Werkstück 1 wurde in der skizzierten Schraubzwinde 2 festgeklemmt (Bild Ü 8). Machen Sie das Werkstück, die Gewindespindel und den Bügel der Schraubzwinde frei.

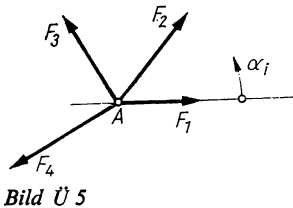


Bild Ü 5

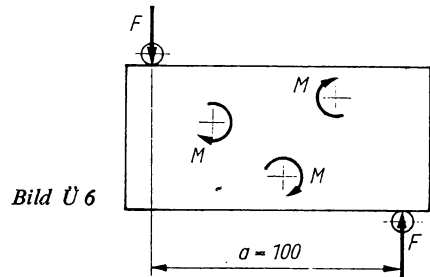


Bild Ü 6

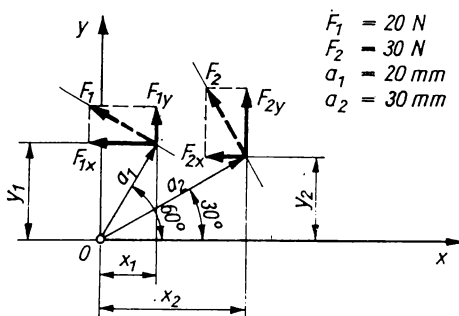


Bild Ü 7

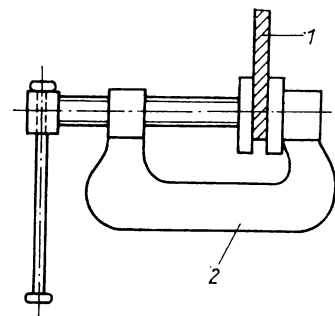


Bild Ü 8

9. Die Vorrichtung zum Pressen von Proben für Heizwertuntersuchungen in einer kalorimetrischen Bombe zeigt Bild Ü 9. Die Probesubstanz 1 wird durch Stempel 2 und Hülse 3, unten durch Kegel 4 verschlossen, zu einem Brikett gepreßt. Eine Gewindespindel 6 im Joch 5 erzeugt die

Stempelkraft. Joch und Grundplatte 7 sind durch Stehbolzen 8 miteinander verbunden. Kegel 4 ruht im Teller 9. Beide werden nach dem Pressen entfernt und das Brikett aus der Hülse gedrückt.

9.1. Machen Sie die Teile 2, 4, 5, 6, 7 und 8 frei.

9.2. Schneiden Sie Teil 8 und tragen Sie die inneren Kräfte an.

9.3. Kennzeichnen Sie die Kräfte als Aktions- und Reaktionskräfte in einer von Ihnen entwickelten Tabelle.

10. Bei dem Kegelradgetriebe nach Bild Ü 10 wird der Kegel 1 durch die Feder 2 fest gegen das Reibrad 3 gedrückt. Zeichnen Sie das Kegelrad mit Welle auf und tragen Sie für die Ruhestellung die am Kegel und in den Lagern A und B auftretenden Kräfte an.

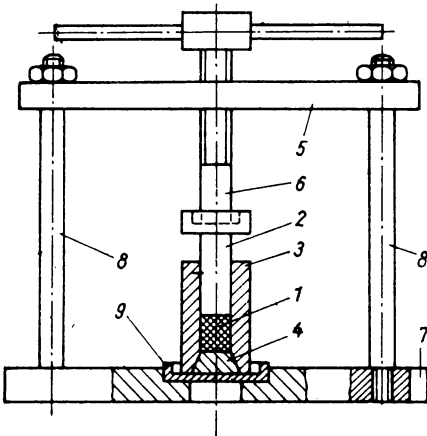


Bild Ü 9

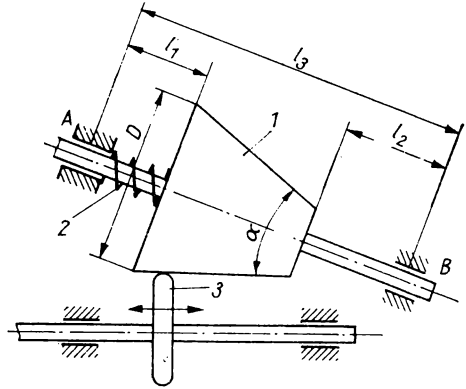


Bild Ü 10

11. Eine Kontaktfeder (Bild Ü 11) ist bei A fest eingespannt. Durch Einschalten des Elektromagneten M wird der Kontakt K geschlossen. Tragen Sie die an der Kontaktfeder auftretenden Kräfte sowie die bei A auftretenden Reaktionen an.

12. Bild Ü 12 zeigt den Fußhebel zum Bedienen eines Gestänges (bei C angelenkt). Er ist bei A gelagert und wird durch die Zugfeder in der gezeichneten Ruhestellung gehalten.

12.1. Zeichnen Sie das Strukturbild des Hebels in der Ruhestellung,

12.2. bei Auftreten einer Bedienkraft F_B .

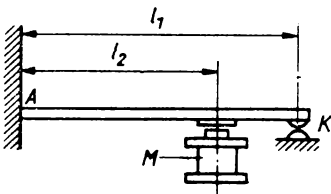


Bild Ü 11

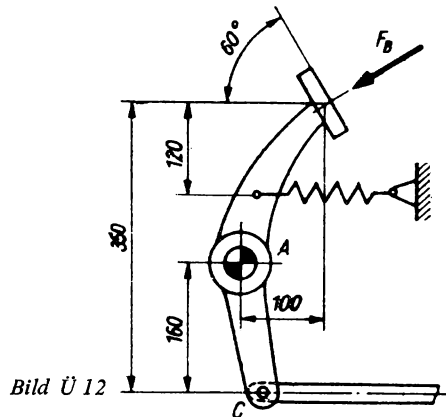
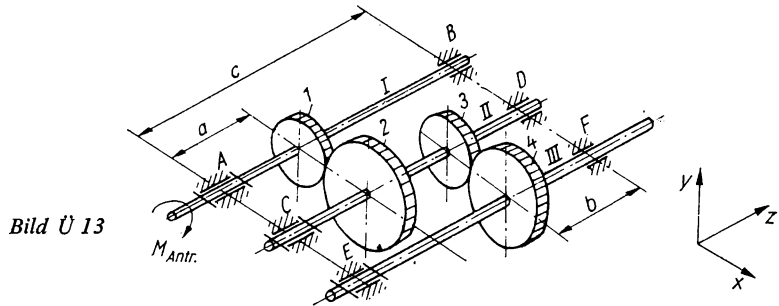
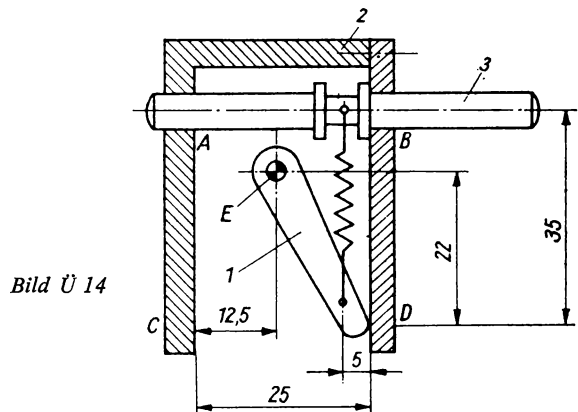


Bild Ü 12

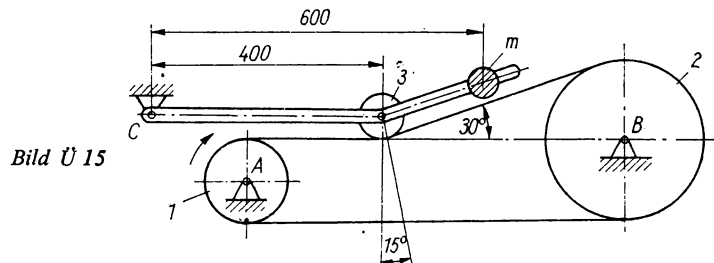
13. Die skizzenhafte Darstellung eines zweistufigen Getriebes zeigt Bild Ü 13. Der Antrieb erfolgt über Welle I. Die Welle II mit den Rädern 2 und 3 ist Zwischenwelle, die die Momentenübertragung auf Welle III ermöglicht. Machen Sie sich das Funktionsprinzip des Getriebes klar (Drehrichtung und Drehzahl der Wellen). Machen Sie die einzelnen Wellen mit den Rädern unter Annahme geradverzahnter Zahnräder frei (in perspektivischer Darstellung). Ermitteln Sie daraus die Strukturbilder der Wellen in den einzelnen Ebenen.



14. Der Hebel 1 des dargestellten Kippsprungwerkes (Bild Ü 14) kippt bei Betätigung des in der Halterung 2 geführten Spanners 3 nach links von D nach C. Machen Sie für die gezeichnete Ruhelage Bauteile 1 und 3 sowie die Feder frei. Entscheiden Sie, welche Kräftesysteme für die Teile 1 und 3 vorliegen.



15. Der Antrieb einer Maschine soll über einen Riementrieb so erfolgen, daß die Riemenscheibe 2 von der Scheibe 1 angetrieben wird (Bild Ü 15).



Der Riemen wird dabei von der Rolle 3 gespannt. Die Rolle 3 ist zu diesem Zweck an einem Schwenkhebel angebracht, der an einem Ende die Masse m trägt und am anderen Ende in C gelagert ist. Machen Sie den Hebel sowie die Riemenscheiben 1 und 2 frei.

Geben Sie die im Riemen wirkenden Kräfte an.

Entscheiden Sie, welche Kräftesysteme im einzelnen vorliegen.

16. Für den in Übung 15 skizzierten Riemetrieb ist zeichnerisch die Riemenspannkraft zu ermitteln, wenn die am Hebel angebrachte Masse $m = 20 \text{ kg}$ beträgt.

17. Im Bild Ü 17 ist eine Möglichkeit gezeigt, ein Werkstück mittels Keil, Rolle und Hebel zu spannen.

Ermitteln Sie unter Vernachlässigung der auftretenden Reibung die am Keil wirkende Kraft F_K , wenn durch die skizzierte Anordnung am Werkstück eine Spannkraft von 300 N erzeugt werden soll (gesucht ist die zeichnerische Lösung).

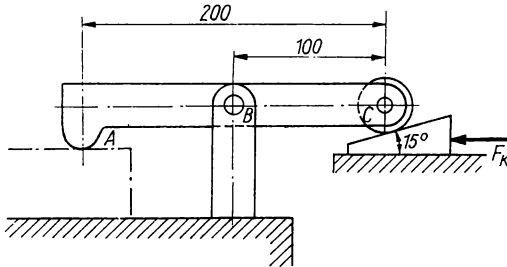


Bild Ü 17

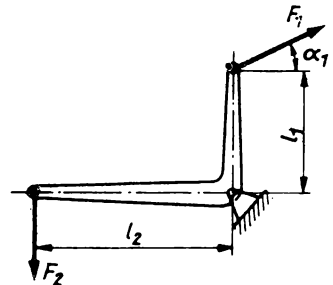


Bild Ü 18

18. An einem Winkelhebel (Bild Ü 18) greift die Kraft $F_1 = 250 \text{ N}$ unter dem Winkel $\alpha_1 = 25^\circ$ an.

Ermitteln Sie mit $l_1 = 250 \text{ mm}$ und $l_2 = 400 \text{ mm}$ für die Gleichgewichtslage

18.1. zeichnerisch,

18.2. rechnerisch

die am Winkelhebel angreifende Kraft F_2 sowie die im Lager auftretende Stützreaktion.

19. Für das in Übung 14 dargestellte Kippsprungwerk soll zeichnerisch und rechnerisch die am Punkt D auftretende Kraft ermittelt werden, wenn die Federkraft $F_F = 5 \text{ N}$ beträgt.

20. Bild Ü 20 zeigt eine Kniehebelanordnung, die zum Spannen von Werkstücken verwendet werden kann.

Bestimmen Sie rechnerisch diejenige Kraft, die am Kolben K wirken muß, um am Werkstück eine Spannkraft von 500 N zu erzeugen ($l_1 = 300 \text{ mm}$, $l_2 = 295,5 \text{ mm}$).

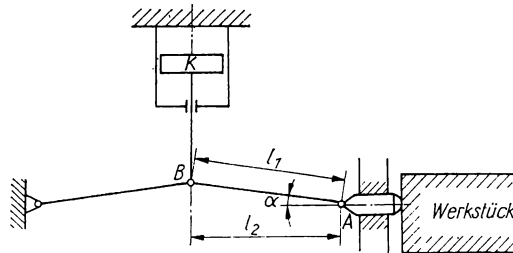


Bild Ü 20

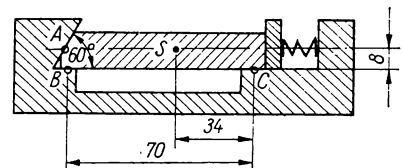
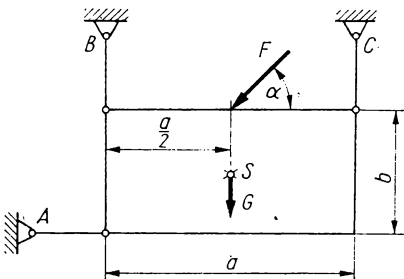
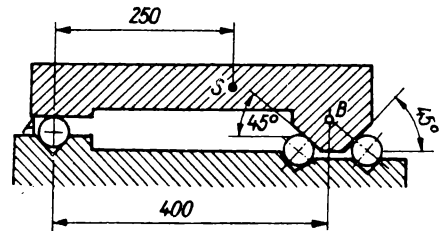
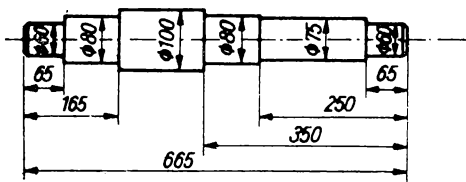
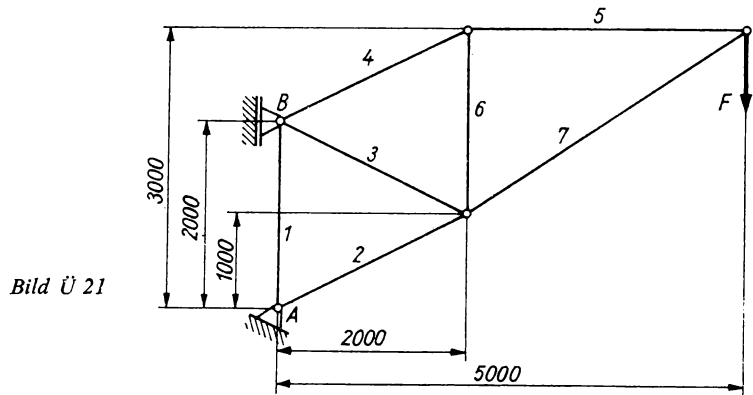
21. An dem in Bild Ü 21 dargestellten Fachwerks-Ausleger soll eine Kraft von 2 kN angreifen.

Bestimmen Sie die Stützkräfte in A und B sowie die Stabkräfte.

22. Für die im Bild Ü 22 dargestellte Welle ist das Gesamtgewicht und dessen Angriffspunkt zu ermitteln.

Zerlegen Sie die Welle in einzelne Abschnitte und berechnen Sie deren Gewicht ($\rho = 7,85 \text{ kg dm}^{-3}$). Ermitteln Sie den Angriffspunkt des Gesamtgewichtes als Resultierende der einzelnen Gewichte mit dem Seileckverfahren.

23. Ein Schlitten der Masse $m = 20 \text{ kg}$ ist nach Bild Ü 23 auf Kugeln gelagert. Ermitteln Sie mit Hilfe des Culmann-Verfahrens die Stützkkräfte durch sein Eigengewicht ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$).
24. Eine Scheibe vom Gewicht $G = 300 \text{ N}$ ist an drei Pendelstäben befestigt (Bild Ü 24). Sie wird weiterhin durch $F = 500 \text{ N}$ unter $\alpha = 45^\circ$ belastet. Ermitteln Sie die Stützkkräfte ($a = 500 \text{ mm}$; $b = 250 \text{ mm}$).
25. Ein Gleitstein vom Gewicht $G = 20 \text{ N}$ soll in der skizzierten Führung (Bild Ü 25) horizontal verschoben werden. Er wird mit der Federkraft $F_F = 25 \text{ N}$ seitlich belastet. Zur Berechnung der Reibkräfte in A , B und C werden die an den Berührungsflächen zwischen Gleitstein und Führung auftretenden Normalkräfte benötigt. Ermitteln Sie F_{NA} , F_{NB} , F_{NC} zeichnerisch.



26. Der im Bild Ü 26 dargestellte Taster 1 arbeitet folgendermaßen: In der Ruhestellung liegt der Taster durch die Feder 2, die eine Federkraft von $2,0 \text{ N}$ ausübt, am Anschlag B an. Bei Betätigung mit F_T dreht er sich um A (kleiner Winkel) und drückt mit Bolzen C auf Schwenkhebel 3.

Durch die zeichnerische Lösung ist folgendes zu ermitteln:

- 26.1. für die Ruhestellung die Stützkkräfte in A und B ,
 - 26.2. die Betätigungskraft F_{T1} für den Augenblick, wenn der Taster von B abhebt. Wie groß ist dabei F_A ?
 - 26.3. die Kräfte in A und C , wenn F_{T2} gegenüber Zustand 26.2. verdoppelt wird (Annahme: F_F vergrößert sich unwesentlich).
 27. Bestimmen Sie zeichnerisch die in den Lagern A und B auftretenden Stützreaktionen für den mit Bild Ü 27 dargestellten Träger.
- ($F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 300 \text{ N}$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $a = 250 \text{ mm}$, $q = 0,4 \text{ Nmm}^{-1}$)

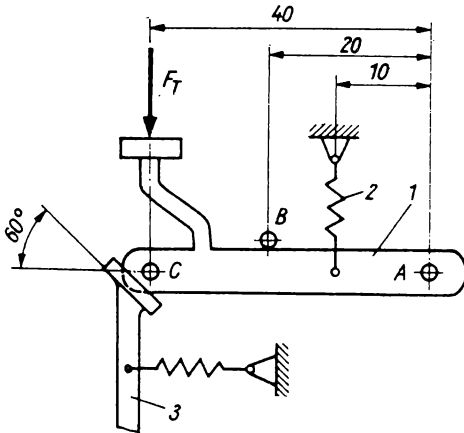


Bild Ü 26

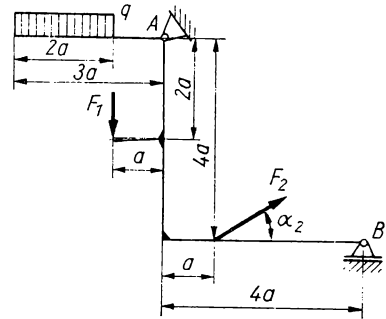


Bild Ü 27

28. Für den in Übung 12 dargestellten Hebel sind für eine Federkraft $F_F = 50 \text{ N}$ zeichnerisch zu bestimmen:
 - 28.1. die in der Ruhestellung am Lager A und im Gestänge auftretenden Kräfte.
 - 28.2. die beim Bedienen mit einer Bedienkraft $F_B = 200 \text{ N}$ im Lager A und im Gestänge auftretenden Kräfte.
29. Überprüfen Sie durch Rechnung die in Übung 26 ermittelten zeichnerischen Werte.
30. Für den Winkelhebel in Aufgabe 18 ist rechnerisch die Kraft F_2 sowie über ihre Komponenten die Lagerkraft F_A zu bestimmen.
31. Ermitteln Sie rechnerisch unter Vernachlässigung der Reibung die am Keil und im Lager B wirkenden Kräfte aus Aufgabe 17.
32. Die Aufgabe 24 ist rechnerisch zu lösen.
33. Für das in Übung 10 dargestellte Kegelreibradgetriebe sind für die beiden Endstellungen des Reibrades die in den Lagern A und B sowie die auf das Reibrad wirkenden Kräfte rechnerisch zu ermitteln ($l_1 = 30 \text{ mm}$; $l_2 = 40 \text{ mm}$; $l_3 = 120 \text{ mm}$; $D = 60 \text{ mm}$; $F_F = 250 \text{ N}$; $\alpha = 40^\circ$).
34. Ermitteln Sie für den in Übung 27 dargestellten Träger rechnerisch die Stützkkräfte.
35. Bild Ü 35 zeigt eine Federgelenk-Geradföhrung. Ermitteln Sie für $l = 40 \text{ mm}$; $F = 0,40 \text{ N}$ die an einer Feder auftretenden Stützreaktionen.
36. Das in Übung 13 skizzierte Getriebe soll mit einem Antriebsmoment von 200 Nm getrieben werden. Bestimmen Sie das am Abtrieb auftretende Moment sowie die in den Lagern der Wellen auftretenden Stützkkräfte unter Vernachlässigung der Radialkräfte.
Teilkreisdurchmesser der Räder: $d_{01} = 80 \text{ mm}$; $d_{02} = 160 \text{ mm}$; $d_{03} = 80 \text{ mm}$; $d_{04} = 120 \text{ mm}$;
Längen: $a = 120 \text{ mm}$; $b = 160 \text{ mm}$; $c = 400 \text{ mm}$.
37. Mit dem in Bild Ü 37 skizzierten Hebelsystem wird im Punkt C eine Kraft von $F_C = 200 \text{ N}$ erzeugt. Dazu ist am Bedienhebel eine Handkraft $F_H = 150 \text{ N}$ notwendig. Ermitteln Sie die notwendige Gliedlänge des Hebels $E \dots F$ sowie die bei Betätigung des Hebelsystems in A und B auftretenden Stützkkräfte.

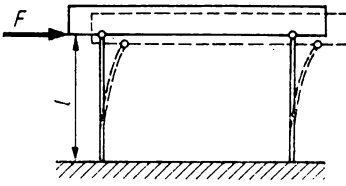


Bild Ü 35

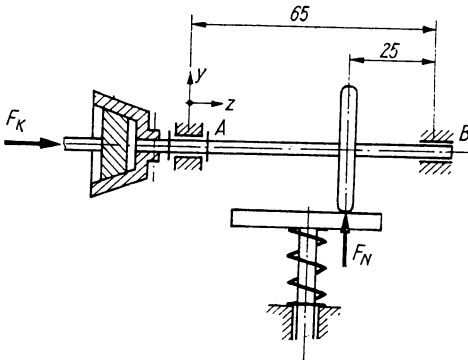


Bild Ü 38

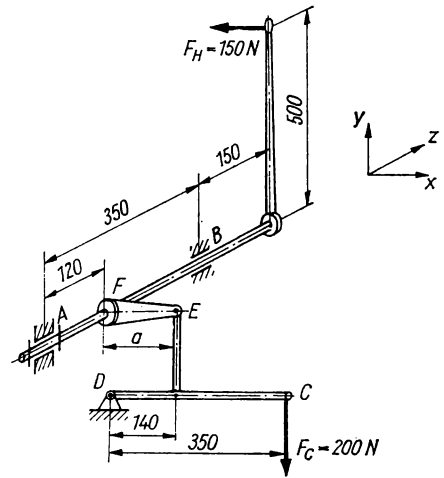


Bild Ü 37

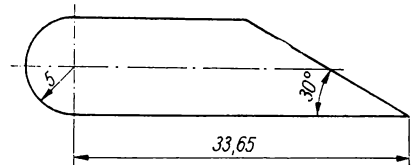


Bild Ü 39

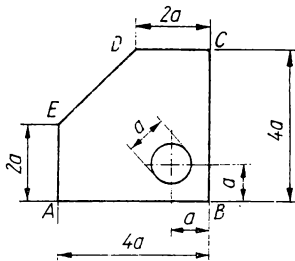


Bild Ü 40

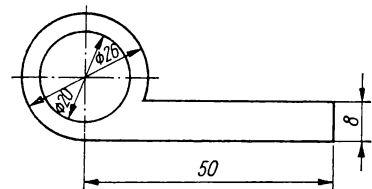


Bild Ü 41

38. Das Tellerreibradgetriebe nach Bild Ü 38 arbeitet mit einer Anpreßkraft zwischen Teller und Reibrad von $F_N = 30 \text{ N}$. Dabei entsteht am Reibrad die Umfangskraft $F_u = 12 \text{ N}$. Das Drehmoment wird über eine Kegelreibkupplung abgegeben, die mit einer Anpreßkraft von $F_K = 40 \text{ N}$ arbeitet.

Ermitteln Sie für diesen Zustand die Stützkkräfte in A und B sowie deren Richtungswinkel.

39. Für das mit Bild Ü 39 skizzierte Teil sind

39.1. der Schwerpunkt der die Fläche begrenzenden Linie,

39.2. der Flächenschwerpunkt rechnerisch zu ermitteln.

40. Bestimmen Sie rechnerisch für das in Bild Ü 40 dargestellte Teil den Linienschwerpunkt.

41. Um das in Bild Ü 41 dargestellte Teil auszuschneiden, wird für die Lage des Schnittstempel-Einspannzapfens der Linienschwerpunkt benötigt.

Ermitteln Sie dessen Lage rechnerisch.

42. Bild Ü 42 zeigt einen Winkelquerschnitt mit zwei Bohrungen. Mit dem Seileckverfahren ist die Lage des Flächenschwerpunktes zu ermitteln. Überprüfen Sie das gefundene Ergebnis rechnerisch.
43. Für den im Bild Ü 43 dargestellten Querschnitt ist die Lage des Flächenschwerpunktes rechnerisch gesucht.

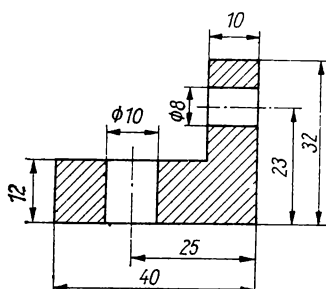


Bild Ü 42

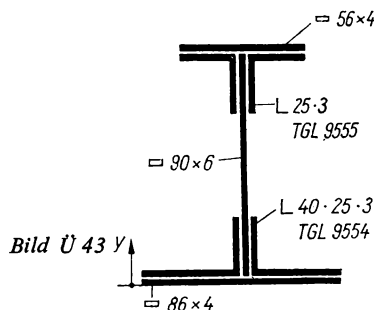


Bild Ü 43

44. Bild Ü 44 zeigt ein bis zur Hälfte mit Quecksilber gefülltes Glasröhrchen. In der dargestellten Stellung werden durch das Quecksilber die beiden am Ende angebrachten Kontakte geschlossen. Beim Öffnen der Kontakte kippt das Röhrchen um $\alpha = 30^\circ$. Ermitteln Sie das notwendige Rückstellmoment M_A , um wieder die Ausgangsstellung zu erreichen.
45. Prismatische Teile nach Bild Ü 45 sollen über eine geneigte Ebene von einem Arbeitsplatz zum anderen transportiert werden. Welchen Neigungswinkel darf diese Ebene höchstens haben, um ein Kippen der Teile auszuschließen?

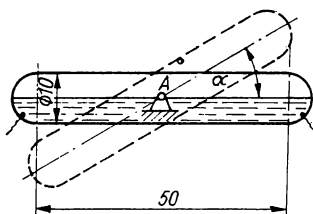


Bild Ü 44

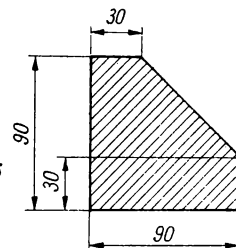


Bild Ü 45

- 46.1. Welche Kraft ist notwendig, um in der skizzierten Führung (Bild Ü 46) den Stab 1 mit $v = \text{konst.}$ nach oben zu bewegen? (Federkraft $F_F = 10 \text{ N}$; $\mu = 0,12$; $m_1 = 0,5 \text{ kg}$).
- 46.2. Überprüfen Sie, ob der Stab 1 für $\mu_0 = 0,2$ von selbst in Ruhe verharret. Wenn nicht, geben Sie an, um welche Weglänge s die Schraube nachgezogen werden muß (Federkonstante $c = 20 \text{ N/cm}$).
47. Der im Bild Ü 47 dargestellte Fliehkraftbremsregler arbeitet folgendermaßen: Bei Rotation bewegen sich die beiden Massen $m_1 = m_2 = 10 \text{ g}$ durch die Fliehkraft nach außen, so daß über das Gestänge mit Bremsscheibe 1 die Feder 2 zusammengedrückt wird. Der Regler beginnt zu arbeiten, wenn die Bremsscheibe an den Anschlägen 3 anliegt.

$$l_1 = 10 \text{ mm}; \quad l_2 = 30 \text{ mm};$$

$$d = 20 \text{ mm}; \quad d_R = 50 \text{ mm};$$

$$\mu = 0,4; \quad c = 1,5 \text{ N mm}^{-1} \text{ (Federkonstante)}$$

47.1. Ermitteln Sie diejenige Drehzahl, bei der der Regler zu arbeiten beginnt.

47.2. Welches Bremsmoment tritt auf, wenn der Regler mit der 1,5fachen Drehzahl wie unter 47.1. arbeitet?

48. Zum Abbremsen der Welle 1 wird die in Bild Ü 48 dargestellte Hebelanordnung benutzt. Die Kraft F wirkt auf den Winkelhebel 5. Dieser ist über das Zugband $C \dots D$ mit dem Hebel 4 verbunden, der über Bremsbeläge 3 auf den Teller 2 wirkt. Welches Bremsmoment tritt am Teller 2 auf, wenn am Winkelhebel 5 eine Kraft von 25 N wirkt? $\mu = 0,6$; $l_1 = 50 \text{ mm}$; $l_2 = 100 \text{ mm}$; $l_3 = 40 \text{ mm}$; $l_4 = 30 \text{ mm}$; $l_5 = 50 \text{ mm}$.

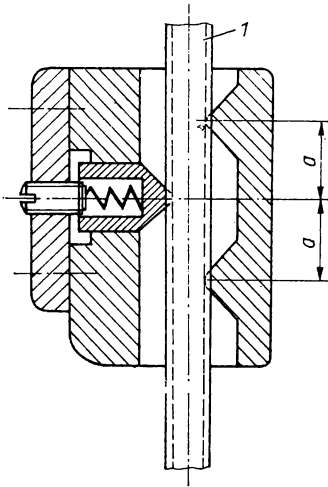


Bild Ü 46

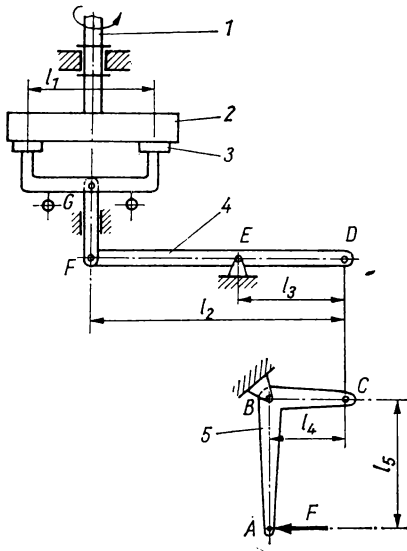


Bild Ü 48

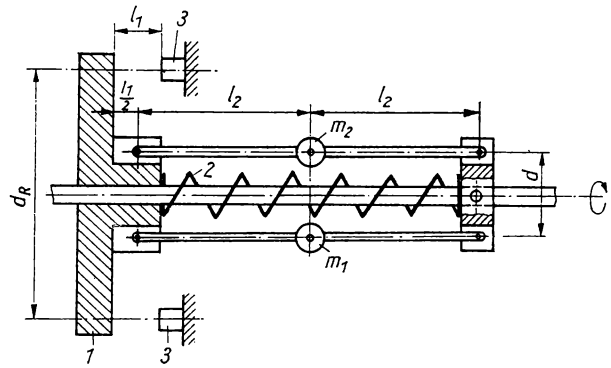


Bild Ü 47

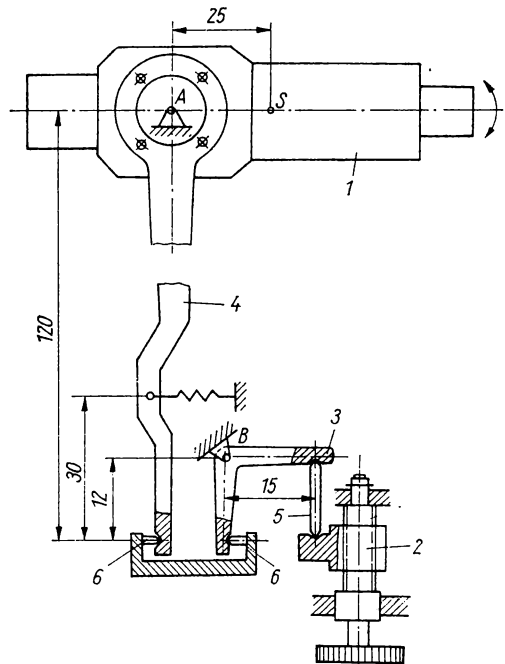


Bild Ü 49

49. Zum Schwenken des bei A gelagerten Teils 1 um die Horizontale (kleine Winkel) benutzt man einen Feintrieb (Bild Ü 49). Die Hubbewegung der Spindelmutter 2 wird über Winkelhebel 3 und Hebel 4 übertragen, der durch 4 Schrauben mit Teil 1 verbunden ist.

Ermitteln Sie für Schwenkbewegungen nach oben und unten die Kräfte in den Stiften 5 und 6.

Gewicht Teil 1	$G = 40 \text{ N}$
Federkraft am Hebel	$F_F = 0,5 \text{ N}$
Reibmoment im Lager A	$M_{RA} = 3 \text{ Nmm}$
Reibmoment im Lager B	$M_{RB} = 1 \text{ Nmm}$

50. Die Drehvorrichtung (Bild Ü 50) besteht aus einer Grundplatte 1, die auf die Planscheibe der Drehmaschine gespannt wird. Das Werkstück 2 wird durch die Vorsteckscheibe 3 und die Spannschraube 4 so gespannt, daß zwischen Grundplatte und Werkstück Reibschluß entsteht. Da die mit dem Bearbeitungszeichen gekennzeichnete Fläche durch Längsdrehen bearbeitet werden soll, wirkt die Hauptschnittkraft von 90 N als Umfangskraft.

50.1. Ermitteln Sie die Spannkraft in der Schraube, um das Drehteil mit 2facher Sicherheit zu spannen ($\mu_0 = 0,2$).

50.2. Bestimmen Sie das zum Anziehen und Lösen der Mutter (Sechskantmutter M 12 TGL 0-934) notwendige Moment ($\mu = 0,12$; $\mu_0 = 0,2$).

51. Bestimmen Sie für den in Übung 15 dargestellten Riementrieb das maximal übertragbare Drehmoment, wenn folgende Daten bekannt sind:

Durchmesser Rad 1	$D_1 = 100 \text{ mm}$
Durchmesser Rad 2	$D_2 = 200 \text{ mm}$
Spannkraft im Riemen	$F_{S1} = 600 \text{ N}$
Reibungszahl	$\mu_0 = 0,4$

52. Für die in Übung 17 gezeigte Möglichkeit, Werkstücke zu spannen, wurde bei der Berechnung der am Keil wirkenden Kraft die Reibung vernachlässigt. Ermitteln Sie unter Beachtung der Reibkräfte die zum Spannen und Lösen notwendige Keilkraft F_K :

Radius der Rolle bei C	$r = 10 \text{ mm}$
Hebelarm der Rollreibung	$f = 0,2 \text{ mm}$
Reibungszahlen	$\mu = 0,11$; $\mu_0 = 0,2$
Kraft an der Rolle	aus Ü 31

53. Im Bild Ü 53 ist ein Übertragungsmechanismus dargestellt. Der Antrieb erfolgt über eine Kurvenscheibe 2 und Rollenhebel 1. Über Zwischenhebel 3 wird das Gestänge 4 betätigt. Welche Federkraft muß wirken, damit in dieser Stellung an der Kurvenscheibe eine Anpreßkraft von 0,5 N entsteht und im Gestänge $F_{S4} = 1,2 \text{ N}$? Gesucht ist die zeichnerische Lösung.

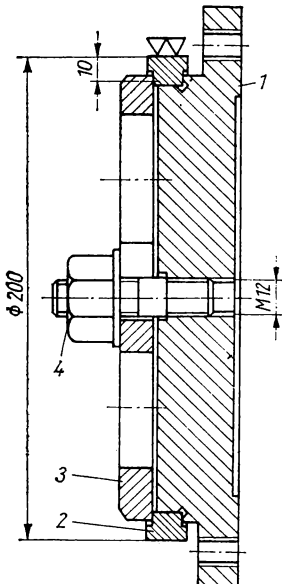


Bild Ü 50

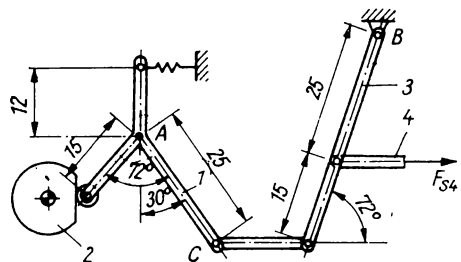


Bild Ü 53

Lösungen zu den Übungsaufgaben

1. Rechnerische Lösung

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha} = 31,2 \text{ N}$$

$$\sin \alpha_R = \frac{F_2}{F_R} \sin \alpha \Rightarrow \alpha_R = 29,4^\circ$$

Zeichnerische Lösung Bild LÜ 1

2. Zeichnerische Lösung Bild LÜ 2

Rechnerische Lösung: $|F_3| = |F_R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5,53 \text{ N}$

$$\tan \alpha_R = \frac{F_2}{F_1}; \quad \alpha_R = 40,6^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 220,6^\circ$$

3. Lösung siehe Bild LÜ 3

Komponente senkrecht zur geneigten Ebene $G \cdot \cos \alpha = 46,1 \text{ N}$

Komponente parallel zur geneigten Ebene $G \cdot \sin \alpha = 16,8 \text{ N}$

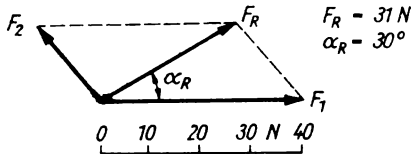


Bild LÜ 1

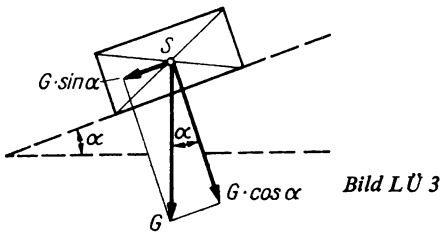


Bild LÜ 3

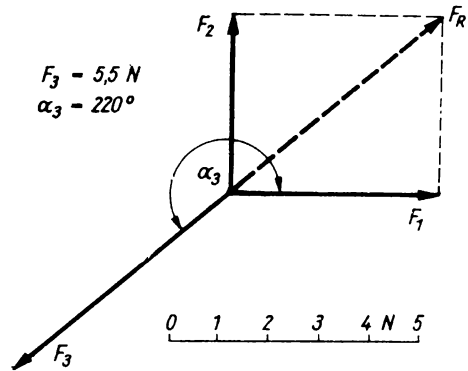


Bild LÜ 2

4.

	Äußere Kraft	Innere Kraft	Aktionskraft	Reaktionskraft
für das Seil				
4.1.	G ×		×	
	F_S	×		×
für die Rolle				
	G ×		×	
	F_S ×		×	
	F_A ×			×

4.2. ... 4.4.

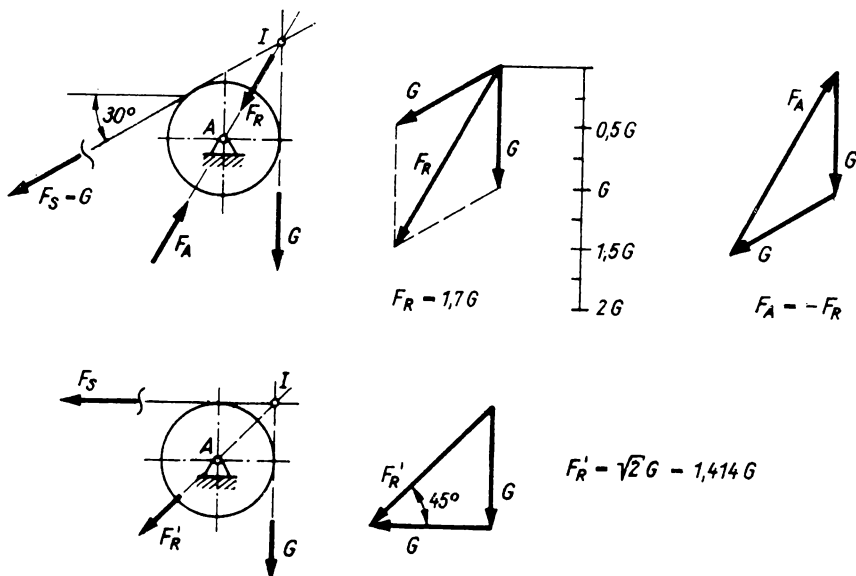


Bild LÜ 4

5.

Kraft i	Betrag F_i in N	Winkel α_i in $^\circ$	Komponenten $F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$ in N	$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$ in N
1	10	0	+10	0
2	20	50	+12,85	+15,32
3	40	120	-20	+34,64
4	10	210	-8,66	-5
Σ	—	—	-5,81	+44,96

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 10 \text{ N} \sqrt{0,581^2 + 4,496^2} = 45,3 \text{ N}$$

nach Gl. (8)

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{+44,96}{-5,81} = -7,7 \text{ (2. Quadrant)}$$

$$\alpha_R = (180 - 82,6)^\circ = 97,4^\circ$$

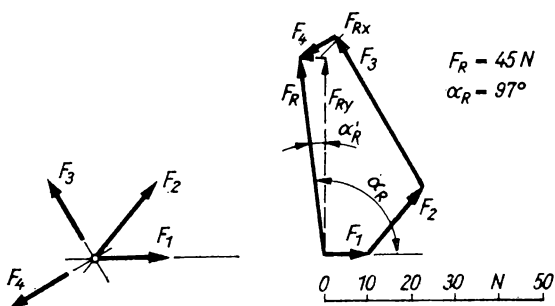


Bild LÜ 5

Bei Verwendung spitzer Winkel wird die Rechnung mit dem Rechenstab einfacher.

$$\tan \alpha'_R = \frac{F_{Rx}}{F_{Ry}} = \frac{-5,81}{+44,96} = - \dots$$

$$(2. \text{ Quadrant}) \Rightarrow \alpha'_R = 7,4^\circ \text{ und } \alpha_R = (90 + 7,4)^\circ = 97,4^\circ$$

6. Belastung durch $M_{\text{ges}} = 3M = 6000 \text{ Nmm}$

Reaktionsmoment durch das Kräftepaar $M = Fa$

Statisches Momentengleichgewicht erfordert

$$F = \frac{M_{\text{ges}}}{a} = \frac{6000 \text{ Nmm}}{100 \text{ mm}} = 60 \text{ N}$$

7. Summe der statischen Momente um 0 für die Kräfte F_1 und F_2

$$\begin{aligned} 7.1. \Sigma M_0 &= F_1 a_1 + F_2 a_2 = +20 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm} + 30 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm} \\ &= +1300 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

7.2. Komponenten:

$$F_{1x} = F_1 \cos 30^\circ = 17,32 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 10 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 60^\circ = 15 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 60^\circ = 25,98 \text{ N}$$

Hebelarme (als Koordinaten):

$$x_1 = a_1 \cos 60^\circ = 10 \text{ mm}$$

$$y_1 = a_1 \sin 60^\circ = 17,32 \text{ mm}$$

$$x_2 = a_2 \cos 30^\circ = 25,98 \text{ mm}$$

$$y_2 = a_2 \sin 30^\circ = 15 \text{ mm}$$

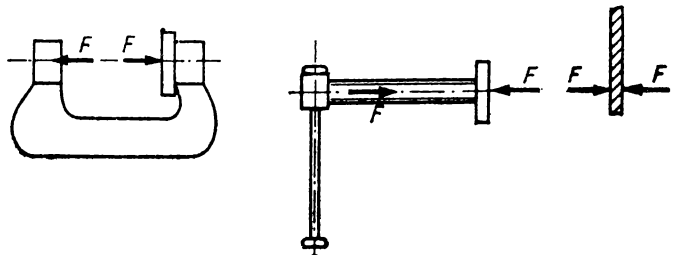
Summe der statischen Momente (Bezugspunkt 0) für die Komponenten:

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= F_{1x} y_1 + F_{1y} x_1 + F_{2x} y_2 + F_{2y} x_2 \\ &= +(17,32 \cdot 17,32 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 15 \\ &\quad + 25,98 \cdot 25,98) \text{ Nmm} = +1300 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse stimmen überein.

8. Lösung Bild LÜ 8

Bild LÜ 8



9. Lösung 9.1. und 9.2. Bild LÜ 9 (Kräfte in fortlaufender Folge nummeriert)

9.3.	Kraft F_i	Aktionskraft für Teil	Reaktionskraft für Teil	Wechselwirkung
	1	5	–	$ F_1 = F_8 $
	2	–	5	$ F_2 = F_{11} $
	3	–	5	$ F_3 = F_{12} $
	4	–	7	$ F_4 = F_{10} $
	5	–	7	$ F_5 = F_{13} $
	6	7	–	$ F_6 = F_{19} $
	7	7	–	$ F_7 = F_{20} $
	8	6	–	$ F_8 = F_1 $
	9	–	6	$ F_9 = F_{14} $
	10	8	–	$ F_{10} = F_4 $
	11	8	–	$ F_{11} = F_2 $
	12	8	–	$ F_{12} = F_3 $
	13	8	–	$ F_{13} = F_5 $
	14	2	–	$ F_{14} = F_9 $
	15	–	2	$ F_{15} = F_{16} $
	16	4	–	$ F_{16} = F_{15} $
	17	–	4	$ F_{17} = F_{18} $
	18	9	–	$ F_{18} = F_{17} $
	19	–	9	$ F_{19} = F_6 $
	20	–	9	$ F_{20} = F_7 $

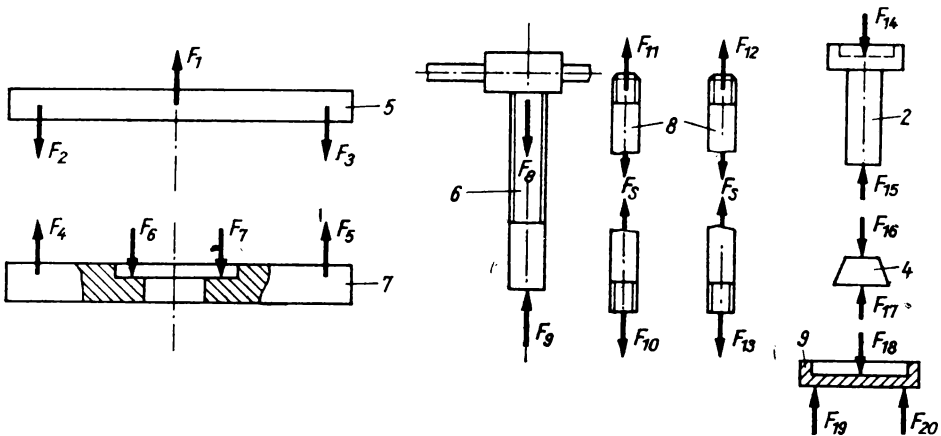


Bild LÜ 9

- 10. Lösung Bild LÜ 10
- 11. Lösung Bild LÜ 11
- 12. Lösung Bild LÜ 12.1 und Bild LÜ 12.2
- 13. Lösung Bild LÜ 13.1
- Strukturbilder Bild LÜ 13 2
- 14. Lösung Bild LÜ 14
- Teil 1: Ebenes zentrales Kräftesystem mit Wirkungsknoten
(Schnittpunkt von F_F und F_D)
- Teil 3: Ebenes allgemeines Kräftesystem

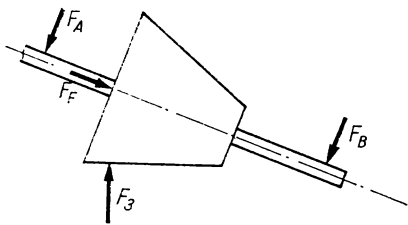


Bild LÜ 10

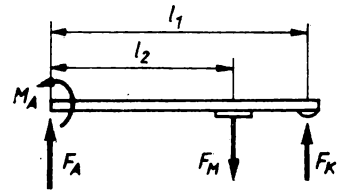


Bild LÜ 11

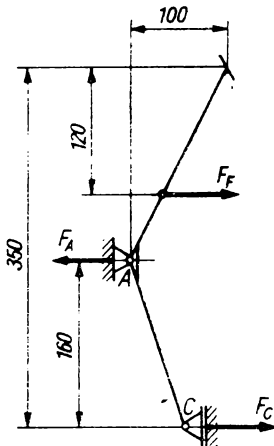


Bild LÜ 12.1

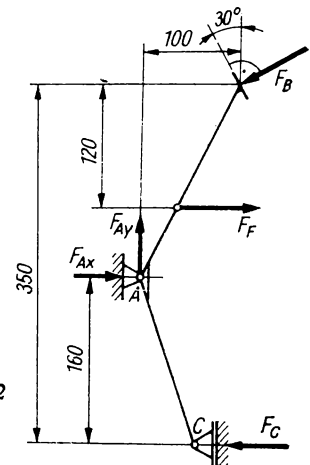


Bild LÜ 12.2

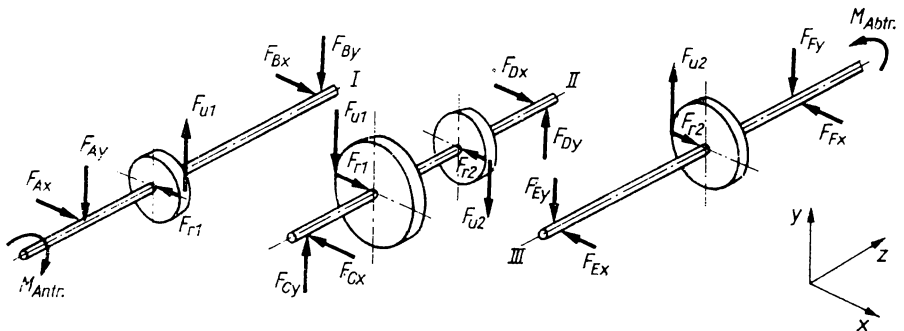


Bild LÜ 13.1

15. Lösung Bild LÜ 15

Hebel: Ebenes zentrales Kräftesystem mit Wirkungsknoten I
(Schnittpunkt von F_3 und G)

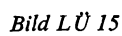
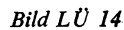
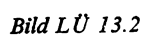
Rad 1: Allgemeines Kräftesystem

Rad 2: Zentrales Kräftesystem mit Wirkungsknoten II
(Schnittpunkt von F_{s1} und F_{s2})

Oberer Riemenausschnitt: Zentrales Kräftesystem mit Strukturknoten

16. Nach Bild LÜ 16 wird zuerst die Kraft F_3 ermittelt und dann die Zugkraft im Riemen:

$$F_{s1} = 590 \text{ N}$$



17. Lösung Bild LÜ 17

Nach Konstruktion des Wirkungsknotens I ist F_C zu bestimmen. Dann wird F_C (Wirkungsknoten II) in die Komponenten F_N (Normalkraft zur Keilauflage) und F_K (Keilkraft) zerlegt. Es wird $F_K = 80 \text{ N}$.

18.1. Lösung Bild LÜ 18.1.: $F_A = 230 \text{ N}$, $F_2 = 140 \text{ N}$

18.2. Aus den geometrischen Beziehungen des Strukturplanes erhält man

$$\tan \alpha_A = \frac{l_1 - l_2 \tan \alpha_1}{l_2}; \quad \alpha_A = 9,02^\circ$$

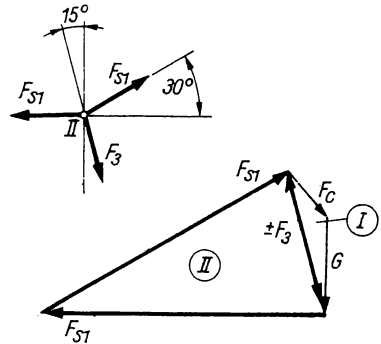
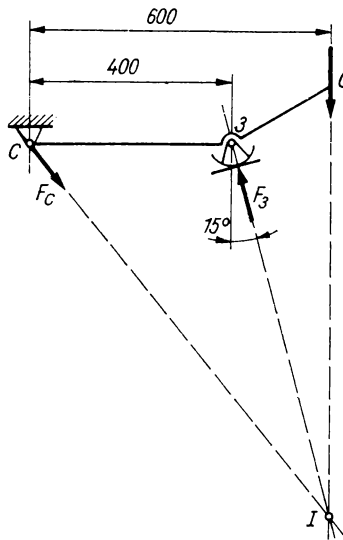


Bild LÜ 16

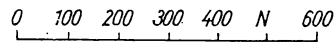
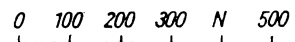
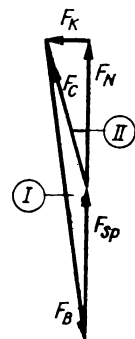
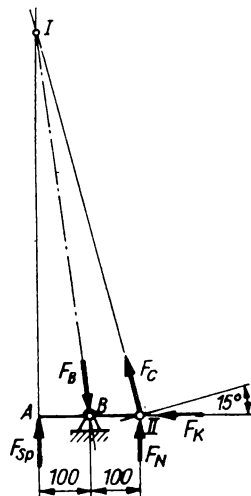


Bild LÜ 17



Strukturskizze Bild LÜ 18.2 liefert

$$\begin{aligned} \rightarrow & \quad F_1 \cos \alpha_1 - F_A \cos \alpha_A = 0 \\ \uparrow & \quad F_1 \sin \alpha_1 + F_A \sin \alpha_A - F_2 = 0 \end{aligned}$$

$F_A = 229,4 \text{ N}$, $F_2 = 141,5 \text{ N}$ (Übereinstimmung mit zeichnerischer Lösung)

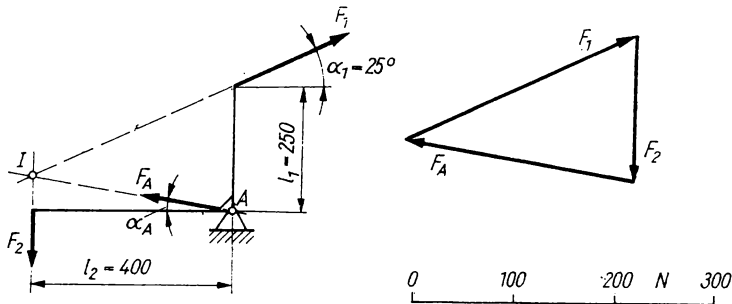


Bild LÜ 18.1

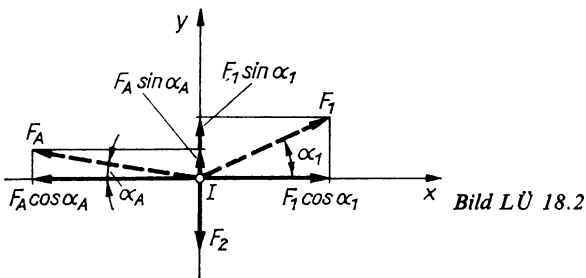


Bild LÜ 18.2

19. Zeichnerische Lösung nach Bild LÜ 19: $F_D = 1,7 \text{ N}$

Für die rechnerische Lösung ist nach Strukturbild $\tan \alpha = \frac{7,5}{22}$. Damit wird $F_D = F_F \tan \alpha = 1,7 \text{ N}$.

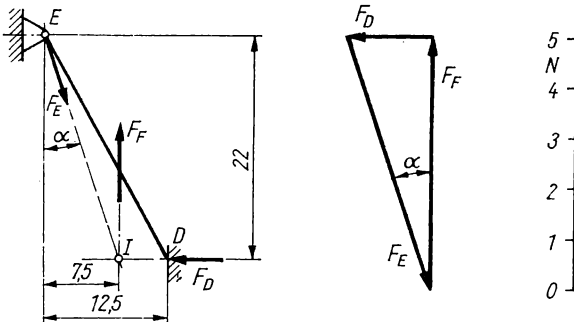


Bild LÜ 19

20. Nach Strukturbild Ü 20 und mit Kräftecken für die Strukturknoten (Bild LÜ 20) wird

$$\cos \alpha = \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow \alpha = 9,93^\circ$$

$$F_S = \frac{F_{Sp}}{\cos \alpha} = \frac{F_{Sp} l_1}{l_2} = 508 \text{ N}$$

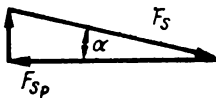
$$F_K = 2F_S \sin \alpha = 175 \text{ N}$$

21. Lösung Bild LÜ 21

Stabtablelle (mit den Angaben der Stützkräfte):

Stab	$\langle F_i \rangle$	M_F	F_i
	in cm	in $\frac{\text{cm}}{\text{kN}}$	in kN
F_A	10,6		5,3
F_B	5,0		10,0
1	1,1		+0,55
2	11,1	2	-5,55
3	4,3		+2,15
4	6,6		+3,3
5	6,0		+3,0
6	3,0		-1,5
7	7,2		-3,6

Krafteck für
Strukturknoten A



Krafteck für
Strukturknoten B

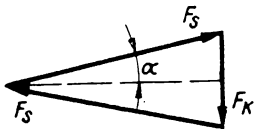


Bild LÜ 20

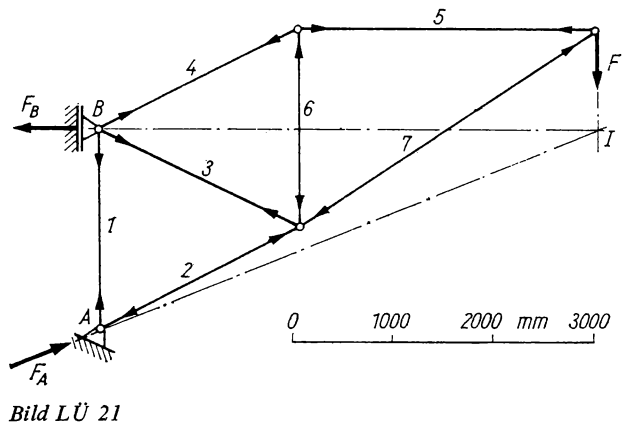


Bild LÜ 21

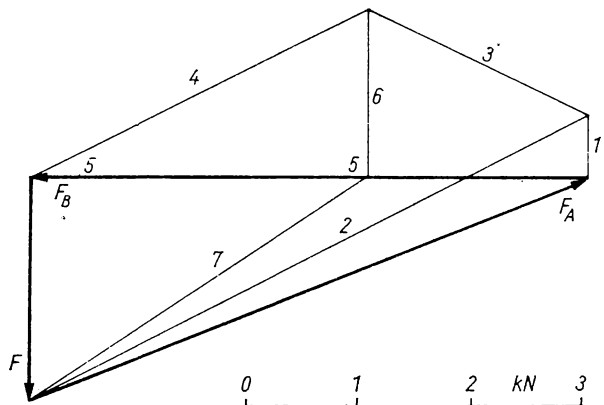


Bild LÜ 24

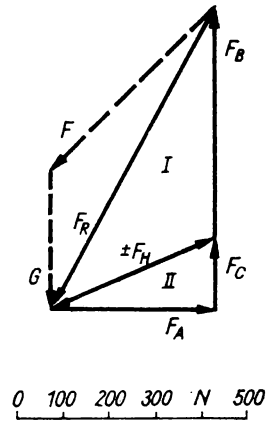
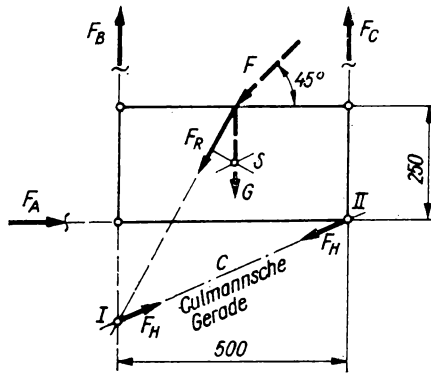
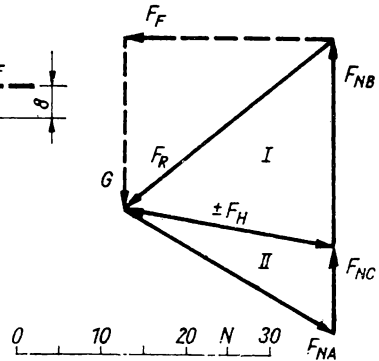
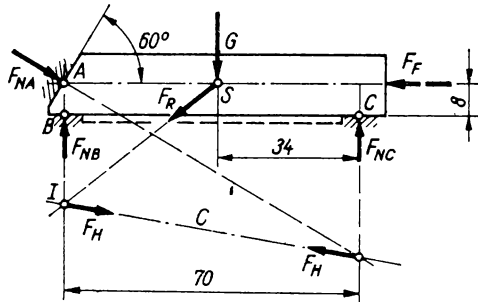


Bild LÜ 25



27. Lösung nach Bild LÜ 27 führt auf $F_A = 860$, $F_B = 470$ N.

(F_B wirkt nach Krafteck entgegen der im Strukturbild angenommenen, vorausgesetzten Richtung.)

28. Lösung 28.1 nach Bild LÜ 28.1: $F_A = 72$ N; $F_C = 22$ N;

Lösung 28.2 nach Bild LÜ 28.2: $F_A = 260$ N; $F_C = 120$ N

29. 29.1: Strukturskizze Bild LÜ 29.1

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -F_F \cdot 10 + F_B \cdot 20 = 0 \Rightarrow F_B = 1,0 \text{ N} \\ \uparrow & F_F - F_B - F_A = 0 \Rightarrow F_A = 1,0 \text{ N} \end{array}$$

29.2: Strukturskizze Bild LÜ 29.2

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -F_F \cdot 10 + F_{T1} \cdot 40 = 0 \Rightarrow F_{T1} = 0,5 \text{ N} \\ \uparrow & F_F - F_{T1} - F_A = 0 \Rightarrow F_A = 1,5 \text{ N} \end{array}$$

29.3: Strukturskizze (Bild LÜ 29.3) mit

$$F_{Cx} = F_C \cos 30^\circ = 0,866 F_C$$

$$F_{Cy} = F_C \sin 30^\circ = 0,5 F_C$$

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -F_{Cy} \cdot 40 - F_F \cdot 10 + F_{T2} \cdot 40 = 0 \\ & F_C = 1,0 \text{ N} \end{array}$$

$$\rightarrow F_{Ax} + F_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -0,866 \cdot 1,0 \text{ N} = -0,866 \text{ N}$$

$$\uparrow F_{Cy} + F_{Ay} + F_F - F_{T2} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -1,5 \text{ N}$$

$$F_A = \sqrt{0,866^2 + 1,5^2} \text{ N} = 1,73 \text{ N}$$

Bild LÜ 26.1

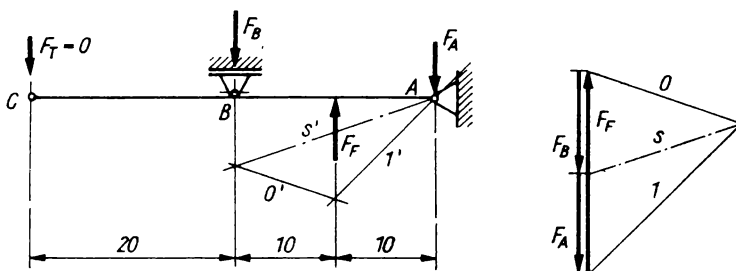


Bild LÜ 26.2

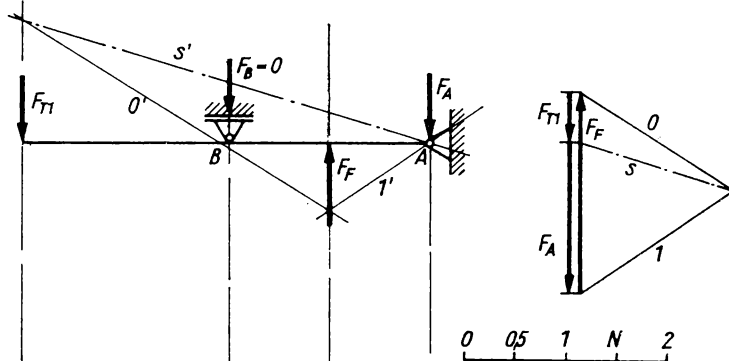


Bild LÜ 26.3

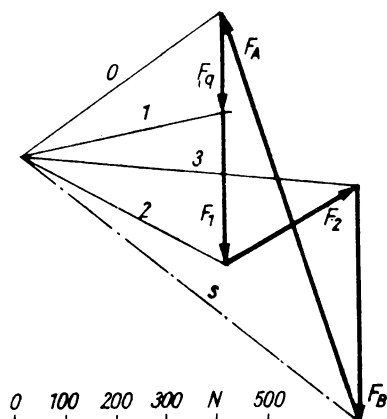
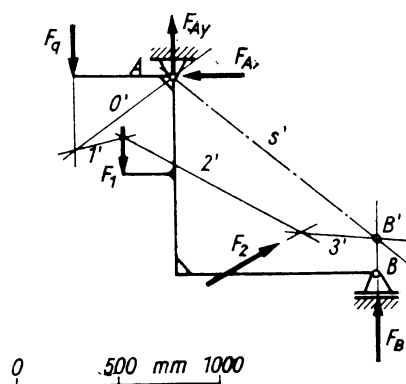
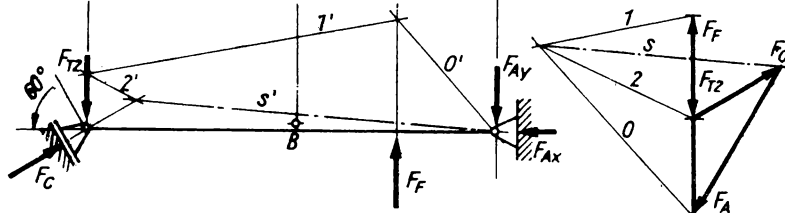


Bild LÜ 27

Bild LÜ 28.1

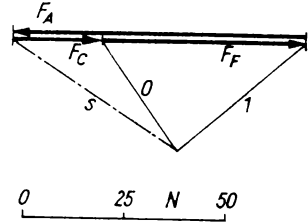
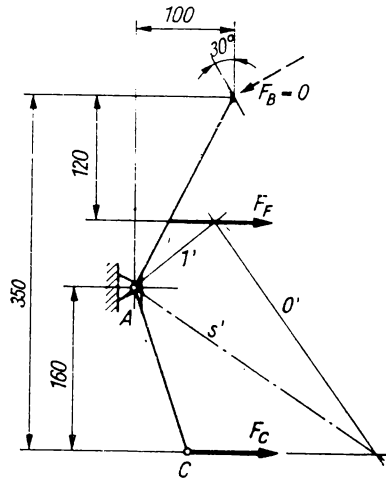


Bild LÜ 28.2

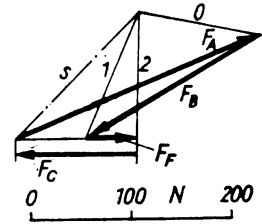
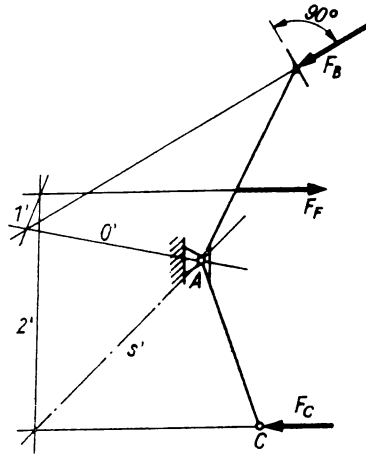


Bild LÜ 29.1

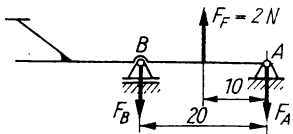


Bild LÜ 29.2

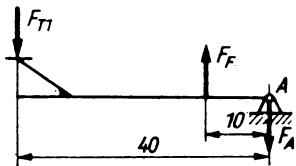


Bild LÜ 29.3

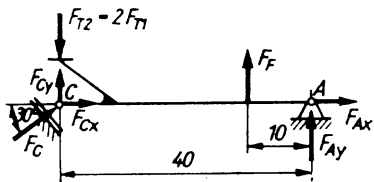
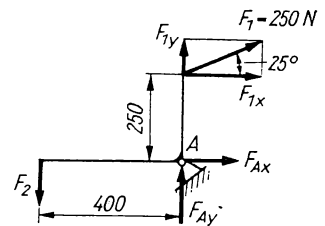


Bild LÜ 30



30. Strukturskizze (Bild LÜ 30) mit

$$F_{1x} = F_1 \cos 25^\circ = 226,6 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 25^\circ = 106 \text{ N}$$

$$\sum \curvearrowright A \quad -F_{1x} \cdot 25 + F_2 \cdot 40 = 0 \Rightarrow F_2 = 141,6 \text{ N}$$

$$\rightarrow \quad F_{1x} + F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -226,6 \text{ N}$$

$$\uparrow \quad F_{Ay} + F_{1y} - F_2 = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 35,95 \text{ N}$$

$$F_A = 229,4 \text{ N}$$

31. Strukturskizze Bild LÜ 31

$$\sum \curvearrowright B \quad -F_{Sp} \cdot 100 + F_{Cy} \cdot 100 = 0 \Rightarrow F_{Cy} = F_{Sp} = 300 \text{ N}$$

$$F_C = \frac{F_{Cy}}{\cos 15^\circ} = 311 \text{ N}$$

$$F_{Cx} = F_C \sin 15^\circ = 80,5 \text{ N}$$

$$\rightarrow \quad F_{Bx} - F_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{Bx} = 80,5 \text{ N}$$

$$\uparrow \quad F_{Sp} + F_{By} + F_{Cy} = 0 \Rightarrow F_{By} = -600 \text{ N}$$

$$\text{Lagerkraft } F_B = 100 \text{ N} \sqrt{0,805^2 + 6^2} = 605 \text{ N}$$

Keilkraft $F_K = F_{Cx} = 80,5 \text{ N}$ (siehe auch Zusammenhänge im Krafteck Bild LÜ 17)

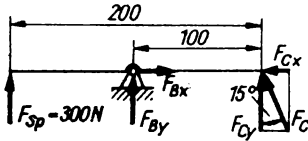


Bild LÜ 31

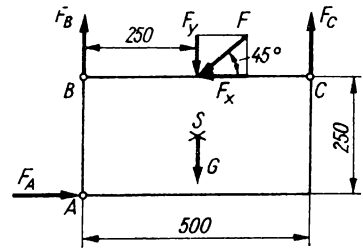


Bild LÜ 32

$$G = 300 \text{ N}$$

$$F = 500 \text{ N}$$

32. Strukturskizze LÜ 32 mit $F_x = F_y = 353,5 \text{ N}$

$$\sum \curvearrowright A \quad F_C \cdot 5 + F_x \cdot 2,5 - (F_y + G) \cdot 2,5 = 0$$

$$F_C = 150 \text{ N}$$

$$\rightarrow \quad F_A - F_x = 0 \Rightarrow F_A = F_x = 353,5 \text{ N}$$

$$\sum \curvearrowright C \quad (F_y + G) \cdot 2,5 + F_A \cdot 2,5 - F_B \cdot 5 = 0$$

$$F_B = 503,5 \text{ N}$$

Kontrollrechnung

$$\begin{array}{rcl} \uparrow & F_B + F_C & = F_y + G \\ & 503,5 \text{ N} & \quad 353,5 \text{ N} \\ & 150,0 \text{ N} & \quad 300,0 \text{ N} \\ \hline & 653,5 \text{ N} & \quad 653,5 \text{ N} \end{array}$$

Vertikale Kräftebilanz erfüllt

33. Strukturskizze Bild LÜ 33

linke Schaltstellung:

$$\rightarrow \quad F_F - F_{3x} = 0 \Rightarrow F_{3x} = 250 \text{ N}; \quad F_3 = \frac{F_{3x}}{\sin 20^\circ} = 730 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cos 20^\circ = 685 \text{ N}$$

$$\sum \curvearrowright A \quad F_{3y} \cdot 3 - F_{3x} \cdot 3 - F_B \cdot 12 = 0 \Rightarrow F_B = 109 \text{ N}$$

$$\uparrow \quad -F_A - F_B + F_{3y} = 0 \Rightarrow F_A = 576 \text{ N}$$

rechte Schaltstellung:

$$\begin{aligned} \zeta_A \quad & F_{3y} \cdot 8 - F_{3x} \left[\frac{D}{2} - (l_3 - l_2 - l_1) \tan 20^\circ \right] - F_B \cdot 12 = 0 \\ & F_B = 433 \text{ N} \\ \uparrow \quad & -F_A - F_B + F_{3y} = 0 \Rightarrow F_A = 254 \text{ N} \end{aligned}$$

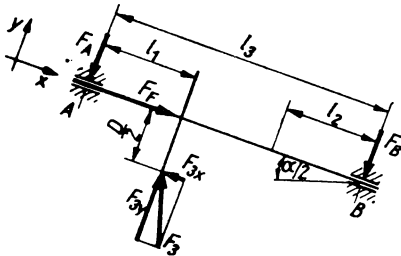


Bild LÜ 33

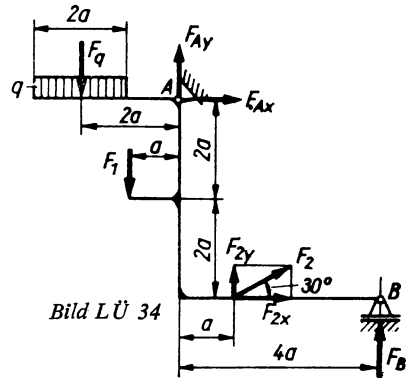


Bild LÜ 34

34. Strukturskizze Bild LÜ 34

$$F_q = 2qa = 200 \text{ N}, F_1 = 300 \text{ N}, F_{2x} = 260 \text{ N}, F_{2y} = 150 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \zeta_A \quad & +F_q 2a + F_1 a + F_{2y} a + F_{2x} 4a + F_B 4a = 0 \\ & F_B = -472,3 \text{ N (wirkt entgegen dem eingetragenen Vektor)} \\ \rightarrow \quad & F_{Ax} + F_{2x} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -F_{2x} = -260 \text{ N} \\ & \text{(wirkt entgegen dem eingetragenen Vektor)} \\ \zeta_B \quad & -F_{2y} 3a + F_1 5a - F_{Ay} 4a - F_{Ax} 4a + F_q 6a = 0 \\ & F_{Ay} = 822,5 \text{ N} \end{aligned}$$

Kontrollrechnung

$$\begin{array}{r|l} \uparrow & F_q + F_1 - F_{2y} = F_{Ay} + F_B \\ & 200 \text{ N} \quad 822,5 \text{ N} \\ & 300 \text{ N} \quad -472,3 \text{ N} \\ & -150 \text{ N} \\ \hline & 350 \text{ N} \quad 350,2 \text{ N} \end{array} \quad \text{Vertikale Kräftebilanz erfüllt}$$

$$F_A = 100 \text{ N} \sqrt{2,6^2 + 8,23^2} = 863 \text{ N}$$

35. Durch die feste Einspannung wirken (Bild LÜ 35) folgende Stützreaktionen:

$$\begin{aligned} \zeta_E \quad & +M_E - \frac{F}{2} l = 0 \Rightarrow \text{Einspannmoment } M_E = 8 \text{ Nmm} \\ \rightarrow \quad & \frac{F}{2} - F_E = 0 \Rightarrow \text{Einspannkraft } F_E = 0,20 \text{ N} \end{aligned}$$

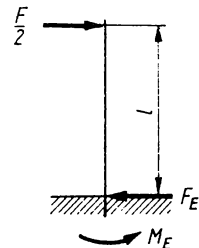


Bild LÜ 35

36. Nach Bild LÜ 13.1

Umfangskräfte
Statisches Momentengleichgewicht

$$\begin{aligned} \text{um Wellenachse I} \quad & -M_{\text{Antr.}} + F_{u1} \frac{d_{01}}{2} = 0 \Rightarrow F_{u1} = 5 \cdot 10^3 \text{ N} = 5 \text{ kN} \\ \text{um Wellenachse II} \quad & +F_{u1} \frac{d_{02}}{2} - F_{u2} \frac{d_{03}}{2} = 0 \\ & F_{u2} = 10^4 \text{ N} = 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

Abtriebsmoment mit dem statischen Momentengleichgewicht um die

$$\text{Wellenachse III} \quad M_{\text{Abtr.}} = F_{u2} \frac{d_{04}}{2} = 6 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 600 \text{ Nm}$$

Lagerkräfte

Welle I nach Bild LÜ 36.1

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & F_{u1}a - F_Bc = 0 \Rightarrow F_B = 1500 \text{ N} \\ \uparrow & F_{u1} - F_A - F_B = 0 \Rightarrow F_A = 3500 \text{ N} \end{array}$$

Welle II nach Bild LÜ 36.2

$$\begin{array}{l|l} \zeta C & F_Dc - F_{u1}a - F_{u2}(c-b) = 0 \Rightarrow F_D = 7500 \text{ N} \\ \uparrow & F_C + F_D - F_{u1} - F_{u2} = 0 \Rightarrow F_C = 7500 \text{ N} \end{array}$$

Welle III nach Bild LÜ 36.3

$$\begin{array}{l|l} \zeta E & F_{u2}(c-b) - F_Fc = 0 \Rightarrow F_F = 6000 \text{ N} \\ \uparrow & F_{u2} - F_E - F_F = 0 \Rightarrow F_E = 4000 \text{ N} \end{array}$$

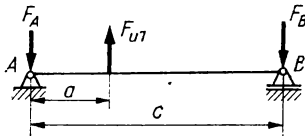


Bild LÜ 36.1

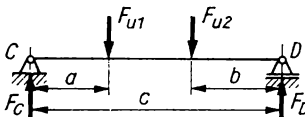


Bild LÜ 36.2

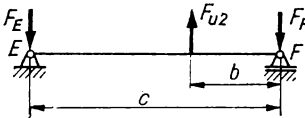


Bild LÜ 36.3

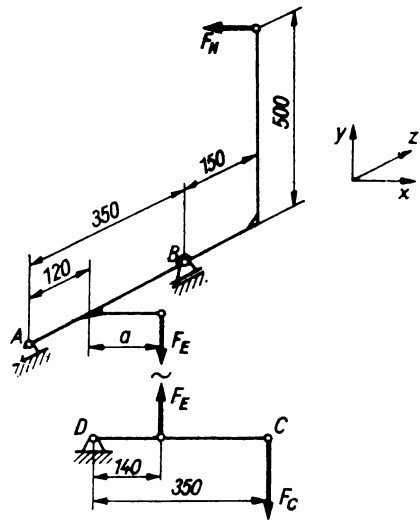


Bild LÜ 37.1

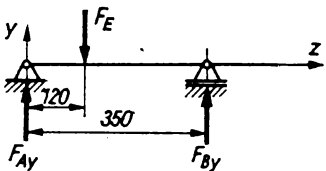
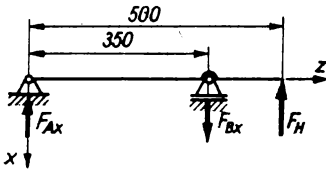


Bild LÜ 37.2

37. Gliedlänge des Hebels E... F (Bild LÜ 37.1)

$$\begin{array}{l|l} \zeta D & F_E \cdot 14 - F_C \cdot 35 = 0 \Rightarrow F_E = 500 \text{ N} \\ \zeta \text{Wellenachse} & F_H \cdot 500 \text{ mm} - F_E a = 0 \Rightarrow a = 150 \text{ mm} \end{array}$$

Lagerkräfte für die Welle (Bild LÜ 37.2)

$$\begin{array}{lcl}
 x,z\text{-Ebene: } \zeta A & \left| \begin{array}{l} F_H \cdot 5 - F_{Bx} \cdot 3,5 = 0 \\ F_{Ax} - F_{Bx} + F_H = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow F_{Bx} = 214 \text{ N} \\
 & x \uparrow & \Rightarrow F_{Ax} = 64 \text{ N} \\
 y,z\text{-Ebene: } \zeta A & \left| \begin{array}{l} F_{By} \cdot 3,5 - F_E \cdot 1,2 = 0 \\ F_{Ay} + F_{By} - F_E = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow F_{By} = 171,4 \text{ N} \\
 & y \uparrow & \Rightarrow F_{Ay} = 328,6 \text{ N}
 \end{array}$$

Radialkräfte in den Lagern

$$F_A = 100 \text{ N} \sqrt{0,64^2 + 3,29^2} = 335 \text{ N}$$

$$F_B = 100 \text{ N} \sqrt{2,14^2 + 1,71^2} = 274 \text{ N}$$

38. Umfangs- und Normalkraft am Reibrad stehen senkrecht zueinander. Man kann sie zur Resultierenden zusammenfassen und mit ihr die radialen Stützkkräfte ermitteln.

$$F_R = \sqrt{F_u^2 + F_N^2} = 32,3 \text{ N}$$

Radiale Stützkkräfte

$$\begin{array}{lcl}
 \zeta A & \left| \begin{array}{l} F_R \cdot 40 - F_{Br} \cdot 65 = 0 \\ F_{Ar} + F_{Br} - F_R = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow F_{Br} = 20 \text{ N} \\
 \uparrow & & \Rightarrow F_{Ar} = 12,3 \text{ N}
 \end{array}$$

Vom Festlager ist axial noch die Kupplungskraft aufzunehmen, so daß

$$F_{Az} = F_K = 40 \text{ N}$$

beträgt.

Richtung der Resultierenden

$$\tan \alpha_R = \frac{F_u}{F_N} = \dots \quad \alpha_R = 21,8^\circ$$

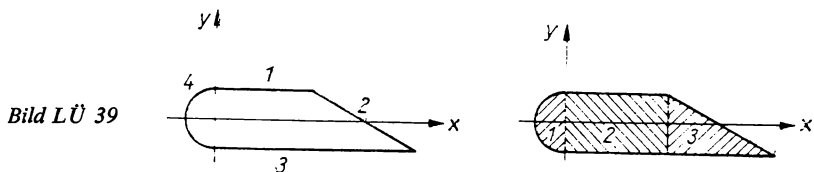
gegenüber vertikaler Ebene geneigt

39. Für ein Koordinatensystem nach Bild LÜ 39 erhält man:

39.1:	i	l_i in mm	x_{is} in mm	y_{is} in mm	$l_i x_{is}$ in mm ²	$l_i y_{is}$ in mm ²
	1	16,33	8,17	5	133,4	81,65
	2	20	25	0	500,0	-
	3	33,65	16,83	-5	566,3	-168,25
	4	15,71	-3,18	0	-50,0	-
	Σ	85,69	-	-	1149,7	-86,6

$$x_s = \frac{1149,7 \text{ mm}^2}{85,69 \text{ mm}} = 13,42 \text{ mm}$$

$$y_s = -\frac{86,6 \text{ mm}^2}{85,69 \text{ mm}} = -1,01 \text{ mm}$$



39.2:

i	A_i in mm ²	x_{is} in mm	y_{is} in mm	$A_i x_{is}$ in mm ³	$A_i y_{is}$ in mm ³
1	39,3	-2,12	0	-83,3	-
2	163,3	8,17	0	1334,2	-
3	86,6	22,1	-1,67	1913,9	-144,6
Σ	289,2	-	-	3164,8	-144,6

$$x_s = \frac{3164,8 \text{ mm}^3}{289,2 \text{ mm}^2} = 11 \text{ mm}$$

$$y_s = -\frac{144,6 \text{ mm}^3}{289,2 \text{ mm}^2} = -0,5 \text{ mm}$$

40. Mit dem Ursprung des Koordinatensystems in B erhält man:

$$x_s = -1,65 a$$

$$y_s = 1,65 a$$

41. Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt der Bohrung:

$$x_s = 12,6 \text{ mm}$$

$$y_s = -4,05 \text{ mm}$$

42. Zeichnerische Lösung nach Bild LÜ 42:

$$x_s = -15 \text{ mm}$$

$$y_s = 10 \text{ mm}$$

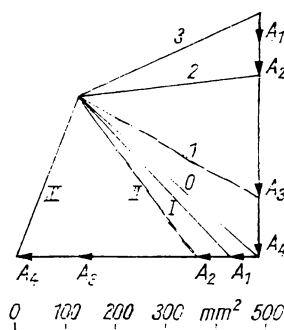
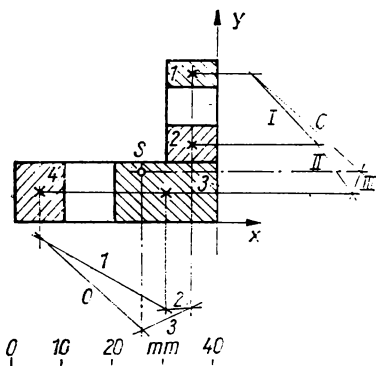


Bild LÜ 42

43. $y_s = 43,6 \text{ mm}$

44. Nach Bild LÜ 44 sind zunächst die Schwerpunktkoordinaten für den Quecksilberkörper (Halbkugel und abgeschrägter Kreiszylinder) zu ermitteln.

i	V_i in mm ³	x_{is} in mm	y_{is} in mm	$x_{is} V_i$ in mm ⁴	$y_{is} V_i$ in mm ⁴
Halb- kugel	261,67	$\frac{3}{8} r = -1,875$	0	-490,6	-
abge- schrägter Kreis- zylinder	1963,5	$\frac{h}{2} + \frac{1}{8} r^2 \frac{\tan^2 \alpha}{h} = 12,88$	$\frac{1}{4} r^2 \frac{\tan \alpha}{h} = -0,433$	25277	-850,2
	2225,17	-	-	24786,4	-850,2

$$x_s = 11,14 \text{ mm} \quad y_s = -0,382 \text{ mm}$$

Rückstellmoment mit $\rho = 13,55 \text{ kg/dm}^3$:

$$M_A = V \rho g \cos \alpha (25 \text{ mm} - x_s) - V \rho g \sin \alpha y_s = 3,5 \text{ Nmm}$$

45. Der Grenzfall, Standsicherheit $S = 1$, entspricht dem statischen Momentengleichgewicht um die Kippkante.

Nach Bild LÜ 45 wird

$$\zeta A \quad | \quad x_s mg \cos \alpha - y_s mg \sin \alpha = 0$$

Für das Prisma ist $x_s = y_s$ (man überzeuge sich durch Rechnung), so daß

$$\sin \alpha = \cos \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha \leq 45^\circ$$

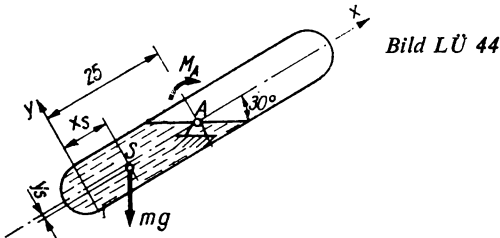


Bild LÜ 44

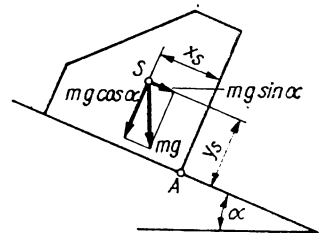


Bild LÜ 45

46. 46.1: Aufwärtsbewegung durch F (Bild LÜ 46)

$$\begin{aligned} \uparrow \quad & F - G - F_{R1} - F_{R2} - F_{R3} = 0 \\ & \text{Mit } F_{R1} = \mu F_F; \quad F_{R2} = \mu F_F/2; \quad F_{R3} = \mu F_F/2 \\ & \text{wird } F = G + 2\mu F_F \Rightarrow F = 7,3 \text{ N} \end{aligned}$$

- 46.2: Abwärtsbewegung ohne Haltekraft (Bild LÜ 46)

$$\begin{aligned} \downarrow \quad & F_{R01} + F_{R02} + F_{R03} - G = 0 \\ & \text{Mit } F_{R01} = \mu_0 F_F' = F_{R02} + F_{R03} \\ & \text{wird } G = 2\mu_0 F_F' \Rightarrow F_F' = 12,3 \text{ N} > F_F = 10 \text{ N} \end{aligned}$$

Stab kann durch Reibkräfte allein nicht gehalten werden. Die Druckfeder ist nachzuspannen.

$$(F_F' - F_F) = cs \Rightarrow \text{Nachstellweg } s = 1,15 \text{ mm}$$

47. 47.1: Prinzipskizzen nach Bild LÜ 47.1:

$$\text{Kraft im Gestänge } F_S = \frac{F_F}{2 \cos \alpha}$$

Fliehkraft (nach Krafteck)

$$F_{F1} = 2F_S \sin \alpha = 2 \frac{F_F}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$F_{F1} = F_F \tan \alpha$$

(mit Federkonstante und -weg) $F_{F1} = cl_1 \tan \alpha$

(durch Winkelgeschwindigkeit) $F_{F1} = mr\omega^2$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \sqrt{\frac{cl_1 \tan \alpha}{mr}}$$

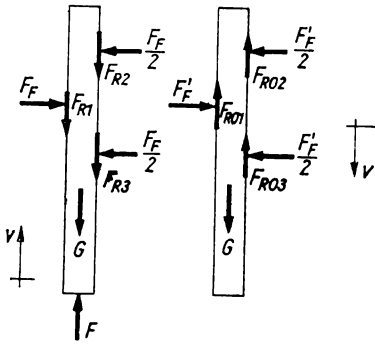


Bild LÜ 46

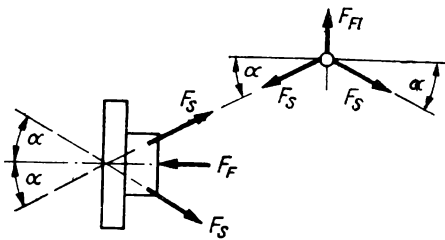


Bild LÜ 47.1

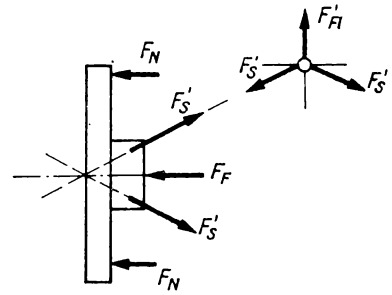


Bild LÜ 47.2

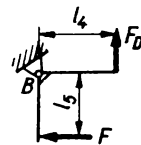
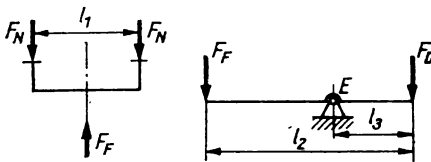


Bild LÜ 48

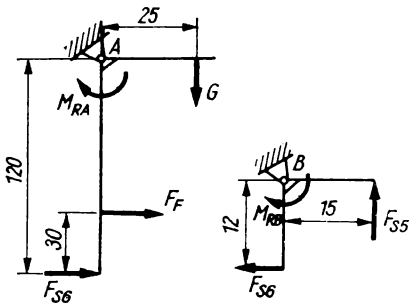


Bild LÜ 49.1

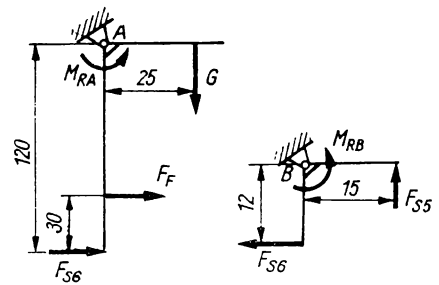


Bild LÜ 49.2

Geometrische Beziehungen aus Bild Ü 47

$$\cos \alpha = \frac{l_2 - \frac{l_1}{2}}{l_2} \Rightarrow \alpha = 33,6^\circ$$

$$r = \frac{d}{2} + l_2 \sin \alpha = 26,6 \text{ mm}$$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = 193,6 \text{ s}^{-1}$
Drehzahl

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = 30,8 \text{ s}^{-1} = 1850 \text{ min}^{-1}$$

47.2: Prinzipskizzen nach Bild LÜ 47.2:

Bremsmoment $M = F_R d_R = \mu F_N d_R$

Normalkraft an jedem Anschlag $F_N = \frac{1}{2} (2F'_S \cos \alpha - F_F)$

Stangenkraft nach Krafteck und mit den vorgegebenen Größen:

$$F'_S = \frac{F_{F1}}{2 \sin \alpha} = \frac{mr(1,5\omega)^2}{2 \sin \alpha}$$

Bremsmoment $M = 186,6 \text{ Nmm}$

48. Skizzen nach Bild LÜ 48

$$\begin{array}{l|l} \zeta B & F_D l_4 - F l_5 = 0 \Rightarrow F_D = \frac{125}{3} \text{ N} \\ \zeta E & -F_D l_3 + F_F (l_2 - l_3) = 0 \\ & F_F = \frac{1}{60} \left(25 \frac{5}{3} \cdot 40 \right) \text{ N} = 27,8 \text{ N} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Reibmoment } M_R &= \mu F_N l_1 = \mu \frac{F_F}{2} l_1 \\ &= 0,6 \cdot 13,9 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm} = 417 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

49. 49.1: Schwenken nach oben (Bild LÜ 49.1):

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -G \cdot 25 - M_{RA} + F_F \cdot 90 + F_{S6} \cdot 120 = 0 \\ & F_{S6} = 7,98 \text{ N} \\ \zeta B & +F_{S5} \cdot 15 - M_{RB} - F_{S6} \cdot 12 = 0 \\ & F_{S5} = 6,45 \text{ N} \end{array}$$

49.2: Schwenken nach unten (Bild LÜ 49.2):

$$\begin{array}{l|l} \zeta A & -G \cdot 25 + M_{RA} + F_F \cdot 90 + F_{S6} \cdot 120 = 0 \\ & F_{S6} = 7,93 \text{ N} \\ \zeta B & -F_{S6} \cdot 12 + F_{S5} \cdot 15 + M_{RB} = 0 \\ & F_{S5} = 6,28 \text{ N} \end{array}$$

50. 50.1: Umfangskraft an der Reibfläche

$$F_{u1} \cdot 100 \text{ mm} = F_{u2} \cdot 90 \text{ mm} \Rightarrow F_{u2} = 100 \text{ N}$$

Die Schraube soll mit 2facher Sicherheit spannen.

Reibkraft $F_{R2} = F_{u2} = \mu_0 F_{N2}$

$$\text{Schraubenkraft } F_S = 2 F_{N2} = 2 \frac{F_{u2}}{\mu_0} = 2 \frac{100 \text{ N}}{0,2} = 1000 \text{ N}$$

50.2: Reibung am Gewinde sowie zwischen Mutter und Unterlage (Bild LÜ 50).
Anziehen der Schraubenverbindung (analog Heben einer Last)

$$M_A = F_S \tan(\alpha + \varrho') \frac{d_2}{2} + F_S \mu \frac{s + d}{4}$$

Schraubenkraft $F_S = 1000 \text{ N}$

Gewinde M 12: $P = 1,75 \text{ mm}$; $\frac{d_2}{2} = 5,43 \text{ mm}$

$$\tan \alpha = \frac{P}{2\pi d_2/2} = \frac{1,75}{2\pi \cdot 5,43}$$

$$\alpha = 2,9^\circ$$

Spitzengewinde mit $2\delta = 60^\circ$; Umrechnung des Reibungswinkels

$$\tan \varrho' = \mu' = \frac{\mu}{\cos 30^\circ} = \frac{0,12}{0,866}$$

$$\varrho' = 7,9^\circ$$

Mutter M 12 TGL 0-934: $d = 12 \text{ mm}$, $s = 19 \text{ mm}$

$$M_A = 1000 \text{ N} \left(\tan 10,8^\circ \cdot 5,43 + 0,12 \cdot \frac{31}{4} \right) \text{ mm}$$

$$M_A = 1,97 \text{ Nm}$$

Lösen der Schraubenverbindung (analog Senken einer Last; jedoch mit μ_0)

$$M_L = F_S \tan(\varrho'_0 - \alpha) \frac{d_2}{2} + F_S \mu_0 \frac{s + d}{4}$$

$$\tan \varrho'_0 = \mu'_0 = \frac{\mu_0}{\cos 30^\circ} = \frac{0,2}{0,866}$$

$$\varrho'_0 = 13^\circ$$

$$M_L = 1000 \text{ N} \left(\tan 10,1^\circ \cdot 5,43 + 0,2 \cdot \frac{31}{4} \right) \text{ mm}$$

$$M_L = 2,52 \text{ Nm}$$

51. Kräfte am Rad 1:

$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu_0 \alpha} \text{ (Nach Anlage A 7: } e^{0,4\pi} = 3,5)$$

$$F_{S2} = 2100 \text{ N}$$

Maximal übertragbares Drehmoment

$$M_{\text{imax}} = (F_{S2} - F_{S1}) \frac{D_2}{2} = 150 \text{ Nm}$$

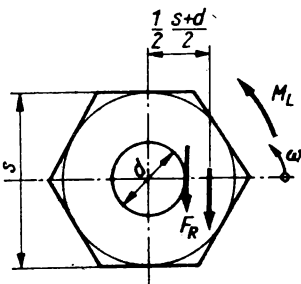


Bild LÜ 50

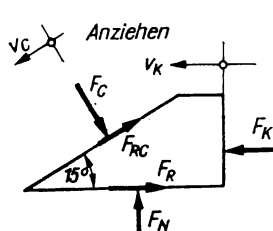
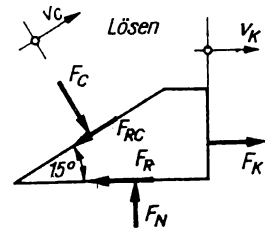


Bild LÜ 52



52. In Übereinstimmung mit Bild LÜ 52

Anziehen:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \left| \begin{array}{l} F_C \sin 15^\circ + F_{RC} \cos 15^\circ + F_R - F_K = 0 \\ \uparrow \left| \begin{array}{l} -F_C \cos 15^\circ + F_{RC} \sin 15^\circ + F_N = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Mit $F_{RC} = (f/r) F_C$ und $F_R = \mu F_N$ wird $F_K = 119 \text{ N}$

Lösen:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \left| \begin{array}{l} F_C \sin 15^\circ - F_{RC} \cos 15^\circ - F_R + F_K = 0 \\ \uparrow \left| \begin{array}{l} -F_C \cos 15^\circ - F_{RC} \sin 15^\circ + F_N = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Mit $F_{RC} = (f/r) F_C$ und $F_R = \mu_0 F_N$ wird $F_K = -14,1 \text{ N}$

(Achtung: Der Keil ist nicht selbsthemmend! Er löst sich schon, wenn eine Kraft in Spannrichtung von 14,1 N wirkt. Man sollte den Keilwinkel verringern.)

53. Zeichnerische Lösung nach Bild LÜ 53

$$F_F = 1,75 \text{ N}$$

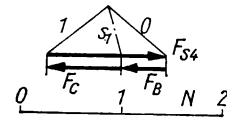
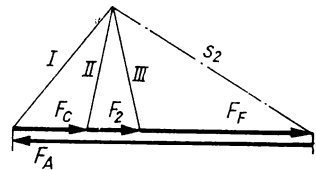
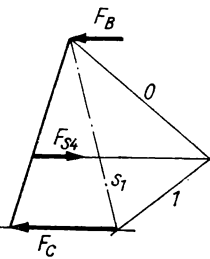
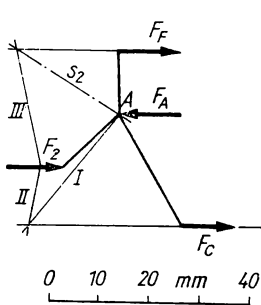
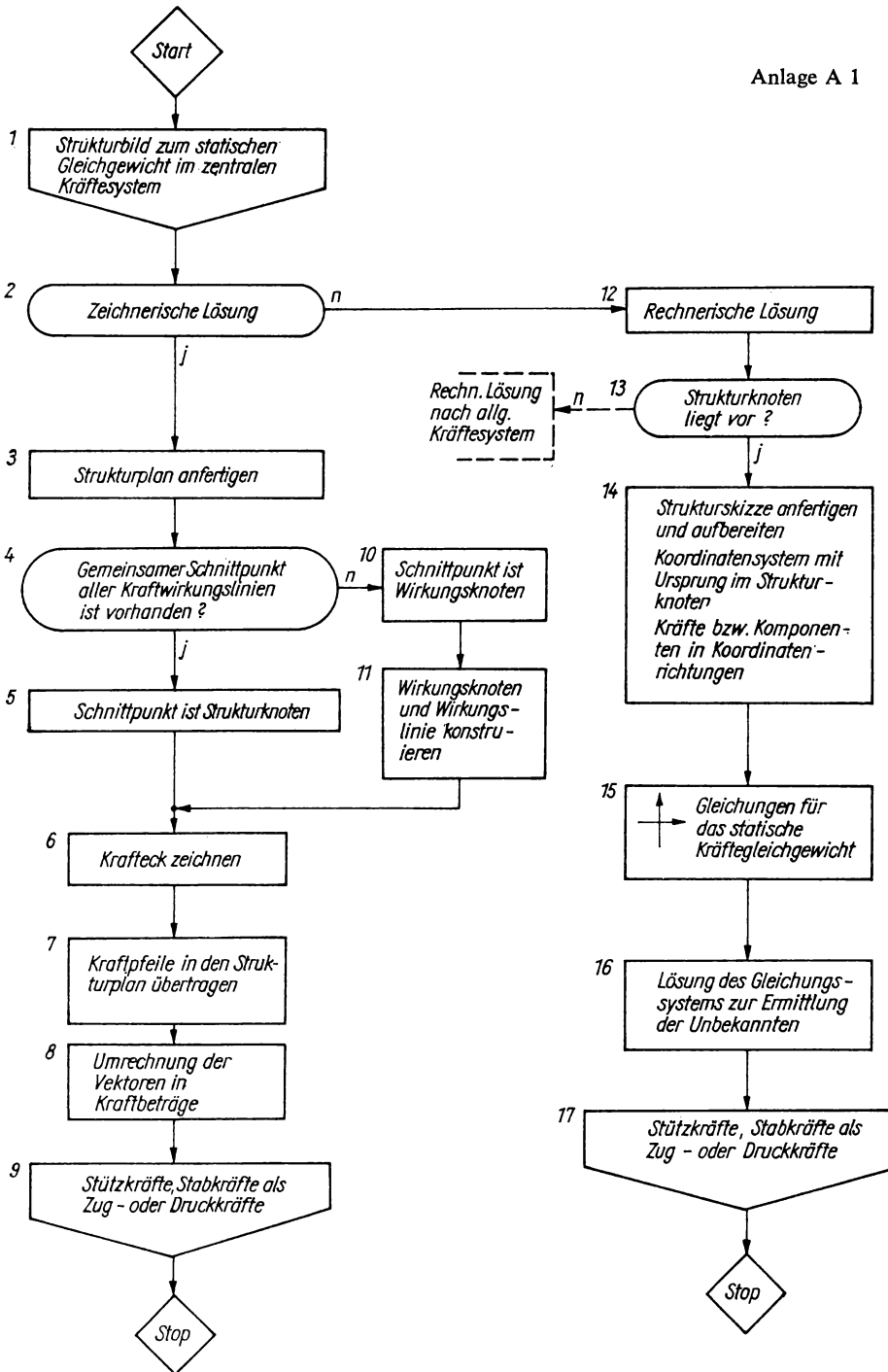


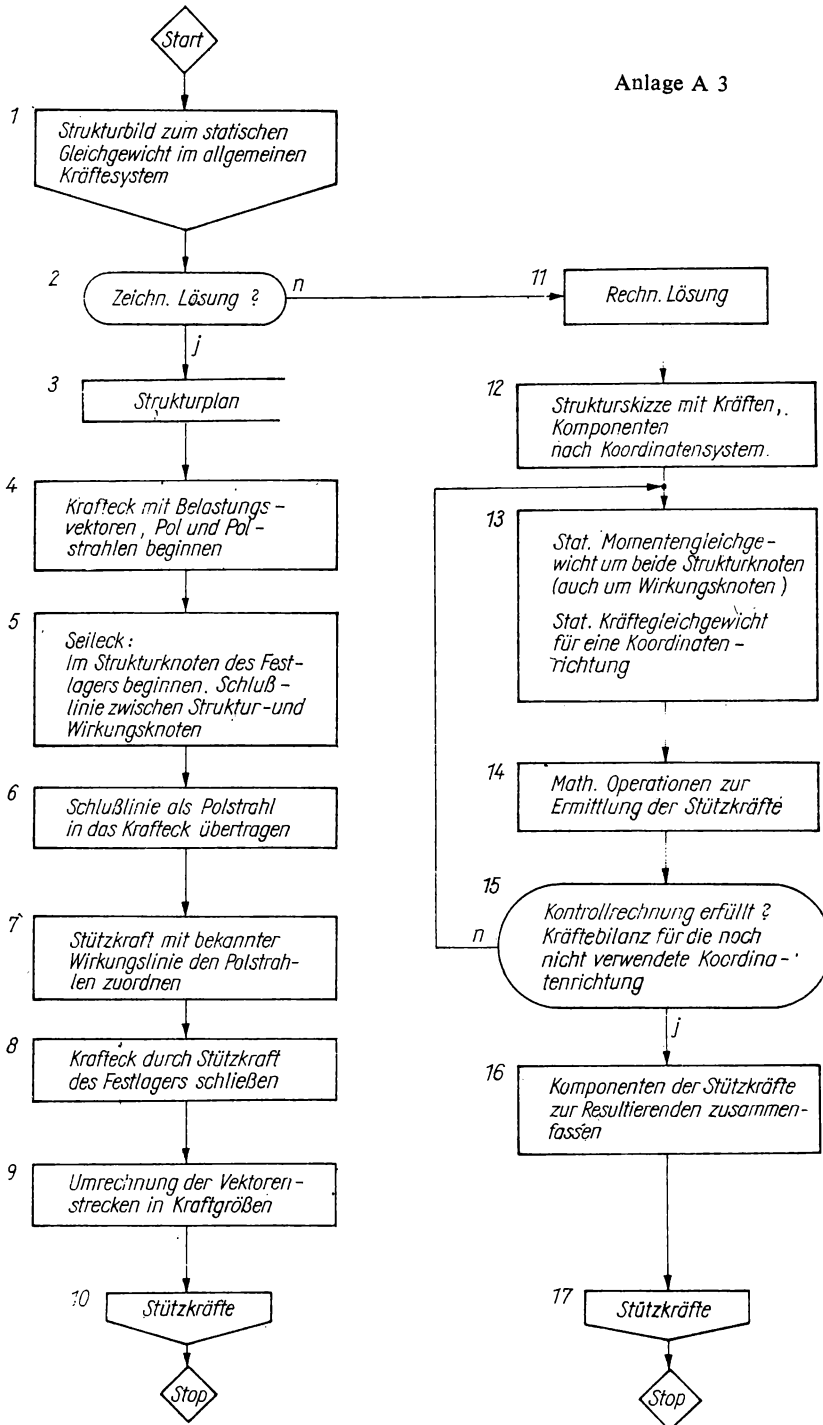
Bild LÜ 53



Anlage A 2



Anlage A 3



Anlage A 4:

Zeichnerische und rechnerische Arbeitsverfahren für Kräfte in der Ebene

Für die Anwendung des jeweiligen Arbeitsverfahrens ist es entscheidend zu wissen, ob sich die Kräfte in einem Punkt schneiden (zentrales Kräftesystem mit Kräftebüschel) oder ob einige Schnittpunkte erst konstruiert werden müssen (allgemeines Kräftesystem mit Kräftegruppe). Dieser Sachverhalt kennzeichnet die Unterschiede der beiden Kräftesysteme.

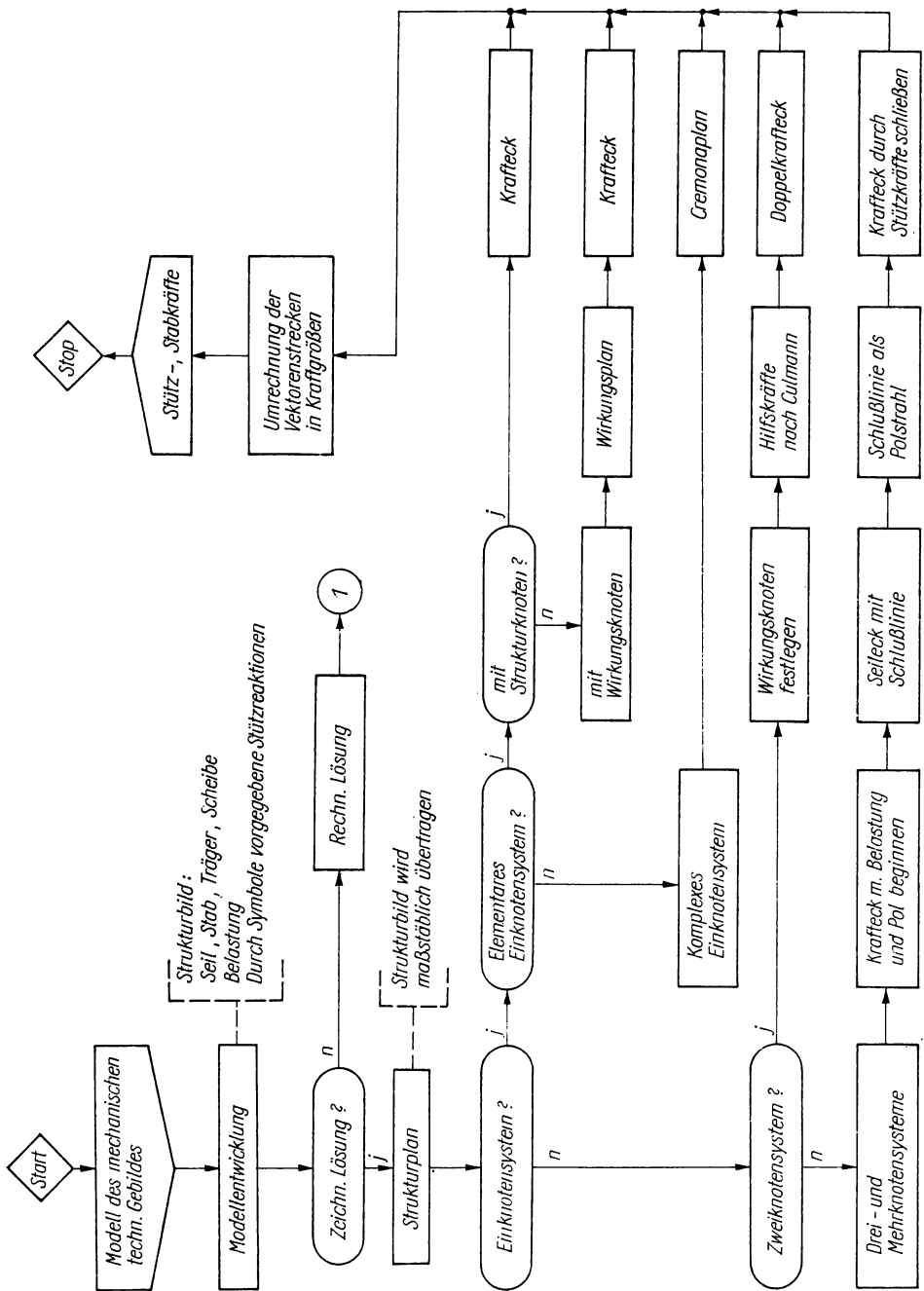
Schnittpunkte der Kraftwirkungslinien wurden mit *Wirkungsknoten* bezeichnet. Er wird zum *Strukturknoten*, wenn dieser Schnittpunkt durch Kräfte und Bauteilabstraktionen geometrisch gegeben ist. Dringt man bis zu den ursächlichen Wirkungsbedingungen vor, dann ist man auch berechtigt, die im technischen Gebilde enthaltenen Kräftesysteme nach ihrer Anzahl Schnittpunkte (Knoten) als Knotensysteme anzusprechen.

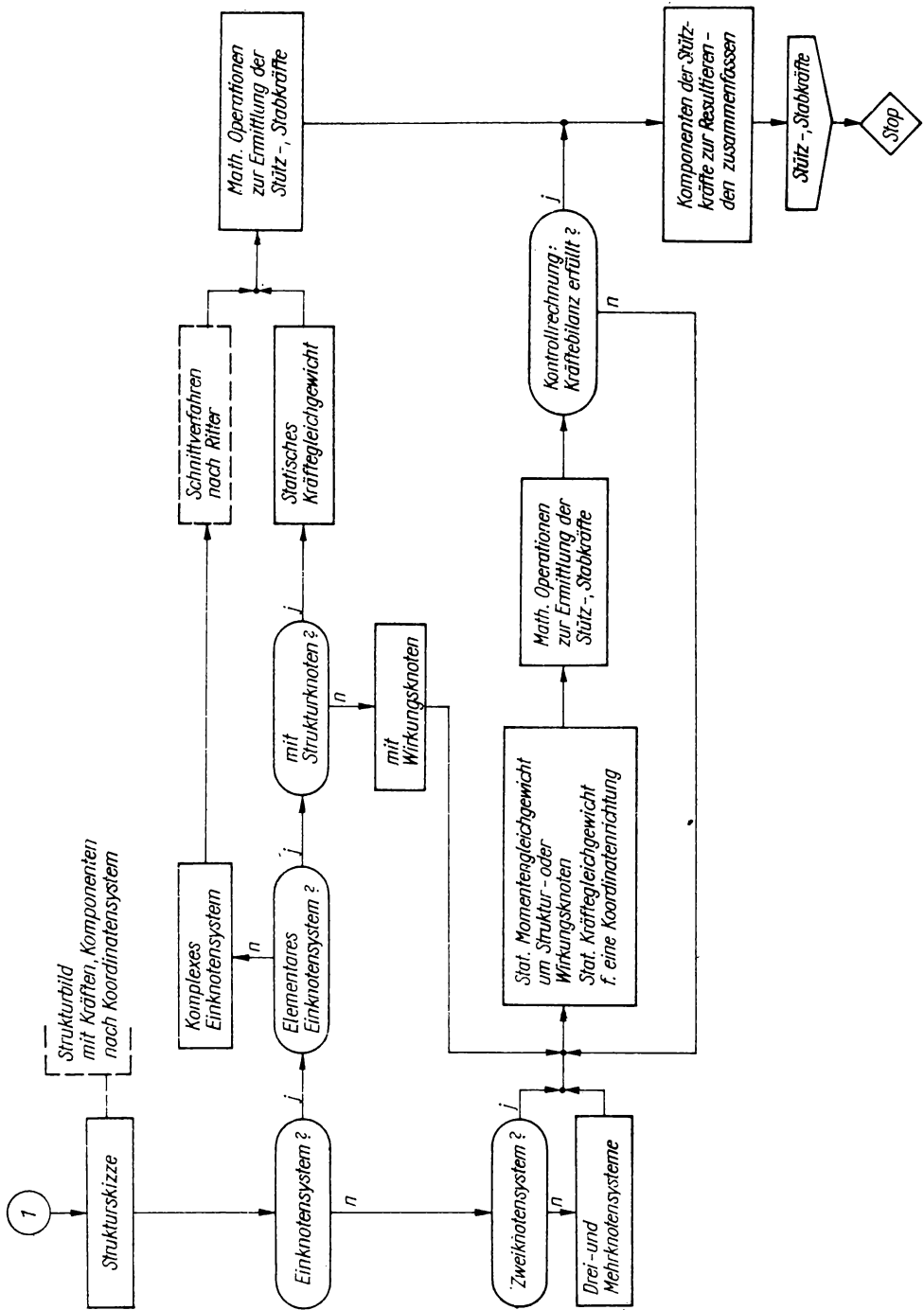
Dadurch entsteht folgende Zuordnung:

Kräftesystem	Knotensystem	Schnittpunkte / (Verfahren)
Zentrales Kräftesystem	Elementares Einknotensystem	<i>Nur ein Schnittpunkt</i> – als <i>Strukturknoten</i> (Krafteck, statisches Kräftegleichgewicht) – als <i>Wirkungsknoten</i> (Krafteck, statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht)
	Komplexes Einknotensystem	Komplexes technisches Gebilde (Stab- oder Fachwerk), bestehend aus Elementen <i>mit je einem Schnittpunkt als Strukturknoten</i> . (<i>Cremona</i> -Verfahren, Schnittverfahren nach <i>Ritter</i> *)
Allgemeines Kräftesystem	Zweiknotensystem	<i>Zwei Schnittpunkte</i> als Wirkungsknoten; einer davon kann Strukturknoten sein. (<i>Culmann</i> -Verfahren mit Doppel-Krafteck, statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht)
	Drei- und Mehrknotensysteme	<i>Drei und mehr Schnittpunkte</i> als Wirkungsknoten; einer davon kann Strukturknoten sein. (Kraft- und Seileckverfahren, statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht)

Auf diese detaillierten Arbeitsgrundlagen bezieht sich die algorithmische Darstellung für alle Arbeitsverfahren der Ebene nach *Anlage A 4*.

* Schnittverfahren nach *Ritter* siehe [3]



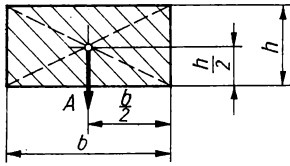


Anlage A5 : Schwerpunktslagen

Flächenschwerpunkt

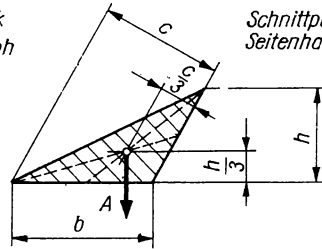
Rechteck
 $A = bh$

Schnittpunkt
der Diagonalen



Dreieck
 $A = \frac{1}{2}bh$

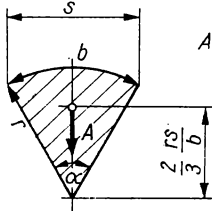
Schnittpunkt der
Seitenhalbierenden



Kreis Sektor

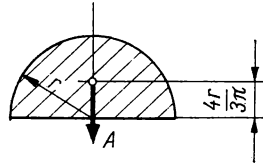
$$A = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi r^2$$

$$A = \frac{1}{2}br$$



Halbkreis

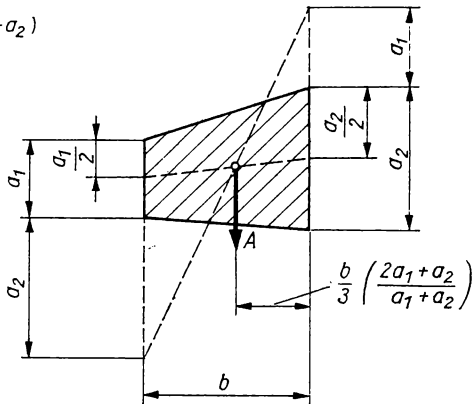
$$A = \frac{\pi}{2} r^2$$



Trapez

$$A = \frac{b}{2} (a_1 + a_2)$$

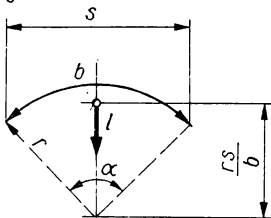
Schnittpunkt der beiden
Schwerlinien



Linienschwerpunkt

Kreisbogen

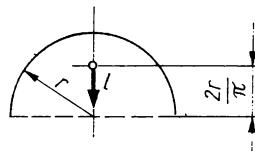
$$l = b = r\alpha \text{ rad}$$



$$b = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} 2\pi r ; \quad s = 2\pi r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Halbkreis

$$l = b = \pi r$$



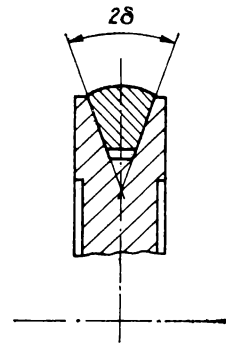
Anlage A 6: Reibungszahlen der Gleitreibung (Richtwerte)

Werkstoffpaarung	Flächenzustand	μ_0	μ
Stahl/Stahl	trocken	0,15 ... 0,3	0,06 ... 0,12
	geschmiert	0,11	0,01
Stahl/Grauguß	trocken	0,18 ... 0,2	0,16 ... 0,2
	geschmiert	0,1	0,01
Stahl/Bronze	trocken	0,18 ... 0,2	0,16 ... 0,2
Grauguß/Grauguß	trocken	0,3	0,15 ... 0,22
Metall/Holz	trocken	0,5 ... 0,6	0,2 ... 0,5
	geschmiert	0,1	0,03 ... 0,08
	geschmiert mit Wasser	–	0,22 ... 0,26
Leder/Holz	trocken	0,47	0,27
Holz/Holz	trocken	0,57 ... 0,65	0,3 ... 0,5
	geschmiert	0,2	0,04 ... 0,16
	geschmiert mit Wasser	0,7	0,25
Leder/Metall	trocken	0,6	0,25 ... 0,3
	geschmiert	0,2	0,12 ... 0,14
	geschmiert mit Wasser	0,6	0,28 ... 0,38
Stahl/Eis	–	0,027	0,014
Gummireifen/Fahrbahn	trocken	0,7	0,3 ... 0,5
	mit Wasser	–	0,15 ... 0,2

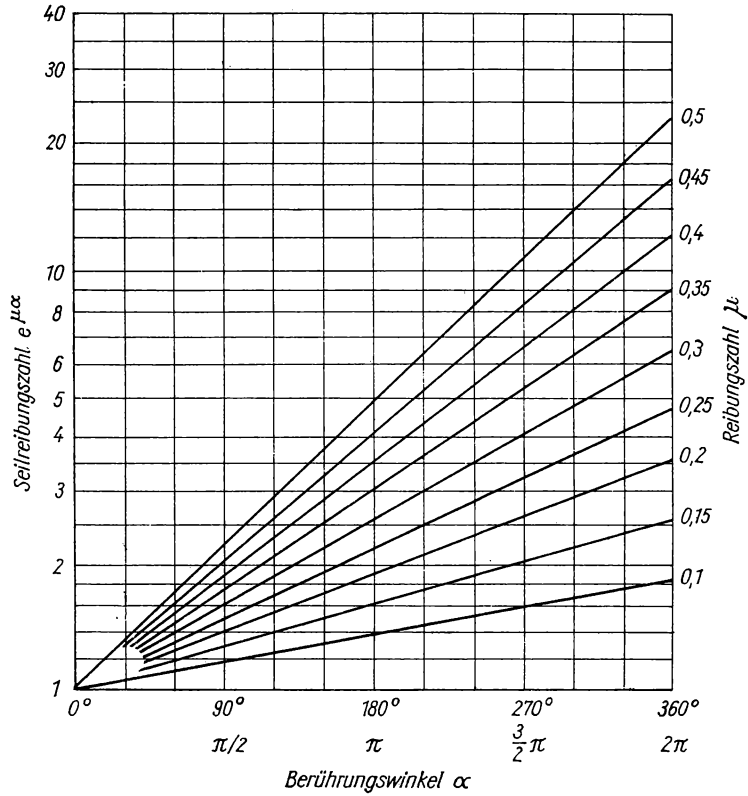
Umrechnung der Reibungszahlen
bei symmetrischer Prismenführung,
Öffnungswinkel 2δ

Beispiel: Keilriemenscheibe

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{\sin \delta}$$



Anlage A 7: Seilreibungsfaktoren



Anlage A 8: Hebelarme der Rollreibung (Richtwerte)

	f in mm
Grauguß/Stahl	0,5
Stahl/Stahl	0,5
Schienenfahrzeuge	
Räder auf trockener Fahrbahn	0,5
Hebezeuge	
je nach Fahrbahnbeschaffenheit	0,5 ... 1,0
Wälzlager	0,005 ... 0,01

- Äußere Kräfte 11
- Aktionskräfte 11
- allgemeines Kräftesystem der Ebene 38, 54
 - - des Raumes 72
- Algorithmus
 - , allgemeines Kräftesystem 138
 - , *Cremona*-Verfahren 137
 - , Lösungsübersicht 140
 - , zentrales Kräftesystem 136
- Axialkraft 35
-
- Bandreibung 90
- Bauteil-abstraktionen 32
- formen, abstrahierte 31
- Belastungen 11, 32
- Berührungspunkte 11
-
- Cremona*-Plan 51
- Culmann*-Verfahren 58
-
- Doppelkrafteck 58
- Dreigelenkbogen 97
- Drei- und Mehrknotensysteme 139
-
- Einknotensystem, elementares 139
- , komplexes 139
-
- Fachwerk 49
- feste Einspannung 37
- Festlager 31, 37
- Flächenschwerpunkt 76
- Formänderungen 31, 34
- Freimachen 27
-
- Gegenkräfte 11
- Gegenwirkungsprinzip 44
- Gelenkkraft 98
-
- Gelenkträger 93, 97
- Gleichgewicht am Körper 43
- Gleichgewichtskraft 16
- Gleitreibung 81
-
- Haftreibung 81
- Hebelarm 64
 - der Rollreibung 92, 144
- Hilfskräfte 25, 55
-
- Innere Kräfte 11
-
- Kippmoment 80
- Körperschwerpunkt 76
- Kontaktstellen 11
- Kontrollrechnung 63
- Kräfte, äußere 11
 - , innere 11
 - bilanz 63
 - büschel, ebenes 38, 53
 - -, räumliches 71
 - gleichgewicht 11, 16, 48
 - gruppe, ebene 38, 54
 - -, räumliche 72
 - maßstab 13, 43
 - paar 22
 - parallelogramm 13, 18
 - system 11
 - , allgemeines 38, 54
 - -, mit Strukturknoten 54
 - -, räumliches 72
 - -, zentrales 38
 - zustand, statischer 27
- Kraft, Zerlegung in Komponenten 15, 19
 - eck 15, 17, 41, 43
 - richtung 12
 - vektoren 12
- Kraft- und Seileckverfahren 56

Längenmaßstab 43
Lagersymbole 36
Lastverteilung 34
Linien Schwerpunkt 76
Loslager 35, 36

Modell, mechanisches 31
--bearbeitung 38
--entwicklungen 29
Momente 22
-, Bezugspunkte für 23
-, statische 24
-, Vorzeichenregel für 23

Pendelstütze 29, 31, 36
Pol 55, 56
--strahlen 56

Radialkraft 35, 74
Reaktionskräfte 11
Reibkräfte nach *Coulomb* 81
Reibung 81
Reibungsfaktoren, Gleitreibung 143
-, Seilreibung 144
--winkel 84
--zahlen, Gleitreibung 81, 143
- -, Seilreibung 144
Resultierende 13
Richtungswinkel 12, 19
Rollreibung 92

Schlußlinie 60
Schneiden 27
Schnittkräfte 11
--reaktionen 11, 12
Schwerpunkts-ermittlungen 75
--lagen 142

Seileck 56
--Verfahren 56
Seilreibung nach *Euler* 90
Seilreibungsfaktoren 90
Stab-folge 50
--kräfte 51
--tafel 50
Stand-moment 80
--sicherheit 80, 86
statisches Gleichgewicht 11
- Kräftegleichgewicht 15, 18
- Moment 22
- Momentengleichgewicht 62
Streckenlast 68
Struktur-bild 31, 35, 38
--knoten 39
--plan 45
--skizze 47
Stütz-reaktionen 11, 32
--symbole 36
Symbole zu den Gleichgewichtsbedingungen 63

Technisches Gebilde 27, 29
Tragwerk 49

Überlagern 27
Umfangskraft 35

Wechselwirkungsgesetz 12, 15
Widerstandskraft bei Gleitreibung 84
Wirkungs-linie der Kräfte 12
--knoten 38
--sinn der Kräfte 12

Zentrales Kräftesystem der Ebene 38, 41
- - des Raumes 71
Zweiknotensystem 139

Lehr- und Arbeitsbuch aus der Reihe
Grundlagen der Technischen Mechanik

Verbindlich für Studenten einiger Grund-
studienrichtungen, wie

Elektroingenieurwesen	Holztechnik
Energietechnik	Landtechnik
Gastechnik	Textiltechnik

sowie für Ingenieurpädagogen,
ferner zur Wiederholung des Lehrstoffes und
zur Vorbereitung auf Prüfungen

Hauptabschnitte

Grundbegriffe
Modellentwicklungen und
Modellbearbeitungen
Zeichnerische und rechnerische Arbeitsver-
fahren für Kräfte in der Ebene oder im Raum

Anwendungen und Vertiefungen:

Schwerpunktsermittlungen

Standsicherheit

Reibung

Hinweis auf Körpersysteme

Anhang mit algorithmischen Zusammenfassun-
gen zur Förderung des Übersichtswissens

Spezielle Markierungen im Text

- Formeln und Merksätze
- Lehrbeispiele
- Übungshinweise

