Studienmaterial für die Erwachsenenbildung

Einführung in die MATHEMATIK

Band I: Arithmetik – Algebra

fv

Studienmaterial für die Erwachsenenbildung

Einführung in die

MATHEMATIK

Band I: Arithmetik und Algebra

2. Auflage

Mit 51 Bildern

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1961

Das Studienmaterial wurde als Vorbereitungsmaterial für das Fachschulstudium nach bereits vorhandenen Lehrbriefen des Fachschulfernstudiums ausgearbeitet von einem Kollektiv von Fachschuldozenten

Redaktionsschluß: 15. 1. 1961

ES 20 C 2 (19 B 2)

Herausgegeben von der Zentralstelle für die Fachschulausbildung
— Lehrmaterial für Grundlagenfächer —
Dresden N 6, Fischhausstraße 7

 · VEB Fachbuchverlag Leipzig
Satz und Druck: VOB Fachbuchdruck Naumburg (Saale) IV/26/14 Auftr.-Nr. 484
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/31/61 des Ministeriums für Kultur der Deutschen Demokratischen Republik, Abteilung Literatur und Buchwesen

Vorwort

Der Aufbau des Sozialismus in unserer Republik erfordert die ständige Qualifizierung unserer Werktätigen. Um einem möglichst großen Kreis von Arbeitern aus Industrie und Landwirtschaft den Besuch einer Fachschule zu ermöglichen, werden seit einigen Jahren Vorbereitungslehrgänge für den Fachschulbesuch durchgeführt. Für diese Lehrgänge haben wir ein Studienmaterial entwickelt, das in seiner methodischen Gestaltung besonders auf das Selbststudium zugeschnitten ist. Im letzten Jahr wurde immer häufiger der Wunsch an uns herangetragen, dieses Studienmaterial auch für andere Formen der Erwachsenenbildung zur Verfügung zu stellen. Um vor allem die Betriebs- und Dorfakademien in ihrer Arbeit zu unterstützen, haben wir uns entschlossen, unser Vorbereitungsmaterial in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie und Deutsch über den Buchhandel allen Interessenten zugänglich zu machen.

Um bei neuen Auflagen dieses Studienmaterials die Erfahrungen der Benutzer auswerten zu können, bitten wir, uns Anregungen und Kritiken zu übermitteln. Wir sind auch gern bereit, Fragen zu beantworten, die sich während des Studiums ergeben.

Wir hoffen, daß wir vielen Werktätigen mit diesem Studienmaterial helfen können, den Weg zu einer höheren Qualifikation zu finden, und wünschen viel Erfolg beim Studium.

Dresden, im Februar 1961

Zentralstelle für die Fachschulausbildung
– Lehrmaterial für Grundlagenfächer –
Dresden N 6, Fischhausstraße 7

Inhaltsverzeichnis

Einige Hinweise zum Studium

Das Studienmaterial „Einführung in die Mathematik" besteht aus den beiden Teilen
Band I: Arithmetik und Algebra
Band II: Geometrie.

Der Stoff des Materials entspricht etwa dem der 8. Klasse der polytechnischen Oberschule. Darüber hinaus werden auch Teile aus dem Lehrstoff der 9. und 10. Klasse behandelt. Es soll aber bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, daß dieses Heft nur eine Einführung in die Elementarmathematik ist und keinerlei Abschluß des Fachgebietes Mathematik darstellt.

Wenn Sie mit dem Studium der Mathematik beginnen, müssen Sie sich immer vor Augen halten, daß die Mathematik neben den übrigen Naturwissenschaften eine unentbehrliche Grundlage für die Technik und damit für die gesamte moderne Produktion ist. Solide Grundkenntnisse in der Mathematik sind somit Voraussetzung für eine erfolgreiche Tätigkeit auf allen Gebieten der Industrie und der Wirtschaft.

Andererseits ist die Mathematik eine Wissenschaft, die ein hohes Abstraktionsvermögen verlangt. Das ist schon bei recht einfachen mathematischen Aufgaben der Fall. Friedrich Engels sagte z. B. über das Zählen: „Zum Zählen gehören nicht nur zählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen ihren übrigen Eigenschaften abzusehen außer ihrer Zahl - ..."[1])

So abstrakt aber die Begriffe in der Mathematik auch sind, so sind sie doch aus der Wirklichkeit abgeleitet. Begriffe wie Zahl, Punkt, Linie, Fläche sind aus Gegenständen abstrahiert, indem von einer Reihe konkreter Eigenschaften dieser Gegenstände abgesehen wird. Bei der Berechnung des Kreisumfanges z. B. ist es völlig gleichgültig, ob der zu berechnende Gegenstand ein Rad oder ein Benzinfaß, ob er aus Holz oder aus Eisen ist. Diese weitgehende Abstraktion ist die Voraussetzung dafür, daß die Mathematik so vielseitig anwendbar ist.

Beim Erlernen der Mathematik kommt es daher darauf an, das nötige Abstraktionsvermögen zu entwickeln, um aus einem praktischen Problem die mathematische Aufgabe formulieren und die mathematische Lösung wieder auf die Praxis übertragen zu können. Es ist falsch, vor der Abstraktion auszuweichen und nur mechanisch Formeln auswendigzulernen. Nur wenn Sie die gelernten mathematischen Formeln und Gesetze in der Praxis auch anwenden können, haben Ihre erworbenen Kenntnisse einen Wert. Denken Sie an die Worte Lenins: „Vom lebendigen Anschauen zum abstrakten Denken und von diesem zur Praxis, das ist der dialektische Weg der Erkenntnis der Wahrheit, der Erkenntnis der objektiven Realität."[2])

Hinsichtlich der Gliederung des Studienmaterials ist für das Selbststudium noch folgendes zu beachten:

Die bei der Abfassung des Studienmaterials gewählte Methode wird Ihnen das Selbststudium erleichtern. Der Lehrstoff ist neben der durch die Systematik des Stoffes

---

[1]) Fr. Engels, „Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft", Dietz Verlag, Berlin 1958, S. 44.

[2]) W. I. Lenin, „Aus dem philosophischen Nachlaß", Dietz Verlag, Berlin 1949, S. 89.

bedingten Gliederung in Kapitel noch in Lektionen (Selbststudieneinheiten) eingeteilt. Der Beginn einer Lektion ist im Text durch eine Type in eckiger Klammer (z. B. **[4]**) gekennzeichnet. Eine Lektion ist für ein Selbststudium von etwa drei Stunden vorgesehen, d. h. für die Zeit, die im Normalfalle als zusammenhängende Studienzeit, etwa an einem Abend, zur Verfügung steht.

Die Lektion enthält:

a) Stoffdarbietung,
b) Zusammenfassung,
c) Übungen.

Durch diese Einteilung soll erreicht werden, daß der Studierende jeweils ein abgeschlossenes Stoffpensum durcharbeitet.

Die *Stoffdarbietung*, der Hauptteil der Lektion, bringt Ihnen den neuen Lehrstoff nahe, den Sie durch*arbeiten* sollen. Ein Durchlesen reicht zum Verständnis des Lehrstoffes ebensowenig wie ein „Auswendiglernen". Zum Verständnis der mathematischen Gesetze und Regeln dienen die Lehrbeispiele, die Sie *selbst durchrechnen* sollen.

Die *Zusammenfassung* bringt Ihnen nochmals die wichtigsten Erkenntnisse der Lektion in gedrängter Form.

Die *Übungen* sind für die Festigung des erlernten Stoffes besonders wichtig. Sie vermitteln Ihnen die notwendigen Fertigkeiten und dienen zur Vertiefung des Stoffes. Legen Sie großen Wert darauf, die Übungsaufgaben *selbständig* zu lösen. Denn nicht das *Kennen* ist wichtig, sondern das *Können!* Nur wenn Sie die zugehörigen Übungsaufgaben lösen können, haben Sie die Rechengesetze verstanden.

Gesonderte *Aufgabenabschnitte* am Schluß eines größeren Stoffgebietes bringen *zusätzliche* Übungen und sind im Text durch die Type **[Ü]** gekennzeichnet. Diese Aufgaben sind zur weiteren Übung zusammengestellt. Wählen Sie dabei besonders die Ihrem Fachgebiet entnommenen Aufgaben aus.

Am Ende des Studienmaterials finden Sie die Antworten und Lösungen zu den Übungsaufgaben. Schlagen Sie die Ergebnisse aber erst dann auf, wenn Sie die Aufgaben gelöst haben. Anderenfalls kommen Sie zu einer falschen Einschätzung Ihrer eigenen Leistungen und können böse Überraschungen erleben, wenn Sie Ihr Wissen und Können unter Beweis stellen sollen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung:
Die Aneignung einer Wissenschaft ist mit dem Bau eines Gebäudes vergleichbar: Je besser Sie das Fundament legen, um so sicherer werden Sie sich in den oberen Stockwerken bewegen können! Gehen Sie deshalb beim Selbststudium immer erst dann im Stoff weiter, wenn Sie den Inhalt der bisher behandelten Kapitel beherrschen! Gerade in der Mathematik müssen Sie Schritt für Schritt vorgehen, denn der Stoff der späteren Kapitel baut immer wieder auf dem Vorangegangenen auf.

1 Geschichtliches. Mathematische Zeichen

1.1 Geschichtliches

Die Entwicklung der Mathematik kann nur als Teil der gesamten gesellschaftlichen Entwicklung betrachtet werden. Eine besondere Rolle spielen hierbei die Beziehungen der Mathematik zur jeweiligen Stufe der Produktion, zur jeweils herrschenden Gesellschaftsordnung sowie zu anderen Wissensgebieten. Diese Abhängigkeit der Mathematik von der gesellschaftlichen Praxis liegt allerdings wegen des abstrakten Charakters der Mathematik nicht immer klar auf der Hand; sie wirkt sich vorwiegend mittelbar über die angewandte Mathematik, die Naturwissenschaften und die Technik aus.

Der hohe Abstraktionsgrad der Mathematik ist jedoch seinerseits ein Ergebnis der gesellschaftlichen Entwicklung, der ständig wachsenden Zahl der Erfahrungen und Kenntnisse, die die Grundlage für jede Verallgemeinerung bilden.

Die angeführten Beziehungen und Entwicklungstendenzen sind bisher noch wenig erforscht, lassen sich aber gerade in den Anfängen der mathematischen Entwicklung in großen Zügen erkennen.

Sie beginnen in vorgeschichtlicher Zeit mit dem allmählichen Herausbilden des Zählens und des Zahlbegriffes. Diese erste aus der Praxis geborene und für ihre Weiterentwicklung notwendige mathematische Verallgemeinerung ging in mehreren Etappen vor sich. So wurde zunächst eine Anzahl von gleichartigen Gegenständen durch Zuordnung der entsprechenden Anzahl von Fingern, Steinen oder eingeschnittenen Kerben bestimmt, ohne daß überhaupt Zahlwörter verwendet wurden; dann erst erfolgte die Verbindung dieser ersten Mengenangaben mit den zu zählenden Gegenständen in Worten, wobei die ersten Zahlwörter zunächst nur „eins" und „zwei" umfaßten und alle größeren Mengen als „viel" bezeichnet wurden.

Der Stand der Produktivkräfte führte zur Entstehung des Privateigentums an Produktionsmitteln und damit zur Klassenspaltung. Es entstand die Sklavenhaltergesellschaft.

In der frühen Periode dieser Gesellschaftsordnung, die der Blütezeit Ägyptens und der anderen Sklavenhalterstaaten Vorderasiens entspricht, wurden die Menschen allerdings schon vor Aufgaben gestellt, die weitreichende mathematische Kenntnisse erforderten.

Die jährlichen Überschwemmungen des Nil, des Euphrat und Tigris verwischten die Feldraine und machten neue Vermessungen nötig. Um möglichst hohe Ernteerträge zu erzielen, war eine genaue Beachtung des Stromanstieges erforderlich. Dazu brauchte man aber genaue Zeitmessungen. So entstand die Astronomie, die ihrerseits ohne gewisse mathematische Kenntnisse nicht auskam. Auch die Errichtung der großen Bauwerke jener Zeit (Pyramiden, Kanal- und Dammbauten) war ohne mathematische Kenntnisse nicht möglich.

Aus diesen Anfängen entstanden die mathematischen Disziplinen, die wir heute als Arithmetik[1]), Algebra[2]) und Geometrie[3]) bezeichnen, wobei zu bemerken ist, daß auch die Geometrie in jener Zeit vorwiegend arithmetisch betrieben wurde, da noch weniger Wert auf die allgemeine geometrische Erkenntnis als vielmehr auf das konkrete zahlenmäßige Ergebnis gelegt wurde.

Alte Quellen berichten uns, daß die Ägypter bereits das Rechnen in den vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen und mit Brüchen, allerdings nur mit Stammbrüchen (Zähler 1), kannten und daß sie einfache Gleichungen mit einer Unbekannten lösten. Dazu kamen Berechnungen von Flächeninhalten und von Volumen.

Die Wechselwirkung zwischen der Entwicklung der Mathematik und den Erfordernissen der Praxis war auch in der frühgriechisch-ionischen Periode besonders im Handel noch vorhanden. Das änderte sich aber entscheidend in der Blütezeit des alten Griechenlands, die gleichzeitig den Höhepunkt der Sklavenhaltergesellschaft darstellte. Die damals herrschende Klasse verschmähte jede produktive Arbeit. Dadurch entfernten sich Wissenschaft und Kunst immer mehr von der gesellschaftlichen Praxis. So wurde die Mathematik auf einen theoretischen Weg gelenkt. Dadurch konnte sie in der Folgezeit, obwohl ursprünglich aus der praktischen Erfahrung entstanden, wenig dazu beitragen, die Praxis zu fördern.

Im Mittelpunkt der mathematischen Arbeiten der Griechen stand die Geometrie. Auf dem Gebiete der Algebra und Arithmetik erscheint die Entwicklung weniger weitreichend, weil die Probleme in den meisten Fällen geometrisch eingekleidet waren. In einem unterscheidet sich die in Griechenland betriebene Mathematik wesentlich von der der vorherigen Epoche: Sie wuchs über die an die konkrete Aufgabenstellung gebundenen Lösungsmethoden hinaus und kam teilweise zu allgemeinen mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Sie begnügte sich nicht mit dem annähernd richtigen Ergebnis, sondern strebte mathematische Exaktheit in der Beweisführung an.

In der alexandrinischen Periode erreichten diese Bestrebungen in den Leistungen einzelner hervorragender Mathematiker, wie Euklid[4]), Archimedes[5]) und Apollonius[6]) ihre Krönung. Euklid systematisierte in seinen „Elementen“ einen beträchtlichen Teil des gesamten geometrischen Wissens seiner Zeit. Dabei bediente er sich einer strengen mathematischen Beweisführung, die erstmalig in der Geschichte der Mathematik war.

Diese wissenschaftlichen Großtaten bildeten jedoch auch den Abschluß, denn der Niedergang der Sklavenhaltergesellschaft hemmte eine Weiterentwicklung auf wissenschaftlichem Gebiet.

---

[1]) griech. *arithmos*, Zahl. Lehre von den verschiedenen Arten der Zahlen und den Rechenoperationen.

[2]) Lehre von den Methoden zur Lösung von Aufgaben mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen (klassische Bedeutung).

[3]) griech. *ge*, Erde; *metron*, Maß; also ist Geometrie soviel wie Erdmessung. Die Lehre von den Eigenschaften und Beziehungen räumlicher Gebilde.

[4]) Euklid, etwa 365 bis 300 v. u. Z.

[5]) Archimedes, etwa 287 bis 212 v. u. Z.

[6]) Apollonius, etwa 262 bis 190 v. u. Z.

Nur ein griechischer Mathematiker konnte nach Jahrhunderten noch einmal an die alten Traditionen anknüpfen: Diophant von Alexandria (zweite Hälfte des 3. Jahrhunderts u. Z.), dessen Werk eine wesentliche Bereicherung der Kenntnisse auf dem Gebiet der Algebra bedeutet. Hervorzuheben ist, daß Diophant in seiner mathematischen Schreibweise von all seinen Vorgängern insofern abweicht, als er für häufig gebrauchte Begriffe Abkürzungen benutzte und damit die Herausbildung der mathematischen Symbole einleitete.
Im Mittelalter hatten die europäischen Völker diesen Kenntnissen wenig hinzuzufügen. Im Gegenteil, die Naturwissenschaften standen im Dienste der Kirche und ihrer Philosophie und wurden mehr und mehr durch ihr Dogma eingeengt. Viele Kenntnisse der Griechen blieben ungenutzt. Anders war es bei den Arabern. Wenn ihre Leistungen auch nicht an die der Griechen heranreichen, so können sie doch das Verdienst für sich in Anspruch nehmen, das mathematische Wissen der Griechen erhalten und teilweise erweitert zu haben. Die orientalischen Mathematiker wandten sich vorwiegend der Arithmetik und der Algebra zu. Das Wort „Algebra" selbst stammt aus dem Arabischen (Aldschebr) und ist der Anfang des Titels eines Werkes des bedeutenden Mathematikers Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 825 u. Z.). Ein besonderes Verdienst der Araber war es, daß sie die indischen Symbole für die Ziffern 1 bis 9 und für die Null übernahmen (heute als arabische Ziffern bezeichnet) und dabei die Positionsschreibweise benutzten. Dadurch ließen sich die rechnerischen Operationen wesentlich einfacher darstellen und ausführen.

In Europa wurden die Naturwissenschaften erst mit der Entwicklung des Frühkapitalismus im Rahmen der geistigen Bewegung der Renaissance aus den Fesseln des kirchlichen Dogmas befreit und entwickelten so – über die Stufe des Wiederbesinnens auf die Erkenntnisse des Altertums – die Anfänge der modernen Naturerkenntnis, die sich auf das Experiment und auf die quantitative Erfassung der Naturvorgänge stützt.

Die Herausbildung der neuen kapitalistischen Produktionsweise und ihr Bedarf an mechanischen Hilfsmitteln wurde im wesentlichen zum Motor für die Weiterentwicklung der Naturwissenschaften und der Mathematik. Dieses Beispiel zeigt wiederum recht deutlich, wie auch auf dem Gebiete der Mathematik die Forschung ihre Impulse aus der gesellschaftlichen Praxis empfängt, wie durch neue wissenschaftliche Erkenntnisse Aufgaben gelöst werden, die von der Entwicklung der Produktion und ihrer Bedürfnisse gestellt werden.

Bald kam man mit den bisherigen empirischen Kenntnissen nicht mehr aus, sondern benötigte eine wissenschaftliche Durchdringung der produktiven Tätigkeit. Das wirkte sich auch auf die Mathematik aus.

Besonders die Entwicklung des Handels forderte vereinfachte Rechenmethoden, da sich durch die Vielzahl von Währungseinheiten ins uferlose gehende Berechnungen notwendig machten.
Diese Forderung führte dazu, daß im 15. und 16. Jahrhundert eine große Anzahl von Rechenbüchern und Rechenschulen entstanden. Dabei haben Rechenmeister wie Adam Riese nicht nur zur Verbreitung, sondern auch zur Erweiterung mathematischer Kenntnisse beigetragen. Viele kleinere Verbesserungen schufen die Voraussetzung für den im folgenden Jahrhundert zu verzeichnenden Aufschwung.

Das weit entwicklungsfähigere schriftliche Rechnen mit arabischen Ziffern setzte sich allmählich gegenüber dem Rechnen mit dem Rechenbrett durch. Mit der Einführung von mathematischen Symbolen und Rechenzeichen wurde ein entscheidender Schritt zur heutigen mathematischen Zeichensprache getan.

Weitere Marksteine auf dem Wege zur modernen Mathematik waren die Erfindung des Rechnens mit Dezimalbrüchen und Logarithmen, die Einführung der Buchstaben als Symbole für die Zahlen durch Vieta[1]) sowie das Auffinden von allgemeinen Lösungsmethoden für Bestimmungsgleichungen 2. und 3. Grades.

Die Ausweitung des kapitalistischen Handels zum Welthandel führte zum regelmäßigen transozeanischen Schiffsverkehr (Entdeckung Amerikas und des Seeweges nach Indien). Damit erlangte auch die Astronomie erneut große praktische Bedeutung. Für die Mathematik bedeutete das einen Aufschwung, der sich in den Abhandlungen des französischen Philosophen und Mathematikers René Descartes[2]) sowie des französischen Mathematikers Pierre de Fermat (1601 bis 1665) widerspiegelt, die die analytische Geometrie begründeten und damit die Grundlage für die Entwicklung der höheren Mathematik schufen.
Mit der Einführung der veränderlichen Größen und des Funktionsbegriffes (besonders durch Descartes) wurde es möglich, allgemeine Bewegungsvorgänge in mathematischen Gleichungen darzustellen. Damit erreicht der Aufschwung der Mathematik einen Höhepunkt: Die Infinitesimalrechung[3]) wurde beinahe gleichzeitig und unabhängig in England von Isaac Newton (1643 bis 1727) und in Deutschland von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) geschaffen.

„Die Mathematik selbst betritt mit der Behandlung der veränderlichen Größen das dialektische Gebiet . . .“[4]) - so charakterisiert Friedrich Engels im Anti-Dühring diese mathematische Großtat, die auch den Naturwissenschaften, besonders der Physik, völlig neue Wege öffnete.

Mit diesem Ausblick auf eine weitere stürmische Entwicklung der Mathematik, an der u. a. der geniale Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) und der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) erheblichen Anteil hatten, wollen wir uns begnügen, da die in den letzten Jahrhunderten erfolgten Entdeckungen weit über den im Studienmaterial behandelten Stoff hinausgehen.

Der in diesem Abschnitt in gedrängter Form dargestellte Entwicklungsweg der Mathematik und die von ihr gewonnenen Erkenntnisse zeigten Ihnen, daß auch diese nicht etwa aus „reinem Denken“ heraus geboren wurden, sondern wie alles menschliche Wissen eine gesellschaftliche Erscheinung sind. Erst die gesellschaftliche Praxis stellt der Wissenschaft die Aufgaben und bestimmt ihren Entwicklungsweg. So wurden auch die Erkenntnisse der Mathematik nicht um ihrer selbst willen gesucht, sondern als Mittel zur Lösung praktischer Aufgaben; sie dienen der Erkennbarkeit und praktischen Veränderung der Welt.
Dabei ist diese gesellschaftliche Praxis zugleich das Kriterium für die Richtigkeit jeglicher Erkenntnis, auch auf dem Gebiete der Mathematik, obgleich diese zuweilen nur mittelbar in der Praxis wirksam wird. Ohne Mathematik jedoch wären heute die wissenschaftliche Forschung oder die komplizierten technologischen Prozesse des Produktionsablaufes gar nicht mehr denkbar.

---

[1]) Vieta, sprich Vi-e-ta, franz. Mathematiker, 1540 bis 1603.

[2]) Descartes (gesprochen: däkart) nannte sich auch latinisiert Cartesius (1596 bis 1650).

[3]) Zusammenfassende Bezeichnung für Differential- und Integralrechnung.

[4]) Fr. Engels, „Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft“, Dietz Verlag, Berlin 1958, S. 148.

Und nirgends gibt es eine Grenze, hinter der die Welt plötzlich unerkennbar wäre. Das beweisen uns erneut die Großtaten der sowjetischen Wissenschaftler, die den Menschen mit ihren Sputniks und Luniks den Weg ins Weltall geöffnet haben. Wenn überhaupt von Grenzen der Wissenschaft gesprochen werden darf, so nur in dem Sinne, daß ihre Weiterentwicklung historisch bedingt ist, abhängig von dem jeweils erreichten Entwicklungsstand der Produktivkräfte, die sich der Mensch in der materiellen Produktion selbst schafft. Auf dieser Grundlage aber dringt der Mensch immer tiefer in die Gesetze der Natur ein und schreitet auch in Zukunft auf dem Wege der Erkenntnis der Welt weiter voran.

1.2 Mathematische Zeichen (nach DIN 1302)

Der gewaltige Fortschritt, der auf dem Gebiet der Naturwissenschaften und der Technik seit dem Mittelalter zu verzeichnen ist, gründet sich nicht zuletzt darauf, daß die gefundenen Gesetze und die aufgestellten Regeln in einer eigens dafür geschaffenen Ausdrucksweise, nämlich mit Hilfe bestimmter Symbole wiedergegeben werden. Diese Zeichen sind weitgehend *genormt*.

Nachstehend finden Sie als Auszug aus Normblatt DIN 1302 die wichtigsten in der Elementarmathematik verwendeten Zeichen.

$+$	plus, und	$\cdots$	und so weiter bis, und so weiter unbegrenzt
$-$	minus, weniger		
	mal	$<$	kleiner als
$—/:$	geteilt durch, zu	$>$	größer als
$^0/_0$	Hundertstel, vom Hundert, Prozent	$\leqq$	kleiner oder gleich, höchstens gleich
$^0/_{00}$	Tausendstel, vom Tausend, Promille	$\geqq$	größer oder gleich, mindestens gleich
$()\ []\ \{\}$	runde, eckige, geschweifte	$\ll$	klein gegen
	Klammer auf, zu	$\gg$	groß gegen
$\mid\ \mid$	Betrag von	$\sphericalangle$	Winkel
$\sum$	Summe	$\triangle$	Dreieck
$\sqrt{}$	Quadratwurzel aus	$\sim$	proportional, ähnlich
$=$	gleich	$\cong$	kongruent
$\neq$	nicht gleich, ungleich	$\parallel$	parallel
$\approx$	angenähert, nahezu gleich (rund, etwa)	$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf
$\triangleq$	entspricht	$\overset{\frown}{AB}$	Bogen AB
∞	unendlich	$\overline{AB}$	Strecke AB
π	Pi (Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser)		

Weiterhin benötigen Sie immer wieder in der Mathematik Buchstaben des griechischen Alphabets, mit dem wir Sie deshalb nachfolgend ebenfalls bekannt machen.

Das griechische Alphabet

$A\ \alpha$	Alpha	$N\ \nu$	Ny
$B\ \beta$	Beta	$\Xi\ \xi$	Xi
$\Gamma\ \gamma$	Gamma	$O\ o$	Omikron
$\Delta\ \delta$	Delta	$\Pi\ \pi$	Pi
$E\ \varepsilon$	Epsilon	$P\ \varrho$	Rho
$Z\ \zeta$	Zeta	$\Sigma\ \sigma$	Sigma
$H\ \eta$	Eta	$T\ \tau$	Tau
$\Theta\ \vartheta$	Theta	$Y\ \upsilon$	Ypsilon
$I\ \iota$	Iota	$\Phi\ \varphi$	Phi
$K\ \varkappa$	Kappa	$X\ \chi$	Chi
$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$\Psi\ \psi$	Psi
$M\ \mu$	My	$\Omega\ \omega$	Omega

Lernen Sie bitte an dieser Stelle weder das DIN-Blatt 1302 noch das griechische Alphabet auswendig! Es genügt, wenn Sie sich die Zeichen und Buchstaben dann einprägen, wenn sie benötigt werden.

[1]

2 Von Zahlen und Größen

2.1 Begriff der Zahl

Der Zahlbegriff hat sich aus dem Abzählen *gleichartiger* Gegenstände entwickelt. Gleichartige Gegenstände können z. B. Maschinen in einer Werkstatt, Röhren in einem Rundfunkgerät, Bücher in einem Schrank oder Personen in einem Raum sein.
Werden z. B. die in einem Raum anwesenden Männer, Frauen und Kinder gezählt und wird von Alter, Geschlecht und anderen unterscheidenden Merkmalen abgesehen, so setzt man zu der beim Abzählen erhaltenen Anzahl das Wort „Personen" oder „Anwesende", z. B. 28 Personen. Damit wird angegeben, was gezählt wurde, und gleichzeitig zum Ausdruck gebracht, daß die gezählten Objekte als gleichartig angesehen werden.
Hinter die Anzahl der gezählten Gegenstände wird eine „Benennung" gesetzt, im Beispiel „Personen". Sieht man davon ab, *was* gezählt wurde, bleibt also die „Benennung" weg, so erhält man eine *Zahl.* Die beim Zählen verwendeten Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20, \ldots, 165, \ldots$$

heißen **natürliche Zahlen.**

Die natürlichen Zahlen können durch Punkte auf einem Strahl veranschaulicht werden, indem man vom Anfangspunkt A eines Strahls aus auf diesem wiederholt eine Strecke von beliebig gewählter, gleicher Länge abträgt und die aufeinanderfolgenden Punkte der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, . . . bezeichnet (Bild 1).

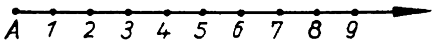


Bild 1

2.2 Das dekadische Zahlensystem

Obwohl es unbegrenzt viele natürliche Zahlen gibt, werden alle diese Zahlen mit Hilfe von nur zehn Symbolen, nämlich den Ziffern 1 bis 9 (den sogenannten *arabischen Ziffern*) und der Null dargestellt.

Beispiele:

Die Zahl Siebenunddreißig wird durch die Ziffern 3 und 7 dargestellt: 37.
Die Zahl Neun wird durch die Ziffer 9 dargestellt: 9.
Die Zahl Zweihundertsechs wird durch die Ziffern 2 und 6 und die Null dargestellt: 206.

Diese Schreibweise der Zahlen beruht auf der Verwendung eines *Stellenwertsystems*, und zwar des von den Indern erfundenen *Zehner*systems; daher wird es *dekadisches*[1]) *Zahlensystem* oder *Dezimalsystem*[2]) genannt. Jeder Ziffer ist durch die Stelle, die sie innerhalb der Zahl einnimmt, ein bestimmter Wert, ihr *Stellenwert*, zugeordnet. Dabei ist der Stellenwert der weiter links stehenden Ziffer immer das Zehnfache der rechts von ihr stehenden Ziffer.
Die Bildung dieses Systems war jedoch nur durch das Einführen eines Lückenzeichens – der Null[3]) – möglich. In Zahlen wie 206, 700 oder 0,03 steht die 0 als Zeichen für den fehlenden Stellenwert.
Jeder Ziffer ist also durch die Stelle, an der sie steht, ein bestimmter Wert zugeordnet. Für die Zahl 5406 gilt

5000 + 400 + 0 + 6
5 Tausender (T) + 4 Hunderter (H) + 0 (keine) Zehner (Z) + 6 Einer (E).

Wäre nicht jeder Ziffer ein Stellenwert zugeschrieben, so müßte man schreiben: 5T 4H 0Z 6E.

2.3 Der Begriff Größe

Um Erscheinungen und Vorgänge in Natur und Gesellschaft beschreiben zu können, bedient man sich verschiedener Begriffe wie Länge, Zeit, Geschwindigkeit usw. Will man diese Erscheinungen und Vorgänge untersuchen und die ihnen zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten erforschen, so sind Messungen erforderlich. Das Messen besteht dabei in einem Vergleich mit einer zuvor festgelegten Einheit, der sogenannten *Maßeinheit*.
Als Maßeinheit für die Länge dient das Meter; z. B. bedeutet die Angabe 3 m für die Länge eines Stabes, daß der Stab 3mal so lang ist wie die Maßeinheit Meter (1 m).

---

[1]) griech. *deka*, zehn.
[2]) lat. *decem*, zehn.
[3]) lat. *nulla figura*, keine Figur, d. h. kein eigentliches Zahlzeichen.

Beispiele:

Länge	3 m
Zeit	25 s
Geschwindigkeit	0,5 km/h

An den Beispielen erkennen Sie, daß das Ergebnis jeder Messung aus einer Maßzah und einer Maßeinheit besteht. Diesen Ausdruck bezeichnet man als **Größe**[1]).

Merken Sie sich also:

Größe = Zahlenwert mal Einheit.

2.4 Allgemeine Zahlsymbole

Wenn Sie den Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmen wollen, multiplizieren Sie bekanntlich die Länge des Rechtecks mit seiner Breite.
Das gilt für alle Rechtecke, ganz gleich, welche Gestalt oder welche Größe sie haben:

Länge	Breite	Flächeninhalt
3 cm	4 cm	$3\text{ cm}\cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$
12 cm	3,2 cm	$12\text{ cm}\cdot 3{,}2\text{ cm} = 38{,}4\text{ cm}^2$
2,3 m	4,8 m	$2{,}3\text{ m}\cdot 4{,}8\text{ m} = 11{,}04\text{ m}^2$

Jede Rechenaufgabe in der letzten Spalte (und auch jedes Ergebnis) gilt nur für dasjenige Rechteck, für das die Längen- und Breitenmaße in den ersten beiden Spalten angegeben sind. Dazu haben wir, wie wir es nicht anders gewöhnt sind, Ziffern als Symbole für die Niederschrift der jeweiligen Zahlenwerte angegeben. Natürlich sind die Zahlenwerte bei jeder Aufgabe andere.
Alle Rechenaufgaben in der dritten Spalte haben aber gemeinsam, daß wir stets die Länge mit der zugehörigen Breite multipliziert haben.
Sie können diese Tatsache auch mit Hilfe des Gleichheitszeichens formulieren:

Flächeninhalt des Rechtecks = Länge des Rechtecks mal Breite des Rechtecks.

Das ist eine allgemeingültige Feststellung, die für beliebig viele Einzelbeispiele mit verschiedenen Zahlenwerten gilt. Wir können aber noch weiter gehen. Wir können, um ein allgemein gültiges Rechengesetz schriftlich festzulegen, allgemeine Symbole benutzen, die nicht mehr bestimmte einzelne Größen darstellen, sondern die *jede beliebige Größe* bedeuten können.
Diese Symbole werden durch dieselben Schriftzeichen wiedergegeben, durch die wir in der Sprache Laute zu notieren pflegen:

$$a, b, c, \ldots F, G, \ldots x, y, z, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi, \psi, \ldots$$

Verwenden wir nun für unser Beispiel allgemeine Symbole, bezeichnen wir also die Fläche mit F, die Länge mit a und die Breite mit b, so können wir die Aussage, die für *alle* Rechtecke gilt, wie folgt formulieren:

$$F = a \cdot b$$

---

[1]) Anstelle Größe wird oft noch der Ausdruck *benannte Zahl* verwendet. Dementsprechend wird für Zahl der Ausdruck *unbenannte Zahl* gebraucht.

Die allgemeinen Symbole bedeuten in diesem Beispiel und in den meisten Aufgaben der Praxis Größen. (Denn beispielsweise ist a eine Länge und wird in Metern gemessen.) Dabei sind nach DIN 1304[1]) für ganz bestimmte Größen ganz bestimmte Symbole festgelegt. Es steht aber nichts entgegen, in der Arithmetik und Algebra die gleichen Symbole zu verwenden, um die Rechengesetze in allgemeiner Form aufstellen zu können.
Arithmetik und Algebra sehen in ihren Betrachtungen meist von den Eigenschaften der Naturerscheinungen ab und betrachten nur die Zahlen. Die Symbole bedeuten dabei ganz beliebige (ganze oder gebrochene) Zahlen. Deshalb nennt man diese Symbole **allgemeine Zahlsymbole.**
Die allgemeinen Zahlsymbole dürfen wir also in der Mathematik nicht Buchstaben nennen, denn es sind *Symbole für beliebige Zahlen oder beliebige Größen.*

2.5 Die vier Grundrechenarten

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden Rechengesetze der vier Grundrechenarten mit Hilfe von allgemeinen Zahlsymbolen formuliert werden. Da die allgemeinen Zahlsymbole stellvertretend für bestimmte Zahlen stehen, ist das ohne weiteres möglich.

2.51 Addition

Die Addition ist die erste Grundrechenart.

Beispiel:

$$3 + 4 = 7 \qquad a + b = c$$

Die Symbole a und b (3 und 4) heißen *Summanden,* der Ausdruck $a + b$ $(3 + 4)$ heißt *Summe,* das Symbol c (7) heißt *Wert der Summe.* Meist wird aber auch c kurz als Summe bezeichnet, so daß also unter Summe sowohl der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck, die Additionsaufgabe, als auch das Ergebnis zu verstehen ist. Das wichtigste Gesetz der Addition ist das kommutative[2]) Gesetz:

Der Wert einer Summe ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.

Mit anderen Worten:

Summanden sind vertauschbar.

$$3 + 4 = 4 + 3 \qquad a + b = b + a$$

Von diesem Gesetz machen Sie oft bei der Addition mehrerer Zahlen Gebrauch. Sie berechnen z. B. zweckmäßig

$$18 + 47 + 32 = 18 + 32 + 47 = 50 + 47 = 97,$$

weil es einfacher ist, zunächst 18 und 32 und dann erst zur Summe dieser beiden Zahlen 47 zu addieren.

---

[1]) DIN 1304, Ausgabe Februar 1955, wurde zum Standard erklärt.
[2]) lat. *commutare,* austauschen.

2.52 Subtraktion

Die Subtraktion ist die zweite Grundrechenart. Sie ist die Umkehrung der Addition und steht mit ihr auf gleicher Stufe.

Beispiel: Aus $5 + 3 = 8$ folgt $8 - 3 = 5$.
Aus $a + b = c$ folgt $c - b = a$.

Das Symbol c (8) heißt *Minuend*, das Symbol b (3) heißt *Subtrahend*, der Ausdruck $c - b$ $(8 - 3)$ heißt *Differenz*. Das Symbol a (5) heißt *Wert der Differenz* oder ebenfalls kürzer Differenz. (Siehe Erklärung der Summe 2.51.) Minuend und Subtrahend dürfen *nicht* vertauscht werden.

Beispiel: $6 - 2 = 4$ $\quad 2 - 6 \neq 4$

Die Probe auf die Richtigkeit einer Subtraktion besteht in einer Addition und wird durchgeführt, indem man zum Ergebnis der Subtraktion, also der Differenz, den Subtrahenden addiert. Als Ergebnis, d. h. als Summe, erhält man den Minuenden.

Beispiel: Aus $8 - 3 = 5$ folgt $5 + 3 = 8$.
Aus $c - b = a$ folgt $a + b = c$.

Da Addition und Subtraktion entgegengesetzte Rechenarten sind, heben sich die Addition und die Subtraktion der gleichen Zahl auf.

Beispiel: $14 + 2 - 2 = 14$
$a + b - b = a$

Von der Tatsache, daß Addition und Subtraktion entgegengesetzte Rechenarten sind, macht man beim Zahlenrechnen Gebrauch. Es werden nämlich Subtraktionsaufgaben im allgemeinen als Additionsaufgaben gerechnet. (Siehe Abschnitt 3.32, Ergänzungsverfahren bei der Subtraktion.)

Addition und Subtraktion können auch in einer Aufgabe nebeneinander vorkommen. Solche Ausdrücke werden als „gemischte Ausdrücke" bezeichnet.

Beispiel: $3 - 1 + 2 + 7 - 5 = 6$
$a - b + c + d - e = f$

2.53 Multiplikation

Die dritte Grundrechenart, die Multiplikation, ist eine verkürzte Addition gleicher Summanden.

Beispiel: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$ $\quad a + a + a + a = 4 \cdot a = 4a$

Man bezeichnet deshalb die Multiplikation als eine Rechenart höherer, nämlich zweiter Stufe.

Beispiel: $3 \cdot 4 = 12$ $\quad a \cdot b = c$

Die Symbole a (3) und b (4) heißen *Faktoren*, der Ausdruck $a \cdot b$ $(3 \cdot 4)$ heißt *Produkt*, das Symbol c (12) heißt *Wert des Produktes* oder ebenfalls kurz Produkt. Es gilt bei der Multiplikation das kommutative Gesetz:

Der Wert eines Produkts ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Mit anderen Worten:

Faktoren sind vertauschbar.

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Das kommutative Gesetz wird besonders bei Produkten aus mehreren Faktoren angewandt.

Beispiel:

Statt $3 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 25$ rechnen Sie $(3 \cdot 21) \cdot (4 \cdot 25) = 63 \cdot 100 = 6300$.

Beachten Sie nochmals die am Anfang des Abschnittes stehenden Beispiele. Wie Sie sehen, können Sie eine Summe allgemeiner Zahlensymbole „zusammenfassen". Der Summenausdruck $(a + a + a + a)$ erscheint dabei als *Produkt* $(4 \cdot a)$. Die vor dem allgemeinen Zahlsymbol stehende Zahl, die *Vorzahl* (der *Koeffizient*), gibt an, wie oft das Zahlsymbol als Summand zu setzen ist. Das Multiplikationszeichen in dem Produkt Vorzahl mal allgemeines Zahlsymbol kann weggelassen werden, d. h., statt $4 \cdot a$ kann kurz $4a$ geschrieben werden.

(Zwischen bestimmten Zahlen darf der Malpunkt auf keinen Fall wegbleiben; denn das Produkt $4 \cdot 3$ hat einen ganz anderen Wert als 43.)

Vereinbarungsgemäß wird die Vorzahl 1 meist nicht mitgeschrieben. Man setzt also $1 \cdot a = 1a = a$.

Anhand der nachfolgenden Beispiele zur Addition und Subtraktion von allgemeinen Zahlsymbolen sollen Sie sich mit dem sehr wichtigen Satz vertraut machen:

Nur gleiche Zahlsymbole bzw. gleichartige Größen können durch Addition oder Subtraktion zusammengefaßt werden.

Beispiele:

$$a + a = 2a \qquad 2b + 3b = b + b + b + b + b = 5b$$
$$4c - 3c = c$$
$$7a + 2b + 3a - b = 7a + 3a + 2b - b = 10a + b$$
$$6a + x - c + 3x = 6a - c + 4x$$

Treten in einer Aufgabe mehrere allgemeine Zahlsymbole auf, so ist es üblich, diese im Ergebnis alphabetisch zu ordnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 5a - b + 7c + 3b - a + 8c - 3a + 9b \\ = {} & 5a - a - 3a - b + 3b + 9b + 7c + 8c \\ = {} & a + 11b + 15c \end{aligned}$$

Treten in einem Produkt mehrere bestimmte Zahlen und mehrere allgemeine Zahlsymbole auf, so können wir das Produkt auf Grund des Vertauschungsgesetzes so ordnen, daß wir das Produkt der Zahlen voranstellen und die allgemeinen Zahlsymbole in alphabetischer Folge nachstellen.

Beispiele:

$$3a \cdot 4b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$$
$$6y \cdot 3x \cdot z = 6 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot z = 18\,xyz$$

2.54 Potenzschreibweise

Ebenso, wie Sie die Multiplikation als verkürzte Addition kennengelernt haben, gibt es für die Multiplikation mehrerer gleicher Faktoren eine verkürzte Schreibweise, die Potenzschreibweise[1]).

Beispiele:

$$3 \cdot 3 = 3^2 \qquad a \cdot a = a^2$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \qquad b \cdot b \cdot b = b^3$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 \qquad c \cdot c \cdot c \cdot c = c^4$$

2^3, 3^2, 5^4, a^2, b^3, c^4 sind *Potenzen*. Man sagt: 2^3 ist die dritte Potenz von 2 und liest diese „2 hoch 3". Sie erkennen: In einer Potenz gibt die *Hochzahl* (der *Exponent*) an, wie oft die *Grundzahl* (die *Basis*) als Faktor zu setzen ist.

Beispiel: $3a \cdot 5b \cdot a \cdot 5a = 3 \cdot 5^2 \cdot a^3b = 75a^3b$

Aus bestimmten Gründen wurde festgelegt, daß jede Zahl die 1. Potenz von sich selbst ist. Es ist also z. B.

$$5 = 5^1 \qquad a = a^1$$
$$31 = 31^1 \qquad x = x^1$$

Eine besondere Bedeutung kommt in unserem dekadischen Zahlensystem den Potenzen mit der Grundzahl 10 zu. Es ist

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$; $\quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$;
$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$.

Sie erkennen: Die 2., 3., 4., ... Potenz der Zahl 10 ergibt eine Zahl, die aus einer 1 mit 2, 3, 4, ... angehängten Nullen besteht.
Auf diese Weise lassen sich sehr große und schwer zu übersehende Zahlen kurz und übersichtlich schreiben.

Beispiel:
Eine Einheit, um Strecken im Weltall zu messen, ist das Lichtjahr. (Das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt.) Wollen Sie diese Einheit in Metern ausdrücken, so würde das folgendermaßen aussehen:
1 Lj = 9460000000000000 m.
Dafür kann man unter Verwendung der Potenzen schreiben:
1 Lj = $9{,}460 \cdot 10^{15}$ m.

2.55 Division

Die Division ist die vierte Grundrechenart. Sie ist die Umkehrung der Multiplikation und steht mit ihr auf gleicher Stufe.

$$\text{Aus } 3 \cdot 4 = 12 \text{ folgt } 12:4 = 3.$$
$$\text{Aus } a \cdot b = c \text{ folgt } c:b = a.$$

Das Symbol c (12) heißt *Dividend*, das Symbol b (4) heißt *Divisor*, der Ausdruck $c:b$ (12:4) heißt *Quotient*, das Symbol a (3) heißt *Wert des Quotienten* oder kurz Quotient.

---

[1]) Das Potenzieren, eine Rechenart dritter Stufe, geht über den Rahmen dieses Studienmaterials hinaus und wird deshalb nicht behandelt.

Eine Divisionsaufgabe kann auch in Bruchform geschrieben werden:

$$\frac{c}{b} = a$$

c heißt in diesem Falle *Zähler*, b heißt *Nenner*, $\frac{c}{b}$ heißt *Bruch*, a heißt *Wert des Bruches*. Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) dürfen nicht vertauscht werden.

Beispiel: $6:3 = 2$ $3:6 \neq 2$

Die Probe einer durchgeführten Division besteht in einer Multiplikation.

Beispiel: $12:4 = 3$ Probe: $3 \cdot 4 = 12$

$c:b = a$ Probe: $a \cdot b = c$

Da Multiplikation und Division entgegengesetzte Rechenarten sind, heben sie einander auf. Es ist z. B.

$$(3 \cdot 4):4 = 3 \qquad (a \cdot b):b = a$$

$$(3:4)\cdot 4 = 3 \qquad (a:b) \cdot b = a$$

Aus dem gleichen Grunde ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge Multiplikation und Division angewendet werden.
Man wird z. B. eine Aufgabe wie $(63 \cdot 13):21$ umstellen und

$$(63:21) \cdot 13 = 3 \cdot 13 = 39 \quad \text{rechnen.}$$

3 Das Rechnen mit Brüchen

3.1 Grundlagen

3.11 Teilbarkeit

Für die Bruchrechnung sind Kenntnisse über die Teilbarkeit der ganzen Zahlen notwendig. Deshalb sollen von den Eigenschaften der ganzen Zahlen nur die mit der Teilbarkeit zusammenhängenden herausgegriffen werden.
Die Zahl 14 z. B. kann als Produkt $2 \cdot 7$ dargestellt werden; sie ist durch 2 und 7 (ohne Rest) teilbar. 2 und 7 sind die *Teiler*. Die Zahl 14 ist selbstverständlich auch durch 1 und 14 teilbar. Diese sogenannten *unechten Teiler*, d. h. die vorgegebene Zahl selbst und die 1, sollen aber aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen sein. Unter Teiler wollen wir nur *echte Teiler*, wie z. B. 2 und 7 bei der Zahl 14, verstehen.
Untersuchen Sie die natürlichen Zahlen daraufhin, ob sie als Produkt von Teilern darstellbar sind, so finden Sie, daß die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, . . .

keine echten Teiler besitzen; diese Zahlen sind nur durch 1 und durch sich selbst teilbar. Sie heißen deshalb **Primzahlen**.

Eine Zahl, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, heißt Primzahl.

Die Zahlen mit echten Teilern, wie z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ..., heißen **zusammengesetzte Zahlen.** So sind z. B. alle geraden Zahlen außer der Zahl 2 zusammengesetzte Zahlen; denn sie alle haben die Zahl 2 als Teiler.

Jede zusammengesetzte Zahl kann in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden.
In unserem Beispiel, der Zahl 14, können wir schreiben: $14 = 2 \cdot 7$. Das Produkt $2 \cdot 7$ heißt das *Primzahlenprodukt* der Zahl 14, seine einzelnen Faktoren 2 und 7 heißen die **Primfaktoren** von 14.

Bei der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren beginnt man mit der Untersuchung, ob die Zahl durch 2 teilbar ist, dann durch 3, 5, 7 usw., man geht also die Reihe der Primzahlen durch.

Hierbei benutzt man folgende Regeln:

Eine Zahl ist teilbar

- durch 2, wenn sie eine gerade Zahl ist;
- durch 3 (9), wenn ihre Quersumme[1]) durch 3 (9) teilbar ist;
- durch 4 (8), wenn die aus den beiden (drei) letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 (8) teilbar ist;
- durch 5, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist;
- durch 6 (12), wenn sie durch 2 *und* 3 (3 *und* 4) teilbar ist;
- durch 10, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.

Lehrbeispiel 1

Zerlegen Sie die Zahl 462 *in Primfaktoren!*

Lösung:

Die gegebene Zahl 462 ist eine gerade Zahl, also ist sie durch 2 teilbar:

$$462 = 2 \cdot 231$$

Die Quersumme von 231 ist 6, also ist 231 durch 3 teilbar:

$$231 = 3 \cdot 77$$
$$77 = 7 \cdot 11$$
$$\underline{\underline{462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}}$$

Lehrbeispiel 2

Zerlegen Sie die Zahl 11160 *in Primfaktoren!*

Lösung:

$$\begin{aligned} 11160 &= 2 \cdot 5580 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2790 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1395 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 465 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 155 \\ \underline{\underline{11160}} &\underline{\underline{= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31}} \end{aligned}$$

[1]) Unter der Quersumme einer Zahl versteht man die Summe der Ziffern, aus denen die Zahl zusammengesetzt ist. Die Quersumme von 477 z. B. ist $4 + 7 + 7 = 18$. 18 ist durch 3 teilbar, also ist auch 477 durch 3 teilbar.

Das Ergebnis des Lehrbeispiels 2 kann noch kürzer gefaßt werden, wenn Sie die Produkte gleicher Primfaktoren als Potenzen schreiben:

$$11160 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31$$

3.12 Größter gemeinsamer Teiler

Sind zwei oder mehrere zusammengesetzte Zahlen gegeben, so können sie gemeinsame Teiler besitzen. Man überprüft das, indem man diese Zahlen in Primfaktoren zerlegt.
Zum Beispiel besitzen die Zahlen

$$14 = 2 \cdot 7$$

und

$$15 = 3 \cdot 5$$

keine gemeinsamen Teiler; sie heißen deshalb *teilerfremde Zahlen.*

Die Zahlen $30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
und $42 = 2 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
dagegen besitzen die *gemeinsamen Teiler* 2, 3 und $2 \cdot 3 = 6$, wobei 6 der größte gemeinsame Teiler ist.

Betrachten Sie zwei andere Zahlen:

$$\begin{aligned} 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 252 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Hier liegen die gemeinsamen Teiler 2, 3, $2 \cdot 3 = 6$ und $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ vor. Dabei ist 12 der **größte gemeinsame Teiler** (abgekürzt **g.g.T.**) dieser beiden Zahlen. Er ist das Produkt der in diesen Zahlen gemeinsam enthaltenen Primfaktoren 2^2 und 3, also $2^2 \cdot 3 = 12$.

Allgemein gilt:

Der größte gemeinsame Teiler mehrerer Zahlen ist das Produkt der in diesen Zahlen gemeinsam enthaltenen Primfaktoren.

Man bestimmt den größten gemeinsamen Teiler mehrerer Zahlen, indem man diese Zahlen in Primfaktoren zerlegt und die in diesen Zahlen *gemeinsam* enthaltenen Primfaktoren miteinander multipliziert.

Bei der Bestimmung des g.g.T. benutzt man zweckmäßig eine übersichtliche Form, die Ihnen in den folgenden Lehrbeispielen gezeigt wird.

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie den g.g.T. der Zahlen 60, 108, 144, 252, 396*!*

Lösung:

$$\begin{array}{rllllll}
60 = & 2 \cdot 2 & & \cdot 3 & \cdot 5 & & \\
108 = & 2 \cdot 2 & & \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 & & & \\
144 = & 2 \cdot 2 & \cdot 2 \cdot 2 & \cdot 3 \cdot 3 & & & \\
252 = & 2 \cdot 2 & & \cdot 3 \cdot 3 & & \cdot 7 & \\
396 = & 2 \cdot 2 & & \cdot 3 \cdot 3 & & & \cdot 11 \\
\hline
\text{g.g.T.:} & 2 \cdot 2 & & \cdot 3 & & & = \underline{\underline{12}}
\end{array}$$

Lehrbeispiel 4

Der g.g.T. der Zahlen 192, 360 *und* 864 *ist zu bestimmen!*

Lösung:

$$\begin{array}{rl}
192 = & 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 \\
360 = & 2\cdot 2\cdot 2 \qquad\qquad \cdot 3\cdot 3 \quad \cdot 5 \\
864 = & 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \quad \cdot 3\cdot 3\cdot 3 \\
\hline
\text{g.g.T.:} & 2\cdot 2\cdot 2 \qquad\qquad \cdot 3 \qquad\qquad = \underline{\underline{24}}
\end{array}$$

3.13 Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Früher lernten Sie mit dem „kleinen Einmaleins“ die Folgen von Zahlen kennen, die ein Vielfaches einer gegebenen Zahl waren. Bilden Sie z. B. die Vielfachen von 2 bzw. 3, so erhalten Sie:

$$\begin{array}{r|l}
2 & 2;\ 4;\ \mathbf{6};\ 8;\ 10;\ \mathbf{12};\ 14;\ 16;\ \mathbf{18};\ 20;\ . \\
3 & 3;\ \mathbf{6};\ 9;\ \mathbf{12};\ 15;\ \mathbf{18};\ 21;\ \ldots
\end{array}$$

Die durch Fettdruck gekennzeichneten Zahlen 6, 12, 18, ... kommen in beiden Zahlenfolgen vor, sie sind also *gemeinsame Vielfache* von 2 und 3. Die Zahl 6 ist dabei die *kleinste* dieser in beiden Folgen vorkommenden Zahlen und heißt deshalb das **kleinste gemeinsame Vielfache** (abgekürzt **k.g.V.**) von 2 und 3.
Bestimmen Sie auf die oben angegebene Art das k.g.V. von 3, 4 und 6! Sie finden als Ergebnis 12.

Die Beispiele zeigen:

Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, in der alle diese Zahlen als Faktoren enthalten sind.

Wie bestimmt man nun auf die einfachste Weise das k.g.V. gegebener Zahlen?
Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) das k.g.V. von *Primzahlen* und *teilerfremden Zahlen.* Die bisher angeführten Beispiele zeigen:

   Das k.g.V. von 2 und 3 ist 6,
   das k.g.V. von 3 und 4 ist 12.

   Wählen Sie selbst weitere Beispiele, indem Sie sich teilerfremde Zahlen vorgeben! Sie erkennen:

   Man findet das k.g.V. von *Primzahlen* und *teilerfermden Zahlen,* indem man diese Zahlen miteinander multipliziert.

b) das k.g.V. von Zahlen mit *gemeinsamem* Teiler.

   Zum Bestimmen des k.g.V. zerlegt man diese Zahlen in Primfaktoren. Das sei Ihnen am Beispiel erläutert.

Lehrbeispiel 5

Das k.g.V. von 12, 42 *und* 45 *ist zu bestimmen!*

Lösung:

$$\begin{array}{lrl} & 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 & = 2^2 \cdot 3^1 \\ & 42 = \quad 2 \cdot 3 \quad \cdot 7 & = 2^1 \cdot 3^1 \quad \cdot 7^1 \\ & 45 = \quad\quad 3 \cdot 3 \cdot 5 & = \quad 3^2 \cdot 5^1 \\ \hline \text{k.g.V.:} & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = \underline{\underline{1260}} \end{array}$$

Sie erkennen folgende Regel:

Man bestimmt das k.g.V. mehrerer Zahlen, indem man die Zahlen in Produkte von Primfaktoren zerlegt. Die jeweils höchsten Potenzen aller vorkommenden Primfaktoren werden dann miteinander multipliziert.

Beachten Sie: Bei der Bestimmung des g.g.T. erscheinen unter dem Strich nur die Primzahlen der vollen senkrechten Spalten; bei der Bestimmung des k.g.V. erscheinen unter dem Strich die Primzahlen aller senkrechten Spalten (in den Beispielen jeweils fettgedruckte Zahlen).

Lehrbeispiel 6

Das k.g.V. der Zahlen 18, 24, 25 *ist zu bestimmen!*

Lösung:

$$\begin{array}{lrl} & 18 = & 2^1 \cdot 3^2 \\ & 24 = & 2^3 \cdot 3^1 \\ & 25 = & \quad\quad 5^2 \\ \hline \text{k.g.V.:} & = & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = \underline{\underline{1800}} \end{array}$$

Zusammenfassung

Der Zahlbegriff hat sich aus dem Abzählen gleichartiger Gegenstände entwickelt. Die beim Zählen verwendeten Zahlen 1, 2, 3, ... heißen *natürliche Zahlen.* Sie werden mit Hilfe der Ziffern 1 bis 9 und der 0 geschrieben.

Unter einer *Größe* versteht man das Produkt Zahlenwert mal Einheit.

Den mit Ziffern geschriebenen Zahlsymbolen, die stets bestimmte einzelne Zahlen darstellen, stehen mit Buchstabenzeichen dargestellte *allgemeine Zahlsymbole* gegenüber, die beliebige einzelne Zahlen bedeuten können.

Die bei den vier *Grundrechenarten* verwendeten Begriffe sind in der folgenden Übersicht nochmals zusammengestellt.

Rechenart	Beispiel	Symbol a heißt	Symbol b heißt	Rechenausdruck u. Ergebnis heißen
Addition	$a + b = s$	Summand	Summand	Summe
Subtraktion	$a - b = d$	Minuend	Subtrahend	Differenz
Multiplikation	$a \cdot b = p$	Faktor	Faktor	Produkt
Division	$a : b = q$	Dividend	Divisor	Quotient
oder	$\frac{a}{b} = q$	Zähler	Nenner	Bruch

Die wichtigsten Gesetze, die für die vier Grundrechenarten gelten, sind:

Summanden sind vertauschbar.
Nur gleiche Zahlsymbole bzw. gleiche Größen können durch Addition oder Subtraktion zusammengefaßt werden.
Faktoren sind vertauschbar.

Primzahlen sind solche Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

Der *größte gemeinsame Teiler* mehrerer Zahlen ist das Produkt der in allen Zahlen gemeinsam enthaltenen Primfaktoren.

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, in der alle diese Zahlen als Faktoren enthalten sind.

Übungen

1. a) $9a - b - 3a + 6b$
b) $6x + 4y - 8z - 3x + 7y + 5z + 4z$
c) $11a - 14b + 13c - 8a + 15b - 11c + a$
d) $9ab + 6cd - 14ab + 2cd + 6ab - 5cd$

2. a) $6a \cdot 3b \cdot 2c$ *b)* $2x \cdot 5y \cdot z$
c) $3a \cdot 4b \cdot 5a$ *d)* $4a \cdot 3a \cdot 3b \cdot 4b$

3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen:
a) 144, 192, 324; *b)* 260, 585, 715; *c)* 186, 279, 930!

4. Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen:
a) 36, 42, 50; *b)* 84, 99, 154; *c)* 51, 68, 84;
d) 36, 108, 120, 132; *e)* 6, 8, 20, 35; *f)* 14, 27, 56, 63!

[2]

3.2 Gemeine Brüche

3.21 Begriff

Ursprünglich verstand man unter einem Bruch nur den dritten, vierten, fünften usw. Teil eines Ganzen, also $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw.

Diese Bezeichnung **Bruch** oder **gebrochene Zahl** wurde aber ausgedehnt auf alle Ausdrücke von der Form $\frac{a}{b}$, in denen a und b ganze Zahlen (1, 2, 3, ...) bedeuten.

Auf dem Zahlenstrahl (Bild 1) liegen die Brüche zwischen den ganzen Zahlen.

Die über dem Bruchstrich stehende Zahl heißt der *Zähler*, die unter dem Bruchstrich stehende Zahl heißt der *Nenner* des Bruches. Der Zähler (z. B. 3) entspricht dem Dividenden, der Nenner (z. B. 7) dem Divisor der zugehörigen Divisionsaufgabe $3:7 = \frac{3}{7}$ (vgl. 2.55).

Brüche von der Form $\frac{3}{7}$ oder $\frac{7}{4}$ heißen *gemeine Brüche* (zum Unterschied von den noch zu behandelnden Dezimalbrüchen).

Man unterscheidet:

$$\textit{echte Brüche}, \text{ z. B. } \frac{1}{8}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{4}{17};$$

$$\text{und } \textit{unechte Brüche}, \text{ z. B. } \frac{9}{8}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{10}{7}, \quad \frac{31}{17}.$$

In einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner, der Wert des Bruches ist immer kleiner als 1. In einem *un*echten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner, der Wert des Bruches ist immer größer als 1. Der Wert eines Bruches wird immer kleiner, je größer (bei gleichbleibendem Zähler) der Nenner wird:

$$\text{z. B. } \frac{3}{4} > \frac{3}{7} > \frac{3}{20}.$$

Der Wert eines Bruches wird immer größer, je größer (bei gleichbleibendem Nenner) der Zähler wird:

$$\text{z. B. } \frac{2}{9} < \frac{7}{9} < \frac{8}{9}.$$

Ist der Zähler eines Bruches 1, so nennt man diesen Bruch einen *Stammbruch*, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Ganze Zahlen können als Brüche mit dem Nenner 1 aufgefaßt werden, z. B. $3 = \frac{3}{1}$.

Die Zahl 1 kann als ein Bruch aufgefaßt werden, dessen Zähler *gleich* dem Nenner ist, z. B. $1 = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5}$.

Jeden unechten Bruch kann man in eine *gemischte Zahl* verwandeln, indem man Zähler durch Nenner dividiert und den verbleibenden Rest als echten Bruch hinter die ganze Zahl des Quotienten schreibt.

Beispiel: $\frac{7}{3} = 7:3 = 2 \text{ Rest } 1 \text{ oder } 2\frac{1}{3}$

Eine gemischte Zahl bedeutet demnach die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, wobei das Rechenzeichen + gemäß einer Vereinbarung weggelassen wird. Beachten Sie also immer, daß zwischen der ganzen Zahl und dem Bruch das Rechenzeichen + zu ergänzen ist:

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}\ !$$

Umgekehrt kann man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, indem man die ganze Zahl durch Multiplikation mit dem Nenner des echten Bruches in einen unechten Bruch verwandelt und zu diesem den echten Bruch addiert[1]).

Beispiel: $4\frac{3}{7} = 4 + \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7} + \frac{3}{7} = \frac{28}{7} + \frac{3}{7} = \underline{\underline{\frac{31}{7}}}$

Die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch nennt man das *Einrichten* dieser gemischten Zahl.

---

[1]) Die Addition von Brüchen wird Ihnen in Abschnitt 3.23 erläutert.

3.22 Erweitern und Kürzen

Ein Bruch kann in seiner Form verändert werden, *ohne daß sich sein Wert ändert.* Diese Veränderungen nennt man Erweitern und Kürzen.

Einen Bruch **erweitern** heißt, Zähler und Nenner mit derselben Zahl (der Erweiterungszahl oder dem Erweiterungsfaktor) multiplizieren.
Einen Bruch **kürzen** heißt, Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (die Kürzungszahl) dividieren.

Erweitern und Kürzen sind einander entgegengesetzte Rechenvorgänge.

Beispiel:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28} \text{ (der Bruch wurde „mit 4 erweitert“)}$$

$$\frac{12}{28} = \frac{12:4}{28:4} = \frac{3}{7} \text{ (der Bruch wurde „mit 4 gekürzt“)}$$

Das Kürzen hat insofern eine große Bedeutung, als es große Zahlen in Zähler und Nenner in kleine verwandelt. Es erleichtert das Rechnen von Aufgaben mit Brüchen. Deshalb ist beim Lösen von Aufgaben mit Brüchen wichtig, vor Beginn der Rechnung und während des Rechenvorganges die Brüche so weit wie möglich zu kürzen.
Um einen Bruch mit einer Zahl kürzen zu können, ist erforderlich, daß diese Zahl in Zähler und Nenner als Teiler enthalten ist. Die größte Kürzungszahl muß sonach alle in Zähler und Nenner *gemeinsam* enthaltenen Teiler als Faktoren enthalten; sie ist der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner.
Prägen Sie sich also die in Abschnitt 3.11 angeführten Teilbarkeitsregeln gut ein! Sie werden dann schnell die Kürzungszahlen finden.

Lehrbeispiel 7

Vereinfachen Sie den Bruch $\frac{168}{252}$ *durch Kürzen!*

Lösung:

$$\frac{168}{252} = \frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Es wurde zuerst mit 4 gekürzt, weil sowohl 68 als auch 52 durch 4 teilbar sind. (Sie können auch zunächst mit 2 und dann nochmals mit 2 kürzen.) Sodann wurde mit 3 gekürzt, weil die Quersumme sowohl im Zähler als auch im Nenner durch 3 teilbar ist. Schließlich wurde noch mit 7 gekürzt.
Man geht also beim Kürzen meist schrittweise vor, wobei man durch Zusammenfassen von Faktoren die Anzahl der Schritte verringern kann.

3.23 Addition und Subtraktion

Brüche, die den gleichen Nenner haben, heißen **gleichnamige Brüche**. Nur solche Brüche lassen sich addieren und subtrahieren.

Es gilt:

Gleichnamige Brüche werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man die Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und den Nenner unverändert beibehält.

Beispiele:

$$\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5+3}{11} = \underline{\underline{\frac{8}{11}}}$$

$$\frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5-3}{11} = \underline{\underline{\frac{2}{11}}}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern heißen **ungleichnamige Brüche**. Diese müssen vor dem Addieren oder Subtrahieren *gleichnamig* gemacht werden, indem alle Einzelnenner durch Erweitern auf den *Hauptnenner* gebracht werden.

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

Lehrbeispiel 8 $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

Lösung:

Diese Brüche sind ungleichnamig. Der Hauptnenner (k.g.V. der Einzelnenner 3 und 4) ist $3 \cdot 4 = 12$. *Jeder Bruch ist nun mit denjenigen Faktoren des Hauptnenners zu erweitern, die in seinem Nenner nicht vorkommen*, d. h. in unserem Falle: der erste Bruch mit 4, der zweite mit 3:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8+3}{12} = \underline{\underline{\frac{11}{12}}}$$

In diesem Beispiel haben die Einzelnenner keine gemeinsamen Teiler. Deshalb ist der Hauptnenner das Produkt der Einzelnenner. Im folgenden Lehrbeispiel dagegen besitzen die Einzelnenner gemeinsame Teiler.

Lehrbeispiel 9 $\quad \frac{4}{7} + \frac{2}{21} - \frac{5}{9}$

Lösung:

Sie bestimmen den Hauptnenner als k.g.V. der Einzelnenner, indem Sie die Einzelnenner in Primfaktoren zerlegen:

$$\begin{array}{rl} 7 = & \phantom{3 \cdot 3 \cdot {}} 7 \\ 21 = & 3 \cdot \phantom{3 \cdot {}} 7 \\ 9 = & 3 \cdot 3 \\ \hline \text{Hauptnenner:} & 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63 \end{array}$$

Die Einzelbrüche werden nun mit den Faktoren des Hauptnenners erweitert, die in ihrem Nenner nicht vorkommen:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{7 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3}{21 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{36}{63} + \frac{6}{63} - \frac{35}{63} = \frac{36+6-35}{63} = \frac{7}{63} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

Sie können den Hauptnenner aber auch im Kopf bestimmen, indem Sie die Folge der Vielfachen von 21, des größten Nenners, bilden und überprüfen, in welchem dieser Vielfachen 7 *und* 9 als Faktoren enthalten sind:

21 enthält die 7, aber nicht die 9;
42 enthält die 7, aber nicht die 9;
63 enthält die 7 *und* die 9.

Somit ist 63 der Hauptnenner.

Lehrbeispiel 10 $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}$

Lösung:

Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 4 &= 2\cdot 2 \\ 9 &= \phantom{2\cdot 2\cdot{}} 3\cdot 3 \\ 6 &= 2\cdot \phantom{2\cdot{}} 3 \\ 12 &= 2\cdot 2\cdot 3 \\ 3 &= \phantom{2\cdot 2\cdot{}} 3 \\ \hline \text{Hauptnenner} &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 36 \end{aligned}$$

Erweitern der Einzelbrüche:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 3}+\frac{2\cdot 2\cdot 2}{9\cdot 2\cdot 2}+\frac{5\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 2\cdot 3}+\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{9+8+30+21+24}{36}=\frac{92}{36}$$

Das Ergebnis kann noch mit 4 gekürzt werden, so daß Sie erhalten:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{23}{9}=\underline{\underline{2\frac{5}{9}}}$$

Es hätte in diesem Beispiel einen wesentlichen Mehraufwand an Rechenarbeit erfordert, wenn Sie den Hauptnenner nicht als k. g.V. bestimmt, sondern alle Brüche etwa auf einen Nenner gebracht hätten, der das Produkt der Einzelnenner darstellt. Sie hätten die Zahl $4\cdot 9\cdot 6\cdot 12\cdot 3 = 7776$ erhalten und das Ergebnis mit dem Nenner 7776 durch Kürzen zu einem Bruch mit dem Nenner 9 wieder vereinfachen müssen.
Bei einiger Übung im Rechnen mit Brüchen wird man die Erweiterungszahl nicht erst, wie in unserem Beispiel dargestellt, in Primfaktoren schreiben, sondern als eine einzige Zahl.

Die Erweiterungszahl kann man im Lehrbeispiel 10 folgendermaßen bestimmen:

Hauptnenner ist 36.
Erster Einzelnenner ist 4. $36:4 = 9$ ist die Erweiterungszahl des ersten Bruches.
Zweiter Einzelnenner ist 9. $36:9 = 4$ ist die Erweiterungszahl des zweiten Bruches.
usw.

Für die Addition bzw. Subtraktion ungleichnamiger Brüche gilt also:

Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren (bzw. Subtrahieren) gleichnamig gemacht werden. Hauptnenner ist das k.g.V. aller Einzelnenner.

Bei gemischten Zahlen addiert (bzw. subtrahiert) man meist die ganzen Zahlen und die Brüche getrennt.

Beispiele:

$$4\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=7+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=7+\frac{3+2}{6}=7+\frac{5}{6}=\underline{\underline{7\frac{5}{6}}}$$

$$4\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1+\frac{3-2}{6}=1+\frac{1}{6}=\underline{\underline{1\frac{1}{6}}}$$

$$4\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}=3+\frac{4}{3}-1-\frac{1}{2}=2+\frac{8-3}{6}=2+\frac{5}{6}=\underline{\underline{2\frac{5}{6}}}$$

3.24 Multiplikation

Folgende Fälle können bei der Multiplikation auftreten:

1. Bruch mal ganze Zahl,
2. Bruch mal Bruch,
3. gemischte Zahl mal ganze Zahl,
4. gemischte Zahl mal Bruch,
5. gemischte Zahl mal gemischte Zahl.

Wenn Sie die ganzen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 auffassen und die gemischten Zahlen vor dem Multiplizieren einrichten, d. h. in einen unechten Bruch umformen, können Sie in allen Fällen die gleiche Regel anwenden:

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Häufig kann man vor dem Multiplizieren kürzen.

Beispiele:

$$\frac{2}{9}\cdot 4=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2\cdot 4}{9\cdot 1}=\underline{\underline{\frac{8}{9}}}$$

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 3}{9\cdot 8}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 4}=\underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

$$18\frac{2}{7}\cdot 6=\frac{128}{7}\cdot\frac{6}{1}=\frac{768}{7}=\underline{\underline{109\frac{5}{7}}}$$

$$7\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{15}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{15\cdot 4}{2\cdot 9}=\frac{5\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{10}{3}=\underline{\underline{3\frac{1}{3}}}$$

$$3\frac{3}{5}\cdot 7\frac{1}{2}=\frac{18}{5}\cdot\frac{15}{2}=\frac{18\cdot 15}{5\cdot 2}=\frac{9\cdot 3}{1\cdot 1}=\underline{\underline{27}}$$

Ein Hinweis zum Fall „gemischte Zahl mal ganze Zahl" ($18\frac{2}{7}\cdot 6$):

Es ist erst Rechenaufwand notwendig, um die gemischte Zahl einzurichten, dann nochmals, um den unechten Bruch wieder in eine gemischte Zahl zu verwandeln. Um rationeller zu rechnen, behandelt man diesen Fall nicht nach der oben genannten Regel, sondern multipliziert die beiden Bestandteile der gemischten Zahl, die ganze

Zahl und den echten Bruch, getrennt mit der ganzen Zahl. Das sieht dann folgendermaßen aus:

$$18\,\frac{2}{7}\cdot 6 = 18\cdot 6 + \frac{2}{7}\cdot 6 = 108 + \frac{12}{7} = 108 + 1\,\frac{5}{7} = \underline{\underline{109\,\frac{5}{7}}}$$

Bei der Multiplikation mehrerer Faktoren werden sämtliche Zähler miteinander multipliziert und ebenso sämtliche Nenner. Vergessen Sie aber nie, auf die Möglichkeit des Kürzens zu achten!

Lehrbeispiel 11

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8} = \frac{2\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 8} = \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 5}{1\cdot 9\cdot 1\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

3.25 Division

Die Division von Brüchen soll Ihnen zunächst an einem Beispiel erläutert werden. Dazu betrachten wir die Aufgabe

$$\frac{1}{3} : 2.$$

Es soll – laut Aufgabe – ein Drittel eines Ganzen $\left(\text{nämlich } \frac{1}{3}\right)$ durch 2 (also in zwei Teile) geteilt werden. Sie erweitern $\frac{1}{3}$ deshalb mit 2:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Zerlegen Sie nun $\frac{2}{6}$ in zwei Teile, ergibt sich $\frac{1}{6}$.
Die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist somit $\frac{1}{6}$. Folglich gilt:

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}.$$

Zu diesem Resultat kommen Sie auch, wenn Sie $\frac{1}{3}$ mit dem Kehrwert von 2, d. h. mit $\frac{1}{2}$, multiplizieren:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Unter dem Kehrwert – reziproken[1]) Wert – einer Zahl versteht man den Quotienten von 1 durch diese Zahl.

Beispiele:

Der Kehrwert von 3 ist $\frac{1}{3}$,

der Kehrwert von 89 ist $\frac{1}{89}$.

---

[1]) lat. *reciprocare*, zurückwenden.

Schreiben Sie 3 als $\frac{3}{1}$, so erkennen Sie: Den Kehrwert eines Bruches erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

Weitere Beispiele:

$$\frac{2}{7}\text{, Kehrwert } \frac{7}{2};$$

$$\frac{11}{3}\text{, Kehrwert } \frac{3}{11};$$

$$3\frac{1}{7}\text{, Sie richten ein: } \frac{22}{7}\text{, Kehrwert } \frac{7}{22}.$$

Das Produkt aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist stets 1.

Wir können verallgemeinern und sagen:

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Diese Regel gilt für alle bei der Division auftretenden Fälle, also:

1. Bruch durch ganze Zahl,
2. ganze Zahl durch Bruch,
3. Bruch durch Bruch,
4. gemischte Zahl durch ganze Zahl,
5. ganze Zahl durch gemischte Zahl,
6. gemischte Zahl durch Bruch,
7. Bruch durch gemischte Zahl,
8. gemischte Zahl durch gemischte Zahl.

Beachten Sie aber immer: Vor dem Multiplizieren ist nach Möglichkeit zu kürzen!

Beispiele:

$$\frac{3}{5}:4=\frac{3}{5}:\frac{4}{1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 4}=\underline{\underline{\frac{3}{20}}}$$

$$6:\frac{3}{7}=6\cdot\frac{7}{3}=\frac{6\cdot 7}{3}=\frac{2\cdot 7}{1}=\underline{\underline{14}}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

$$3\frac{2}{3}:5=\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{11\cdot 1}{3\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{11}{15}}}$$

$$18:2\frac{4}{5}=18:\frac{14}{5}=\frac{18\cdot 5}{14}=\frac{9\cdot 5}{7}=\frac{45}{7}=\underline{\underline{6\frac{3}{7}}}$$

$$4\frac{1}{5}:\frac{3}{4}=\frac{21}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{21\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{7\cdot 4}{5\cdot 1}=\frac{28}{5}=\underline{\underline{5\frac{3}{5}}}$$

$$\frac{3}{8} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{8} : \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{3}{20}}}$$

$$2\frac{2}{5} : 3\frac{3}{4} = \frac{12}{5} : \frac{15}{4} = \frac{12 \cdot 4}{5 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{16}{25}}}$$

(Die Probe kann mit Hilfe der Multiplikation durchgeführt werden. Beim letzten Beispiel würde das wie folgt aussehen:

$$\frac{16}{25} \cdot 3\frac{3}{4} = \frac{16 \cdot 15}{25 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.)$$

Bei Divisionsaufgaben mit ganzen Zahlen kann man sich Rechenvorteile verschaffen, indem man die Regel über die Division von Brüchen anwendet.

Beispiele:

1. 3720 : 5

   Statt 5 schreibt man $\frac{10}{2}$ und rechnet:

   $$3720 : 5 = 3720 : \frac{10}{2} = 3720 \cdot \frac{2}{10} = 372 \cdot 2 = \underline{\underline{744}}$$

2. 82700 : 25

   Statt 25 schreibt man $\frac{100}{4}$ und rechnet:

   $$82700 : 25 = 82700 : \frac{100}{4} = 82700 \cdot \frac{4}{100} = 827 \cdot 4 = \underline{\underline{3308}}$$

Suchen Sie selbst weitere günstige Divisoren! Natürlich können Sie bei der Multiplikation ähnlich verfahren.

Beispiel:

$$124 \cdot 25 = 124 \cdot \frac{100}{4} = 12400 : 4 = \underline{\underline{3100}}$$

3.26 Doppelbrüche

Doppelbrüche sind Brüche, die im Zähler und Nenner wieder Brüche enthalten, z. B.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{5}, \quad \frac{2}{\frac{3}{5}}.$$

Alle diese Brüche können nach den Regeln der Bruchrechnung vereinfacht werden, indem man den Hauptbruchstrich durch einen Doppelpunkt ersetzt:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = \underline{\underline{1\frac{1}{5}}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{15}}}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{1} : \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = \underline{\underline{3\frac{1}{3}}}$$

Grundsätzlich sind Doppelbrüche, die im Verlaufe einer Rechnung auftreten, am besten sofort zu beseitigen, d. h., auf einfache Brüche zurückzuführen.
Beim Rechnen mit Doppelbrüchen ist genau darauf zu achten, welches der Hauptbruchstrich ist; denn wie Sie an den Beispielen

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15} \text{ und } \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$$

erkennen, besitzen diese beiden Brüche verschiedene Werte.

Lehrbeispiel 12

Berechnen Sie $$\frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{17}{24} + \frac{3}{8} - \frac{5}{6}}\,!$$

Lösung:

Diese Aufgabe lösen Sie am einfachsten, indem Sie für die Zählerbrüche *und* für die Nennerbrüche den *gemeinsamen* Hauptnenner bestimmen. Er ist 72.

$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{17}{24} + \frac{3}{8} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{32 + 48 - 54 + 12}{72}}{\frac{51 + 27 - 60}{72}} = \frac{\frac{38}{72}}{\frac{18}{72}} = \frac{38 \cdot 72}{72 \cdot 18} = \frac{19}{9} = \underline{\underline{2\frac{1}{9}}}$$

Dieser Lösungsweg empfiehlt sich nicht, wenn durch das Erweitern der einzelnen in Zähler und Nenner stehenden Brüche auf den gemeinsamen Hauptnenner sehr große und damit für den weiteren Rechnungsgang unbequeme Zahlen entstehen. Man bringt in einem solchen Falle die in Zähler und Nenner stehenden Brüche auf ihre Hauptnenner und vereinfacht den Doppelbruch nach den bekannten Regeln.

Lehrbeispiel 13

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{17}}{\frac{2}{3} - \frac{10}{19}} = \frac{\frac{17 - 15}{51}}{\frac{38 - 30}{57}} = \frac{\frac{2}{51}}{\frac{8}{57}} = \frac{2}{51} \cdot \frac{57}{8} = \frac{2 \cdot 57}{51 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 19}{17 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{19}{68}}}$$

Zusammenfassung

Gemeine Brüche sind die Quotienten ganzer Zahlen.
Ein Bruch mit dem Zähler 1 heißt Stammbruch. In echten Brüchen ist der Zähler kleiner, in unechten größer als der Nenner. Unechte Brüche können als gemischte

Zahlen dargestellt werden. Diese bestehen aus der Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruches. Die Verwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche bezeichnet man als Einrichten.
Einen Bruch *erweitern* heißt, Zähler und Nenner des Bruches mit derselben Zahl multiplizieren. Einen Bruch *kürzen* heißt, Zähler und Nenner des Bruches durch dieselbe Zahl dividieren.
Erweitern oder Kürzen ändern den Wert eines Bruches nicht. Die Kürzungszahl muß gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner sein.
Gleichnamige Brüche werden *addiert* oder *subtrahiert*, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den (gemeinsamen) Nenner beibehält.
Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren oder Subtrahieren durch geeignetes Erweitern gleichnamig gemacht, d. h. auf den Hauptnenner gebracht werden. Der Hauptnenner ist das k.g.V. aller Einzelnenner.
Brüche werden miteinander *multipliziert*, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Durch einen Bruch wird *dividiert*, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert. Der Kehrwert eines Bruches wird durch Vertauschen von Zähler und Nenner gebildet.
Doppelbrüche werden als Divisionsaufgaben behandelt. Treten in Doppelbrüchen Summen oder Differenzen von Brüchen auf, so werden entweder Zähler und Nenner auf ihre Hauptnenner oder auf den gemeinsamen Hauptnenner gebracht.

Übungen

5. *Kürzen Sie* *a)* $\frac{54}{90}$ *b)* $\frac{105}{180}$ *c)* $\frac{96}{144}$ *d)* $\frac{150}{510}$!

6. *Berechnen Sie*

a) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$ *c)* $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}-\frac{1}{8}+\frac{2}{9}-\frac{3}{10}+\frac{11}{12}+\frac{25}{63}$!

7. *Berechnen Sie*

a) $\frac{5}{14}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{5}$ *b)* $\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{16}$ *c)* $\frac{11}{45}\cdot 13\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}$

d) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{16}\cdot 4\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{14}$ *e)* $1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot 4\frac{4}{5}$!

8. *Berechnen Sie* *a)* $\frac{18}{23}:\frac{25}{69}$ *b)* $\frac{17}{18}:2\frac{5}{6}$ *c)* $7\frac{5}{14}:3\frac{1}{2}$

d) Vergleichen Sie in der Aufgabenreihe $16:8$; $16:4$; $16:2$; $16:1$; $16:\frac{1}{2}$; $16:\frac{1}{4}$; $16:\frac{1}{8}$ *die Ergebnisse!*

9. *Vereinfachen Sie die Doppelbrüche*

a) $\dfrac{\frac{7}{24}}{\frac{3}{8}}$ *b)* $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{4\frac{3}{5}}$ *c)* $\dfrac{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}{\frac{17}{12}+\frac{7}{8}}$ *d)* $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$ *e)* $\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$!

10. Berechnen Sie $\dfrac{\frac{16}{21}+\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{21}}+\dfrac{\frac{15}{6}-\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}-\frac{1}{4}}$*!*

Weitere Übungsaufgaben finden Sie im Aufgabenabschnitt 3.4.

[3]

3.3 Dezimalbrüche

3.31 Begriff

Da unser Zahlensystem ein Zehnersystem (Dezimalsystem) ist, kommt auch den Brüchen, deren Nenner eine Potenz von 10 (also 10, 100, 1000 usw.) ist, eine besondere Bedeutung zu. Solche Brüche heißen **Dezimalbrüche.**
Dezimalbrüche können auch mit Hilfe des Kommas geschrieben werden, indem man nur den Zähler schreibt und den Nenner durch die Stellung des Kommas kennzeichnet. Man trennt nämlich vom Zähler von rechts her so viele Stellen durch das Komma ab, wie der Nenner Nullen hat. Derartig geschriebene Dezimalbrüche werden oft auch Dezimalzahlen genannt.

Die Reihenfolge der Stellen nach dem Komma ist:

Zehntel (z) Hundertstel (h) Tausendstel (t) usw.

Beispiel:

$$0{,}463 = \frac{4}{10}+\frac{6}{100}+\frac{3}{1000}=\frac{463}{1000}$$

Gelesen: „Null Komma vier sechs drei.“

Wie leicht einzusehen ist, verändert das Anhängen bzw. Wegstreichen von Nullen als letzte Stellen hinter dem Komma den Wert des Dezimalbruches nicht; denn das bedeutet lediglich ein Erweitern bzw. Kürzen mit einer Potenz von 10.

Beispiele: $0{,}3 = 0{,}30$ bedeutet ein Erweitern mit 10: $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$;

$0{,}500 = 0{,}5$ bedeutet ein Kürzen mit 100: $\frac{500}{1000} = \frac{5}{10}$.

Im folgenden sollen noch die Besonderheiten behandelt werden, die gegenüber dem Rechnen mit ganzen Zahlen auftreten, wenn man die vier Grundrechenarten auf Dezimalbrüche anwendet.

3.32 Addition und Subtraktion. Rechenvorteile

Die Addition und Subtraktion kann wie bei ganzen Zahlen durchgeführt werden, wenn man die Dezimalbrüche so untereinander schreibt, daß Komma unter Komma steht. Es kommt aber nicht nur darauf an, die Lösung einer gestellten Aufgabe zu finden, sondern auch darauf, das Ergebnis möglichst *schnell* zu errechnen, d. h. mit dem geringsten Aufwand an Arbeitszeit und Arbeitskraft. Deshalb ist es notwendig, daß Sie sich mit einigen möglichen Rechenvorteilen vertraut machen und diese gegebenenfalls anwenden.

Rechenvorteil bei der Addition

Fassen Sie die Ziffern, deren Summe 10 ergibt, zusammen, auch wenn sie nicht unmittelbar benachbart sind!

Beispiel:

54,2	Rechnen Sie in der Zehntelreihe von oben nach unten wie folgt:
67,8	$(2 + 8) + (3 + 5 + 2) + (6 + 4) + 5$
16,3	Sprich: 10 20 30 35 (schreibe 5, merke 3).
49,5	Die zu übertragende 3 addieren Sie zur 7 in der Einerreihe und rechnen in der
91,2	gleichen Weise weiter;
32,6	$(3 + 7) + (4 + 6) + (9 + 1) + (2 + 8) + 7$
18,5	Sprich: 10 20 30 40 47 (schreibe 7, merke 4),
57,4	usw.
387,5	

Prüfen Sie jede Addition nach, indem Sie in entgegengesetzter Richtung, in unserem Beispiel von unten nach oben, addieren!

Rechenvorteil bei der Subtraktion

Beim Lösen einer Subtraktionsaufgabe wendet man mit Vorteil das Ergänzungsverfahren (additive Subtraktion) an, indem man den Subtrahenden zum Minuenden ergänzt.

Beispiel:

9,59 (Minuend)	Rechnen Sie:
— 3,86 (Subtrahend)	6 plus **3** (Ergänzungszahl) = 9 (schreibe 3)
5,73 (Differenz)	8 plus **7** (Ergänzungszahl) = 15 (schreibe 7, merke 1)
	(3 + 1) plus **5** (Ergänzungszahl) = 9 (schreibe 5)

Die Ergänzungszahl wird betont ausgesprochen und in das Ergebnis geschrieben. Versäumen Sie auch hier nicht, die Richtigkeit des Ergebnisses nachzuprüfen, indem Sie die Probe auf dem Gegenwege machen:

Differenz + Subtrahend = Minuend

Das Ergänzungsverfahren empfiehlt sich vor allem dann, wenn mehrere Posten in einem Arbeitsgang zu subtrahieren sind.

Beispiel:

97,3	Addieren Sie die 3 Subtrahenden von unten nach oben, und ergänzen
— 14,5	Sie ihre Summe zum Minuenden!
— 23,7	Sprich:
— 26,8	8, 15, 20 plus **3** = 23 (merke 2)
	(2), 8, 11, 15 plus **2** = 17 (merke 1)
32,3	(1), 3, 5, 6 plus **3** = 9.

Beachten Sie, daß man beim Addieren die Pluszeichen vor den Summanden nicht schreibt, wohl aber beim Subtrahieren stets die Minuszeichen vor den Subtrahenden. Eine Verwechslung beider Rechenoperationen ist dann ausgeschlossen.

3.33 Multiplikation

Zwei Dezimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man zunächst ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert und dann im Ergebnis von rechts her so viele Stellen durch das Komma abtrennt, wie *beide* Faktoren *zusammen* nach dem Komma haben. Nicht vorhandene Stellen müssen durch Nullen besetzt werden.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \underline{27{,}3 \cdot 0{,}57} \\ 1365 \\ \underline{1911} \\ \underline{\underline{15{,}561}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{0{,}374 \cdot 0{,}237} \\ 748 \\ 1122 \\ \underline{2618} \\ \underline{\underline{0{,}088638}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{3{,}51 \cdot 0{,}0082} \\ 2808 \\ \underline{702} \\ \underline{\underline{0{,}028782}} \end{array}$$

Bei der Multiplikation richten sich die Rechenvorteile nach der Art der Faktoren. Allgemein gilt der Grundsatz, den bequemeren Faktor als Multiplikator zu wählen. In der Regel ist das derjenige, der die geringere Stellenzahl aufweist. Weitere Rechenvorteile werden Sie selbst noch finden, sofern Sie später nicht mit dem Rechenstab oder logarithmisch multiplizieren. (Vgl. auch Abschnitt 3.25!)
Auf eines sei aber noch hingewiesen. Denken Sie immer daran, daß beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen oftmals viele Stellen hinter dem Komma auftreten, die praktisch nutzlos sind. Beachten Sie unter diesem Gesichtspunkt besonders die beiden Abschnitte über das Runden und die Genauigkeit (3.36 und 3.37).

3.34 Division

Die Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl wird zunächst wie die zweier ganzer Zahlen durchgeführt. Wenn das Komma im Dividenden überschritten wird, so muß auch im Quotienten das Komma gesetzt werden.
Hat man durch einen Dezimalbruch zu dividieren, so erweitert man Dividend und Divisor derart, daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Die Erweiterung geschieht, indem man in Dividend und Divisor das Komma um gleich viele Stellen nach rechts verschiebt.
Hat ein ganzzahliger Divisor am Ende Nullen, so streicht man diese weg und verschiebt gleichzeitig im Dividenden das Komma um so viele Stellen nach links, wie Nullen gestrichen wurden.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} 2176{,}16:58 = \underline{\underline{37{,}52}} \\ -\underline{174} \\ 436 \\ -\underline{406} \\ 301 \\ -\underline{290} \\ 116 \\ -\underline{116} \\ 0 \end{array}$$

Abgekürzte Schreibform unter Weglassen der Subtrahenden:

$$\begin{array}{l} 2176{,}16:58 = \underline{\underline{37{,}52}} \\ 436 \\ 301 \\ 116 \end{array}$$

$$3{,}942:1{,}46 = 394{,}2:146 = \underline{\underline{2{,}7}}$$
$$\begin{array}{l} 1022 \end{array}$$

$$547{,}404:1300 = 5{,}47404:13 = \underline{\underline{0{,}42108}}$$
$$\begin{array}{l} 27 \\ \ 14 \\ \ \ 10 \\ \ \ 104 \end{array}$$

$$45{,}21:0{,}274 = 45210:274 = \underline{\underline{165}}$$
$$\begin{array}{l} 1781 \\ \ 1370 \end{array}$$

3.35 Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt

Da der Bruchstrich dasselbe bedeutet wie der Doppelpunkt (beides sind Divisionszeichen), kann man einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert. Versuchen Sie aber stets, vorher zu kürzen!

Bei Brüchen, deren Nenner eine Potenz von 10 (10, 100, 1000, ...) ist oder die sich bequem auf eine solche bringen lassen, ist die Umwandlung sehr leicht und schnell durchzuführen.

Beispiele:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{7}{100} = 0{,}07; \quad \frac{15}{1000} = 0{,}015; \quad \frac{17}{25} = \frac{17 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{68}{100} = 0{,}68$$

Gemischte Zahlen deutet man als eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch (vgl. 3.21) und wandelt dann nur den Bruch um.

Beispiel:

$$7\frac{2}{5} = 7 + \frac{2}{5} = 7 + 0{,}4 = 7{,}4$$

Geht die Division auf, so erhält man *endliche* Dezimalbrüche.

Beispiel:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

Geht die Division jedoch nicht auf, d. h., läßt sie sich beliebig weit fortsetzen, so spricht man von *unendlichen* Dezimalbrüchen.

Da sich bei unendlichen Dezimalbrüchen, die man durch Division erhält, von einer gewissen Stelle ab die Ziffern in einer gleichen Ziffernfolge wiederholen, bezeichnet man diese unendlichen Dezimalbrüche als *periodische* Dezimalbrüche. Die sich wiederholende Ziffer oder Zifferngruppe heißt **Periode.** Man kennzeichnet die Periode durch Überstreichen. Bei solchen Brüchen braucht man nur so weit zu rechnen, bis man die Periode erkannt hat.

Beginnt die Periode gleich hinter dem Komma, so nennt man den Dezimalbruch *reinperiodisch*, befinden sich vor der Periode noch Vorziffern, so nennt man ihn *vor-* oder *gemischtperiodisch*. Die Dezimalstellen zwischen Komma und Periode heißen Vorperiode.

Beispiele:

a) Reinperiodischer Dezimalbruch:

$$\frac{7}{11} = 7:11 = 0{,}636363\ldots = \underline{\underline{0{,}\overline{63}}}$$

Gelesen: Null, Komma, Periode sechs drei.
Die Periode ist in diesem Falle zweiziffrig; sie heißt 63.

b) Gemischtperiodischer Dezimalbruch:

$$\frac{5}{12} = 5:12 = 0{,}41\dot{6}666\ldots = \underline{\underline{0{,}41\overline{6}}}$$

Gelesen: Null, Komma, vier eins, Periode sechs.
Die Periode ist einziffrig, sie heißt 6. Ihr gehen aber diesmal zwei Vorziffern (4 und 1) voraus.

Bei der Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche muß der Wert der einzelnen Stellen hinter dem Komma berücksichtigt werden. Die Stellen hinter dem Komma werden als Zähler und eine Potenz von 10 als Nenner geschrieben. Dann soll nach Möglichkeit gekürzt werden. Die Anzahl der Nullen des Nenners wird durch die Anzahl der Stellen hinter dem Komma bestimmt.

Beispiele:

$$0{,}1 = \frac{1}{10};\ 0{,}07 = \frac{7}{100};\ 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Ist der Dezimalbruch periodisch, so bricht man den Dezimalbruch unter Beachtung der in 3.36 gegebenen Regeln über das Runden ab und verfährt wie oben (Stellenzahl richtet sich nach der geforderten Genauigkeit).

Beispiele:

$$0{,}\overline{63} \approx 0{,}64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$$

$$0{,}\overline{945} \approx 0{,}946 = \frac{946}{1000} = \frac{473}{500}$$

In diesen Fällen erhalten Sie also nur genäherte Werte.

Das Rechenverfahren, das genaue Werte liefert, wird wegen seiner Umständlichkeit in der Praxis nur selten angewandt.

Beachten Sie aber, daß $0{,}\overline{6} = \frac{2}{3}$ oder $0{,}\overline{8} = \frac{8}{9}$ ist!

3.36 Runden

Wird mit Dezimalbrüchen multipliziert bzw. dividiert, so entsteht im Ergebnis eine mehr oder weniger große Anzahl von Dezimalstellen, die vielfach keinen praktischen Wert haben. Man bricht deshalb den Dezimalbruch an einer bestimmten Stelle ab, d. h., man rundet entsprechend der geforderten Genauigkeit die Dezimalbrüche auf

eine bestimmte Stellenzahl auf oder ab. Das gilt natürlich auch für unendliche Dezimalbrüche.
In DIN 1333[1]) wurden die **Regeln für das Runden** festgelegt, damit das Runden einheitlich nach den gleichen Richtlinien erfolgt.

Im einzelnen besagt das Normblatt folgendes:

1. **Abrunden** heißt, daß die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, unverändert bleibt. Es wird abgerundet, wenn dieser Stelle noch eine 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt.

   Beispiele: $2{,}12 \approx 2{,}1$

   $6{,}343 \approx 6{,}3$

   $8{,}2738 \approx 8{,}27$

2. **Aufrunden** heißt, daß die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, um 1 erhöht wird. Es wird aufgerundet, wenn dieser Stelle noch eine 6, 7, 8 oder 9 folgt.

   Beispiele: $2{,}17 \approx 2{,}2$

   $6{,}369 \approx 6{,}37$

   $8{,}2762 \approx 8{,}28$

3. **Sonderregeln für die** 5 als erste weggelassene Stelle:

   a) Folgen dieser 5 noch von Null verschiedene Zahlen, so wird die letzte angegebene Stelle aufgerundet.

   Beispiele: $3{,}14159 \approx 3{,}142$

   $4{,}35001 \approx 4{,}4$

   b) Folgen dieser 5 nur Nullen oder ist es eine 5 unbekannter Herkunft, dann wird so gerundet, daß die letzte angegebene Stelle zu einer geraden Zahl wird.

   Beispiele: $\frac{1}{16} = 0{,}0625 \approx 0{,}062$

   $3\frac{3}{4} = 3{,}75 \approx 3{,}8$

   c) Ist bekannt, daß eine 5 durch Aufrunden entstanden ist, so wird abgerundet; ist sie aber durch Abrunden entstanden, so wird aufgerundet.

   Beispiele: Aus 6,3149 wird 6,315 und führt zu 6,31.

   Aus 4,1852 wird 4,185 und führt zu 4,19.

Eine als letzte Stelle beim Runden entstehende Null darf nicht weggelassen werden, da durch ihr Mitschreiben ausdrücklich gesagt wird, daß bis zu dieser Dezimalstelle die Zahl genau ist und daß die durch das Runden entstandene Ungenauigkeit 5 Einheiten der nächsten Dezimale nicht übersteigt.

---

[1]) DIN 1333 (Ausgabe Dezember 1954) ist zum Standard erklärt.

Beispiel: 3,702 auf 2 Stellen gerundet: 3,70

0,269050 auf 4 Stellen gerundet: 0,2690

Die angeführten Rundungsregeln gelten auch beim Runden von ganzen Zahlen, nur mit dem Unterschied, daß man an die Stelle der nicht mehr benötigten Ziffern grundsätzlich Nullen setzen muß.
Dann ist aber nicht mehr zu erkennen, bis zu welcher Stelle die Zahl noch genau ist. Man trennt daher noch die Zehnerpotenzen ab (vgl. Abschn. 2.54) und kann dann in der Dezimalzahl die Nullen weglassen, die eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen würden.

Beispiel:	48 685 auf Zehner genau:	$48\,680 = 4{,}868 \cdot 10^4$;
	48 685 auf Hunderter genau:	$48\,700 = 4{,}87 \cdot 10^4$;
	48 685 auf Tausender genau:	$49\,000 = 4{,}9 \cdot 10^4$;
	48 685 auf Zehntausender genau:	$50\,000 = 5 \cdot 10^4$.

3.37 Genauigkeit beim Rechnen mit gemessenen Größen

Im Zusammenhang mit dem Runden interessiert die Frage, wie genau, d. h. mit welcher Stellen- bzw. Ziffernzahl, das Ergebnis einer Rechnung angegeben werden muß oder angegeben werden soll.
Wir müssen bei dieser Überlegung zwei Fälle unterscheiden, nämlich ob die Zahlen unserer Rechnung zu gemessenen Größen gehören oder nicht. Gehören sie nicht zu gemessenen Größen, so ist die größtmögliche Ziffern- bzw. Stellenzahl das genaueste Ergebnis, und wie weit Sie ein solches Ergebnis runden, steht ganz in Ihrem Ermessen. Wenn Sie z. B. das Produkt $3{,}235 \cdot 7{,}63$ bilden, so erhalten Sie als genaues Ergebnis 24,68305. Diese Zahl können Sie auf eine beliebige Stellenzahl runden.

Anders ist es, wenn Sie mit Zahlen rechnen, die sich auf Grund von Messungen ergeben. Hier hat nämlich die angegebene Ziffernzahl eine ganz bestimmte Bedeutung. Hierzu ein Beispiel:
Sie haben auf einem Bauplatz eine bestimmte Strecke abzumessen. Dazu steht Ihnen nur ein Zollstock (Gliedermaßstab) zur Verfügung. Sie messen mehrere Male und finden folgende Werte: 14,78 m; 14,83 m; 14,77 m; 14,81 m; 14,82 m. Die unvermeidlichen Fehler beim Messen lassen das Ergebnis jedesmal etwas anders ausfallen. Wie geben Sie nun die Länge dieser Strecke an? Sie werden sagen: Die Strecke ist ungefähr 14 m und 80 cm lang. Schreiben dürfen Sie aber nur: $s = 14{,}8$ m. Nach Vereinbarung bedeutet dies nämlich: Die Länge der Strecke liegt zwischen 14,75 m und 14,85 m. Die Ziffer 8 kann also durch Runden entstanden sein. Der gemessene Wert ist somit auf m genau, die Anzahl der dm ist um 0,5 dm unsicher. Die Angabe $s = 14{,}80$ m würde heißen: Der gemessene Wert liegt zwischen 14,795 m und 14,805 m, und diese Aussage wäre bei der vorliegenden Messung nicht gerechtfertigt.

Für die Angabe *gemessener* Größen müssen Sie sich grundsätzlich merken: Jede gemessene Größe ist mit einem *Fehler* behaftet. Die Genauigkeit wird durch den Stellenwert der vorletzten Ziffer angegeben.

Bei Angabe von Meßwerten ist meist die vorletzte Ziffer noch genau, die letzte Ziffer aber unsicher (gerundet).

Wie wirkt sich nun diese Ungenauigkeit der gemessenen Größen auf das Ergebnis aus, wenn mit diesen Werten gerechnet wird?

Auch das wollen wir uns an einem Beispiel klarmachen.

Es soll das Volumen eines Quaders (etwa eines Ziegelsteines) berechnet werden. Als Länge, Breite und Höhe werden folgende Werte gemessen:

$a = 16{,}3$ cm, $b = 9{,}2$ cm und $c = 7{,}4$ cm.
Daraus ergibt sich als Volumen: $V = 1109{,}704\ \text{cm}^3$.

Dürfen Sie nun diesen Wert als Ergebnis angeben? Sie entscheiden dies durch folgende Überlegung:

Die gemessenen Werte bedeuten:

	Minimalwert		Maximalwert
a liegt zwischen	16,25 cm	und	16,35 cm,
b liegt zwischen	9,15 cm	und	9,25 cm,
c liegt zwischen	7,35 cm	und	7,45 cm.

Berechnen Sie nun aus diesen Werten das mögliche Maximal- und Minimalvolumen, so erhalten Sie

$$V_{\min} = 1092{,}853\ \text{cm}^3; \qquad V_{\max} = 1126{,}719\ \text{cm}^3.$$

Sie stellen also fest, daß das Volumen bestimmt zwischen den Werten 1093 cm³ und 1127 cm³ liegt. Als Ergebnis können Sie deshalb nur angeben

$V \approx 1{,}1\ \text{dm}^3$ oder auch $V \approx 1{,}1 \cdot 10^3\ \text{cm}^3$
(nicht $V \approx 1100\ \text{cm}^3$!).

Jede genauere Angabe des Volumens würde eine Genauigkeit vortäuschen, die gar nicht vorhanden ist, und muß deshalb als falsch bezeichnet werden.

Merken Sie sich als Faustregel:

Wenn eine Rechnung mit gemessenen Größen durchgeführt wird, so soll das Ergebnis nur so viel Ziffern aufweisen, wie der gegebene Wert, der die kleinste Anzahl sicherer Ziffern hat. Das Ergebnis kann im allgemeinen nur so viel sichere Ziffern haben, wie sie dieser Wert auch hat. (In obigem Beispiel sind die Längen b und c mit *einer* sicheren Ziffer gegeben, das Ergebnis kann also ebenfalls nur mit *einer* sicheren Ziffer angegeben werden.)
Bei Beachtung dieser Regel können Sie sehr viel Rechenarbeit sparen. Überlegen Sie schon vor Beginn der Rechnung, wie das Ergebnis aussehen wird, und rechnen Sie dann im Rechengang mit einer Stelle mehr als Sie im Ergebnis brauchen. Beachten Sie das vor allem auch beim Lösen von Aufgaben in den anderen Lehrfächern wie z. B. im Fach Physik, wo fast ausschließlich gemessene Größen in die Rechnung eingehen.

Zusammenfassung

Brüche, deren Nenner Potenzen von 10 sind, heißen *Dezimalbrüche*. Sie werden mit Hilfe des Kommas geschrieben. Man rechnet mit ihnen wie mit ganzen Zahlen unter Beachtung der Regeln über das Setzen des Kommas.

Ein gemeiner Bruch kann in einen Dezimalbruch verwandelt werden, indem man den Zähler durch den Nenner teilt. Dabei entsteht (je nach Form des Nenners) entweder

ein endlicher Dezimalbruch,
ein unendlicher gemischtperiodischer Dezimalbruch oder
ein unendlicher reinperiodischer Dezimalbruch.

Bei periodischen Dezimalbrüchen wiederholt sich eine bestimmte Ziffernfolge immer wieder. Bei reinperiodischen Dezimalbrüchen beginnt diese Ziffernfolge unmittelbar nach dem Komma, bei einem gemischtperiodischen Dezimalbruch stehen zwischen Komma und Periode noch eine oder mehrere Vorziffern.
Soll ein Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umgewandelt werden, so werden die Stellen hinter dem Komma in den Zähler geschrieben und eine Potenz von 10 als Nenner.
Durch *Runden* läßt sich jeder Dezimalbruch auf eine bestimmte Stellenzahl beschränken. Dabei müssen die in der DIN-Vorschrift festgelegten Regeln eingehalten werden.
Bei Rechnungen mit gemessenen Größen ist die Genauigkeit des Ergebnisses im allgemeinen durch die kleinste Anzahl sicherer Ziffern in den Ausgangsgrößen bestimmt.

Übungen

11. Addieren Sie die folgenden Zahlen!

a) 532,2; 843.72; 344,5; 228,75; 0,53; 384,32; 700,03;
b) 528 kg; 6,243 kg; 700 g; 5,38 t; 728,37 kg; 6280,035 kg; 574,567 kg; 2442,39 kg;
c) 94; 185; 295; 84; 785; 394; 284; 395.

12. a) Von 3428,58 kg *sind abzuziehen:*
384,52 kg; 0,94 kg; 46,387 kg; 850 kg!

b) Von 5 t *Düngemittel werden verausgabt:*
1,2 t; 387 kg; 64,3 kg; 5,25 kg; 2,25 t; 7,45 kg.
Welcher Vorrat verbleibt?

13. Multiplizieren Sie!

a) $528{,}3 \cdot 1{,}302$ *b)* $8{,}32 \cdot 0{,}0253$
c) $34{,}382 \cdot 2{,}51$ DM *d)* $15{,}3$ cm $\cdot$ $34{,}3$ cm

14. Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

a) $583{,}68 : 4{,}8$ *b)* $6435 : 25$
c) $0{,}3408 : 0{,}32$ *d)* $65{,}1 : 0{,}0434$

Verwandeln Sie in Dezimalbrüche:

15. a) $\frac{7}{8}$ *b)* $\frac{3}{40}$ *c)* $\frac{5}{16}$ *d)* $\frac{3}{32}$ *e)* $\frac{9}{80}$

16. *a)* $\frac{4}{15}$ *b)* $\frac{5}{12}$ *c)* $\frac{4}{9}$ *d)* $\frac{27}{41}$ *e)* $\frac{7}{22}$

17. *a)* $5\frac{3}{4}$ *b)* $3\frac{5}{8}$ *c)* $2\frac{2}{3}$ *d)* $4\frac{7}{12}$ *e)* $6\frac{5}{7}$

Verwandeln Sie in gemeine oder gemischte Brüche:

18. *a)* 0,24 *b)* 0,64 *c)* 0,55 *d)* 0,175 *e)* 0,0088

19. *a)* 3,75 *b)* 6,125

20. *Runden Sie folgende Zahlen auf zwei Dezimalen:*
3,759; 2,842; 4,8529; 4,2852; 79,2850; 5,2750!

21. *Runden Sie auf Hunderter genau:*
3269; 3249; 3252; 3250; 3350!

[Ü]

3.4 Aufgaben (Übungen 22 bis 43)

Berechnen Sie!

22. *a)* $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}-\frac{7}{10}+\frac{11}{14}$ *b)* $\frac{2}{3}+\frac{8}{15}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$ *d)* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$

e) $\frac{3}{5}+\frac{1}{6}+\frac{5}{9}-\frac{17}{36}-\frac{11}{18}+\frac{5}{12}$ *f)* $\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{9}{24}$

23. *a)* $3\frac{1}{2}-\frac{3}{5}-1\frac{5}{6}$ *b)* $3\frac{1}{7}+5\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

c) $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}-2\frac{2}{5}$ *d)* $1\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}$

24. *a)* $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$ *b)* $16\cdot\frac{5}{8}$ *c)* $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}$ *d)* $3\frac{1}{4}\cdot 5$

25. *a)* $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}$ *b)* $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{12}$ *c)* $2\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{9}$

d) $3\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot 2\frac{11}{12}$ *e)* $\frac{5}{7}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{9}{14}$ *f)* $\frac{7}{12}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{14}$

26. *a)* $1\frac{2}{3}\cdot 5\frac{2}{5}\cdot 7\frac{7}{9}$ *b)* $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}$

c) $2\frac{2}{3}\cdot 4\frac{1}{5}\cdot 3\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}$ *d)* $5\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{5}\cdot 1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}$

27. a) $\frac{14}{25}:\frac{7}{15}$ b) $\frac{27}{40}:\frac{3}{8}$ c) $\frac{12}{17}:\frac{60}{51}$ d) $\frac{21}{26}:\frac{35}{39}$

28. a) $3\frac{3}{14}:\frac{3}{5}$ b) $2\frac{6}{7}:\frac{20}{21}$ c) $\frac{3}{5}:2\frac{2}{9}$ d) $13\frac{1}{5}:\frac{11}{12}$

29. a) $7:\frac{14}{15}$ b) $\frac{5}{11}:25$ c) $\frac{3}{5}:6$ d) $10:\frac{3}{10}$

30. a) $6:3\frac{1}{5}$ b) $4\frac{2}{7}:8$ c) $56:3\frac{15}{37}$ d) $2\frac{6}{17}:8$

31. a) $3\frac{1}{2}:2\frac{3}{5}$ b) $4\frac{3}{7}:6\frac{9}{14}$ c) $2\frac{3}{4}:2\frac{4}{11}$ d) $2\frac{4}{5}:1\frac{1}{20}$

32. a) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{24}}$ b) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{2\frac{4}{5}}$ c) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{2}{7}}{2\frac{1}{2}-\frac{2}{9}}$ d) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{7}}{1\frac{1}{4}-\frac{3}{7}}$

33. a) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{1}{40}}{3\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}+\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{3\frac{4}{7}}{\frac{2}{9}+\frac{4}{7}}+\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{7}{12}}$

34. *Wieviel Kilogramm Dieselkraftstoff verbraucht ein Traktor in* $2\frac{2}{3}$ *Transportstunden, der Verbrauch je Stunde* $3\frac{2}{5}$ kg *beträgt?*

35. *Eine Fläche von* $3\frac{3}{5}$ ha *soll mit Kalkammonsalpeter gedüngt werden.*
Wieviel Dezitonnen[1]) *Kalkammonsalpeter werden benötigt, wenn je Hektar* $\frac{5}{6}$ dt *gebraucht werden?*

36. *Die Werktätigen eines VEG hatten auf einer Fläche von* $2\frac{1}{4}$ ha *insgesamt* $68\frac{1}{4}$ dt *Weizen geerntet.*
Wie groß war der Ernteertrag je Hektar?

37. *Ein Hochofen muß im Vergleich zur erzeugten Roheisenmenge mit der* $2\frac{1}{5}$*fachen Gewichtsmenge an Erz, derselben Menge Koks und der* $\frac{4}{5}$*fachen Menge an Zuschlägen beschickt werden.*
Wieviel Tonnen Erz, Koks und Zuschläge braucht ein Hochofen zur Erzeugung von 750 t *Roheisen?*

38. *Addieren Sie:* 5,5 h; 420 min; $4\frac{1}{4}$ h; 3,2 h; 45 min; 3 h 25 min; $4\frac{3}{5}$ h; 35 min*!*

---

[1]) Eine Dezitonne (dt) ist $\frac{1}{10}$ t, also 1 dt = 0,1 t = 100 kg.

39. Von einem Stoffballen mit 63,50 m *werden nacheinander verkauft:* 4,20 m; 150 cm; 3,80 m; $4\frac{1}{2}$ m; 32 dm; 425 cm; 84,5 dm; 5,8 m.
Wieviel Meter Stoff bleiben übrig?

40. a) $12{,}8 \cdot 0{,}864$ *b)* $0{,}0258 \cdot 0{,}357$ *c)* $28 \cdot 0{,}138$

41. a) Wieviel DM *kosten* 5,83 t *Reis, wenn* 1 kg 1,65 DM *kostet?*
b) Benzol hat eine Dichte von 0,89 g/cm^3. *Wieviel Kilogramm wiegen* 528 l?

42. a) 15,834:364 *b)* 3132:0,135 *c)* 0,2533:0,034

43. Lösen Sie die Divisionsaufgaben, und runden Sie auf drei Stellen hinter dem Komma!
a) 2,5:154 *b)* 0,284:0,359 *c)* 628:4,57

[4]

4 Das Rechnen mit rationalen Zahlen

4.1 Einführung der rationalen Zahl

4.11 Negative Zahlen

Die Addition oder Subtraktion zweier Zahlen können Sie sich am Zahlenstrahl veranschaulichen (vgl. 2.1 und Bild 1), und zwar entspricht auf dem Zahlenstrahl ein Vorwärtsschreiten dem Addieren, z. B. (Bild 2): $5 + 2 = 7$, ein Rückwärtsschreiten dem Subtrahieren, z. B. (Bild 2): $5 - 2 = 3$. Allgemein können Sie jede Additionsaufgabe $a + b = c$ durch ein Vorwärtsschreiten auf dem Zahlenstrahl lösen.
Die Subtraktionsaufgabe $a - b = d$ können Sie im Bereich der Ihnen bisher bekannten Zahlen nur für $a > b$ (gelesen „a größer als b") durchführen. Die Bedürfnisse der Praxis erfordern jedoch die Lösbarkeit der Subtraktionsaufgabe auch für $a = b$ und für $a < b$ (gelesen „a kleiner als b"). Hierzu muß der Zahlenbereich erweitert werden.
Subtrahieren Sie zwei gleich große Zahlen voneinander, so erhalten Sie die Zahl **Null.**

$$5 - 5 = 0 \text{ oder allgemein } a - a = 0$$

Die Zahl Null bedeutet also eine Differenz, bei der Minuend und Subtrahend einander gleich sind. In Bild 2 ist deshalb der Anfangspunkt des Zahlenstrahls mit 0 bezeichnet. (In Bild 1 mußten wir ihn noch mit A bezeichnen, da wir damals nur die natürlichen Zahlen erklärt hatten und diese die Zahl 0 nicht enthalten.) Sie erkennen auch, daß die Null jetzt mehr als nur ein „Leerzeichen" ist, als das sie in 2.2 eingeführt wurde.

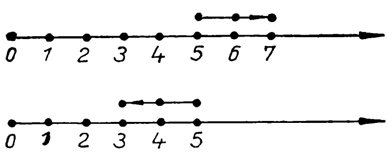


Bild 2

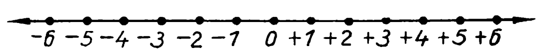


Bild 3

Die Null ist jetzt selbst eine Zahl und hat gleichberechtigt neben den Zahlen 1, 2, 3 usw. ihren Platz auf dem Zahlenstrahl.
In 2.52 haben Sie gelernt, daß sich Addition und Subtraktion der gleichen Zahl gegenseitig aufheben. Sie können nun, nachdem die Null für Sie eine vollwertige Zahl ist, dafür schreiben

$$a + b - b = a + 0 = a.$$

Diese Regel hat große Bedeutung für das Lösen von Bestimmungsgleichungen.
Ferner gilt: Eine Zahl ändert sich nicht, wenn man 0 zu ihr addiert oder von ihr subtrahiert:

$$a + 0 = a \text{ bzw. } b - 0 = b.$$

Die Subtraktionsaufgabe $a - b$ für den Fall $a < b$ kann nicht mehr am Zahlen*strahl* gelöst werden. Wollen Sie z. B. die Aufgabe $5 - 6$ in ähnlicher Weise veranschaulichen wie die Aufgabe $5 - 2$ in Bild 2, so sind Sie gezwungen, den Zahlenstrahl über 0 hinaus nach links zu verlängern, und zwar für die Lösung unserer Aufgabe um eine Einheit.
Um alle Subtraktionsaufgaben lösen zu können, ergibt sich die Notwendigkeit, einen zweiten Zahlenstrahl an 0 anzusetzen, der in entgegengesetzter Richtung, also nach links, weist und zusammen mit dem ersten eine Gerade, die sogenannte **Zahlengerade** (Bild 3), bildet.
Die einzelnen Punkte, die dem Rückwärtsschreiten um je eine Einheit entsprechen, werden wieder vom Nullpunkt aus gezählt, müssen aber von den Punkten des rechtsgerichteten Strahles unterschieden werden. Daher erhalten die links von 0 stehenden Zahlen ein Minuszeichen und heißen **negative Zahlen**.
Im Gegensatz zu den negativen Zahlen werden die Zahlen, die durch Punkte des rechtsgerichteten Strahles veranschaulicht werden, **positive Zahlen** genannt. Sie erhalten das Vorzeichen $+$.
Allgemein: Eine Zahl a ist dann eine positive Zahl, wenn $a > 0$, eine negative Zahl, wenn $a < 0$ ist.
Ein anschauliches Bild für positive und negative Zahlen bietet das Thermometer, dessen Skala nichts anderes als eine vertikal gestellte Zahlengerade darstellt. Hier liegen die negativen Zahlen unter Null und bedeuten „Kältegrade“, während die positiven über Null liegen und „Wärmegrade“ bezeichnen.
Weitere Beispiele für die praktische Anwendung von Plus- und Minusgrößen sind: Guthaben und Schulden, Gewinn und Verlust, nördliche und südliche Breite, östliche und westliche Länge, Lage über und unter dem Meeresspiegel, positive und negative Ladung.

4.12 Begriff der rationalen Zahl

In Kapitel 3 haben Sie neben den ganzen Zahlen die gebrochenen Zahlen kennengelernt. Nunmehr ist der Zahlenbegriff wieder erweitert worden; um Subtraktionsaufgaben uneingeschränkt ausführen zu können, wurden die negativen Zahlen eingeführt.
Der Zahlenbereich der positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen (einschließlich der Null) wird zusammengefaßt unter dem Namen **rationale**[1]**) Zahlen.**
Bei Anwendung der vier Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multipli-

[1]) lat. *ratio*, Vernunft, Berechnung; berechnetes Verhältnis (Quotient).

kation, Division) auf rationale Zahlen bleibt man stets im Bereich der rationalen Zahlen. (Auszuschließen ist nur die Division durch Null, siehe 4.51.) Deshalb kann man definieren:

Jede rationale Zahl kann als Quotient zweier ganzer Zahlen (als Bruch) dargestellt werden.

4.13 Rechenzeichen - Vorzeichen

Die Zeichen + (plus) und — (minus) kennen Sie als Aufforderung, eine bestimmte Rechenoperation auszuführen. Zum Beispiel bedeutet die Aufgabe $4 + 5$: Addieren Sie zu 4 die Zahl 5. In diesem Falle ist das Zeichen + ein **Rechenzeichen** oder **Operationszeichen** mit der Aufforderung, eine bestimmte Rechenoperation (die Addition) auszuführen. Dasselbe gilt für das Minuszeichen.
Mit der Einführung der rationalen Zahlen haben aber diese beiden Zeichen eine weitere Bedeutung bekommen: Sie dienen zum Unterscheiden von positiven und negativen Zahlen. In diesem Falle geben die Zeichen an, ob der Zahlenwert auf der Zahlengeraden rechts oder links von 0 zu finden ist. Man nennt sie dann **Vorzeichen**.

Es ist z. B. $(+5)$ eine positive Zahl, also $(+5) > 0$,
(-5) eine negative Zahl, also $(-5) < 0$.

Die Schreibweise mit runden Klammern deutet an, daß das Vorzeichen eng mit der Zahl verbunden ist, daß die Zeichen zur rationalen Zahl gehören. Außerdem kann dadurch deutlich zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen unterschieden werden.

Beispiel:

Vorzeichen

$$(+9) + (-2) - (+4)$$

Rechenzeichen

Die Aufgabe lautet: Addieren Sie zu $+9$ die Zahl -2, und subtrahieren Sie dann $+4$!

Bei der Erweiterung des bisherigen Zahlenbereiches zum Bereich der rationalen Zahlen wurde es notwendig, positive und negative Zahlen durch das Vorzeichen zu unterscheiden. Die positiven Zahlen stimmen aber mit den bisher verwendeten Zahlen überein (vgl. Zahlengerade und Zahlenstrahl in den Bildern 2 und 3). Man läßt deshalb gewöhnlich bei den positiven Zahlen Vorzeichen und Klammer weg.

$$(+3) = 3 \qquad +0{,}75 = 0{,}75 \qquad (+a) = a$$

Das negative Vorzeichen muß aber stets geschrieben werden.

4.14 Absoluter Betrag

Soll eine Zahl a ohne Vorzeichen genommen werden, so schließt man sie in senkrechte Striche ein. $|a|$ wird gelesen „**absoluter Betrag** von a".

Beispiele: $|+2| = 2$, $|-5| = 5$.

Man rechnet mit absoluten Beträgen wie mit positiven Zahlen, also z. B.

$$|-3| + |+6| = 3 + 6 = 9, \quad |+8| - |-5| = 8 - 5 = 3$$

$$|-8| - |+5| = 8 - 5 = 3, \quad 4 + |+4| + |-4| = 4 + 4 + 4 = 12$$

Zahlen, deren Punkte auf der Zahlengeraden rechts und links vom Nullpunkt liegen und gleichen Abstand von diesem haben (z. B. -1 und $+1$; -3 und $+3$), besitzen den gleichen absoluten Betrag. Solche Zahlen heißen auch *entgegengesetzte Zahlen.* Jede Zahl auf der Zahlengeraden ist kleiner als jede rechts von ihr stehende und größer als jede links von ihr stehende Zahl, unabhängig von den absoluten Beträgen. Kontrollieren Sie daraufhin die Beispiele:

$$+3 < +4 \qquad -1 < +1 \qquad -3 < +3 \qquad -3 < -2$$

$$|+3| < |+4| \qquad |-1| = |+1| \qquad |-3| = |+3| \qquad |-3| > |-2|$$

4.2 Addition und Subtraktion

4.21 Addition rationaler Zahlen

Am besten machen Sie sich die Addition positiver und negativer Zahlen an den beiden Begriffen Guthaben und Schulden klar. Wenn Guthaben (Positives) zu Guthaben (Positivem) kommt, wird das Ergebnis etwas Positives sein; kommen Schulden (Negatives) zu Schulden (Negativem), dann ergibt sich bestimmt etwas Negatives. Guthaben plus Schulden können jedoch - je nachdem, welcher Zahlenwert überwiegt - entweder Guthaben, also etwas Positives, oder Schulden, also etwas Negatives, ergeben. Bei gleichen Beträgen heben sich Guthaben und Schulden auf, und das Ergebnis ist Null. Hieraus folgt:

Entgegengesetzte Zahlen ergeben addiert Null.

$$(+7) + (-7) = 0$$

$$(+a) + (-a) = 0$$

Nach dieser Betrachtung lassen sich bei der Addition rationaler Zahlen vier Fälle unterscheiden:

I.	positive Zahl + positive Zahl	$(+8) + (+6) = +14$
II.	negative Zahl + negative Zahl	$(-8) + (-6) = -14$
III.	positive Zahl + negative Zahl	$(+8) + (-6) = +2$
IV.	negative Zahl + positive Zahl	$(-8) + (+6) = -2$

Wie Sie sehen, ist in den letzten zwei Fällen eine Subtraktion statt einer Addition auszuführen. Entscheidend für das Vorzeichen des Ergebnisses ist dabei, ob der Betrag der positiven Zahl größer ist als der der negativen (III. Fall) oder umgekehrt (IV. Fall). Das Vorzeichen des größeren absoluten Betrages bestimmt das Vorzeichen des Ergebnisses.

Daraus können Sie folgende Regel ableiten:

> Rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen (I und II) werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.
> Rationale Zahlen mit ungleichen Vorzeichen (III und IV) werden addiert, indem man den kleineren absoluten Betrag von dem größeren subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der absolut größeren Zahl gibt.

Beispiele:

$$(+9) + (+12) = +(9+12) = +21$$
$$(-6) + (-17) = -(6+17) = -23$$
$$(+16) + (-5) = +(16-5) = +11$$
$$(-16) + (+5) = -(16-5) = -11$$
$$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = +\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) = +\frac{1}{6}$$
$$\left(+\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$$
$$(+3a) + (-4a) = -a$$
$$(+7a) + (-b) + (-3a) + (-b) = 4a - 2b$$

Sind jeweils mehrere Größen mit dem gleichen Vorzeichen vorhanden, so werden diese erst addiert und dann die beiden Teilsummen.

Beispiele:

$$(+120) + (-57) + (+86) + (+21) + (-88) + (-76)$$
$$= (+227) + (-221) = \underline{\underline{6}}$$
$$(+3a) + (-2b) + (-a) + (-6b) + (+4a) + (+5b)$$
$$= (+7a) + (-a) + (-8b) + (+5b) = \underline{\underline{6a - 3b}}$$

4.22 Subtraktion rationaler Zahlen

Die Subtraktion ist die der Addition entgegengesetzte Rechenart. Wir gehen daher von den Additionsbeispielen im Abschnitt 4.21 aus und subtrahieren die dort addierte Größe vom Ergebnis.

Es galt:	Dann muß auch gelten:
$(+8) + (+6) = +14$	$(+14) - (+6) = +8$
$(-8) + (-6) = -14$	$(-14) - (-6) = -8$
$(+8) + (-6) = +2$	$(+2) - (-6) = +8$
$(-8) + (+6) = -2$	$(-2) - (+6) = -8$

Diese vier Subtraktionsaufgaben können durch die folgenden vier Additionsaufgaben ersetzt werden, die die gleichen Ergebnisse haben:

$$(+\,14) + (-\,6) = +\,8$$
$$(-\,14) + (+\,6) = -\,8$$
$$(+\;\;2) + (+\,6) = +\,8$$
$$(-\;\;2) + (-\,6) = -\,8$$

Ein Vergleich zeigt, daß sich hierbei der Substrahend $(+\,6)$ in den Summanden $(-\,6)$ und der Subtrahend $(-\,6)$ in den Summanden $(+\,6)$ verwandelt hat. Wir erhalten somit den Satz:

Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Beispiele:

$$(+\,15) - (-\,8) = (+\,15) + (+\,8) = 23$$

$$\left(+\,\frac{2}{3}\right) - \left(+\,\frac{4}{5}\right) = \left(+\,\frac{10}{15}\right) + \left(-\,\frac{12}{15}\right) = -\,\frac{2}{15}$$

$$(-\,4b) - (-\,5b) = (-\,4b) + (+\,5b) = b$$

4.23 Algebraische Summe

Aus den eben angeführten Beispielen erkennen Sie, daß Sie jede Subtraktionsaufgabe als Additionsaufgabe schreiben können, z. B.:

$$(+\,5) - (+\,3) = (+\,5) + (-\,3)$$
$$(+\,8) - (-\,6) = (+\,8) + (+\,6)$$

Sie können also in Zahlenausdrücken, deren Glieder durch das Subtraktionszeichen verbunden sind, die Subtraktionszeichen durch Additionszeichen ersetzen, indem Sie das Vorzeichen des Subtrahenden ändern. Dann können Sie den ganzen Ausdruck als Summe schreiben.

Beispielsweise ist der Ausdruck

$$(+\,a) - (+\,b) - (-\,c) + (+\,d) + (-\,e)$$

gleichbedeutend mit

$$(+\,a) + (-\,b) + (+\,c) + (+\,d) + (-\,e).$$

Da sich auf diese Weise jede Differenz in eine Summe verwandeln läßt, verwendet man für beide Ausdrücke die Bezeichnung **algebraische Summe.** Für das praktische Rechnen verfahren Sie aber so, wie Sie es in den beiden vorangegangenen Abschnitten (4.21 und 4.22) gelernt haben. Sie rechnen also

$$(+\,5) + (-\,3) = 5 - 3$$
$$(+\,8) + (+\,6) = 8 + 6.$$

Beispiel:

$$(+2) - (+6) - (-8) + (+7) + (-3)$$

wandeln Sie um in

$$(+2) + (-6) + (+8) + (+7) + (-3)$$

und rechnen

$$2 - 6 + 8 + 7 - 3 = \underline{\underline{8}}$$

Aus diesem Beispiel erkennen Sie:

> Sind in einer algebraischen Summe Vorzeichen und Rechenzeichen gleich, so werden die absoluten Beträge addiert.
> Sind in einer algebraischen Summe Vorzeichen und Rechenzeichen verschieden, so werden die absoluten Beträge subtrahiert.

Merken Sie sich:

$$+(+a) = +a$$
$$+(-a) = -a$$
$$-(+a) = -a$$
$$-(-a) = +a$$

Beispiele:

$$(+8u) + (-6v) - (+9u) - (-13v) + (+4u)$$
$$= 8u - 6v - 9u + 13v + 4u = \underline{\underline{3u + 7v}}$$

$$(+8a) - (+3b) + (+7c) - (-x) + (-4a) + (+b) - (+7x)$$
$$+ (-3a) - (-2b) - (+8c) + (+7x)$$
$$= 8a - 3b + 7c + x - 4a + b - 7x - 3a + 2b - 8c + 7x$$
$$= \underline{\underline{a - c + x}}$$

4.24 Auflösen und Setzen von additiven oder subtraktiven Klammern

Bei der *Addition einer Summe*, z. B. $8 + 3$, zu einer Zahl, z. B. 17, erhalten Sie

$$17 + (8 + 3) = 17 + 11 = 28.$$

Zum gleichen Ergebnis kommen Sie, wenn Sie jeden Summanden einzeln addieren:

$$17 + 8 + 3 = 28.$$

Bei der *Subtraktion der Summe* erhalten Sie

$$17 - (8 + 3) = 17 - 11 = 6.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie jeden Summanden einzeln subtrahieren:

$$17 - 8 - 3 = 6.$$

Bei der *Addition einer Differenz*, z. B. $8 - 3$, zu einer Zahl, z. B. 17, erhalten Sie

$$17 + (8 - 3) = 17 + 5 = 22.$$

Zum gleichen Ergebnis gelangen Sie, wenn Sie zunächst den Minuenden der Differenz addieren und dann den Subtrahenden subtrahieren:

$$17 + 8 - 3 = 22.$$

Bei der *Subtraktion der Differenz* erhalten Sie

$$17 - (8 - 3) = 17 - 5 = 12.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie den Minuenden der Differenz subtrahieren und den Subtrahenden addieren:

$$17 - 8 + 3 = 12.$$

Der Sachverhalt dieser vier Aufgaben lautet mit allgemeinen Zahlsymbolen:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Erweitert man die in den letzten vier Zeilen dargestellten Gesetzmäßigkeiten auf die Addition und Subtraktion algebraischer Summen, so erhält man die **Regeln für das Auflösen von Klammern:**

> Löst man Klammern auf, vor denen ein Pluszeichen steht, so bleiben die Zeichen in der Klammer unverändert.
>
> $$a + (b + c - d) = a + b + c - d$$
>
> Löst man Klammern auf, vor denen ein Minuszeichen steht, so ist jedem Glied in der Klammer das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben.
>
> $$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

Steht vor dem ersten Glied der Klammer kein Vorzeichen, so ist an dieser Stelle ein Pluszeichen zu denken. Pluszeichen *dürfen* beim ersten Glied einer algebraischen Summe weggelassen werden, Minuszeichen dagegen *müssen* immer geschrieben werden.

Beispiele:

$$8a - (4b + 2a) + (3a - 5b) - (4a - 10b)$$
$$= 8a - 4b - 2a + 3a - 5b - 4a + 10b = \underline{\underline{5a + b}}$$

$$(6r - 2s + 12t) - (5r + 6s - 4t) + (3r - 7t)$$
$$= 6r - 2s + 12t - 5r - 6s + 4t + 3r - 7t = \underline{\underline{4r - 8s + 9t}}$$

Liest man die in den Regeln für das Auflösen von Klammern stehenden algebraischen Ausdrücke von rechts nach links, so erhält man die **Regeln für das Setzen von Klammern:**

Setzt man eine algebraische Summe in eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, so behalten alle Glieder ihre Zeichen.

$$a + b + c - d = a + (b + c - d)$$

Setzt man eine algebraische Summe in eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, so sind in der Klammer die entgegengesetzten Zeichen zu setzen.

$$a - b - c + d = a - (b + c - d)$$

Eine algebraische Summe setzt man in eine Klammer, vor der ein negatives Vorzeichen steht, um alle Vorzeichen der algebraischen Summe ändern zu können. Eine Klammer setzt man u. a., wenn der in der Klammer stehende Ausdruck zuerst berechnet werden soll.

Beispiele:

$$\begin{aligned} &24a + 12b + 38a - 8b - 17a + 23b \\ &= (24a + 38a - 17a) + (12b + 23b - 8b) = \underline{\underline{45a + 27b}} \end{aligned}$$

$$246 - 157 + 37 + 34 = 246 + 34 - (157 - 37) = 280 - 120 = \underline{\underline{160}}$$

Bei Berechnungen kommt es oft vor, daß mehrgliedrige Ausdrücke ineinandergeschachtelt auftreten, d. h., es erscheinen in den Klammern selbst wieder Klammern. Dabei gewährleistet die Verwendung von verschiedenen Klammerformen (runde, eckige und geschweifte) einen besseren Überblick. *Es ist ratsam, die Klammern stets von innen nach außen aufzulösen.*

Lehrbeispiel 14

$$10m - [(8m + 2n) - (6m - n)]$$

Lösung:

Zuerst die inneren Klammern auflösen:

$$10m - [8m + 2n - 6m + n]$$

Vereinfachen: $10m - [2m + 3n]$

Dann die äußeren Klammern auflösen:

$$10m - 2m - 3n = \underline{\underline{8m - 3n}}$$

Lehrbeispiel 15

$$45a - \{50a - [10a - (3b + 4c) + (6b - 5c)]\}$$

Lösung:

Die Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

$$\begin{aligned} &45a - \{50a - [10a - 3b - 4c + 6b - 5c]\} \\ &= 45a - \{50a - [10a + 3b - 9c]\} \\ &= 45a - \{50a - 10a - 3b + 9c\} \\ &= 45a - \{40a - 3b + 9c\} \\ &= 45a - 40a + 3b - 9c \\ &= \underline{\underline{5a + 3b - 9c}} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Zu den *rationalen Zahlen* gehören die ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen und die Zahl Null.
Unter dem *absoluten* Betrag einer rationalen Zahl versteht man den Wert dieser Zahl, ohne dabei das Vorzeichen zu berücksichtigen.
Rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden *addiert*, indem man ihre absoluten Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt. Rationale Zahlen mit ungleichen Vorzeichen werden *addiert*, indem man den kleineren absoluten Betrag vom größeren subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der absolut größeren Zahl gibt.
Eine rationale Zahl wird *subtrahiert*, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Für das Auflösen von *Klammern* gilt:
Das Pluszeichen vor der Klammer hat auf die Zeichen in der Klammer keinen Einfluß;
das Minuszeichen vor der Klammer kehrt nach dem Auflösen die Zeichen in der Klammer um.

Schließt man eine algebraische Summe in eine Klammer ein, so behalten alle Glieder der algebraischen Summe ihre Zeichen, wenn vor die Klammer ein Pluszeichen gesetzt wird; sie müssen aber alle das entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn vor die Klammer ein Minuszeichen kommen soll. Sind Klammerausdrücke wiederum von Klammern eingeschlossen, so löst man die Klammern zweckmäßig von innen her auf.

Übungen

44. *Berechnen Sie:*

a) $(+8) - (-6)$ *b)* $(+13) + (-9)$

c) $(+21) - (+30)$ *d)* $(-96) - (+28)$

e) $(-104) + (+200)$ *f)* $(-53) - (-28)$

45. *Berechnen Sie für* $x = -8$ *und* $y = -5$ *die folgenden Ausdrücke!*

a) $x + y$ *b)* $x - y$

c) $|x| + |y|$ *d)* $|x| - |y|$

e) $|x - y|$ *f)* $|y - x|$

46. *Berechnen Sie:*

a) $(-12) - (+14) - (-9) - (+16) - (-8) - (+11)$

b) $(+18z) - (-5z) - (-39z) - (+12z) - (+3z)$

c) $(+36u) - (-12v) + (+24v) - (+14u) + (-48v)$

d) $(+2{,}5a) + (3{,}6b) - (+0{,}7a) - (-2{,}3a) - (+3{,}7b)$

47. *a)* $(a - b + c) - (a + b - c)$

b) $(6x - 2y) - (4x + y) + (3x - 5y)$

c) $(2x + 12) - [3x - (10 - 5x) + 8]$

48. *Berechnen Sie die Ausdrücke*

a) $A - B + C - D$ und *b)* $A + B - C - D$

für $A = 6a + 12b$
$B = 3a - 4b$
$C = 4a - 5$
$D = 2 - b$!

49. *a)* $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c\right) - \left(\frac{1}{6}a - \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c\right) - \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{12}c\right)$

b) $\left(2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{4}y\right) - \left[\left(1\frac{5}{6}x - 2y\right) - \left(1\frac{3}{4}y - 2\frac{1}{2}z\right)\right] - \left(\frac{2}{3}x - 2{,}5z\right)$

c) $(5a + 3b) + \{(12a - 6b) - [(10a - 2b) - (3a - 4b)]\}$

d) $[(3{,}52a - 2{,}73b) - (2{,}79a - 2{,}84b)] - \{6{,}3a - [0{,}9b + (3{,}5a - 0{,}67b)]\}$

[5]

4.3 Multiplikation

4.31 Multiplikation rationaler Zahlen

Grundlegendes über die Multiplikation haben Sie bereits in Abschnitt 2.53 erfahren. Es ist aber noch zu beachten:

Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit 1 multipliziert.

$$a \cdot 1 = a$$

Ein Produkt hat den Wert Null, wenn wenigstens ein Faktor Null ist.

$$a \cdot b \cdot 0 = 0$$

Umgekehrt gilt:

Ist ein Produkt gleich Null, so ist mindestens ein Faktor Null.

Aus $6x = 0$
folgt, daß $x = 0$ ist; denn es ist $6 \neq 0$.

Ein Produkt aus zwei Faktoren können Sie geometrisch deuten. Fassen Sie in dem Produkt $a \cdot b$ die Faktoren a und b als die Längen von zwei Strecken auf, so stellt das Produkt ab geometrisch die Fläche eines Rechteckes mit den Seiten a und b dar.
Auch ein Produkt aus drei Faktoren läßt sich noch geometrisch veranschaulichen. Sind a, b und c die drei Kanten eines Quaders, so ist das Produkt abc als Rauminhalt (Volumen) dieses Quaders zu deuten.

Bei der Multiplikation rationaler Zahlen kommen vier Fälle in Betracht:

speziell	$(+3) \cdot (+4)$	allgemein	$(+a) \cdot (+b)$
	$(+3) \cdot (-4)$		$(+a) \cdot (-b)$
	$(-3) \cdot (+4)$		$(-a) \cdot (+b)$
	$(-3) \cdot (-4)$		$(-a) \cdot (-b)$

Zunächst ergibt sich in der Schreibweise eine Vereinfachung, indem Sie a für $(+a)$ und b für $(+b)$ setzen, was ja erlaubt ist.

Verwenden Sie weiter die Erklärung der Multiplikation als Addition gleicher Summanden, dann können Sie schreiben:

$$\begin{aligned}(+3)\cdot(+4) &= 3\cdot 4 = 4+4+4 = 12\\ (+3)\cdot(-4) &= 3\cdot(-4) = (-4)+(-4)+(-4) = -12\\ (-3)\cdot(+4) &= (-3)\cdot 4 = 4\cdot(-3)\\ &= (-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -12\end{aligned}$$

Diese drei Fälle bieten keine Schwierigkeiten. Das Vertauschungsgesetz der Faktoren gilt auch für rationale Zahlen, so daß Sie im dritten Fall

$$(-3)\cdot 4 = 4\cdot(-3)$$

setzen konnten. Nicht so einfach ist der vierte Fall zu erklären. Man hat hier eine *Festsetzung* getroffen, und zwar so, daß die bisher abgeleiteten Rechengesetze ihre Gültigkeit behalten.

Nach dieser Festsetzung gilt:

$$(-3)\cdot(-4) = +12$$

allgemein $$(-a)\cdot(-b) = +ab$$

Die vier Fälle der Multiplikation sind also

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & (+a)\cdot(+b) = +ab\\ \text{II} & (+a)\cdot(-b) = -ab\\ \text{III} & (-a)\cdot(+b) = -ab\\ \text{IV} & (-a)\cdot(-b) = +ab\end{array}} \qquad (1)$$

Vorzeichenregel:

Zwei Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergeben ein positives, mit ungleichen Vorzeichen ein negatives Produkt.

Schematisch kann auch geschrieben werden:

$(+)\cdot(+) = +$	plus	mal plus	gleich plus
$(+)\cdot(-) = -$	plus	mal minus	gleich minus
$(-)\cdot(+) = -$	minus	mal plus	gleich minus
$(-)\cdot(-) = +$	minus	mal minus	gleich plus

Mit Hilfe der Vorzeichenregel sind Sie in der Lage, auch Produkte mit mehr als zwei Faktoren zu berechnen, indem Sie immer zwei zu einem Produkt zusammenfassen und auf diese Produkte Formel (1) anwenden.

Beispiele:

$$\begin{aligned}(+3)\cdot(+4)\cdot(+5) &= [(+3)\cdot(+4)]\cdot(+5) = (+12)\cdot(+5) = +60\\ (+3)\cdot(+4)\cdot(-5) &= [(+3)\cdot(+4)]\cdot(-5) = (+12)\cdot(-5) = -60\\ (+3)\cdot(-4)\cdot(-5) &= [(+3)\cdot(-4)]\cdot(-5) = (-12)\cdot(-5) = +60\\ (-3)\cdot(-4)\cdot(-5) &= [(-3)\cdot(-4)]\cdot(-5) = (+12)\cdot(-5) = -60\\ (+6t)\cdot(-8s)\cdot(-2w) &= \underline{\underline{96stw}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-5m)\cdot(-4n)-(-3m)\cdot(+8n) = (+20mn)-(-24mn)\\ &= 20mn+24mn = \underline{\underline{44mn}}\end{aligned}$$

4.32 Multiplikation einer algebraischen Summe mit einer Zahl

Bei der Addition natürlicher Zahlen setzen wir Klammern, um anzudeuten, in welcher Reihenfolge die Addition durchgeführt werden soll, z. B.

$$39 + 26 + 11 = (39 + 11) + 26 = 50 + 26 = 76.$$

Die Klammern können aber jederzeit auch weggelassen werden.

Klammern, die durch das Multiplikationszeichen mit weiteren Zahlgrößen verbunden sind, sogenannte multiplikative Klammern, dürfen keinesfalls weggelassen werden, da sonst wertmäßig ganz verschiedene Ausdrücke entstehen.

Zwei Aufgaben, z. B.

$$12 + 4 \cdot 8 \text{ und } (12 + 4) \cdot 8,$$

führen zu verschiedenen Ergebnissen.

In der Aufgabe $12 + 4 \cdot 8$ ist auf Grund einer allgemeinen Festsetzung zuerst die Multiplikation auszuführen und dann die Summe $12 + 32 = 44$ zu berechnen.

In der Aufgabe $(12 + 4) \cdot 8$ ist nach der Bedeutung von Klammern zuerst die Addition auszuführen und dann das Produkt $16 \cdot 8 = 128$ zu berechnen.

Dementsprechend rechnen Sie $18 - 5 \cdot 3 = 18 - 15 = 3$

und $(18 - 5) \cdot 3 = 13 \cdot 3 = 39.$

Da die Addition und die Subtraktion die Rechenarten der ersten Stufe, die Multiplikation und die Division die Rechenarten der zweiten Stufe bilden, können Sie sich als Regel merken:

> Die Rechenart höherer Stufe (Multiplikation, Division) geht immer der der niederen Stufe (Addition, Subtraktion) vor. Ist eine Klammer vorhanden, so ist zuerst der Wert der Klammer auszurechnen, auch wenn in der Klammer eine Rechenart niederer Stufe durchzuführen ist.

Da die Rechenzeichen für die Addition (+) und für die Subtraktion (—) aus Strichen, die für die Multiplikation (·) und Division (:) aus Punkten zusammengesetzt sind, kann man sich auch merken:

„Punkt“-Rechenart geht vor „Strich“-Rechenart.

Lehrbeispiel 16

$$\begin{aligned} & 50 + 36:9 + 2 \cdot (28 - 3 \cdot 6) \\ = {} & 50 + 4 + 2 \cdot (28 - 18) \\ = {} & 54 + 2 \cdot 10 = \underline{\underline{74}} \end{aligned}$$

Liegen Klammerausdrücke mit allgemeinen Zahlsymbolen vor, können Sie nicht so rechnen. Dann gehen Sie den Weg, den Sie auch beim Multiplizieren großer Zahlen einschlagen.

Sie rechnen z. B.: $6 \cdot 57 = 6 \cdot (50 + 7) = 6 \cdot 50 + 6 \cdot 7 = 342.$

Unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole können Sie den Rechenvorgang so darstellen:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{2a}$$

Entsprechend gilt für die Multiplikation einer Differenz:

$$a \cdot (b - c) = ab - ac \qquad (2b)$$

Fassen Sie diese beiden Formeln zusammen, so läßt sich als Regel formulieren:

Eine algebraische Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Summe mit dieser Zahl multipliziert und die Teilprodukte addiert bzw. subtrahiert.

$$\boxed{a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac} \qquad (2)$$

Diese Beziehungen lassen sich geometrisch veranschaulichen, indem die drei Produkte $a \cdot (b \pm c)$, ab und ac als Rechtecke dargestellt werden. In Bild 4 ist das größte Rechteck gleich der Summe der beiden kleineren. In Bild 5 stellt das stark umrandete Rechteck die Differenz von zwei anderen Rechtecken dar.

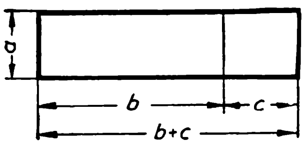


Bild 4

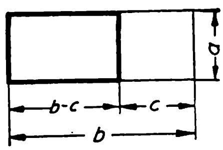


Bild 5

Man bezeichnet den Klammerausdruck - wie überhaupt jede algebraische Summe - auch als **Polynom**[1]), die einzelnen Summanden des Polynoms als seine Glieder. Ist das Polynom zweigliedrig, so heißt es **Binom**[2]). So ist der Ausdruck

$$(2a - b + c)\,(a - 3b + 2c + 5d)$$

ein Produkt aus zwei Polynomen, der Ausdruck

$$(a + b)\,(a - b)$$

ein Produkt aus zwei Binomen.

Die allgemeinen Zahlsymbole in (2) vertreten beliebige rationale Zahlen. Ist z. B. a eine negative Zahl, d. h., ist die Klammer mit einem negativen Faktor zu multiplizieren, dann ändern sich zugleich auch die Zeichen der einzelnen Glieder.

Lehrbeispiel 17

$$(-4) \cdot (5a - 4b - x + 2)$$

Lösung:

Sie multiplizieren jedes Glied des Polynoms mit -4:

$$\underline{\underline{-20a + 16b + 4x - 8}}$$

---

[1]) griech. *polys*, viel; griech. *nomos*, das Festgesetzte; *Polynom*, vielgliedrige algebraische Größe.

[2]) lat. *bis*, zweimal; *Binom*, zweigliedrige algebraische Größe.

Lehrbeispiel 18

$$5(a - 2b - 3c)\,x - 3(3a - 4b - 5x)\,c + 2(5x - 6c)$$

Lösung:

Hier wird man in den ersten beiden Produkten die Reihenfolge der Faktoren vertauschen und zunächst 5 mit x bzw. 3 mit c multiplizieren. Die Produkte $5x$ bzw. $3c$ multipliziert man dann nach Formel (2) mit den Klammern.

$$\begin{aligned} & 5x(a - 2b - 3c) - 3c(3a - 4b - 5x) + 2(5x - 6c) \\ = {} & 5ax - 10bx - 15cx - 9ac + 12bc + 15cx + 10x - 12c \\ = {} & \underline{\underline{5ax - 10bx - 12c + 10x - 9ac + 12bc}} \end{aligned}$$

Formel (2) können Sie auch von rechts nach links lesen.

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

besagt dann, daß die algebraische Summe der beiden Produkte durch **Ausklammern** des gemeinsamen Faktors a in ein Produkt verwandelt werden kann.

Beispiele: $$18m + 18n - 18p = 18(m + n - p)$$

Der gemeinsame Faktor ist 18.

$$6uv - 10uw + 16uz = 2u(3v - 5w + 8z)$$

Der gemeinsame Faktor ist $2u$. Jedes Glied des Polynoms wird durch den gemeinsamen Faktor geteilt.

Lehrbeispiel 19

Klammern Sie den gemeinsamen Faktor aus:

$$\frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{6}ab - \frac{3}{4}ab^2$$

Lösung:

In diesem Falle läßt sich der gemeinsame Faktor nicht ohne weiteres feststellen. Da es sich um Brüche handelt, ermitteln Sie zuerst den Hauptnenner. Dann können Sie die einzelnen Glieder in Faktoren zerlegen, aus denen Sie den gemeinsamen Faktor herausfinden.

$$\frac{4}{12}a^2b + \frac{2}{12}ab - \frac{9}{12}ab^2$$

Als gemeinsamen Faktor klammern Sie $\frac{1}{12}ab$ aus, so daß Sie erhalten:

$$\frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{6}ab - \frac{3}{4}ab^2 = \underline{\underline{\frac{1}{12}ab(4a + 2 - 9b)}}$$

Sind alle Glieder, die einen gemeinsamen Faktor enthalten, negativ, so klammert man den Faktor mit negativem Vorzeichen aus.

Beispiele: $$\begin{aligned} -18a^2 - 9a - 6ab &= -3a(6a + 3 + 2b) \\ m^2 - 12n^2 - 24n &= m^2 - 12n(n + 2) \end{aligned}$$

Beim Ausklammern wird die Klammer, die beim Ausmultiplizieren verschwindet, wieder eingeführt. Das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus einer algebraischen Summe und die Multiplikation einer algebraischen Summe mit einer Zahl sind entgegengesetzte Rechenvorgänge.

Sie können sich das folgende Schema einprägen:

Ausklammern

$$\longrightarrow$$

$$ab + ac - ad = a\,(b + c - d)$$

$$\longleftarrow$$

Ausmultiplizieren

Wurde also ein Ergebnis durch Ausklammern gewonnen, so macht man die Probe, indem man die Klammern im Ergebnis wieder ausmultipliziert. Führen Sie selbst bei den eben gelösten Aufgaben die Probe in dieser Art durch!

Oft ist auch ein wiederholtes Ausklammern möglich, wie das folgende Lehrbeispiel zeigt.

Lehrbeispiel 20

$$a^2 + 2a + ab + 2b$$

Lösung:

Sie fassen hier je zwei Glieder zusammen und schreiben

$$a\,(a + 2) + b\,(a + 2).$$

Der Klammerausdruck ist in jedem der beiden Summanden als Faktor enthalten und kann wiederum ausgeklammert werden:

$$a\,(a + 2) + b\,(a + 2) = \underline{\underline{(a + 2)\,(a + b)}}$$

Das Ergebnis ist ein Produkt von zwei Binomen[1]).

Lehrbeispiel 21

$$8xy - 4y - 4x + 2$$

Lösung:

In allen Gliedern ist der Faktor 2 enthalten, den Sie ausklammern können.

$$8xy - 4y - 4x + 2 = 2\,(4xy - 2y - 2x + 1)$$

Weiter erkennen Sie, daß die ersten beiden Glieder der Klammer den Faktor $2y$ gemeinsam haben. Sie klammern $2y$ aus:

$$= 2\,[2y\,(2x - 1) - 2x + 1]$$

Scheinbar läßt sich jetzt nichts mehr vereinfachen. Da aber auch die Zahl (-1) ein Faktor sein kann und durch Ausklammern dieses Faktors aus den letzten beiden Gliedern der gleiche Faktor wie im ersten Glied der Klammer, nämlich $(2x - 1)$, entsteht, ist doch noch eine weitere Vereinfachung möglich.

[1]) Die Probe für die Lehrbeispiele 20 und 21 können Sie erst nach dem Studium des Abschnitts 4.33 ausführen.

$$2\,[2y\,(2x - 1) - 2x + 1] = 2\,[2y\,(2x - 1) - 1\,(2x - 1)]$$

Nun kann noch der gemeinsame Faktor $(2x - 1)$ ausgeklammert werden.

$$8xy - 4y - 4x + 2 = \underline{\underline{2\,(2x - 1)\,(2y - 1)}}$$

4.33 Multiplikation zweier Polynome

Die Regel für die Multiplikation zweier und mehrerer Polynome können Sie aus der Multiplikation eines Polynoms mit einer Zahl herleiten.
Ersetzen Sie nämlich in $(a + b)f = af + bf$ den Faktor f auf beiden Seiten durch eine Summe $f = c + d$, so wird die linke Seite das Produkt zweier Binome:

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d)$$

Sie multiplizieren die Klammern der rechten Seite aus:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Merken Sie sich also:

> Zwei Polynome werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied des ersten Polynoms mit jedem Glied des zweiten Polynoms multipliziert und die Produkte addiert.

Es ist zweckmäßig, die Multiplikation immer in einer bestimmten Reihenfolge durchzuführen, z. B.:

Erstes Glied der ersten Klammer mit allen Gliedern der zweiten Klammer.

Zweites Glied der ersten Klammer mit allen Gliedern der zweiten Klammer usw.

Allgemein: Jedes Glied der ersten Klammer mit allen Gliedern der zweiten Klammer.

Beispiel:

$$(a + b)\,(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz$$

Die geometrische Veranschaulichung des Produktes $(a + b)\,(c + d)$ finden Sie in Bild 6. Das große Rechteck ist gleich der Summe von vier Teilrechtecken.

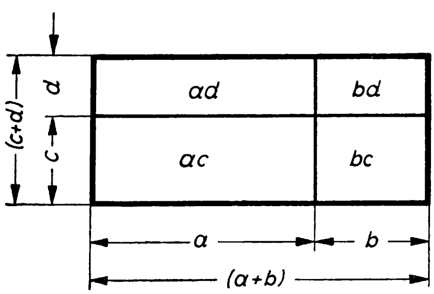


Bild 6

Unter Berücksichtigung der Vor- bzw. Rechenzeichen erhalten Sie in gleicher Weise:

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Beachten Sie: Zwei Teilprodukte sind immer negativ!

Weitere Beispiele der Multiplikation von mehrgliedrigen Ausdrücken (Polynomen):

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be \qquad (2 \cdot 3) \text{ Teilprodukte}$$
$$(a + b + c)(d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf \qquad (3 \cdot 3) \text{ Teilprodukte}$$
$$(a + b)(c + d) \cdot e = ace + ade + bce + bde \qquad (2 \cdot 2) \text{ Teilprodukte}$$
$$\begin{aligned}(a + b)(c + d)(e + f) &= (ac + ad + bc + bd)(e + f)\\ &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf\end{aligned} \qquad (2 \cdot 2 \cdot 2) \text{ Teilprodukte}$$

Die Anzahl der durch die Multiplikation entstandenen Glieder ist also leicht vor dem Zusammenfassen (zur Kontrolle!) aus der Aufgabe zu bestimmen.

Lehrbeispiel 22

$$\begin{aligned}&(3m - 2n)(4m - 5n + p)\\ &= 12m^2 - 15mn + 3mp\\ &\qquad\quad - 8mn \qquad\quad + 10n^2 - 2np\\ &= \underline{\underline{12m^2 - 23mn + 3mp + 10n^2 - 2np}}\end{aligned}$$

Zusammenfassung

Die dritte Grundrechenart ist die Multiplikation.

$$a \cdot b = c$$

Faktor mal Faktor gleich Produkt.

Faktoren sind vertauschbar (kommutatives Gesetz).

Ist mindestens einer der Faktoren eines Produktes Null, so hat das Produkt den Wert Null. Umgekehrt gilt: Ist ein Produkt gleich Null, so muß mindestens einer seiner Faktoren Null sein.

Multipliziert man zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen miteinander, so erhält man ein positives Produkt. Multipliziert man zwei rationale Zahlen mit ungleichen Vorzeichen miteinander, so erhält man ein negatives Produkt. Soll eine Rechenart niederer Stufe vorrangig vor einer Rechenart höherer Stufe angewendet werden, so muß der zuerst zu berechnende Ausdruck in eine *Klammer* gesetzt werden. Auch bei Rechenarten gleicher Stufe können Klammern gesetzt werden, um anzudeuten, daß die in ihnen stehenden Ausdrücke zuerst zu berechnen sind.

Eine Zahl wird mit einer algebraischen Summe multipliziert, indem die Zahl mit jedem Glied der algebraischen Summe multipliziert wird und die erhaltenen Produkte addiert werden. Umgekehrt kann aus einer algebraischen Summe, deren Glieder einen Faktor gemeinsam haben, dieser Faktor ausgeklammert werden.

Zwei algebraische Summen werden miteinander multipliziert, indem jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die Produkte addiert werden.

Übungen

50. *a)* $(+4x)\cdot(-3y)\cdot(-0{,}2z)$

b) $(-6u)\cdot(-6v)\cdot(-6w)$

c) $(-0{,}7a)\cdot(+1{,}2b)\cdot(-c)$

51. *a)* $(-4d)\cdot(+15e)+(-5d)\cdot(-13e)$

b) $(+0{,}8r)\cdot(-9s)-(-10r)\cdot(+1{,}1s)$

52. *a)* $4\cdot(14p-15q)$ *b)* $x\cdot(x^2+9x)$

c) $(4a-7b)\cdot 0{,}3ab$ *d)* $60u-3(15u+8)$

53. *a)* $1{,}4(3s+4t)-0{,}8(5s-3t)$

b) $(3x+2y-1)\cdot 5a$

c) $3[40x-2(5x+8)+10(2-x)]$

d) $[a(a^2+a-1)-a^2(a+1)]\cdot 5$

54. *Klammern Sie die gemeinsamen Faktoren aus und prüfen Sie die Richtigkeit der Ergebnisse durch Ausmultiplizieren nach!*

a) $15a+20b-10c$

b) $2\pi r^2+2\pi rh$

c) $72x^3+48x^2-96x$

55. *Wenden Sie das Ausklammern wiederholt an!*

a) $57a^2-21ab-42ac$ *b)* $x^2-3x+xy-3y$

c) $6ax-4ay-9bx+6by$

d) $1{,}2ax-1{,}5bx-4{,}4ay+5{,}5by+2{,}4az-3bz$

Anleitung: Je zwei Glieder zusammenfassen.

56. *Multiplizieren Sie aus!*

a) $(842x-736)(0{,}125-0{,}02x)$ *b)* $(m-n+p)(3m+2n)$

c) $(3u-1)(4u-v+2)$ *d)* $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

e) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$

4.4 Potenzen von Binomen und Polynomen

4.41 Die 2. Potenz von Binomen und Polynomen

Die Potenzschreibweise als „Kurzschreibweise“ für die Multiplikation gleicher Faktoren gilt nicht nur für einzelne Zahlen, sondern auch für Faktoren, die selbst wieder algebraische Summen (Polynome) sind. Besonders wichtig sind die Potenzen zweigliedriger Summen oder Differenzen, für die wir den Namen *Binom* eingeführt hatten. Für ein Produkt mit zwei gleichen Faktoren $(a + b)$ kann man schreiben:

$$(a + b)\,(a + b) = (a + b)^2.$$

Multiplizieren Sie das Produkt der linken Seite aus, so erhalten Sie

$$(a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2.$$

Also gilt die

1. binomische Formel

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \tag{3}$$

Verwenden wir für die 2. Potenz die übliche Bezeichnung „Quadrat“ und für das mittlere Glied $(2ab)$ der rechten Seite die Bezeichnung „doppeltes Produkt“, so heißt die Regel:

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

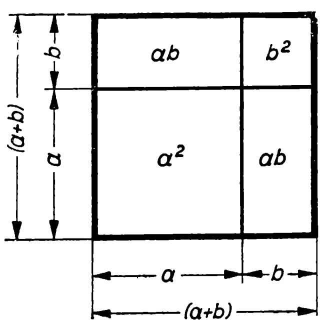


Bild 7

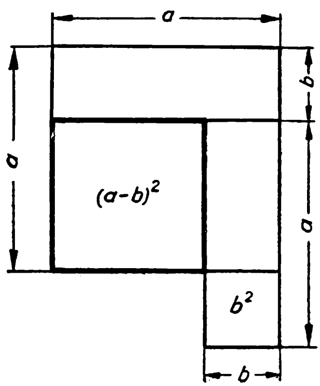


Bild 8

Geometrisch veranschaulicht, stellt $(a + b)^2$ eine Quadratfläche mit der Seite $(a + b)$ dar, $a^2 + 2ab + b^2$ dagegen die Summe zweier Quadrate und zweier gleich großer Rechtecke (Bild 7).

$(a - b)^2$ ist das Quadrat einer Differenz. Schreiben Sie die Potenz als Produkt und multiplizieren Sie die Faktoren aus, so erhalten Sie

$$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

und somit die

2. binomische Formel

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (4)$$

Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

Wollen Sie diese Formel geometrisch veranschaulichen, so müssen Sie, wie Bild 8 zeigt, an das größere Quadrat (a^2) zunächst ein kleineres Quadrat (b^2) ansetzen, um darauf die zwei gleichen Rechtecke ($2ab$) „abschneiden" zu können.

Vergleichen Sie die Formeln (3) und (4), so erkennen Sie: Die rechten Seiten unterscheiden sich nur im Vorzeichen des doppelten Produktes.
Sie können deshalb zusammenfassen:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Beim Rechnen der folgenden Beispiele werden Sie die typische Form der binomischen Formeln wiedererkennen. Durch Anwenden der Formeln erübrigt sich das „Ausmultiplizieren" der einzelnen Glieder.

Beispiel:

$(2u + 3v)^2$ Hierbei ist $a = 2u$ und $b = 3v$. Also wird aus

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(2u + 3v)^2 = (2u)^2 + 2 \cdot 2u \cdot 3v + (3v)^2 = \underline{\underline{4u^2 + 12uv + 9v^2}}$$

Weitere Beispiele:

$$(2 + m)^2 = 2^2 + 2\;\;2 \cdot m + m^2 = \underline{\underline{4 + 4m + m^2}}$$

$$(3a + 5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = \underline{\underline{9a^2 + 30ab + 25b^2}}$$

$$(4x - 6y)^2 = \underline{\underline{16x^2 - 48xy + 36y^2}}$$

$$\left(\frac{3}{4}m - \frac{2}{3}n\right)^2 = \frac{9}{16}m^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}mn + \frac{4}{9}n^2 = \underline{\underline{\frac{9}{16}m^2 - mn + \frac{4}{9}n^2}}$$

Die beiden Formeln (3) und (4) lassen sich vorteilhaft verwenden, um *zweistellige Zahlen* rasch im Kopf zu *quadrieren.*

Beispiele:

$$43^2 + (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = \underline{\underline{1849}}$$

$$37^2 = (40 - 3)^2 = 40^2 - 2 \cdot 3 \cdot 40 + 3^2 = 1600 - 240 + 9 = \underline{\underline{1369}}$$

$$F = (19{,}8\ \text{cm})^2 = (20\ \text{cm} - 0{,}2\ \text{cm})^2 = 400\ \text{cm}^2 - 8\ \text{cm}^2 + 0{,}04\ \text{cm}^2$$
$$= 392{,}04\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{392\ \text{cm}^2}}$$

Am letzten Beispiel erkennen Sie: Ist b ($= 0{,}2$ cm) sehr viel kleiner als a ($= 20$ cm), geschrieben $b \ll a$, so kann b^2 im Ergebnis vernachlässigt werden. Für überschlägliches Rechnen gilt in diesem Falle also:

$$(a \pm b)^2 \approx a^2 \pm 2ab \qquad (\text{wenn } b \ll a)$$

Multiplizieren Sie die Summe $(a + b)$ mit der Differenz $(a - b)$ zweier Zahlen. dann erhalten Sie

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

und somit die **3. binomische Formel**

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad (5)$$

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen.

Beispiele:

$$(2x + 7y)(2x - 7y) = 4x^2 - 49y^2$$
$$(11s + 12t)(11s - 12t) = 121s^2 - 144t^2$$
$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

In Bild 9 ist Formel (5) geometrisch veranschaulicht. Die beiden stark umrandeten Flächen sind gleich groß; durch Schnittlinien sind sie in gleiche Trapeze zerlegt. Das Rechteck hat die Seiten $(a + b)$ und $(a - b)$, die miteinander multipliziert die Fläche

$$F = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

ergeben.

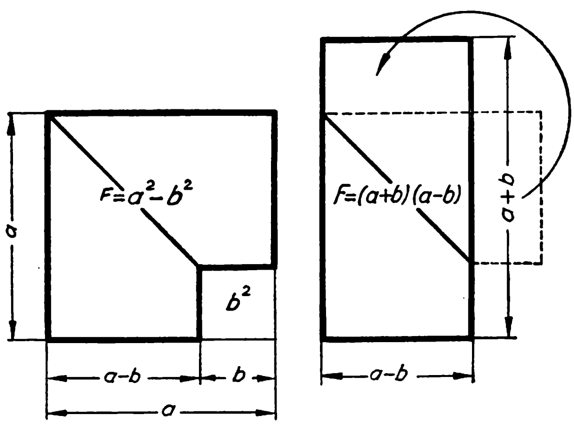


Bild 9

Formel (5) wird dazu benutzt, um zwei zweistellige Zahlen, die gleich weit über wie auch unter einer Zehnerzahl liegen, im Kopf miteinander zu multiplizieren.

Beispiele:

$$65 \cdot 55 = (60 + 5)(60 - 5) = 60^2 - 5^2 = 3600 - 25 = \underline{\underline{3575}}$$

$$83 \cdot 77 = (80 + 3)(80 - 3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = \underline{\underline{6391}}$$

In komplizierten Rechnungen sind drei, vier- und mehrgliedrige Ausdrücke manchmal nicht zu vermeiden. Das Ausrechnen ihrer Quadrate ergibt entspechend vielgliedrige Summen:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac \\ &\quad + ab + b^2 + bc \\ &\quad + ac + bc + c^2 \\ &= \underline{\underline{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2}}\end{aligned}$$

Die innere Gesetzmäßigkeit des Ergebnisses überblicken Sie leichter, wenn Sie erst die Quadrate alphabetisch ordnen und dann die doppelten Produkte der Einzelglieder dazuschreiben:

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} \qquad (6)$$

Entsprechend ist

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Für $(-a - b - c)^2$ erhalten Sie denselben Wert wie für $(a + b + c)^2$, da Quadrate aus negativen Zahlen und die Produkte aus zwei negativen Zahlen positiv sind.

Beispiele:

$$(2a + 3b + 4c)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab + 16ac + 24bc$$

$$\left(5x - y - \frac{1}{2}z\right)^2 = 25x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 10xy - 5xz + yz$$

4.42 Die 3. Potenz eines Binoms

Haben Sie das Binom $(a + b)$ dreimal als Faktor zu setzen, so können Sie statt dessen eine 3. Potenz schreiben

$(a + b)^3$ (lies „$a + b$, in Klammern, hoch 3").

Durch Ausmultiplizieren erhalten Sie:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2\,(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+\ \ ab^2\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \ \ a^2b+2ab^2+b^3\\ &= \underline{\underline{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}\end{aligned}$$

Beachten Sie: Mit fallenden Potenzen von a steigen die Potenzen von b!

Gleicherweise können Sie die 3. Potenz des Binoms $(a-b)$ ausrechnen.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^2\,(a-b)\\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3-2a^2b+\ \ ab^2\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \ \ a^2b+2ab^2-b^3\\ &= \underline{\underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}}\end{aligned}$$

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse: Die Zahlenwerte sind in beiden Ergebnissen gleich, im zweiten Ergebnis wechseln nur die Rechenzeichen. Daher lassen sich beide Ergebnisse in eine Formel zusammenfassen:

$$\boxed{(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} \qquad (7)$$

Beispiele:

$$(2x+3y)^3 = 8x^3 + 3\cdot 4x^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot 9y^2 + 27y^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b\right)^3 &= \frac{8}{27}a^3 - 3\cdot\frac{4}{9}a^2\cdot\frac{1}{6}b + 3\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{36}b^2 - \frac{1}{216}b^3\\ &= \underline{\underline{\frac{8}{27}a^3 - \frac{2}{9}a^2b + \frac{1}{18}ab^2 - \frac{1}{216}b^3}}\end{aligned}$$

Formel (7) kann zum Berechnen von Kubikzahlen (das sind die 3. Potenzen von Zahlen) benutzt werden.

Sie berechnen z. B. das Volumen eines Würfels bei gegebener Kantenlänge von 2,3 cm:

$$\begin{aligned}V &= (2{,}3\text{ cm})^3 = (2\text{ cm} + 0{,}3\text{ cm})^3\\ &= (2\text{ cm})^3 + 3\cdot(2\text{ cm})^2\cdot 0{,}3\text{ cm} + 3\cdot 2\text{ cm}\cdot(0{,}3\text{ cm})^2 + (0{,}3\text{ cm})^3\\ &= 8\text{ cm}^3 + 3{,}6\text{ cm}^3 + 0{,}54\text{ cm}^3 + 0{,}027\text{ cm}^3\\ V &= 12{,}167\text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{12{,}2\text{ cm}^3}}\end{aligned}$$

Sie erkennen: 0,54 cm³ und vor allem 0,027 cm³ fallen wenig ins Gewicht. Je kleiner b gegenüber a ist, um so unbedeutender wird der Fehler, der entsteht, wenn Sie $3ab^2$ und b^3 vernachlässigen.

Lehrbeispiel 23

Berechnen Sie $V = (7{,}8\ \text{cm})^3$ *a) als Näherungswert,* *b) genau!*

Lösung:

Sie setzen $(7{,}8\ \text{cm})^3 = (8\ \text{cm} - 0{,}2\ \text{cm})^3$.

a) Den Näherungswert $\tilde{V}$ berechnen Sie, indem Sie die Glieder $3ab^2$ und b^3 der Formel (7) vernachlässigen.

$$\tilde{V} = (8\ \text{cm})^3 - 3 \cdot (8\ \text{cm})^2 \cdot 0{,}2\ \text{cm} = 512\ \text{cm}^3 - 38{,}4\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{473{,}6\ \text{cm}^3}}$$

b)
$$\begin{array}{rrl l}
V = & 512 & \text{cm}^3 & (\mathrel{\widehat{=}} a^3) \\
- & 38{,}4 & \text{cm}^3 & (\mathrel{\widehat{=}} -3a^2b) \\
+ & 0{,}96 & \text{cm}^3 & (\mathrel{\widehat{=}} +3ab^2) \\
- & 0{,}008 & \text{cm}^3 & (\mathrel{\widehat{=}} -b^3) \\
\hline
V = & 474{,}552 & \text{cm}^3 &
\end{array}$$

4.43 Die 4. und höheren Potenzen eines Binoms – Pascalsches Dreieck

Nach dem bisher Gelernten wissen Sie auch die 4. Potenz eines Binoms zu berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^4 &= (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a \pm b)^2 (a \pm b)^2 \\
&= (a^2 \pm 2ab + b^2)(a^2 \pm 2ab + b^2) \\
&= a^4 \pm 2a^3b + a^2b^2 \\
&\qquad \pm 2a^3b + 4a^2b^2 \pm 2ab^3 \\
&\qquad\qquad + a^2b^2 \pm 2ab^3 + b^4 \\
\hline
(a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie die Formeln

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3 \\
(a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,
\end{aligned}$$

so erkennen Sie gewisse Gesetzmäßigkeiten:

Mit fallenden Potenzen von a steigen die Potenzen von b, die Summe der Exponenten eines Gliedes ist immer gleich dem Exponenten des Binoms.

Die Koeffizienten (Vorzahlen) des ersten und letzten Gliedes sind 1, die Koeffizienten des zweiten und vorletzten Gliedes gleichen jeweils dem Exponenten des Binoms.

Bei den Potenten von $(a + b)$ treten nur positive Glieder auf, bei den Potenzen von $(a - b)$ abwechselnd positive und negative Glieder, das erste Glied ist immer positiv. Nur die Gesetzmäßigkeiten der Koeffizienten der übrigen Glieder sind nicht ohne weiteres zu erkennen. Diese Koeffizienten sind aber sehr leicht aus einem Zahlendreieck zu entnehmen, das nach dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623 bis 1662) benannt wurde. Aus dem Pascalschen Dreieck entnehmen Sie als sogenannte „Binomialkoeffizienten" für

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0: & 1 \\
(a+b)^1: & 1 \quad 1 \\
(a+b)^2: & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+b)^4: & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(a+b)^5: & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(a+b)^6: & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
(a+b)^7: & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
 & \ldots
\end{array}
$$

Warum bei $(a + b)^0$ nur ein Koeffizient, nämlich 1, auftritt, kann im Rahmen dieses Studienmaterials nicht erörtert werden.

Erläuterung:
Jede Zeile beginnt und endet mit 1. Jedes andere Glied in jeder Zeile ist die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Glieder der vorhergehenden Zeile. Mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks und der weiter oben genannten Gesetzmäßigkeiten können Sie auch für hohe Potenzen eines Binoms das Ergebnis ohne umständliche Zwischenrechnung sofort hinschreiben.

Beispiele:

$$(m - p)^7 = m^7 - 7m^6p + 21m^5p^2 - 35m^4p^3 + 35m^3p^4 - 21m^2p^5 + 7mp^6 - p^7$$

$$(2a + 3b)^5 = 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$$

4.44 Vergleichender Überblick über die wichtigsten Binome

Unterscheiden Sie

$(a + b)^2$	von	$a^2 + b^2$
$= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$		Dieser Ausdruck läßt sich nicht in Faktoren zerlegen, die aus rationalen Zahlen gebildet sind.
$(a - b)^2$	von	$a^2 - b^2$
$= (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$		$= (a + b)(a - b)$
$(a + b)^3$	von	$a^3 + b^3$
$= (a + b)(a + b)(a + b)$		
$= (a^2 \underline{+ 2ab} + b^2)(a + b)$		$= (a^2 \underline{- ab} + b^2)(a + b)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$		
$(a - b)^3$	von	$a^3 - b^3$
$= (a - b)(a - b)(a - b)$		
$= (a^2 \underline{- 2ab} + b^2)(a - b)$		$= (a^2 \underline{+ ab} + b^2)(a - b)$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$		

Zusammenfassung

Von besonderer Wichtigkeit sind die binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Beim Berechnen höherer Potenzen eines Binoms können die Binomialkoeffizienten aus dem Pascalschen Dreieck entnommen werden.

Übungen

Berechnen Sie!

57. *a)* $\left(\frac{3}{4}+b\right)^2$ *b)* $\left(\frac{2}{5}a - 0{,}2b\right)^2$ *c)* $\left(3x+\frac{2}{7}\right)\left(3x-\frac{2}{7}\right)$

58. *a)* $(2a-5b)^3$ *b)* $(a+8)^3$ *c)* $(0{,}2-0{,}1b)^3$

59. *a)* $\left(\frac{1}{2}a+b-2c\right)^2$ *b)* $\left(5-\frac{3}{5}x+m\right)^2$ *c)* $\left(2p+3q-r+\frac{1}{2}\right)^2$

60. *Berechnen Sie* $1{,}0075^2$ *überschläglich!*

61. *Berechnen Sie* $(2x-5y)(2x+5y)(4x^2+25y^2)$*!*

62. *a)* $(a+b)^2 - (a^2+b^2)$
    b) $(a-b)^2 - (a^2-b^2)$
    c) $(a+b)^2 - (a-b)^2$

63. *a)* $(a+b)^2 + (a-b)^2$
    b) $(a^2+b^2) + (a^2-b^2)$
    c) $(a+b)^2(a-b)$

64. *a)* $(b-a)^2$ *b)* $(x+2)^2$
    c) $(3p-4q)^2$ *d)* $(3x-2y+4)^2$

65. *Schreiben Sie als Quadrat!*

    a) a^2+2a+1 *b)* $4x^2+12x+9$ *c)* $16u^2-40uv+25v^2$

    (Wenden Sie Formel (3) bzw. (4) von rechts nach links gelesen an!)

66. *Man nennt das Polynom* $a^2 \pm 2ab + b^2$ *ein vollständiges Quadrat, da es gleich* $(a \pm b)^2$ *ist.*

Ergänzen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem vollständigen Quadrat!

a) $x^2 + 8x$ *b)* $x^2 - 10x$ *c)* $x^2 + 144$

67. *Bestimmen Sie die folgenden Werte erst annähernd und dann genau!*

a) $V = (5{,}1\ \text{cm})^3$ *b)* $V = (3{,}95\ \text{cm})^3$

68. *Berechnen Sie unter Verwendung des Pascalschen Dreiecks!*

a) $(x + 3)^5$ *b)* $(y - 0{,}2)^6$

Anmerkung: Lösen Sie diese Aufgabe nur, wenn Sie Abschnitt 4.43 studiert haben!

[7]

4.5 Division

4.51 Division rationaler Zahlen

Die Division ist die vierte Grundrechenart. Sie steht mit der Multiplikation auf der gleichen Stufe und ist deren Umkehrung. Genau wie aus der Additionsaufgabe

$$a + b = c$$

zwei Subtraktionsaufgaben ($c - b = a$ und $c - a = b$) folgen, ergeben sich aus jeder Multiplikationsaufgabe

$$a \cdot b = c$$

auch zwei Divisionsaufgaben, nämlich

$$c:b = a \text{ und } c:a = b.$$

Ist die Divisionsaufgabe in Bruchform geschrieben, kann sie durch Kürzen gelöst werden.

Beispiele:

$$6x:6 = \frac{6x}{6} = x \qquad \text{Probe: } x \cdot 6 = 6x$$

$$6x:x = \frac{6x}{x} = 6 \qquad \text{Probe: } 6 \cdot x = 6x$$

$$6x:2x = \frac{6x}{2x} = 3 \qquad \text{Probe: } 3 \cdot 2x = 6x$$

$$8uv:2u = \frac{8uv}{2u} = 4v \qquad \text{Probe: } 4v \cdot 2u = 8uv$$

$$20abc:5a = \frac{20abc}{5a} = 4bc \qquad \text{Probe: } 4bc \cdot 5a = 20abc$$

Die Vorzeichenregeln über die Division rationaler Zahlen lassen sich leicht aus den Regeln für die Multiplikation herleiten. Es muß gelten:

$$(+30):(+5) = +6, \quad \text{denn} \quad (+6)\cdot(+5) = +30$$
$$(-30):(-5) = +6, \quad \text{denn} \quad (+6)\cdot(-5) = -30$$
$$(-30):(+5) = -6, \quad \text{denn} \quad (-6)\cdot(+5) = -30$$
$$(+30):(-5) = -6, \quad \text{denn} \quad (-6)\cdot(-5) = +30$$

Allgemein gilt für die vier Fälle der Division

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & (+a):(+b) = +(a:b) \\ \text{II} & (-a):(-b) = +(a:b) \\ \text{III} & (-a):(+b) = -(a:b) \\ \text{IV} & (+a):(-b) = -(a:b) \end{array}} \tag{8}$$

Vorzeichenregel:

Der Quotient zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv.
Der Quotient zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

Wie bei der Multiplikation, so rechnen Sie auch bei der Division zweier rationaler Zahlen mit den Absolutwerten und geben dem Ergebnis das Vorzeichen nach der Vorzeichenregel.

Beispiele:

$(-24a):(-4a) = +6$ Probe: $(+6)\cdot(-4a) = -24a$

$(-81\,xyz):(+3x) = -27\,yz$ Probe: $(-27\,yz)\cdot(+3x) = -81\,xyz$

$(+pq):(-0{,}1q) = -10p$ Probe: $(-10p)\cdot(-0{,}1q) = +pq$

Sonderfälle

Sind Dividend und Divisor gleich, dann ist der Quotient $(+1)$:

$$(+a):(+a) = +1 \text{ und } (-a):(-a) = +1.$$

Sind Dividend und Divisor entgegengesetzte Zahlen, dann ist der Quotient (-1):

$$(+a):(-a) = -1 \text{ und } (-a):(+a) = -1.$$

Wird eine rationale Zahl durch (-1) geteilt, dann ändert sich nur das Vorzeichen:

$$(+a):(-1) = -a \text{ und } (-a):(-1) = +a.$$

Dasselbe gilt, wenn eine Zahl mit (-1) multipliziert wird.

Ist der Dividend Null, dann gilt für $a \neq 0$:

$$0:a = 0, \text{ denn } 0\cdot a = 0.$$

Dagegen ist die Aufgabe $a:0$ nicht ausführbar, weil es keine Zahl gibt, die, mit 0 multipliziert, den Wert a ergibt. Setzt man etwa versuchsweise $a:0 = k$, so müßte

$k \cdot 0 = a$ sein. Dies ist aber wegen $k \cdot 0 = 0$ unmöglich, d.h., es gibt keine bestimmte Zahl k, die das Ergebnis der Division $a:0$ sein könnte.
Die Aufgabe $0:0$ ist sinnlos, da jede Zahl, mit 0 multipliziert, 0 ergibt.

Merken Sie sich als Regel:

Durch Null darf nicht dividiert werden!

4.52 Division einer algebraischen Summe durch eine Zahl

Bei der Multiplikation einer algebraischen Summe mit einer Zahl mußten Sie jedes Glied der Summe mit der Zahl multiplizieren. Dementsprechend gilt für die Division:

Man dividiert eine algebraische Summe durch eine Zahl, indem man jedes Glied durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert.

Beispiele:

$$(28x + 35y):7 = 28x:07 + 35y:7 = \underline{\underline{4x + 5y}}$$

$$(8mn + 4m^2 - 12mp):4m = 8mn:4m + 4m^2:4m - 12mp:4m = \underline{\underline{2n + m - 3p}}$$

$$(5a - 5b):(-5) = (5a):(-5) + (-5b):(-5) = \underline{\underline{-a + b}}$$

Die Probe erfolgt wiederum durch Multiplikation des Ergebnisses (Quotienten) mit dem Divisor; sie lautet demnach für das letzte Beispiel:

$$(-a + b) \cdot (-5) = 5a - 5b.$$

Merken Sie sich die Rechenregel

$$\boxed{(a + b - c):d = a:d + b:d - c:d} \qquad (9)$$

Sind für a, b, c und d bestimmte Zahlen gegeben, dann ist allerdings der Gang der Rechnung ein anderer, da Sie zweckmäßig den Klammerausdruck vorher ausrechnen:

$$(1{,}2 + 6 - 2{,}7):3 = 4{,}5:3 = 1{,}5.$$

4.53 Division einer algebraischen Summe durch eine algebraische Summe

Um die Division durch eine algebraische Summe besser zu verstehen, lösen Sie zunächst eine Aufgabe mit bestimmten Zahlen. Sie können jede Zahl in eine algebraische Summe zerlegen und darum z. B. die Aufgabe

$$\begin{array}{r@{}l} 294:21 &= 14 \\ -21 & \\ \hline 84 & \\ -84 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

auf folgende Art lösen:

$$
\begin{array}{l}
-(200+90+4):(20+1)=10+4=\underline{\underline{14}}\\
\underline{-(200+10)}\\
80+4\\
\underline{-(80+4)}\\
0
\end{array}
$$

In gleicher Weise verfahren Sie auch bei Verwendung allgemeiner Zahlsymbole.

Lehrbeispiel 24

$$(15a^2 + 26ab + 8b^2):(3a + 4b)$$

Lösung:

Sie sollen eine Zahl bestimmen, die, mit $(3a + 4b)$ multipliziert, wieder den Ausdruck $(15a^2 + 26ab + 8b^2)$ ergibt. Zu diesem Zweck dividieren Sie zunächst $15a^2$ durch $3a$ und erhalten $5a$. Nun bestimmen Sie das erste Teilprodukt, das dann vom Dividenden subtrahiert werden muß, d. h., Sie multiplizieren $5a$ mit $(3a + 4b)$ und erhalten $(15a^2 + 20ab)$. Den verbleibenden Rest des Dividenden

$$(15a^2 + 26ab + 8b^2) - (15a^2 + 20ab) = 6ab + 8b^2$$

müssen Sie ebenfalls noch durch $(3a + 4b)$ dividieren.

Zunächst wieder $6ab$ durch $3a$ dividiert, ergibt $2b$. Das zweite Teilprodukt wird $2b\,(3a + 4b) = 6ab + 8b^2$. Das ist aber genau der nach der ersten Teildivision verbliebene Rest, so daß jetzt nach der zweiten Teildivision die Division ohne Rest durchgeführt ist. Das Ergebnis lautet:

$$(15a^2 + 26ab + 8b^2):(3a + 4b) = \underline{\underline{5a + 2b}}$$

Das Divisionsverfahren, das wegen der mehrmals durchzuführenden Teildivision auch als **Partialdivision**[1]) bezeichnet wird, läßt sich übersichtlich wie folgt schreiben:

$$
\begin{array}{l}
(15a^2+26ab+8b^2):(3a+4b)=\underline{\underline{5a+2b}}\\
\underline{-(15a^2+20ab)}\\
6ab+8b^2\\
\underline{-(6ab+8b^2)}\\
0
\end{array}
$$

Die Rechenvorschrift lautet:

1. Die Glieder im Dividenden und Divisor sind nach dem gleichen Grundsatz zu ordnen (in unserem Beispiel nach fallenden Potenzen von a).
2. Sie dividieren das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors (im Beispiel $15a^2:3a = 5a$), multiplizieren den Quotienten $(5a)$ mit dem ganzen Divisor $(3a + 4b)$ und subtrahieren das Produkt $(15a^2 + 20ab)$ vom Dividenden.
3. Mit dem verbleibenden Rest verfahren Sie wie unter 2., bis entweder die Division aufgeht oder der verbleibende Rest keine Glieder mehr besitzt, in denen das erste Glied des Divisors enthalten ist.
4. Während der Division dürfen Sie keinesfalls vom ersten Glied des Divisors auf ein anderes Glied des Divisors überwechseln.

[1]) lat. *pars*, der Teil.

Lehrbeispiel 25

Berechnen Sie $(x^3 + 5x - 4x^2 - 2):(x - 2)$*!*

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 5x - 2):(x - 2) = \underline{\underline{x^2 - 2x + 1}} \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 - 2x^2 + 5x - 2 \\
\underline{-(- 2x^2 + 4x)} \\
 + x - 2 \\
\underline{-(+ x - 2)} \\
 0
\end{array}
$$

Führen Sie die Probe durch, indem Sie den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplizieren!

Auch wenn beim Ausmultiplizieren der Teilprodukte Glieder auftreten, die im Dividenden *nicht* vorhanden sind, dürfen Sie nicht von der Rechenregel abweichen. Diese so entstandenen Glieder sind beim Weiterrechnen wieder als Dividend zu betrachten.

Beachten Sie dabei besonders, daß Sie die einmal begonnene Reihenfolge der Glieder einhalten.

Lehrbeispiel 26

Berechnen Sie $(8p^3 - q^3):(2p - q)$*!*

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(8p^3 - q^3):(2p - q) = \underline{\underline{4p^2 + 2pq + q^2}} \\
\underline{-(8p^3 - 4p^2q)} \\
 4p^2q - q^3 \\
\underline{-(4p^2q - 2pq^2)} \\
 2pq^2 - q^3 \\
\underline{-(2pq^2 - q^3)} \\
 0
\end{array}
$$

Lehrbeispiel 27

Berechnen Sie $(2a^3 + 3a^2x - 2ax - x^2):(a^2 - x)$*!*

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(2a^3 + 3a^2x - 2ax - x^2):(a^2 - x) = \underline{\underline{2a + 3x + \frac{2x^2}{a^2 - x}}} \\
\underline{-(2a^3 - 2ax)} \\
 3a^2x - x^2 \\
\underline{-(3a^2x - 3x^2)} \\
 + 2x^2
\end{array}
$$

Hier verbleibt ein Rest $2x^2$, der noch durch $(a^2 - x)$ zu teilen ist. Wie bei der Division mit bestimmten Zahlen wird dieser durch den Divisor geteilte Rest zu den ersten Summanden addiert.

Das Verfahren der Partialdivision brauchen Sie nicht anzuwenden, wenn Sie bei der Divisionsaufgabe sofort erkennen, daß der Divisor ein Faktor des Dividenden ist. Praktisch läuft das darauf hinaus, daß Sie versuchen, den Dividenden in Faktoren zu zerlegen. Hauptsächlich sind es die in 4.44 zusammengestellten Formeln, die hier angewendet werden.

Beispiele:

$(a^2 - b^2):(a - b) = a + b,$ denn $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(64u^2 - 4):(8u + 2) = 8u - 2,$ denn $(8u - 2)(8u + 2) = 64u^2 - 4$

$(a^2 + 2ab + b^2):(a + b) = a + b$

$(25u^2 - 30uv + 9v^2):(5u - 3v) = 5u - 3v$

Zusammenfassung

Die vierte Grundrechenart ist die Division, die Umkehrung der Multiplikation.

$$c:b = a$$

Dividend durch Divisor gleich Quotient.

Die Division zweier rationaler Zahlen mit gleichen Vorzeichen ergibt einen positiven Quotienten. Die Division zweier rationaler Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ergibt einen negativen Quotienten. Durch Null kann nicht dividiert werden.
Eine algebraische Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied der algebraischen Summe durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert.
Bei der Division algebraischer Summen sind Dividend und Divisor in gleicher Weise zu ordnen. Man dividiert das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors. Der Quotient wird mit dem ganzen Divisor multipliziert und das Ergebnis dieser Multiplikation vom Dividenden subtrahiert. Mit dem Rest wird in derselben Weise weitergerechnet, bis entweder die Rechnung aufgeht oder ein nicht mehr teilbarer Rest übrigbleibt.

Übungen

69. *a)* $(-20):(+4)$ *b)* $(+a^2):(-a)$ *c)* $(-76cd):(-8c)$

70. *a)* $(-5x):(-1)$ *b)* $(-8xy):4x$ *c)* $28s^2t:(-4st)$

71. *a)* $15abc \cdot 7acx : 21bcx$ *b)* $\frac{2}{3}abx \cdot \frac{3}{4}cy : \frac{1}{2}by$

72. *a)* $(27ab - 36bx - 36by):(-9b)$ *b)* $\left(\frac{1}{2}abx - \frac{1}{3}aby + \frac{1}{4}abc\right):\frac{1}{6}ab$

73. *a)* $(3a^2 - 27):(a - 3)$
b) $(a^3 - 6a^2 + 11a - 12):(a - 4)$
c) $(6x^2 - 2xy - 20y^2):(3x + 5y)$

74. *a)* $(x^2 - 2xy + y^2 - z^2):(x - y - z)$
b) $(49a^2 - 9b^2 - 30bx - 25x^2):(5x + 7a + 3b)$

75. *a)* $(m^4 - n^4):(m + n)$
b) $(32x^5 + 243):(2x + 3)$

76. *a)* $(36a^2 - 60a + 25):(6a - 5)$
b) $(4x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 16xy + 24xz - 48yz):(2x - 4y + 6z)$
c) $(81x^4 - 16y^2):(9x^2 + 4y)$

77. *Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Aufspaltung von $a^3 + b^3$ und $a^3 - b^3$ in zwei Faktoren in Abschnitt 4.44, indem Sie die beiden folgenden Divisionen durchführen:*
a) $(a^3 + b^3):(a + b)$
b) $(a^3 - b^3):(a - b)$*!*

[8]

4.6 Bruchrechnung unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole

4.61 Darstellung gebrochener Zahlen durch allgemeine Zahlsymbole

In Abschnitt 3.2 haben Sie bereits die Bruchrechnung und ihre Gesetze für bestimmte Zahlen kennengelernt. Man kann auch mit Brüchen arbeiten, bei denen im Zähler und Nenner allgemeine Zahlsymbole vorkommen. Allerdings muß dabei die Bedingung gestellt werden, daß der Nenner nicht Null sein darf (durch Null kann nicht dividiert werden, vgl. Abschnitt 4.51). Wenn also

$$\frac{Z}{N} \text{ mit } N \neq 0$$

ist, gelten auch hier dieselben Begriffe, die für die mit bestimmten Zahlen geschriebenen Brüche verwendet wurden.
So, wie man jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann: $3 = \frac{3}{1}$, ist auch

$$\frac{a}{1} = a; \frac{x}{1} = x.$$

Vertauscht man Zähler und Nenner eines Bruches, so erhält man dessen *reziproken Wert* oder *Kehrwert.*

$$\frac{a}{b} \text{ hat also den reziproken Wert } \frac{b}{a};$$

$$a \text{ hat den reziproken Wert } \frac{1}{a} \left(\text{da } a = \frac{a}{1}\right).$$

Brüche heißen gleichnamig, wenn ihre Nenner gleich sind, ungleichnamig, wenn ihre Nenner verschieden sind.
Gleichnamige Brüche sind also z. B.:

$$\frac{a}{x}; \quad \frac{3}{x}; \quad \frac{4b}{x}; \quad \frac{m+n}{x}$$

$$\text{oder } \frac{a}{5x}; \quad \frac{2}{5x}; \quad \frac{3b}{5x}; \quad \frac{2a-b}{5x}$$

$$\text{oder } \frac{b}{xy}; \quad \frac{5}{xy}; \quad \frac{2n}{xy}; \quad \frac{7a+4b}{xy}$$

$$\text{oder } \frac{x}{a+b}; \quad \frac{4}{a+b}; \quad \frac{5y}{a+b}; \quad \frac{18x+z}{a+b}$$

Ungleichnamige Brüche sind z. B.:

$$\frac{1}{a}; \quad \frac{3}{b}; \quad \frac{4x}{7y}; \quad \frac{a}{a+b}; \quad \frac{17m-2n}{ab}$$

Da a, b, c, ... Symbole für Zahlen sind, kann man mit Ausdrücken, die unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole dargestellt sind, nach den üblichen Rechengesetzen rechnen.
Sie lernen also in diesem Abschnitt nichts grundsätzlich Neues. Es ist deshalb ratsam, beim Studium immer den Abschnitt 3.2 zum Vergleich heranzuziehen.
Außerdem benötigen Sie die Regeln über das Ausklammern, das Multiplizieren von Klammern, die binomischen Formeln, d. h. also die Rechengesetze, die Sie in diesem Kapitel 4 bereits gelernt haben.

4.62 Kürzen und Erweitern

Aus Abschnitt 3.22 wissen Sie, daß sich die äußere Form eines Bruches ändern kann, ohne daß sich sein zahlenmäßiger Wert ändert. Ein Bruch kann *gekürzt* oder *erweitert* werden.
Es gilt also die Ihnen aus Abschnitt 3.22 bekannte Regel:

Einen Bruch kürzen heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren.

Beispiele:

$$\frac{abc}{ad} = \frac{1bc}{1d} = \underline{\underline{\frac{bc}{d}}}$$

$$\frac{18xyz}{24xr} = \underline{\underline{\frac{3yz}{4r}}}$$

$$\frac{5ab}{35abc} = \underline{\underline{\frac{1}{7c}}}$$

Treten im Zähler oder Nenner oder in Zähler und Nenner Polynome auf, so müssen Sie beachten, daß nur gleiche *Faktoren* gekürzt werden können. Und zwar muß es jeweils ein Faktor des *ganzen* im Zähler oder Nenner stehenden Ausdrucks sein. Der Bruch

$$\frac{4ab-3c^2}{2b}$$

beispielsweise kann *nicht* gekürzt werden, obwohl b im Zähler als Faktor des Produktes $4ab$ erscheint. b ist aber *nicht* ein *Faktor* des *gesamten* im Zähler stehenden Ausdrucks.
Nachfolgend finden Sie Beispiele, bei denen gekürzt werden kann.

Lehrbeispiel 28

Kürzen Sie $\frac{4ab-6b^2}{2b}$!

Lösung:

Verwandeln Sie den Zähler durch Ausklammern der in beiden Summanden gemeinsam enthaltenen Faktoren in ein Produkt; dann können Sie kürzen:

$$\frac{4ab - 6b^2}{2b} = \frac{2b(2a - 3b)}{2b} = \underline{\underline{2a - 3b}}$$

Lehrbeispiel 29

Kürzen Sie $\frac{30ac + 48ad - 35bc - 56bd}{5c + 8d}$!

Lösung:

Auch hier klammern Sie zuerst aus:

$$= \frac{6a(5c + 8d) - 7b(5c + 8d)}{5c + 8d}$$

$$= \frac{(5c + 8d) \cdot (6a - 7b)}{5c + 8d}$$

Jetzt läßt sich die Summe $(5c + 8d)$, die als *Faktor* im Zähler steht, gegen den Nenner kürzen. Ergebnis:

$$\underline{\underline{6a - 7b.}}$$

Beim Umformen des Zählers oder des Nenners in ein Produkt finden auch die binomischen Formeln Anwendung.

Beispiele:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = \underline{\underline{a + b}}$$

$$\frac{a^2 - 6a + 9}{a - 3} = \frac{(a - 3)(a - 3)}{a - 3} = \underline{\underline{a - 3}}$$

Die Regel über das Erweitern (vgl. Abschnitt 3.22) gilt ebenso bei der Darstellung der Brüche durch allgemeine Zahlsymbole:

> *Einen Bruch erweitern heißt: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.*

Beispiele:

Erweitern Sie den Bruch $\frac{4}{a}$ mit m! $\qquad \frac{4}{a} = \frac{4m}{am}$

Erweitern Sie den Bruch $\frac{2a}{b}$ mit $(x - y)$! $\qquad \frac{2a}{b} = \frac{2a(x - y)}{b(x - y)} = \frac{2ax - 2ay}{bx - by}$

4.63 Addition und Subtraktion

Für gleichnamige Brüche gilt die Ihnen aus Abschnitt 3.23 bekannte Regel:

> *Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner unverändert beibehält.*

Beispiele: $\frac{a}{7} + \frac{3a}{7} = \underline{\underline{\frac{4a}{7}}}$

$$\frac{4n}{a} - \frac{n}{a} = \underline{\underline{\frac{3n}{a}}}$$

$$\frac{10m - 3n}{x^2 - y^2} + \frac{5m - 4n}{x^2 - y^2} = \underline{\underline{\frac{15m - 7n}{x^2 - y^2}}}$$

Steht vor einem Bruch ein Minuszeichen, so ist der Bruch, d. h. der *gesamte* Zähler, zu subtrahieren. Setzen Sie deshalb diese Zähler in Klammern mit einem Minuszeichen davor, wenn Sie alle Zähler auf einen Bruchstrich schreiben. Beim Auflösen der Klammer beachten Sie die Vorzeichenregel (vgl. Abschnitt 4.24).

Lehrbeispiel 30

$$\frac{10m - 3n}{a^2 + b} - \frac{5m - 4n}{a^2 + b} = \frac{10m - 3n - (5m - 4n)}{a^2 + b} = \frac{10m - 3n - 5m + 4n}{a^2 + b} = \underline{\underline{\frac{5m + n}{a^2 + b}}}$$

Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren oder Subtrahieren gleichnamig gemacht, also auf einen gemeinsamen Hauptnenner gebracht werden (vgl. Abschnitt 3.23). Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller vorhandenen Nenner (vgl. Abschnitt 3.13), d. h., im Hauptnenner müssen alle anderen vorhandenen Nenner als Faktoren enthalten sein.
Haben die einzelnen Nenner *keine gemeinsamen Faktoren* (sind also teilerfremd), so ist der Hauptnenner gleich dem Produkt der Einzelnenner.

Lehrbeispiel 31

Addieren Sie $\frac{3a}{b} + \frac{2a}{c}$*!*

Lösung:

Der Hauptnenner ist $b \cdot c = bc$. Jeder Bruch ist nun mit *dem* Faktor des Hauptnenners zu erweitern, der in seinem Einzelnenner nicht vorkommt. Also

$$\frac{3a \cdot c}{b \cdot c} + \frac{2a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{3ac + 2ab}{bc} = \underline{\underline{\frac{a(3c + 2b)}{bc}}}\,.$$

Praktisch finden Sie den Erweiterungsfaktor schnell, wenn Sie den Hauptnenner durch den Einzelnenner des jeweiligen Bruches dividieren bzw. feststellen, welche Faktoren des Hauptnenners nicht im jeweiligen Einzelnenner enthalten sind.

Lehrbeispiel 32

a) $\frac{4x}{a} + \frac{8x}{b} + \frac{12x}{c}$ Hauptnenner: $a \cdot b \cdot c$

$$= \frac{4x \cdot bc}{abc} + \frac{8x \cdot ac}{abc} + \frac{12x \cdot ab}{abc}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4x(bc + 2ac + 3ab)}{abc}}}$$

b) $\frac{6}{a+b}+\frac{4}{a-b}-\frac{5}{a}$ Hauptnenner: $a(a+b)(a-b)$

$$=\frac{6a(a-b)}{a(a+b)(a-b)}+\frac{4a(a+b)}{a(a+b)(a-b)}-\frac{5(a+b)(a-b)}{a(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{6a^2-6ab+4a^2+4ab-(5a^2-5b^2)}{a(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{10a^2-2ab-5a^2+5b^2}{a(a+b)(a-b)}=\frac{5a^2-2ab+5b^2}{a(a+b)(a-b)}$$

Sind die einzelnen Nenner Produkte, so werden sie in Faktoren aufgespalten; aus ihnen wird der Hauptnenner zusammengesetzt.

Lehrbeispiel 33 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}-\frac{1}{6a^2}$

Lösung:

Bestimmen des Hauptnenners:

$$\begin{aligned} 2a &= 2\cdot\phantom{3\cdot{}} a \\ 3a &= \phantom{2\cdot{}} 3\cdot a \\ 6a^2 &= 2\cdot 3\cdot a\cdot a \\ \hline \text{Hauptnenner:}\ & \ 6a^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}-\frac{1}{6a^2}=\frac{1\cdot 3a}{6a^2}+\frac{1\cdot 2a}{6a^2}-\frac{1}{6a^2}$$

$$=\frac{3a+2a-1}{6a^2}=\underline{\underline{\frac{5a-1}{6a^2}}}$$

Lehrbeispiel 34

$$\frac{6}{a^2}+\frac{7}{ab^2c}+\frac{8}{bc^2}+\frac{3}{ab}$$

Lösung:

In einfachen Fällen wie in diesem Lehrbeispiel bestimmen Sie den Hauptnenner als das k.g.V. der Einzelnenner nach folgender Regel:

Alle voneinander verschiedenen Faktoren müssen im Hauptnenner in der jeweils höchsten Potenz vorkommen:

a mit der höchsten Potenz a^2
b mit der höchsten Potenz b^2
c mit der höchsten Potenz c^2
Hauptnenner: $a^2\cdot b^2\cdot c^2$

Nun erweitern Sie die einzelnen Brüche:

$$\frac{6\cdot b^2c^2}{a^2b^2c^2}+\frac{7\cdot ac}{a^2b^2c^2}+\frac{8a^2b}{a^2b^2c^2}+\frac{3abc^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{6b^2c^2+7ac+8a^2b+3abc^2}{a^2b^2c^2}}}$$

Lehrbeispiel 35

$$\frac{x}{a+x}+\frac{a}{3a+3x}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}-\frac{a}{2a-2x}$$

Lösung:

Ermitteln des Hauptnenners: Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcll} a+x & = & (a+x) & 6(a-x) \\ 3a+3x & = & 3(a+x) & 2(a-x) \\ a^2-x^2 & = & (a+x)(a-x) & 6 \\ 2a-2x & = & (a-x)\cdot 2 & 3(a+x) \end{array}$$

Hauptnenner: $2\cdot 3\,(a+x)\,(a-x)=6\,(a^2-x^2)$

$$\frac{x\cdot 6\,(a-x)}{6\,(a^2-x^2)}+\frac{a\cdot 2\,(a-x)}{6\,(a^2-x^2)}+\frac{(a^2+x^2)\cdot 6}{6\,(a^2-x^2)}-\frac{a\cdot 3(a+x)}{6\,(a^2-x^2)}$$

$$=\frac{6ax-6x^2+2a^2-2ax+6a^2+6x^2-3a^2-3ax}{6\,(a^2-x^2)}$$

$$=\frac{5a^2+ax}{\underline{\underline{6\,(a^2-x^2)}}}$$

4.64 Multiplikation

Für das Multiplizieren zweier Brüche gilt die in Abschnitt 3.24 besprochene Regel:

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert.

Vor dem Multiplizieren möglichst kürzen!

Lehrbeispiel 36

a) $\frac{4a}{5b}\cdot\frac{3b}{8c}=\frac{4a\cdot 3b}{5b\cdot 8c}=\frac{a\cdot 3}{5\cdot 2c}=\frac{3a}{\underline{\underline{10c}}}$

b) $\frac{3a}{5b}\cdot 10c=\frac{3a\cdot 10c}{5b}=\frac{6ac}{\underline{\underline{b}}}$

c) $\frac{a+b}{2c+2d}\cdot\frac{3c+3d}{a-b}=\frac{(a+b)\cdot 3\,(c+d)}{2\,(c+d)\cdot(a-b)}=\frac{3\,(a+b)}{\underline{\underline{2\,(a-b)}}}$

d) $\frac{x-y}{(u+v)^2}\cdot\frac{u^2-v^2}{(a-y)^2}=\frac{(x-y)\cdot(u+v)\,(u-v)}{(u+v)\,(u+v)\cdot(x-y)\,(x-y)}=\frac{u-v}{\underline{\underline{(u+v)\,(x-y)}}}$

e) $\left(\frac{5x}{3y}-\frac{3x}{4z}\right)\cdot\frac{y}{x}=\frac{5xy}{3xy}-\frac{3xy}{4xz}=\frac{5}{3}-\frac{3y}{4z}=\frac{5\cdot 4z-3y\cdot 3}{3\cdot 4z}=\frac{20z-9y}{\underline{\underline{12z}}}$

f) $\left(-\frac{3a}{4c}\right)\cdot\frac{-2b}{5a}=\frac{(-3a)\,(-2b)}{4c\cdot 5a}\quad\frac{3b}{\underline{\underline{10c}}}$

g) $\frac{r-s}{-x-y}\cdot\frac{(x+y)^2}{s^2-r^2}=\frac{(r-s)\cdot(x+y)\,(x+y)}{(-x-y)\cdot(s+r)\,(s-r)}$

Sie klammern in Zähler und Nenner (— 1) aus. Dadurch ändern sich die Zeichen in den ersten Klammern. Nun können Sie kürzen.

$$= \frac{(-1)(s-r)(x+y)(x+y)}{(-1)(x+y)(s+r)(s-r)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{s+r}}}$$

4.65 Division

Die bekannte Regel lautet (vgl. Abschnitt 3.25):

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem reziproken Wert (Kehrwert) multipliziert. (Vorher möglichst kürzen!)

Lehrbeispiel 37

a) $\frac{3b}{4c} : \frac{5bx}{16c} = \frac{3b \cdot 16c}{4c \cdot 5bx} = \underline{\underline{\frac{12}{5x}}}$

Das Ergebnis darf *nicht* in der Form $\frac{12}{5}x$ geschrieben werden, da x im Ergebnis des Lehrbeispieles 37a) im Nenner steht.

Beachten Sie:

$$\frac{12}{5}x = \frac{12x}{5} \neq \frac{12}{5x}$$

b) $\frac{4c}{5d} : 8m = \frac{4c}{5d} : \frac{8m}{1} = \frac{4c \cdot 1}{5d \cdot 8m} = \underline{\underline{\frac{c}{10dm}}}$

c) $\frac{3x^2}{7y} : 3\frac{3}{4}x = \frac{3x^2}{7y} : \frac{15x}{4} = \frac{3x^2 \cdot 4}{7y \cdot 15x} = \underline{\underline{\frac{4x}{35y}}}$

d) $\frac{x+y}{5a+5b} : \frac{x-y}{a+b} = \frac{(x+y)(a+b)}{5(a+b)(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{5(x-y)}}}$

Doppelbrüche sind rechnerisch ebenso zu behandeln wie Divisionsaufgaben. Stehen in Zähler oder Nenner mehrere Glieder, so erweitert man vorteilhaft den Hauptbruch mit dem Hauptnenner aller Nebenbrüche.

Lehrbeispiel 38

$$\frac{\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2y}{x^2y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \underline{\underline{x+y}}$$

Zusammenfassung

Für das Rechnen mit Brüchen ist es wie für alle Zahlenrechnungen gleichgültig, ob die Zahlen durch Ziffern oder durch allgemeine Zahlsymbole dargestellt werden; die Regeln und Gesetze bleiben stets die gleichen.

Übungen

78. *Kürzen Sie!*

a) $\frac{xyz}{xv}$ b) $\frac{axz}{xz}$ c) $\frac{mn}{mnx}$

d) $\frac{69uxt}{23xtv}$ e) $\frac{13xby}{39axy}$ f) $\frac{36mn}{108mnp}$

79. *Zerlegen Sie zunächst durch Ausklammern in Faktoren und kürzen Sie dann!*

a) $\frac{ax+bx}{x}$ b) $\frac{8a-12b}{12a-18b}$ c) $\frac{3ac+3ad-2bc-2bd}{3a-2b}$

80. *Zerlegen Sie zunächst mit Hilfe der binomischen Formeln in Faktoren und kürzen Sie dann!*

a) $\frac{x^2-16x+64}{x-8}$ b) $\frac{n^2+3nv+2{,}25v^2}{n+1{,}5v}$

c) $\frac{(12n-13v)^2}{144n^2-169v^2}$ d) $\frac{x^2-9y^2}{x+3y}$

81. *Erweitern Sie die folgenden Brüche mit x!*

a) $\frac{6}{11}$ b) $\frac{x}{y}$ c) $\frac{c}{rs}$ d) $\frac{3ax}{4b}$

82. a) $\frac{8a}{11}+\frac{2a}{11}+\frac{9a}{11}-\frac{6a}{11}$ b) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

c) $\frac{(5a+17b)^2}{ab}-\frac{(4a+15b)^2}{ab}-\frac{(3a+8b)^2}{ab}$

83. a) $\frac{2x}{3}+\frac{7x}{5}-\frac{x}{2}$ b) $\frac{4x+3y}{2x}+\frac{6x-4y}{3y}$

c) $\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$ d) $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{5a-3b}{4(a-b)}+\frac{a+4b}{2(a-b)}-\frac{5a-2b}{a-b}$

f) $\frac{7s+4}{s+3}+\frac{13s+9}{s-7}-\frac{19s-10}{s^2-4s-21}$

84. a) $\frac{2b}{3a}\cdot\frac{4a}{7b}$ b) $\frac{2ab}{c}\cdot\frac{3a}{bc}\cdot\frac{5}{2ab}$

c) $\frac{xyz}{abc}\cdot 4ab$ d) $6\frac{3}{8}uv^2\cdot 7\frac{1}{3}vw^2$

e) $\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+a}{a-b}$ f) $\frac{7}{x-y}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{21}$

g) $\left(\frac{3}{p}-1\right)\left(\frac{3}{p}+1\right)$

85. a) $\frac{4ab}{3cd} : \frac{8bc}{9df}$ b) $\frac{13mp}{17rtn} : \frac{65mp^2}{34rn^2}$

c) $\frac{18xy}{5z} : 3xy$ d) $25x^2 : \frac{15x^3}{7y^2}$

e) $5\frac{1}{2}a : 3\frac{1}{3}b$ f) $\frac{4(r^2 - s^2)}{9(a+b)^2} : \frac{2(r+s)}{3(a+b)}$

g) $18(a - x) : 3(x - a)$ h) $\frac{\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}}$

i) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$

[Ü]

4.7 Aufgaben (Übungen 86 bis 102)

86. a) $45a + 57b - 36a + 54x - 73b + 10x + 19b - 71x$

b) $\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}b + 4\frac{1}{2}b - \frac{5}{6}c + 3\frac{2}{3}a - 1\frac{2}{3}c + \frac{1}{12}a + \frac{1}{6}b + 9\frac{1}{2}c$

87. a) $(+5m) + (-7n) - (+3p) - (-7q) + (-3m) - (+4n) - (-2p)$

b) $\left(+\frac{1}{2}a\right) + \left(-\frac{3}{4}b\right) - \left(-\frac{5}{6}c\right) - \left(+\frac{5}{6}a\right) - \left(+\frac{5}{12}b\right) - \left(-1\frac{1}{3}c\right)$

88. a) $(2x - 7y + 5z) - (5x - 3y + 4z) + (6x + 3y - z)$

b) $(84a - 57b) - (29a - 73b) - (53a + 31b) + 5b$

89. a) $[(4x - 6y) - 2z] - \{3x - [(3x + 6y) - (3x - 2y + z)]\}$

b) $\{4a - [3a + 2b - (x - b)]\} - \{2x - [2a - (x - a)]\}$

90. a) $3(a + b) + 5(a - b) - 6(a + b) - (a - 7b)$

b) $\frac{1}{2}(a + b - c) + \frac{1}{3}(a - b - c) - \frac{5}{6}(a - b - c)$

91. a) $(2x - y + 3z)(4x + 2y - z)$

b) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$

92. *Klammern Sie die gemeinsamen Faktoren aus!*

a) $35ac - 49bc + 21c^2$ b) $51ay - 68xy + 85y^2$

c) $ab + 3a - 2b - 6$ d) $9ab + 20x^2 - 12ax - 15bx$

93. a) $(49an - 21n^2 - 91np) : (+7n)$

b) $\left(\frac{3}{4}axy - \frac{2}{5}bxy + \frac{7}{10}cxy\right) : \frac{1}{20}xy$

94. *a)* $(a^3 - 8):(a - 2)$ *b)* $(64x^3 + 27a^3):(3a + 4x)$

95. *a)* $(9a^3 - 6a^2b - 2ab^2 + 4b^3):(3a + 2b)$
b) $(2y^3 - 7xy^2 + 9x^3):(3x - 2y)$

96. *Zerlegen Sie zunächst durch Ausklammern in Faktoren und kürzen Sie dann!*

a) $\dfrac{mx + nx}{mx - nx}$ *b)* $\dfrac{6nw + 6vw - 5nz - 5vz}{n + v}$

c) $\dfrac{30qs - 48qt - 35rs + 56rt}{6q - 7r}$

97. *Zerlegen Sie zunächst mit Hilfe der binomischen Formeln in Faktoren und kürzen Sie dann!*

a) $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ *b)* $\dfrac{16w^2 - 49z^2}{(4w + 7z)^2}$

98. *a)* $\dfrac{5x}{7a} - \dfrac{3x}{7a} - \dfrac{2x}{7a} + \dfrac{8x}{7a}$ *b)* $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$

c) $\dfrac{3a + 9b}{5x} - \dfrac{3a + 4b}{5x}$ *d)* $\dfrac{2x + 7y}{x - y} + \dfrac{8x - 3y}{x - y} - \dfrac{2x + 6y}{x - y} - \dfrac{5x + y}{x - y}$

e) $\dfrac{3x - 2}{x + 1} + \dfrac{5x - 4}{x + 1} - \dfrac{8x - 2}{x + 1} + \dfrac{2x + 6}{x + 1}$

99. *a)* $\dfrac{3a + 4b}{c} + \dfrac{2a - 6b}{d}$ *b)* $\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2}$ *c)* $\dfrac{2x - 3y}{x + y} - \dfrac{6x - 5y}{x - y}$

100. *a)* $\dfrac{5a + 4}{6a} - \dfrac{2a + 3}{3a^2} + \dfrac{a^2 - 6}{6a^2}$ *b)* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a + 1} + \dfrac{1}{a + 2} + \dfrac{1}{a + 3}$

c) $\dfrac{1}{2(a - b)} - \dfrac{1}{2(a + b)} - \dfrac{b}{a^2 - b^2}$ *d)* $\dfrac{5}{(3x - 1)(x + 8)} - \dfrac{3}{(2x + 1)(x + 8)}$

101. *a)* $\dfrac{x}{y} \cdot 2y$ *b)* $\dfrac{2a}{3b} \cdot \dfrac{5b}{8c} \cdot \dfrac{3}{4}x$ *c)* $2\dfrac{7}{12}a^2b \cdot 3\dfrac{1}{3}bc^2$

d) $\dfrac{x - y}{m + n} \cdot \dfrac{x - y}{m + n}$ *e)* $\dfrac{n^2 - v^2}{c} \cdot \dfrac{c^2}{(n - v)^2}$ *f)* $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{4y} + \dfrac{9}{7y}\right) \cdot \dfrac{x^2}{y^2}$

g) $\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)$ *h)* $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(a - b) + (a + b)\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

102. *a)* $\dfrac{7xy}{15rs} : \dfrac{21y^2z}{30r^2t}$ *b)* $\dfrac{abx^2}{mnp} : \dfrac{a^2b^2z}{n^2p}$ *c)* $\dfrac{2ab}{c} : 4a$

d) $12ab : \dfrac{4ac}{9d}$ *e)* $6\dfrac{1}{7}abc : 2\dfrac{3}{4}a^2b$ *f)* $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} : \dfrac{a - b}{a + b}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$ *h)* $\dfrac{\dfrac{a + 1}{a - 1} - 1}{\dfrac{a + 1}{a - 1} + 1}$ *i)* $\dfrac{\dfrac{1}{(a - x)^2} - \dfrac{1}{a^2 - x^2}}{\dfrac{1}{(a - x)^2} + \dfrac{1}{a^2 - x^2}}$

5 Tafelrechnen

5.1 Arten und Anordnung der Tafeln

In der Praxis sind häufig die 2. Potenzen (Quadrate) oder die 3. Potenzen (Kuben) von gegebenen Zahlen zu berechnen, so z. B. zum Bestimmen der Quadratfläche bei gegebener Seitenlänge oder zum Bestimmen des Würfelinhalts bei gegebener Kantenlänge. Sie können diese Potenzen selbstverständlich durch Multiplikationen berechnen. Bei mehrziffrigen Zahlen ist das aber sehr zeitraubend. Man hat deshalb diese Werte in Tafeln - *den Tafeln der Quadrate bzw. der Kuben* - zusammengestellt.
Ebenso häufig wie die Aufgabe, zu einer gegebenen Grundzahl die 2. oder 3. Potenz zu bestimmen, tritt die Aufgabe auf, zu einer vorgegebenen Potenz die Grundzahl zu ermitteln. Diese Umkehrung des Potenzierens heißt **Radizieren**[1]) oder **Wurzelziehen.**
Kurze Erläuterung: Wie Sie wissen, ist $5^2 = 25$.
In Umkehrung dieser Aussage fragen wir: Welche Zahl gibt, wenn sie ins Quadrat erhoben wird, den Wert 25? Antwort: 5.
Wir schreiben dies $\sqrt[2]{25} = 5$ und sagen: Die Quadratwurzel aus 25 ist 5.
Allgemein gilt also: Wenn $a^2 = b$, dann ist $a = \sqrt[2]{b}$.
Zur Kennzeichnung des Wurzelziehens verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt{}$; b heißt der **Radikand** oder die **Wurzelgrundzahl,** 2 der **Wurzelexponent** oder die **Wurzelhochzahl,** $\sqrt[2]{b}$ ist die **2.** oder **Quadratwurzel** aus b, a ist der **Wurzelwert.** Bei der Quadratwurzel läßt man meist den Wurzelexponenten weg. Es ist also $\sqrt{b}$ gleichbedeutend mit $\sqrt[2]{b}$.
Aus $2^3 = 8$ folgt $\sqrt[3]{8} = 2$ (3. Wurzel - oder Kubikwurzel - aus 8 gleich 2).
Für das Wurzelziehen haben Sie bisher kein Rechenverfahren kennengelernt. Sie müssen also die Wurzelwerte aus Tafeln - den Tafeln der Quadratwurzeln bzw. der Kubikwurzeln - entnehmen.
In der Technik sind oft *Kreisumfang* und *Kreisfläche* bei gegebenem Durchmesser zu berechnen. Es gelten hier die Beziehungen

$$\text{Kreisumfang} = \pi \text{ mal Kreisdurchmesser } (U = \pi d),$$
$$\text{Kreisfläche} = \frac{\pi}{4} \text{ mal Quadrat des Durchmessers } \left(F = \frac{\pi d^2}{4}\right).$$

Diese Werte sind für gegebene Durchmesser in den Tafeln der Kreisumfänge und Kreisinhalte festgehalten. Auch die Benutzung solcher Tafeln erspart viel Rechenarbeit.
Schließlich sind noch die Tafeln der *Kehrwerte* zu erwähnen, deren Anwendung zu empfehlen ist, wenn die Kehrwerte von gegebenen Zahlen häufiger gebraucht werden. Sie finden diese Zahlenwerte in den Tafeln der verschiedenen mathematischen Tafelwerke, in Tabellenbüchern, Nachschlagewerken usw. Es ist ratsam, daß Sie beim Durcharbeiten dieses Kapitels eine Zahlentafel zur Hand nehmen. Wir raten Ihnen dringend, immer mit einer bestimmten Tafel zu arbeiten. Nur dann werden

[1]) lat. *radix*, die Wurzel.

Sie schnell und sicher die gesuchten Werte aufschlagen können. Das Zurechtfinden in einer unbekannten Tafel erfordert immer Zeit.

Der grundsätzliche Aufbau der Tafeln ist fast immer der gleiche. Im einzelnen unterscheiden sie sich aber in der Art der Anordnung und in der gegebenen Ziffern- bzw. Stellenzahl. Tabellenwerte sind ja immer auf eine bestimmte Stellenzahl gerundet, sind also keine genauen Werte. Wir schreiben aber in den Lehrbeispielen trotzdem an Stelle des Zeichens $\approx$ (nahezu gleich) immer das Gleichheitszeichen.

Meistens werden Sie es mit einem Tafelwerk zu tun haben, bei welchem die eben genannten Tabellen in einer Tafel vereinigt sind.

Nehmen Sie nun Ihre Tafel zur Hand! In einer solchen Tafel ist auf der Randleiste (Spalte ganz links) unter der Bezeichnung „n" die Folge der natürlichen Zahlen aufgeführt. In den einzelnen Spalten der Tafel sind die zu den Zahlen der Randleiste gehörenden Potenzen, Wurzeln usw. angegeben.

Um welche Größe es sich jeweils handelt, geht aus dem Kopf der Spalten hervor. Wenn Sie z. B. von $n = 5$ in der Zeile nach rechts gehen, finden Sie

für n^2 den Wert 25, für n^3 den Wert 125,

für $\sqrt{n}$ den Wert 2,23607, für $\sqrt[3]{n}$ den Wert 1,7100,

für den Kreisumfang $U = \pi n$ (beim Durchmesser $d = n = 5$) den Wert 15,708,

für die Kreisfläche $F = \frac{\pi n^2}{4}$ (bei diesem Durchmesser) den Wert 19,6350 und

für das *Tausendfache* des Kehrwertes, für $\frac{1000}{n}$, den Wert 200,000.

Außerdem finden Sie auch Tafeln, in denen jeweils nur eine Größe (Quadrate bzw. die Kuben) tabelliert ist, man nennt sie Quadrattafeln bzw. Kubiktafeln. In einer solchen Tafel enthält die Randleiste unter n eine in dezimaler Teilung fortschreitende Zahlenfolge mit einer bestimmten Ziffern- bzw. Stellenzahl (z. B. eine Stelle nach dem Komma). In der Kopfleiste finden Sie als Kopf der Spalten die Ziffern 0 bis 9.

Diese Ziffern sind jeweils die letzte Ziffer bzw. Stelle der Zahl n (also z. B. die zweite Stelle nach dem Komma). Wollen Sie mit einer Quadrattafel z. B. das Quadrat von 1,21 aufschlagen, dann gehen Sie in der Zeile $n = 1,2$ bis in Spalte 1 und finden dort für $1,21^2$ den Wert 1,464.

Machen Sie sich mit der Anordnung Ihrer Tafel genau vertraut und schlagen Sie einige Werte auf!

$n \longrightarrow$	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
$\sqrt{p} \longleftarrow$	p

Bevor wir auf das Arbeiten mit den Tafeln eingehen, müssen Sie sich noch folgendes klarmachen:

Jede Tafel kann in *doppelter* Hinsicht benutzt werden. Sie werden dies an nebenstehendem Ausschnitt aus einer Quadrattafel erkennen.

Aus der linken Spalte n ergibt sich rechts die Spalte n^2. Die unter n stehenden Zahlen sind aber die Quadratwurzeln der unter n^2 stehenden Werte. Wenn Sie die Tafel also von rechts nach links lesen, dann haben Sie eine Quadratwurzeltafel vor sich, d. h., wenn Sie die Werte der rechten Spalte mit p bezeichnen, dann ergibt sich für die linke Spalte jeweils $\sqrt{p}$.

Allerdings schreitet hier nun das p nicht in gleichen Intervallen weiter, und das Aufschlagen der Werte ist deshalb unbequemer. Dies ist der Grund, weshalb man neben der Quadrattafel noch eine gesonderte Quadratwurzeltafel verwendet.

Genauso ist jede Tafel der Quadratwurzeln eine Quadrattafel, jede Tafel der dritten Potenzen eine Kubikwurzeltafel und umgekehrt. Ebenso können Sie aus den Kreisumfangs- und Kreisinhaltstafeln zu einem gegebenen Kreisumfang bzw. zu einer gegebenen Kreisfläche den zugehörigen Kreisdurchmesser ablesen.

Dieses Lesen der Tafel „von rechts nach links" bzw. „von innen nach außen" sei Ihnen an zwei Lehrbeispielen gezeigt.

Lehrbeispiel 39

Zum Kreisumfang $U = 232{,}48$ cm *soll der Durchmesser* $d = n$ *bestimmt werden.*

Lösung:

Sie suchen in der Spalte πn Ihrer Tafel den Wert 232,48 auf und gehen von hier nach links (oder rechts) bis zur Randleiste, wo Sie den Wert $n = 74$ ablesen. Der Durchmesser ist $\underline{\underline{d = n = 74 \text{ cm}}}$.

Lehrbeispiel 40

Berechnen Sie $\sqrt{56{,}85}$*!*

Lösung:

Sie suchen im Inneren Ihrer Quadrattafel den angegebenen Radikanden, gehen nach links bis zur Randleiste und finden dort den Wert 7,5. Die zweite Stelle nach dem Komma finden Sie, wenn Sie von der Zahl 56,85 senkrecht nach oben bis zur oberen Randleiste gehen, wo Sie als letzte Stelle die Ziffer 4 ablesen.

Also $\sqrt{56{,}85} = \underline{\underline{7{,}54}}$.

Machen Sie sich diese Zusammenhänge an Ihrer Tafel eingehend klar!

Damit Sie beim Aufsuchen der Tafelwerte grobe Fehler vermeiden, empfiehlt es sich, das Ergebnis vorher überschlagsweise zu bestimmen. Für Lehrbeispiel 40 würden Sie folgendermaßen rechnen:

$$\sqrt{56{,}85} \approx \sqrt{64} = 8 .$$

In dieser Größenordnung müßte dann das Ergebnis liegen.

Sie können aber auch nach dem Aufsuchen des Tafelwertes eine Überschlagsrechnung als Probe anschließen, indem Sie rechnen:

$$7 \cdot 7 = 49 .$$

Diese Zahl liegt in der Größenordnung des Radikanden.

Wenn Sie bei jeder Aufgabe selbständig diese Überschlagsrechnung durchführen, erlangen Sie die Rechensicherheit, die in der Mathematik unerläßlich ist.

5.2 Das Bestimmen beliebiger Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln mit Hilfe der Tafeln

5.21 Das Bestimmen der Quadrate (der 2. Potenzen)

Wie Sie sehen, macht es keine Schwierigkeit, die Tafelwerte aufzuschlagen, wenn der gegebene Wert in der Spalte n bzw. im Inneren der Tafel zu finden ist. Wie ist es aber, wenn Ihnen eine Zahl gegeben ist, die Sie nicht in der Tafel finden? Angenommen, Sie sollen $0{,}646^2$ oder $\sqrt{0{,}646}$ bestimmen.
Wir erweitern die gestellte Aufgabe und bestimmen die Quadrate von 0,0646; 0,646; 6,46; 64,6; 646 und 6460.

Durch Multiplizieren ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0{,}0646^2 &= 0{,}004\,173\,16\\
0{,}646^2 &= 0{,}417\,316\\
6{,}46^2 &= 41{,}7316\\
64{,}6^2 &= 4\,173{,}16\\
646^2 &= 417\,316\\
6460^2 &= 41\,731\,600
\end{aligned}$$

Wie Sie sehen, erhalten Sie in jedem Fall die gleiche Ziffernfolge, die Werte unterscheiden sich nur durch die Stellung des Kommas. Sie erkennen folgende wichtige Regel:

Verschiebt man das Komma in einer Zahl (n) um 1, 2, 3, ... Stellen nach links bzw. rechts, so verschiebt sich im Quadrat dieser Zahl (n^2) das Komma um 2, 4, 6, ... Stellen nach links bzw. rechts.

Unter Beachtung dieser Regel können Sie nun mit Hilfe Ihrer Quadrattafel zu jedem gegebenen Wert das Quadrat angeben.

Eine Beschränkung bietet allerdings zunächst die Stellenzahl der Tafel. Sie müssen also unter Umständen die gegebene Zahl auf die Stellenzahl der betreffenden Tafel runden.

Lehrbeispiel 41

Bestimmen Sie $0{,}0057^2$*!*

Lösung:

Sie verschieben das Komma der gegebenen Grundzahl, bis eine Zahl vorliegt, die in der Tafel unter n zu finden ist. Hier gelangen Sie durch Verschieben des Kommas nach rechts z. B. zur Zahl 5,7.

Dann finden Sie $5{,}7^2 = 32{,}49$. Nunmehr wenden Sie die obige Kommaregel an. Um von 5,7 auf 0,0057 zu kommen, muß das Komma um drei Stellen nach links gerückt werden, folglich muß im Quadrat das Komma um sechs Stellen nach links rücken. So erhalten Sie

$$0{,}0057^2 = \underline{\underline{0{,}000\,032\,49}}\,.$$

Zum gleichen Ergebnis kommen Sie, wenn Sie in einer Tafel von der Zahl $n = 57$ ausgehen.

Lehrbeispiel 42

Bestimmen Sie 8150^2*!*

Lösung:

$$8{,}15^2 = 66{,}42$$
$$8150^2 = \underline{\underline{66420000}}$$

5.22 Das Bestimmen der Kuben (der 3. Potenzen)

Wir gehen in derselben Weise vor wie beim Aufsuchen der Quadrate und errechnen:

$$\begin{aligned} 0{,}0646^3 &= 0{,}000269586136 \\ 0{,}646^3 &= 0{,}269586136 \\ 6{,}46^3 &= 269{,}586136 \\ 64{,}6^3 &= 269586{,}136 \\ 646^3 &= 269586136 \\ 6460^3 &= 269586136000 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich als Regel:

Verschiebt man das Komma in einer Zahl (n) um 1, 2, 3, . . . Stellen nach links bzw. rechts, so verschiebt sich im Kubus dieser Zahl (n^3) das Komma um 3, 6, 9, . . . Stellen nach links bzw. rechts.

Lehrbeispiel 43

Bestimmen Sie $0{,}057^3$*!*

Lösung:

$$5{,}7^3 = 185{,}2$$
$$0{,}057^3 = \underline{\underline{0{,}0001852}}$$

5.23 Das Bestimmen der Quadratwurzeln

Bestimmen Sie die folgenden Quadratwurzeln:

$$\sqrt{0{,}04};\ \sqrt{0{,}4};\ \sqrt{4};\ \sqrt{40};\ \sqrt{400};\ \sqrt{4000}!$$

Sie wissen bereits, daß $2^2 = 4$ ist, folglich ist $\sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{40}$ liegt zwischen $\sqrt{36} = 6$ und $\sqrt{49} = 7$. Folglich muß der Wert von $\sqrt{40}$ zwischen 6 und 7 liegen. Es ist $\sqrt{40} = 6{,}32456$.

$\sqrt{400} = 20$, denn $20^2 = 400$.

$\sqrt{4000}$ liegt zwischen $\sqrt{3600} = 60$ und $\sqrt{4900} = 70$, also der Wert von $\sqrt{4000}$ zwischen 60 und 70.

Ähnlich verfahren Sie auch mit den übrigen Quadratwurzeln und erhalten:

$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

$\sqrt{0{,}4} = \quad 0{,}632456$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{40} = \quad 6{,}32456$

$\sqrt{400} = 20$

$\sqrt{4\,000} = \quad 63{,}2456$

Wie Sie aus diesen Quadratwurzelwerten erkennen, treten hier zwei verschiedene Ziffernfolgen auf, und zwar erhalten Sie bei Verschiebung des Kommas im Radikanden um eine Stelle jeweils die andere, bei Verschiebung des Kommas um zwei Stellen jeweils die gleiche Ziffernfolge. Es gilt deshalb als Kommaregel:

> **Verschiebt man das Komma des Radikanden um 2, 4, 6, . . . Stellen nach links bzw. rechts, so verschiebt sich im Quadratwurzelwert das Komma um 1, 2, 3, . . . Stellen nach links bzw. rechts.**

Beachten Sie, daß man, um einen für das Nachschlagen passenden Wert zu erhalten, das Komma im Radikanden stets nur um 2, 4, 6, . . . Stellen, also um eine *gerade* Anzahl von Stellen, verschieben darf!

Lehrbeispiel 44

Bestimmen Sie $\sqrt{6\,300}$ *und* $\sqrt{0{,}063}$*!*

Lösung:

In der Tafel finden Sie $\sqrt{63} = 7{,}93725$

$$\sqrt{6\,300} = \underline{\underline{79{,}3725}}$$

In der Tafel finden Sie $\sqrt{6{,}3} = 2{,}51$

$$\sqrt{0{,}063} = \underline{\underline{0{,}251}}$$

Ein genaueres Ergebnis ist 0,250998. Sie sehen also, daß der gerundete Wert eine hinreichende Genauigkeit gewährleistet.

Lehrbeispiel 45

Bestimmen Sie $\sqrt{986}$ *und* $\sqrt{0{,}986}$*!*

Lösung:

$\sqrt{9{,}86} = 3{,}14 \qquad \sqrt{98{,}6} = 9{,}93$

$\sqrt{986} = \underline{\underline{31{,}4}} \qquad \sqrt{0{,}986} = \underline{\underline{0{,}993}}$

5.24 Das Bestimmen der Kubikwurzeln

Bestimmen Sie folgende Kubikwurzeln:

$$\sqrt[3]{0{,}008};\ \sqrt[3]{0{,}08};\ \sqrt[3]{0{,}8};\ \sqrt[3]{8};\ \sqrt[3]{80};\ \sqrt[3]{800};\ \sqrt[3]{8000}!$$

Sie wissen bereits, daß $2^3 = 8$ ist, folglich ist $\sqrt[3]{8} = 2$.

$\sqrt[3]{80}$ liegt zwischen $\sqrt[3]{64}$ und $\sqrt[3]{125}$. $\sqrt[3]{64} = 4$, denn $4^3 = 64$, und $\sqrt[3]{125} = 5$, denn $5^3 = 125$. Folglich muß der Wurzelwert der Kubikwurzel $\sqrt[3]{80}$ zwischen 4 und 5 liegen. Es ist $\sqrt[3]{80} = 4{,}3089$.

$\sqrt[3]{800}$ liegt zwischen $\sqrt[3]{729}$ und $\sqrt[3]{1000}$. $\sqrt[3]{729} = 9$, denn $9^3 = 729$, und $\sqrt[3]{1000} = 10$, denn $10^3 = 1000$. Folglich muß der Wurzelwert der Kubikwurzel $\sqrt[3]{800}$ zwischen 9 und 10 liegen. Es ist $\sqrt[3]{800} = 9{,}2832$.

$\sqrt[3]{8000} = 20$, denn $20^3 = 8000$.

Ähnlich verfahren Sie auch mit den übrigen Kubikwurzeln und erhalten:

$$\begin{array}{llll}
\sqrt[3]{0{,}008} = & 0{,}2 & & \\
\sqrt[3]{0{,}08} = & & 0{,}43089 & \\
\sqrt[3]{0{,}8} = & & & 0{,}92832 \\
\sqrt[3]{8} = & 2 & & \\
\sqrt[3]{80} = & & 4{,}3089 & \\
\sqrt[3]{800} = & & & 9{,}2832 \\
\sqrt[3]{8000} = & 20 & &
\end{array}$$

Hier erhalten Sie also drei Ziffernfolgen. Als Kommaregel gilt:

> **Verschiebt man das Komma des Radikanden um 3, 6, 9, ... Stellen nach links bzw. rechts, so verschiebt sich im Kubikwurzelwert das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links bzw. rechts.**

Hier dürfen Sie also das Komma des Radikanden stets nur um 3, 6, 9, ... Stellen verschieben!

Lehrbeispiel 46

Bestimmen Sie $\sqrt[3]{0{,}7};\ \sqrt[3]{70000};\ \sqrt[3]{0{,}007}!$

Lösung:

$\sqrt[3]{700} = 8{,}88$ $\qquad$ $\sqrt[3]{70} = 4{,}1213$

$\sqrt[3]{0{,}7} = \underline{\underline{0{,}888}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{70000} = \underline{\underline{41{,}213}}$

$\sqrt[3]{7} = 1{,}9129$

$\sqrt[3]{0{,}007} = \underline{\underline{0{,}19129}}$

Beim Rechnen sind Ihnen meist Werte mit einer bestimmten Ziffernzahl und damit mit einer bestimmten Genauigkeit gegeben. Diese Ziffernzahl müssen Sie nach Möglichkeit in der Rechnung beibehalten. Die in der Rechnung mögliche Ziffernzahl hängt von der verwendeten Tafel ab. Mit einer vierstelligen Tafel können Sie genauere Werte aufschlagen als mit einer dreistelligen Tafel. Sie können allerdings durch Anwendung eines besonderen Rechenverfahrens, das man „**Interpolieren**"[1]) nennt, also durch Einschalten von Zwischenwerten, über die in der Randleiste der Tafel unmittelbar gegebene Ziffernzahl hinausgehen und dadurch größere Genauigkeit in Ihren Rechnungen erreichen.
Beim praktischen Rechnen werden Sie allerdings bei Quadrat- oder Kubiktafeln kaum interpolieren. Stehen die gesuchten Werte nicht in der Tafel, so werden Sie in beiden Fällen meist mit Abschätzen auskommen.

Zusammenfassung

In der Rechenpraxis verwendet man häufig Tafeln, um Rechenarbeit einzusparen. Am gebräuchlichsten sind die Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen, der Quadrat- und Kubikwurzeln, der Kreisumfänge und Kreisflächen sowie der Kehrwerte.
Die Tafeln der Quadrate (Kuben) können gleichzeitig zum Aufschlagen der Quadratwurzeln (Kubikwurzeln) verwendet werden und umgekehrt.
Um alle gegebenen Werte aufschlagen zu können, müssen folgende Kommaregeln beachtet werden:

a) Verschiebt man das Komma in einer Zahl um 1, 2, 3, ... Stellen nach links bzw. rechts, so verschiebt sich das Komma
im *Quadrat* dieser Zahl um 2, 4, 6, ... Stellen,
im *Kubus* dieser Zahl um 3, 6, 9, ... Stellen nach links bzw. rechts.

b) Verschiebt man das Komma im Radikanden
einer *Quadratwurzel* um 2, 4, 6, ... Stellen,
einer *Kubikwurzel* um 3, 6, 9, ... Stellen nach links bzw. rechts,
so verschiebt sich im Wurzelwert das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links bzw. rechts.

Übungen

Lesen Sie folgende Werte in der Tafel ab!

103. a) 840^2 *b)* $4{,}26^2$ *c)* $76{,}2^2$ *d)* $0{,}234^2$

104. a) 783^2 *b)* $16\,700^2$ *c)* $0{,}003\,28^2$ *d)* $0{,}026^2$

[1]) lat. *interpolare*, abändern, einschalten.

105. a) 480^3 *b)* $6{,}71^3$ *c)* $28{,}5^3$ *d)* $0{,}157^3$

106. a) 276^3 *b)* $1\,730^3$ *c)* $0{,}009\,67^3$ *d)* $0{,}083^3$

107. a) $\sqrt{7\,800}$ *b)* $\sqrt{85{,}75}$ *c)* $\sqrt{3\,434}$ *d)* $\sqrt{61\,010}$

108. a) $\sqrt{0{,}02016}$ *b)* $\sqrt{0{,}002\,016}$ *c)* $\sqrt{888}$ *d)* $\sqrt{887\,400}$

109. a) $\sqrt[3]{0{,}067}$ *b)* $\sqrt[3]{26{,}46}$ *c)* $\sqrt[3]{1602}$ *d)* $\sqrt[3]{0{,}8253}$

110. a) $\sqrt[3]{2\,515}$ *b)* $\sqrt[3]{0{,}02515}$ *c)* $\sqrt[3]{89\,310\,000}$ *d)* $\sqrt[3]{0{,}000\,893\,1}$

Ermitteln Sie folgende Werte durch Abschätzen der Zwischenwerte!

111. a) $44{,}65^2$ *b)* $0{,}1\,625^2$ *c)* $53{,}05^3$ *d)* $0{,}8245^3$

112. a) $\sqrt{8865}$ *b)* $\sqrt{0{,}6307}$ *c)* $\sqrt[3]{804\,500}$ *d)* $\sqrt[3]{0{,}02832}$

[10]

6 Die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten

6.1 Einfache Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

Sie haben bereits vielfach das Gleichheitszeichen benutzt, um auszudrücken, daß zwei durch das Gleichheitszeichen verbundene Ausdrücke den gleichen Wert besitzen, z. B. für

$$3 + 4 = 7$$

$$a + b = b + a$$

$$17 - (11 - 3) = 17 - 11 + 3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

usw.

Sie stellen fest:

Eine *Gleichung* besteht aus *zwei gleichwertigen Zahlenausdrücken*, die durch ein *Gleichheitszeichen* verbunden sind (= wird gelesen „gleich" und nicht „ist gleich"). Beachten Sie, daß die beiden Ausdrücke den *gleichen Wert* haben müssen, in ihrer *Form* aber *verschieden* sein können.

Eine Gleichung kann durch eine Waage, die sich im Gleichgewicht befindet, veranschaulicht werden. Die beiden Waagschalen stellen die beiden Seiten der Gleichung dar, die Gewichte auf den beiden Waagschalen die Glieder der beiden Seiten.

Bei einer Waage können Sie die beiden Waagschalen mit ihren Gewichten miteinander vertauschen, ohne daß das Gleichgewicht verlorengeht.

Auch bei einer Gleichung gilt:

Die Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden.

Man unterscheidet verschiedene Arten von Gleichungen. So nennt man die oben angeführten Gleichungen **identische**[1]) **Gleichungen**. Will man eine identische Gleichung als solche kennzeichnen, dann schreibt man an Stelle des Gleichheitszeichens das Zeichen für die Identität ($\equiv$, gelesen „identisch gleich"), z. B.

$$3a + 4a \equiv 7a.$$

Von größter Bedeutung sind in der Mathematik die **Bestimmungsgleichungen.** Ihr Wesen sei an einem Beispiel erläutert:

Von welcher Zahl muß 7 *subtrahiert werden, damit man* 11 *erhält?*

Wir sollen also von einer noch unbekannten Zahl die Zahl 7 subtrahieren, und die Differenz soll den Wert 11 haben. Wir drücken diesen Sachverhalt kurz durch eine Gleichung aus, wobei wir für die noch unbekannte Zahl den Buchstaben x setzen:

$$x - 7 = 11.$$

Diese Gleichung ist nur dann „richtig", wenn man für x einen ganz bestimmten Wert, hier die Zahl 18, einsetzt.
Den Vorgang des Bestimmens des Wertes von x nennt man das *Lösen der Gleichung.* Das geschieht in der Weise, daß die Gleichung so umgeformt wird, daß die Unbekannte auf der einen Seite allein steht, während sich alle übrigen Glieder auf der anderen Seite befinden.
Das Ergebnis, in unserem Beispiel $x = 18$, ist die *Lösung* der Gleichung.
Um sich von der Richtigkeit der gefundenen Lösung zu überzeugen, setzt man den ausgerechneten Wert der Unbekannten in die vorgelegte Gleichung ein. Ist die Lösung richtig, so müssen beide Seiten denselben Wert ergeben.

Für das angeführte Beispiel ergibt sich

auf der linken Seite: $18 - 7 = 11$; auf der rechten Seite: 11
Vergleich: $11 = 11$

Diese Kontrolle der Lösung gehört zum *vollständigen Lösungsweg* einer Gleichung, sie wird mit *Probe* bezeichnet.
Bestimmungsgleichungen sind also Gleichungen, bei denen aus den Beziehungen zu bekannten Größen der Wert einer oder mehrerer unbekannter Größen - kurz *Unbekannte* genannt - zu „bestimmen" ist. Die Unbekannten werden in der Mathematik meist mit den letzten Buchstaben des Alphabetes (x, y, z) bezeichnet.
Bestimmungsgleichungen werden nach der *Anzahl ihrer Unbekannten* eingeteilt. Es gibt Gleichungen mit einer, mit zwei und mehreren Unbekannten. Der *Grad einer Gleichung* richtet sich nach der höchsten Potenz, in der die Unbekannte auftritt.

Beispiele:

$3x + 2 = 14$ Gleichung ersten Grades (lineare Gleichung),
$x^2 - 5x + 6 = 0$ Gleichung zweiten Grades (quadratische Gleichung),
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ Gleichung dritten Grades (kubische Gleichung).

[1]) lat. *idem*, dasselbe.

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit Gleichungen *ersten* Grades mit *einer* Unbekannten.
Da eine Gleichung mit einer im Gleichgewicht befindlichen Waage vergleichbar ist, können Sie wie bei dieser auf beiden Seiten gleiche Größen hinzufügen (addieren) oder wegnehmen (subtrahieren), ohne das Gleichgewicht (die Gleichheit) zu stören.

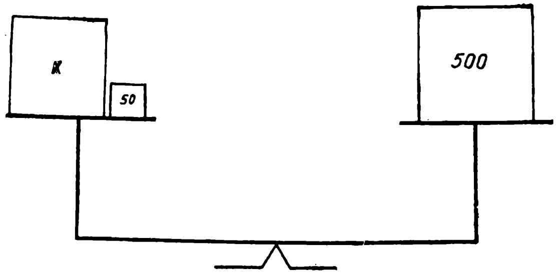


Bild 10

Betrachten Sie Bild 10! Die Waage befindet sich im Gleichgewicht. Auf der linken Seite befinden sich ein Gewicht von unbekannter Größe und ein Gewicht von 50 g, auf der rechten Seite befindet sich ein Gewicht von 500 g. Die Gleichung lautet also

$$x + 50\text{ g} = 500\text{ g}.$$

Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn wir links und rechts gleiche Gewichte wegnehmen. Die Gleichung bleibt deshalb richtig, wenn wir links und rechts zugleich 50 g subtrahieren:

$$x + 50\text{ g} - 50\text{ g} = 500\text{ g} - 50\text{ g}$$

Die Lösung lautet $$\underline{\underline{x = 450\text{ g}}}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x + 50\text{ g} &= 500\text{ g} \\ 450\text{ g} + 50\text{ g} &\mid 500\text{ g} \\ 500\text{ g} &= 500\text{ g} \end{aligned}$$

Da Sie noch nicht wissen, ob die berechnete Lösung richtig ist, trennen Sie zunächst beide Seiten der Gleichung durch einen senkrechten Strich. Ist die Lösung richtig, dann wird in der letzten Zeile der Probe das Gleichheitszeichen gesetzt, im anderen Falle das Zeichen für ungleich $\neq$.

Bei allen Umformungen zum Lösen von Gleichungen wird ein einziges Gesetz angewendet. Das ist das **Grundgesetz der Gleichungslehre:**

> **Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Rechenart mit dem gleichen Zahlenwert ausführt.**

Da bei linearen Gleichungen die Bindung der Unbekannten an bekannte Zahlenwerte nur durch die vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) erfolgt, lauten die speziellen Regeln für das Rechnen mit linearen Gleichungen:

> Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten
> gleiche Zahlenwerte subtrahiert,
> gleiche Zahlenwerte addiert,
> durch gleiche Zahlenwerte dividiert oder
> mit gleichen Zahlenwerten multipliziert.

Die folgenden Lehrbeispiele zeigen, wie Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten mit Hilfe der vorstehenden Regeln gelöst werden.

Lehrbeispiel 47

$$x + 12 = 30$$

Lösung:

Die Unbekannte ist an einen Summanden (+ 12) gebunden. Sie isolieren die Unbekannte, indem Sie die entgegengesetzte Rechenart, die Subtraktion, anwenden. Sie müssen also auf beiden Seiten die Zahl 12 subtrahieren.

$$x + 12 - 12 = 30 - 12$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x + 12 &= 30 \quad \text{Ausgangsgleichung} \\ 18 + 12 &\mid 30 \quad \text{Lösung eingesetzt} \\ 30 &= 30 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 48

$$x - 3a = 2a + 5b$$

Lösung:

Sie addieren auf beiden Seiten $3a$.

$$\begin{aligned} x - 3a + 3a &= 2a + 5b + 3a \\ x &= 5a + 5b \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 5(a + b)}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x - 3a &= 2a + 5b \\ 5(a + b) - 3a &\mid 2a + 5b \\ 5a + 5b - 3a &\mid 2a + 5b \\ 2a + 5b &= 2a + 5b \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 49

$$a - x = b$$

Lösung:

Diesmal ist die Unbekannte selbst Subtrahend. Es bestehen hier zwei Wege.

1. Weg:

Sie addieren auf beiden Seiten x.

$$\begin{aligned} a - x + x &= b + x \\ a \qquad &= b + x \end{aligned}$$

Jetzt subtrahieren Sie auf beiden Seiten b.

$$\begin{aligned} a - b &= b + x - b \\ a - b &= x \end{aligned}$$

Sie vertauschen noch beide Seiten der Gleichung.

$$\underline{\underline{x = a - b}}$$

2. **Weg:**

Sie subtrahieren auf beiden Seiten a.

$$a - x - a = b - a$$
$$-x = b - a$$

Sie multiplizieren, da Sie ja x und nicht $(-x)$ berechnen wollen, beide Seiten der Gleichung mit (-1); denn $(-1)(-x) = x$.

$$(-1)(-x) = (-1)(b - a)$$
$$x = -b + a$$

Die rechte Seite geordnet: $\underline{\underline{x = a - b}}$

Führen Sie die Probe durch!

Aus dem Grundgesetz der Gleichungslehre und den bisher gerechneten Beispielen ergeben sich praktische Folgerungen, deren Beachtung zur Verkürzung des Lösungsweges beiträgt:

Ein Summand in einer Gleichung wird zum Subtrahenden auf der anderen Seite der Gleichung; ein Subtrahend der einen Gleichungsseite wird zum Summanden auf der anderen Seite der Gleichung.

Beispiel: In $x + 12 = 30$ (vgl. Lehrbeispiel 47)
wird aus dem Summanden $(+ 12)$ der linken Seite der Subtrahend $(- 12)$ auf der rechten Seite:

$$x = 30 - 12$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Lehrbeispiel 50

$$3x - 2a + 3b = 2x + 3a - 2b$$

Lösung:

Sie ordnen die Glieder der Gleichung, d. h., Sie bringen die x-Glieder auf die eine Seite, alle anderen auf die andere Seite.

$$3x - 2x = 3a - 2b + 2a - 3b$$
$$x = 5a - 5b$$
$$\underline{\underline{x = 5(a - b)}}$$

Führen Sie die Probe selbst durch! Beachten Sie dabei aber immer, daß bei der Probe *jede Seite für sich* ausgerechnet werden muß. Wenn Sie das nicht tun, sondern bei der Probe dieselben Umformungen der Gleichung vornehmen wie beim Lösen, dann könnten Sie einen eventuell dort unterlaufenen Fehler hier wiederholen, und das Ergebnis der Probe würde nur scheinbar die Richtigkeit der Lösung bestätigen. Außerdem ist die Probe stets an der *Ausgangsgleichung* durchzuführen, da sich ja bei einer umgeformten Gleichung bereits Fehler eingeschlichen haben können.

Obwohl im letzten Beispiel die Unbekannte x in mehreren Gliedern auftrat, ergab das Zusammenfassen der x-Glieder die gesuchte Größe x unmittelbar. Dieser einfache Fall muß nicht immer eintreten, wie das folgende Lehrbeispiel zeigt.

Lehrbeispiel 51

$$4x - 13 = 2x - 5$$

Lösung:

Ordnen: $\quad 4x - 2x = -5 + 13$

Zusammenfassen: $\quad 2x = 8$

Um x zu isolieren, müssen Sie beide Seiten der Gleichung durch den Koeffizienten von x, hier durch 2, dividieren.

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Probe:

$$\begin{array}{r|l} 4 \cdot 4 - 13 & 2 \cdot 4 - 5 \\ 16 - 13 & 8 - 5 \end{array}$$

$$3 = 3$$

An diesem Beispiel haben Sie die *drei Schritte* erkannt, aus denen sich grundsätzlich der *Lösungsweg* zusammensetzt:

1. Die Glieder ordnen.
2. Die gleichartigen Glieder zusammenfassen.
3. Die Unbekannte isolieren.

Treten in der Ausgangsgleichung additive oder subtraktive Klammern auf, in denen die Unbekannte steht, so sind in der Regel erst die Klammern aufzulösen, bevor mit dem Ordnen begonnen werden kann.

Lehrbeispiel 52

$$68 - [14x - (13 - 2x)] = 16x - [15 - (x - 3)]$$

Lösung:

Sie lösen zunächst die Klammern auf (die inneren zuerst):

$$68 - [14x - 13 + 2x] = 16x - [15 - x + 3].$$

Bevor Sie die eckigen Klammern auflösen, empfiehlt es sich, die gleichartigen Glieder in den Klammern zusammenzufassen. Sie können dann mit einer kleineren Anzahl von Gliedern weiterrechnen.

$$68 - [16x - 13] = 16x - [18 - x]$$
$$68 - 16x + 13 = 16x - 18 + x$$

Auch hier fassen Sie auf beiden Seiten erst die gleichartigen Glieder zusammen, bevor Sie ordnen.

$$81 - 16x = 17x - 18$$

Ordnen: $\quad 81 + 18 = 17x + 16x$

Zusammenfassen: $\quad 99 = 33x$

x isolieren: $\quad 3 = x$

Seiten vertauschen: $\quad \underline{\underline{x = 3}}$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Lehrbeispiel 53

$$\frac{3}{4}x - a - 2b = x - 5a + b$$

Lösung:

Sie formen in diesem Falle am besten so um, daß die *rechte* Seite nur aus x-Gliedern, die linke nur aus x-freien Gliedern besteht. Dann wird der Koeffizient von x positiv, da rechts das x-Glied mit dem größeren Koeffizienten (1) steht.

$$-a - 2b + 5a - b = x - \frac{3}{4}x$$

$$4a - 3b = \frac{1}{4}x$$

x ist hier mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ behaftet. Den gewünschten Faktor 1 für x erhalten Sie, indem Sie die beiden Gleichungsseiten durch $\frac{1}{4}$ dividieren, also mit dem Kehrwert von $\frac{1}{4}$, d. h. mit 4, multiplizieren.

Sie können $\frac{1}{4}x$ auch als $\frac{x}{4}$ schreiben und sagen: x ist mit dem Divisor 4 behaftet. Dieser wird beseitigt, indem man auf die beiden Seiten der Gleichung die entgegengesetzte Rechenart mit dem gleichen Zahlenwert anwendet, d. h., indem man die beiden Seiten der Gleichung mit 4 multipliziert.

Sie erhalten: $4(4a - 3b) = x$

Die Seiten vertauscht: $\underline{\underline{x = 4(4a - 3b)}}$

Führen Sie auch hier die Probe selbst durch!

Auch bei diesen Beispielen ergeben sich aus dem Grundgesetz der Gleichungslehre praktische Folgerungen:

Ein Faktor der einen Gleichungsseite wird zum Divisor der anderen Seite der Gleichung; ein Divisor der einen Gleichungsseite wird zum Faktor auf der anderen Seite der Gleichung.

Lehrbeispiel 54

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x$$

Lösung:

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}$$

$$x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$x\left(\frac{2-3}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{6}x = -\frac{1}{6}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Probe: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \;\Big|\; \frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{6} \;\Big|\; \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{6} \;\Big|\; \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zusammenfassung

In einer Gleichung dürfen die Seiten vertauscht werden.
Alle Umformungen von Gleichungen erfolgen durch Anwendung des Grundgesetzes der Gleichungslehre:

> Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Rechenart mit dem gleichen Zahlenwert ausführt.

Oder zur Verkürzung des Rechnungsweges anders ausgedrückt:

> In einer Gleichung kann eine Größe von der einen Seite auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden, indem man ihr dort das Zeichen der entgegengesetzten Rechenart gibt.

Die Schritte beim Lösen einer Gleichung sind:

1. Die Glieder ordnen.
2. Die gleichartigen Glieder zusammenfassen.
3. Die Unbekannte isolieren.

Klammern, in denen die Unbekannte steht, sind in der Regel vorher aufzulösen.

Übungen

113. *a)* $x + 22 = 50$ *b)* $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

c) $1\frac{1}{5} - x = 3\frac{1}{3}$ *d)* $x - 5b = 3{,}6b$

114. *a)* $9x + 4a - 3b = 10x - 6a + 2b$

b) $14x + 15a + 7b + 6x - 13b = 19x + 3a - 12b$

115. *a)* $13x = 52$ *b)* $50 = 2{,}5x$ *c)* $\frac{x}{11} = 5$ *d)* $\frac{7x}{9} = \frac{14}{27}$

116. *a)* $2x + 7 = 13$ *b)* $1 = 7 - 6x$

117. Isolieren Sie nacheinander R und I aus der Gleichung $U = R \cdot I$*!*

118. Isolieren Sie g aus den Gleichungen a) $v = g \cdot t$; *b)* $s = \frac{g}{2}t^2$*!*

119. *a)* $8x - 7 + 12x = 17 - 14x - 7$

b) $6x + 5 - 3x + 2 + 9x = x - 5 + 8x + 3$

120. *a)* $ax - b = bx - a$

b) $14ax - 4a + 7b = 8a - 5b + 8ax$

121. *a)* $51 - [14x + (3x - 2)] = 12x - [(4x + 3) - 6]$

b) $\{3x - [8b + (3a - 2x)]\} - x = 12a - \{13x - [4x - (2x - 7b)]\}$

122. *a)* $30 - 4(x - 8) = 2{,}5x + 6(1{,}5x - 4) - 7$

b) $5x - [(2x + 9) - 3(x - 2)] = 5 - (8 - 2x)$

6.2 Lösen von schwierigeren Gleichungen

In den bisherigen Beispielen trat die Unbekannte x als Summand $(x + a)$, Minuend $(x - a)$, Subtrahend $(a - x)$, Faktor (ax) und als Zähler eines Bruches $\left(\frac{x}{a}\right)$ auf; die Bindung war meist einfacher Art. Ist die Unbekannte x in einer Gleichung aber auf mehrfache Weise an andere Größen gebunden, dann muß die Reihenfolge der Lösungsschritte gut überlegt werden.
Am besten erkennen Sie die Reihenfolge der vorzunehmenden Rechenoperationen, wenn Sie die Bindung der Unbekannten an die bekannten Glieder der Gleichung untersuchen.

Beispiele:
In
$$3x - 5 = 4$$
ist 1. x durch Multiplikation mit 3 verbunden,
2. das Produkt $3x$ durch Subtraktion mit der 5.

Sie berechnen x, indem Sie es Schritt für Schritt von den Größen befreien, mit denen es behaftet ist. Sie „schälen" gewissermaßen die Unbekannte heraus. Damit ist bereits gesagt, daß Sie - wie bei jedem Schälen - von außen beginnen müssen. Für die Gleichung bedeutet es, daß zuerst die weiteste Bindung (also der Subtrahend 5), zuletzt die engste Bindung (der Faktor 3) beseitigt wird.
Zuerst muß in der Gleichung $3x - 5 = 4$
das Produkt $3x$ von dem Subtrahenden 5 befreit werden. Durch Addieren von 5 auf beiden Seiten der Gleichung (Addition als Umkehrung der Subtraktion) erhalten Sie
$$3x = 4 + 5$$
$$3x = 9$$

Jetzt kann die am engsten, nämlich durch Multiplikation, an das x gebundene 3 beseitigt werden, indem Sie beide Seiten der Gleichung durch 3 dividieren (Division als Umkehrung der Multiplikation):
$$3x = 9 \quad | :3$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Probe!

Als weiteres Beispiel betrachten Sie die Gleichung
$$\frac{3x + 5}{2} = 7 .$$

Hier ist 1. x durch Multiplikation mit 3 verbunden,
2. das Produkt $3x$ durch Addition mit der 5,
3. die Summe $3x + 5$ durch Division mit der 2.

Damit sind die vorzunehmenden Operationen sowie ihre Reihenfolge bereits festgelegt.

1. Beide Seiten der Gleichung müssen mit 2 multipliziert werden:

$$\frac{3x+5}{2} = 7 \quad | \cdot 2$$

$$3x + 5 = 7 \cdot 2$$

$$3x + 5 = 14$$

2. Auf beiden Seiten der Gleichung muß 5 subtrahiert werden:

$$3x = 14 - 5$$
$$3x = 9$$

3. Beide Seiten der Gleichung müssen durch 3 dividiert werden:

$$3x = 9 \quad | :3$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Probe:

Beachten Sie (vgl. 6.1), daß die Probe stets an der Ausgangsgleichung durchzuführen ist.

$$\frac{3x+5}{2} = 7$$

$$\frac{3 \cdot 3 + 5}{2} \;\Big|\; 7$$

$$7 = 7$$

In den folgenden Lehrbeispielen geben die rechts neben der Gleichung hinter dem senkrechten Strich stehenden Rechenzeichen und Zahlen die jeweils mit beiden Seiten der Gleichung durchzuführende Umformung an.

Lehrbeispiel 55

$$7 = 0{,}4x + 13$$

Lösung:

$$7 = 0{,}4x + 13 \quad | -13$$

$$7 - 13 = 0{,}4x$$

$$-6 = 0{,}4x \quad | :0{,}4$$

$$\frac{-6}{0{,}4} = x$$

$$-15 = x$$

$$\underline{\underline{x = -15}}$$

Probe:

$$7 \;|\; 0{,}4 \cdot (-15) + 13$$
$$7 \;|\; -6 + 13$$
$$7 = 7$$

Lehrbeispiel 56

$$\frac{ax+m}{n} = b$$

Lösung:

$$\frac{ax+m}{n} = b \qquad | \cdot n$$

$$ax + m = bn \qquad | - m$$

$$ax = bn - m \qquad | :a$$

$$x = \underline{\underline{\frac{bn-m}{a}}}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Nun sollen Bestimmungsgleichungen gelöst werden, in denen multiplikative Klammern auftreten.

Klammern setzt man, um anzugeben,

1. daß die in ihnen stehenden Ausdrücke zuerst zu berechnen sind,
2. daß eine Rechenart niederer Stufe vor einer Rechenart höherer Stufe ausgeführt werden soll.

In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu wissen, daß der Bruchstrich eine Klammer ersetzt.

Sie schreiben z. B. $\quad 2\frac{a+b}{b} = d\,.$

Fällt beim Umformen der Gleichung der Bruchstrich weg, so müssen im Zähler bzw. im Nenner stehende Summen in Klammern gesetzt werden. Multiplizieren Sie in der vorstehenden Gleichung beide Seiten mit c, so ist zu schreiben

$$2\,(a + b) = cd.$$

Beim Lösen von Bestimmungsgleichungen mit Klammern sind im wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden. Die Unbekannte steht

1. nur außerhalb der Klammer,
2. nur in der Klammer,
3. in und außerhalb der Klammer.

Steht die Unbekannte nur außerhalb der Klammer, so stört die Klammer beim Isolieren der Unbekannten nicht. Sie rechnen - wie im folgenden Lehrbeispiel - mit dem Klammerausdruck wie mit jedem anderen Faktor.

Lehrbeispiel 57

$$2\,(a - b) = x\,(a^2 - b^2)$$

Lösung:

$$2\,(a - b) = x\,(a^2 - b^2) \qquad :(a^2 - b^2)$$

$$\frac{2\,(a-b)}{a^2 - b^2} = x$$

Die Seiten vertauscht und $(a^2 - b^2)$ in die Faktoren $(a + b)$ und $(a - b)$ zerlegt

$$x = \frac{2(a-b)}{(a+b)(a-b)}$$

und gekürzt ergibt

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{a+b}}}$$

Lehrbeispiel 58

$$x(a + 2) + x(a - 3) = 2 - 4a$$

Lösung:

Sie fassen auch hier die Glieder mit der Unbekannten zusammen. Stehen, wie in dieser Gleichung, allgemeine Zahlsymbole als Faktoren bei x, so geschieht das Zusammenfassen, indem man x aus allen Gliedern ausklammert. Da die vorgegebene Gleichung bereits geordnet ist - alle Glieder mit x stehen links, alle ohne x stehen rechts - kann x sofort ausgeklammert werden.

$$x[(a + 2) + (a - 3)] = 2 - 4a$$

$$x(2a - 1) = 2 - 4a \qquad :(2a - 1)$$

$$x = \frac{2 - 4a}{2a - 1}$$

Sie können diesen Ausdruck noch weiter vereinfachen, indem Sie auf der rechten Seite im Zähler (-2) ausklammern und dann den Faktor $(2a - 1)$ kürzen.

$$x = \frac{-2(-1 + 2a)}{2a - 1} = \frac{-2(2a - 1)}{2a - 1}$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

Probe:

$$x(a + 2) + x(a - 3) = 2 - 4a$$

$$-2(a + 2) - 2(a - 3) \mid 2 - 4a$$

$$-2a - 4 - 2a + 6 \mid 2 - 4a$$

$$2 - 4a = 2 - 4a$$

Sie erkennen an diesem Lehrbeispiel die durch Kürzen möglichen Vereinfachungen. Merken Sie sich deshalb für das Rechnen mit Gleichungen: Jeder Ausdruck, der allgemeine Zahlsymbole enthält, ist auf Ausklammern hin anzusehen! Wenn nicht ausgeklammert werden kann, wenn also keine Faktoren gebildet werden können, kann auch nicht gekürzt werden.

Steht die Unbekannte *nur in der Klammer*, so muß die Klammer ausmultipliziert werden, es sei denn, daß durch anderweitiges Umformen der Gleichung die Klammer überflüssig wird und weggelassen werden kann.

Lehrbeispiel 59

$$ab = c(x - t)$$

Lösung:

1. Weg: Durch Ausmultiplizieren der Klammer erhalten Sie

$$ab = cx - ct \quad | + ct$$

$$ab + ct = cx \quad | : c$$

$$\frac{ab + ct}{c} = x$$

$$\underline{\underline{x = \frac{ab + ct}{c}}}$$

2. Weg:

$$ab = c\,(x - t) \quad | : c$$

$$\frac{ab}{c} = x - t \quad | + t$$

$$\frac{ab}{c} + t = x$$

$$\underline{\underline{x = \frac{ab}{c} + t}}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem auf dem ersten Wege erhaltenen überein. Es kann auf die gleiche Form gebracht werden:

$$\frac{ab}{c} + t = \frac{ab}{c} + \frac{ct}{c} = \frac{ab + ct}{c}.$$

Steht die Unbekannte nur in einer Klammer, so ist der zweite Weg zweckmäßiger. Steht dagegen die Unbekannte in mehreren Klammern, so müssen die Klammern ausmultipliziert werden.

Lehrbeispiel 60

$$m^2 + n^2 = m\,(x + n) - n\,(x - m)$$

Lösung:

Sie beseitigen zunächst die Klammern durch Ausmultiplizieren.

$$m^2 + n^2 = mx + mn - nx + mn$$

Sie ordnen und klammern x aus:

$$m^2 + n^2 - 2mn = x\,(m - n)$$

Auf der linken Seite setzen Sie:

$$m^2 - 2mn + n^2 = (m - n)^2$$

Dann erhalten Sie:

$$(m - n)^2 = x\,(m - n) \quad | : (m - n)$$

$$m - n = x$$

$$\underline{\underline{x = m - n}}$$

Steht die Unbekannte *innerhalb und außerhalb der Klammer,* so wird in den meisten Fällen die Klammer ausmultipliziert werden müssen, um die x-Glieder ordnen und zusammenfassen zu können. Nur in seltenen Fällen wird es möglich sein, durch andere Umformungen die Klammer wegfallen zu lassen. Im folgenden Lehrbeispiel ist dieser Weg neben dem des Ausmultiplizierens möglich.

Lehrbeispiel 61

$$ax = c\,(x - m)$$

Lösung:

1. Weg: Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} ax &= c\,(x - m) \\ ax &= cx - cm \\ ax - cx &= -cm \\ x\,(a - c) &= -cm \\ x &= \frac{-cm}{a-c} \end{aligned}$$

Es ist noch eine Veränderung möglich. Durch Erweitern des Bruches mit (-1) erhalten Sie

$$\underline{\underline{x = \frac{cm}{c-a}}}$$

Beachten Sie, daß das Erweitern mit (-1) nicht zu einer Vereinfachung geführt hätte, wenn im Nenner statt einer Differenz eine Summe gestanden hätte!

2. Weg: Isolieren der Klammer, die die Unbekannte enthält:

$$\begin{aligned} ax &= c\,(x - m) \quad \Big|\; :c \\ \frac{ax}{c} &= x - m \qquad\qquad -\frac{ax}{c} + m \\ m &= x - \frac{ax}{c} \\ m &= x\left(1 - \frac{a}{c}\right) \\ m &= x\left(\frac{c-a}{c}\right) \qquad\quad : \frac{c-a}{c} \\ m\,\frac{c}{c-a} &= x \\ x &= \frac{cm}{c-a} \end{aligned}$$

Dieser Lösungsweg wird meist - wie in unserem Beispiel - der unbequemere sein, da durch das Isolieren der Klammer die andere in der Gleichung enthaltene x-Größe eine für die weitere Rechnung unbequeme Form erhält.

Sie erkennen also, daß Sie besser zum Ergebnis kommen, wenn Sie erst die Klammern ausmultiplizieren, die die Unbekannte enthalten, und dann die Gleichung ordnen.

Lehrbeispiel 62

$$8\,(3x - 2) - 7x - 5\,(12 - 3x) = 13x$$

Lösung:

Sie lösen die Klammern auf:

$$24x - 16 - 7x - 60 + 15x = 13x$$

Ordnen und zusammenfassen: $19x = 76$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Probe: $8\,(3 \cdot 4 - 2) - 7 \cdot 4 - 5\,(12 - 3 \cdot 4) \quad | \quad 13 \cdot 4$

Jetzt können Sie zuerst die Klammern ausrechnen:

$$8 \cdot 10 \quad - 28 \quad - 5 \cdot 0 \quad | \quad 52$$
$$80 \quad - 28 \quad - \quad 0 \quad | \quad 52$$
$$52 = 52$$

Lehrbeispiel 63

$$x\,(p + q) + q\,(x + p) + 10pq = p\,(12q - x)$$

Lösung:

Die Klammern ausmultipliziert:

$$px + qx + qx + pq + 10pq = 12pq - px$$

Zusammengefaßt: $px + 2qx + 11pq = 12pq - px$

Geordnet: $px + 2qx + px = 12pq - 11pq$

Wiederum zusammengefaßt
und ausgeklammert: $2x\,(p + q) = pq$

Nach x aufgelöst: $\underline{\underline{x = \frac{pq}{2\,(p + q)}}}$

An diesem Beispiel soll einmal die Probe ausführlich durchgerechnet werden. Hier tritt nämlich der Fall ein, daß die Probe umfangreicher und langwieriger ist als die Rechnung der Aufgabe selbst. Beachten Sie wiederum, daß bei der Probe keine Umformung auf Grund des Grundgesetzes der Gleichungslehre durchgeführt werden darf (auch wenn dies zu einer Vereinfachung der Gleichung führen würde), da die Lösung bereits durch Anwenden dieses Grundgesetzes erfolgte. Bei einem nochmaligen Anwenden könnten Sie Fehler des Lösungsweges wiederholen, so daß Ihre Probe für ein falsches Ergebnis scheinbar stimmen würde.

Probe:

$$\frac{pq}{2\,(p + q)}\,(p + q) + q\left[\frac{pq}{2\,(p + q)} + p\right] + 10pq \quad | \quad p\left[12q - \frac{pq}{2\,(p + q)}\right]$$

Dadurch, daß im zweiten Glied der Nenner $2(p + q)$ nicht beseitigt werden kann, ist festgelegt, daß die Glieder der linken Seite zu einem Bruch mit diesem Nenner vereinigt werden müssen. Es hat daher keinen Zweck, im ersten Glied der linken Seite $(p + q)$ zu kürzen. Multiplizieren Sie die Klammer im zweiten Glied der linken

Seite aus, so kann anschließend auf der linken Seite pq ausgeklammert werden. Auf der rechten Seite läßt sich q ausklammern.

$$\frac{pq\,(p+q)}{2\,(p+q)} + \frac{pq^2}{2\,(p+q)} + pq + 10\,pq \;\Big|\; p\left[12q - \frac{pq}{2\,(p+q)}\right]$$

$$pq\left[\frac{p+q}{2\,(p+q)} + \frac{q}{2\,(p+q)} + 1 + 10\right] \;\Big|\; pq\left[12 - \frac{p}{2\,(p+q)}\right]$$

Die Glieder der Klammern auf den Nenner $2\,(p+q)$ gebracht:

$$pq\left[\frac{p+q+q+11\cdot 2\,(p+q)}{2\,(p+q)}\right] \;\Big|\; pq\left[\frac{12\cdot 2\,(p+q)-p}{2\,(p+q)}\right]$$

$$pq\left[\frac{p+2q+22p+22q}{2\,(p+q)}\right] \;\Big|\; pq\left[\frac{24p+24q-p}{2\,(p+q)}\right]$$

$$pq\left[\frac{23p+24q}{2\,(p+q)}\right] = pq\left[\frac{23p+24q}{2\,(p+q)}\right]$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der errechneten Lösung.

Sie sehen an diesem Beispiel, daß es in solchen Fällen nicht ratsam ist, die Einsetzprobe zu machen; denn durch die umfangreichen Rechenoperationen ist die Gefahr, einen Rechenfehler zu machen, besonders groß. Es empfiehlt sich dann folgender Weg, der allerdings nur eine bedingte Sicherheit bietet:
Setzen Sie für p und q willkürlich gewählte Werte ein, z. B. $p = 2$ und $q = 3$. Dann ist $x = \frac{2\cdot 3}{2\,(2+3)} = \frac{6}{10} = 0{,}6$. Mit diesem speziellen Wert machen Sie nun die Einsetzprobe und erhalten:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}6\cdot 5 + 3\cdot 2{,}6 + 60 & 2\,(36 - 0{,}6) \\ 3{,}0 + \phantom{3\cdot{}} 7{,}8 + 60 & 70{,}8 \end{array}$$
$$70{,}8 = 70{,}8$$

Erhalten Sie hierbei einen Widerspruch und haben Sie richtig gerechnet, so ist das Ergebnis bestimmt falsch. Machen Sie dieselbe Probe mehrmals mit noch anderen Werten für p und q und stimmen dabei die beiden Seiten der Gleichung immer überein, dann haben Sie wahrscheinlich richtig gerechnet.
Es sei aber nochmals betont, daß Sie mit dieser Form der Probe eine *absolute* Sicherheit *nicht* erreichen.

Lehrbeispiel 64

$$(x+3)\,(x-5) = x^2 - 21$$

Lösung:

Scheinbar liegt eine Gleichung 2. Grades vor. Multiplizieren Sie aber die Klammern der linken Seite aus, so heben sich die Glieder mit x^2 gegenseitig auf.

$$x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 21$$
$$-2x = -6$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Probe:

$$(3+3)\,(3-5) \;\Big|\; 3^2 - 21$$
$$-12 = -12$$

Zusammenfassung

Ist die Unbekannte auf mehrfache Weise an andere Größen gebunden, so ist sie Schritt für Schritt von diesen Größen zu befreien. Die weitesten Bindungen werden zuerst beseitigt, die engsten zuletzt.
Klammern müssen gesetzt werden, wenn man die in ihnen stehenden Ausdrücke zuerst berechnen will oder wenn eine Rechenart niederer Stufe vor einer Rechenart höherer Stufe durchgeführt werden soll. Ein Bruchstrich ersetzt eine Klammer.
Tritt die Unbekannte in der Gleichung in einer Klammer auf, so muß in den meisten Fällen die Klammer ausmultipliziert werden, damit alle Glieder, die die Unbekannte enthalten, zusammengezogen werden können. Dann kann die Unbekannte isoliert werden. Tritt die Unbekannte in mehreren Summanden auf, so muß die Unbekannte ausgeklammert werden. Außerdem ist jeder Ausdruck, der allgemeine Zahlsymbole enthält, auf die Möglichkeit des Ausklammerns zu untersuchen, da man in vielen Fällen ausgeklammerte Faktoren kürzen und damit die Gleichungen oft wesentlich vereinfachen kann.

Übungen

123. a) $4x - 3(20 - x) = 6x - 7(11 - x) + 11$
b) $5{,}8x - 12(0{,}3x + 1{,}2) = 0{,}3(20x - 9) - 2(4{,}6x - 2) + 5{,}9$
c) $(18 - x)4 = 12(9 - 3x) + (8x - 20) - 8(4 - 2x)$

124. a) $(2x + 7)(x + 3) = 2(x + 5)(x + 2)$
b) $(9 - 4x)(9 - 5x) + 4(5 - x)(5 - 4x) = 36(2 - x)^2$
c) $(x + 3{,}5)(x + 4{,}5) = (x + 5{,}5)(x + 6{,}5) - 28$

125. a) $\frac{x - 2}{m}(a + b) = c$

b) $x(m + n) - 2x(2m - n) = 6m$

c) $t = \frac{xt_1 + mt_2}{x + m}$

126. a) $(a + x)(b + 1) = (b + x)(a + 1)$
b) $uv(m + n) = m(x - v)v + n(x - u)u$
c) $x(r + s) - (xs + ar) = 0$

127. a) $(x - 7)^2 - (x + 5)^2 = (x - 3)^2 - (x + 4)^2 + 11$
b) $(1 + x)^2 - (1 - x)^2 = 5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$
c) $3(5 - x)^2 - (2x - 9)^2 + (x + 3)^2 = 3$

128. a) $5[3 - (7 - 2x)] - (x + 5)7 + 3 = 3[4(3 - x) - x] - 70$
b) $3[(x - 1)^2 - (x^2 - 1)] = -(15 - x)$
c) $(x - a - b)^2 - 2(x - a)^2 = 2[(x + a)(a - x) + 2a(x - a)] + x^2$

129. $v = \frac{k}{p}(273 + t)$ *Lösen Sie die Formel nach k, p, t auf!*

130. $E = \frac{I(R_a + nR_i)}{n}$ *Lösen Sie die Formel nach R_a, R_i, I auf!*

[12]

6.3 Gleichungen mit gemeinen Brüchen

Solange die Unbekannte nicht in den Nennern der Brüche vorkommt, lassen sich die Gleichungen leicht auf die Ihnen bekannte Form der linearen Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen. Manchmal geht es dadurch, daß Sie alle gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandeln. Aus dieser Form der Gleichung können Sie dann ohne Schwierigkeiten die Unbekannte berechnen.

Lehrbeispiel 65

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}(x - 7) = \frac{1}{5}x$$

Lösung:

Sie lösen die Klammer auf

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}x$$

und verwandeln die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche:

$$\begin{aligned} 0{,}5x + 0{,}4x - 2{,}8 &= 0{,}2x \\ 0{,}9x - 2{,}8 &= 0{,}2x \\ 0{,}9x - 0{,}2x &= 2{,}8 \\ 0{,}7x &= 2{,}8 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 4}} \end{aligned}$$

Probe!

Dieser Weg wird aber zu umständlich, wenn Sie bei der Umwandlung der Brüche keine endlichen Dezimalzahlen erhalten. Er kann vor allem dann nicht eingeschlagen werden, wenn einzelne Glieder der Gleichung allgemeine Zahlsymbole enthalten. Um in solchen Fällen die Brüche zu beseitigen, multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner. Sämtliche Einzelnenner können dann gekürzt werden, da sie im Hauptnenner als Faktoren enthalten sind.

Merken Sie sich grundsätzlich als **Lösungsweg bei Gleichungen, die gemeine Brüche** enthalten:

1. **Bestimmen des Hauptnenners (HN).**
2. **Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner.**
3. **Ordnen der Gleichung und Isolieren der Unbekannten.**

Zunächst soll die Unbekannte nur im Zähler auftreten.

Lehrbeispiel 66

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$$

Lösung:

Die Brüche können Sie auch in etwas anderer Form schreiben:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$$

HN: $2 \cdot 3 = 6$

Beide Seiten der Gleichung werden mit dem Hauptnenner multipliziert:

$$\frac{x \cdot 2 \cdot 3}{2} + \frac{x \cdot 2 \cdot 3}{3} = 5 \cdot 2 \cdot 3$$

und gekürzt

$$3x + 2x = 30$$
$$5x = 30$$
$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Probe!

Das nächste Lehrbeispiel zeigt Ihnen den Rechnungsgang an einem Beispiel mit allgemeinen Zahlsymbolen.

Lehrbeispiel 67

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{c}{d}$$

Lösung:
HN: abd
Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner abd multipliziert:

$$\frac{x \cdot abd}{a} + \frac{x \cdot abd}{b} = \frac{c \cdot abd}{d}$$

Gekürzt:

$$bdx + adx = abc$$
$$x(ad + bd) = abc$$
$$\underline{\underline{x = \frac{abc}{(a+b)\,d}}}$$

Probe!

Die Lösungsverfahren sollen Ihnen an den folgenden Lehrbeispielen noch weiter erläutert werden.

Lehrbeispiel 68 $\quad \frac{2{,}4}{5} - \frac{1{,}1x}{2} = \frac{5{,}3x}{4} - 2x + 1{,}23$

Lösung:
1. Weg: Sie verwandeln alle gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und isolieren dann x.

$$0{,}48 - 0{,}55x = 1{,}325x - 2x + 1{,}23$$
$$-0{,}55x - 1{,}325x + 2x = 1{,}23 - 0{,}48$$
$$0{,}125x = 0{,}75$$
$$\underline{\underline{x = 6}}$$

2. Weg: Sie multiplizieren beiderseits mit dem Hauptnenner 20.

$$\frac{20 \cdot 2{,}4}{5} - \frac{20 \cdot 1{,}1x}{2} = \frac{20 \cdot 5{,}3x}{4} - 20 \cdot 2x + 20 \cdot 1{,}23$$

Sämtliche Nenner fallen durch Kürzen weg. Praktisch verfahren Sie so, wie es Ihnen in Abschnitt 4.63 gezeigt wurde: Sie multiplizieren den Zähler nur mit dem

Erweiterungsfaktor (den Sie erhalten, wenn Sie den Hauptnenner durch den Einzelnenner dividieren). Das heißt in diesem Beispiel:

Den ersten Zähler multiplizieren Sie mit 4, also $4 \cdot 2{,}4$;
den zweiten Zähler multiplizieren Sie mit 10, also $10 \cdot 1{,}1\,x$ usw.

Beachten Sie, daß Sie auch die ganzen Zahlen mit dem Hauptnenner multiplizieren müssen; denn in diesem Falle ist der Einzelnenner 1.

Sie erhalten:

$$9{,}6 - 11\,x = 26{,}5\,x - 40\,x + 24{,}6$$

Geordnet und x isoliert:

$$40\,x - 26{,}5\,x - 11\,x = 24{,}6 - 9{,}6$$
$$2{,}5\,x = 15$$
$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Löst man eine Bestimmungsgleichung auf zwei verschiedenen Wegen, so kann man eine zusätzliche Probe weglassen. Führen Sie aber selbst nochmals die Probe durch!

Der 2. Weg ist günstiger, wenn (wie im nächsten Beispiel) in den Zählern Summen oder Differenzen stehen.

Lehrbeispiel 69

$$\frac{2x + 1}{3} + \frac{6x - 4}{5} - 7 = 0$$

Lösung:

1. HN: 15. Sie multiplizieren mit dem Hauptnenner und kürzen:

$$5\,(2x + 1) + 3\,(6x - 4) - 15 \cdot 7 = 0$$

2. Sie multiplizieren die Klammern aus:

$$10x + 5 + 18x - 12 - 105 = 0$$

3. Sie fassen zusammen:

$$28\,x - 112 = 0$$

4. Sie isolieren x:

$$28\,x = 112$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Probe:

$$\frac{2 \cdot 4 + 1}{3} + \frac{6 \cdot 4 - 4}{5} - 7 \;\Big|\; 0$$
$$\frac{9}{3} + \frac{20}{5} - 7 \;\Big|\; 0$$
$$3 + 4 - 7 \;\Big|\; 0$$
$$0 = 0$$

Wenn die Unbekannte in einem oder in mehreren Nennern vorkommt, spricht man von **Bruchgleichungen.** In diesen Fällen *muß* der Weg über den Hauptnenner gegangen werden. Also gilt hier nur die Regel:

Beide Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Lehrbeispiel 70

$$\frac{10}{x} + \frac{4}{9} = \frac{9}{x} + \frac{1}{2}$$

Lösung:
HN: $2 \cdot 9 \cdot x = 18x$

Beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert:

$$\frac{10 \cdot 2 \cdot 9x}{x} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 9x}{9} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 9x}{x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 9x}{2}$$

Gekürzt:

$$180 + 8x = 162 + 9x$$

$$-x = -18 \qquad | \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Probe!

Wiederum den Rechnungsgang mit allgemeinen Zahlsymbolen dargestellt:

Lehrbeispiel 71

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} + \frac{d}{e}$$

Lösung:
HN: cex

Beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert:

$$\frac{acex}{x} = \frac{bcex}{c} + \frac{dcex}{e}$$

Gekürzt:

$$ace = bex + cdx$$

$$ace = x(be + cd)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{ace}{be + cd}}}$$

Probe!

Auch hier soll das Lösungsverfahren an einigen Lehrbeispielen erläutert werden.

Lehrbeispiel 72

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12x} + \frac{5}{9}$$

Lösung:
HN: $36x$.

Beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert und gekürzt:

$$36 - 24x = 3 + 20x$$

$$-44x = -33 \qquad : (-44)$$

$$x = \frac{-33}{-44}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{4}}}$$

Probe:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3} \;\Big|\; \frac{1}{12\cdot\frac{3}{4}} + \frac{5}{9}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \;\Big|\; \frac{1}{9} + \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Lehrbeispiel 73

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{5}{x-3}$$

Lösung:

HN: $(x-1)(x+2)(x-3)$

Mit dem Hauptnenner multipliziert und gekürzt:

$$\begin{aligned} 2(x+2)(x-3) + 3(x-1)(x-3) &= 5(x-1)(x+2) \\ (x-3)(2x+4+3x-3) &= 5(x^2+x-2) \\ (x-3)(5x+1) &= 5x^2+5x-10 \\ 5x^2-14x-3 &= 5x^2+5x-10 \\ -19x &= -7 \\ x &= \underline{\underline{\frac{7}{19}}} \end{aligned}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Wie Sie sehen, treten beim Lösen dieser Gleichung quadratische Glieder auf, die sich aber aufheben $(5x^2 - 5x^2)$; sonst wäre es Ihnen nicht möglich, die Gleichung zu lösen. Das Beispiel stellt also einen Sonderfall dar. Meist kann man es einer Bruchgleichung dieser Art schwer ansehen, ob sie beim Lösen auf eine lineare Gleichung führt oder ob sie eine Gleichung höheren Grades ist. Das gilt vor allem dann, wenn die Unbekannte in Zähler und Nenner auftritt.
Sie müssen immer bedacht sein, als Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache zu verwenden, da es sonst leicht geschehen kann, daß Sie eine Gleichung höheren Grades erhalten, die sich bei richtigem Hauptnenner nicht zu ergeben brauchte. Zu diesem Zweck zerlegen Sie die einzelnen Nenner in Faktoren, wie im nächsten Beispiel gezeigt wird.

Lehrbeispiel 74

$$\frac{x+1}{2x-6} - \frac{x+1}{3x-9} = \frac{x-7}{x-3} + \frac{3}{2}$$

Lösung:

Diesmal steht x im Zähler *und* im Nenner. Um den Hauptnenner zu bilden, zerlegen Sie die Nenner in Faktoren.

$$\frac{x+1}{2(x-3)} - \frac{x+1}{3(x-3)} = \frac{x-7}{x-3} + \frac{3}{2}$$

HN: $6(x-3)$

Mit dem Hauptnenner multipliziert und gekürzt:

$$3(x+1)-2(x+1)=6(x-7)+3\cdot 3(x-3)$$
$$x+1=6x-42+9x-27$$
$$70=14x$$
$$\underline{\underline{x=5}}$$

Probe:

$$\frac{5+1}{10-6}-\frac{5+1}{15-9} \;\Big|\; \frac{5-7}{5-3}+\frac{3}{2}$$
$$\frac{6}{4}-\frac{6}{6} \;\Big|\; -\frac{2}{2}+\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Steht in einer Bruchgleichung links und rechts vom Gleichheitszeichen nur je *ein* Bruch und kein weiteres Glied, so ist der Erweiterungsfaktor jedes Bruches jeweils der Nenner des anderen Bruches.

Lehrbeispiel 75

$$\frac{x+7}{2x+5}=\frac{x+3}{2x-1}$$

Lösung:

$$(x+7)(2x-1)=(x+3)(2x+5)$$
$$2x^2-x+14x-7=2x^2+5x+6x+15$$
$$13x-7=11x+15$$
$$2x=22$$
$$\underline{\underline{x=11}}$$

Probe:

$$\frac{11+7}{22+5} \;\Big|\; \frac{11+3}{22-1}$$
$$\frac{18}{27} \;\Big|\; \frac{14}{21}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Lehrbeispiel 76

$$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}$$

Lösung:

$$\frac{x+5-5x+35}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x}$$
$$\frac{-4x+40}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x}$$
$$(13-x)(-4x+40)=(x-7)(4x-40)$$
$$(x-13)(4x-40)=(x-7)(4x-40)$$

Die gleichartigen Klammern auf beiden Seiten verleiten dazu, diese zu kürzen. Würden Sie das tun, ergäbe sich auf der linken Seite $x - 13$; auf der rechten Seite $x - 7$. Daraus würde Gleichheit zwischen 13 und 17 folgen, was natürlich nicht sein kann.

Wählen Sie einen anderen Rechengang:

$$
\begin{aligned}
(x - 13)(4x - 40) &= (x - 7)(4x - 40) \\
(x - 13)(4x - 40) - (x - 7)(4x - 40) &= 0 \\
(x - 13 - x + 7)(4x - 40) &= 0 \\
-6(4x - 40) &= 0 \\
4x - 40 &= 0 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 10}}
\end{aligned}
$$

Auf diesem Wege erhalten Sie eine eindeutige Lösung. Der oben angeführte Lösungsweg mußte zu einem Widerspruch führen, da Sie beim Dividieren durch $(4x - 40)$ durch Null dividiert haben, denn $4x$ ist für $x = 10$ ja gleich 40.
Hüten Sie sich also davor, in einer Gleichung mit x oder mit einem Ausdruck mit x zu kürzen oder zu dividieren, da Sie nicht wissen können, ob x oder der Ausdruck gleich Null sind.

Probe:

$$
\begin{array}{r|l}
\dfrac{10 + 5}{10 - 7} - 5 & \dfrac{40 - 40}{13 - 10} \\
\dfrac{15}{3} - 5 & 0
\end{array}
$$

$$0 = 0$$

Zusammenfassung

Der Lösungsweg bei Bruchgleichungen lautet:

1. Bestimmen des Hauptnenners (HN).
2. Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner.
3. Ordnen der Gleichung und Isolieren von x.

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner. Dieses findet man, wenn man die Einzelnenner in Faktoren zerlegt. Sind die Einzelnenner Polynome, geschieht das durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren.

Übungen

131. a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x - 2}{5} = \dfrac{x}{2}$

b) $\dfrac{5x + 1}{12} - \dfrac{x - 1}{6} = \dfrac{3x + 4}{5} - 3$

132. a) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{c} + 1$ *b)* $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{b} - c$ *c)* $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

133. a) $\frac{3}{2x} + \frac{1}{x} - \frac{5}{3x} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{9}{10} + \frac{3}{2x} - 1 = \frac{5}{4x}$

c) $\frac{18}{x+2} - \frac{8}{x} = \frac{6}{x+2}$

134. a) $\frac{5}{x-3} = \frac{3}{5-x}$ b) $\frac{4}{x-5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{a}{a-x} = \frac{b}{b-x}$

d) $\frac{3x-2}{3x+2} = \frac{2x+1}{2x+5}$

135. a) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{2} = \frac{b}{x+1} + \frac{a}{2}$ b) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-2} = \frac{1}{x+2}$

c) $\frac{2x}{3x-6} - \frac{x-6}{x-2} = \frac{x+4}{4x-8} + \frac{4}{3}$

d) $\frac{6}{x-5} - \frac{9}{x-3} = \frac{1}{x-7} - \frac{4}{x-1}$

136. $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ *Lösen Sie nach g, b, f auf!*

137. $P = Q\,\frac{d_1 - d_2}{2d_1}$ *Lösen Sie nach Q, d_1, d_2 auf!*

[13]

6.4 Anwendung der linearen Gleichung mit einer Unbekannten

In den letzten Abschnitten lernten Sie, wie Bestimmungsgleichungen gelöst werden. Die Gleichung war Ihnen dabei stets gegeben. Sie konnten also sofort mit dem Rechnen beginnen und fanden als Lösung einen Zahlenwert oder einen algebraischen Ausdruck unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole.
In der beruflichen und gesellschaftlichen Praxis werden ständig Probleme an Sie herantreten, die zu lösen sind und deren Lösung Sie mit Hilfe mathematischer Gesetzmäßigkeiten finden können. Diese Probleme hängen für den Einzelfall von ganz konkreten gegebenen Bedingungen ab. Die Lösung dieser Probleme erfordert aber, wenn sie allgemeingültig werden soll, eine weitgehende Abstraktion von den konkreten Bedingungen. Dafür ist die Mathematik in besonderem Maße geeignet. Auf diese Weise gelangt man z. B. zu solchen Gleichungen, wie Sie sie in den vergangenen Abschnitten gelöst haben. Viele dieser Aufgaben, die als formale Aufgaben bezeichnet werden, sind also aus einem in der Praxis aufgetretenen Problem entstanden.
Der vorliegende Abschnitt soll Ihnen nun zeigen, wie Sie aus einem konkreten, in Worten darstellbaren Sachverhalt heraus zu dem abstrahierenden und oft auch allgemeingültigen mathematischen Ansatz einer Gleichung kommen können. Ein Beispiel für solche Probleme ist die folgende Aufgabe:

Eine Talsperre mit einem Fassungsvermögen von 100000000 m³ ist zu $\frac{3}{4}$ gefüllt, als Hochwasser mit einem Zufluß von 75 m³/s gemeldet wird. Um dieser Gefahr zu begegnen, werden an der Talsperre sofort die Schleusen geöffnet, durch die 40 m³/s abfließen. Die

Flutwelle trifft 15 Stunden nach Öffnen der Schleusen ein. Nach wieviel Stunden, gerechnet vom Eintreffen der Flutwelle an, wird die Sperre gefüllt sein?[1])

Wie löst man Aufgaben dieser Art?

Es kommt darauf an, zu lernen, aus dem Text der Aufgabe *die* Gleichung aufzustellen, aus deren Lösung die Beantwortung der aufgeworfenen Frage folgt. Wie dies vor sich geht, soll Ihnen zunächst an einfachen Beispielen ausführlich gezeigt werden.

Lehrbeispiel 77

Welche Zahl ergibt, um 5 vermehrt, doppelt so viel wie bei einer Verminderung um 3?

Lösung:

Die gesuchte Zahl wird mit x bezeichnet. Jetzt verknüpfen Sie das x mit den gegebenen Zahlen 5 bzw. 3 so, wie es aus der Aufgabenstellung hervorgeht:

Gesuchte Zahl x um 5 vermehrt:	$x + 5$.
Gesuchte Zahl x um 3 vermindert:	$x - 3$.

Nun soll nach dem Aufgabentext $(x + 5)$ doppelt so groß sein wie $(x - 3)$, oder anders ausgedrückt:

Das Doppelte von $(x - 3)$	$2(x - 3)$
soll genau so groß sein wie	$x + 5$.

Diese beiden Ausdrücke sind also wertgleich, so daß Sie als Gleichung (den sogenannten *Ansatz*) schreiben:

$$2(x - 3) = x + 5$$

Nach Auflösen der Klammern ergibt sich:

$$2x - 6 = x + 5$$

$$2x - x = 5 + 6$$

$$\underline{\underline{x = 11}}$$

Nunmehr müssen Sie das Ergebnis wieder in Worte fassen, und zwar so, daß die Frage der Aufgabe *eindeutig* beantwortet wird.

Textantwort: Die gesuchte Zahl ist 11.

Am Schluß jeder Textaufgabe muß die Lösung noch einer *Kritik* unterzogen werden, in der untersucht wird, ob die Lösung auch den Bedingungen des Aufgabentextes gerecht wird. Denn selbstverständlich genügt es nicht, den erhaltenen Wert für x in die Ansatzgleichung einzusetzen. Diese kann bereits falsch sein. Vielmehr müssen Sie stets anhand der Aufgabenstellung fragen: Ist das Ergebnis möglich?

In unserem Beispiel würden Sie die Lösung etwa folgender Kritik unterziehen:

Kritik der Lösung:

11, um 5 vermehrt, ergibt	16,
11, um 3 vermindert, ergibt	8,
16 soll doppelt so groß sein wie 8, d. h.	$16 = 2 \cdot 8$.
Sie erhalten die Gleichung	$16 = 16$.

Die Aufgabe wurde also richtig gelöst.

[1]) Die Aufgabe wird als Übung 147 gelöst.

Aus dem Lösungsgang dieses Lehrbeispieles können Sie erkennen, wie man allgemein beim Lösen von Anwendungsaufgaben vorgehen muß:

1. Es ist festzustellen, welche Größe gesucht ist, bzw. welche Größe, als Unbekannte genommen, den einfachsten Ansatz der Gleichung gestattet. Die Unbekannte bezeichnet man meist mit x.
2. Der Wortlaut der Aufgabe ist in die algebraische Symbolik zu übersetzen, wobei die im Text gegebenen Größen entsprechend der Aussage des Textes mit der Unbekannten zu verknüpfen sind.
3. Es sind wertgleiche Ausdrücke festzustellen und diese einander gleichzusetzen. Damit ist der *Ansatz* gefunden.
4. Die angesetzte Gleichung ist nach der Unbekannten aufzulösen.
5. Die Lösung jeder Textaufgabe ist in Worte zu kleiden, wobei die in der Aufgabe gestellte Frage *eindeutig* beantwortet werden muß.
6. Die Lösung ist einer *Kritik* zu unterziehen, d. h., es ist eine Probe am Wortlaut der Aufgabe durchzuführen, um festzustellen, ob die gegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Noch ein einfaches Beispiel soll den grundsätzlichen Lösungsgang erkennen lassen.

Lehrbeispiel 78

Das Zweifache und das Dreifache einer Zahl ergeben zusammen 100. *Wie heißt die Zahl?*

Lösung:

1. Die gesuchte Zahl ist x.
2. Das Zweifache der Zahl ist $2x$, das Dreifache ist $3x$.
3. $2x$ und $3x$ sollen zusammen 100 ergeben, also
$$2x + 3x = 100.$$
4. Auflösen nach x:
$$5x = 100$$
$$\underline{\underline{x = 20}}$$
5. Textantwort: Die gesuchte Zahl ist 20.
6. Kritik: Das Zweifache von 20 ist 40,
das Dreifache von 20 ist 60,
die Summe beider ist 100.

Verhältnismäßig leicht finden Sie den Ansatz, wenn Sie eine Formel z. B. aus der Geometrie oder der Physik zugrunde legen können. Eine solche Formel ist eine Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten, wenn im Text alle Größen bis auf eine gegeben sind. Dabei kommt es darauf an, die Formel nach der gesuchten Größe aufzulösen.

In den vorangegangenen Übungsaufgaben haben Sie bereits formal einige Formeln aus der Physik nach verschiedenen Größen aufgelöst.

Lehrbeispiel 79

Wie groß ist das Volumen eines Körpers aus Stahl (Dichte 7,85 g/cm³*), dessen Masse* 173 g *beträgt?*

Lösung:

Den Ansatz zu dieser Aufgabe finden Sie, indem Sie den Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Körpers, seiner Dichte und seiner Masse untersuchen. Dieser Zusammenhang wird durch die Formel

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \left(\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}\right)$$

dargestellt. Im Text sind alle Größen bis auf eine gegeben; also ist die Formel eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Größe. Sie lösen die Formel nach der gesuchten Größe auf und setzen die gegebenen Werte ein.

$$V = \frac{m}{\varrho}$$

$$V = \frac{173\ \text{g}}{7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = \underline{\underline{22{,}04\ \text{cm}^3}}$$

Antwort: Das Volumen des Körpers beträgt 22,0 cm³.

Kritik der Lösung:

Die Masse von 1 cm³ Stahl ist 7,85 g.

Die Masse von 22 cm³ Stahl ist 7,85 g · 22 ≈ 173 g.

Lehrbeispiel 80

Zwei Radfahrer fahren sich aus zwei 70 km *voneinander entfernten Orten entgegen. Nach wieviel Stunden treffen sie sich, wenn sie zu gleicher Zeit abfahren und der erste mit einer Geschwindigkeit von* 20 km/h, *der zweite mit einer Geschwindigkeit von* 15 km/h *fährt?*

Lösung:

Der Aufgabe liegt die Formel für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

zugrunde. Lösen Sie diese Formel nach s auf, so können Sie die Wege beider Radfahrer formelmäßig wie folgt ausdrücken:

$$\text{Weg des ersten Radfahrers } s_1 = v_1 \cdot t = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t,$$

$$\text{Weg des zweiten Radfahrers } s_2 = v_2 \cdot t = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t.$$

Andererseits gilt für die Wege:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Weg des ersten Radfahrers} & + & \text{Weg des zweiten Radfahrers} & = & \text{Gesamtweg} \\ s_1 & + & s_2 & = & 70\ \text{km} \end{array}$$

Setzen Sie die einzelnen zurückgelegten Wege der beiden Radfahrer in diese Gleichung ein, so erhalten Sie eine *Größengleichung* mit der Unbekannten t:

$$20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot t + 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot t = 70\,\mathrm{km} \qquad \Big|\cdot\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{km}}$$

$$20t + 15t = 70\,\mathrm{h}$$

$$35t = 70\,\mathrm{h}$$

$$\underline{\underline{t = 2\,\mathrm{h}}}$$

Textantwort: Die Radfahrer treffen sich nach 2 Stunden.

Setzen Sie in den Gleichungsansatz, wie im Lehrbeispiel gezeigt, die gegebenen Größen ein, so erhalten Sie eine *Größengleichung*, in der die Maßeinheiten mit eingehen. Die Maßeinheiten können dann gekürzt werden. Um sich dieses Kürzen zu ersparen, stellt man oft anstelle der Größengleichung eine *Zahlenwertgleichung* auf, d. h., man setzt nicht die *Größen* im Ansatz ein, sondern die *Zahlenwerte*. Voraussetzung ist allerdings dabei, daß man die Einheiten der Größen vorher festlegt. Dann hat aber auch die Lösung keine Benennung. Die Maßeinheit tritt dann erst wieder im Ergebnissatz auf.

Lösen wir die gleiche Aufgabe nochmals als *Zahlenwertgleichung* und ohne Formelansatz:

Jeder Radfahrer fährt x Stunden, da sie gleichzeitig abfahren und gleich lange unterwegs sind.

Der erste Radfahrer legt den längeren Teil des Weges zurück.

Seine Geschwindigkeit beträgt 20 km/h, d. h., er legt in 1 Stunde 20 km zurück,
demnach in x Stunden $x \cdot 20$ km.

Der zweite Radfahrer legt in 1 Stunde 15 km zurück,
demnach in x Stunden $\underline{x \cdot 15 \text{ km.}}$

Beide zusammen legen aber bis zum
Treffpunkt gerade den gesamten Weg zurück, nämlich 70 km.

Damit sind wertgleiche Ausdrücke gefunden worden.

Der Ansatz lautet:

$$x \cdot 20 + x \cdot 15 = 70$$

$$20x + 15x = 70$$

$$35x = 70$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Textantwort: Die Radfahrer treffen sich nach 2 Stunden.

Kritik der Lösung:

A fährt in 1 Stunde 20 km, in 2 Stunden 40 km.
B fährt in 1 Stunde 15 km, in 2 Stunden 30 km.
In 2 Stunden sind beide zusammen 70 km,
also genau die zurückzulegende Entfernung gefahren.

In dem eben gerechneten Beispiel war die Zeit für beide Radfahrer gleich. Daß dies nicht der Fall sein muß, erkennen Sie aus dem folgenden Lehrbeispiel.

Lehrbeispiel 81

Eine Dreherei hat den Auftrag, 1200 *Bolzen zu drehen. Dreher A beginnt die Arbeit und schafft* 50 *Bolzen am Tag. Nach zwei Tagen wird bekannt, daß der Auftrag am 12. Tag nach Beginn der Arbeit abgeschlossen sein muß. Deshalb wird der Dreher B zusätzlich eingesetzt. Wieviel Stück muß B je Tag fertigstellen, damit der Auftrag termingerecht erledigt wird?*

Lösung:

Gegeben:

Leistung von A:	50 Stück/Tag	Zeit von A:	12 Tage
Gesamtzahl:	1200 Stück	Zeit von B:	10 Tage (12—2)

Gesucht:

Leistung von B: x Stück/Tag

Ansatz:

$$50 \cdot 12 + x \cdot 10 = 1200$$
$$\underline{\underline{x = 60}}$$

Antwort: Der Dreher B muß 60 Stück am Tage fertigstellen.

In den folgenden beiden Lehrbeispielen haben Sie es mit einer Besonderheit zu tun, die bei dieser Aufgabenart öfters vorkommt.

Lehrbeispiel 82

Ein Betrieb hat 2 *Drehautomaten, die zur Serienfertigung einer bestimmten Sorte Sechskantschrauben eingesetzt werden sollen. Der Automat älterer Bauart stellt* 100 *Schrauben in* 6 *Stunden her, während der moderne Automat für diese Menge nur* 4 *Stunden benötigt. In welcher Zeit können bei gleichzeitigem Einsatz beider Automaten* 100 *Schrauben produziert werden?*

Lösung:

Die Fertigungszeit ist gesucht: In x Stunden können 100 Schrauben produziert werden.

Automat A fertigt in 6 Stunden 100 Stück,

in 1 Stunde den 6. Teil, also $\frac{100}{6}$ Stück.

Automat B fertigt in 4 Stunden 100 Stück,

in 1 Stunde den 4. Teil, also $\frac{100}{4}$ Stück.

Beide fertigen demnach in 1 Stunde gemeinsam $\left(\frac{100}{6} + \frac{100}{4}\right)$ Stück.

Andererseits fertigen aber beide zusammen

in x Stunden 100 Stück,
in 1 Stunde den x-ten Teil, also $\frac{100}{x}$ Stück.

Sie erhalten damit wertgleiche Ausdrücke (bezogen auf die Zeiteinheit 1 Stunde) und somit den Ansatz:

$$\frac{100}{6} + \frac{100}{4} = \frac{100}{x} \qquad \left| \cdot \frac{24\,x}{100} \right.$$

$$4x + 6x = 24$$

$$10x = 24$$

$$\underline{\underline{x = 2{,}4}}$$

Antwort: Beide Automaten benötigen bei gleichzeitigem Einsatz 2,4 Stunden für 100 Schrauben.

Kritik der Lösung:

Automat A fertigt in 1 Stunde $\frac{100}{6}$ Stück,

in 2,4 Stunden $\frac{100 \cdot 2{,}4}{6}$ Stück = 40 Stück.

Automat B fertigt in 1 Stunde $\frac{100}{4}$ Stück,

in 2,4 Stunden $\frac{100 \cdot 2{,}4}{4}$ Stück = 60 Stück.

Beide zusammen fertigen in 2,4 Stunden also 100 Stück.

Lehrbeispiel 83

Eine Straße soll gepflastert werden. Brigade I würde, wenn sie allein arbeitet, 20 Tage für die Arbeit benötigen, Brigade II aber 25 Tage. Wie lange dauert die Arbeit, wenn beide Brigaden zugleich arbeiten?

Lösung:

Es ist die Anzahl der Tage gesucht. Sie ist x Tage.

Wenn eine Brigade $\frac{1}{3}$ der Straße pflastern würde, dann müßte die andere Brigade $\frac{2}{3}$ der Straße pflastern, um die ganze Straße in Ordnung zu bringen; denn $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. So können Sie die Gesamtfläche mit 1 bezeichnen. Diese wird von Brigade I in 20 Tagen gepflastert, dann ist die Tagesleistung der Brigade $\frac{1}{20}$; die Tagesleistung von Brigade II ist dann $\frac{1}{25}$.

Somit ergibt sich folgender Ansatz:

$$\frac{1}{20}x + \frac{1}{25}x = 1 \qquad | \cdot 100$$

$$5x + 4x = 100$$

$$\underline{\underline{x = \frac{100}{9} \approx 11}}$$

Antwort: Wenn beide Brigaden arbeiten, dauert die Arbeit rund 11 Tage.

Kritik der Lösung:

Die Brigade I schafft in 11 Tagen $\frac{11}{20}$, die Brigade II schafft $\frac{11}{25}$ der Arbeit.

$$\frac{11}{20} + \frac{11}{25} = \frac{99}{100} \approx 1$$

Lehrbeispiel 84

Eine Prämie für einen Verbesserungsvorschlag von 3000 DM *soll unter drei Kollegen so verteilt werden, daß der erste* 2 *Teile, der zweite* 3 *Teile und der dritte* 5 *Teile erhält. Wieviel* DM *erhält jeder Kollege?*

Lösung:

Der Ansatz ergibt sich aus folgender Überlegung:

Die Gesamtsumme soll sich aus 2 Teilen + 3 Teilen + 5 Teilen zusammensetzen und beträgt 3000 DM. Ein Teil sei x DM.

Dann gilt also
$$2x + 3x + 5x = 3000$$
$$\underline{\underline{x = 300}}$$

Daraus ergibt sich

1. Anteil:	$2x$ DM =	600 DM
2. Anteil:	$3x$ DM =	900 DM
3. Anteil:	$5x$ DM =	1500 DM
Gesamt:		3000 DM

Antwort: Der Betrag von 3000 DM muß in drei Teilbeträge von 600 DM, 900 DM und 1500 DM aufgeteilt werden.

Lehrbeispiel 85

Eine Gesamtprämie von 130 DM *soll an die drei Mitglieder einer Brigade entsprechend der Leistung so verteilt werden, daß A* 20 DM *mehr und C* 10 DM *weniger als B erhält. Wieviel* DM *erhält jeder?*

Lösung:

B erhält x DM, dann erhält A $(x + 20)$ DM und C $(x - 10)$ DM.

Ansatz:

$$
\begin{aligned}
(x+20)+x+(x-10) &= 130\\
3x &= 120\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 40}}
\end{aligned}
$$

Antwort:

A erhält (40 + 20) DM =	60 DM
B erhält	40 DM
C erhält (40 — 10) DM =	30 DM
Gesamt	130 DM

Lehrbeispiel 86

Ein Einzelbauer hatte beim Eintritt in die LPG eine Mischung von 2,4 t *Superphosphat-Dünger zu* 9,55 DM *je* dt *und* 1,6 t *Kalkammonsalpeter zu* 19,65 DM *je* dt *vorrätig. Wieviel* DM *je* dt *bekommt er für den Mischdünger angerechnet?*

Lösung:

Der unbekannte Mischungspreis beträgt x DM/dt. Um ihn mit den gegebenen Größen zu verknüpfen, müssen Sie davon ausgehen, daß die Mischung den gleichen Wert haben muß, den die beiden Sorten einzeln haben.

Also: Wert der Sorte I + Wert der Sorte II = Wert der Mischung
(Superphosphat) (Kalkammonsalpeter)

Der Wert einer bestimmten Menge Ware (in DM) ergibt sich aber aus dem Preis der Mengeneinheit (in DM/dt oder DM/kg), multipliziert mit der vorhandenen Menge (in dt oder kg). Das erkennen Sie aus folgender Überlegung:

1 dt der Sorte I kostet 9,55 DM, demnach 24 dt	$24 \cdot 9{,}55$ DM
1 dt der Sorte II kostet 19,65 DM, demnach 16 dt	$16 \cdot 19{,}65$ DM
1 dt der Mischung kostet x DM, also (24 + 16) dt = 40 dt Mischung	$40 \cdot x$ DM

Damit sind die wertgleichen Ausdrücke gefunden. Der Ansatz lautet:

$$
\begin{aligned}
24 \cdot 9{,}55 + 16 \cdot 19{,}65 &= 40 \cdot x\\
229{,}20 + 314{,}40 &= 40x\\
543{,}60 &= 40x\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 13{,}59}}
\end{aligned}
$$

Antwort: Der Wert der Mischung beträgt 13,59 DM je dt.

Kritik der Lösung:

24 dt zu je 9,55 DM kosten	229,20 DM
16 dt zu je 19,65 DM kosten	314,40 DM
40 dt zu je 13,59 DM kosten	543,60 DM

Lehrbeispiel 87

Es werden 300 g 70 %ige mit 100 g 30 %iger Schwefelsäure gemischt. Welchen Prozentgehalt hat die Mischung?

Lösung:

Unter dem Prozentgehalt einer Lösung versteht man die Anzahl Gramm reinen Stoffes (also 100 %igen Stoffes) in 100 Gramm der Lösung.

Das Zeichen % haben Sie demnach stets als Masse-% (früher Gew.-%) aufzufassen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Werden 300 g 70 %ige und 100 g 30 %ige Schwefelsäure zusammengegossen, so entstehen 400 g Mischung von dem unbekannten Gehalt x %. Beachten Sie dabei:

$$\% \text{ bedeutet Hundertstel, also } 70\,\% = \frac{70}{100} = 0{,}70$$

$$\text{und} \qquad 30\,\% = \frac{30}{100} = 0{,}30.$$

Die Teilmenge I besteht aus 300 g 70 %iger Schwefelsäure. Das bedeutet, daß $\frac{70}{100}$ von den 300 g 100 %ige Schwefelsäure sind.

An 100 %iger Schwefelsäure sind also enthalten: 300 g · 0,70.

Die Teilmenge II besteht aus 100 g 30 %iger Schwefelsäure.

An 100 %iger Schwefelsäure sind also enthalten: 100 g · 0,30.

Werden beide Teilmengen gemischt, so sind in 400 g x %iger Mischung an 100 %iger Schwefelsäure enthalten: 400 g $\cdot \frac{x}{100}$.

In dieser Mischung muß natürlich genausoviel 100 %ige Schwefelsäure enthalten sein wie vorher in beiden Teilmengen von 300 g und 100 g zusammen.

Also: Reiner Stoff in Teilmenge I + Reiner Stoff in Teilmenge II
= Reiner Stoff in der Mischung.

Die Gleichheit an 100 %iger Substanz liefert die wertgleichen Ausdrücke und damit den Ansatz:

$$300 \cdot 0{,}70 + 100 \cdot 0{,}30 = 400 \cdot \frac{x}{100}$$

$$210 + 30 = 4x$$

$$240 = 4x$$

$$\underline{\underline{x = 60}}$$

Antwort: Die Mischung ist 60 %ig.

Kritik der Lösung:

300 g 70 %ige Säure enthalten	300 g · 0,70 = 210 g 100 %ige Säure;
100 g 30 %ige Säure enthalten	100 g · 0,30 = 30 g 100 %ige Säure;
400 g Mischung enthalten	400 g · 0,60 = 240 g 100 %ige Säure.

Lehrbeispiel 88

Es werden m_1 Gramm einer k_1 %igen Lösung mit m_2 Gramm einer k_2 %igen Lösung und m_3 Gramm einer k_3 %igen Lösung gemischt. Wievielprozentig ist die Mischung?

Lösung:

Die unbekannte Konzentration der entstandenen Lösung werde mit k_M bezeichnet. Bei der Mischung verschiedener Teilmengen kommt es wieder auf die in den Lösungen enthaltenen Mengen an reiner Substanz an. Diese betragen, wie Sie im Lehrbeispiel 87 erkannt haben,

$$\text{bei der Teilmenge I } m_1 \cdot \frac{k_1}{100} \text{ Gramm,}$$

$$\text{bei der Teilmenge II } m_2 \cdot \frac{k_2}{100} \text{ Gramm,}$$

$$\text{bei der Teilmenge III } m_3 \cdot \frac{k_3}{100} \text{ Gramm.}$$

Die Mischungsmenge erhält man als Summe der drei Teilmengen, also $m_1 + m_2 + m_3$, deren Prozentgehalt k_M ist. Demnach enthält die Mischung an reiner Substanz

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{k_M}{100} \text{ Gramm.}$$

Der Ansatz muß also lauten:

$$m_1 \cdot \frac{k_1}{100} + m_2 \cdot \frac{k_2}{100} + m_3 \cdot \frac{k_3}{100} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{k_M}{100}.$$

Multiplizieren Sie diese Gleichung mit 100, so erhalten Sie

$$m_1 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_3 \cdot k_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot k_M \qquad (10a)$$

und nach der in der Aufgabe gesuchten Größe k_M aufgelöst:

$$\underline{\underline{k_M = \frac{m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3}{m_1 + m_2 + m_3}}}.$$

Mit der Gleichung (10a) ist ein allgemeiner Ausdruck entstanden, der noch für den Fall erweitert werden kann, daß beliebig viele Komponenten an der Mischung beteiligt sind (n Komponenten).

Die Gleichung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \cdots + m_n k_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \cdot k_M \qquad (10)$$

Diese Formel wird **allgemeine Mischungsgleichung** genannt.

Der Vorzug der Gleichung (10) liegt in ihrer Allgemeingültigkeit. Mit ihr lassen sich nicht nur Aufgaben behandeln, die das Mischen von wäßrigen Lösungen zum Inhalt haben, sondern Gleichung (10) kann in allen Fällen angewandt werden, bei denen die zu mischenden Mengen (gegeben in kg, g usw.) mit irgendwelchen in Zahlen ausdrückbaren, auf die Stoffmenge bezogenen Eigenheiten behaftet sind. Das können z. B. sein: Konzentrationen in %, Preise in DM/kg.

Auch für andere bestimmte „Typen“ von Aufgaben lassen sich Grundformeln angeben, auf die Sie sehr bald selbst stoßen werden, wenn Sie eine größere Anzahl

Anwendungsaufgaben gelöst haben und dabei immer wiederkehrende ähnliche Ansätze finden.
Ein generelles Rezept kann nicht gegeben werden, außer vielleicht dem Hinweis, daß Sie durch Überlegung und folgerichtiges Denken stets zum Ziele gelangen.

Lehrbeispiel 89

Wieviel Wasser muß man aus 3000 *Liter einer* 4 %*igen Salzsole der Dichte* 1,03 g/cm³ *verdampfen, um eine* 10 %*ige Salzsole zu erhalten?*

Lösung:

Gegeben: $V_1 = 3000\ l$
$\varrho_1 = 1{,}03\ \mathrm{g/cm^3}$
$k_1 = 0{,}04$ $\quad k_2 = 0\,\% = 0$ $\quad k_M = 0{,}10$

Gesucht: Masse des zu verdampfenden Wassers m_2.

Die allgemeine Mischungsgleichung hat für diese Aufgabe die Gestalt

$$m_1k_1 - m_2k_2 = (m_1 - m_2) \cdot k_M,$$

denn die Wassermenge wird ja verdampft. Es ist $m_1 = V_1 \cdot \varrho_1$ zu setzen. Beachten Sie weiterhin, daß die Konzentration des abzudampfenden Wassers Null ist.

Ansatz: $V_1 \cdot \varrho_1 \cdot k_1 - m_2 \cdot k_2 = (V_1 \cdot \varrho_1 - m_2) \cdot k_M$

Größen eingesetzt:

$$3000\,\mathrm{dm^3} \cdot 1{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \cdot 0{,}04 - m_2 \cdot 0 = \left(3000\,\mathrm{dm^3} \cdot 1{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} - m_2\right) \cdot 0{,}10$$

$$123{,}6\ \mathrm{kg} - 0 = 309\ \mathrm{kg} - 0{,}10\,m_2$$

$$0{,}10\,m_2 = 185{,}4\ \mathrm{kg}$$

$$\underline{\underline{m_2 = 1854\ \mathrm{kg}}}$$

Antwort: Man muß 1,85 t Wasser abdampfen.

Kritik der Lösung!

Zusammenfassung

Beim Lösen von Anwendungsaufgaben handelt es sich darum, die in der Aufgabenstellung gemachten Angaben in die mathematische Schreibweise zu übertragen. Die Unbekannte ist festzustellen; dann müssen wertgleiche Ausdrücke gefunden und einander gleichgesetzt werden. Die dadurch gefundene Gleichung ist in der gewohnten Art zu lösen.
Die Lösung der Anwendungsaufgabe muß in Worten als Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage gegeben werden. Bei Anwendungsaufgaben genügt die Probe in der bisherigen Form nicht, da diese nur für die angesetzte Gleichung gilt. Es muß außerdem eine Kritik der Lösung dahingehend erfolgen, ob die in der Aufgabenstellung ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind.

Übungen

138. *Welche Zahl ist um ihren* 9. *Teil kleiner als* 100?

139. *Addiert man zu einer Zahl* $\frac{24}{5}$ *und dividiert die Summe durch* 7, *so erhält man die Zahl selber. Berechnen Sie die Zahl!*

140. *Eine Klasse besteht aus* 44 *Personen (mehrere Lehrer, eine Anzahl Jungen und Mädchen). Es sind* 10*mal mehr Schüler als Lehrer und* 10 *Jungen mehr als Mädchen. Wieviel Lehrer, Jungen und Mädchen sind in der Klasse?*

141. *Aus zwei Sorten Gebäck zu* 5,20 DM *und* 8,40 DM *je* kg *sollen* 80 kg *Mischung hergestellt werden. Welcher Mischungspreis ergibt sich, wenn von der teuren Sorte* 20 kg *verwendet werden?*

142. *Aus einer Kupfer-Nickel-Legierung mit* 70 % *Kupferanteil soll durch Zusetzen von Nickel eine Legierung hergestellt werden, die nur noch* 30 % *Kupfer enthält. Wieviel Kilogramm Nickel sind zuzusetzen, wenn die vorhandene Legierung* 120 kg *wiegt und in der neuen Legierung restlos verwendet werden soll?*

143. *Zwei Stenotypistinnen haben ein Manuskript von* 360 *Seiten abzuschreiben. A schreibt* 24 *Seiten/Tag, B bei kürzerer Arbeitszeit nur* 16 *Seiten/Tag.*

Nach wieviel Tagen ist die Arbeit beendet? Wieviel Seiten schreibt jede Stenotypistin?

144. *Eine LPG pflügt ihr Feld mit zwei Traktoren von* 20 PS *und* 50 PS. *Der kleine leistet mit einem Einscharpflug etwa* 0,18 ha *je Stunde und bearbeitet zunächst allein ein Feld von* 0,65 ha *und dann zusammen mit dem größeren, der dreischarig pflügt und* 0,35 ha *je Stunde leistet, einen Schlag von* 3 ha.

Wie lange dauert die Arbeit, wenn beide gleichzeitig beginnen?

145. *Eine elektrische Installation wird vom Monteur A in* 10 *Tagen, vom Monteur B in* 6 *Tagen und* 5 *Stunden durchgeführt. Wie lange brauchen beide Monteure, wenn sie gemeinsam arbeiten?*

(1 *Arbeitstag* $\mathrel{\widehat{=}}$ 7,5 *Stunden.)*

146. *In einer LPG betrug der an eine Brigade zu verteilende Arbeitslohn* 1020 DM. *Wie verteilt sich dieser Betrag auf die Mitglieder der Brigade, wenn folgende Leistungen zugrunde lagen:*

A: 32 *AE (Arbeitseinheiten)*
B: 28 *AE*
C: 36 *AE*
D: 24 *AE?*

147. *Lösen Sie die Aufgabe, die am Anfang des Abschnittes steht!*

[Ü]

6.5 Aufgaben (Übungen 148 bis 189)

148. a) $7x - 5 = 9$ b) $9 = 5x - 16$
c) $a = m + nx$ d) $p - qx = a$

149. a) $a(x + b) = 2ab$ b) $(3a - x)\,b = 3ab$
c) $(a - x)(a - b) = (a - b)^2$ d) $(x - b)(a + b) = a^2 - b^2$

150. a) $7x - 9 = 3x + 31$ b) $14 - 8x = 19 - 3x$
c) $ax - 7 = 5x + 8$ d) $ax - x = 10 - 2x$
e) $ax + bx = c$ f) $a + mx = x$

151. a) $19x - 17 - 3x + 72 = 12 + 9x - 25 + 4x + 83$
b) $9a - 7b - 11x + 12b - 5a - 3x - a + b + 11x = 0$

152. a) $\frac{x}{8} + 3 = 8$ b) $5 - \frac{x}{7} = 4$

153. a) $7(5x - 3) + 9 = 58$ b) $3(9x - 4) - 31 = 146$

154. a) $(3x + 8)(x - 2) = (x + 4)(3x - 7)$
b) $(8 - x)(x - 3) = (6 - x)(x - 4)$
c) $a(x - 5) + b(5 - x) = c(x - 5) + d(5 - x)$
d) $(a + b)(x + c) - (a + b)\,m = ac + bc$

155. a) $(5x + 3)^2 + (8x + 15)(3x - 16) = (7x - 8)^2$
b) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 = (x - 6)(6x - 7)$

156. a) $\frac{4x + 1}{2x + 3} = \frac{9}{5}$ b) $\frac{5x - 7}{19 - 3x} = \frac{4}{5}$ c) $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{a}{b}$ d) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{a + b}{a - b}$

157. a) $\frac{(3x + 1)(2x + 7)}{(5x - 2)(3x + 14)} = \frac{2}{5}$ b) $\frac{(7x - 5)(6x + 7)}{(8x - 9)(7x + 12)} = \frac{3}{4}$

158. a) $\frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a$ b) $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x}$

159. a) $\frac{3x - 8}{5} - \frac{x - 1}{4} + \frac{7 - x}{3} = \frac{8 - 2x}{6} - \frac{8 - 5x}{10}$

b) $\frac{2x - 7}{4} - \frac{3x - 5}{8} - \frac{8 - 7x}{5} + \frac{1 - 9x}{10} + 6 = x$

c) $\frac{3x - 1}{0{,}5} - \frac{7x + 1}{1{,}2} + \frac{2x - 1}{11} = 3$

d) $\frac{4x - 0{,}7}{0{,}5} - \frac{7x + 0{,}9}{3} + 5 = \frac{9x + 0{,}8}{0{,}7}$

160. a) $\frac{6a+x}{6bx} - \frac{5a-4b}{4ax} - \frac{3b-5x}{5ab} + \frac{3}{5a} - \frac{1}{6b} + \frac{5}{4x} = \frac{x+1}{ab}$

b) $\frac{5a-2x}{10ax} - \frac{3b-4x}{12bx} + \frac{4a^2-5b}{20a^2b} - \frac{a^2-x}{4a^2x} - \frac{a-b}{5ab} + \frac{2}{3b} = \frac{1}{x}$

161. a) $\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) x - (an + bm) = x - ab$

b) $\frac{x}{a} + \frac{a-x}{b} - \frac{c}{d}\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 1$

162. a) $\frac{51}{5-x} - 3 = 14$ b) $\frac{5}{x+3} = \frac{3}{5-x}$

163. a) $\frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{x}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{x}{2} - \frac{2}{3}}$ b) $\frac{\frac{5}{7} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{5}{7x}} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{x}}{\frac{7}{3} - \frac{3}{x}}$

164. a) $\frac{9}{3x-2} - \frac{2}{2x-3} = \frac{2}{x}$ b) $\frac{x-2}{x-1} - \frac{3x-5}{3x} = \frac{x-2}{3x(x-1)}$

c) $\frac{2}{2x-5} - \frac{9}{3x-5} + \frac{4}{2x-15} = 0$

d) $\frac{9}{x-4} - \frac{10}{x-5} + \frac{6}{x-9} = \frac{5}{x-8}$

165. a) $\frac{2a-x}{b(x+b)} + \frac{ax+bx-2a^2}{ab(x-b)} = \frac{1}{a}$

b) $\frac{5a-2b}{6a} + \frac{a^2+bx-ax}{3ax-2b^2} = \frac{3ax}{6ax-4b^2} + \frac{a^2-b^2}{3ax}$

c) $\frac{ax+bc}{2cx(c-x)} + \frac{ax-bc}{2cx(c+x)} = \frac{(a-b)x}{c^2-x^2}$

d) $\frac{ax+b}{mx-m} - \frac{ax-b}{nx-n} = \frac{a}{m} - \frac{b}{n}$

166. *Zwei Elektromonteure verdienen in einer Woche zusammen* 330 DM. *Wieviel verdient jeder, wenn Monteur A in drei Wochen* 90 DM *mehr verdient als Monteur B?*

167. *Eine Leiter hat* 27 *Sprossen. Hätte man den Abstand zwischen den Sprossen* 6 cm *größer gemacht, so wäre man mit* 6 *Sprossen weniger ausgekommen, wenn man annimmt, daß die erste und die letzte Sprosse an der gleichen Stelle bleiben. Welche Entfernung besteht zwischen den Sprossen?*

168. *Ein für die Straßenausbesserung zur Verfügung stehender Betrag von* 16000 DM *soll auf* 4 *Gemeinden entsprechend der Einwohnerzahl von* $A = 300$, $B = 2100$, $C = 700$ *und* $D = 900$ *Einwohnern verteilt werden. Welche Beträge werden den einzelnen Gemeinden zur Verfügung gestellt?*

169. *Zwei Kraftfahrzeuge fahren von Dresden nach Eisenach. Der erste Wagen fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von* 50 km/h. *Der zweite fährt zwei Stunden nach dem ersten Wagen von Dresden ab und besitzt eine durchschnittliche Geschwindigkeit von* 80 km/h. *Wieviel Stunden nach seiner Abfahrt wird der erste Wagen vom zweiten überholt?*

170. *Drei Maler streichen einen Zaun. A streicht* 6 m/h, *B* 5,5 m/h *und C* 4,5 m/h. *Der Zaun ist* 100 m *lang. Wieviel Stunden dauert die Arbeit?*

171. *Ein Vorratsbehälter für Düngemittel kann über* 2 *Förderbänder gefüllt werden. Band A allein füllt den Behälter in* 48 *Stunden, Band B allein in* 70 *Stunden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Förderbänder zugleich in Betrieb sind?*

172. *Eine Reisegesellschaft fährt mit zwei Omnibussen. Omnibus A erreicht eine Durchschnittsgeschwindigkeit von* 40 km/h, *B von* 45 km/h. *A startet um* 8 *Uhr. Wann muß B starten, wenn beide gemeinsam um* 16 *Uhr am Tagesziel ankommen wollen?*

173. *Zur Herstellung von Brotgetreide wird Weizen zu* 22,40 DM *je* dt *mit Roggen zu* 20,80 DM *je* dt *gemischt. Der Mischungspreis soll* 21,20 DM *je* dt *betragen. Wieviel Dezitonnen werden von jeder Sorte gebraucht, wenn insgesamt* 18 dt *Brotgetreide hergestellt werden sollen?*

174. 60 kg *Obstwein zu* 2,50 DM *je* kg *werden mit* 100 kg *einer anderen Sorte zu* 3,30 DM *je* kg *gemischt. Wieviel* DM *je* kg *beträgt der Mischungspreis?*

175. *Aus drei Sorten Tabak zum Preise von* 80 DM, 60 DM *und* 50 DM *je* kg *soll eine Mittelsorte von* 56 DM *je* kg *gemischt werden.*
Wieviel Kilogramm von jeder Sorte sind zu nehmen, wenn die ganze Mischung 60 kg *wiegen und von den beiden geringeren Sorten zusammen* 9*mal soviel wie von der besten enthalten soll?*

176. *Zwei Eisenbahnzüge, von denen der eine* 180 m *lang ist und mit einer Geschwindigkeit von* 30 km/h *fährt, der andere* 120 m *lang ist und eine Geschwindigkeit von* 50 km/h *besitzt, begegnen sich. Wieviel Sekunden wird es dauern, bis sie aneinander vorbeigefahren sind?*

177. *Auf einer Landstraße fährt ein Kraftwagen, auf einer danebenlaufenden Eisenbahnstrecke in gleicher Richtung ein Güterzug von* 160 m *Länge mit der Geschwindigkeit von* 36 km/h. *Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Kraftwagen, wenn er den Zug in* 24 *Sekunden überholt?*

178. *Eine Kohlengrube droht zu ersaufen, da – wie durch Messungen festgestellt wurde – in* 24 *Stunden* 93850 m^3 *Grundwasser zulaufen. Um die täglich zufließende Menge herauszubefördern, werden zwei Saugpumpen eingesetzt, von denen die erste* 120 m^3/min, *die andere* 50 m^3/min *leistet und aus betrieblichen Gründen täglich eine Stunde weniger als die erste arbeiten kann. Wie lange müssen die beiden Saugpumpen täglich arbeiten?*

179. *Eine* 3 m *lange Kupferleitung soll durch eine* 2,5 m *lange Aluminiumleitung ersetzt werden, die denselben Widerstand besitzt. Um wieviel Prozent muß der Querschnitt der* Al-*Leitung gegenüber der* Cu-*Leitung vergrößert werden?*
Spezifischer Widerstand von Cu: $\varrho_{Cu} = 0{,}0178\ \Omega\ \mathrm{mm^2/m}$,
spezifischer Widerstand von Al: $\varrho_{Al} = 0{,}029\ \Omega\ \mathrm{mm^2/m}$.
$\left(\textit{Formel: } R = \varrho \cdot \frac{l}{F}\right)$

180. *Ein Getreidefeld von* 28 ha *soll durch einen Mähbinder und einen Mähdrescher abgeerntet werden. Der Binder schafft in einer Stunde* $\frac{1}{3}$ ha, *der Mähdrescher* 1,3 ha/h.
In welcher Zeit ist das Feld abgeerntet, wenn beide Maschinen zu gleicher Zeit beginnen?

181. *Ein Lauge-Vorratsbehälter kann durch eine Pumpe in* 6 *Stunden gefüllt und durch das Entnahmerohr in* 4 *Stunden wieder völlig entleert werden. Wann würde der anfangs gefüllte Behälter leer sein, wenn gleichzeitig Lauge eingefüllt und entnommen wird?*

182. *In einem Chemiebetrieb werden in einer älteren Anlage zur Herstellung von* 100 *Tonnen Produkt* 18 *Tage gebraucht. Eine neugebaute Anlage benötigt nach Inbetriebnahme nur noch* 12 *Tage für diese Menge.*
   a) In wieviel Tagen kann der Betrieb nunmehr mit beiden Anlagen 100 *Tonnen produzieren?*
   b) Wie groß ist die Kapazität beider Anlagen jetzt in 18 *Tagen?*

183. *Bei einer kontinuierlichen chemischen Reaktion werden täglich* 14 t 86 %*ige Schwefelsäure verbraucht, die jedoch auf* 10 % *verdünnt werden muß, bevor sie der Produktion zugeführt werden kann. Wie hoch ist der stündliche Wasserbedarf?*

184. *Es sollen* 4 t *einer* 3 %*igen Laktamlösung eingedickt werden, so daß eine* 50 %*ige Lösung entsteht. Welche Menge* 50 %*ige Lösung bleibt nach dem Verdampfen zurück?*

185. *Es sollen* 5,75 l 87 %*ige Schwefelsäure der Dichte* 1,80 g/ml *mit* 3,50 l 39 %*iger der Dichte* 1,30 g/ml *und destilliertem Wasser der Dichte* 1,00 g/ml *gemischt werden, so daß eine* 55 %*ige Mischung entsteht. Wieviel Wasser ist zu nehmen?*

186. *Wievielprozentig ist eine Mischung aus* 6 kg 15 %*iger und* 8 kg 22 %*iger* NaCl-*Lösung?*

187. *Aus einer* 10 %*igen und einer* 80 %*igen Schwefelsäure sollen* 35 kg 50 %*ige hergestellt werden. Wieviel* 10 %*ige und wieviel* 80 %*ige müssen gemischt werden?*

188. 8,3 l 6 %*ige Salzsäure der Dichte* 1,03 g/ml, *der man zunächst* 2,8 kg *Wasser entzieht, werden mit* 3,5 l 22 %*iger Salzsäure der Dichte* 1,11 g/ml *und* 35 kg 17 %*iger Salzsäure gemischt.*
Welche Konzentration stellt sich ein?

189. *Es sind* 50 l 50 %*iger Spiritus der Dichte* 0,914 g/ml *vorhanden. Durch Zusetzen von* 95 %*igem Spiritus der Dichte* 0,804 g/ml *soll daraus* 80 %*iger Spiritus hergestellt werden. Wieviel Liter* 95 %*iger Spiritus müssen zugegeben werden?*

[14]

7 Proportionen und ihre Anwendung

7.1 Proportionen

7.11 Das Verhältnis. Die Proportion

Unter dem Verhältnis zweier Zahlen versteht man den Quotienten aus diesen beiden Zahlen. Das Verhältnis kann mit Hilfe des Divisionsdoppelpunktes oder auch als Bruch geschrieben werden:

$$10:14 \text{ oder } \frac{10}{14}.$$

Beide Zeichen, Doppelpunkt und Bruchstrich, werden in diesen Fällen als „zu" gelesen, also „10 zu 14". Natürlich gelten auch für das Verhältnis alle Regeln der Bruchrechnung, so daß Sie das Verhältnis durch Kürzen oder Erweitern auf eine andere Form bringen können (vgl. 3.22), z. B. auf 5:7 oder 30:42.
Das oben angeführte Verhältnis ist ein reines Zahlenverhältnis. Es können aber auch Größen ins Verhältnis gesetzt werden:

$$\frac{5\text{ DM}}{7\text{ DM}} = \frac{5}{7}.$$

Wie Sie sehen, kann ein Verhältnis zweier *gleich benannter Größen* durch Kürzen der Benennung als ein reines Zahlenverhältnis ausgedrückt werden.
Liegen in Zähler und Nenner *ungleiche* Benennungen vor, so kommt auch dem Verhältnis eine Benennung zu:

$$\frac{8\text{ DM}}{100\text{ km}} = 0{,}08\,\frac{\text{DM}}{\text{km}}$$

(gelesen: 0,08 DM je km).

Die verschiedenen Verhältnisse, die durch Kürzen oder Erweitern aus einem Verhältnis hervorgehen, haben alle den gleichen Wert und können deshalb durch Gleichheitszeichen miteinander verbunden werden.

Beispiel:

Die Strecke Dresden-Leipzig (120 km) verhält sich zur Strecke Dresden-Berlin (180 km) wie 120:180.

$$\frac{120\text{ km}}{180\text{ km}} = \frac{120}{180} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21} = \frac{600}{900} =$$

Greifen wir aus der Kette dieser gleichwertigen Verhältnisse zwei beliebige heraus und verbinden sie durch ein Gleichheitszeichen, so entsteht eine Gleichung zwischen zwei Brüchen:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{120}{180} = \frac{600}{900}$$

Meist schreibt man dabei statt der Bruchstriche Doppelpunkte.

Beispiel: $12:18 = 2:3$

(Gelesen: 12 verhält sich zu 18 wie 2 zu 3; kurz: 12 zu 18 wie 2 zu 3.)
Eine solche Gleichung heißt **Verhältnisgleichung** oder **Proportion.**

Zwei Verhältnisse, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind, bilden eine Verhältnisgleichung oder Proportion.

Allgemein schreibt man:

$$a:b = c:d.$$

Die 4 Größen der Proportion heißen die *Glieder*. a und d sind die *Außenglieder*, b und c die *Innenglieder*, a und c heißen *Vorderglieder*, b und d *Hinterglieder* ihres Verhältnisses.

7.12 Die Produktgleichung

Auf jede Proportion können Sie selbstverständlich das Grundgesetz der Gleichungslehre anwenden. Schreiben Sie in der Proportion

$$12:18 = 2:3$$

die Verhältnisse als Brüche, so erhalten Sie die Gleichung

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Die Nenner können Sie beseitigen, indem Sie beide Seiten mit $18 \cdot 3$ multiplizieren und kürzen. Sie erhalten

$$12 \cdot 3 = 2 \cdot 18.$$

Nun steht links das Produkt der Außenglieder, rechts das Produkt der Innenglieder der ursprünglichen Proportion.

Gehen Sie von der Proportion $\quad a:b = c:d$

aus, so entsteht durch Multiplikation beider Seiten mit $b \cdot d$

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Es gilt also allgemein:

In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Die Gleichung $12 \cdot 3 = 2 \cdot 18$ bzw. $a \cdot d = b \cdot c$ wird die zur Proportion gehörende **Produktgleichung** genannt. Die Produktgleichung liefert eine Kontrolle für die Richtigkeit der Proportion.

Beispiel:

Die Proportion $12:18 = 2:3$ ist richtig, denn es ist $12 \cdot 3 = 18 \cdot 2$.

Umgekehrt können Sie aus einer Gleichung, in der links und rechts ein Produkt von zwei Faktoren steht, eine Proportion bilden.

Beispiel:

Produktgleichung $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \qquad :(8 \cdot 4)$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

als Proportion geschrieben $\quad 3:4 = 6:8$

Sie erkennen: Die Faktoren des einen Produktes werden die Innenglieder, die des anderen Produktes die Außenglieder.

7.13 Die Vertauschungsgesetze

Aus der Produktgleichung

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

können Sie aber auch noch andere Proportionen gewinnen, wenn Sie die beiden Seiten der Gleichung durch andere Produkte dividieren:

durch $(3 \cdot 4)$: $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ oder $8:4 = 6:3$

durch $(6 \cdot 8)$: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ oder $3:6 = 4:8$

durch $(6 \cdot 3)$: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ oder $8:6 = 4:3$

Schließlich können Sie, wie bei jeder Gleichung, auch bei den vier Proportionen jeweils die beiden Seiten vertauschen. So ergeben sich aus derselben Produktgleichung acht verschiedene Proportionen.

Merken Sie sich:

Aus einer Proportion kann man andere Proportionen gewinnen, wenn man

a) die Innenglieder untereinander vertauscht,

b) die Außenglieder untereinander vertauscht,

c) die Innenglieder gegen die Außenglieder austauscht.

Den so entstehenden Proportionen liegt eine gemeinsame Produktgleichung zugrunde, doch sind die Werte der Verhältnisse bei den acht Proportionen nicht immer die gleichen.

7.14 Die Proportion als Bestimmungsgleichung (Vierte Proportionale)

Wählt man für drei von den vier Gliedern einer Proportion bestimmte Zahlenwerte, so ist durch diese drei Glieder das vierte bestimmt. Man nennt dieses Glied dann die **vierte Proportionale.** Wir wollen es mit x bezeichnen und schreiben z. B.

$$8:12 = 4:x \quad \text{oder allgemein} \quad a:b = c:x$$

in Bruchform $\quad \frac{8}{12} = \frac{4}{x} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Das unbekannte Glied, die vierte Proportionale, muß nicht an vierter Stelle stehen. Es kann auch das 1., 2. oder 3. Glied sein.

Beispiel: $2:x = 7:21$

Beachten Sie, daß hier Bestimmungsgleichungen vorliegen. Wie Sie sehen, kann eine Proportion sowohl eine identische Gleichung als auch eine Bestimmungsgleichung sein. Die Verhältnisgleichung ist also keine neue Art der Gleichung, sondern lediglich eine besondere Form.

Die Unbekannte x kann entweder aus der Proportion auf dem Wege über die Produktgleichung oder aus der Bruchform durch Beseitigen der Nenner mit Hilfe des Hauptnenners bestimmt werden.

Beispiel:

$$8:12 = 4:x \quad \text{oder} \quad \frac{8}{12} = \frac{4}{x} \quad | \cdot 12x$$

$$8x = 12 \cdot 4$$

$$x = \frac{12 \cdot 4}{8} \qquad\qquad 8x = 48$$

$$\underline{\underline{x = 6}} \qquad\qquad \underline{\underline{x = 6}}$$

Allgemein: $a:b = c:x$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad | \cdot bx$

$$ax = bc \qquad\qquad ax = bc$$

$$\underline{\underline{x = \frac{bc}{a}}} \qquad\qquad \underline{\underline{x = \frac{bc}{a}}}$$

Die einzelnen Glieder einer Proportion müssen nicht einfache oder ganze Zahlen, sondern können auch zusammengesetzte Ausdrücke oder Brüche sein.

Lehrbeispiel 90

$$3:2 = (105 - x):x$$

Lösung:

Hier ist ebenfalls die vierte Proportionale gesucht. Außerdem ist das dritte Glied der Proportion vom unbekannten Glied abhängig. Sie lösen diese Aufgabe, indem Sie die Produktgleichung bilden.

$$3x = 2(105 - x)$$

$$3x = 210 - 2x$$

$$5x = 210$$

$$\underline{\underline{x = 42}}$$

Probe:

$$\frac{3}{2} \;\Big|\; \frac{105-42}{42}$$

$$\frac{3}{2} \;\Big|\; \frac{63}{42}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Im Leben begegnen Ihnen viele Beispiele für den Verhältnisbegriff. So stehen z. B. verschiedene Mengen desselben Stoffes in demselben Verhältnis wie die Preise. Diese Tatsachen nutzt man bei allen Mengen- und Preisberechnungen aus.
Wenn Sie z. B. wissen, wieviel 1 kg Zucker kostet, können Sie daraus schließen, wieviel 3 kg, 5,5 kg oder auch 0,5 kg kosten. Der doppelten Menge entspricht der doppelte Preis, der halben Menge aber der halbe Preis. Die gleichen Verhältnisse können Sie dann zu einer Proportion zusammenstellen und damit zu drei gegebenen Größen eine vierte gesuchte (als vierte Proportionale x) berechnen.

Lehrbeispiel 91

11 m *Rundstahl besitzen eine Masse von* 26,4 kg. *Welche Masse haben* 7 m *Rundstahl?*

Lösung:

Die verschiedenen Mengen sind hier durch die Längen (11 m bzw. 7 m) gekennzeichnet. Diese stehen im Verhältnis

$$11 \text{ m} : 7 \text{ m} = 11 : 7.$$

In demselben Verhältnis stehen die Massen, wobei wir die unbekannte Masse des kürzeren Rundstahls mit x kg bezeichnen wollen:

$$26{,}4 \text{ kg} : x \text{ kg} = 26{,}4 : x$$

Folglich ergibt sich die Proportion:

$$11 : 7 = 26{,}4 : x$$

$$11 \cdot x = 26{,}4 \cdot 7$$

$$x = \frac{26{,}4 \cdot 7}{11}$$

$$\underline{\underline{x = 16{,}8}}$$

7 m Rundstahl haben eine Masse von 16,8 kg.

Lehrbeispiel 92

Auf Ihrer Rechnung über Elektroenergie werden Ihnen für einen Verbrauch von 13 *Kilowattstunden* (kWh) 1,04 DM *berechnet. Wieviel müssen Sie für* 19 kWh *zahlen?*

Lösung:

Um einen guten Überblick über die Aufgabe zu erhalten, empfiehlt es sich, den Text in zwei kurzen Sätzen niederzuschreiben, wobei der zweite Satz die gesuchte Größe

(Preis x DM für 19 kWh) an zweiter Stelle enthält:

13 kWh kosten 1,04 DM.

19 kWh kosten x DM.

Noch kürzer können Sie die beiden Sätze unter Verwendung des Symbols $\mathrel{\hat{=}}$ (gelesen: entspricht; vgl. Aufstellung in Kapitel 1) schreiben:

$$13 \text{ kWh} \mathrel{\hat{=}} 1{,}04 \text{ DM}.$$

$$19 \text{ kWh} \mathrel{\hat{=}} x \text{ DM}.$$

Wegen der gleichen Verhältnisse der Energiemengen und der Preise ergibt sich die Proportion:

$$13 \text{ kWh} : 19 \text{ kWh} = 1{,}04 \text{ DM} : x \text{ DM}$$

$$13 : 19 = 1{,}04 : x$$

Diese wird mit Hilfe der Produktgleichung nach x aufgelöst:

$$13x = 19 \cdot 1{,}04$$

$$x = \frac{19 \cdot 1{,}04}{13}$$

$$x = 19 \cdot 0{,}08$$

$$\underline{\underline{x = 1{,}52}}$$

Antwortsatz: 19 kWh kosten 1,52 DM.

7.15 Stetige Proportion; die mittlere Proportionale

Betrachten Sie nun die Proportion

$$36 : 12 = 12 : 4,$$

bei der als Besonderheit die beiden Innenglieder gleich sind! Eine solche Proportion heißt *stetig*. Das letzte Glied (4) nennt man die *dritte Proportionale* zu den anderen Größen (36 und 12).
Das gemeinsame Innenglied (12) bezeichnet man als *mittlere Proportionale* zu den beiden Außengliedern (36 und 4). Die mittlere Proportionale zu zwei Gliedern heißt auch *geometrisches Mittel* zu diesen beiden Gliedern. Die dritte Proportionale läßt sich wie die vierte Proportionale berechnen.

Lehrbeispiel 93

$$16 : 24 = 24 : x$$

$$16x = 24 \cdot 24$$

$$x = \frac{24 \cdot 24}{16}$$

$$\underline{\underline{x = 36}}$$

Ist die mittlere Proportionale unbekannt, so kann auch sie mit Hilfe der Produktgleichung ermittelt werden. Doch tritt dabei eine Besonderheit auf: Die Lösung führt auf eine Quadratwurzel.

Beispiel:

$$64 : x = x : 4 \quad \text{oder allgemein} \quad a : x = x : b$$

$$x^2 = 64 \cdot 4 \qquad\qquad x^2 = ab$$

$$x = \pm \sqrt{256} \qquad\qquad \underline{\underline{x = \pm \sqrt{ab}}}$$

$$\underline{\underline{x = \pm 16}}$$

Beachten Sie, daß diese Aufgabe zu zwei Lösungen führt, denn $(+16)(+16) = 256$ und $(-16)(-16) = 256$!

Zusammenfassung

In einer Proportion (Verhältnisgleichung) sind zwei Verhältnisse einander gleichgesetzt:

$$a:b = c:d$$

Die Richtigkeit der Proportion kann nachgeprüft werden, indem man die *Produktgleichung* bildet:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Zu einer Produktgleichung gehören stets acht verschiedene Proportionen. Man erhält sie aus einer von ihnen, wenn man

a) die Innenglieder untereinander vertauscht oder
b) die Außenglieder untereinander vertauscht oder
c) die Innenglieder gegen die Außenglieder austauscht.

In der Bestimmungsgleichung $a:b = c:x$ ist x die *vierte Proportionale* zu den Gliedern a, b und c:

$$x = \frac{bc}{a}$$

Sehr viele Zusammenhänge im praktischen Leben beruhen auf gleichen Verhältnissen einander entsprechender Größen. Die Berechnung unbekannter Größen läuft dabei stets auf die Bestimmung einer vierten Proportionale hinaus.

Bei einer *stetigen* Proportion sind die beiden Innenglieder gleich. Das gemeinsame Innenglied nennt man die *mittlere Proportionale* oder das *geometrische Mittel* zu den beiden Außengliedern.

$$a:x = x:b$$

$$x = \pm \sqrt{ab}$$

Übungen

190. *Lösen Sie die folgenden Proportionen und prüfen Sie die Richtigkeit der Lösungen mit Hilfe der Produktgleichung!*

a) $13 : x = 19,5 : 6$ *b)* $58 : 3 = 87 : x$

c) $2\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = x : 2$

191. *Berechnen Sie x aus den folgenden Proportionen!*

a) $25 : 15 = (56 - 3x) : x$ *b)* $(x - 6) : 3 = (6 - x) : 4$

c) $(x + 3) : (x - 3) = (2 + x) : (x - 5)$

d) $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = 6x : \left(\frac{1}{3} + 4x\right)$

192. *Die drei Zahlen* 3, 4, 6 *sollen in dieser Reihenfolge zum Aufstellen einer Proportion verwendet werden.*
   a) Wie lautet das fehlende vierte Glied?
   b) Welche anderen Proportionen können Sie aus der in a) sich ergebenden durch Gliedervertauschen gewinnen?

193. *Stellen Sie alle Proportionen auf, die zu folgenden Produktgleichungen gehören!*

a) $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$ *b)* $\frac{1}{2} \cdot 6 = 9 \cdot \frac{1}{3}$ *c)* $m \cdot n = p \cdot q$

194. *In einem VEG wurden auf* 18 ha 318,0 dt *Roggen geerntet. Wieviel werden bei gleichen Bedingungen auf* 7 *ha geerntet?*

195. *Die Werktätigen eines Dachpappenwerkes steigerten die Erzeugung je Arbeiter von* 1362 m² *im ersten Monat auf* 1788 m² *im zweiten. Wie groß war die durchschnittliche Lohnsteigerung, wenn nur Leistungslohn gezahlt wurde und dieser im ersten Monat* 231,54 DM *je Arbeiter betrug?*

196. *Ein Gefäß A enthält* 14 l *Flüssigkeit mehr als ein anderes Gefäß B. Gießt man aus A* 8 l *Flüssigkeit in B, so verhalten sich die Flüssigkeitsmengen wie* 8:9. *Wieviel Liter enthielt ursprünglich jedes Gefäß?*

197. *Zwei Personen sollen ein Geschenk von* 25 DM *so unter sich verteilen, daß sich ihre Anteile wie* 7:3 *verhalten. Wieviel erhält jeder?*

198. 831 m *Kupferdraht haben eine Masse von* 7,16 kg. *Welche Masse haben* 100 m *Kupferdraht?*

199. *Vier gleichartige Dampfturbinen haben einen Dampfverbrauch von zusammen* 5800 kg/h.
Mit welchem Dampfverbrauch ist zu rechnen, wenn noch eine fünfte Dampfturbine dieser Art in Betrieb gesetzt wird?

200. Am 20. 1. 1960 wurde von der Sowjetunion eine ballistische Mehrstufenrakete in den Raum des Stillen Ozeans gestartet. Die letzte und die vorletzte Raketenstufe erreichten in rund 12500 km *Entfernung (auf der Erdoberfläche gerechnet) von der Startstelle den vorgesehenen Raum mit einer Abweichung von knapp* 2 km. *Mit welcher Genauigkeit müßten Sie vergleichsweise die Scheibe mit einem Kleinkalibergewehr auf* 50 m *treffen? (Die Schießscheibe hat einen Durchmesser von* 16 cm, *der Kern – die „Zehn“ – einen Durchmesser von* 1,3 cm.*)*

201. In einem Siemens-Martin-Ofen werden in einer bestimmten Zeit 500 t *Stahl bei einer technisch-wirtschaftlichen Kennziffer (TWK) von* 4,5 t *Stahl je* m² *Herdfläche gewonnen. Wieviel Tonnen Stahl werden in der gleichen Zeit gewonnen, wenn die TWK auf* 4,8 t *Stahl je* m² *Herdfläche erhöht wird?*

[15]

7.16 Proportionalität und Proportionalitätsfaktor

Der Angestellte, der die Rechnungen für die Elektroenergie ausschreibt, müßte täglich sehr viele gleichartige Aufgaben lösen.
Um diese vielen Berechnungen zu ersparen, arbeitet der Angestellte mit Tabellen. Eine solche Tabelle (oder Wertetafel, wie man in der Mathematik sagt) hätte für die Elektroenergieberechnung folgendes Aussehen (vereinfacht):

Elektroenergie in kWh	1	2	3	4	5	6	7	13	17
Preis in DM	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	1,04	1,36

Diese Zusammenstellung läßt die Abhängigkeit der einen Größe (Preis in DM) von der anderen Größe (Verbrauch in kWh) klar erkennen. Beide Größen nehmen in der gleichen Weise zu oder ab. Bilden Sie z. B. aus den Werten der ersten und der sechsten Spalte die Verhältnisse der gleichartigen Größen, so erhalten Sie:

$$\frac{1\,\text{kWh}}{6\,\text{kWh}} = \frac{1}{6} \qquad \frac{0{,}08\,\text{DM}}{0{,}48\,\text{DM}} = \frac{1}{6}$$

Beide Verhältnisse haben den gleichen Wert.

Infolgedessen können Sie eine Proportion niederschreiben:

$$1\,\text{kWh} : 6\,\text{kWh} = 0{,}08\,\text{DM} : 0{,}48\,\text{DM}$$

oder

$$1 : 6 = 0{,}08 : 0{,}48$$

Dasselbe können Sie mit den Werten beliebiger anderer Spalten machen.
Jedesmal erhalten Sie wieder eine Proportion, z. B.

$$2 : 5 = 0{,}16 : 0{,}40$$

$$3 : 17 = 0{,}24 : 1{,}36 \qquad \text{usw.}$$

Diese Vielzahl einzelner Proportionen faßt man oft zu einer einzigen *fortlaufenden Proportion* zusammen:

$$1:2:3:4:5:\cdots:17:\cdots = 0{,}08:0{,}16:0{,}24:0{,}32:0{,}40:\cdots:1{,}36:\cdots$$

Beachten Sie: In einer fortlaufenden Proportion darf der Doppelpunkt *nicht* durch einen Bruchstrich ersetzt werden!

Umgekehrt können Sie eine fortlaufende Proportion wieder in viergliedrige Proportionen aufspalten, indem Sie die Verhältnisse von je zwei einander entsprechenden Gliedern auf jeder Seite einander gleichsetzen.

Beispiel:

Aus $x:y:z = 4:7:15$ folgen die viergliedrigen Proportionen

$x:y = 4:7$; $x:z = 4:15$; $y:z = 7:15$.

Die Tatsache, daß der Preis vom Energieverbrauch abhängig ist, können Sie auch noch in einer anderen Weise ausdrücken:

Wenn Sie das Verhältnis aus zwei in derselben Spalte der Wertetafel stehenden Größen bilden, erhalten Sie jedesmal denselben Wert. Dieser ist allerdings jetzt, da Sie zwei verschiedenartige Größen ins Verhältnis setzen, stets benannt.

Beispiele:

$$\frac{0{,}40\,\mathrm{DM}}{5\,\mathrm{kWh}} = 0{,}08\,\mathrm{DM/kWh}$$

$$\frac{1{,}36\,\mathrm{DM}}{17\,\mathrm{kWh}} = 0{,}08\,\mathrm{DM/kWh}$$

Allgemein:

$$\frac{\text{Preis } P \text{ (in DM)}}{\text{Verbrauch } V \text{ (in kWh)}} = 0{,}08\,\mathrm{DM/kWh}$$

Die konstante Verhältniszahl $k = 0{,}08$ DM/kWh, die für den Zusammenhang zwischen Energieverbrauch und Preis charakteristisch ist, bedeutet offenbar den Preis für 1 kWh. Mit ihrer Hilfe läßt sich zu jedem Verbrauch V sofort der Preis P berechnen:

$$\frac{P}{V} = 0{,}08\,\mathrm{DM/kWh} = k \quad \text{oder} \quad P = 0{,}08\,\mathrm{DM/kWh} \cdot V = k \cdot V$$

In Worten heißt das:

> Bei doppeltem, dreifachem, · · · (halbem) Energieverbrauch sind auch die entstehenden Kosten doppelt, dreifach, · · · (halb) so groß.

Man sagt dafür kurz: Die beiden Größen stehen in einem *geraden Verhältnis* oder sie sind (direkt) **proportional** (*verhältnisgleich*) zueinander:

$$P \sim V \quad \text{(gelesen: } P \text{ proportional zu } V\text{)}.$$

Die (direkte) **Proportionalität** wird durch die *Gleichung*

$$P = k \cdot V$$

ausgedrückt. Der konstante Faktor k heißt dabei der **Proportionalitätsfaktor.** Er ist meist eine Größe und hat eine je nach dem zugrunde liegenden Sachverhalt verschiedene, bestimmte sachliche Bedeutung. Die Proportionalität soll Ihnen an einem weiteren Beispiel erläutert werden:

Der Kreisumfang wird nach der Formel $U = \pi d$ berechnet. Die Formel besagt, daß $U \sim d$ ist. Das bedeutet: Der Kreisumfang U wird bei wachsendem Durchmesser d immer größer. Das heißt, wird der Durchmesser verdoppelt, so verdoppelt sich auch der Kreisumfang, wird der Durchmesser verdreifacht, so verdreifacht sich auch der Umfang usw. Es besteht zwischen U und d Proportionalität. Die Zahl π ist hierbei der Proportionalitätsfaktor[1]).

Lehrbeispiel 94

Für 2,5 t *Grauguß braucht man im Schmelzofen* 3500 kg *Koks. Wieviel Koks wird für* 600 t *Grauguß gebraucht?*

Lösung:

Da eine Verdoppelung, Verdreifachung, der Graugußmenge auch eine Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$ der Koksmenge erfordert, besteht zwischen beiden Größen Proportionalität. Die gesuchte Koksmenge ist x kg.

Demnach besteht die Proportion:

$$2{,}5\,\mathrm{t} : 600\,\mathrm{t} = 3500\,\mathrm{kg} : x\,\mathrm{kg}$$

$$2{,}5 : 600 = 3500 : x$$

$$2{,}5x = 600 \cdot 3500$$

$$x = \frac{600 \cdot 3500}{2{,}5}$$

$$\underline{\underline{x = 840000}}$$

Es werden 840000 kg = 840 t Koks benötigt.

7.17 Produktgleichheit und konstantes Produkt

Beispiel:

Die Länge eines Rechtecks betrage $a = 3$ cm, *die Breite* $b = 4$ cm.
Wie müßten Sie die Breite des Rechtecks verändern, wenn bei gleichbleibendem Flächeninhalt die Länge 6 cm *betragen soll?*

Lösung:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird nach der Formel

$$F = a \cdot b$$

berechnet (vgl. Abschnitt 2.4). Sie erhalten also für das Rechteck

$$F = a \cdot b = 3\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm} = 12\ \mathrm{cm}^2$$

als Flächeninhalt.

[1]) Daß der Proportionalitätsfaktor diesmal ausnahmsweise unbenannt ist, hat seinen Grund darin, daß zufällig gleichbenannte Größen (Kreisumfang und Durchmesser, beide z. B. in m gemessen) ins Verhältnis gesetzt werden. Es entsteht also eigentlich die Benennung $3{,}14\cdots$ m/m (gelesen: Meter je Meter).

Nun soll bei gleichbleibendem Flächeninhalt die eine Seite (Länge) vergrößert werden. Das bedeutet, daß die andere Seite (Breite) verkleinert werden muß. Es liegt also hier eine andere Beziehung als bei der (direkten) Proportionalität (Abschnitt 7.16) vor, denn eine Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$ (Halbierung, Drittelung, $\cdots$) der Länge des Rechteckes hat eine Halbierung, Drittelung, $\cdots$ (Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$) der Breite des Rechtecks zur Folge.
Das kommt besonders deutlich zum Ausdruck, wenn Sie wieder eine Wertetafel aufstellen:

Seite a in cm	1	2	3	4	5	6	7	8
Seite b in cm	12	6	4	3	$2\frac{2}{5}$	2	$1\frac{5}{7}$	$1\frac{1}{2}$

Bilden Sie wieder anhand der Wertetafel aus den Werten der ersten und sechsten Spalte die Verhältnisse gleichartiger Größen (vgl. Abschnitt 7.16), so erhalten Sie diesmal:

$$\frac{1\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{6} \qquad \frac{12\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \frac{6}{1}$$

Die Verhältnisse ergeben nicht den gleichen Wert, vielmehr ist ein Verhältniswert der *Kehrwert* des anderen. Man sagt deshalb: Die beiden Größen (Länge und Breite eines Rechtecks) stehen im *umgekehrten Verhältnis* zueinander.
Bilden Sie die Verhältnisse aus den in derselben Spalte stehenden Größen und vergleichen Sie diese, so erhalten Sie jedesmal andere Werte. Die beiden Größen (Länge und Breite eines Rechtecks) sind also nicht verhältnisgleich (direkt proportional). Bilden Sie dagegen das *Produkt* aus zwei in derselben Spalte stehenden Größen, so erhalten Sie immer den gleichen Wert:

$$1\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$$
$$2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$$
$$3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$$

Aus diesem Grunde sagt man: Länge und Breite eines Rechtecks sind **produktgleiche** Größen.
Bezeichnet man allgemein die Länge (in cm) mit a und die Breite (in cm) mit b, so gilt hier die Beziehung

$$a \cdot b = 12\text{ cm}^2.$$

Der Wert des **konstanten Produktes** $c = 12\text{ cm}^2$, der für diesen Zusammenhang charakteristisch ist, ist die Fläche des Rechtecks. Mit ihrer Hilfe läßt sich zu jeder Breite b die Länge a berechnen:

$$a \cdot b = 12\text{ cm}^2 = c \quad \text{oder} \quad a = \frac{12\text{ cm}^2}{b} = \frac{c}{b}.$$

Greifen Sie nochmals zwei beliebige Produkte heraus! Da alle Produkte den gleichen Wert haben, können Sie diese gleichsetzen:

$$2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 5\text{ cm} \cdot 2{,}4\text{ cm}.$$

Diese Gleichung können Sie als Produktgleichung auffassen und folgende Proportion bilden:

$$2\text{ cm}:5\text{ cm} = 2{,}4\text{ cm}:6\text{ cm}$$
$$2:5 = 2{,}4:6$$

Vergleichen Sie das mit der Wertetafel, so sehen Sie, daß Sie nur dann eine Proportion aufstellen können, wenn Sie das Verhältnis gleichartiger Größen (hier 2 cm und 5 cm) dem Verhältnis der zugehörigen Größen (hier 6 cm und $2\frac{2}{5}$ cm = 2,4 cm) in *umgekehrter Reihenfolge* gleichsetzen („*umgekehrtes Verhältnis*").

Schreiben Sie diese Proportion als Gleichung zwischen zwei Brüchen

$$\frac{2}{5} = \frac{2{,}4}{6},$$

so können Sie nach den Regeln der Bruchrechnung die rechte Seite umgestalten:

$$\frac{2{,}4}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2{,}4}{1} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2{,}4}.$$

Dann nimmt die Proportion die Form an:

$$2:5 = \frac{1}{6} : \frac{1}{2{,}4}.$$

Diesmal sind die Verhältnisse gleichartiger Größen in gleicher Reihenfolge gebildet. Es wurden aber von der einen Größenart stets die Kehrwerte verwendet. Man sagt deshalb, zwischen der Länge und der Breite eines Rechtecks besteht eine *indirekte Proportionalität.* Das kann geschrieben werden:

$$a \sim \frac{1}{b}.$$

Fassen wir diese Begriffe nochmals zusammen, so gilt, wenn a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 je zwei in einer Spalte der Wertetafel zusammenstehende Größen sind:

$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$ (Produktgleichheit)

oder $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$ (umgekehrtes Verhältnis)

oder $a_1 : a_2 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2}$ (indirekte Proportionalität).

7.18 Die Produktgleichung als Bestimmungsgleichung

In der Praxis treten Ihnen oft Probleme entgegen, denen ein umgekehrtes Verhältnis zugrunde liegt. Dazu einige Beispiele:

Lehrbeispiel 95

Ein Wasserbehälter wird durch 3 gleich starke Zuleitungsrohre in 4 Stunden gefüllt. In welcher Zeit geschieht das, wenn ein Rohr geschlossen ist, die Auslaufgeschwindigkeit der beiden anderen Rohre aber dieselbe bleibt?

Lösung:

Überlegen Sie sich zunächst, wie sich die Veränderung (das Schließen eines Rohres) auswirkt! Sie stellen fest, daß infolge der geringeren Rohranzahl mehr als 4 Stunden zum Füllen benötigt werden.

Nennen Sie diese Zeit x Stunden! Dann gilt:

Bei 3 geöffneten Rohren dauert das Füllen 4 Stunden,
bei 2 geöffneten Rohren dauert das Füllen x Stunden.

Kürzer:

$$3 \text{ Rohre} \mathrel{\hat{=}} 4 \text{ h}$$
$$2 \text{ Rohre} \mathrel{\hat{=}} x \text{ h}$$

Bis hierher stimmt der Lösungsweg in der äußeren Form völlig mit dem solcher Aufgaben überein, denen gerade Verhältnisse zugrunde liegen (vgl. Abschnitt 7.14). Bedenken Sie aber, daß jedes Rohr in jeder Stunde nur einen gewissen Teil zum Füllen des Behälters beisteuert, so daß der gesamte Behälterinhalt sich aus dem Produkt von Rohranzahl mit Stundenanzahl ergibt. Dieser Inhalt ist aber feststehend, gleichgültig, aus welcher Rohranzahl und Stundenanzahl er sich beim Füllen ergibt. Es gilt also:

$$3 \text{ Rohre} \cdot 4 \text{ h} = 2 \text{ Rohre} \cdot x \text{ h}$$
$$3 \cdot 4 = 2 \cdot x$$
$$\frac{3 \cdot 4}{2} = x$$
$$\underline{\underline{6 = x}}$$

Antwort: Ist ein Rohr geschlossen, so beträgt die Füllzeit 6 Stunden.

Lehrbeispiel 96

12 Pferde reichen mit einem Hafervorrat 20 Tage. Wie lange reichen a) 15 Pferde, b) 30 Pferde mit dem gleichen Vorrat?

Lösung:

Überlegung: Wenn 12 Pferde mit dem Hafervorrat 20 Tage reichen, dann reicht eine größere Anzahl, nämlich 15 oder 30 Pferde, nur eine kürzere Zeit. Offenbar nimmt die Anzahl der Tage im gleichen Maße ab, wie die Anzahl der Pferde zunimmt, denn Pferdeanzahl mal Tageanzahl ist gleich der Anzahl der zur Verfügung stehenden Futterrationen je Pferd und Tag, und dieser Vorrat bleibt unverändert.

Ansatz:

a) $12 \text{ Pferde} \mathrel{\hat{=}} 20 \text{ Tg.}$
$15 \text{ Pferde} \mathrel{\hat{=}} x_1 \text{ Tg.}$
$$12 \cdot 20 = 15 \cdot x_1$$
$$\frac{12 \cdot 20}{15} = x_1$$
$$\underline{\underline{16 = x_1}}$$

b) $12 \text{ Pferde} \mathrel{\hat{=}} 20 \text{ Tg.}$
$30 \text{ Pferde} \mathrel{\hat{=}} x_2 \text{ Tg.}$
$$12 \cdot 20 = 30 \cdot x_2$$
$$\frac{12 \cdot 20}{30} = x_2$$
$$\underline{\underline{8 = x_2}}$$

Antwort: 15 Pferde reichen 16 Tage, 30 Pferde 8 Tage mit dem Hafervorrat.

7.19 Zusammengesetzte Aufgaben

In den bisher zur Proportionalität bzw. Produktgleichheit gelösten Aufgaben wurde stets aus drei gegebenen Größen eine vierte unbekannte bestimmt. Das war immer mit Hilfe einer einzigen Proportion oder Produktgleichung zu machen. Mitunter sind aber mehr als drei Stücke gegeben. Solche zusammengesetzte Aufgaben kann man rechnerisch in mehrere einfache aufspalten, wie das folgende Lehrbeispiel zeigt.

Lehrbeispiel 97

10 *gleich starke Lampen verbrauchen in* 3 *Stunden* 1,2 kWh *elektrische Energie. Wie hoch ist der Verbrauch von* 8 *Lampen in* 5 *Stunden?*

Lösung:

Ansatz: 10 Lampen verbrauchen in 3 h 1,2 kWh.
8 Lampen verbrauchen in 5 h x kWh.

Weniger Lampen verbrauchen weniger Energie, also liegt ein gerades Verhältnis vor. Außer der Anzahl der Lampen hat sich auch noch die Zeitdauer des Brennens der Lampen geändert. Würden 8 Lampen ebenfalls 3 h brennen, so ergibt sich der Ansatz

$$10:8 = 1{,}2:x.$$

Da aber die Lampen 5 h brennen, muß der Energieverbrauch $\frac{5}{3}$ mal so groß sein (gerades Verhältnis). Somit folgt der Ansatz

$$10:8 = \left(1{,}2 \cdot \frac{5}{3}\right):x.$$

Daraus folgt:

$$10x = 8 \cdot 1{,}2 \cdot \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{8 \cdot 1{,}2 \cdot 5}{3 \cdot 10}$$

$$\underline{\underline{x = 1{,}6}}$$

Antwort: Die 8 Lampen verbrauchen in 5 Stunden 1,6 kWh.

Auch bei diesen zusammengesetzten Aufgaben muß beachtet werden, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt.

Lehrbeispiel 98

Zum Transport der Ziegel für 12 *Siedlungshäuser eines Neubauprogramms mußten* 4 *LKW (zu* 3 t*)* 9 *Tage lang täglich je* 8 *Fuhren durchführen. Wieviel Tage werden die LKW noch benötigen, wenn sie mit Anhänger (zu* 3 t*) täglich* 6 *Fuhren durchführen und die Ziegel für weitere* 30 *Siedlungshäuser transportieren sollen?*

Lösung:

12 Häuser —— 4 LKW —— 8 Fuhren $\hat{=}$ 9 Tage
30 Häuser —— 8 LKW —— 6 Fuhren $\hat{=}$ x Tage

Würde sich nur die Anzahl der Häuser verändern, lautete der Ansatz (gerades Verhältnis)

$$12:30 = 9:x.$$

Da aber außerdem 8 Fahrzeuge, also die doppelte Anzahl, zur Verfügung stehen, wird die Anzahl der Tage nur noch $\frac{4}{8}$, also die Hälfte, betragen (umgekehrtes Verhältnis). Der Ansatz lautet dann:

$$12:30 = \left(9 \cdot \frac{4}{8}\right) : x.$$

Obendrein verringert sich die Anzahl der Fuhren am Tag. Dadurch muß sich die Anzahl der Tage vergrößern (umgekehrtes Verhältnis). Das Verhältnis ist $\frac{8}{6}$, also ist die Anzahl der Tage mit $\frac{8}{6}$ zu multiplizieren. Es ergibt sich der Ansatz:

$$12:30 = \left(9 \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{8}{6}\right) : x$$

$$12x = 30 \cdot 9 \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{8}{6}$$

$$x = \frac{30 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8}{8 \cdot 6 \cdot 12}$$

$$\underline{\underline{x = 15}}$$

Antwort: Für den Transport der Ziegel für 30 Siedlungshäuser müssen 4 LKW mit Anhänger 15 Tage lang täglich 6 Fuhren durchführen.

Zusammenfassung

Es gibt zwei verschiedene Zusammenhänge zwischen mehreren Größen, die man durch Proportionen darstellen kann:
Das *gerade Verhältnis* oder die *direkte Proportionalität*, für die ein *Proportionalitätsfaktor* charakteristisch ist, und das *umgekehrte Verhältnis* oder die *indirekte Proportionalität*, für die ein *konstantes Produkt* charakteristisch ist. Die Ähnlichkeit der Aufgaben, denen (direkte) Proportionalität und denen Produktgleichheit (indirekte Proportionalität) zugrunde liegt, macht es nötig, jeweils in einer Vorüberlegung zu entscheiden, welche der beiden Beziehungen vorliegt. Denn danach richtet sich der Lösungsweg, der gewählt werden muß.
Sind zwei Größen a und b so beschaffen, daß eine Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$ (Halbierung, $\cdots$) von a eine Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$ (Halbierung, $\cdots$) von b zur Folge hat, so sagt man, die Größen sind *verhältnisgleich* oder (direkt) *proportional* oder sie stehen in *geradem Verhältnis* zueinander. Das drückt man aus durch

die Proportionalitätsbeziehung	$a \sim b$	oder
die Gleichung	$a = k \cdot b$	oder
die Proportion	$a_1:a_2 = b_1:b_2$.	

Die Konstante k heißt der Proportionalitätsfaktor.

Sind zwei Größen a und b so beschaffen, daß eine Verdoppelung, Verdreifachung, $\cdots$ (Halbierung, $\cdots$) von a eine Halbierung, Drittelung, $\cdots$ (Verdoppelung, $\cdots$) von b zur Folge hat, so sagt man, die Größen sind *produktgleich* oder *indirekt proportional* oder sie stehen in *umgekehrtem Verhältnis* zueinander. Das drückt man aus durch

die Proportionalitätsbeziehung $a \sim \frac{1}{b}$ oder

die Gleichung $a \cdot b = c$ bzw. $a = \frac{c}{b}$ oder

die Proportion $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$

bzw. $a_1 : a_2 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2}$.

Die Größe c heißt das konstante Produkt.

Sind drei Größen gegeben und wird eine vierte gesucht, so findet man diese bei geradem Verhältnis mit Hilfe einer Proportion, bei umgekehrtem Verhältnis mit Hilfe einer Produktgleichung.
Sind mehr als drei Größen gegeben, so spaltet man diese zusammengesetzten Aufgaben in mehrere einfache auf.
Die *fortlaufende Proportion* hat mehr als vier Glieder, z. B.

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Übungen

202. *Schreiben Sie die fortlaufende Proportion* $x:y:z = 8:12:15$ *als viergliedrige Proportionen!*

203. $x:y:12 = 6:5:4$. *Berechnen Sie* x *und* y*!*

204. *An drei Personen sollen* 420 DM *so verteilt werden, daß ihre Anteile im Verhältnis* $3:4:7$ *stehen. Wieviel erhält jeder?*

205. *Von zwei Körpern mit gleichem Volumen hat der erste die Dichte* $\varrho_1 = 7{,}3\ \mathrm{kg/dm^3}$, *der zweite die Dichte* $\varrho_2 = 2{,}7\ \mathrm{kg/dm^3}$. *Der erste hat die Masse* 4,8 kg. *Welche Masse hat der zweite?*

206. *Eine Eisenbahnstrecke steigt auf* 240 m *um* 3 m *an. Wie groß ist bei gleicher Steigung der Höhenunterschied nach* 3,6 km*?*

207. *Zum Ausbohren eines Lagers werden, wenn die Bohrspindel* 90 *Umdrehungen je Minute macht,* 8 *Minuten benötigt. Wie lange würde die gleiche Arbeit bei* $n = 160$ *Umdrehungen je Minute dauern?*

208. *Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von* 40 km/h *legte ein Kraftwagen eine gewisse Strecke in* $2^1/_2$ h *zurück. Wieviel Zeit würde er für diese Strecke bei einer Geschwindigkeit von* 50 km/h *brauchen?*

209. Zwei Kreiselpumpen gleicher Leistung fördern in 6 h 13000 m³ *Abwasser. In welcher Zeit wird die doppelte Abwassermenge gefördert, wenn eine dritte derartige Pumpe hinzugenommen wird?*

210. Die Deutsche Lufthansa befliegt die Strecke Berlin–Moskau mit der neuen Turbopropmaschine IL 18. Die Reisegeschwindigkeit beträgt bei 7000 *bis* 8000 m *Höhe etwa* 640 km/h, *die Flugzeit* 2 h 40 min.
Wieviel Minuten früher würde die Maschine ihr Ziel erreichen, wenn durch Rückenwind ihre Reisegeschwindigkeit auf 675 km/h *erhöht wird?*

211. Eine Platte aus Zink, die 3 mm *dick ist, hat eine Masse von* 2,16 kg. *Welche Masse hat eine Zinkplatte, deren Fläche halb so groß, deren Dicke aber* 4 mm *ist?*

212. Bei 8*stündigem Arbeitstag wird eine bestimmte Arbeit von* 16 *Arbeitern in* 30 *Tagen geschafft.*
Wieviel Tage werden für die gleiche Arbeit bei 7*stündigem Arbeitstag von* 22 *Arbeitern gebraucht?*

213. Ein Motor fördert bei einer Leistung von 55 kW *in* 2 h 650 m³ *Wasser in einen* 45 m *höher gelegenen Behälter.*
Welche Motorleistung ist erforderlich, um in 96 min 910 m³ *Wasser* 36 m *hochzupumpen?*

[16]

7.2 Prozentrechnung

7.21 Wesen und Begriffe der Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist eine besondere Art des Rechnens mit Zahlenverhältnissen. Das soll an einem Beispiel erklärt werden:
Von 50 *Beschäftigten eines Betriebes A nahmen* 35 *an einem Einsatz im Rahmen des Nationalen Aufbauwerkes teil, von einem anderen Betrieb B mit* 40 *Beschäftigten* 34. *Welcher Betrieb wies die stärkere Beteiligung auf?*
Um über die Beteiligung am Aufbaueinsatz entscheiden zu können, müssen Sie in jedem Falle feststellen, wie sich die Anzahl der am Einsatz Beteiligten zur Gesamtzahl der Beschäftigten verhält. Sie bilden also jeweils das Verhältnis

am Einsatz Beteiligte zur Gesamtzahl der Beschäftigten,

also $\quad$ für A: $35:50 = \frac{35}{50}$; $\quad$ für B: $34:40 = \frac{34}{40}$.

Diese beiden Verhältnisse (Brüche) müssen Sie nun miteinander vergleichen, denn ein größerer Wert des Verhältnisses bedeutet eine stärkere Beteiligung am Einsatz. Sie können aber diesen Vergleich nicht ohne weiteres durchführen, weil die Brüche verschiedene Nenner haben, also nicht gleichnamig sind. Sie bringen deshalb zunächst die beiden Brüche durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner. Wir wählen als Nenner 100 und erhalten

$$\text{für A: } \frac{35}{50} = \frac{70}{100}; \quad \text{für B: } \frac{34}{40} = \frac{85}{100}.$$

Diese beiden auf den Nenner 100 erweiterten Brüche sagen folgendes: Wenn jeder der beiden Betriebe 100 Beschäftigte hätte, dann hätten sich (das gleiche Verhältnis zugrunde gelegt) bei A 70 Personen, bei B 85 Personen am Einsatz beteiligt, oder anders ausgedrückt: Die Beteiligung betrug bei A 70 Hundertstel, bei B 85 Hundertstel der jeweiligen Belegschaft. Für 70 Hundertstel sagt man auch 70 Prozent[1]) und schreibt abgekürzt 70 %.

Sie sehen jetzt sofort, daß die Beteiligung im Betrieb B stärker war, und können auch ohne große Rechnung aussagen, daß die Beteiligung bei B um $\frac{15}{100} = 15\,\%$ besser war als bei A. Man sagt auch: Im Betrieb B war die Beteiligung *prozentual* besser als im Betrieb A.

Um die beiden Brüche $\frac{35}{50}$ und $\frac{34}{40}$ in Hundertstel zu verwandeln, können Sie auch die Umwandlung in Dezimalzahlen durch die übliche Division vornehmen (vgl. Abschnitt 3.35):

$$\frac{35}{50} = 35:50 = 0{,}7 \quad \text{und} \quad \frac{34}{40} = 34:40 = 0{,}85$$

Da die ersten beiden Stellen hinter dem Komma Hundertstel bedeuten, können Sie auf diese Weise ebenfalls sofort die in der Aufgabe gestellte Frage beantworten.

$$0{,}7 = 0{,}70 = \frac{70}{100} = 70\,\%; \quad 0{,}85 = \frac{85}{100} = 85\,\%.$$

Dieser Weg ist besonders einfach und läßt sich auch dann anwenden, wenn der gegebene Bruch zunächst nicht ohne weiteres auf den Nenner 100 gebracht werden kann.

Beispiel:

In einem dritten Betrieb C, der 65 Beschäftigte hat, beteiligten sich 45 Personen am Aufbauwerk. Wie groß war hier die Beteiligung im Vergleich zu A und B?

Hier beteiligten sich $\frac{45}{65}$ der Belegschaft. Um einen Vergleich zu ermöglichen, verwandeln wir auch diesen Bruch in einen anderen mit dem Nenner 100. Da dies hier nicht ohne weiteres durch Erweitern möglich ist, wählen wir den zweiten Rechenweg:

$$\frac{45}{65} = 45:65 = 0{,}692\ldots \approx 0{,}69.$$

Da die Division nicht aufgeht, runden wir die Dezimalzahl auf Hundertstel (2 Stellen) und können nun sagen, daß die Beteiligung im Betrieb C bei etwa 69 % lag, d. h. fast der des Betriebes A gleichkam.

Die Verwandlung von Verhältnissen (Brüchen) in solche mit dem Nenner 100 ist also verhältnismäßig einfach. Das ist mit ein Grund, weshalb man zum Vergleich der Brüche immer den Nenner 100 wählt.

---

[1]) lat. *pro centum*, wörtlich „für Hundert“. Gelegentlich ist die sprachlich schlechte Verdeutschung „vom Hundert“ in Gebrauch. Dann schreibt man mitunter statt 70 % auch 70 v. H.

In der Wahl der Vergleichszahl 100 liegt das Wesen der Prozentrechnung. Man arbeitet in der Prozentrechnung mit folgenden Begriffen (vgl. obiges Beispiel):

Die Zahl 50 (40, 65) nennt man den **Grundwert** g,
die Zahl 35 (34, 45) nennt man den **Prozentwert** w,
die Zahl 70 (85, 69) nennt man den **Prozentsatz** p.

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz können je nach Aufgabenstellung verschiedene Werte annehmen. Als vierter Wert kommt die immer unveränderliche **Bezugszahl** 100 hinzu. (Bezugszahl, weil wir den Grundwert ja immer auf 100 *beziehen.*) Die Prozentrechnung besteht nun darin, Prozentwert, Prozentsatz oder Grundwert zu berechnen. Wenn eine dieser Größen berechnet werden soll, müssen jeweils die beiden anderen gegeben sein.
Das Kernstück ist dabei immer das Verwandeln eines Verhältnisses (eines Bruches) in ein anderes mit der Bezugszahl 100 als neuem Nenner (Hinterglied). Das führt stets auf folgende charakteristische Proportion:

Zahlenbeispiel A	Allgemein
$\frac{35}{50} = \frac{70}{100}$	$\frac{w}{g} = \frac{p}{100}$
$35:50 = 70:100$	$w:g = p:100$

In der Proportion $w:g = p:100$ kann eine Größe (w, p oder g) unbekannt sein und berechnet werden. Demzufolge gibt es drei Grundaufgaben der Prozentrechnung, die alle nach demselben Proportionsansatz gelöst werden können.

7.22 Berechnung des Prozentwertes

Lehrbeispiel 99

Bei einer Preissenkung werden die Preise einer bestimmten Warengruppe um 22 % *gesenkt. Wie groß ist die Preissenkung für eine Ware, die bisher* 675,00 DM *gekostet hat?*

Lösung:

Gegeben: Grundwert $g = 675{,}00$ Gesucht: Prozentwert w
Prozentsatz $p = 22$

$$w:g = p:100$$
$$w:675 = 22:100$$
$$100w = 22 \cdot 675$$
$$w = \frac{22 \cdot 675}{100}$$
$$\underline{\underline{w = 148{,}5}}$$

Der Prozentwert beträgt also 148,50 DM, und deshalb lautet die Antwort:
Die Preissenkung beträgt 148,50 DM.

7.23 Berechnung des Prozentsatzes

Lehrbeispiel 100

Ein Arbeiter hat einen Stundenlohn von 1,65 DM. *Nach einer Qualifizierung erhöht sich sein Lohn um* 0,15 DM *je Stunde. Um wieviel Prozent ist sein Lohn gestiegen?*

Lösung:

Gegeben: Grundwert $g = 1{,}65$ Gesucht: Prozentsatz p
Prozentwert $w = 0{,}15$

$$w:g = p:100$$
$$0{,}15:1{,}65 = p:100$$
$$1{,}65 \cdot p = 100 \cdot 0{,}15$$
$$p = \frac{100 \cdot 0{,}15}{1{,}65}$$
$$p = 9{,}09\cdots$$
$$\underline{\underline{p \approx 9{,}1}}$$

Antwort: Der Lohn des Arbeiters ist um 9,1 % gestiegen.

In diesem Falle hätten Sie auch ohne die Proportion zum Ziel kommen können, wenn Sie (vgl. Abschnitt 7.21) auf die Begriffsbestimmung des Prozentsatzes als Verhältnis aus Prozentwert und Grundwert zurückgegangen wären:

$$\frac{0{,}15}{1{,}65} = 0{,}15:1{,}65 = 0{,}0909\ldots \approx 0{,}091 = \frac{9{,}1}{100} = 9{,}1\,\%$$

Sofern es sich um einfache Zahlen handelt und man die Rechnung im Kopf bewältigen kann, ist dieser Weg der bessere.

7.24 Berechnung des Grundwertes

Lehrbeispiel 101

Die Energieerzeugung eines Kraftwerkes stieg im II. Quartal um 90000 kWh *und lag damit um* 3 % *höher als die Energieerzeugung im I. Quartal. Wieviel Kilowattstunden wurden im I. Quartal erzeugt?*

Lösung:

Gegeben: Prozentwert $w = 90000$ Gesucht: Grundwert g
Prozentsatz $p = 3$

$$w:g = p:100$$
$$90000:g = 3:100$$
$$3g = 90000 \cdot 100$$
$$g = \frac{90000 \cdot 100}{3}$$
$$\underline{\underline{g = 3000000}}$$

Antwort: Die Energieerzeugung im I. Quartal betrug 3 Millionen kWh.

7.25 Aufgaben mit vermehrtem und vermindertem Grundwert

Bei den bisherigen Aufgaben war es verhältnismäßig einfach, die Proportion richtig anzusetzen. Die folgenden Aufgaben dagegen erfordern eine gute Vorüberlegung. Stellen Sie sich dabei vor allem zwei Fragen:

1. Welcher Wert ist als Grundwert zu betrachten, d. h., auf welchen Wert bezieht sich der angegebene (oder auch gesuchte) Prozentsatz? Dieser Wert entspricht 100 %.
2. Welcher Prozentsatz entspricht dem gegebenen (oder auch gesuchten) Prozentwert?

Lehrbeispiel 102

Ein Arbeiter erhielt einen Zuschlag von 8 % *zum Grundlohn und damit* 86,40 DM *als Wochenlohn. Wieviel* DM *beträgt der Grundlohn?*

Lösung:

Vorüberlegung: Der Grundwert ist der Wert, auf den sich der angegebene Prozentsatz 8 bezieht, hier also der gesuchte Grundlohn. Dieser entspricht 100 %. Der erhöhte Lohn von 86,40 DM setzt sich aus Grundlohn (≙ 100 %) + Zuschlag (≙ 8 %) zusammen, so daß diesem erhöhten Lohn ein Prozentsatz von $100 + 8 = 108$ entspricht.

Demnach ergibt sich:

Gegeben: $w = 86{,}40$ Gesucht: g

$p = 108$

$$w : g = p : 100$$

$$86{,}40 : g = 108 : 100$$

$$108g = 86{,}40 \cdot 100$$

$$g = \frac{86{,}40 \cdot 100}{108}$$

$$\underline{\underline{g = 80}}$$

Antwort: Der Grundlohn beträgt 80 DM.

Man spricht bei solchen Aufgaben, bei denen der Grundwert um einen bestimmten Prozentwert erhöht (vermindert) wird, vom *vermehrten* (verminderten) Grundwert. Das nächste Lehrbeispiel ist eine Aufgabe mit *vermindertem* Grundwert.

Lehrbeispiel 103

Die zum Versenden elektrischer Glühlampen nötige Verpackung wird mit 12 % *des Bruttogewichts (Gesamtgewichts) veranschlagt. Wie groß ist das Bruttogewicht, wenn das Nettogewicht (Gewicht ohne Verpackung)* 22 kp *beträgt?*

Lösung:

Vorüberlegung: 12 % beziehen sich auf das gesuchte Bruttogewicht. Also ist das Bruttogewicht der Grundwert. Dem verminderten Wert entsprechen 100 % — p %.

	Grundwert (Bruttogewicht)	$\mathrel{\widehat{=}}$ 100 %
minus	Prozentwert (Verpackung)	$\mathrel{\widehat{=}}$ 12 %
	Verminderter Wert (Nettogewicht)	$\mathrel{\widehat{=}}$ 88 %

Gegeben: $w = 22$ Gesucht: g

$p = 88$

$$22 : g = 88 : 100$$

$$\underline{\underline{g = 25}}$$

Antwort: Das Bruttogewicht beträgt 25 kp.

Das nächste Lehrbeispiel zeigt Ihnen Vorüberlegung, Ansatz und Lösung für eine weitere Aufgabe dieser Art.

Lehrbeispiel 104

Ein Betrieb verbrauchte im Januar 22350 t *Kohle. Das sind* 3260 t *mehr als im Dezember. Wie groß ist der prozentuale Mehrverbrauch gegenüber Monat Dezember?*

Lösung:

Vorüberlegung: Hier ist der Prozentsatz gesucht. Er bezieht sich auf den Dezemberverbrauch. Dieser ist also der Grundwert und kann als Differenz zwischen Januarverbrauch und Mehrverbrauch ermittelt werden:

$$22350 \text{ t} - 3260 \text{ t} = 19090 \text{ t}$$

Gegeben: $g = 19090$ Gesucht: p

$w = 3260$

$$3260 : 19090 = p : 100$$

$$\underline{\underline{p = 17{,}1}}$$

Antwort: Der prozentuale Mehrverbrauch im Januar betrug 17,1 %.

Nicht immer kann man nach der Grundbeziehung $w : g = p : 100$ rechnen. Sobald nämlich nicht zwei von den drei Größen w, g und p gegeben sind, kann man die dritte nicht berechnen. Dann muß man durch besondere Überlegungen andere Beziehungen aufstellen, wobei mitunter auch umgekehrte Verhältnisse auftreten können. Wir zeigen Ihnen das an zwei Lehrbeispielen.

Lehrbeispiel 105

Das Gesetz über den Siebenjahrplan sieht bei synthetischen Fasern eine Produktionssteigerung um 481 % *vor. Berechnen Sie die für 1965 geplante Mehrproduktion an synthetischen Fasern (im Vergleich zu 1958), wenn die Planziffer für 1965* 38900 t *beträgt!*

Lösung:

Vorüberlegung: 481 % beziehen sich auf die Produktion von 1958 als Grundwert. Dieser ist aber nicht bekannt.

Die Produktionssteigerung 1958/65 entspricht 481 %; sie ist also der Prozentwert. Auch dieser ist nicht bekannt. Damit entfällt die Möglichkeit, die Grundbeziehung $w:g = p:100$ anzuwenden. Überlegen Sie deshalb weiter:
Wenn Sie die unbekannte Produktionssteigerung mit x t bezeichnen, entsprechen diese 481 %. Andererseits entspricht die Produktion von 1965, die 38900 t beträgt, dem vermehrten Grundwert 100 % + 481 % = 581 %.

Es gilt also:

$$581\,\% \mathrel{\widehat{=}} 38\,900 \text{ t}$$
$$481\,\% \mathrel{\widehat{=}} x \text{ t}$$

Da zwischen Prozentsatz und Prozentwert direkte Proportionalität besteht, können Sie schreiben:

$$581 : 481 = 38\,900 : x$$

$$x = \frac{38\,900 \cdot 481}{581}$$

$$\underline{\underline{x \approx 32\,200}}$$

Antwort: Die für 1965 geplante Mehrproduktion beträgt 32200 t synthetische Fasern (1958 ≙ 6700 t; 1965 ≙ 38900 t).

Lehrbeispiel 106

Die Reparaturkolonne einer MTS konnte die Norm der Reparaturzeit für einen Binder von 132 *Stunden auf* 120 *Stunden senken. Mit wieviel Prozent wurde die Norm erfüllt?*

Lösung:

Gegeben: $g = 132$ Gesucht: $p = x$
$w = 120$

$$132 \text{ h} = 100\,\%$$
$$120 \text{ h} = x\,\%$$

Beachten Sie, daß hier offensichtlich indirekte Proportionalität (Produktgleichheit) vorliegt, da einer geringeren Stundenanzahl ein höherer Prozentsatz der Normerfüllung entspricht:

Sie schreiben:

$$132 \cdot 100 = 120 \cdot x$$

$$x = \frac{132 \cdot 100}{120}$$

$$\underline{\underline{x = 110}}$$

Antwort: Die Norm wurde mit 110 % erfüllt.

7.3 Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist im Prinzip eine Prozentrechnung. Aus diesem Grunde kann die Zinsrechnung wie die Prozentrechnung mit Hilfe von Proportionen durchgeführt werden.

Es entsprechen einander

in der Prozentrechnung	in der Zinsrechnung
Grundwert g	Grundwert g
Prozentwert w	Zinsen z
Prozentsatz p	Zinsfuß (Zinssatz) p

Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, bezieht sich der Zinsfuß immer auf ein Jahr.

7.31 Berechnung der Jahreszinsen

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Jahreszinsen.

Lehrbeispiel 107

Berechnen Sie die Jahreszinsen von 6000 DM *bei* 3 % *Zinsen!*

Lösung:

Gegeben: $g = 6000$, $p = 3$ Gesucht: z

Nach der üblichen Prozentbeziehung ergibt sich:

$$z : 6000 = 3 : 100$$

$$z = \frac{6000 \cdot 3}{100}$$

$$\underline{\underline{z = 180}}$$

Antwort: Die Jahreszinsen betragen 180 DM.

Die Prozentbeziehung trat uns hierbei in der Form $z:g = p:100$ entgegen. Bei Berechnung der Jahreszinsen muß sie stets nach z aufgelöst werden. Das führt dann auf die Formel zur Berechnung der

Jahreszinsen $$\boxed{z = \frac{g \cdot p}{100}} \qquad (11)$$

7.32 Berechnung der Tageszinsen (allgemeine Zinsformel)

Für die Praxis von größerer Bedeutung ist die Berechnung der Tageszinsen, d. h. also der Zinsen, die sich für einen kleineren Zeitraum als ein Jahr ergeben. In der Zinsrechnung rechnet man allgemein das Jahr zu 360 Tagen. Die Formel für die Berechnung der Tageszinsen erhalten Sie aus der Jahreszinsformel durch folgende Überlegung:

Wenn für 1 Jahr, d. h. 360 Tage, $\frac{g \cdot p}{100}$ DM Zinsen gezahlt werden, entfällt auf einen anderen Zeitraum ein entsprechend größerer oder kleinerer Betrag. Mit anderen

Worten heißt das, daß zwischen der Zinssumme und der Zinszeit Proportionalität besteht:

Nennen wir den für t Tage gezahlten Zinsbetrag z DM, so gilt:

$$z : \frac{g \cdot p}{100} = t : 360$$

Durch Auflösen nach z ergibt sich die Formel für die

Tageszinsen $$\boxed{z = \frac{g \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}} \qquad (12)$$

Wenn Sie in dieser Formel $t = 360$ setzen, kommen Sie natürlich wieder auf die Formel für die Jahreszinsen.
Aus dieser Formel, der sogenannten *allgemeinen Zinsformel,* können die Formeln für die Berechnung des Grundwertes, des Zinsfußes und der Zeit gewonnen werden.

Grundwert $$g = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$$

Zinsfuß $$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{g \cdot t}$$

Zeit $$t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{g \cdot p}$$

Lehrbeispiel 108

Es sind die Zinsen für 279 DM *in* 50 *Tagen bei einem Zinssatz* $p = 3$ *zu berechnen!*

Lösung: $$z = \frac{279 \cdot 3 \cdot 50}{100 \cdot 360} = \underline{\underline{1{,}16}}$$

Antwort: Die Zinsen betragen 1,16 DM.

Zusammenfassung

Die *Prozentrechnung* fußt auf dem Begriff des geraden Verhältnisses. Zwischen Prozentwert w und Grundwert g besteht Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{p}{100}$; p heißt der Prozentsatz. Alle einfachen Prozentaufgaben können deshalb mit der Proportion

$$w : g = p : 100$$

gelöst werden.
In der Praxis treten häufig Aufgaben der Prozentrechnung auf, bei denen der Grundwert um den Prozentwert vermehrt oder vermindert wird. Diese bezeichnet man als Aufgaben mit vermehrtem oder vermindertem Grundwert.
Bei diesen Aufgaben sind zwei Fragen wesentlich:

1. Welcher Wert ist der Grundwert, d. h., auf welchen Wert bezieht sich der Prozentsatz?
2. Welcher Wert entspricht diesem Prozentsatz?

Daneben gibt es auch zusammengesetzte Aufgaben, in denen der Prozentbegriff vorkommt. Diese können nicht allein mit der Grundbeziehung $w:g = p:100$ gelöst werden, sondern erfordern besondere Vorüberlegung.
Die *Zinsrechnung* ist im Prinzip eine Prozentrechnung. Der Prozentwert w bedeutet dabei die Zinsen z, der Prozentsatz p den Zinsfuß. Die Grundbeziehung für Jahreszinsen lautet

$$z:g = p:100.$$

Die allgemeine Zinsformel (für Tageszinsen) lautet

$$z = \frac{g \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360},$$

worin t die Anzahl der Zinstage ist.

Übungen

214. Wieviel Prozent sind

a) der 5., 3., 8. *und* 12. *Teil,*

b) das Doppelte, 3*fache,* $1^1/_2$*fache vom Grundwert?*

215. Ein Stahldraht hat sich bei einer Beanspruchung auf Zug um 8 mm *ausgedehnt. Das sind* 0,2 % *der ursprünglichen Länge. Wie groß ist diese?*

216. Das Gesetz über den Siebenjahrplan sieht eine umfangreiche Steigerung der Produktion vor. Unter anderem ist eine Steigerung vorgesehen bei

Roheisen	*auf* 121 %	*1958:*	1775000 t
Treibstoffen	*auf* 207 %		2030000 t
Personenkraftwagen	*auf* 281 %		38400 *Stück*
Dederonseidengewebe	*auf* 703 %		4,3 Mill. m².

Berechnen Sie, wieviel von diesen Erzeugnissen 1965 hergestellt werden!

217. Dem statistischen Jahrbuch der DDR ist folgende aufschlußreiche Gegenüberstellung entnommen, die die soziale Herkunft der Abgeordneten der Volkskammer der DDR und die soziale Stellung der Abgeordneten des westdeutschen Bundestages zeigt.

	Volkskammer	*Bundestag*
Arbeiter	244	16
werktätige Bauern	31	21
Angestellte	51	52
Handwerker	34	24
Intelligenz, freie Berufe	38	140
Unternehmer	2	71
Großgrundbesitzer, Großbauern	—	33
Beamte, Offiziere	—	73
Funktionäre der Parteien und Organisationen	—	85

Berechnen Sie den prozentualen Anteil der einzelnen Gruppen!

218. *Eine Transportkolonne beförderte* 330 *Kisten und übertraf damit die Norm um* 32 %. *Wie hoch liegt die Norm?*

219. *Ein Ehepaar hatte ein gemeinsames Einkommen von* 720 DM *netto monatlich. Daran war die Ehefrau mit* 38,75 % *beteiligt. Nach einer Qualifizierung verdient die Ehefrau so viel, daß ihr Anteil (bei gleichgebliebenem Lohn des Mannes) nunmehr* 51 % *des gemeinsamen Verdienstes ausmacht. Wie hoch liegt nun das Gesamteinkommen des Ehepaares?*

220. *In einem Betrieb werden* 60 % *aller Glühlampen durch Leuchtstoffröhren ersetzt, deren Stromkosten sich bei gleicher Leistung nur auf* 30 % *der Kosten der bisherigen Leuchten belaufen. Wie groß ist die Einsparung a) in* DM, *b) in Prozent, wenn die Stromkosten vor der Umstellung monatlich* 280 DM *betrugen?*

221. *Wieviel betragen die jährlichen Zinsen von* 380 DM *bei einem Zinsfuß von* 2,5 %?

222. *Wieviel Zinsen bringen* 4200 DM *zu* $3\frac{1}{2}$ % *in* 3 *Monaten?*

223. *Für welches Darlehen zahlt man zu* 4 % *monatlich* 34,40 DM *Zinsen?*

224. *Nach welcher Zeit wurde ein Darlehen von* 6400 DM *zurückgezahlt, wenn der zurückgezahlte Betrag bei* 4 % *Zinsen* 6496 DM *betrug?*

225. *Ein Betrieb hat auf eine Steuerschuld von* 1873,60 DM, *die ihm für* 53 *Tage gestundet worden ist,* 5 % *Zinsen zu zahlen. Welcher Zinsbetrag ist zu leisten?*

7.4 Aufgaben (Übungen 226 bis 289) [Ü]

226. *Berechnen Sie x aus den folgenden Proportionen!*

a) $4:3 = (63 - x):x$ *b)* $(27 + x):x = 8:5$

c) $36:12 = (120 + 11x):7x$ *d)* $38:x = 16:(x - 33)$

e) $\frac{(a-b)^2}{ac}:x = \frac{a^2-b^2}{ab}:\frac{a+b}{a-b}$

227. *Um* 12 *Schweine zu mästen, waren außer anderen Futtermitteln im vergangenen Jahr* 2700 kg *Kartoffeln nötig. In diesem Jahr will die LPG* 160 *Schweine mästen. Wie groß wird der Verbrauch an Kartoffeln sein?*

228. *In einem Großkraftwerk arbeiten*

6 *Turbinen mit je* 50 MW

und 10 *Turbinen mit je* 100 MW

Leistung. Zu jeder Turbine gehört ein Kessel, der 220 t *bzw.* 350 t *Dampf je Stunde liefert.*

a) Wieviel Dampf ist bei jeder Turbinengröße je MW *stündlich erforderlich?*
*b) Wieviel Kubikmeter Wasser verwandeln die Kessel täglich in Dampf (*1 t *Dampf* $\hat{=}$ 1 m³ *Wasser)?*

c) Wieviel Tonnen Kohle erfordert eine Tonne Dampf? (Zur Erzeugung von 350 t *Dampf werden* 160 t *Kohle gebraucht.)*
d) Wieviel Tonnen Kohle werden täglich gebraucht?

229. Der Spannungsverlust in einer Leitung beträgt 10 V. *Um wieviel Volt steigt der Spannungsverlust, wenn sich durch Temperatursteigerung um* 20 grd *die spezifischen Widerstände im Verhältnis* 250:269 *ändern? (Die spezifischen Widerstände verhalten sich genauso wie die Spannungsverluste.)*

230. Der Widerstand einer 5,0 km *langen Freileitung beträgt* 1,1 Ω. *Wie lang ist eine aus gleichem Material hergestellte Freileitung mit gleichem Durchmesser, deren Widerstand* 0,88 Ω *beträgt?*

231. 140,0 kg *Ammonsulfat enthalten* 28,70 kg *Stickstoff. Wieviel Kilogramm Stickstoff enthalten* 356,0 kg *Ammonsulfat?*

232. Wieviel DM *sind zu zahlen für*
a) 728 hfl *(niederländische Gulden),* 100 hfl ≙ 109,75 DM;
b) 2560 $ *(Dollar),* 1 $ ≙ 4,18 DM;
c) 345 Kčs *(tschechoslowakische Kronen),* 100 Kčs ≙ 32,76 DM*?*

233. a) Wieviel Rubel erhalten Sie für 1780 DM*?* 1 Rbl ≙ 3,88 DM.
b) Wieviel Lire erhalten Sie für 150 DM*?* 1000 *Lire* ≙ 6,72 DM.
c) Welcher Kurs war festgesetzt, wenn für 12455 Nfrs *(neue französische Francs)* 10337,65 DM *gezahlt wurden (bezogen auf* 100 *Einheiten der ausländischen Währung)?*

234. a) Wieviel Yuan[1]) *erhalten Sie für* 350 DM*?* 100 Yuan ≙ 230,20 DM.
b) Wieviel Forint[2]) *erhalten Sie für* 285 DM*?* 100 Ft ≙ 26,79 DM.

235. Für zwei gleichartige Kesselfeuerungen reicht eine bestimmte Kohlenmenge 36 *Tage. Wieviel Tage reicht dieselbe Kohlenmenge, wenn drei dieser Kesselfeuerungen in gleichem Maße beheizt werden?*

236. Eine treibende Riemenscheibe hat einen Durchmesser von 165 mm *und eine Drehzahl von* 80 *Umdrehungen je Minute.*
Wie oft dreht sich dann die getriebene Riemenscheibe von 440 mm *Durchmesser je Minute (Riemenschlupf bleibe vernachlässigt)?*

237. 30 *Einzelbauern besaßen* 240 ha *Getreideland in Streulage. Sie ließen das Getreide von der MTS mit dem Mähdrescher schneiden. Eine Maschine schaffte je Tag* $2^1/_2$ *bis* 3 ha.
Jetzt sind die Bauern zur LPG zusammengeschlossen und lassen wieder 240 ha *mähen. Auf den großen Flächen schafft eine Maschine* 9 *bis* 10 ha *an einem Tage. Zwei Mähdrescher werden jeweils eingesetzt.*
a) Wie lange dauerte die Getreideernte in Streulage?
b) Wie lange braucht man auf den großen Flächen?

---
[1]) Chinesische Währung.
[2]) Ungarische Währung.

238. *In Sebnitz wurde ein Spezialglas entwickelt, das bei geringem Gewicht größere Zugfestigkeit als Stahl besitzt und sich deshalb besonders für den Flugzeugbau eignet. Spezialstahl (Aero 70) hat eine Zugfestigkeit von* 7000 kp/cm², *dieses Glas* 8000 kp/cm² *bei einer Dichte von* 2 g/cm³. *Der Stahl dagegen hat eine Dichte von* 7,85 g/cm³.

Ein auf Zug beanspruchter Stahlstab im Flugzeug habe einen Querschnitt von 2,8 cm² bei *einer Länge von* 1800 mm.

a) *Berechnen Sie den Querschnitt des Stabes von gleicher Festigkeit aus Spezialglas!*

b) *Berechnen Sie das Gewichtsverhältnis der beiden Stäbe!*

239. *Die Mitglieder einer LPG entwässern eine Wiese.* 16 *Mann haben den Graben in* 20 h *ausgehoben. Es soll noch ein gleicher Graben gezogen werden. Diesmal stehen nur* 12 *Mann zur Verfügung. Wieviel Stunden brauchen sie?*

240. *Eine Feldbaubrigade von* 7 *Personen vollendet die Pflegearbeiten eines Kartoffelfeldes in* $22^1/_2$ h. *Die Brigade wird um* 2 *Mann verstärkt.*

Wieviel Stunden würde sie jetzt zur Bearbeitung eines gleichen Feldes brauchen?

241. *In einem Dorfe waren in der Landwirtschaft beschäftigt:*
32 *Genossenschafter der LPG, die eine Nutzfläche von* 141,41 ha *hat, und* 86 *Personen in* 50 *bäuerlichen Einzelbetrieben mit* 153,29 ha.

a) *Wieviel Beschäftigte kommen in jedem Falle auf je* 10 ha*?*

b) *Nachdem das Dorf vollgenossenschaftlich geworden ist, rechnet man mit* 3,5 *Beschäftigten auf je* 10 ha. *Wieviel Arbeitskräfte braucht man, und wieviel werden für andere landwirtschaftliche Arbeiten frei, da die Großraumwirtschaft nun den verstärkten Einsatz von Großmaschinen möglich macht?*

242. *Eine LPG will* 58,5 dt *Roggen einsacken. Der Einheitssack nach der Standardisierung* (60 cm · 112 cm*) faßt* 50 kg *Mehl (Volumenverpackung).*

Wieviel solcher Säcke braucht die LPG, wenn die Dichten von Mehl und Roggen sich wie 10:13 *verhalten?*

243. *Bei Einschränkung der Bierflaschenarten auf eine Type würden jährlich* 6251 t *Glas eingespart.* 120 t *Glas kosten* 22800 DM. *Wieviel* DM *würde die Einsparung betragen?*

244. *In einer MTS ist als Arbeitsnorm für eine* 3 m *breite Düngerstreumaschine eine Leistung von* 6 ha *in* 8 h *festgesetzt.*

In welcher Zeit wird eine Fläche von 4,95 ha *durch eine* 2,75 m *breite Maschine bestreut?*

245. 2 m *Flachstahl von* 100 mm *Breite und* 14 mm *Dicke haben eine Masse von* 22,0 kg. *Welche Masse haben* 25 m *Flachstahl der gleichen Art von* 125 mm *Breite und* 12 mm *Dicke?*

246. *Die Angehörigen eines VEG verpflichteten sich, die gesamte Rübenernte in* 27 *Tagen einzubringen. Es arbeiten zunächst* 18 *Arbeiter* 11 *Tage lang täglich* $7^1/_2$ h. *Da in dieser Zeit erst* $^1/_3$ *der Arbeit geleistet wurde, arbeiten von da an* 24 *Arbeiter täglich* $8^1/_4$ h.

Wird die Ernte in der vereinbarten Zeit eingebracht?

247. *In einer Abpackerei werden von* 6 *Arbeitskräften bei einer täglichen Arbeitszeit von* 4 h 800 *Einheiten abgepackt.*

Wieviel Arbeitskräfte müssen noch eingesetzt werden, wenn bei einer täglichen Arbeitszeit von 8 h 2400 *Einheiten je Tag geschafft werden sollen?*

248. *In einem chemischen Großbetrieb werden bei ununterbrochenem Arbeitsablauf (*24 h *am Tag) in sieben gleichartigen Reaktionsgefäßen* 350 t *Produkt am Tag hergestellt.*

a) *Welche Menge würde in zwölf derartigen Reaktionsgefäßen je Stunde produziert werden können?*

b) *Wieviel würde in acht Gefäßen je Stunde produziert werden, wenn gleichzeitig die Ausbeute um* 20 % *steigt?*

249. *Ein gegossener Vierkantstab aus Aluminium war nach dem Erkalten* 9 mm *kürzer, das sind* 1,79 % *Schwindmaß. Wie lang war*

a) *die Modellänge des Stabes,* b) *seine Länge nach dem Erkalten?*

250. *Eine Welle hat vor der Bearbeitung eine Masse von* 72 kg *und nach der Bearbeitung von* 60 kg. *Wieviel Prozent beträgt der Spanverlust beim Drehen, bezogen auf das Fertiggewicht?*

251. *Die Braunkohlenförderung der Welt betrug 1956 rund* 567,5 *Millionen Tonnen. Der Anteil der DDR daran war* 205,9 *Millionen Tonnen.*

Wie hoch war der prozentuale Anteil der DDR?

252. *Falzziegel verursachen* 245 % *der Kosten gewöhnlicher Ziegelsteine. Gewöhnliche Ziegelsteine kosten je* 1000 *Stück* 42,90 DM.

Wieviel kosten 1000 *Falzziegel?*

253. *Ein Raummeter frisches Pappelholz hat vor dem Trocknen eine Masse von* 800 kg, *nach dem Trocknen von* 440 kg. *Wie hoch ist der Trocknungsverlust in Prozenten der ursprünglichen Menge?*

254. *Bei der Analyse einer Legierung wird festgestellt, daß sie aus* 8 kg *Zinn und* 12 kg *Blei besteht. Drücken Sie die Zusammensetzung der Legierung in Prozenten aus!*

255. *Eine Schlosserbrigade montiert je Woche (*45 *Stunden)* 8 *Kreiselpumpen. Durch Verstärkung der Brigade auf* 150 % *ihrer ursprünglichen Mitarbeiterzahl und durch gleichzeitige Steigerung der Arbeitsproduktivität um* 25 % *wurde die Produktion wesentlich erhöht.*

Auf welchen wöchentlichen Stand wurde damit die Montage der Kreiselpumpen gebracht?

256. *1958 waren an den Fachschulen der DDR* 20575 *Fernschüler immatrikuliert. Außerdem wies die Statistik aus, daß* 81,31 % *aller Studierenden im Direkt- und Abendstudium standen. Wieviel Schüler waren insgesamt eingeschrieben?*

257. *In einem Betrieb wurden im Laufe eines Jahres* 270 *Arbeiter und* 80 *Angestellte neu eingestellt. Dadurch erhöhte sich die Belegschaftsstärke um insgesamt* 28 %. *Wie groß war die Gesamtzahl der Arbeiter und Angestellten zu Beginn des Jahres?*

258. *Ein Kraftfahrzeugmotor hat eine indizierte, d. h. aufgenommene Leistung von* 38 PS. *Der mechanische Wirkungsgrad (Verhältnis der effektiven oder tatsächlich abgegebenen zur indizierten Leistung) beträgt* 75 %.

Wie groß ist die verbleibende effektive Leistung?

259. *Ein Aluminiumstab von* 1,650 m *Länge dehnt sich bei* 100 grd *Temperaturerhöhung um* 4 mm *aus. Wieviel Prozent sind das?*

260. *Die Bruttoproduktion eines VEB betrug* 72850 *TDM im Jahre 1957. Sie sollte im Jahre 1958 um* 3,2 % *gegenüber 1957 und im Jahre 1959 um* 4,1 % *gegenüber 1958 erhöht werden. Tatsächlich wurden 1959 Werte in Höhe von* 78265 *TDM geschaffen. Überprüfen Sie, wie das vorgesehene Ziel erreicht wurde, und stellen Sie fest, auf wieviel Prozent die Produktion 1959 im Vergleich zu 1957 stieg!*

261. *1956 betrug die Elektroenergie-Erzeugung in Europa* 670739 Mill. kWh. *Daran sind im einzelnen beteiligt:*

UdSSR	192000 Millionen kWh
Großbritannien	101181 Millionen kWh
Westdeutschland	84267 Millionen kWh
Frankreich	53829 Millionen kWh
Italien	40611 Millionen kWh
DDR	31182 Millionen kWh
Schweden	26631 Millionen kWh
Norwegen	23749 Millionen kWh

Berechnen Sie den prozentualen Anteil der einzelnen Länder an der Erzeugung der Elektroenergie!

262. *Die Erzeugung von synthetischen Fasern betrug 1956 in der DDR* 4500 t *und damit* 5,8 % *der europäischen Produktion. Berechnen Sie, wieviel Tonnen in Europa hergestellt wurden!*

263. *Im Gesetz über den Siebenjahrplan ist festgelegt, daß die Erzeugung von Elektroenergie auf* 180,5 % *gegenüber 1958 (*34,9 Milliarden kWh*) gesteigert werden soll. Berechnen Sie die 1965 zu erzeugende Anzahl Kilowattstunden!*

264. *Die Reparaturkolonne einer MTS konnte die Norm der Reparaturzeit eines Binders von* 140 *Stunden auf* 119 *Stunden senken.*

a) Wieviel Prozent betrug die Zeiteinsparung?

b) Mit wieviel Prozent wurde die Norm übererfüllt?

265. *Ein Traktorist leistete in einer Schicht* 2,94 ha. *Er übertraf damit seine Norm um* $22^1/_2$ %. *Sein Schichtlohn beträgt bei* 100 %*iger Normerfüllung* 13,60 DM.

a) *Wieviel Hektar beträgt die Schichtnorm?*

b) *Wie hoch war der Lohn des Traktoristen (bei proportionaler Steigerung) an diesem Tage?*

266. *Ein örtlicher volkseigener Betrieb hat die Selbstkosten eines Produktes mit* 2370,30 DM *je Stück geplant und wird damit die vorgesehene Selbstkostensenkung von* 7,2 % *gegenüber dem Vorjahr erreichen.*

a) *Wie hoch waren die Selbstkosten im Vorjahr?*

b) *Um welchen Betrag je Produkt sollen sie in diesem Jahr gesenkt werden?*

267. *Im III. Quartal erzielte eine HO-Verkaufsstelle einen Umsatz von* 136800 DM. *Das sind* 20 % *mehr als im II. Quartal.*

Der Umsatz im I. Quartal war um 12 % *niedriger als im II. Quartal und der Umsatz im IV. Quartal* $8^1/_3$ % *höher als im III. Quartal.*

Wieviel DM *betrug der Umsatz in den einzelnen Quartalen?*

268. *Die erste kosmische Geschwindigkeit beträgt* $v_1 = 7{,}92$ km/s. *Wie groß sind die zweite bzw. dritte kosmische Geschwindigkeit, wenn sie gegenüber der ersten um etwa* 41,5 % *bzw.* 111 % *größer sind?*

269. *Zur Erwärmung von* 300 *l* *Wasser von* 0 °C *auf* 60 °C *in drei Stunden wird die Leistung einer elektrischen Anlage zu* 85 % *ausgenützt. Wieviel Liter Wasser können in fünf Stunden von* 0 °C *auf* 80 °C *erwärmt werden, wenn die Anlage jetzt nur zu* 80 % *ausgenutzt wird?*

270. *Bei einer Reaktion werden täglich* 54 kg 14 %*ige Natronlauge verbraucht. Welche Menge einer* 18 %*igen Natronlauge ist an Stelle der* 14 %*igen in einem Monat (*30 *Tage) notwendig?*

271. *Wieviel Kilogramm Chlor kann man aus* 585 kg NaCl, *das* 2 % *Verunreinigungen enthält, durch Elektrolyse gewinnen, wenn die Ausbeute* 90 % *beträgt? (Das Atomgewicht von* Na *beträgt* 23, *das von* Cl 35,5.*)*

272. *Wieviel Gramm reine Schwefelsäure (*H_2SO_4*) sind in* 520 g 16 %*iger Schwefelsäure enthalten?*

273. *Eine Kalilauge sei* 24 %*ig. Wieviel Kaliumhydroxyd (*KOH*) enthalten* 70 *t dieser Lauge?*

274. *Für eine chemische Reaktion werden* 400 g 85 %*ige Schwefelsäure benötigt. Es steht aber nur eine* 50 %*ige Schwefelsäure zur Verfügung.*

Wieviel Gramm müssen davon genommen werden?

275. *Im Gesetz über den Siebenjahrplan ist vorgesehen, die Zementproduktion von* 3558000 t *(1958) auf* 7975000 t *(1965) zu steigern. Berechnen Sie die prozentuale Steigerung!*

276. *Die Hallesche Sole ist* 21,6 %*ig. Wieviel Kilogramm Salz gewinnt man aus* 12500 kg *dieser Sole?*

277. *Kunstseide darf bei Lieferung einen maximalen Feuchtigkeitsgehalt von* 14 % *aufweisen. Wieviel Feuchtigkeit enthalten* 15,4 t *Kunstseide, deren Feuchtigkeitsgehalt mit* 13 % *gemessen wurde?*

278. *Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität gesteigert werden, wenn bei einer Arbeitszeitverkürzung von* 45 *auf* 40 *Wochenstunden bei gleichem Lohn der gleiche Produktionsausstoß erreicht werden soll?*

279. *Die Gesamteinnahmen des Staatshaushaltes 1960 sind mit* 50808,9 Mill. DM *geplant. Davon betragen die Einnahmen aus dem volkseigenen Sektor* 64 %. *Wieviel* DM *entfallen auf die Einnahmen aus dem volkseigenen Sektor sowie aus dem genossenschaftlichen und privaten Sektor?*

280. *In der volkseigenen Industrie wird im Siebenjahrplan bis 1965 eine Selbstkostensenkung von* 20 % *gegenüber 1958 angestrebt.*
Ein Industriebetrieb wies 1958 720536 DM *Selbstkosten auf. Wie hoch werden die Selbstkosten voraussichtlich 1965 sein?*

281. *1959 wurden in der DDR für Volksbildung, Wissenschaft, Kultur, Gesundheitswesen und Sozialwesen* 506 DM *je Kopf der Bevölkerung aufgewendet. Im Jahre 1960 werden die Aufwendungen* 545 DM *je Bürger betragen. Um wieviel Prozent wurden die Aufwendungen erhöht?*

282. *Für die Finanzierung des Wohnungsbaues sind im Jahre 1960* 2675,2 Mill. DM *vorgesehen. Davon werden* 53,9 % *aus Kreditmitteln und* 640,3 Mill. DM *aus Obligationen aufgebracht. Wieviel* DM *müssen aus sonstigen Finanzierungsquellen (Eigenleistungen der Bauwilligen, NAW-Leistungen, Zuwendungen der örtlichen Organe usw.) aufgebracht werden?*

283. *Eine Genossenschaft hatte die auf ihrem Geschäftshaus ruhende Hypothek von* 31600 DM *mit* $5^3/_4$ % *verzinst. Nach Herabsetzung des Zinsfußes zahlt sie vierteljährlich* 118,50 DM *Zinsen weniger als bisher. Welches ist der neue Zinsfuß?*

284. *Einem Betrieb ist eine Steuerschuld von* 2435 DM 70 *Tage bei* 5 % *Zinsen gestundet worden. Berechnen Sie den Zinszuschlag!*

285. *Wieviel Zinsen bringen*

a) 7600 DM *zu* 3,5 % *in* $^3/_4$ *Jahr,*
b) 6300 DM *zu* 3 % *in* 135 *Tagen?*

286. *Welcher Grundwert war zu verzinsen, wenn die Zinsen*

a) für 51 *Tage bei* 3 % 37,11 DM,
b) für 5 *Monate bei* $3^1/_2$ % 10,05 DM,
c) für 7 *Monate und* 13 *Tage bei* 5 % 27,75 DM *betragen?*

287. Wie hoch war der Zinsfuß, wenn bei
a) 5782 DM *für* 36 *Tage* 28,91 DM *Zinsen,*
b) 1630 DM *für* 132 *Tage* 20,92 DM *Zinsen,*
c) 1120 DM *für* 3 *Monate* 12,60 DM *Zinsen*
gezahlt werden mußten?

288. Berechnen Sie die Zeit der Verzinsung, wenn für
a) 8873 DM *zu* 4 % 23,66 DM *Zinsen,*
b) 608 DM *zu* $3^3/_4$ % 5,70 DM *Zinsen,*
c) 1215 DM *zu* 5 % 10,63 DM *Zinsen*
gezahlt werden mußten!

289. Welches Guthaben bringt, zu 4 % *verzinst, in einem Jahr dieselben Zinsen wie* 6000 DM *zu* 3 %*?*

[17]

8 Graphische Darstellung

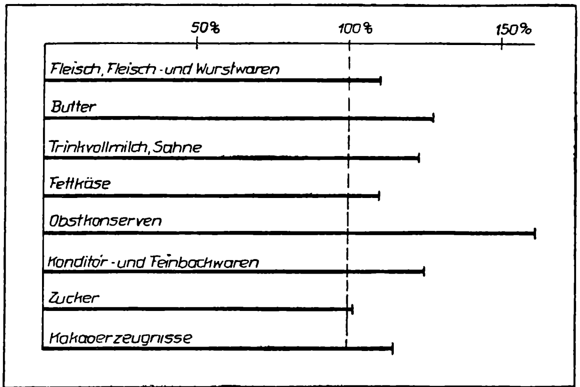
Wir unterbrechen mit diesem Abschnitt die Behandlung der Gleichungen durch einige Betrachtungen über die graphische (d. h. zeichnerische) Darstellung. Das Studium dieses Abschnittes wird Ihnen das Verständnis des nachfolgenden Stoffes sehr erleichtern; außerdem sind graphische Darstellungen in Technik und Wirtschaft von großer Bedeutung.

8.1 Diagramme mit einer Leiter

In der Presse lesen Sie häufig Rechenschaftsberichte unserer zentralen bzw. örtlichen Regierungsorgane über den Stand der Erfüllung unserer Wirtschaftspläne. Diese Berichte sind meist in Form von statistischen Übersichten gegeben. So wurde u. a. im Bericht über den Volkswirtschaftsplan 1959 (ND v. 7. 2. 60) folgender Überblick über die Steigerung des Verbrauches an einigen wichtigen Nahrungsmitteln in der DDR veröffentlicht.

Nahrungsmittel	Steigerung des Verbrauchs gegenüber 1958 auf %
Fleisch, Fleisch- und Wurstwaren	111
Butter	128
Trinkvollmilch, Sahne	123
Fettkäse	111
Obstkonserven	162
Konditor- und Feinbackwaren	125
Zucker	102
Kakaoerzeugnisse	115

Wollen Sie wissen, bei welchem Erzeugnis die größte, bei welchem die geringste Steigerung zu verzeichnen ist, können Sie diese Frage schnell anhand des Diagramms in Bild 11 beantworten.



Steigerung des Verbrauchs an einigen Nahrungsmitteln (1958-1959). - Verbrauch von 1958 ≙ 100 %

Bild 11

Hier finden Sie die Angaben der Tabelle in graphischer Darstellung, und zwar werden die Prozentsätze durch die Längen von Strecken veranschaulicht. Für 100 % wurde eine bestimmte Länge angenommen, die anderen Prozentsätze sind in entsprechenden Längen aufgezeichnet. Sie können mit einem Blick übersehen, welche Strecke die kürzeste und welche die längste ist. Der Vorteil der graphischen Darstellung liegt in der Anschaulichkeit, die es gestattet, Zahlenwerte schnell und ohne Mühe zu übersehen und zu vergleichen. Ein Nachteil, der allerdings meist nicht sehr ins Gewicht fällt, ist, daß die Werte nur mit begrenzter Genauigkeit angegeben bzw. abgelesen werden können.

Das gezeigte Diagramm ist ein **Vergleichsdiagramm**, denn es dient zum Vergleichen verschiedener Zahlenwerte. In diesem Beispiel werden, wie dies in der Praxis sehr häufig geschieht, Prozentsätze verglichen. In derselben Weise können jedoch auch die Werte anderer vergleichbarer Größen zeichnerisch dargestellt werden. Hierfür kommen besonders die Ergebnisse irgendwelcher Zählungen, Wägungen, Messungen usw. in Frage.

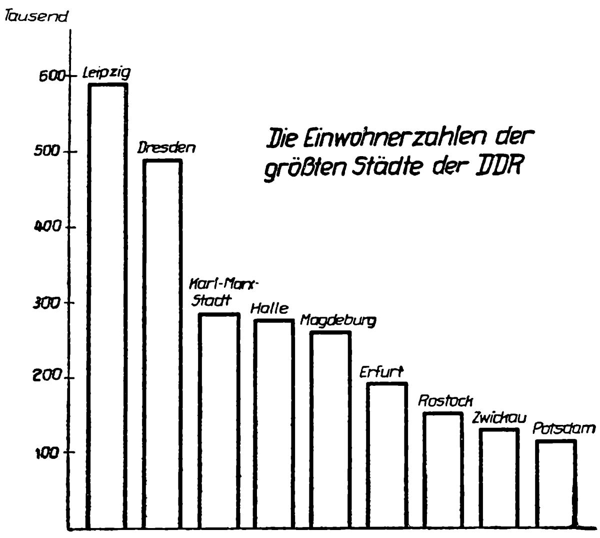


Bild 12

In Bild 12 werden z. B. die Einwohnerzahlen der größten Städte der DDR, in Bild 13 die Ausgaben für die Armeen in einigen großen Staaten graphisch dargestellt. Dieses Diagramm bringt überzeugend die Friedensliebe der UdSSR zum Ausdruck, die ihre Rüstungsausgaben auf ein unbedingt notwendiges Minimum beschränkt hat.

Das in Bild 12 gezeichnete Diagramm wird als *Streifen-*

diagramm bezeichnet. (Das mitunter benutzte Wort „Säulen“diagramm ist falsch.) Die Länge des jeweiligen Streifens ist ein Maß für die Einwohnerzahl der betreffenden Stadt. Voraussetzung dabei ist, daß die Streifen alle die gleiche Breite haben. Bild 11 dagegen wird als *Streckendiagramm* bezeichnet.
Bild 13 ist ein Streckendiagramm besonderer Art. Hier sind die einzelnen Strecken aufeinanderliegend auf der Prozentskala abgetragen. Solche Diagramme benötigen weniger Platz als die Diagramme in der Art von Bild 11 und Bild 12; dafür sind sie

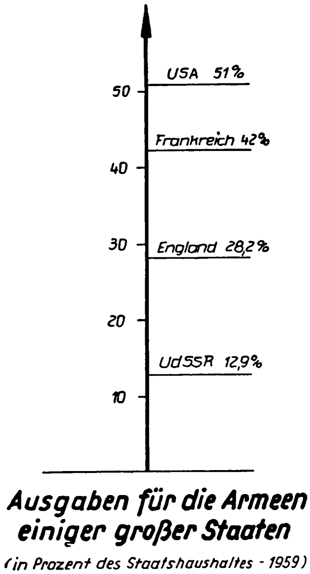


Bild 13

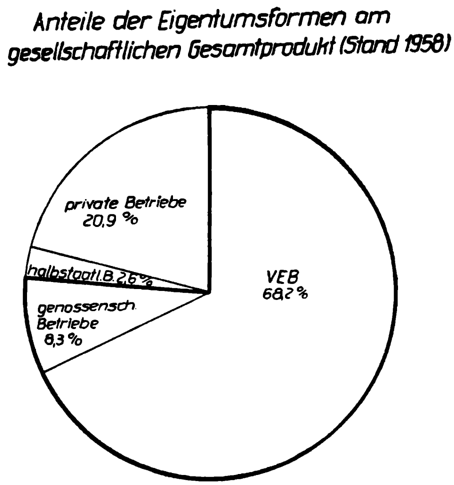


Bild 14

meist weniger übersichtlich. Die Bilder 11, 12 und 13 zeigen also Diagramme gleicher Art: In allen drei Diagrammen werden die Zahlen durch *Längen* dargestellt.
Neben der Länge von Strecken verwendet man gelegentlich auch den Inhalt von Flächenstücken bzw. den Rauminhalt von Körpern zur graphischen Darstellung von Zahlenangaben. Die Form des betreffenden Flächenstückes bzw. Körpers kann dabei frei gewählt werden, muß aber selbstverständlich innerhalb ein und desselben Diagramms beibehalten werden. Meist verwendet man als Flächen Quadrate oder Rechtecke bzw. als Körper, Würfel oder Quader (Säulen). Ein bestimmter Flächeninhalt bzw. ein bestimmtes Volumen (etwa 1 cm^2 bzw. 1 cm^3) wird dabei als Einheit der Darstellung zugrunde gelegt. Im übrigen wird ebenso verfahren wie bei den zuvor erläuterten Streckendiagrammen. Doch sind solche Flächen- bzw. Körperdiagramme wenig anschaulich. Wir wollen deshalb auf diese Diagramme nicht näher eingehen und empfehlen auch Ihnen, diese Art der graphischen Darstellung möglichst nicht anzuwenden. Doch lohnt es sich, das sogenannte *Kreisdiagramm* eingehender zu betrachten (Bild 14).
Mit Hilfe eines solchen Kreisdiagramms läßt sich die Aufteilung eines Ganzen (100 %) in verschiedene Teile (x %) besonders gut veranschaulichen.

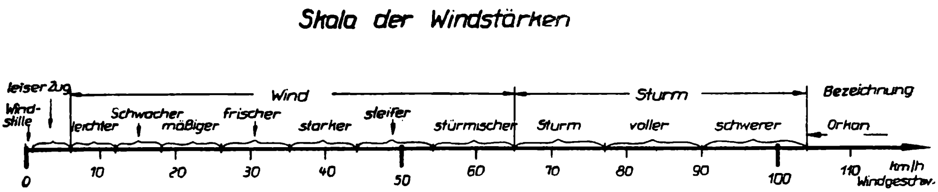


Bild 15

Der Vollkreis entspricht dem Ganzen, und die Teile werden in Form von Kreisausschnitten (Sektoren) dargestellt. Diese Sektoren sind Flächenstücke, deren Flächeninhalte die jeweiligen Bruchteile des Ganzen angeben. Es liegt also auch hier ein Flächendiagramm vor. Trotzdem ist ein solches Diagramm sehr anschaulich und leicht zu übersehen. Die gute Lesbarkeit eines Kreisdiagramms ist darauf zurückzuführen, daß wir uns beim Lesen des Diagramms nicht auf die Flächen, sondern auf die Kreisbögen orientieren. Wir lesen also auch dieses Diagramm als Streckendiagramm, wobei hier als Besonderheit die einzelnen Teilstrecken nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kreisumfang abgetragen sind.
Schon aus den wenigen bisher erläuterten Diagrammen geht das Wesentliche der graphischen Darstellung hervor. Betrachten Sie noch einmal die Bilder 11 bis 14, so erkennen Sie, daß in jedem dieser Diagramme zwei verschiedenartige Dinge bzw. Begriffe zueinander in Beziehung gesetzt sind. So handelt es sich in Bild 12 um die Zuordnung der Einwohnerzahlen zu den angeführten Städten, in Bild 11 um die Zuordnung von Prozentzahlen des Verbrauchs zu den betreffenden Nahrungsmitteln, und im Kreisdiagramm (Bild 14) ist der ebenfalls in Prozenten gegebene Anteil am gesellschaftlichen Gesamtprodukt in Beziehung gesetzt zu den verschiedenen Eigentumsformen. Hierbei ist also jeweils ein zahlenmäßig erfaßter Begriff einem nicht meßbaren Begriff zugeordnet. Die in Zahlen ausgedrückte Größe wird mit Hilfe einer *Skala*, die auch als *Leiter* bezeichnet wird, angegeben. Da die zweite Größe nicht quantitativ erfaßt werden kann, erscheint in diesen Diagrammen als Besonderheit nur eine Leiter.
Eine Art Umkehrung der vorstehend erläuterten Diagramme liegt in Bild 15 vor.
Auch hier haben wir es mit nur einer Leiter zu tun, und zwar mit der Leiter der Geschwindigkeit (Einheit: km/h); doch ist hier die zahlenmäßig erfaßte Größe, nämlich die Geschwindigkeit, das Primäre, und ihr ist die nicht in Zahlen meßbare Windbezeichnung zugeordnet.

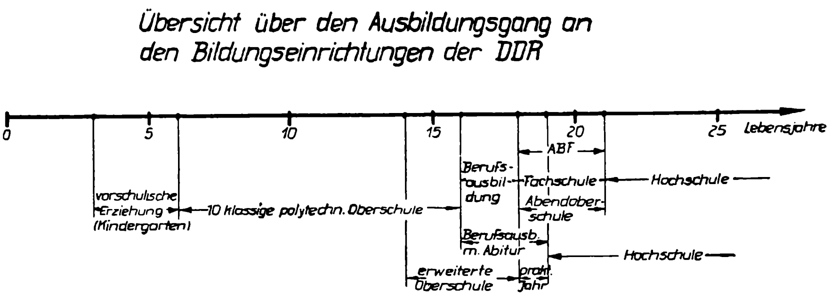


Bild 16

In dieser Weise lassen sich alle Arten von Klassifikationen graphisch darstellen, z. B. die Einteilung eines Produktes in Güteklassen je nach Abweichen der Maße vom vorgeschriebenen Wert usw.

Vor allem sind aber *die* Diagramme hervorzuheben, bei denen eine Zeitleiter vorliegt. Hier wird also vom Nullpunkt der Skala aus eine bestimmte Zeitspanne in einer zweckmäßig gewählten Einheit (etwa 1 Jahr oder 1 Stunde) abgetragen, und den einzelnen Zeitspannen bzw. Zeitpunkten sind nun bestimmte Begriffe, Ereignisse, Vorgänge usw. (die zunächst wiederum nicht meßbar sein sollen) zugeordnet. Zwei Beispiele sind Ihnen in Bild 16 und Bild 17 gegeben, die Sie ohne Erläuterung verstehen werden.

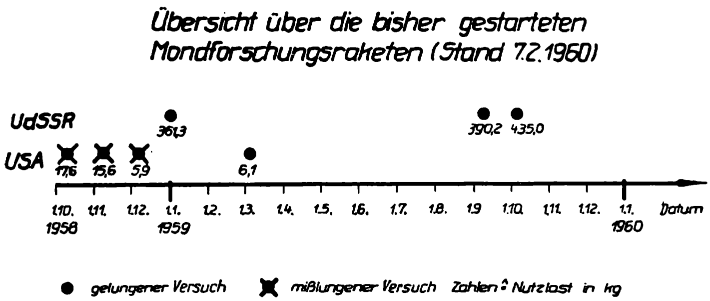


Bild 17

Im nachstehenden Lehrbeispiel werden Sie auf verschiedene Gesichtspunkte hingewiesen, die Sie beim Zeichnen eines Diagramms beachten müssen.

Lehrbeispiel 109

Nach Angaben einer westdeutschen Statistik studierten im Wintersemester 1954/55 an westdeutschen Hochschulen 106396 *Studenten. Die Aufgliederung nach der sozialen Herkunft ergab folgendes Bild:*

	Soziale Stellung des Vaters	%
1	Fabrikanten, Großhändler, Großlandwirte	5,7
2	Beamte des höheren Dienstes, Leitende Angestellte	29,2
3	Selbständige Angehörige der freien Berufe	11,5
4	Selbständige Landwirte, Handwerker, Einzelhändler	16,2
5	Beamte des mittleren und einfachen Dienstes, Angestellte und Werkmeister	32,4
6	Arbeiter	5,0

Diese Übersicht soll graphisch dargestellt werden!

Lösung:

Es bestehen hier mehrere Möglichkeiten der Darstellung. So können Sie die einzelnen Prozentzahlen als Streifen nebeneinander anordnen (Bild 18a) oder aber die Streifen aneinander reihen (Bild 18b). Im ersten Fall erhalten Sie ein Streifendiagramm der bereits aus Bild 12 bekannten Art. Im zweiten Fall entsteht nur ein Streifen, der mit seiner Gesamtlänge das Ganze (also 100 %) darstellt. Schließlich können Sie auch ein Kreisdiagramm (Bild 18c) anfertigen.

Bild 18a

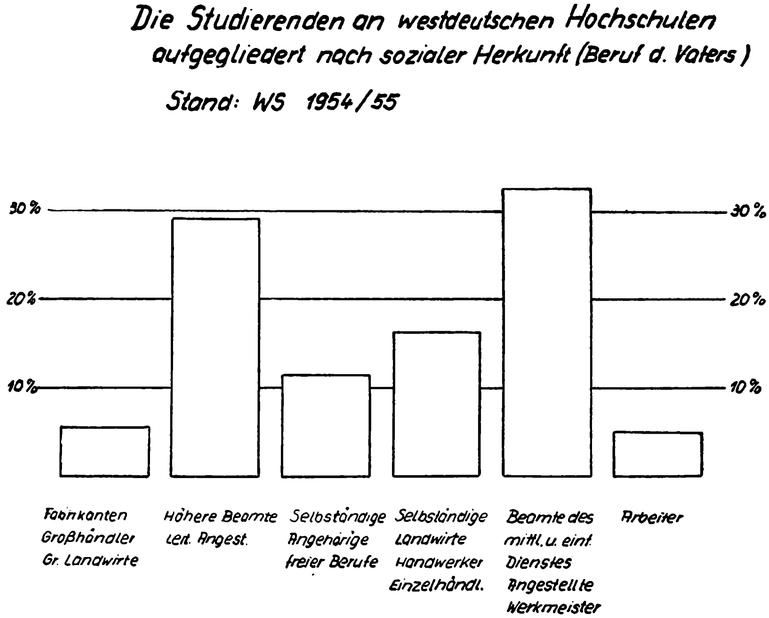
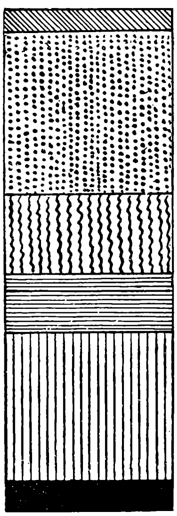


Bild 18b



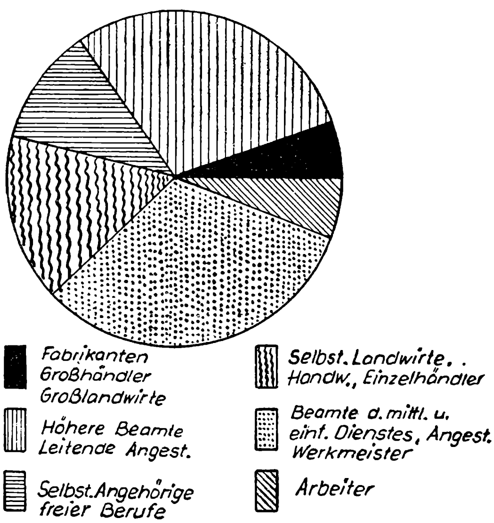


Bild 18c

Die Darstellungen der Bilder 18b und 18c entsprechen einander. In beiden Fällen werden die einzelnen Prozentsätze anschaulich ins Verhältnis zum Ganzen gesetzt. Ein Nachteil dieser Darstellung liegt aber darin, daß die Zahlenwerte der einzelnen Prozentsätze nicht unmittelbar aus den Diagrammen entnommen werden können. Dazu sind in beiden Fällen Messungen und Berechnungen nötig, die zwar bei Bild 18b verhältnismäßig einfach und schnell durchzuführen sind, bei Bild 18c aber ziemliche Mühe machen. Diesen Nachteil vermeidet die Darstellung im Bild 18a. Hier können Sie die Prozentsätze ohne weiteres ablesen, doch kommt dabei wiederum das Verhältnis der einzelnen Prozentsätze zum Ganzen nicht so anschaulich zum Ausdruck wie in den Bildern 18b und 18c.
Vor dem Anfertigen eines Diagramms müssen Sie also wissen, welcher Zweck mit dem betreffenden Diagramm verfolgt wird und worauf der Schwerpunkt beim Entwurf und bei der zeichnerischen Gestaltung zu legen ist.
Worauf haben Sie nun beim *Entwurf* eines Diagramms zu achten? Zunächst auf übersichtliche, leicht verständliche Anordnung. Dazu gehört z. B. bei Bild 18a, daß Sie sich über Breite und Abstand der Streifen sowie über den Maßstab der Prozentskala Gedanken machen. Durch zu schmale oder zu breite Streifen sowie durch zu große Abstände der Streifen kann das Lesen des Diagramms erschwert werden. Den Maßstab der Prozentskala müssen Sie so wählen, daß einerseits die kürzesten Streifen noch deutlich darzustellen sind, andererseits aber die längsten Streifen kein ungewöhnliches Ausmaß annehmen. Sie müssen sich also anhand der abzutragenden Größt- und Kleinstwerte und unter Berücksichtigung des zur Verfügung stehenden Raumes für den geeignetsten Maßstab entscheiden.
In diesem Zusammenhang weisen wir auf die Genauigkeit der Darstellung hin, die Sie immer dann beachten müssen, wenn das Diagramm nicht nur zur Veranschaulichung bestimmter Größenverhältnisse, sondern auch als Hilfsmittel für Berechnungen dient. Sie müssen sich in diesem Fall mit der Größe des anzulegenden Diagramms nach der geforderten Rechengenauigkeit richten. Je größer die Abmessungen des Diagramms sind, desto genauere Werte können Sie eintragen und ablesen. Wollen Sie z. B. im vorliegenden Fall noch Werte von 0,1 % ablesen, so brauchen Sie für die Darstellung von 0,1 % eine Länge von mindestens 1 mm. Dabei ergibt sich für das Streifendiagramm nach Bild 18a eine Gesamthöhe von ca. 30 cm. Auf dem skizzierten Diagramm können Sie die Werte höchstens auf 1 % ablesen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch die Wahl des Papiers. Will man genauere Werte ablesen, ist Millimeterpapier vorteilhafter.
Die Anfertigung des Diagramms in Bild 18b dürfte Ihnen wohl keine Schwierigkeiten bereiten. Achten Sie darauf, daß die einzelnen Teilstreifen gut als solche zu erkennen sind. Die Unterscheidung der einzelnen Streifen kann durch verschiedenartige Schraffur oder besser noch durch verschiedene Farben erfolgen.
Grundsätzlich kann man durch Farbe oder besondere zeichnerische Gestaltung (Umrandung, Pfeile usw.) bestimmte Teile eines Diagramms besonders hervorheben. So könnte man hier z. B. ein zweites Diagramm, das die entsprechenden Verhältnisse in der DDR wiedergibt, danebenstellen und in beiden Diagrammen zur Verdeutlichung des großen Unterschiedes die Zahl der Arbeiter- und Bauernstudenten besonders hervortreten lassen (vgl. Übungsaufgabe 291).
Nun noch etwas zur Anfertigung des Kreisdiagramms: Sie müssen hier für jeden Sektor den Mittelpunktswinkel errechnen und mit Hilfe eines Winkelmessers abtragen. Zur Rechnung wenden Sie die Proportion an.

Beispiel: $$100:5{,}7 = 360:x$$

$$x = \frac{5{,}7 \cdot 360}{100} = 20{,}5$$

Dem Prozentsatz 5,7 entspricht also der Mittelpunktswinkel 20,5°.

Erforderlichenfalls können Sie in den Bildern 18b und 18c die zugehörigen Prozentzahlen in die Streifen eintragen, denn diese sind ja nicht ohne weiteres dem Diagramm zu entnehmen.
Ein besonderes Problem ist die Unterbringung und Anordnung der notwendigen Beschriftung. Grundsätzlich müssen Sie darauf achten, daß das Diagramm durch die Schrift nicht „erschlagen" wird, d. h. also, daß es übersichtlich und lesbar bleibt. Also sowenig wie möglich, aber soviel wie notwendig! Ist umfangreichere Beschriftung unumgänglich, dann empfiehlt es sich, nach Art der Bilder 18b und 18c zu verfahren. Hier ist die Erläuterung zu den einzelnen Teilstreifen gesondert aufgezeichnet. Allerdings muß dann der Betrachter Text und Zeichnung immer erst in Gedanken zusammenfügen. In den Darstellungen nach Bild 18a ist dies nicht notwendig.
Schließlich sei noch vermerkt, daß zu jedem Diagramm eine Überschrift gehört, aus der hervorgeht, was in dem betreffenden Diagramm dargestellt wird. Unter Umständen ist hierzu noch ein kurzer Text erforderlich, der an geeigneter Stelle in oder unter dem Diagramm anzuordnen ist.

8.2 Diagramme mit zwei Leitern

Kennzeichnend für die Diagramme des vorigen Abschnittes war, daß in ihnen nur jeweils *eine* der beiden zueinander in Beziehung gesetzten Größen meßbar war, daß infolgedessen auch nur *eine* Leiter verwendet wurde. Doch ist das durchaus nicht die Regel. Betrachten wir das Diagramm in Bild 19, das den Altersaufbau der Bevölkerung der DDR zeigt.
Zunächst ist festzustellen, daß es sich hier um *zwei*, allerdings gleichartige Diagramme handelt, die, durch die senkrecht verlaufende Mittelleiter der Altersjahre voneinander getrennt, gleichzeitig durch diese Mittelleiter aber auch miteinander verknüpft sind. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit *einem* Diagramm, und zwar zweckmäßigerweise mit dem linken. Drehen Sie das Bild so, daß die Leiter der Altersjahre von links nach rechts verläuft. Sie erkennen, daß hier, vom Nullpunkt senkrecht nach oben verlaufend, eine zweite Leiter vorhanden ist, auf der die Anzahl der Personen in der Einheit „Tausend Personen" abgetragen ist. Die Länge der von unten nach oben verlaufenden Streifen gibt also die Anzahl der männlichen Personen des Alters an, das am Fuß des jeweiligen Streifens angegeben ist. In diesem Diagramm sind somit den Lebensjahren die Personenzahlen zugeordnet.
Drehen Sie das Bild jetzt um 180°, so sehen Sie, daß in einem zweiten Diagramm dieselbe Beziehung für den weiblichen Bevölkerungsanteil ausgedrückt ist; nur verläuft die Leiter der Altersjahre nicht von links nach rechts – wie das normalerweise der Fall wäre – sondern umgekehrt. Außerdem ist die senkrecht verlaufende Leiter rechts angeordnet. Auf diese Weise wird eine übersichtliche Gegenüberstellung der beiden Diagramme ermöglicht, und die Anzahl der jeweils gleichaltrigen Männer und

Frauen ist ohne Schwierigkeit vergleichbar. Doch darüber hinaus sagt das Diagramm noch mehr aus.

Wie Sie sehen, nimmt im oberen Teil des Diagramms, also ab etwa 55 Altersjahren, die Personenzahl von Jahr zu Jahr gleichmäßig ab. Natürlich ist das kein Zufall, sondern Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit, die sich aus dem Diagramm sofort ablesen läßt. Doch was bedeuten die tiefen Einschnitte, die auf beiden Seiten in den aus den Streifen gebildeten Flächen zu verzeichnen sind? Sie sagen aus, daß hier geburtenschwache Jahrgänge vorliegen, und es ist nicht schwer, die Folgen der beiden imperialistischen Weltkriege zu erkennen, auf deren Konto außerdem der im rechten

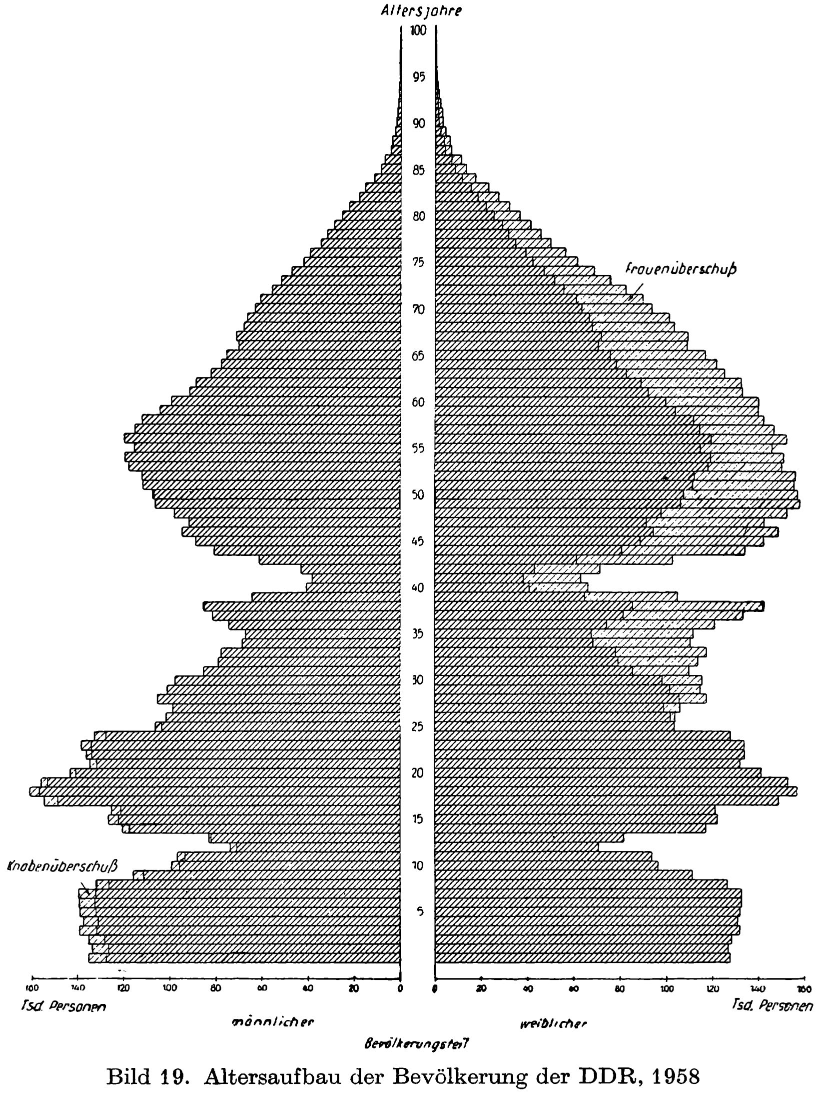


Bild 19. Altersaufbau der Bevölkerung der DDR, 1958

Diagramm sichtbar gemachte Frauenüberschuß zu verbuchen ist. Überlegen Sie sich selbst, wie sich dieses Diagramm wohl verändern würde, wenn es zu einem vom westdeutschen Imperialismus vorbereiteten dritten Weltkrieg käme, und ziehen Sie die Schlußfolgerungen aus Ihrer Überlegung! Sie kann nur lauten: Verstärkte Bemühungen um die Erhaltung des Friedens und totale Abrüstung aller Staaten, wie sie von der Sowjetunion vorgeschlagen wurde.
Der weitaus größte Teil der Diagramme mit zwei Leitern zeigt die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit, d. h. also, die von links nach rechts verlaufende Leiter ist in diesen Fällen eine Zeitleiter. Betrachten Sie z. B. Bild 20!

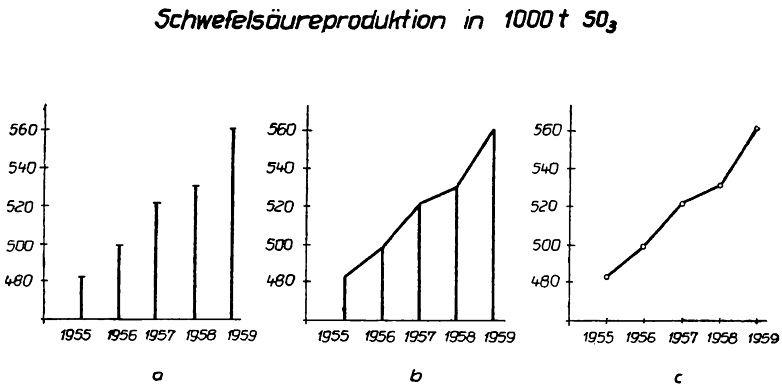


Bild 20

Es werden in Bild 20a als Streckendiagramm die Produktionszahlen für Schwefelsäure (lotrechte Leiter) in verschiedenen Jahren (waagerechte Leiter) dargestellt. Sie erkennen aus den sich nach rechts vergrößernden Strecken, daß die Produktion von Jahr zu Jahr gewachsen ist. Um dieses Wachstum noch besonders deutlich zu machen, verbindet man die Endpunkte der Strecken fortlaufend gradlinig miteinander und erhält einen Streckenzug (Bild 20b). Dafür verwendet man oft den Namen „Schaulinie“. Das Wesentliche dieses Diagramms ist diese Linie. Sie allein reicht in Verbindung mit den Leitern zum Verständnis des dargestellten Sachverhalts aus. Man läßt die Strecken deshalb meist weg, zeichnet nur deren Endpunkte, verbindet diese durch die Schaulinie in Form eines Streckenzuges und erhält so ein *Liniendiagramm* (Bild 20c).
Zwei Beispiele für solche Liniendiagramme zeigen Ihnen die Bilder 21 und 22. Einzelheiten entnehmen Sie den Bildunterschriften.
Für die Fieberkurve (Bild 21) zur Beobachtung des Krankheitsverlaufes wird zweimal am Tage die Temperatur gemessen und der Temperaturwert als Endpunkt einer Strecke aufgezeichnet. Durch Verbinden der Punkte ergibt sich auch hier ein Liniendiagramm in Form eines Streckenzuges. Von den Meßpunkten abgesehen, entspricht diese Linie nur angenähert dem wirklichen Temperaturverlauf, denn zwischen den Meßpunkten ist die Temperatur unbekannt. Man erhält einen genaueren Verlauf der Linie, wenn man häufiger, vielleicht stündlich, mißt und aufzeichnet. Dann nähert sich die Schaulinie mehr und mehr der tatsächlichen Fieberkurve. Eine Kurve (im mathematischen Sinn), wie sie sich auf Grund laufender Messungen ergibt,

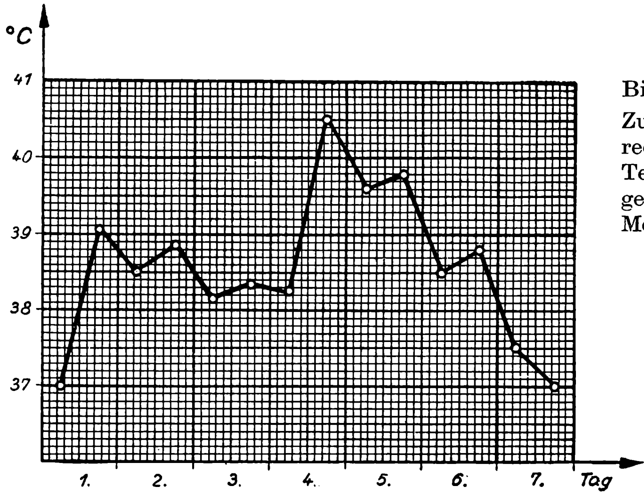


Bild 21. Fieberkurve
Zuordnung der auf der senkrechten Leiter abgetragenen Temperatur zur waagerecht abgetragenen Zeit.
Messung: morgens und abends

liegt z. B. in Bild 22 vor. Hier wurde der Barometerstand für mehrere Tage mit einem Barographen (Luftdruckschreiber) aufgezeichnet.

Sie erkennen also zwei verschiedene Arten von Liniendiagrammen:

1. Solche, die aus einem Streckenzug bestehen. Ihnen liegen Einzelwerte (einzelne Beobachtungen, einzelne Messungen, einzelne statistische Werte) zugrunde. Nur für diese Werte ist das Diagramm richtig. Zwischenwerte auf den Teilstrecken des Streckenzuges kann man nicht ablesen.

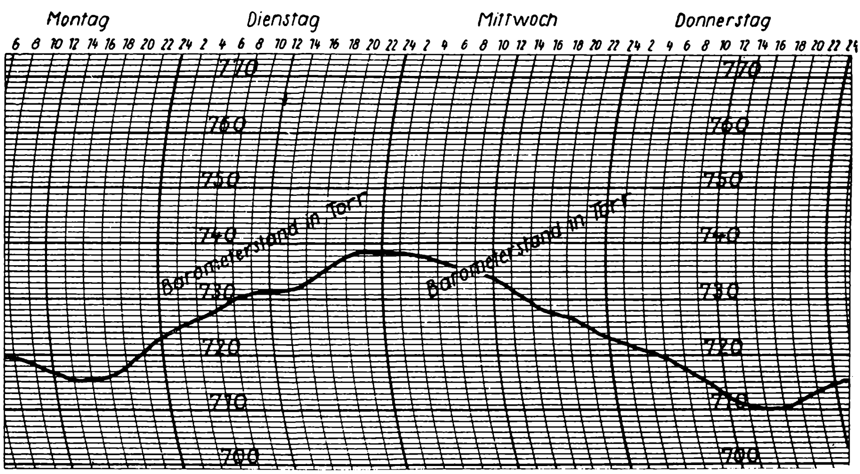


Bild 22. Aufzeichnung des Luftdruckes (automatischer Luftdruckschreiber)
Von unten nach oben (gekrümmte Linie): Druckleiter (Maßeinheit: Torr[1]) — von links nach rechts: Zeitleiter

[1]) 1 Torr $\triangleq$ Druck von 1 mm Quecksilbersäule.

2. Solche, die aus einer kontinuierlichen Kurve bestehen. Ihnen liegt eine lückenlose Folge von Werten zugrunde (laufende Beobachtungen oder Messungen durch ein Instrument u. ä.). Hier stellt jeder Punkt der Schaulinie ein richtiges Wertepaar dar, das man ablesen kann.

In Naturwissenschaft und Technik sind solche Diagramme, die sich als Darstellung von Meßreihen ergeben, außerordentlich häufig.
Alle Diagramme dieses Abschnitts zeigen den Zusammenhang beliebiger Größen mit der Zeit. Ein besonders einfaches, für die Praxis aber sehr wichtiges, Zeitdiagramm erhalten Sie, wenn Sie den Zusammenhang zwischen Ort und Zeit bei einem Bewegungsvorgang graphisch darstellen.

Lehrbeispiel 110

Ein Kraftfahrzeug fährt 8 Uhr früh vom Ort A ab. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß das Fahrzeug eine gleichbleibende Geschwindigkeit von 60 km/h *einhält. Es soll ein Diagramm gezeichnet werden, aus welchem der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit zu ersehen ist.*

Lösung:

Wir brauchen zunächst zwei Skalen, eine Orts-(Weg-)Skala und eine Zeitskala. Da wir die Zeit, wie allgemein üblich, waagerecht von links nach rechts abtragen, bleibt für den Weg die dazu senkrechte Skala. Wir betrachten den Schnittpunkt der beiden Skalen als Ausgangspunkt für den Vorgang. Hier liegt also der Ort A, und von dieser Stelle aus werden nach oben als Wegskala die von A aus gemessenen Kilometer abgetragen. An der gleichen Stelle befindet sich aber auch der zeitliche Beginn der Bewegung, also die Zeit 8 Uhr, und wir tragen nach rechts als Zeitskala die weiteren Uhrzeiten ab. Als geeignete Maßstäbe nehmen wir an: 1 h $\hat{=}$ 1 cm auf der Zeitskala und 100 km $\hat{=}$ 1 cm auf der Wegskala. Danach müssen wir zusammengehörende Werte von Ort und Zeit bestimmen. Dies geschieht in Form der nebenstehenden Tabelle, deren Werte Sie auf Grund der angegebenen Geschwindigkeit leicht errechnen können (Proportion).

Uhrzeit	Ort (km)
8.00	0
9.00	60
10.00	120

Die Tabellenwerte übertragen Sie nun in die Zeichnung, indem Sie über den angegebenen Uhrzeiten die jeweils dazugehörenden Kilometerzahlen als Strecken auftragen. (Es genügt auch hier, wenn Sie die Endpunkte dieser Strecken zeichnen!) Schließlich verbinden Sie wieder diese Punkte und erhalten, wie Sie in Bild 23a sehen, im Weg-Zeit-Diagramm eine Gerade.
Zunächst können Sie ohne Rechnung zu jeder Zeit den Ort des Fahrzeuges angeben. Sie brauchen hierzu nur auf der Zeitskala von der betreffenden Uhrzeit senkrecht nach oben zu gehen bis zur Schaulinie und von dort waagerecht nach links bis zur Ortsskala. Dort lesen Sie den zugehörigen Kilometer-Wert ab. Umgekehrt können Sie feststellen, zu welcher Zeit sich das Fahrzeug an einem vorgegebenen Ort befindet. Sie gehen von der angegebenen Kilometerzahl waagerecht nach rechts bis zur Geraden und von dort senkrecht nach unten bis zur Zeitachse, wo Sie die Uhrzeit ablesen.

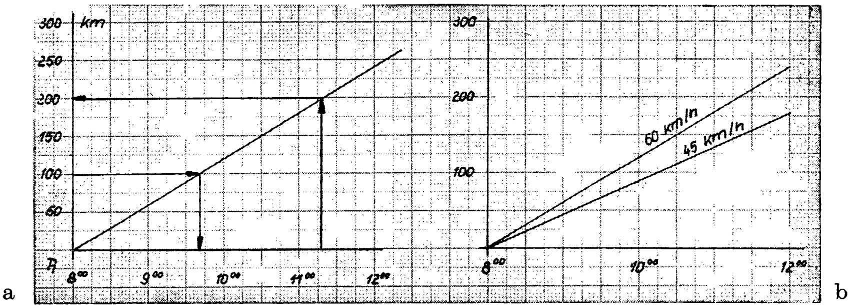


Bild 23. Weg-Zeit-Diagramm der Bewegung eines Fahrzeuges

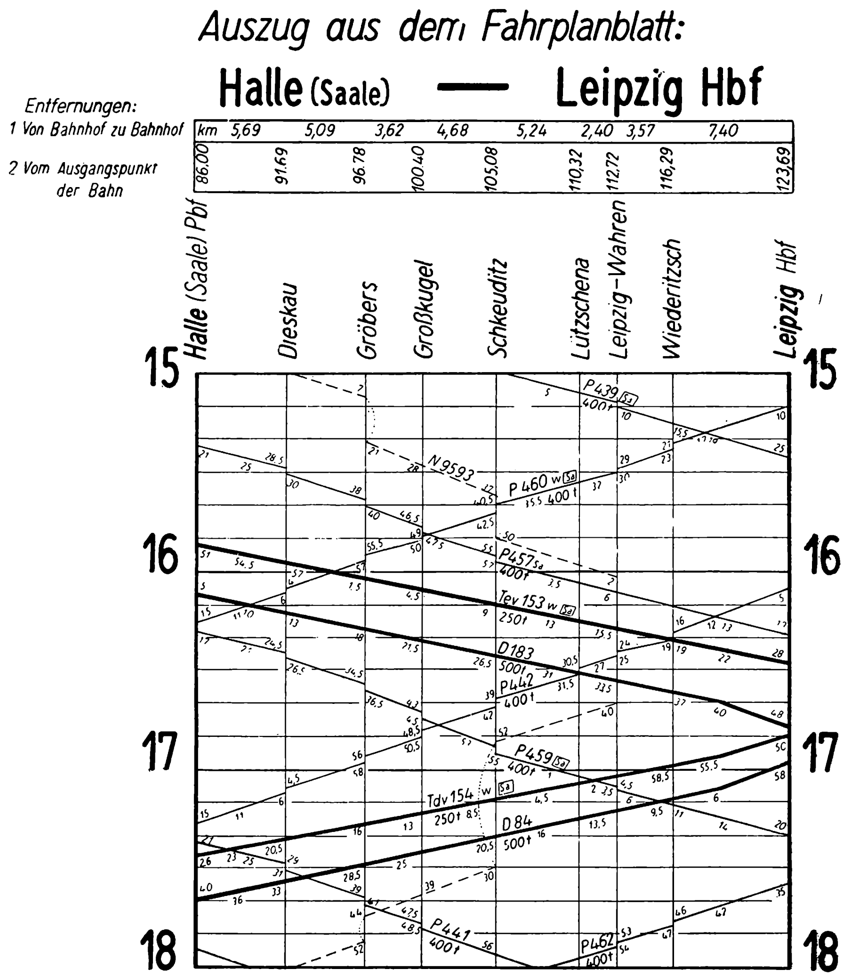


Bild 24. Graphischer Fahrplan der Bahnstrecke Halle–Leipzig (Auszug)

Weiterhin ist es möglich, anhand des Diagramms auf die Geschwindigkeit des Fahrzeuges zu schließen. In Bild 23b ist zusätzlich noch die Weg-Zeit-Gerade für ein Fahrzeug, das mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h fährt, eingetragen. Sie sehen, daß diese Gerade weniger steil verläuft. Es gilt also (gleiche Maßstäbe der Diagramme vorausgesetzt!):

Je steiler die Gerade verläuft, um so größer ist die Geschwindigkeit des Fahrzeuges.

Weg-Zeit-Diagramme spielen in der Verkehrstechnik in der Form des graphischen Fahrplanes eine große Rolle. Hier ist allerdings die Zeit meist von oben nach unten, der Weg auf der Waagerechten abgetragen. Wenn Sie das Diagramm in Bild 23 verstanden haben, wird es Ihnen nicht schwer fallen, sich in einem solchen Fahrplan zurechtzufinden (Bild 24).

8.3 Die zeichnerische Darstellung der direkten und der indirekten Proportionalität

Im vorigen Abschnitt konstruierten wir die Weg-Zeit-Kurve für den angegebenen Bewegungsvorgang aus den Zahlenangaben einer kleinen Tabelle. Aus zwei zusammengehörenden Werten, einem Wertepaar, ergab sich immer ein Punkt der Weg-Zeit-Kurve, also der Geraden. So wie hier können Sie j e d e Tabelle, die den Zusammenhang zwischen zwei einander zugeordneten veränderlichen Größen ausdrückt, graphisch darstellen.

Das ersehen Sie aus Bild 25. In diesem Bild ist die Tabelle, die am Anfang des Abschnittes 7.16 steht, graphisch dargestellt. Die Tabelle und somit auch das Diagramm geben den Zusammenhang zwischen dem Verbrauch an Elektroenergie und dem dafür zu zahlenden Preis. Von links nach rechts ist hier der Energieverbrauch in Kilowattstunden und von unten nach oben der Preis in DM abgetragen. Mit Hilfe dieses Schaubildes können Sie zu jedem beliebigen Verbrauch den dazugehörigen Preis bestimmen und umgekehrt auch die für einen bestimmten DM-Betrag zur Verfügung stehende Elektroenergie. Wie Sie sehen, ergibt die graphische Darstellung dieser Tabelle auch eine Gerade, und das ist kein Zufall. Beiden Diagrammen, sowohl dem Weg-Zeit-Diagramm als auch dem Preis-Verbrauch-Diagramm, ist nämlich gemeinsam, daß ihnen ein g e r a d e s Verhältnis zugrunde liegt. (Überzeugen Sie sich davon!) Ganz allgemein gilt: Die (direkte) Proportionalität wird graphisch durch eine Gerade dargestellt[1]).

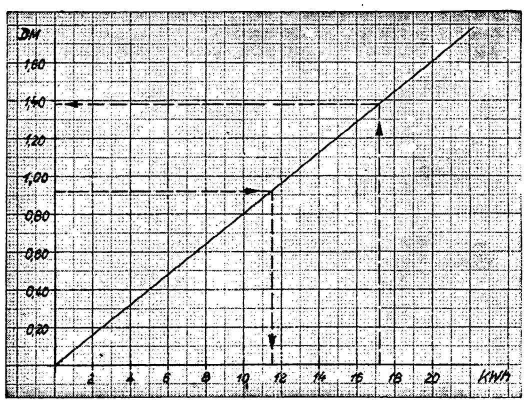


Bild 25. Preis-Verbrauch-Diagramm für elektrische Energie

[1]) Bedingung ist allerdings die hier gezeigte Art der Darstellung. Es gibt noch andere Arten der graphischen Darstellung, bei denen sich in diesem Fall keine Gerade ergibt.

Es liegt nun die Frage nahe, welche Kurvenform sich aus der Darstellung eines Zusammenhanges ergibt, dem ein umgekehrtes Verhältnis zugrunde liegt.
Wir machen uns das an dem Beispiel aus Abschnitt 7.17 klar. In diesem Beispiel ist eine Tabelle aufgestellt worden, die die zusammengehörenden Werte von Länge und Breite eines Rechtecks enthält. Die graphische Darstellung dieser Tabelle zeigt Bild 26. Hier ist die Breite b auf der Senkrechten aufgetragen, die Länge a auf der Waagerechten. Die Darstellung ergibt keine Gerade, es entsteht vielmehr, wenn Sie die eingezeichneten Punkte verbinden, ein gebrochener Linienzug. Wenn Sie sich noch weitere Zwischenwerte errechnen und eintragen, stellen Sie fest, daß sich als Schaulinie eine gekrümmte Linie besonderer Art ergibt. Eine solche Kurve heißt Hyperbel.

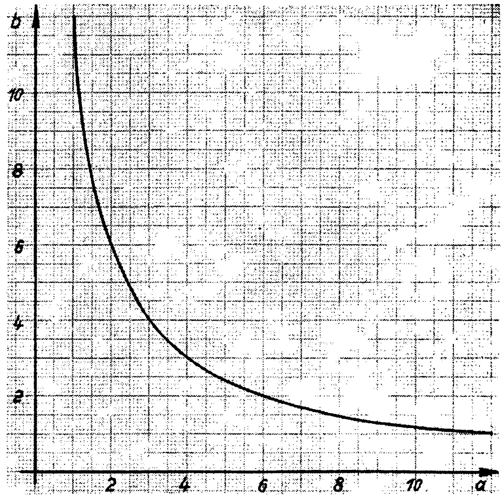


Bild 26

Merken Sie sich also: Die indirekte Proportionalität (Produktgleichheit) wird graphisch durch eine gekrümmte Linie, eine Hyperbel, dargestellt.

Zusammenfassung

Die graphischen Darstellungen (Diagramme) gewähren einen schnellen und anschaulichen Überblick über die Beziehungen, die zwischen jeweils zwei Größen bestehen. Soweit diese Größen meßbar sind, werden sie mit Hilfe von Leitern (Skalen) als Strecken dargestellt.
Als besonders häufige und wichtige Arten der Diagramme sind hervorzuheben:
Vergleichsdiagramme (meist Strecken- oder Kreisdiagramme),
Zeitdiagramme (meist Liniendiagramme).
Die graphische Darstellung einer direkten Proportionalität ergibt eine Gerade, einer indirekten Proportionalität (Produktgleichheit) eine Hyperbel.

Übungen

290. Ein Facharbeiter hat einen Durchschnittslohn von 380 DM *im Monat. Er macht sich nachstehenden Plan der Ausgaben:*

Steuern, SVK, Beiträge	66,— DM
Lebensmittel	180,— DM
Miete, Gas und Licht	37,— DM
Bekleidung, Wäsche	25,— DM
Unterhaltung und Bildung	20,— DM
Sparvertrag	15,— DM
Teilzahlungsvertrag	22,— DM
Sonstiges	15,— DM
	380,— DM

Stellen Sie die Aufteilung des Einkommens
a) in einem Streifendiagramm,
b) in einem Kreisdiagramm dar!

291. *Im Wintersemester 1957/58 studierten an der Technischen Hochschule Dresden* 9686 *Studenten. Die Aufgliederung nach der sozialen Herkunft ergibt folgendes Bild:*

Soziale Herkunft	%
1. Arbeiter	52,6
2. Angestellte	19,9
3. werktätige Bauern	4,8
4. Handwerker und Gewerbetreibende	6,1
5. Intelligenz	13,9
6. Großbauern, Unternehmer	1,4
7. Sonstige	1,3

Stellen Sie diese Übersicht graphisch dar (als Diagramm mit nebeneinander und aneinander liegenden Streifen)!

292. *a) Erläutern Sie die Aussage des in Bild 27 gezeichneten Diagramms!*
b) In welchem Jahr hat die Ein- bzw. Ausfuhr den größten prozentualen Zuwachs zu verzeichnen?

293. *Stellen Sie eine graphische Darstellung her, aus welcher Sie die Quadrate der Zahlen* 1 *bis* 10 *ablesen können!*

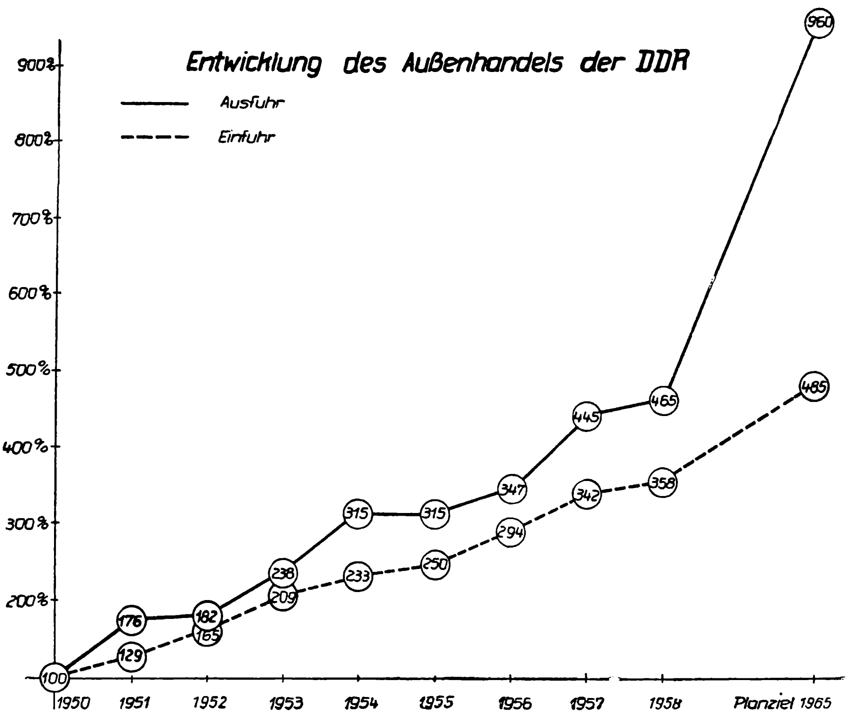


Bild 27

[18]

9 Die lineare Funktion

9.1 Begriff der Funktion

Das Schaubild 25 im Kapitel 8 stellt die Abhängigkeit des Preises vom Energieverbrauch dar. Aus dem Diagramm entnehmen wir, daß sich mit dem Energieverbrauch auch der Preis ändert. Sowohl der Verbrauch als auch der Preis sind also veränderliche Größen, kurz **Veränderliche** oder **Variable**[1]). Ebenso sind im Schaubild 23 Weg und Zeit Veränderliche.
Wie Sie wissen, besteht zwischen Stromverbrauch und Preis ein gesetzmäßiger Zusammenhang; ebenso zwischen Weg und Zeit. Man sagt auch, Verbrauch und Preis (Weg und Zeit) sind einander zugeordnet. Für eine solche Zuordnung hat der Mathematiker eine besondere Bezeichnung. Er sagt:

> Der Preis ist eine **Funktion**[2]) des Energieverbrauchs oder
> der Weg ist eine Funktion der Zeit oder allgemein
> die eine Veränderliche ist eine Funktion der anderen Veränderlichen.

Man kann auch sagen: Es besteht ein funktionaler Zusammenhang zwischen den beiden Veränderlichen.

Es kann übrigens auch ein funktionaler Zusammenhang zwischen mehreren Größen bestehen. So ist z. B. die erreichbare Höchstgeschwindigkeit eines Kraftfahrzeuges abhängig (d. h. eine Funktion) von 1. der Motorleistung, 2. der Straßenbeschaffenheit, 3. der Steigung der Straße, 4. der Windrichtung, 5. der Stärke des Windes, 6. der Form des Fahrzeuges und noch anderen Veränderlichen. Wir beschränken uns in unseren Betrachtungen aber immer auf nur zwei Variable.

Merken Sie sich also:

> **Eine Funktion stellt die Zuordnung einer veränderlichen Größe zu einer oder mehreren anderen veränderlichen Größen dar.**

Dieser funktionale Zusammenhang zwischen zwei Größen kann in verschiedener Weise ausgedrückt werden.

Zwei Darstellungen kennen Sie bereits, nämlich

1. die Darstellung in Form einer Tabelle und
2. die Darstellung als Kurve.

Aus beiden Darstellungen können Sie den Zusammenhang zwischen den beiden Veränderlichen entnehmen.
Nun sollen Sie noch eine dritte, und zwar die in der Mathematik wichtigste Art der Darstellung einer Funktion kennenlernen. Es ist dies die Darstellung in Form einer Gleichung, der sogenannten **Funktionsgleichung** (oder dem **analytischen Ausdruck** einer Funktion). Hierzu werden die beiden Veränderlichen mit allgemeinen Symbolen bezeichnet, die den letzten Buchstaben des Alphabets entsprechen.
In unserem Beispiel bezeichnen wir den Energieverbrauch mit x und den Preis mit y.

---

[1]) lat. *variare*, verändern.
[2]) lat. *functio*, die Verrichtung.

Nun schreibt man: Der Preis ist eine Funktion vom Verbrauch,

y ist eine Funktion von x,

$y = f(x)$;

gesprochen: y gleich f von x.

Beachten Sie, daß hierbei „f“ nicht etwa einen Faktor, sondern das Zeichen für die funktionale Beziehung zwischen x und y in der allgemeinsten Form bedeutet. Beachten Sie auch, daß hier x und y *nicht Unbekannte* (also ganz *bestimmte Werte* wie in Bestimmungsgleichungen), sondern *Veränderliche* (für die man ganz *beliebige Werte* einsetzen kann) darstellen.

In unserem Beispiel war der Preis vom Verbrauch abhängig. y (der Preis) heißt deshalb die *abhängige* Variable, x (der Verbrauch) die *unabhängige* Variable.

Beispiele:

$$y = f(x) = 8x \qquad \text{bedeutet:}$$

y hängt von x ab, und zwar soll y immer den achtfachen Wert von x haben. Nehmen Sie z. B. für x den Wert 1 an, dann hat das zugehörige y den Wert 8; für $x = 2$ ist $y = 16$ (2 kWh kosten also 16 Pfennige) usw.

$$y = 2x + 3 \qquad \text{bedeutet:}$$

Um den Wert y zu einem beliebig gewählten x zu finden, muß man diesen x-Wert mit 2 multiplizieren und zu dem Produkt 3 addieren. Für $x = 1$ erhält man z. B. $y = 2 + 3 = 5$. Man kann also, wenn man für x beliebige bestimmte Zahlen in die Funktionsgleichung einsetzt, die zugehörigen y-Werte jeweils ausrechnen. Die Wertepaare stellt man in einer Wertetafel zusammen. In unseren beiden Beispielen ergibt sich:

für $y = 8x$

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	-24	-16	-8	0	$+8$	$+16$	$+24$	$+32$

und für $y = 2x + 3$

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	-3	-1	$+1$	$+3$	$+5$	$+7$	$+9$	$+11$

Eine solche Tafel kann beliebig weit nach links und rechts verlängert werden. Außerdem können für x noch Zwischenwerte, z. B. $x = 0{,}5$ oder $x = -2{,}5$, berücksichtigt werden. Es ist üblich, die x-Werte, nach der Größe geordnet, vom Negativen zum Positiven fortschreitend, einzusetzen.

In unseren Beispielen sind für die x-Reihe Einerschritte gewählt. Wie Sie sehen, ergeben sich für die y-Reihe ebenfalls gleich große Schritte, und zwar wachsen die y-Werte mit wachsendem x. Das ist nicht immer so, sondern charakteristisch für unsere Beispiele.

Damit ist zugleich angedeutet, daß eine Wertetafel dem Geübten manches von der zugehörigen Funktion verrät und daß man eine Funktion auch in Form einer Wertetafel angeben kann.

Die anschaulichste Art, den funktionalen Zusammenhang zwischen zwei Größen anzugeben, ist aber, wie Sie aus Kapitel 8 wissen, die graphische Darstellung als Kurve. Diese Kurve kann mit Hilfe der Wertetafel leicht gezeichnet werden.
Bevor wir aber die beiden Funktionen graphisch darstellen, müssen wir noch einige Überlegungen allgemeiner Art vorausschicken.

9.2 Das rechtwinklige Koordinatensystem und die graphische Darstellung einer Funktion

Im Kapitel „Graphische Darstellung" haben Sie bei der Anfertigung eines Zeitdiagramms die Skalen auf einer Waagerechten und einer Senkrechten abgetragen. So verfährt man bei der Darstellung aller Funktionen. Man benutzt meist ein rechtwinkliges, das **kartesische**[1] **Koordinatensystem**[2].
Auf zwei Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, werden vom Schnittpunkt, dem **Koordinatenursprung**, aus die Werte für die Veränderlichen abgetragen: auf der waagerechten – der *Abszissen-*[3] oder x-Achse – die Werte der *unabhängigen* Veränderlichen x, auf der senkrechten – der *Ordinaten-* oder y-Achse – die Werte der *abhängigen* Veränderlichen y. Im allgemeinen benutzt man gleiche Teilungen für die waagerechte und die senkrechte Achse (Bild 28). Man kann aber die Teilungen auf den beiden Achsen auch verschieden wählen.
Zwei zusammengehörige Werte bestimmen *eindeutig* den Abstand eines Punktes der Ebene von den beiden Achsen des gewählten Koordinatensystems. Die Maßzahl des Abstandes des Punktes von der y-Achse heißt die *Abszisse*, die Maßzahl des Ab-

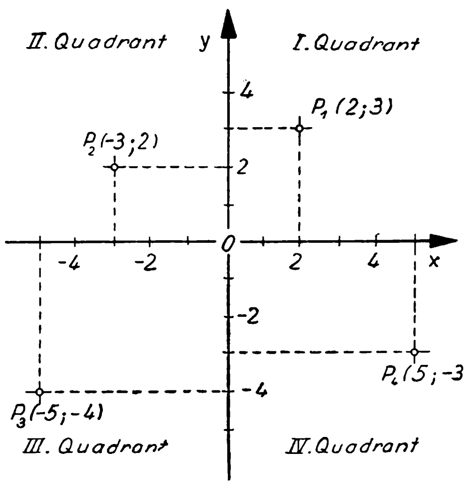


Bild 28

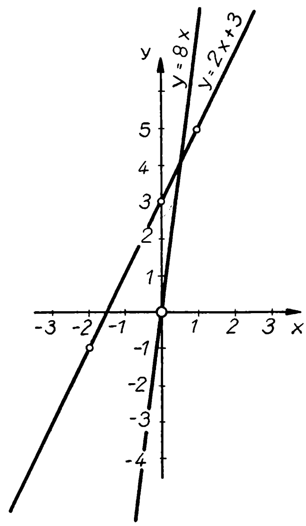


Bild 29

[1] Der französische Philosoph und Mathematiker Descartes hat als erster den Funktionsbegriff formuliert und systematisch Koordinatensysteme benutzt (vgl. Abschnitt 1.1).
[2] lat. *ordinare*, zuordnen.
[3] lat. *abscindere*, abtrennen.

standes von der x-Achse die *Ordinate* des betreffenden Punktes. Beide Maßzahlen führen noch die gemeinsame Bezeichnung: *Koordinaten* des Punktes.
Aus den Vorzeichen der Koordinaten des Punktes können Sie erkennen, in welchem Teil (in welchem *Quadranten*) der durch das Achsenkreuz geviertelten Ebene der betreffende Punkt liegt. Der Punkt P_2 z. B. hat die Koordinaten (-3) und ($+2$), geschrieben P_2 ($-3;2$), und liegt im II. Quadranten.
Nun sind Sie so weit, daß Sie die Zahlenpaare einer Wertetafel als Punkte darstellen können.
Wir beginnen mit der Funktion $y = 8x$. Es lassen sich von der aufgestellten Wertetafel nur drei Wertepaare verwenden, weil die y-Werte mit größer bzw. kleiner werdendem x sehr schnell außerordentlich groß bzw. klein werden. Es genügen aber diese drei Punkte, um zu erkennen, daß sich durch diese drei Punkte eine Gerade ziehen läßt (Bild 29). Von der Wertetafel der Funktion $y = 2x + 3$ lassen sich alle Werte bequem als Punkte darstellen, und wir stellen auch hier fest, daß alle Punkte auf einer Geraden liegen.
Das Bild einer Funktion muß aber keineswegs immer eine Gerade sein. So bekommen Sie, wenn Sie z. B. die Funktionen

$$\text{(I)} \qquad y = x^2 + 2x - 4 \qquad \text{oder}$$
$$\text{(II)} \qquad y = x^3 - 3x^2 + x - 5$$

als Kurve darstellen, keine Gerade.

Eine Gerade entsteht als Bild einer Funktion nur, wenn beide Variable in keiner höheren als der ersten Potenz vorkommen. Sie erinnern sich, daß die Bestimmungsgleichungen nach der Potenz der Unbekannten in Bestimmungsgleichungen ersten und höheren Grades eingeteilt werden. Die gleiche Einteilung trifft man bei den Funktionsgleichungen. Man unterscheidet also Funktionen ersten und höheren Grades je nach der Potenz, in der die Variablen auftreten. Die beiden in Bild 29 dargestellten Funktionen sind Funktionen ersten Grades. Bei diesen Funktionen ergibt sich im Schaubild immer eine Gerade (gerade „Linie“). Sie heißen deshalb auch „lineare Funktionen“. Funktion (I) ist eine Funktion zweiten Grades oder „quadratische Funktion“; (II) ist eine Funktion dritten Grades oder „kubische Funktion“. Diese Funktionen ergeben in der graphischen Darstellung eine (quadratische bzw. kubische) Parabel.

Merken Sie sich also:

> Das Schaubild einer linearen Funktion (Funktion ersten Grades) im rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade.

9.3 Die lineare Funktion $y = mx + b$

Die Funktion ersten Grades soll nunmehr näher untersucht werden. Wir gehen aus von der Funktion

$$y = x.$$

Stellen Sie eine Wertetafel auf, und zeichnen Sie die Funktion! Wie Sie aus Bild 30 ersehen, ergibt sich als Bild die Winkelhalbierende des Achsenkreuzes im I. und III. Quadranten. Die Kurve (Auch die Gerade wird hier als Kurve bezeichnet!) geht durch den Schnittpunkt der Koordinatenachsen, den Ursprung des Koordinatensystems.

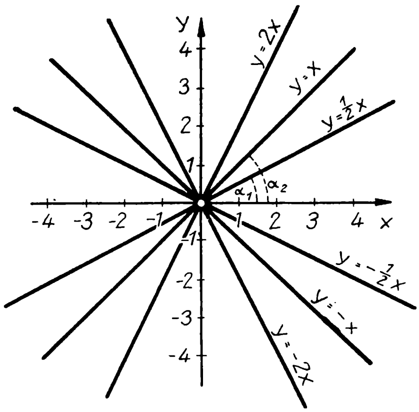


Bild 30

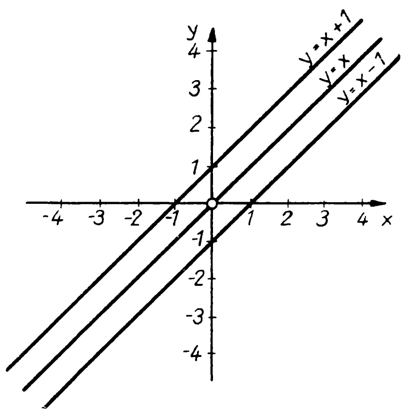


Bild 31

Stellen Sie nun die Funktionen

$$y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{2}x$$

graphisch dar!
Aus Bild 30 sehen Sie, daß auch diese Geraden durch den Ursprung gehen. Sie unterscheiden sich aber durch ihre Richtung voneinander. Offensichtlich hängt die Richtung der Geraden mit dem Koeffizienten (der Vorzahl oder Beizahl) von x zusammen $\left(\text{im Beispiel: } 1; 2; \frac{1}{2}\right)$.
Dieser Koeffizient heißt deshalb Richtungsfaktor. Er wird allgemein mit dem Buchstaben m bezeichnet.
Wir stellen also fest: Das Bild der Funktion $y = mx$ ist eine Gerade durch den Ursprung, die – je nach dem Wert von m – mehr oder weniger steil verläuft. Der Winkel α, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, wird Anstiegswinkel genannt. Er ändert sich, wenn sich m ändert.
Wir fragen uns nun, wie die Geraden verlaufen, wenn m negativ ist. Zeichnen Sie das Bild der Funktionen

$$y = -x, \; y = -2x \text{ und } y = -\frac{1}{2}x!$$

Die Kurven dieser Funktionen sind ebenfalls in Bild 30 eingezeichnet. Sie stellen fest, daß diese Geraden im II. und IV. Quadranten verlaufen, daß aber sonst das gleiche gilt wie für positive m.

Merken Sie sich also:

> Die Funktion $y = mx$ ergibt in graphischer Darstellung eine Gerade durch den Ursprung. Ist m positiv, dann steigt die Gerade von links nach rechts (α ist ein spitzer Winkel). Ist m negativ, dann fällt die Gerade von links nach rechts (α ist ein stumpfer Winkel).

Eine lineare Funktion kann außer dem Glied mit x noch ein sogenanntes *absolutes Glied* enthalten, d. h. ein Glied, in dem x nicht vorkommt.

Wir betrachten z. B. die Funktion

$$y = x + 1.$$

$+ 1$ ist hier das absolute Glied. Zeichnen Sie die Funktion, und vergleichen Sie diese Gerade mit der Geraden $y = x$ (Bild 31)! Sie sehen, daß beide Geraden die gleiche Richtung haben, die Geraden sind einander parallel. Das muß ja auch so sein, weil in beiden Funktionen der Richtungsfaktor m den gleichen Wert, nämlich 1, hat. Alle y-Werte der Funktion $y = x + 1$ sind aber gegenüber den entsprechenden Werten der Funktion $y = x$ um den Betrag 1 größer. Geometrisch heißt das: Alle Punkte der Geraden, die der Funktion $y = x + 1$ entsprechen, sind gegenüber den Punkten der zur Funktion $y = x$ gehörenden Geraden um die Strecke $+ 1$ Maßeinheiten nach oben verschoben. Das Maß der Verschiebung läßt sich am einfachsten auf der y-Achse ablesen. Die Gerade geht nämlich auf der y-Achse durch den Punkt mit der Ordinate $+ 1$.
Zeichnen Sie nunmehr das Bild der Funktion

$$y = x - 1!$$

Sie finden, was Sie bei einiger Überlegung schon voraussagen konnten, daß diese Gerade aus der Geraden $y = x$ durch Verschieben um den Betrag 1 nach unten entsteht (Bild 31).
Sie können nun beliebige andere absolute Glieder wählen und finden immer, daß das absolute Glied eine Verschiebung der entsprechenden Geraden ohne absolutes Glied nach oben (bei positivem absolutem Glied) bzw. nach unten (bei negativem absolutem Glied) bedeutet.
Das absolute Glied wird allgemein mit dem Buchstaben b bezeichnet. Damit ergibt sich als **allgemeine Form der linearen Funktion** der Ausdruck

$$\boxed{y = mx + b} \tag{13}$$

Merken Sie sich also:

> In der Funktionsgleichung $y = mx + b$ bedeutet das absolute Glied eine Verschiebung der Geraden $y = mx$ um den Betrag b nach oben, wenn b positiv ist, nach unten, wenn b negativ ist.
> Das absolute Glied ist in der graphischen Darstellung durch den Abschnitt auf der y-Achse veranschaulicht.

Die Kenntnis dieser Tatsachen erleichtert sehr das Zeichnen der jeweiligen Geraden. Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist und einer der beiden Punkte durch das absolute Glied b schon festliegt (Abschnitt auf der y-Achse), brauchen Sie nur noch den zweiten Punkt in der bereits angegebenen Weise zu bestimmen und können die Gerade zeichnen.
Unter Umständen ist es zweckmäßig, zur Kontrolle noch einen dritten Punkt zu bestimmen, der dann auf der gezeichneten Geraden liegen muß.

Beispiel:

Stellen Sie die Funktion $2y + x = 5$ graphisch dar!

Zunächst bringen Sie die Funktion auf die Form $y = mx + b$ und erhalten

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}.$$

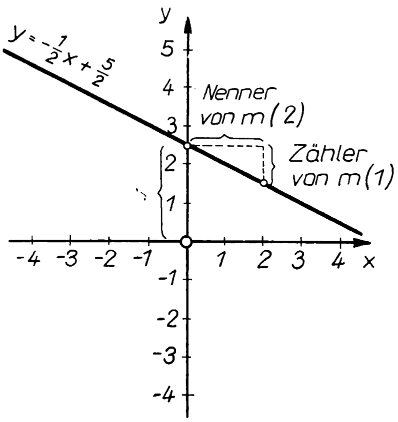


Bild 32

b ist also $+\,2{,}5$, und damit ist ein Punkt der Geraden, nämlich der Punkt mit der Ordinate $+\,2{,}5$ auf der y-Achse, festgelegt. Um einen zweiten Punkt (und den Kontrollpunkt) zu bekommen, wird eine Wertetafel aufgestellt. Wählen Sie für x den Wert 3, so erhalten Sie $y = +\,1$. Damit können Sie die Gerade zeichnen (Bild 32) und sehen, daß sie von links nach rechts fällt. Das ist durch den negativen Richtungsfaktor bedingt.

Um den zweiten Punkt zu finden, kann man auch folgendermaßen vorgehen:
Von dem durch b bestimmten Punkt auf der y-Achse geht man in der Richtung positiver x-Werte um so viel Einheiten nach rechts, wie der Nenner des Richtungsfaktors angibt, und dann um so viel Einheiten nach oben (bei positivem m) bzw. nach unten (bei negativem m), wie der Zähler des Richtungsfaktors angibt. In unserem Beispiel geht man vom Punkte 2,5 auf der y-Achse um zwei Einheiten nach rechts und dann, weil m negativ ist, um eine Einheit nach unten. Der so erreichte Punkt ist ein Punkt der Geraden. Ist m ganzzahlig, dann ist der Nenner 1, so daß man in diesem Fall um eine Einheit nach rechts gehen muß.

Abschließend sollen noch einige *Sonderfälle* der Geraden $y = mx + b$ betrachtet werden. Wie schon erörtert, gibt m die Steigung an, und b bestimmt den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse.
Setzen Sie $m = 0$, so ergibt sich der erste Sonderfall:

$$y = b.$$

Es handelt sich graphisch dargestellt um eine Gerade, deren Steigung 0 ist, sie verläuft somit parallel zur x-Achse (Bild 33).
Insbesondere erhalten Sie daraus die Gleichung der x-Achse:

$$y = 0,$$

wenn $b = 0$ gesetzt wird.

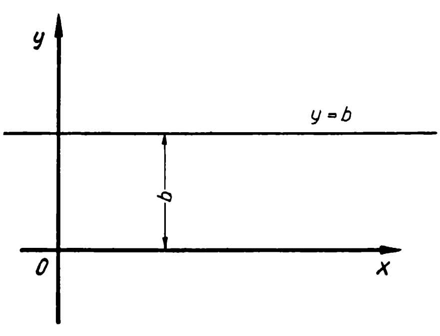


Bild 33

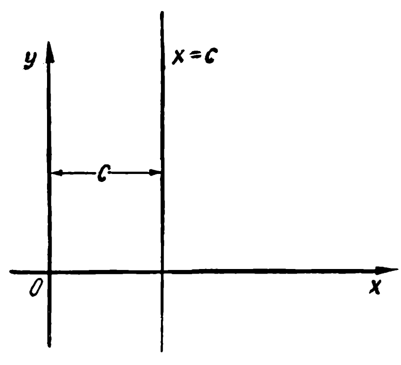


Bild 34

Dementsprechend gilt für eine Parallele zur y-Achse die Gleichung (Bild 34):

$$x = c.$$

Für $c = 0$ erhalten Sie dann die Gleichung der y-Achse, nämlich:

$$x = 0.$$

9.4 Die Nullstelle der linearen Funktion. Der Zusammenhang zwischen Funktionsgleichung und Bestimmungsgleichung

Jede Gerade, die einer linearen Funktion entspricht, schneidet die x-Achse (Ausnahme: der Sonderfall $m = 0$). Wenn Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse angeben sollen, so brauchen Sie im Bild nur die x-Koordinate abzulesen, denn der zugehörige y-Wert ist auf jeden Fall gleich Null. Man bezeichnet deshalb diesen Schnittpunkt als **Nullstelle** der Funktion und kennzeichnet diesen Punkt durch die Koordinaten $(x_0; y_0)$.

Merken Sie sich also:

> Unter der Nullstelle einer linearen Funktion versteht man die Abszisse (die x-Koordinate) des Schnittpunktes der zugehörigen Geraden mit der x-Achse. Sie wird mit x_0 bezeichnet. Das zugehörige y_0 hat den Wert Null.

Da eine Gerade die x-Achse nur einmal schneiden kann, hat jede lineare Funktion nur eine Nullstelle.
Wenn Sie also die Nullstelle einer linearen Funktion bestimmen sollen, zeichnen Sie die zugehörige Gerade und lesen den Abszissenwert des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse ab.
Sie können die Nullstelle aber auch berechnen. Dazu müssen Sie wie folgt vorgehen:

1. Die Funktion auf die Form $y = mx + b$ bringen.
2. $y = 0$ und $x = x_0$ setzen.

Dadurch entsteht eine Bestimmungsgleichung, die nach x_0 aufzulösen ist.

Beispiel (Bild 35):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 3 & \text{Allgemein:}\quad y &= mx + b \\ 0 &= \frac{1}{2}x_0 + 3 & 0 &= mx_0 + b \\ \frac{1}{2}x_0 &= -3 & mx_0 &= -b \\ \underline{\underline{x_0}} &\underline{\underline{= -6}} & \underline{\underline{x_0}} &\underline{\underline{= -\frac{b}{m}}} \end{aligned}$$

Umgekehrt können Sie eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten $mx + b = 0$ dadurch graphisch lösen, daß Sie die zugehörige Funktion $y = mx + b$ graphisch darstellen und die Abszisse (die x-Koordinate) des Schnittpunktes mit der x-Achse, d. h. die Nullstelle der Funktion, ablesen. Die Nullstelle ist die Lösung der Gleichung.

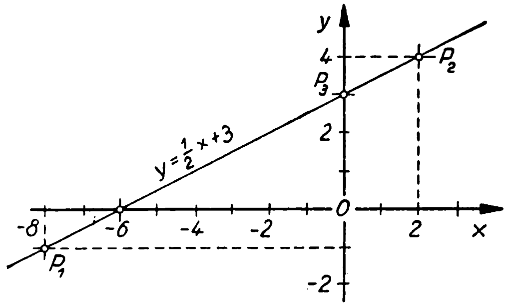


Bild 35

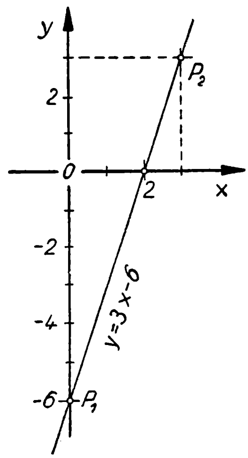


Bild 36

Lehrbeispiel 111

Lösen Sie die Gleichung $3x = 6$ graphisch!

Lösung:

1. Form $mx + b = 0$ herstellen: $3x - 6 = 0$
2. Für 0 das Symbol y setzen, d. h. die zugehörige Funktion bilden: $y = 3x - 6$
3. Diese Funktionsgleichung graphisch darstellen: Bild 36
4. Die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse ablesen: $x_0 = 2$

Die Lösung der Gleichung ist $\underline{\underline{x = 2.}}$

Wegen dieses Zusammenhanges mit der linearen Funktion wird die Gleichung ersten Grades auch *lineare* Gleichung genannt.

Die graphische Lösung einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten besitzt keine praktische Bedeutung. Sie wurde hier behandelt, weil die graphische Lösung jeder Gleichung nach dem gleichen, hier geschilderten Prinzip erfolgen kann.

Zusammenfassung

Die allgemeine Form der linearen Funktion ist $y = mx + b$. Das Bild dieser Funktion im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem ist eine Gerade.
Der Richtungsfaktor m gibt das Maß des Anstiegs der Geraden an. Ist $m > 0$, so steigt die Gerade; ist $m < 0$, so fällt sie. Das absolute Glied b gibt den Abschnitt auf der y-Achse an. Die Nullstelle einer Funktion ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse. Sie wird berechnet, indem $y = 0$ gesetzt und die dadurch entstehende Bestimmungsgleichung gelöst wird.
Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten kann graphisch gelöst werden, indem die zugehörige lineare Funktion graphisch dargestellt und ihre Nullstelle abgelesen wird.

Übungen

294. *Nennen Sie funktionale Zusammenhänge und stellen Sie diese durch analytische Ausdrücke dar!*

295. *Was verstehen Sie a) unter der Abszisse,*
b) unter der Ordinate eines Punktes?

296. *In welchem Quadranten liegen die Punkte* $P_1\,(-2;3)$, $P_2\,(3;-5)$, $P_3\,(-3;-4)$?

297. *Wo liegen a) die Punkte* $P_1\,(0;-2)$ *und* $P_2\,(0;3)$,
b) die Punkte $P_3\,(3;0)$ *und* $P_4\,(-2;0)$?

298. *Welche Koordinaten haben die Ecken des Dreiecks und der Vierecke in Bild 37 im Koordinatensystem?*

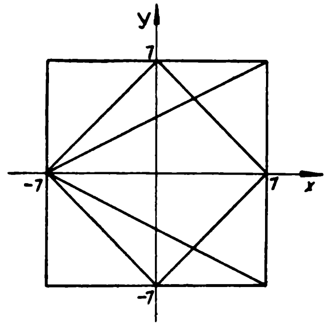


Bild 37

299. *Wie nennt man in der Funktionsgleichung* $y = 3x + 4$ *die Größe* x *und die Größe* y?

300. *Warum heißt* $y = mx + b$ *eine lineare Funktion?*

301. *Welche Bedeutung haben 2 und 5 in der Funktion* $y = 2x + 5$?

302. *Was können Sie über den Verlauf der zur Funktionsgleichung* $y = -2x$ *gehörenden Geraden aussagen?*

303. *Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!*
In welchen Punkten wird die y-Achse und die x-Achse von der ermittelten Geraden geschnitten?
a) $2x + 3y = 12$ *b)* $y - 3 = x$

304. *Was verstehen Sie unter der Nullstelle einer Funktion?*

305. *Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen analytisch und graphisch:*
a) $y = 3x - 9$; *b)* $x + 2y = -8$; *c)* $\frac{y+5}{x} = 2$!

306. *Lösen Sie folgende Gleichungen graphisch:*
a) $2x + 4 = 0$; *b)* $\frac{5x+1}{12} - \frac{x-1}{6} = \frac{3x+4}{5} - 3$!

307. *Welche Bedingungen müssen von zwei linearen Funktionen erfüllt sein,*
a) wenn sich ihre Kurven auf der y-Achse schneiden;
b) wenn ihre Geraden parallel verlaufen?

308. *Nennen Sie Beispiele von Funktionen, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen!*

[19]

10 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

10.1 Grundbegriffe

Im Kapitel 6 sind Sie mit den Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten vertraut gemacht worden. Bei allen Aufgaben war nur eine Größe unbekannt, alle anderen waren gegeben.
Wie müssen Sie nun vorgehen, wenn zwei Größen unbekannt sind?

Hierzu folgendes Beispiel:

Ein Bohrautomat versieht 4000 *Schraubenmuttern mit Bohrungen für die Absicherung. Eine Mutternart erhält je eine Bohrung, eine zweite Sorte je zwei Bohrungen. Wieviel Muttern je Sorte wurden bearbeitet, wenn das Zählwerk des Automaten* 6500 *Bohrungen anzeigt?*

Wir stellen zunächst fest, was gegeben und gesucht ist:

Es handelt sich um zwei Mutternsorten.
Sorte I hat eine Bohrung, Sorte II hat zwei Bohrungen.
Die Gesamtanzahl der Muttern ist 4000.
Die Gesamtzahl der Bohrungen ist 6500.
Gesucht sind die Teilanzahlen der Mutternsorten I und II.

Wir betrachten jede gefragte Größe als Unbekannte und nennen
die Anzahl der ersten Sorte x,
die Anzahl der zweiten Sorte y.

Laut Aufgabe sind insgesamt 4000 Muttern vorhanden. Diese Tatsache bringen wir zum Ausdruck durch die Gleichung

$$x + y = 4000.$$

Diese Gleichung hat aber viele Lösungen. So ist z. B. $x = 2000$ und $y = 2000$ eine solche Lösung, weil nämlich dieses Wertepaar, in die Gleichung eingesetzt, diese erfüllt, d. h., zu einer richtigen Zahlengleichheit macht. Ebenso sind alle Wertepaare, die in nachstehender Übersicht aufgeführt sind, Lösungen dieser Gleichung, und zwischen diesen Wertepaaren liegen noch weitere Lösungen.

x	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
y	4 000	3 500	3 000	2 500	2 000	1 500	1 000	500	0

Wie Sie sehen, reicht die obige Gleichung nicht aus, um die beiden Unbekannten dieser Aufgabe eindeutig zu bestimmen.
Wir können aber aus den Textangaben noch eine zweite Gleichung aufstellen und benutzen hierzu die Anzahl der Bohrungen.

x Muttern der Sorte I haben	x Bohrungen
y Muttern der Sorte II haben	$2y$ Bohrungen
Gesamtanzahl der Bohrungen	$x + 2y$ Bohrungen

Die Angabe, daß insgesamt 6500 Bohrungen vorhanden sind, liefert uns die Gleichung

$$x + 2y = 6500.$$

Auch diese Gleichung hat, wie Sie sich leicht überzeugen können, viele Lösungen. Nachstehende Übersicht gibt Ihnen eine kleine Auswahl der hier möglichen Lösungen:

x	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000	4 500	5 000	5 500	6 000	6 500
y	3 250	3 000	2 750	2 500	2 250	2 000	1 750	1 500	1 250	1 000	750	500	250	0

Vergleichen Sie die beiden Tabellen miteinander, so stellen Sie fest, daß beide das Wertepaar

$$\underline{\underline{x = 1500,}} \qquad \underline{\underline{y = 2500}}$$

gemeinsam haben. Das heißt aber, daß dieses Wertepaar beide Gleichungen erfüllt und somit die Lösung der Aufgabe darstellt:
Von der ersten Sorte wurden 1500 Muttern bearbeitet, von der zweiten Sorte 2500 Muttern.
Aus dem Verlauf der beiden Zahlenreihen in beiden Tabellen können Sie entnehmen, daß es nur dieses eine gemeinsame Wertepaar gibt, daß somit auch nur eine Lösung der Aufgabe existiert.
Beachten Sie, daß das Wertepaar (also zwei Werte!) als Lösung bezeichnet wird!

Obwohl in der Aufgabe nach *zwei* Zahlen gefragt ist, würde es der sehr übersichtliche Sachverhalt ermöglichen, die Aufgabe auf eine Gleichung mit *einer* Unbekannten zurückzuführen:

Die Anzahl der Sorte I sei x. Da insgesamt 4000 Muttern vorhanden sind, beträgt die Anzahl der Sorte II $(4000 - x)$.

Nun können Sie die Anzahl der Bohrungen für die Sorten I und II berechnen:

1 Mutter der Sorte I hat 1 Bohrung, x Muttern haben x Bohrungen.
1 Mutter der Sorte II hat 2 Bohrungen, $(4000 - x)$ Muttern haben $2(4000 - x)$ Bohrungen.

Die Addition ergibt die Gesamtanzahl der Bohrungen:
4000 Muttern haben $x + 2(4000 - x)$ Bohrungen.

Da die Gesamtanzahl der Bohrungen aber mit 6500 gegeben ist, besteht die Gleichung

$$x + 2(4000 - x) = 6500.$$

Dies ist eine Gleichung mit einer Unbekannten, aus der Sie x leicht bestimmen können. Es ergibt sich

$$\underline{\underline{x = 1500.}}$$

Die Anzahl der ersten Muttersorte beträgt 1500; da insgesamt 4000 Muttern vorhanden sind, beträgt die Anzahl der zweiten Sorte 2500.

Der Lösungsweg über die aufgestellten Wertetafeln ist sehr umständlich. Im folgenden Abschnitt werden Sie einfachere Lösungsverfahren kennenlernen.
Anhand dieser Darstellung sollten Sie aber erkennen, daß beim Vorhandensein von zwei Unbekannten eine Gleichung nicht ausreicht, um den in der Aufgabe mitgeteilten Sachverhalt mathematisch zu erfassen, daß vielmehr zwei Gleichungen dazu nötig sind.

Hier also

$$\begin{array}{r|l|}
\text{(I)} & x + y = 4000 \\
\text{(II)} & x + 2y = 6500
\end{array}$$

Eine derartige Zusammenstellung von zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten heißt ein **Gleichungssystem.** Die beiden senkrechten Striche deuten an, daß es sich nicht um zwei Gleichungen handelt, die zufällig untereinander stehen, sondern um zwei *zusammengehörige* Gleichungen, in denen die Unbekannte x bzw. y *dieselbe* Größe darstellt. Da in beiden Gleichungen die Unbekannten in erster, aber nicht in höherer Potenz vorkommen, sprechen wir genauer von einem *System von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.*
Sie werden später (Abschnitt 10.4) erkennen, daß sich *alle* Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten auf eine *einfache Form* bringen lassen, in der nur noch die mit einem Faktor versehenen Unbekannten sowie ein von x und y freies Glied vorkommen, z. B.

$$3x + 123y = 568$$

oder

$$\frac{1}{2}x + 0{,}8y = 54{,}7$$

oder allgemein

$$ax + by = k$$

Hierin bedeuten die *Koeffizienten* a, b sowie das k irgendwelche beliebige positive oder negative Zahlen. Da sich *jede* Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten auf die Form $ax + by = k$ bringen läßt, können wir beim Erarbeiten der Lösungsverfahren immer von dieser Form, der sogenannten *Normalform,* ausgehen.

Zusammenfassend merken wir uns in diesem Abschnitt:

1. Eine einzelne Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten hat beliebig viele Lösungen.
2. Ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten hat folgende Normalform:

$$\begin{array}{r|l|}
\text{(I)} & a_1x + b_1y = k_1 \\
\text{(II)} & a_2x + b_2y = k_2
\end{array}$$

3. Ein Wertepaar x; y, das beide Gleichungen eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten erfüllt, heißt Lösung des Systems.
4. Ein System von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten hat im allgemeinen eine Lösung.

Die Einschränkung „im allgemeinen" läßt die Möglichkeit offen, daß es hierbei Ausnahmen gibt (siehe Abschnitt 10.3).

10.2 Lösungsverfahren für Systeme von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

In diesem Abschnitt werden die drei gebräuchlichsten numerischen (rechnerischen) und das graphische (zeichnerische) Lösungsverfahren behandelt.

10.21 Das Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

Der allgemeine Lösungsweg bei diesem Verfahren verläuft folgendermaßen:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten (x oder y):
Eine der beiden Gleichungen des Systems wird nach einer Unbekannten (x oder y) aufgelöst. Der für diese Unbekannte gefundene Ausdruck wird in die *andere* Gleichung eingesetzt. Man erhält auf diese Weise *eine Gleichung mit einer Unbekannten*, die auf die bekannte Weise gelöst wird.

b) Bestimmen der zweiten Unbekannten:
Der nun bekannte Wert für die erste Unbekannte wird in eine der beiden Gleichungen des Systems eingesetzt; man erhält eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Lehrbeispiel 112

$$\begin{array}{l|rcr|} \text{(I)} & x + 3y & = & 13 \\ \text{(II)} & 5x - 2y & = & -20 \end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen von y:
Sie lösen Gleichung (I) nach x auf:

$$\text{(Ia)} \qquad x = 13 - 3y$$

und setzen diesen Ausdruck (Ia) für x in die Gleichung (II) ein:

$$\text{(IIa)} \qquad 5(13 - 3y) - 2y = -20$$

Gleichung (IIa) ist eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten, deren Lösungsweg Ihnen bekannt ist.

Klammern auflösen:	$65 - 15y - 2y = -20$
Ordnen:	$-15y - 2y = -20 - 65$
Zusammenfassen:	$-17y = -85$
Teilen durch (— 17):	$\underline{\underline{y = 5}}$

b) Bestimmen von x:
Sie setzen den Wert 5 für y in Gleichung (I) oder (II) oder noch einfacher in Gleichung (Ia) ein:

$$\text{(Ib)} \qquad x = 13 - 3 \cdot 5 = 13 - 15$$
$$\underline{\underline{x = -2}}$$

Probe:
Sie kontrollieren dieses Ergebnis $x = -2$; $y = 5$, indem Sie es in *beide* Ausgangsgleichungen einsetzen:

$$\begin{array}{lrcr} \text{(I)} & -2 + 3 \cdot 5 & & 13 \\ & -2 + 15 & & 13 \\ & 13 & = & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcr} \text{(II)} & 5(-2) - 2 \cdot 5 & | & -20 \\ & -10 - 10 & | & -20 \\ & -20 & = & -20 \end{array}$$

Bei der Probe gehen beide Bestimmungsgleichungen (I) und (II) in richtige Zahlengleichheiten über. Die Aufgabe ist also richtig gelöst.
Beachten Sie, daß bei einem Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die Einsetzprobe nur dann eine sichere Kontrolle darstellt, wenn sie an *beiden* Gleichungen des Systems vorgenommen wird!

Für das Ergebnis ist es gleichgültig, welche der beiden Unbekannten am Anfang der Rechnung entfernt wird und welche Gleichung Sie dazu benutzen. Nicht gleichgültig ist es aber für die aufzuwendende Rechenarbeit, da diese bei verschiedenen Wegen recht unterschiedlich sein kann.

Lehrbeispiel 113

$$\begin{array}{r|l|} \text{(I)} & 6y - 3x = 11 \\ \text{(II)} & 3y - 5x = 16 \end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:

Wenn Sie eine der beiden Gleichungen nach x oder y auflösen, erhalten Sie in jedem Fall eine Gleichung mit gebrochenen Koeffizienten; z. B. ergibt die Auflösung der Gleichung (I) nach y:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$$

Wenn Sie diesen Ausdruck für y in Gleichung (II) einsetzen, erhalten Sie eine Gleichung mit einer Unbekannten, die wieder gebrochene Koeffizienten hat. Grundsätzlich bereitet die Lösung einer derartigen Gleichung keine Schwierigkeit; Sie vermindern jedoch den Aufwand an Rechenarbeit, wenn Sie beachten, daß die Unbekannte y in Gleichung (II) mit dem Koeffizienten 3, in Gleichung (I) mit dem Koeffizienten $6 = 2 \cdot 3$ auftritt.

Sie lösen deshalb Gleichung (II) nach $3y$ auf:

$$\text{(IIa)} \quad 3y = 5x + 16$$

Nun setzen Sie in Gleichung (I) an Stelle von $6y$ den doppelten Wert von $3y$ gemäß Gleichung (IIa) ein:

$$\text{(Ia)} \quad 2(5x + 16) - 3x = 11$$

Sie haben auf diese Weise eine Gleichung mit einer Unbekannten erhalten, die den Vorzug hat, daß in ihr keine gebrochenen Koeffizienten auftreten.

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} 10x + 32 - 3x &= 11 \\ 7x &= -21 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -3}} \end{aligned}$$

b) Bestimmen von y:

Setzen Sie $x = -3$ in eine der Gleichungen (I) oder (II) oder noch besser in (IIa) ein:

$$\begin{aligned} \text{(IIb)} \quad 3y &= 5(-3) + 16 \\ 3y &= 1 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= \frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Lehrbeispiel 114

$$\begin{array}{r|l|}(\mathrm{I}) & 4x+3y=18 \\ (\mathrm{II}) & 3x+2y=11\end{array}$$

Lösung:

Die vorstehende Aufgabe soll auf zwei verschiedenen Wegen gelöst werden.

Erster Lösungsweg:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:

Bei diesem Beispiel ist es im Hinblick auf die aufzuwendende Rechenarbeit gleichgültig, welche Unbekannte entfernt wird. Sie erhalten in jedem Fall eine Gleichung einer Unbekannten mit gebrochenen Koeffizienten.

Sie lösen Gleichung (II) nach y auf:

$$(\mathrm{IIa})\quad y=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}x$$

Der für y berechnete Ausdruck (IIa) wird in (I) eingesetzt.

$$4x+3\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2}x\right)=18$$

$$4x+\frac{33}{2}-\frac{9}{2}x=18$$

$$-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{x=-3}}$$

b) Bestimmen von y:

$x=-3$ wird in Gleichung (I) oder (II) oder in (IIa) eingesetzt:

$$(\mathrm{IIb})\qquad y=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}(-3)=\frac{11}{2}+\frac{9}{2}$$

$$\underline{\underline{y=10}}$$

Probe!

Beim Lösen dieser Aufgabe auf dem vorgezeichneten Weg sind gebrochene Koeffizienten unvermeidbar. Da nur der Nenner 2 auftritt, ist die Rechenarbeit unerheblich. Wenn es sich aber um größere Nenner handelt, ist es mitunter lohnend, Brüche zu vermeiden. Diese Möglichkeit zeigt Ihnen ein zweiter Weg.

Zweiter Lösungsweg:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:

Wenn Sie jede der beiden Gleichungen eines Systems mit je einem beliebigen Faktor multiplizieren, ändert sich die Lösung des Systems nicht (Grundgesetz der Gleichungslehre). Versuchen Sie nun, durch Multiplikation der Gleichungen (I) und (II) mit geeigneten Faktoren zu bewirken, daß hierbei *eine* Unbekannte in *beiden Gleichungen* den gleichen Koeffizienten erhält. Multiplizieren Sie etwa Gleichung (I) mit 2, Gleichung (II) mit 3:

$$\begin{array}{r|l|}(\mathrm{Ia}) & 8x+6y=36 \\ (\mathrm{IIa}) & 9x+6y=33\end{array}$$

In dem neuen Gleichungssystem tritt y in beiden Gleichungen mit dem gleichen Koeffizienten 6 auf.

Lösen Sie nun eine der beiden Gleichungen, z. B. (Ia) nach $6y$ auf:

$$\text{(Ib)} \quad 6y = 36 - 8x$$

Einsetzen in Gleichung (IIa):

$$\begin{aligned} \text{(IIb)} \quad 9x + 36 - 8x &= 33 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -3}} \end{aligned}$$

b) Bestimmen von y wie oben.

Der Lösungsweg beim Einsetzungsverfahren soll nochmals am Beispiel der Aufgabe aus 10.1 gezeigt werden.

$$\begin{array}{l|l|} \text{(I)} & x + y = 4000 \\ \text{(II)} & x + 2y = 6500 \end{array}$$

Aus (I) (Ia) $x = 4000 - y$

In (II) (IIa)

$$\begin{aligned} 4000 - y + 2y &= 6500 \\ y &= 6500 - 4000 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 2500}} \end{aligned}$$

In (Ia) (Ib)

$$\begin{aligned} x &= 4000 - 2500 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1500}} \end{aligned}$$

Probe: (I) $1500 + 2500 \mid 4000$ (II) $1500 + 2 \cdot 2500 \mid 6500$

$4000 = 4000$ $6500 = 6500$

Zusammenfassung

Zur eindeutigen Lösung von linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ist ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen erforderlich. Die Gleichungen des Systems lassen sich auf die Form

$$ax + by = k$$

zurückführen. Von dieser geht man beim Lösen aus.

Als Ergebnis erhält man ein Wertepaar $(x; y)$, das als Lösung des Systems bezeichnet wird. Dieses Wertepaar muß beide Gleichungen erfüllen.
Man muß deshalb für beide Gleichungen die Probe machen.
Beim *Einsetzungsverfahren* wird eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst und der gefundene Wert in die andere Gleichung eingesetzt. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Dieses Verfahren ist dann zu bevorzugen, wenn eine Unbekannte den Koeffizienten 1 hat oder wenn sich der Koeffizient leicht entfernen läßt.

Übungen

309. $\begin{array}{|l} x + 5y = 14 \\ x - 3y = -18 \end{array}$

310. $\begin{array}{|l|} 4x + y = -3 \\ 2x - y = 6 \end{array}$

311. $\begin{array}{|l|} x + 3y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{array}$

312. $\begin{array}{|l|} x - 2y = 7 \\ 3x - 2y = 3 \end{array}$

313. $\begin{vmatrix} 3v + 4w = -8 \\ 5v - 12w = -18 \end{vmatrix}$

314. $\begin{vmatrix} 3x + 4y = 7a - b \\ 6x - 7y = -a + 13b \end{vmatrix}$

315. $\begin{vmatrix} 12x_1 + 7x_2 = 2{,}6 \\ 13x_1 + 5x_2 = 2{,}3 \end{vmatrix}$

316. $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 5a^2 - 2ab + 5b^2 \\ 3x - 2y = a^2 + 10ab + b^2 \end{vmatrix}$

[20]

10.22 Das Additionsverfahren

Dieses Verfahren wird neben dem Einsetzungsverfahren häufig angewandt.

Allgemeiner Lösungsweg:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten (x oder y):
Durch Multiplikation einer oder beider Gleichungen des Systems mit geeigneten Faktoren kann erreicht werden, daß die Koeffizienten *einer* Unbekannten in *beiden* Gleichungen den gleichen absoluten Wert, aber verschiedene Vorzeichen erhalten. Bei der Addition der beiden Gleichungen fällt diese Unbekannte heraus; man erhält so *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten wie beim Einsetzungsverfahren.

b) Bestimmen der zweiten Unbekannten wie beim Einsetzungsverfahren.

Lehrbeispiel 115

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{(I)} & 6x + 5y & = & -7 & \cdot(-2) \\ \text{(II)} & 4x + 7y & = & -12 & \cdot(+3) \end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:
Wenn beispielsweise x fortfallen soll, wird Gleichung (I) mit (-2), Gleichung (II) mit $(+3)$ multipliziert. Diese Faktoren werden zweckmäßig hinter das System geschrieben. Man erhält das neue System:

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{(Ia)} & -12x - 10y & = & +14 \\ \text{(IIa)} & +12x + 21y & = & -36 \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Ia) und (IIa) ergibt:

$$11y = -22$$
$$\underline{\underline{y = -2}}$$

b) Bestimmen von x:
Der Wert $y = -2$ wird in Gleichung (I) oder (II) eingesetzt.

$$\text{(Ib)} \quad 6x + 5 \cdot (-2) = -7$$
$$6x = 3$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}5}}$$

Probe!

Auch bei diesem Verfahren ist es mitunter für den Aufwand an Rechenarbeit nicht gleichgültig, welche von beiden Unbekannten anfangs entfernt wird.

Lehrbeispiel 116

$$\begin{array}{l|rcl|}
\text{(I)} & 19x - 0{,}8y & = & 87 \\
\text{(II)} & 23x - 0{,}6y & = & 109
\end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:

Wenn Sie x entfernen wollen, müssen Sie Gleichung (I) mit (— 23), Gleichung (II) mit (+ 19) multiplizieren. Vorteilhafter ist es, y zum Fortfall zu bringen. Sie multiplizieren Gleichung (I) mit (— 3), Gleichung (II) mit (+ 4):

$$\begin{array}{l|rcl}
\text{(Ia)} & -57x + 2{,}4y & = & -261 \\
\text{(IIa)} & 92x - 2{,}4y & = & 436
\end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Ia) und (IIa) ergibt:

$$35x = 175$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

b) Bestimmen von y:

Durch Einsetzen des Wertes $x = 5$ in Gleichung (I) erhält man:

$$19 \cdot 5 - 0{,}8y = 87$$
$$\underline{\underline{y = 10}}$$

Probe!

Zwei weitere kurz durchgeführte Lehrbeispiele sollen die Anwendung des Additionsverfahrens in besonderen Fällen zeigen.

Lehrbeispiel 117

$$\begin{array}{l|rcl|}
\text{(I)} & \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y & = & 19 \\
\text{(II)} & \frac{1}{2}x - \frac{4}{5}y & = & 11
\end{array}$$

Lösung:

Grundsätzlich verläuft das Additionsverfahren bei gebrochenen Koeffizienten in gleicher Weise wie bei ganzzahligen Koeffizienten. Sie können aber zweckmäßig vor Anwendung des Verfahrens die Brüche beseitigen, indem Sie jede Gleichung mit ihrem Hauptnenner multiplizieren; also Gleichung (I) mit 6, Gleichung (II) mit 10.

$$\begin{array}{l|rcl|}
\text{(Ia)} & 4x - 9y & = & 114 \\
\text{(IIa)} & 5x - 8y & = & 110
\end{array}$$

Die Anwendung des Additionsverfahrens ergibt

$$\underline{\underline{x = 6;\ y = -10}}$$

Probe!

Lehrbeispiel 118

behandelt die Anwendung des Additionsverfahrens bei einem Gleichungssystem mit allgemeinen Zahlsymbolen als Koeffizienten.

$$\begin{array}{l|rcl|}
\text{(I)} & bx - ay & = & -a^2 + 2ab + b^2 \\
\text{(II)} & ax - by & = & a^2 + b^2
\end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen von y:

Multiplizieren Sie Gleichung (I) mit $(-a)$, Gleichung (II) mit b!

$$\begin{array}{ll} \text{(Ia)} & -abx + a^2y = a^3 - 2a^2b - ab^2 \\ \text{(IIa)} & abx - b^2y = a^2b + b^3 \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Ia) und (IIa) ergibt:

$$(a^2 - b^2)\,y = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$y = \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$$

Dieser Quotient läßt sich nach dem Verfahren der Partialdivision noch vereinfachen:

$$\underline{\underline{y = a - b}}$$

b) Bestimmen von x:

Der Wert für y wird in Gleichung (II) eingesetzt:

$$\text{(IIb)} \quad ax - b\,(a - b) = a^2 + b^2$$

$$ax - ab = a^2$$

$$x = \frac{a^2 + ab}{a}$$

$$\underline{\underline{x = a + b}}$$

Probe!

10.23 Das Gleichsetzungsverfahren

Dieses Verfahren hat geringere praktische Bedeutung als das Einsetzungs- und das Additionsverfahren.

a) Bestimmen der ersten Unbekannten (x oder y):
Beide Gleichungen des Systems werden nach *derselben* Unbekannten (x oder y) aufgelöst. Die beiden für diese Unbekannte gefundenen Ausdrücke werden gleichgesetzt. Auf diese Weise entsteht wieder *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten.

b) Bestimmen der zweiten Unbekannten wie beim Einsetzungs- oder Additionsverfahren.

Lehrbeispiel 119

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 5x - 3y = 14 \\ \text{(II)} & 3x + 5y = 5 \end{array}$$

Lösung:

a) Bestimmen der ersten Unbekannten:

Lösen Sie Gleichung (I) *und* (II) nach der *gleichen* Unbekannten, z. B. nach x auf:

$$\text{(Ia)} \quad x = \frac{14 + 3y}{5}$$

$$\text{(IIa)} \quad x = \frac{5 - 5y}{3}$$

Die linken Seiten der Gleichungen (Ia) und (IIa) stimmen überein; also müssen auch die rechten Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen. Es gilt also:

$$\frac{14 + 3y}{5} = \frac{5 - 5y}{3}$$

Sie haben auf diese Weise *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten erhalten. Die Gleichung wird beiderseitig mit dem Hauptnenner 15 multipliziert.

$$\begin{aligned} 3(14 + 3y) &= 5(5 - 5y) \\ 42 + 9y &= 25 - 25y \\ 34y &= -17 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= -0{,}5}} \end{aligned}$$

b) Bestimmen von x:

Der Wert $y = -0{,}5$ wird in Gleichung (I) oder (II), besser in Gleichung (Ia) oder (IIa) eingesetzt.

$$\text{(IIb)} \quad x = \frac{5 - 5(-0{,}5)}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 2{,}5}}$$

Probe!

10.24 Das graphische Lösungsverfahren

Nun sollen Sie noch das graphische Lösungsverfahren kennenlernen. Es sei an einem Beispiel erläutert.

Lehrbeispiel 120

$$\begin{array}{r|rl|} \text{(I)} & x + 2y = & 4 \\ \text{(II)} & x - \quad y = & -5 \end{array}$$

Lösung:

Durch Auflösen beider Gleichungen nach y erhalten Sie das neue System:

$$\begin{array}{r|l|} \text{(Ia)} & y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ \text{(IIa)} & y = x + 5 \end{array}$$

Die Gleichungen (Ia) und (IIa) bilden ein System, das dem System mit den Gleichungen (I) und (II) völlig gleichwertig ist.
Betrachten Sie nun an Stelle des Systems der *Bestimmungsgleichungen* (Ia) und (IIa) die zwei *Funktionsgleichungen* (Ib) und (IIb), die die gleiche Form haben wie die Gleichungen (Ia) und (IIa):

$$\begin{array}{r|l|} \text{(Ib)} & y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ \text{(IIb)} & y = x + 5 \end{array}$$

(Ib) und (IIb) sind Funktionen ersten Grades. Jede von ihnen wird daher graphisch durch eine Gerade dargestellt (vgl. 9.3).

Der Faktor von x, der Richtungsfaktor, gibt den Anstieg der Geraden an; im Beispiel ist $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 1$.
Das absolute Glied bedeutet den Abschnitt auf der y-Achse; im Beispiel ist $b_1 = 2$, $b_2 = 5$.
Stellen Sie nun zwei Wertetafeln auf. Es genügen für jede Gerade zwei Punkte und ein weiterer Punkt zur Kontrolle:

Funktion (Ib)

x	y
-2	3
0	2
2	1

Funktion (IIb)

x	y
-2	3
0	5
2	7

Zeichnen Sie diese beiden Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem (Bild 38).
Die Koordinaten aller auf der ersten Geraden liegenden Punkte erfüllen die Funktionsgleichung (Ib); die Koordinaten aller Punkte der zweiten Geraden erfüllen die Funktionsgleichung (IIb). Die Koordinaten des *Schnittpunktes* beider Geraden erfüllen gleichzeitig die Funktionsgleichungen (Ib) und (IIb). Da die Funktionsgleichungen (Ib) und (IIb) *formal* mit den Bestimmungsgleichungen (Ia) und (IIa) und mit den Gleichungen (I) und (II) übereinstimmen, erfüllen die Schnittpunktkoordinaten auch die Ausgangsgleichungen (I) und (II) und bilden daher die Lösung des Systems.
Sie lesen als Koordinaten des Schnittpunktes ab:

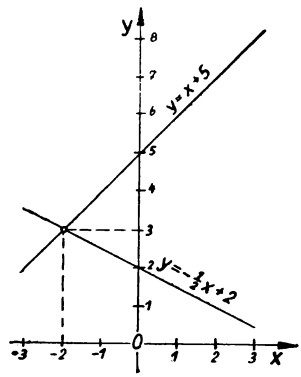


Bild 38

$$\underline{\underline{x = -2;\ y = 3}}$$

Setzen Sie diese beiden Werte in die Ausgangsgleichungen (I) und (II) ein und machen die Probe, dann wird Ihnen bestätigt, daß dieses Wertepaar die Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.
Bei den meisten *linearen* Gleichungen mit zwei Unbekannten ist die rechnerische Lösung einfacher und schneller durchführbar. In einzelnen Fällen, namentlich bei Bewegungsaufgaben, verdient jedoch die graphische Lösung den Vorzug.

Lehrbeispiel 121

Ein Frachter verläßt um 7 Uhr einen Überseehafen mit einer Fahrt von 12 kn[1]). *Um 16 Uhr desselben Tages läuft ein Schnelldampfer mit gleicher Route bei einer Fahrt von* 30 kn *aus.*
Wann und in welcher Entfernung vom Hafen überholt der Schnelldampfer den Frachter?

Lösung:

Für beide Schiffe kann die Abhängigkeit des Weges s von der Uhrzeit t durch eine *Funktionsgleichung* nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = v \cdot t$ dargestellt werden.

[1]) 1 Knoten (kn) = 1 Seemeile je Stunde (sm/h) = 1,852 km/h.

Frachter: Schnelldampfer:

$s = 12\text{ kn}\,(t - 7\text{ h})$ $\qquad$ $s = 30\text{ kn}\,(t - 16\text{ h})$

$s = 12\,t\text{ sm} - 84\text{ sm}$ $\qquad$ $s = 30\,t\text{ sm} - 480\text{ sm}$

Also:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & s = (12\,t - 84)\text{ sm} \\ \text{(II)} & s = (30\,t - 480)\text{ sm} \end{array}$$

Diese Funktionen können Sie in einem Koordinatensystem graphisch darstellen, wenn Sie ein Koordinatensystem mit einer t- und einer s-Achse verwenden (vgl. Bild 23). Stellen Sie nun eine Wertetafel auf, aus der der zurückgelegte Weg zu den verschiedenen Uhrzeiten abzulesen ist.

Frachter: Uhrzeit t (in h)	Weg s (in sm)	Schnelldampfer: Uhrzeit t (in h)	Weg s (in sm)
7	0	16	0
8	12	17	30
9	24	18	60
10	36	19	90

Bild 39 zeigt Ihnen die graphische Darstellung beider Funktionen. Der Schnittpunkt der Geraden ergibt die Lösung

$$\underline{\underline{t = 22\text{ h};\ s = 180\text{ sm}.}}$$

Um 22 Uhr überholt der Schnelldampfer den Frachter in einer Entfernung von 180 sm vom Hafen.

Mit jedem der behandelten numerischen Lösungsverfahren läßt sich jedes System von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten einwandfrei lösen, sofern es überhaupt eine eindeutige Lösung gibt (vgl. Abschnitt 10.3).

Das zeichnerische Verfahren wurde an dieser Stelle behandelt, weil es sich ausdehnen läßt auf Gleichungen *höheren Grades* mit zwei Unbekannten, bei denen die numerische Lösung oft einen erheblichen Aufwand an Rechenarbeit verursacht.

Welches numerische Verfahren am vorteilhaftesten ist, richtet sich nach der Form der gegebenen Gleichungen:

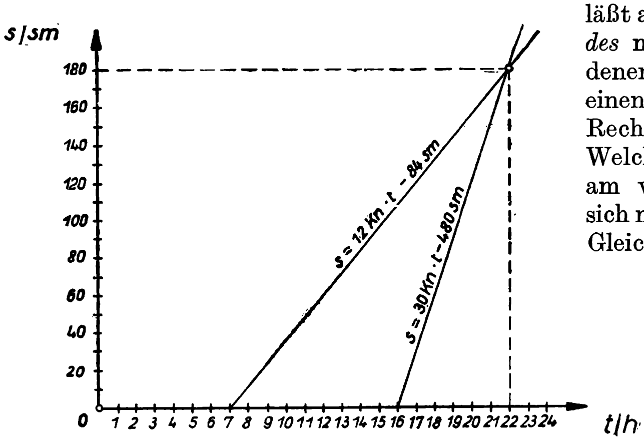


Bild 39

Das Einsetzungsverfahren wird man bevorzugen, wenn eine der Gleichungen bereits nach einer Unbekannten aufgelöst ist.
Das Additionsverfahren ist besonders dann vorteilhaft, wenn eine Unbekannte bereits Koeffizienten von gleichem Betrag, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen besitzt oder wenn dies durch eine einfache Multiplikation leicht zu erreichen ist.
Das Gleichsetzungsverfahren wird angewandt, wenn beide Gleichungen bereits nach derselben Unbekannten oder nach demselben Vielfachen dieser Unbekannten aufgelöst sind oder leicht aufgelöst werden können.

Zusammenfassung

Es wurden drei weitere Lösungsverfahren für lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten behandelt:
Beim *Additionsverfahren* wird die eine Unbekannte durch Addition der beiden Gleichungen bestimmt. Durch Multiplikation einer oder beider Gleichungen mit einem geeigneten Faktor erhält eine der Unbekannten in beiden Gleichungen Koeffizienten von gleichem Betrag, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Diese Unbekannte entfällt dann beim Addieren.
Beim *Gleichsetzungsverfahren* wird eine Unbekannte bestimmt, indem man *beide* Gleichungen nach *derselben* Unbekannten auflöst und die entstandenen Ausdrücke gleichsetzt.
Beim *graphischen Verfahren* findet man die Lösung, indem man beide Bestimmungsgleichungen als Funktionsgleichungen auffaßt, die beiden Geraden zeichnet und ihre Schnittpunktskoordinaten abliest.

Übungen

Lösen Sie nach dem Additionsverfahren:

317. $\left| \begin{aligned} 8x - 9y &= 34 \\ 9x - 8y &= 17 \end{aligned} \right|$ *318.* $\left| \begin{aligned} 0{,}5u - 1{,}6v &= -1{,}03 \\ 1{,}7u - 2{,}3v &= -0{,}99 \end{aligned} \right|$

319. $\left| \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 25b \\ 4x_1 + 3x_2 &= 25a \end{aligned} \right|$ *320.* $\left| \begin{aligned} 2{,}2x + 0{,}9y &= 4{,}4 \\ 2{,}6x + 2{,}7y &= 8{,}8 \end{aligned} \right|$

321. $\left| \begin{aligned} 37q + 36r &= 10{,}6 \\ 5q + 24r &= 11 \end{aligned} \right|$ *322.* $\left| \begin{aligned} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y &= 19 \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y &= 17 \end{aligned} \right|$

323. $\left| \begin{aligned} x + y &= \frac{m^2 + n^2}{mn} \\ mx + ny &= 2m \end{aligned} \right.$

Lösen Sie nach dem Gleichsetzungsverfahren:

324. $\left| \begin{aligned} 7x + y &= 36 \\ 3x + 2y &= 28 \end{aligned} \right|$ *325.* $\left| \begin{aligned} 3x + 9y &= 27 \\ 2x - 9y &= -19{,}5 \end{aligned} \right|$

Lösen Sie graphisch (Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Übungen 311 und 312.):

326. $\left| \begin{aligned} x + 3y &= -3 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned} \right|$ *327.* $\left| \begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x - 2y &= 3 \end{aligned} \right|$

[21]

10.3 Lösbarkeit eines Systems von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Bei sämtlichen bisher behandelten Lehrbeispielen und Übungsaufgaben hatte das vorgelegte Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob sich *jedes* Gleichungssystem so verhält oder ob auch Abweichungen eintreten können.

Diese Untersuchung wird an drei Beispielen durchgeführt, von denen jedes einen *typischen* Fall darstellt.

Beispiel: *Erster Fall*

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \left| \begin{array}{l} x - 2y = -2 \\ x + y = 7 \end{array} \right| \\ \text{(II)} & \end{array}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem *rechnerisch und zeichnerisch!* Die Lösung dieses Systems nach einem *numerischen* Verfahren ergibt:

$$\underline{\underline{x = 4}}; \qquad \underline{\underline{y = 3}}$$

Beim graphischen Verfahren (Bild 40) erhalten Sie zwei sich schneidende Geraden; die Koordinaten des Schnittpunktes beider Geraden bilden die Lösung des Systems.

Dieses Verhalten finden wir in der Praxis bei den meisten Systemen von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten; das Beispiel stellt also einen *Normalfall* dar.

Im Normalfall hat ein System von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten eine eindeutige Lösung.

Beispiel: *Zweiter Fall*

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x + y = 2 \\ \text{(II)} & 4x + 2y = 4 \end{array}$$

Versuchen Sie, dieses System numerisch zu lösen! Sie kommen zu keiner Lösung, welchen Weg Sie auch einschlagen. Zum Beispiel verläuft der Lösungsversuch nach dem Einsetzungsverfahren folgendermaßen:

$$\begin{array}{lr} \text{(Ia)} & y = 2 - 2x \\ \text{(IIa)} & 4x + 2(2 - 2x) = 4 \\ & 4x + 4 - 4x = 4 \\ & 4 = 4 \end{array}$$

Die Unbekannte x, die Sie zu bestimmen versuchten, ist herausgefallen; der Lösungsversuch endet mit der selbstverständlich richtigen Aussage $4 = 4$. Das Additions- und das Gleichsetzungsverfahren münden ebenfalls nach dem Herausfallen der Unbekannten in eine Zahlengleichheit.

Versuchen Sie nun die Lösung nach dem graphischen Verfahren! Die Auflösung der Gleichungen (I) und (II) ergibt die zugeordneten Funktionen:

$$\text{(Ib)} \quad y = -2x + 2$$

$$\text{(IIb)} \quad y = -2x + 2$$

Die Gleichungen (Ib) und (IIb) stimmen völlig überein. Sie erhalten bei der graphischen Darstellung zweimal die gleiche Gerade (Bild 41).

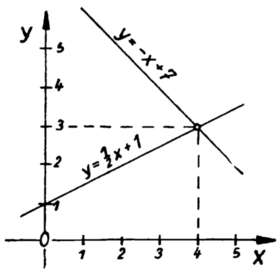


Bild 40

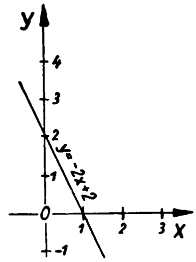


Bild 41

Um dieses Verhalten zu erklären, betrachten Sie noch einmal die Ausgangsgleichungen (I) und (II). Sie erkennen, daß die Gleichung (II) nichts anderes darstellt als die mit dem Faktor 2 multiplizierte Gleichung (I) bzw. die Gleichung (I) die mit dem Faktor 0,5 multiplizierte Gleichung (II). Die Gleichungen unseres Systems sind also völlig gleichwertig; aus der einen folgt die andere. Zwei derartige Gleichungen heißen *voneinander abhängig.*

Zwei voneinander abhängige Gleichungen können nur formal als *zwei* Gleichungen gezählt werden. Beide Gleichungen drücken denselben Zusammenhang zwischen den Unbekannten aus; die beiden Gleichungen haben also den Charakter einer einzigen Gleichung. *Eine* Gleichung mit zwei Unbekannten hat aber unzählig viele Lösungen. Wenn Sie in Gleichung (I) oder (II) x beliebig annehmen, können Sie y immer so bestimmen, daß die Gleichungen erfüllt werden. Beispielsweise haben die Gleichungen (I) und (II) folgende Lösungen:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6

Die graphische Lösung gibt diesen Sachverhalt noch anschaulicher wieder. Sie erhalten zwei zusammenfallende Geraden; diese haben unzählig viele, nämlich alle Punkte gemeinsam. *Jeder* Punkt der Geraden ist sozusagen „Schnittpunkt". Die Koordinaten jedes Geradenpunktes stellen eine Lösung dar.

Sind die Gleichungen eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten voneinander abhängig, so gibt es unzählig viele Lösungen.

Beispiel: *Dritter Fall*

$$\begin{array}{ll|l} & \text{(I)} & 2x + y = 2 \\ & \text{(II)} & 4x + 2y = 8 \end{array}$$

Versuchen Sie zunächst, dieses System numerisch zu lösen! Auch hier führt kein Verfahren zu einem Erfolg. Beispielsweise verläuft der Lösungsversuch nach dem Einsetzungsverfahren folgendermaßen:

$$\begin{array}{ll} \text{(Ia)} & y = 2 - 2x \\ \text{(IIa)} & 4x + 2(2 - 2x) = 8 \\ & 4x + 4 - 4x = 8 \\ & \underline{\underline{4 \neq 8}} \end{array}$$

Die Unbekannte x ist herausgefallen; das Verfahren endet mit dem Widerspruch $4 = 8$. Bei dem Lösungsversuch nach dem Gleichsetzungs- und dem Additionsverfahren fällt ebenfalls die Unbekannte heraus; auch hier steht am Ende ein Widerspruch.

Versuchen Sie nun die graphische Lösung. Durch Auflösen der Gleichungen (I) und (II) nach y erhalten Sie die zugeordneten Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{(Ib)} & y = -2x + 2 \\ \text{(IIb)} & y = -2x + 4 \end{array}$$

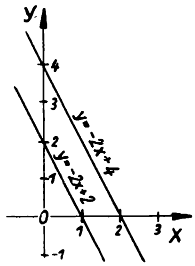


Bild 42

Bei der graphischen Darstellung ergeben sich zwei parallele Geraden (Bild 42), es ist also kein Schnittpunkt vorhanden.

Um dieses Verhalten zu erklären, betrachten Sie Gleichung (I) und (II). Diese enthalten bereits einen Widerspruch, den Sie leicht erkennen, wenn Sie die Gleichung (I) mit 2 multiplizieren. Es gilt dann

$$\text{(Ic)} \quad 4x + 2y = 4.$$

Gleichung (Ic) und damit auch Gleichung (I) steht zu Gleichung (II) in Widerspruch. Bereits die Ausgangsgleichungen sind miteinander unvereinbar. Es kann daher kein Wertepaar x; y geben, das die beiden sich widersprechenden Gleichungen (I) und (II) erfüllt. Diese Tatsache kommt bei dem graphischen Verfahren recht anschaulich zum Ausdruck. Es treten zwei parallele Geraden auf; ein Schnittpunkt ist also nicht vorhanden.

Stehen die Gleichungen eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zueinander in Widerspruch, so hat das System keine Lösung.

10.4 Schwierigere Systeme von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Die bisher behandelten Lehrbeispiele und Übungsaufgaben gingen sämtlich von der einfachen Form $ax + by = k$ der Gleichungen aus. Sind die Gleichungen in einer anderen Form gegeben, in der die Unbekannten innerhalb von Klammern oder in Nennern auftreten, so läßt sich anfangs oft keine Aussage darüber machen, ob es sich überhaupt um ein Gleichungssystem *ersten Grades* handelt. Es muß zunächst versucht werden, beide Gleichungen des Systems auf die Form $ax + by = k$ zu bringen. Das geschieht durch die gleichen Rechenoperationen, die Sie in Kapitel 6 bei der Behandlung der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten kennengelernt haben, und zwar in folgenden Schritten:

1. Nenner werden durch Multiplikationen mit dem Hauptnenner beseitigt.
2. Auftretende Klammern werden aufgelöst.
3. Die Glieder werden geordnet; alle Glieder, die die Unbekannten enthalten, kommen auf die linke Seite, die übrigen Glieder auf die rechte Seite der Gleichung.
4. Glieder gleicher Potenz werden zusammengefaßt.

Wenn danach beide Gleichungen des Systems die Form

$$ax + by = k$$

haben, liegt ein System von Gleichungen ersten Grades vor. Der Lösungsweg geht dann in der bekannten Weise weiter.

Lehrbeispiel 122

$$\begin{array}{r|l} \text{(I)} & (x - 6)(2y + 3) = (2x + 5)(y - 7) \\ \text{(II)} & (x - 3)(y + 4) = (x - 1)(y - 1) \end{array}$$

Lösung:

Sie lösen zunächst sämtliche Klammern auf:

$$\begin{array}{r|l|} \text{(Ia)} & 2xy + 3x - 12y - 18 = 2xy - 14x + 5y - 35 \\ \text{(IIa)} & xy + 4x - 3y - 12 = xy - x - y + 1 \end{array}$$

Sie ordnen und fassen gleichartige Glieder zusammen:

$$\begin{array}{r|l|} \text{(Ib)} & 17x - 17y = -17 \\ \text{(IIb)} & 5x - 2y = 13 \end{array}$$

An dieser Stelle erkennen Sie, daß ein System ersten Grades vorliegt. Das System läßt sich weiter vereinfachen, wenn Sie Gleichung (Ib) durch 17 dividieren; dann gehen Sie weiter auf dem bekannten Wege.

$$\begin{array}{r|l|l} \text{(Ic)} & x - y = -1 & (-2) \\ \text{(IIc)} & 5x - 2y = 13 & \\ \hline \text{(Id)} & -2x + 2y = 2 & \\ \text{(IId)} & 5x - 2y = 13 & \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Id) und (IId) ergibt:

$$3x = 15$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Sie setzen $x = 5$ in Gleichung (Ic) ein:

$$5 - y = -1$$
$$\underline{\underline{y = 6}}$$

Probe:

(I)

$$(5-6)(12+3) \mid (10+5)(6-7)$$
$$(-1)(15) \mid 15(-1)$$
$$-15 = -15$$

(II)

$$(5-3)(6+4) \mid (5-1)(6-1)$$
$$2 \cdot 10 \mid 4 \cdot 5$$
$$20 = 20$$

Lehrbeispiel 123

$$\begin{array}{l|l|} \text{(I)} & \dfrac{2x+4}{x-1} - \dfrac{y+10}{y+1} = 1 \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{2x+6}{x+1} - \dfrac{y+1}{2(y-1)} = 1{,}5 \end{array}$$

Lösung:

Um die Nenner zu beseitigen, multiplizieren Sie jede Gleichung für sich mit ihrem Hauptnenner; also Gleichung (I) mit $(x-1)(y+1)$; Gleichung (II) mit $2(x+1)(y-1)$.

$$\begin{array}{ll|} \text{(Ia)} & (2x+4)(y+1)-(x-1)(y+10) = (x-1)(y+1) \\ \text{(IIa)} & 2(2x+6)(y-1)-(x+1)(y+1) = 2 \cdot 1{,}5\,(x+1)(y-1) \end{array}$$

Nach dem Auflösen der Klammern, dem Ordnen und dem Zusammenfassen gleichartiger Glieder dividieren Sie Gleichung I durch 3, Gleichung II durch 2 und rechnen dann weiter nach dem Additionsverfahren.

$$\begin{array}{ll|l} \text{(Ib)} & -3x+2y = -5 & (-2) \\ \text{(IIb)} & -x+4y = 5 & \\ \hline \text{(Ic)} & 6x-4y = 10 & \\ \text{(IIc)} & -6x+4y = 5 & \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Ic) und (IIc) ergibt:

$$5x = 15$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Sie setzen $x = 3$ in Gleichung (IIb) ein:

$$-6+8y = 10$$
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

Probe:

(I) $\dfrac{10}{2} - \dfrac{12}{3} \mid 1$

$5-4 \quad 1$

$1 = 1$

(II) $\dfrac{12}{4} - \dfrac{3}{2} \mid 1{,}5$

$3-1{,}5 \mid 1{,}5$

$1{,}5 = 1{,}5$

Lehrbeispiel 124

$$\begin{array}{l|l|} \text{(I)} & \dfrac{mx-ny}{mx+ny} = \dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{mx+1}{ny+1} = \dfrac{m}{n} \end{array}$$

Lösung:

Sie stellen zunächst die Form $ax + by = k$ her. Dazu wird jede Gleichung mit ihrem Hauptnenner multipliziert: Gleichung (I) mit $(mx + ny)(m^2 + n^2)$, Gleichung (II) mit $(ny + 1)\,n$.

$$\begin{array}{r|rl|} \text{(Ia)} & (mx - ny)(m^2 + n^2) & = (mx + ny)(m^2 - n^2) \\ \text{(IIa)} & n\,(mx + 1) & = m\,(ny + 1) \end{array}$$

Bei den nächsten Schritten erhalten Sie:

$$\begin{array}{r|ll|} \text{(Ib)} & 2mn^2x - 2m^2ny & = 0 \\ \text{(IIb)} & mnx - mny & = m - n \end{array}$$

Beide Seiten der Gleichung (Ib) werden durch $2mn$, die der Gleichung (IIb) durch mn geteilt.

$$\begin{array}{r|rl|} \text{(Ic)} & nx - my & = 0 \\ \text{(IIc)} & x - y & = \dfrac{m - n}{mn} \end{array}$$

Es wird zweckmäßig das Additionsverfahren angewendet; Gleichung (Ic) bleibt unverändert; Gleichung (IIc) wird mit $(-m)$ multipliziert:

$$\begin{array}{r|rl|} \text{(Id)} & nx - my & = 0 \\ \text{(IId)} & -mx + my & = \dfrac{n - m}{n} \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen (Id) und (IId) ergibt:

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{n}}}$$

In Gleichung (Id) wird $x = \dfrac{1}{n}$ eingesetzt.

$$1 - my = 0$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{m}}}$$

Probe:

$$\text{(I)}\ \frac{\dfrac{m}{n} - \dfrac{n}{m}}{\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}} \;\Bigg|\; \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \qquad\qquad \text{(II)}\ \frac{\dfrac{m}{n} + 1}{\dfrac{n}{m} + 1} \;\Bigg|\; \frac{m}{n}$$

Linken Bruch mit mn erweitern!

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \qquad\qquad \frac{\dfrac{m + n}{n}}{\dfrac{n + m}{m}} \;\Bigg|\; \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$$

Als letztes Beispiel wird ein nicht seltener Sonderfall behandelt:

Lehrbeispiel 125

$$\begin{array}{r|l|}
\text{(I)} & \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y} = 2 \\[2ex]
\text{(II)} & \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = 1
\end{array}$$

Beachten Sie, daß in beiden Gleichungen die *reziproken Werte der Unbekannten* auftreten!

Lösung:

Auch hier führt der allgemeine Lösungsweg zum Erfolg. Wenn Sie beide Gleichungen des Systems mit ihrem Hauptnenner xy multiplizieren, so erhalten Sie die nennerlosen Gleichungen

$$\begin{array}{r|l|}
\text{(Ia)} & 5y - 6x = 2xy \\
\text{(IIa)} & 3y - 4x = xy
\end{array},$$

die beide auf der rechten Seite das Glied xy enthalten. Mit Hilfe des Additionsverfahrens können Sie bei den Gleichungen (Ia) und (IIa) dieses Glied xy zum Fortfall bringen und erhalten dann die Gleichung

$$y - 2x = 0$$

bzw. $$y = 2x.$$

Zweckmäßig wenden Sie nun das Einsetzungsverfahren an und setzen $y = 2x$ in Gleichung (I) oder (II) ein. Als Lösung erhalten Sie

$$\underline{\underline{x = 1}}, \quad \underline{\underline{y = 2.}}$$

In diesem Sonderfall ist aber ein anderer Lösungsweg zu empfehlen. Da in den Ausgangsgleichungen (I) und (II) die reziproken Werte der Unbekannten auftreten, führt man zweckmäßig zwei *Ersatzunbekannte* u und v ein; man setzt in (I) und (II)

$$\text{(III)}\ \frac{1}{x} = u \qquad\qquad \text{(IV)}\ \frac{1}{y} = v\,.$$

Dann geht das Ausgangssystem in das einfachere Ersatzsystem über

$$\begin{array}{r|l|}
\text{(I)} & 5u - 6v = 2 \\
\text{(II)} & 3u - 4v = 1
\end{array}.$$

Dieses System hat die Lösung

$$u = 1, \quad v = \frac{1}{2}\,.$$

Schließlich werden x und y mit Hilfe der Gleichungen (III) und (IV) bestimmt:

$$\frac{1}{x} = u = 1 \qquad \frac{1}{y} = v = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \qquad \underline{\underline{y = 2}}$$

Probe!

Zusammenfassung

Ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten hat eine eindeutige Lösung, wenn

1. die beiden Gleichungen *nicht voneinander abhängig* sind,
2. die beiden Gleichungen *nicht im Widerspruch* zueinander stehen.

Das System hat beliebig viele Lösungen, wenn die Gleichungen voneinander abhängig sind.

Es hat keine Lösung, wenn die Gleichungen im Widerspruch stehen.

Sind die Gleichungen des Systems nicht in der Form $ax + by = k$ gegeben, so müssen sie erst auf diese Form gebracht werden, indem

die Nenner beseitigt (durch Multiplikation mit dem Hauptnenner oder durch Einführen einer Ersatzunbekannten),

die Klammern aufgelöst,

die Glieder geordnet werden.

Übungen

Untersuchen Sie die Gleichungssysteme 328 bis 330 auf

a) eindeutige Lösung

oder b) Abhängigkeit

oder c) Widerspruch!

Im Falle a) ist die Lösung anzugeben; im Falle b) fünf verschiedene Lösungen des Systems für $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

328. $\left| \begin{array}{l} 15{,}5x - 18{,}5y = 11{,}5 \\ 21{,}7x - 25{,}9y = 16{,}1 \end{array} \right|$

329. $\left| \begin{array}{l} 4{,}5x + 1{,}3y = 26{,}4 \\ 7{,}2x - 2{,}2y = 29{,}4 \end{array} \right|$

330. $\left| \begin{array}{l} 10{,}4x - 13{,}6y = 19 \\ 14{,}3x - 18{,}7y = 21 \end{array} \right|$

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

331. $\left| \begin{array}{l} (x - 5)(y - 1) = (x - 8)(y + 5) \\ (x - 3)(y - 2) = (x - 7)(y + 2) \end{array} \right|$

332. $\left| \begin{array}{l} (m - n)(x + n) + (m + n)(y - n) = 2m^2 \\ (m + n)(x + 2n) - (m - n)(y - 2n) = 4mn \end{array} \right|$

333. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x + y + 1}{x - y - 7} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x + 3y + 4}{3x + 4y + 4} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right|$

334. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x + 1}{y + 3} = \dfrac{x + 5}{y + 7} \\ \dfrac{4x - 3}{2y + 3} = \dfrac{10x - 1}{5y + 14} \end{array} \right|$

335. $\left| \begin{array}{r} \dfrac{4x-3}{x-1} - \dfrac{2y+7}{y+3} = 2 \\ 6x - 5y = 22 \end{array} \right|$

336. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = \dfrac{p^4+q^4}{p^2q^2} \\ \dfrac{p}{q}x + \dfrac{q}{p}y = p + q \end{array} \right|$

337. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 68 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{13}{y} = 78 \end{array} \right|$

[22]

10.5 Anwendungsaufgaben für Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Für das Lösen eines Systems von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten haben Sie eine Anzahl von Verfahren kennengelernt, die immer, falls es eine eindeutige Lösung gibt, zum Erfolg führen. Dagegen gibt es kein allgemeingültiges „Rezept", das in *jedem* Falle ermöglicht, zu einer in Textform gegebenen Anwendungsaufgabe das zugehörige Gleichungssystem aufzustellen. Es gelten für den Ansatz die gleichen Gesichtspunkte, die Sie bei der Behandlung entsprechender Aufgaben ersten Grades mit *einer* Unbekannten im Kapitel 6 kennengelernt haben. Im allgemeinen wird man, da *zwei* Größen gefragt sind, die eine mit x und die andere mit y bezeichnen. Dann müssen auf Grund der Aufgabe *zwei voneinander unabhängige Gleichungen* aufgestellt werden. Haben Sie den Ansatz gefunden, also das Gleichungssystem aufgestellt, so können Sie jedes der in Abschnitt 10.2 besprochenen Verfahren anwenden.

Lehrbeispiel 126

Zwei Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 3:5 *haben den Achsabstand* 350 mm. *Gesucht sind die beiden Durchmesser ihrer Teilkreise d_1 und d_2 (in* mm*).*

Lösung:

Aus Bild 43 erkennen Sie, daß die Summe der Teilkreisradien r_1 mm + r_2 mm gleich dem Achsabstand ist bzw. die Summe der Teilkreisdurchmesser $d_1$mm + $d_2$mm gleich dem doppelten Achsabstand. Die erste Gleichung des Systems lautet deshalb:

$$d_1 + d_2 = 700$$

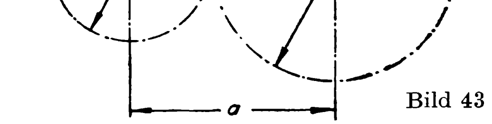


Bild 43

Beim Zahnradtrieb ist das Übersetzungsverhältnis gleich dem Verhältnis der Durchmesser der Teilkreise. Sie erhalten als zweite Gleichung

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{5}.$$

Nach Umstellen der zweiten Gleichung lautet das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{r} d_1 + d_2 = 700 \\ 5d_1 - 3d_2 = 0 \end{array} \right|$$

Als Lösung erhalten Sie:

$$\underline{\underline{d_1 = 262{,}5}} \qquad \underline{\underline{d_2 = 437{,}5}}$$

Die Durchmesser der Teilkreise betragen $d_1 = 262{,}5$ mm und $d_2 = 437{,}5$ mm. Führen Sie die Kritik der Lösung selbst durch!

Lehrbeispiel 127

Ein Elbdampfer braucht für die 46,8 km *lange Strecke von Dresden nach Bad Schandau stromauf* 5,2 *Stunden; für die gleiche Strecke stromab* 3,6 *Stunden. Wie groß sind die Geschwindigkeiten des Schiffes und des Stromes?*

Lösung:

Bezeichnen Sie die Schiffsgeschwindigkeit mit v_1 km/h, die Stromgeschwindigkeit mit v_2 km/h.
Bei der Fahrt stromab addieren sich die Geschwindigkeiten; die resultierende Geschwindigkeit ist $(v_1 + v_2)$ km/h. Bei der Fahrt stromauf ist die resultierende Geschwindigkeit $(v_1 - v_2)$ km/h. Für beide Fahrten, stromab und stromauf, gilt die Grundgleichung für die gleichförmige Bewegung:

$$\text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit} = \text{Weg}$$

Die Anwendung dieser Grundgleichung auf beide Fahrten liefert das System:

$$\left| \begin{array}{l} (v_1 + v_2) \cdot 3{,}6 = 46{,}8 \\ (v_1 - v_2) \cdot 5{,}2 = 46{,}8 \end{array} \right|$$

Als Lösung erhalten Sie:

$$\underline{\underline{v_1 = 11}} \qquad \underline{\underline{v_2 = 2}}$$

Die Schiffsgeschwindigkeit beträgt 11 km/h, die Stromgeschwindigkeit 2 km/h.

Kritik der Lösung!

Lehrbeispiel 128

Ein Kessel von 3600 l *Inhalt kann durch zwei Pumpen A und B gefüllt werden. Für die Füllung muß Pumpe A* 55 min *und außerdem Pumpe B* 45 min *arbeiten oder Pumpe A* 45 min *und außerdem Pumpe B* 81 min. *Wie lange braucht jede Pumpe allein für die Füllung des Kessels?*

Lösung:

Pumpe A brauche x min, Pumpe B y min, um den Kessel von 3600 l Inhalt zu füllen. Dann beträgt die

$$\text{Leistung der Pumpe A} \quad \frac{3600}{x}\ \text{l/min}$$

$$\text{Leistung der Pumpe B} \quad \frac{3600}{y}\ \text{l/min}$$

Wenn Pumpe A 55 min, Pumpe B 45 min arbeitet, so fördert Pumpe A $55 \cdot \frac{3600}{x}$ l, Pumpe B $45 \cdot \frac{3600}{y}$ l; da dann aber laut Aufgabe eine Kesselfüllung gefördert ist, gilt die Gleichung:

$$55 \frac{3600}{x} + 45 \frac{3600}{y} = 3600$$

Wenn Pumpe A 45 min, Pumpe B 81 min arbeitet, so fördert Pumpe A $45 \cdot \frac{3600}{x}$ l, Pumpe B $81 \cdot \frac{3600}{y}$ l, zusammen eine Kesselfüllung. Dieser Sachverhalt liefert die zweite Gleichung:

$$45 \frac{3600}{x} + 81 \frac{3600}{y} = 3600$$

Beide Gleichungen lassen sich dadurch vereinfachen, daß man jeweils ihre beiden Seiten durch 3600 dividiert:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{55}{x} + \frac{45}{y} = 1 \\ \\ \frac{45}{x} + \frac{81}{y} = 1 \end{array} \right|$$

Für die weitere Behandlung dieses Systems führt man zweckmäßig die neuen Unbekannten

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{y}$$

ein (vgl. Lehrbeispiel 125!). Sie erhalten die Lösung:

$$\underline{\underline{x = 67{,}5}} \qquad \underline{\underline{y = 243}}$$

Pumpe A benötigt 67,5 min; Pumpe B 243 min.

Kritik der Lösung!

Lehrbeispiel 129

Eine Legierung von Silber und Kupfer hat die Dichte 9,9 g/cm³. *Wieviel Gramm Silber und Kupfer sind in* 627 g *der Legierung enthalten? Die Dichte von Silber beträgt* 10,5 g/cm³; *die von Kupfer* 9,0 g/cm³.

Lösung:

Der Anteil des in der Legierung enthaltenen Silbers beträgt x g, der Anteil des Kupfers y g.

Die Summe der Gewichtsanteile an Silber und Kupfer ergibt die Gesamtmenge der Legierung. Diese Beziehung liefert die erste Gleichung:

$$x + y = 627$$

Ferner ergibt die Summe der Volumina der Anteile an Silber und Kupfer das Gesamtvolumen der Legierung.

Das Volumen des Anteils an Silber beträgt $\frac{x}{10{,}5}$ cm³.

Das Volumen des Anteils an Kupfer beträgt $\frac{y}{9,0}$ cm³.

Das Volumen der Legierung beträgt $\frac{627}{9,9}$ cm³.

Dieser Sachverhalt liefert die zweite Gleichung:

$$\frac{x}{10,5} + \frac{y}{9} = \frac{627}{9,9}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich mit 3,3 kürzen.

$$\frac{x}{10,5} + \frac{y}{9} = \frac{190}{3}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit dem Hauptnenner $10,5 \cdot 9$ erhält man das System

$$\left| \begin{aligned} 9x + 10,5y &= 5985 \\ x + y &= 627 \end{aligned} \right.$$

Die Lösung ist

$$\underline{\underline{x = 399}} \qquad \underline{\underline{y = 228}}$$

Die Legierung enthält 399 g Silber und 228 g Kupfer.

Kritik der Lösung!

Achten Sie darauf, daß beim Lösen von Anwendungsaufgaben die Gleichungen auch hinsichtlich der Einheiten richtig sind! Am besten legt man die Einheiten der Unbekannten vorher fest und schreibt sie im Ansatz nicht mehr mit. Dann hat aber auch die Lösung des Gleichungssystems keine Benennung. Diese kommt erst im Ergebnissatz wieder zum Ausdruck. Vergleichen Sie hierzu Lehrbeispiel 129. Dort betragen die Anteile der Legierung an Silber und Kupfer x g und y g. In den Gleichungen des Systems werden x und y aber als *reine* (unbenannte) Zahlen und nicht als *Größen* (benannte Zahlen) verwendet. Daher müssen auch in der Lösung x und y als *unbenannte Zahlen* angegeben werden; also $x = 399$; $y = 228$ und nicht etwa $x = 399$ g; $y = 228$ g. Die in der Aufgabe gestellte Frage wird am Schluß in einem kurzen Satz beantwortet, in dem dann die Benennungen wieder auftreten müssen: Die Legierung enthält 399 g Silber und 228 g Kupfer.

Zusammenfassung

Anwendungsaufgaben, bei denen zwei Größen gesucht sind, führen meist auf Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die in der Aufgabe gemachten Angaben sind dabei durch zwei Gleichungen auszudrücken, die sich nicht widersprechen oder nicht voneinander abhängig sein dürfen. Das Gleichungssystem wird dann in der gewohnten Art gelöst.
Auch bei Anwendungsaufgaben mit zwei Unbekannten ist die Antwort in Worte zu fassen. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Antwort muß eine Kritik der Lösung erfolgen.

Übungen

338. *Bei zwei Kreisen beträgt der Unterschied der Durchmesser* 3,0 m; *die Summe der Umfänge ergibt* 104,0 m. *Wie groß sind die Durchmesser?*

339. *Ein Wasserbehälter kann durch zwei Pumpen gespeist werden. Er wird gefüllt, wenn Pumpe A* 85 min *und Pumpe B* 91 min *arbeitet oder wenn Pumpe A* 115 min *und Pumpe B* 49 min *arbeitet. Berechnen Sie die Fülldauer für jede Pumpe allein!*

340. *An einer Installation arbeiten Monteur A und Monteur B zusammen* 18 *Tage. Die gleiche Installation kann ausgeführt werden, wenn Monteur A* 20 *Tage und außerdem Monteur B* 15 *Tage daran arbeitet. Wie lange braucht jeder allein, um die Arbeit auszuführen?*

341. *Mischt man zwei Sorten Farben, von denen* 1 kg 1,30 DM *bzw.* 1,60 DM *kostet, so beträgt der Preis von* 1 kg *der Mischung* 1,50 DM. *Er würde aber nur* 1,40 DM *betragen, wenn von der geringeren Sorte* 8 kg *mehr und von der besseren* 14 kg *weniger genommen würden. Wieviel Kilogramm von jeder Sorte werden zur ersten Mischung genommen?*

342. *Auf der Peripherie eines Kreises, dessen Umfang* 120 m *beträgt, bewegen sich zwei Körper im entgegengesetzten Sinne und begegnen sich jeweils nach* 15 s. *Der Unterschied ihrer Geschwindigkeiten beträgt* 2 m/s. *Welche Geschwindigkeit hat jeder der beiden Körper?*

343. *Man hat zwei Silberlegierungen von verschiedenem Silbergehalt. Schmilzt man* 3,5 kg *der Sorte I mit* 1,5 kg *der Sorte II zusammen, so erhält man eine Legierung von* 876 ‰ *Silbergehalt. Schmilzt man* 2,5 kg *der Sorte I mit* 3,5 kg *der Sorte II zusammen, so entsteht eine Legierung von* 825 ‰ *Silbergehalt. Welchen Silbergehalt hat jede Sorte?*

[Ü]

10.6 Aufgaben (Übungen 344 bis 376)

344. $\left| \begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = 5 \end{array} \right|$

345. $\left| \begin{array}{l} x + 3y = 20 \\ x - 5y = 12 \end{array} \right|$

346. $\left| \begin{array}{l} x + y = 8(a - b) \\ x - y = 2(a + b) \end{array} \right|$

347. $\left| \begin{array}{l} 8x - 3y = 100 \\ 7x + 4y = 167 \end{array} \right|$

348. $\left| \begin{array}{r} x = 3y \\ 8x - 7y = 85 \end{array} \right|$

349. $\left| \begin{array}{r} 15x - 16y = 24 \\ 3x = 4y \end{array} \right|$

350. $\left| \begin{array}{l} 1{,}9x - 1{,}1y = 10 \\ 1{,}6x - 0{,}4y = 10 \end{array} \right|$

351. $\left| \begin{array}{l} 0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}08 \\ 1{,}2x_1 + 0{,}5x_2 = 2{,}34 \end{array} \right|$

352. $\left| \begin{array}{l} \frac{3}{7}x + \frac{5}{8}y = 2{,}1 \\ 2\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y = 1{,}5 \end{array} \right|$

353. $\left| \begin{array}{l} \frac{3}{17}u + \frac{5}{11}v = 9 \\ \frac{1}{2}u + \frac{2}{3}v = 5 \end{array} \right|$

354. $\left|\begin{array}{l} a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \\ ax + by = 2a \end{array}\right|$

355. $\left|\begin{array}{l} bx - ay = -1 \\ a^2x - b^2y = a + b \end{array}\right|$

356. $\left|\begin{array}{l} (2x + 4)(y - 2) = (x - 3)(2y + 1) \\ (3x + 11)(2y - 3) = (2x + 6)(3y - 4) \end{array}\right|$

357. $\left|\begin{array}{l} (5x + 8)(4y - 3) = (2x + 7)(10y - 17) \\ (3x + 9)(6y - 7) = (2x + 5)(9y - 8) \end{array}\right|$

358. $\left|\begin{array}{l} 6{,}8x - 5{,}2y = 15{,}9 \\ 5{,}1x - 3{,}9y = 21{,}2 \end{array}\right|$

359. $\left|\begin{array}{l} 5{,}06x + 3{,}74y = 4{,}18 \\ 1{,}61x + 1{,}19y = 1{,}33 \end{array}\right|$

360. $\left|\begin{array}{l} 0{,}48x + 0{,}23y = 50{,}3 \\ 0{,}17x - 0{,}11y = 15{,}9 \end{array}\right|$

361. $\left|\begin{array}{r} \dfrac{3x + 2{,}5}{x + 0{,}5} - \dfrac{4y + 6{,}5}{2y + 2{,}5} = 1 \\ 3x - 2y = 2{,}5 \end{array}\right|$

362. $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x - y + 2}{x + y + 7} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x + y + 3}{6x + 4y + 9} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right|$

363. $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x + 0{,}5}{y - 1{,}5} = \dfrac{x + 4{,}5}{y + 2{,}5} \\ \dfrac{3x - 0{,}5}{2y - 4} = \dfrac{6x - 2}{4y - 9} \end{array}\right|$

364. $\left|\begin{array}{l} \dfrac{ax + 1}{by + 1} = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{ax + by}{ax - by} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \end{array}\right|$

365. $\left|\begin{array}{l} \dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{y} = 2{,}75 \\ \dfrac{5}{3x} + \dfrac{13}{9y} = 1 \end{array}\right|$

366. *An einem Hebel bleibt das Drehmoment einer Kraft unverändert, wenn man die Kraft um* 12 kp *vergrößert und gleichzeitig den Arm um* 1 cm *verkürzt oder wenn man die Kraft um* 18 kp *verkleinert und gleichzeitig den Arm um* 4 cm *verlängert. Wie groß sind Kraft und Arm?*

367. *Auf einer Kreisbahn von* 225 m *Länge bewegen sich zwei Körper. Erfolgt die Bewegung im entgegengesetzten Sinn, so begegnen sie sich jeweils nach* 18 s; *bei Bewegung im gleichen Sinn überholt der eine den anderen jeweils nach* 90 s. *Wie groß sind die Geschwindigkeiten beider Körper?*

368. *Wirken zwei Kräfte in der gleichen Richtung, so ergibt sich die Resultierende mit* 45 kp. *Wirken die Kräfte entgegengesetzt, so ist die Resultierende* 5 kp. *Wie groß sind die beiden Kräfte?*

369. *Für zwei Zahnräder eines Getriebes gilt das Übersetzungsverhältnis* 11:7. *Verringert man bei beiden Zahnrädern die Zähnezahl um* 4, *so ist das Übersetzungsverhältnis* 5:3. *Wieviel Zähne besitzt jedes Rad?*

370. *Werden* 1,4 kg *Silber einer ersten Sorte mit* 3,5 kg *einer zweiten Sorte legiert, so entsteht Silber mit dem Feingehalt* 825. *Werden dagegen* 3,2 kg *der ersten und* 2,4 kg *der zweiten Sorte legiert, so hat das Silber den Feingehalt* 775. *Welchen Feingehalt hat jede der beiden Sorten?*

371. *Beim Aufstellen einer Maschine arbeitet ein Monteur* 25 *Stunden und ein Lehrling* 16 *Stunden. Die Löhne belaufen sich zusammen auf* 93,63 DM. *Bei einer anderen Montage ist der Monteur* 24 *Stunden und der Lehrling* 20 *Stunden beschäftigt. Beide erhalten dafür zusammen* 96,52 DM *Lohn. Wie groß sind die Stundenlöhne?*

372. *Zwei Kredite von insgesamt* 6500 DM *wurden zu* $2^1/_2$ % *bzw.* 3 % *verzinst. Der zweite Kredit erfordert jährlich* 25 DM *weniger Zinsen als der erste. Wie groß ist jeder Kreditbetrag?*

373. *Für den Kauf von Möbeln wurden von einem Wohnungsinhaber zwei Darlehen aufgenommen, die zu* $3^1/_2$ % *und* 4 % *verzinst wurden und im ersten Halbjahr* 46,25 DM *Zinsen erforderten. Wären die Darlehenssummen miteinander vertauscht worden, so hätten* 47,50 DM *Zinsen gezahlt werden müssen. Wie hoch waren die beiden Darlehen?*

374. *Zwei Betriebe des Maschinenbaus produzierten im 1. Halbjahr 1959 zusammen* 7500 *Stück einer Werkzeugmaschine. Durch Einführung der Seifert-Methode stieg die Produktion der beiden Betriebe, die im überbetrieblichen Wettbewerb stehen, im* 2. *Halbjahr 1959 auf* 9145 *Stück. Dabei war die Produktion des einen Betriebes auf* 120 %, *die Produktion des anderen auf* 125 % *gegenüber dem 1. Halbjahr 1959 gestiegen.*

Wieviel Werkzeugmaschinen hatte jedes Werk im 1. Halbjahr 1959 und im 2. Halbjahr 1959 hergestellt?

375. *Von der Abteilung Einkauf eines chemischen Werkes wurden* 15 kg *Lösungsmittel A und* 20 kg *Lösungsmittel B für zusammen* 75,10 DM *eingekauft. Bei einer Nachbestellung wurden umgekehrt* 15 kg *Lösungsmittel B und* 20 kg *Lösungsmittel A gekauft, wodurch die Rechnung nun* 15 DM *höher lautete.*

Wieviel kostete je ein Kilogramm der beiden Lösungsmittel?

376. *Eine LPG erhielt zum Anschaffen von Zuchtvieh einen Kredit, für den sie jährlich* 84 DM *gezahlt hat. Nachdem der Zinsfuß um* $\frac{1}{2}$ % *gesenkt wurde, spart die Genossenschaft jährlich* 14 DM.

Wie hoch ist der Kredit, wie hoch war der Zinsfuß anfangs?

Antworten und Lösungen

1. a) $6a + 5b$ b) $3x + 11y + z$ c) $4a + b + 2c$ d) $ab + 3cd$

2. a) $36abc$ b) $10xyz$ c) $60a^2b$ d) $144a^2b^2$

3. a) $2^2 \cdot 3 = 12$ b) $5 \cdot 13 = 65$ c) $3 \cdot 31 = 93$

4. a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$ b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772$
   c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 = 1428$ d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 11880$
   e) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ f) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 1512$

5. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{17}$

6. a) 1 b) $\frac{11}{30}$ c) $2\frac{9}{40}$

7. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $2\frac{1}{16}$ d) $4\frac{41}{240}$ e) 72

8. a) $2\frac{4}{25}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $2\frac{5}{49}$

   d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; je kleiner der Nenner wird, desto größer wird der Wert des Bruches.

9. a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{35}{138}$ c) $\frac{1}{55}$ d) 5 e) $\frac{5}{6}$

10. $7\frac{1}{2}$

11. a) 3034,05 b) 15940,305 kg c) 2516

12. a) 2146,733 kg b) 1086,00 kg

13. a) 687,8466 b) 0,210496
    c) 86,30 DM d) 524,79 cm² $\approx$ 525 cm²

14. a) 121,6 b) 257,4 c) 1,065 d) 1500

15. a) 0,875 b) 0,075 c) 0,3125 d) 0,09375 e) 0,1125

16. a) $0{,}2\overline{6}$ b) $0{,}41\overline{6}$ c) $0{,}\overline{4}$ d) $0{,}\overline{65853}$ e) $0{,}3\overline{18}$

17. a) 5,75 b) 3,625 c) $2{,}\overline{6}$ d) $4{,}58\overline{3}$ e) $6{,}\overline{714285}$

18. a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{16}{25}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{7}{40}$ e) $\frac{11}{1250}$

19. a) $3\frac{3}{4}$ b) $6\frac{1}{8}$

20. 3,76; 2,84: 4,85; 4,29; 79,28; 5,28

21. 3300; 3200; 3300; 3200; 3400

22. a) $\frac{34}{35}$ b) $1\frac{43}{60}$ c) $3\frac{11}{20}$ d) $1\frac{7}{24}$ e) $\frac{59}{90}$ f) $\frac{1}{48}$

23. a) $1\frac{1}{15}$ b) $7\frac{31}{168}$ c) $3\frac{11}{60}$ d) $\frac{71}{120}$

24. a) $\frac{2}{3}$ b) 10 c) $8\frac{1}{3}$ d) $16\frac{1}{4}$

25. a) $\frac{5}{32}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{22}{27}$ d) 3 e) $\frac{33}{98}$ f) $\frac{1}{2}$

26. a) 70 b) $4\frac{1}{12}$ c) 10 d) $30\frac{1}{4}$

27. a) $1\frac{1}{5}$ b) $1\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{9}{10}$

28. a) $5\frac{5}{14}$ b) 3 c) $\frac{27}{100}$ d) $14\frac{2}{5}$

29. a) $7\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{55}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $33\frac{1}{3}$

30. a) $1\frac{7}{8}$ b) $\frac{15}{28}$ c) $16\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{17}$

31. a) $1\frac{9}{26}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $1\frac{17}{104}$ d) $2\frac{2}{3}$

32. a) $\frac{3}{5}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) $\frac{558}{1435}$ d) $\frac{1}{23}$

33. a) $\frac{13}{30}$ b) $14\frac{9}{10}$

34. $9\frac{1}{15}$ kg $\approx$ 9,07 kg

35. 3 dt

36. $30\frac{1}{3}$ dt

37. 1650 t Erz, 750 t Koks, 600 t Zuschläge.

38. 29 h 18 min = 29,3 h = $29\frac{3}{10}$ h

39. 27,80 m

40. a) 1,10592 b) 0,0092106 c) 3,864

41. a) 9619,50 DM b) 469,92 kg $\approx$ 470 kg

42. a) 0,0435 b) 23200 c) 7,45

43. a) 0,016 b) 0,791 c) 137,418

44. a) $+14$ b) $+4$ c) -9 d) -124 e) $+96$ f) -25

45. a) -13 b) -3 c) 13 d) 3 e) 3 f) 3

46. a) -36 b) $47z$ c) $22u - 12v$ d) $4{,}1a - 0{,}1b$

47. a) $2c - 2b$ b) $5x - 8y$ c) $14 - 6x$

48. a) $7a + 17b - 7$ b) $5a + 9b + 3$

49. a) $\frac{1}{4}b + \frac{2}{3}c$ b) $\frac{1}{2}y$ c) $10a - 5b$ d) $0{,}34b - 2{,}07a$

50. a) $2{,}4xyz$ b) $-216uvw$ c) $0{,}84abc$

51. a) $5de$ b) $3{,}8rs$

52. a) $56p - 60q$ b) $x^3 + 9x^2$ c) $1{,}2a^2b - 2{,}1ab^2$ d) $15u - 24$

53. a) $0{,}2s + 8t$ b) $15ax + 10ay - 5a$ c) $60x + 12$ d) $-5a$

54. a) $5(3a + 4b - 2c)$ b) $2\pi r\,(r + h)$ c) $24x\,(3x^2 + 2x - 4)$

55. a) $3a\,[19a - 7\,(b + 2c)]$ b) $(x - 3)\,(x + y)$
c) $(2a - 3b)\,(3x - 2y)$ d) $(3x - 11y + 6z)\,(0{,}4a - 0{,}5b)$

56. a) $-16{,}84x^2 + 119{,}97x - 92$ b) $3m^2 - mn - 2n^2 + 3mp + 2np$
c) $12u^2 - 3uv + 2u + v - 2$ d) $a^3 - b^3$ e) $x^3 + y^3$

57. a) $\frac{9}{16} + \frac{3}{2}b + b^2$ b) $0{,}16a^2 - 0{,}16ab + 0{,}04b^2$ c) $9x^2 - \frac{4}{49}$

58. a) $8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$ b) $a^3 + 24a^2 + 192a + 512$
c) $0{,}008 - 0{,}012b + 0{,}006b^2 - 0{,}001b^3$

59. a) $\frac{1}{4}a^2 + b^2 + 4c^2 + ab - 2ac - 4bc$

b) $25 + \frac{9}{25}x^2 + m^2 - 6x + 10m - \frac{6}{5}mx$

c) $4p^2 + 9q^2 + r^2 + \frac{1}{4} + 12pq - 4pr + 2p - 6qr + 3q - r$

60. $1{,}0075^2 \approx 1{,}015$

61. $16x^4 - 625y^4$

62. a) $2ab$ b) $2b^2 - 2ab = 2b(b - a)$ c) $4ab$

63. a) $2\,(a^2 + b^2)$ b) $2a^2$ c) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

64. a) $a^2 - 2ab + b^2$ b) $x^2 + 4x + 4$ c) $9p^2 - 24pq + 16q^2$
d) $9x^2 + 24x - 12xy + 4y^2 - 16y + 16$

65. a) $(a+1)^2$ b) $(2x+3)^2$ c) $(4u-5v)^2$

66. a) $x^2+8x+16$ b) $x^2-10x+25$ c) $x^2 \pm 24x+144$

67. a) $\widetilde{V} = 132{,}5\ \mathrm{cm}^3$; $V = 132{,}651\ \mathrm{cm}^3$

b) $\widetilde{V} = 61{,}60\ \mathrm{m}^3$; $V = 61{,}629875\ \mathrm{m}^3$

68. a) $x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

b) $y^6-1{,}2y^5+0{,}6y^4-0{,}16y^3+0{,}024y^2-0{,}00192y+0{,}000064$

69. a) -5 b) $-a$ c) $9{,}5d$

70. a) $5x$ b) $-2y$ c) $-7s$

71. a) $5a^2c$ b) acx

72. a) $-3a+4x+4y$ b) $3x-2y+1{,}5c$

73. a) $3a+9$ b) a^2-2a+3 c) $2x-4y$

74. a) $x-y+z$ b) $7a-3b-5x$

75. a) $m^3-m^2n+mn^2-n^3$ b) $16x^4-24x^3+36x^2-54x+81$

76. a) $6a-5$ b) $2x-4x+6z$ c) $9x^2-4y$

77. a) a^2-ab+b^2 b) a^2+ab+b^2

78. a) $\frac{yz}{v}$ b) a c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{3u}{v}$ e) $\frac{b}{3a}$ f) $\frac{1}{3p}$

79. a) $a+b$ b) $\frac{2}{3}$ c) $c+d$

80. a) $x-8$ b) $n+1{,}5v$ c) $\frac{12n-13v}{12n+13v}$ d) $x-3y$

81. a) $\frac{6x}{11x}$ b) $\frac{x^2}{xy}$ c) $\frac{cx}{rsx}$ d) $\frac{3ax^2}{4bx}$

82. a) $\frac{13a}{11}$ b) 1 c) 2

83. a) $\frac{47x}{30}$ b) $\frac{12x^2+4xy+9y^2}{6xy}$ c) $\frac{a}{(a+b)\,b}$

d) $-\frac{2x^2}{x^2-1}$ e) $-\frac{13}{4}$ f) $\frac{20s^2-16s+9}{s^2-4s-21}$

84. a) $\frac{8}{21}$ b) $\frac{15a}{bc^2}$ c) $\frac{4xyz}{c}$ d) $46\frac{3}{4}uv^3w^2$

e) 1 f) $\frac{x-y}{3}$ g) $\frac{9}{p^2}-1$

85. a) $\frac{3af}{2c^2}$ b) $\frac{2n}{5pt}$ c) $\frac{6}{5z}$ d) $\frac{35y^2}{3x}$

e) $\frac{33a}{20b}$ f) $\frac{2\,(r-s)}{3\,(a+b)}$ g) -6 h) a i) $\frac{a}{b}$

86. a) $9a + 3b - 7x$ b) $4a + 4\frac{1}{3}b + 7c$

87. a) $2m - 11n - p + 7q$ b) $-\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{6}b + 2\frac{1}{6}c$

88. a) $3x - y$ b) $2a - 10b$

89. a) $x + 2y - 3z$ b) $4a - 3b - 2x$

90. a) $a - b$ b) b

91. a) $8x^2 + 10xz - 2y^2 + 7yz - 3z^2$ b) $-2(ad - bc)$

92. a) $7c(5a - 7b + 3c)$ b) $17y(3a - 4x + 5y)$
c) $(a - 2)(b + 3)$ d) $(3a - 5x)(3b - 4x)$

93. a) $7a - 3n - 13p$ b) $15a - 8b + 14c$

94. a) $a^2 + 2a + 4$ b) $16x^2 - 12ax + 9a^2$

95. a) $3a^2 - 4ab + 2b^2$ b) $3x^2 + 2xy - y^2$

96. a) $\frac{m+n}{m-n}$ b) $6w - 5z$ c) $5s - 8t$

97. a) $\frac{x-y}{x+y}$ b) $\frac{4w-7z}{4w+7z}$

98. a) $\frac{8x}{7a}$ b) b c) $\frac{b}{x}$ d) 3 e) 2

99. a) $\frac{3ad + 4bd + 2ac - 6bc}{cd}$ b) $\frac{4}{x^2-4}$ c) $\frac{8y^2 - 6xy - 4x^2}{x^2 - y^2}$

100. a) $\frac{a^2-2}{a^2}$ b) $\frac{4a^3 + 18a^2 + 22a + 6}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$
c) 0 d) $\frac{1}{6x^2 + x - 1}$

101. a) $2x$ b) $\frac{5ax}{16c}$ c) $8\frac{11}{18}a^2b^2c^2$ d) $\frac{(x-y)^2}{(m+n)^2}$ e) $\frac{c(n+v)}{n-v}$
f) $\frac{56x^3y + 45x^2}{84y^3}$ g) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$ h) 0

102. a) $\frac{2rtx}{3syz}$ b) $\frac{nx^2}{abmz}$ c) $\frac{b}{2c}$ d) $\frac{27bd}{c}$ e) $\frac{172c}{77a}$
f) 1 g) $\frac{a+b}{b-a}$ h) $\frac{1}{a}$ i) $\frac{x}{a}$

103. a) 705600 b) 18,15 c) 5806 d) 0,05476

104. a) 613100 b) 278900000 c) 0,00001076 d) 0,000676

105. a) 110592000 b) 302,1 c) 23150 d) 0,003870

106. a) 21 020 000 b) 5 178 000 000 c) 0,000 000 9042 d) 0,000 571 787

107. a) 88,3176 b) 9,26 c) 58,6 d) 247

108. a) 0,142 b) 0,0449 c) 29,8 d) 942

109. a) 0,40615 b) 2,98 c) 11,7 d) 0,938

110. a) 13,6 b) 0,293 c) 447 d) 0,0963

111. a) 1994 b) 0,02641 c) 149 300 d) 0,5605

112. a) 94,15 b) 0,794 c) 93 d) 0,305

113. a) $x = 28$ b) $x = \frac{1}{12}$ c) $x = -2\frac{2}{15}$ d) $x = 8{,}6b$

114. a) $x = 5(2a - b)$ b) $x = -6(2a + b)$

115. a) $x = 4$ b) $x = 20$ c) $x = 55$ d) $x = \frac{2}{3}$

116. a) $x = 3$ b) $x = 1$

117. $R = \frac{U}{I}$ $I = \frac{U}{R}$

118. a) $g = \frac{v}{t}$ b) $g = \frac{2s}{t^2}$

119. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -3$

120. a) $x = -1$ b) $x = 2\frac{a-b}{a} = 2\left(1 - \frac{b}{a}\right)$

121. a) $x = 2$ b) $x = a + b$

122. a) $x = 6$ b) $x = 3$

123. a) $x = 1$ b) $x = 4$ c) $x = -2$

124. a) $x = 1$ b) $x = 1$ c) $x = 2$

125. a) $x = \frac{cm}{a+b} + 2$ b) $x = \frac{2m}{n-m}$ c) $x = \frac{m(t_2 - t)}{t - t_1}$

126. a) $x = 1$ b) $x = u + v$ c) $x = a$

127. a) $x = 2$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = 0$

128. a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{a+b}{2}$

129. $k = \frac{vp}{273 + t}$; $\quad p = \frac{k\,(273 + t)}{v}$; $\quad t = \frac{vp}{k} - 273$

130. $R_i = \frac{nE - I R_a}{nI}$; $\quad R_a = \frac{nE}{I} - n R_i = \frac{n\,(E - I R_i)}{I}$; $\quad I = \frac{nE}{R_a + n R_i}$

131. a) $x = 12$ b) $x = 7$

132. a) $x = \frac{ac}{b + c}$ b) $x = \frac{b}{a - bc}$ c) $x = \frac{ab}{a + b}$

133. a) $x = 5$ b) $x = 2{,}5$ c) $x = 4$

134. a) $x = 4\frac{1}{4}$ b) $x = 13$ c) $x = 0$ d) $x = 3$

135. a) $x = 1$ b) $x = -1\frac{7}{11}$ c) $x = 4$ d) $x = 9$

136. $f = \frac{bg}{b + g}$ $\quad b = \frac{gf}{g - f}$ $\quad g = \frac{bf}{b - f}$

137. $Q = \frac{2 P d_1}{d_1 - d_2}$ $\quad d_1 = \frac{Q d_2}{Q - 2P}$ $\quad d_2 = \frac{d_1 (Q - 2P)}{Q} = d_1 - \frac{2 P d_1}{Q}$

138. $x = 90$

139. $x = \frac{4}{5}$

140. 15 Mädchen, 25 Jungen, 4 Lehrer.

141. Der Mischungspreis beträgt 6 DM.

142. Es müssen 160 kg Nickel zugesetzt werden.

143. Die Arbeit ist nach 9 Tagen beendet. A schreibt 216 Seiten, B 144 Seiten.

144. Ansatz: $0{,}35x + 0{,}18x = 3{,}65$

$$x \approx 6{,}89$$

Die Arbeit ist nach etwa 6 h 54 min beendet.

145. Ansatz: $\frac{1}{75} + \frac{1}{50} = \frac{1}{x}$

Beide Arbeiter benötigen zusammen 30 Stunden ($\hat{=}$ 4 Tage).

146. $x = 8{,}50$; der Arbeitslohn verteilt sich wie folgt:

A: $32x = 272$ DM	
B: $28x = 238$ DM	
C: $36x = 306$ DM	
D: $24x = 204$ DM	
Gesamtbetrag	1020 DM

147. Ansatz: $75000000 + 75x - 40\,(x + 54000) = 100000000$

Die Talsperre wird in 215,6 Stunden gefüllt sein.

148. a) $x = 2$ b) $x = 5$ c) $x = \frac{a - m}{n}$ d) $x = \frac{p - a}{q}$

149. a) $x = b$ b) $x = 0$ c) $x = b$ d) $x = a$

150. a) $x = 10$ b) $x = -1$ c) $x = \frac{15}{a - 5}$ d) $x = \frac{10}{a + 1}$

e) $x = \frac{c}{a + b}$ f) $x = \frac{a}{1 - m}$

151. a) $x = 5$ b) $x = a + 2b$

152. a) $x = 40$ b) $x = 7$

153. a) $x = 2$ b) $x = 7$

154. a) $x = 4$ b) $x = 0$ c) $x = 5$ d) $x = m$

155. a) $x = 5$ b) $x = 7$

156. a) $x = 11$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{a - b}{a + b}$ d) $x = \frac{a}{b}$

157. a) $x = 7$ b) $x = 8$

158. a) $x = 1$ b) $x = 2\frac{1}{2}$

159. a) $x = 3$ b) $x = 9$ c) $x = 17$ d) $x = 0{,}3$

160. a) $x = a^2 + b^2$ b) $x = b$

161. a) $x = ab$ b) $x = a$

162. a) $x = 2$ b) $x = 2$

163. a) $x = 2$ b) $x = 3$

164. a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{17}{6}$ d) $x = 7$

165. a) $x = \frac{4a^2 - b^2}{2a + b} = 2a - b$ b) $x = \frac{4b^2(b^2 - a^2)}{4b^2(b - a)} = a + b$

c) $x = \frac{a + b}{a - b}$ d) $x = \frac{n(a + b)}{m(a - b)}$

166. Ansatz: $x + \frac{90}{3} + x = 330$

Monteur B verdient in der Woche 150 DM, Monteur A 180 DM.

167. Ansatz: $x \cdot 26 = (x + 6) \cdot 20$

Der Abstand zwischen den Sprossen der Leiter beträgt 20 cm.

168. Gemeinde A erhält 1200 DM (300 · 4),
Gemeinde B erhält 8400 DM (2100 · 4),
Gemeinde C erhält 2800 DM (700 · 4),
Gemeinde D erhält 3600 DM (900 · 4).

169. Ansatz: $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$

Der erste Wagen ist zum Zeitpunkt des Überholens 5 Stunden und 20 Minuten unterwegs.

170. Die Arbeit dauert $6\frac{1}{4}$ Stunden.

171. Ansatz: $\frac{1}{48} + \frac{1}{70} = \frac{1}{x}$

Das Füllen dauert rund 28,5 Stunden.

172. Ansatz: $40 \cdot 8 = 45x$; $x \approx 7{,}1$

Bus B benötigt etwa 7 Stunden, er muß also gegen 9 Uhr starten.

173. Es werden 13,5 dt Roggen und 4,5 dt Weizen gebraucht.

174. Der Mischungspreis beträgt 3 DM je Liter.

175. Ansatz: $80 \cdot 6 + 60x + 50\,(54 - x) = 3360$; $x = 18$

Es sind 36 kg zu 50 DM/kg,
18 kg zu 60 DM/kg und
6 kg zu 80 DM/kg zu nehmen.

176. Ansatz: Gesamtlänge der Züge $s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t$

$$t = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2}$$

In 13,5 Sekunden sind die Züge aneinander vorbeigefahren.

177. Außer der gegebenen Zeit benötigen Sie den Weg des Kraftwagens (s_a), der sich aus der Länge des Zuges l und dem vom Zug in 24 Sekunden zurückgelegten Weg ($v_z \cdot t$) zusammensetzt.

Ansatz: $s_a = v_a t = l + v_z t$

$$v_a = \frac{l + v_z t}{t}$$

Der Kraftwagen fährt mit der Geschwindigkeit 60 km/h.

178. Ansatz: $120 \cdot 60x + 50 \cdot 60\,(x - 1) = 93850$

Die erste Pumpe muß 9,5 Stunden, die zweite 8,5 Stunden arbeiten.

179. Ansatz: Querschnitt der Cu-Leitung: F
Querschnitt der Al-Leitung: $F + x$

$$\varrho_{\mathrm{Cu}} \cdot \frac{l_{\mathrm{Cu}}}{F} = \varrho_{\mathrm{Al}} \cdot \frac{l_{\mathrm{Al}}}{F + x}$$

$$x = \frac{F\,(\varrho_{\mathrm{Al}} \cdot l_{\mathrm{Al}} - \varrho_{\mathrm{Cu}} \cdot l_{\mathrm{Cu}})}{\varrho_{\mathrm{Cu}} \cdot l_{\mathrm{Cu}}}$$

$$x = \frac{0{,}029 \cdot 2{,}5 - 0{,}0178 \cdot 3}{0{,}0178 \cdot 3}\, F \approx \underline{\underline{0{,}358\,F}}$$

Der Querschnitt der Al-Leitung muß somit um 35,8 % größer sein.

180. Ansatz: $\frac{1}{3}x + 1{,}3\,x = 28$

Das Feld ist in 17 h 9 min abgeerntet.

181. Ansatz: $1 - \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 0$

Nach 12 Stunden würde der Behälter leer sein.

182. a) Ansatz: $\frac{100}{18} + \frac{100}{12} = \frac{100}{x}$

Der Betrieb kann nunmehr 100 t Produkt in 7,2 Tagen herstellen.

b) Die Kapazität beider Anlagen beträgt in 18 Tagen 250 t.

183. Ansatz: $\frac{14}{24} \cdot 0{,}86 + x \cdot 0 = \left(\frac{14}{24} + x\right) \cdot 0{,}10$

Der Wasserbedarf beträgt 4,43 t/h.

184. Ansatz: $4000 \cdot 0{,}03 - x \cdot 0 = (4000 - x) \cdot 0{,}50$

Es müssen 3,76 t Wasser abgedampft werden. An 50%iger Lösung bleiben also zurück 4 t — 3,76 t = 0,24 t.

185. Ansatz: $5{,}75 \cdot 1{,}80 \cdot 0{,}87 + 3{,}50 \cdot 1{,}30 \cdot 0{,}39 + x \cdot 1{,}00 \cdot 0$
$= (5{,}75 \cdot 1{,}80 + 3{,}50 \cdot 1{,}30 + x \cdot 1{,}00) \cdot 0{,}55$

Es sind 4,7 Liter Wasser zu nehmen.

186. Ansatz: $6 \cdot 0{,}15 + 8 \cdot 0{,}22 = (6 + 8) \cdot x$

Die Mischung ist 19 %ig.

187. Ansatz: $x \cdot 0{,}10 + (35 - x) \cdot 0{,}80 = 35 \cdot 0{,}50$

Es müssen 15 kg 10 %ige und 20 kg 80 %ige Schwefelsäure gemischt werden.

188. Ansatz: $8{,}3 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}06 - 2{,}8 \cdot 0 + 3{,}5 \cdot 1{,}11 \cdot 0{,}22 + 35 \cdot 0{,}17$
$= (8{,}3 \cdot 1{,}03 - 2{,}8 + 3{,}5 \cdot 1{,}11 + 35) \cdot k_M$
$k_M = 0{,}164$

Die Konzentration der Mischung beträgt etwa 16 %.

189. Ansatz:

$$50 \cdot 0{,}914 \cdot 0{,}50 + x \cdot 0{,}804 \cdot 0{,}95 = (50 \cdot 0{,}914 + x \cdot 0{,}804) \cdot 0{,}80$$
$$x = 113{,}7 \approx 114$$

Es müssen 114 Liter 95 %iger Spiritus verwendet werden.

190. a) $x = 4$ b) $x = 4{,}5$ c) $x = 7\frac{1}{2}$

$78 = 78$ $261 = 261$ $5 = 5$

191. a) $x = 12$ b) $x = 6$ c) $x = -9$ d) $x = \frac{1}{4}$

192. a) $3:4 = 6:x$ $x = 8$

b)

$3:6 = 4:8$	$4:8 = 3:6$
$8:4 = 6:3$	$6:3 = 8:4$
$8:6 = 4:3$	$4:3 = 8:6$
	$6:8 = 3:4$

193. a)

$4:5 = 8:10$	$8:10 = 4:5$
$4:8 = 5:10$	$5:10 = 4:8$
$10:5 = 8:4$	$8:4 = 10:5$
$10:8 = 5:4$	$5:4 = 10:8$

b)

$\frac{1}{2}:\frac{1}{3} = 9:6$	$9:6 = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}$
$6:\frac{1}{3} = 9:\frac{1}{2}$	$9:\frac{1}{2} = 6:\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}:9 = \frac{1}{3}:6$	$\frac{1}{3}:6 = \frac{1}{2}:9$
$6:9 = \frac{1}{3}:\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{2} = 6:9$

c)

$m:p = q:n$	$q:n = m:p$
$n:p = q:m$	$q:m = n:p$
$m:q = p:n$	$p:n = m:q$
$n:q = p:m$	$p:m = n:q$

194. $x = 123{,}67$ Rund 123,7 dt wurden geerntet.

195. $x = 303{,}96$ 72,42 DM Lohnsteigerung.

196. Inhalt des Gefäßes A: x l;
Inhalt des Gefäßes B: x l — 14 l.
Ansatz: $(x - 8):(x - 14 + 8) = 8:9$
Lösung: $x = 24$
Gefäß A enthält zu Beginn 24 l, Gefäß B enthält zu Beginn 10 l.

197. 17,50 DM und 7,50 DM.

198. $x = 0{,}8616$. 100 m haben eine Masse von rund 0,862 kg.

199. $x = 7250$. 5 Turbinen verbrauchen 7250 kg Dampf.

200. 8 mm von der Mitte der Scheibe entfernt - also eine „Neun“.

201. $x = 533{,}33$. Es werden rund 533,3 t Stahl erzeugt.

202. $x:y = 2:3$; $y:z = 4:5$; $x:z = 8:15$

203. $x = 18$; $y = 15$

204. 90 DM; 120 DM; 210 DM.

205. $x \approx 1{,}7753$. Der zweite Körper hat eine Masse von rund 1,78 kg.

206. $x = 45$. Der Höhenunterschied beträgt 45 m.

207. $x = 4{,}5$. Die Arbeit dauert 4,5 min.

208. $x = 2$. Er würde 2 h brauchen.

209. $x = \frac{6 \cdot 2 \cdot 26\,000}{3 \cdot 13\,000} = 8$.

Die doppelte Menge wird von 3 Pumpen in 8 h gefördert.

210. $x = 151{,}7$. Die Maschine würde ihr Ziel rund 8 min früher erreichen.

211. $x = 1{,}44$. Die Platte hat eine Masse von 1,44 kg.

212. $x = \frac{30 \cdot 8 \cdot 16}{7 \cdot 22} \approx 25$. Es werden 25 Tage gebraucht.

213. $x = \frac{55 \cdot 120 \cdot 910 \cdot 36}{96 \cdot 650 \cdot 45} = 77$.

Es ist eine Motorleistung von 77 kW erforderlich.

214. a) 20 %; $33\frac{1}{3}$ %; $12\frac{1}{2}$ %; $8\frac{1}{3}$ % b) 200 %; 300 %; 150 %

215. Die ursprüngliche Länge ist 4 m.

216. Die Produktion beträgt 1965 (gerundet) für

Roheisen	2150000 t
Treibstoffe	4200000 t
Personenkraftwagen	108000 Stück
Dederonseidengewebe	30,2 Mill. m^2

217.

	Volkskammer	Bundestag
Arbeiter	61,0 %	3,1 %
werktätige Bauern	7,8 %	4,1 %
Angestellte	12,8 %	10,1 %
Handwerker	8,5 %	4,7 %

	Volkskammer	Bundestag
Intelligenz	9,5 %	27,2 %
Unternehmer	0,5 %	13,8 %
Großgrundbesitzer	—	6,4 %
Beamte, Offiziere	—	14,2 %
Funktionäre der Parteien und Organisationen	—	16,5 %

218. Die Norm wurde mit 132 % erfüllt. Die Norm betrug 250 Kisten.

219. Unverändert ist das Gehalt des Mannes:
100 % — 38,75 % = 61,25 %; das sind 441 DM.
Das entspricht aber 49 % des neuen Gesamteinkommens.
Das neue Gesamteinkommen beträgt 900 DM.

220. Die Einsparung beträgt 117,60 DM, das sind 42 %.

221. 9,50 DM Zinsen.

222. 36,75 DM Zinsen.

223. 10320 DM Darlehen.

224. Das Darlehen wurde nach 135 Tagen zurückgezahlt.

225. 13,79 DM Zinsen sind zu zahlen.

226. a) $x = 27$ b) $x = 45$ c) $x = 12$ d) $x = 57$ e) $x = \frac{b}{c}$

227. $x = 36000$. Es werden 36 t Kartoffeln gebraucht.

228. a) Die kleinen Turbinen brauchen 4,4 t je h und MW Dampf, die großen nur 3,5 t je h und MW.
b) 115680 m^3 Wasser täglich.
c) 0,457 t Kohle je t Dampf.
d) 52866 t Kohle je Tag.

229. Ansatz: $10:(10 + x) = 250:269$; $x = 0,76$.
Der Spannungsverlust vergrößert sich um 0,76 V.

230. Die Leitung ist 4 km lang.

231. 356 kg Ammonsulfat enthalten 72,98 kg Stickstoff.

232. a) 798,98 DM b) 10700,80 DM c) 113,02 DM

233. a) 458,76 Rbl b) 22321,43 Lire c) 83 DM für 100 Nfrs

234. a) 152,04 Yuan b) 1063,83 Ft

235. Die Kesselfeuerung reicht für 24 Tage.

236. Die Drehzahl einer größeren Riemenscheibe ist kleiner!
Die Drehzahl beträgt 30 Umdrehungen je Minute.

237. a) Bei Streulage wurden 40 bis 48 Tage benötigt.
b) Nach Zusammenschluß zur LPG wird die gleiche Fläche in 12 bis $13\frac{1}{3}$ Tagen gemäht.

238. a) Der Querschnitt des Glasstabes braucht nur 2,45 cm² zu betragen (umgekehrtes Verhältnis).
b) Ansatz: $(2{,}8 \cdot l \cdot 7{,}85):(2{,}45 \cdot l \cdot 2) = 1:x$.
Das Gewicht des Glasstabes beträgt rund $\frac{2}{9}$ des Gewichtes eines Stahlstabes gleicher Festigkeit.

239. 12 Mann benötigen 26 h 40 min.

240. Jetzt werden 17,5 h zur Bearbeitung benötigt.

241. a) $x = \frac{32 \cdot 10}{141{,}41} = 2{,}26$. 2,3 Beschäftigte je 10 ha in der LPG.

$x = \frac{86 \cdot 10}{153{,}29} = 5{,}61$. 5,6 Beschäftigte je 10 ha in den Einzelbetrieben.

b) $x = \frac{3{,}5 \cdot 294{,}7}{10} = 103$. 103 Beschäftigte werden im vollgenossenschaftlichen Dorf noch benötigt.

Da früher 118 Beschäftigte gebraucht wurden, sind jetzt 15 Werktätige frei geworden für andere Arbeiten.

242. $x = \frac{50 \cdot 13}{10} = 65$. Ein Sack faßt 65 kg Roggen.

$x = \frac{5850 \cdot 1}{65} = 90$. 90 Säcke werden benötigt.

243. $x = \frac{22\,800 \cdot 6251}{120} = 1\,187\,690$. Die jährliche Einsparung beträgt 1 187 690 DM.

244. $x = \frac{8 \cdot 3 \cdot 4{,}95}{2{,}75 \cdot 6} = 7{,}2$. Die Fläche wird in 7 h 12 min bestreut.

245. $x = \frac{22 \cdot 25 \cdot 12 \cdot 125}{2 \cdot 100 \cdot 14} \approx 294{,}7$. Der Flachstahl hat eine Masse von rund 295 kg.

246. $x = \frac{11 \cdot 18 \cdot 7{,}5 \cdot 3 \cdot 2}{24 \cdot 8{,}25 \cdot 3} = 15$. Die Ernte wird einen Tag vor dem Termin eingebracht.
(11 Tg. + 15 Tg. = 26 Tg.)

247. $x = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2400}{8 \cdot 800} = 9$. 3 Arbeitskräfte müssen neu eingestellt werden.

248. a) $x = \frac{350 \cdot 12 \cdot 1}{7 \cdot 24} = 25$. In 12 Gefäßen werden 25 t je Stunde erzeugt.

b) Bei Steigerung der Ausbeute um 20 % produzieren 8 Gefäße 20 t je Stunde.

249. a) Die Modellänge des Stabes beträgt etwa 503 mm.

b) Die Länge nach dem Erkalten betrug etwa 494 mm.

250. Der Spanverlust beträgt 20 %.

251. Der Anteil der Braunkohlenförderung der DDR an der Gesamtproduktion in der Welt betrug im Jahre 1956 rund 36,3 %.

252. 1000 Falzziegel kosten 105,11 DM.

253. 440 kg $\hat{=}$ 55 %. Die Masse nach dem Trocknen ist noch 55 % der Frischmasse Der Trocknungsverlust beträgt deshalb 45 %.

254. Zinngehalt 40 %, Bleigehalt 60 %.

255. Multiplizieren Sie die Prozentsätze! Es werden 15 Pumpen wöchentlich montiert.

256. $g = 110086$. Es studieren reichlich 110000 Fachschüler.

257. Der Betrieb hatte zu Beginn des Jahres 1250 Werktätige.

258. Die effektive Leistung beträgt 28,5 PS.

259. Die Ausdehnung beträgt 0,24 %.

260. Planzahl 1958: 75181,2 TDM

Planzahl 1959: 78263,6 TDM

Das vorgesehene Ziel wurde mit rund 100 % erreicht. Die Produktion stieg 1959 um 7,4 % gegenüber 1957.

261.

UdSSR	28,6 %
Großbritannien	15,1 %
Westdeutschland	12,6 %
Frankreich	8,0 %
Italien	6,1 %
DDR	4,6 %
Schweden	4,0 %
Norwegen	3,5 %

262. $g = 77586{,}2$. 1956 wurden rund 77600 t synthetische Fasern in Europa erzeugt.

263. 1965 werden 63 Milliarden kWh Elektroenergie in der DDR erzeugt.

264. a) Die Zeiteinsparung betrug 15 %.
b) Die Norm wurde mit etwa 17,6 % übererfüllt.

265. a) Die Schichtnorm betrug 2,4 ha.
b) Der Lohn des Traktoristen betrug 16,66 DM.

266. a) Die Selbstkosten betrugen 2554,20 DM im Vorjahr.
b) In diesem Jahr sollen die Selbstkosten um 183,90 DM gesenkt werden.

267.

I. Quartal	100320 DM	III. Quartal	136800 DM
II. Quartal	114000 DM	IV. Quartal	148200 DM

268. Die zweite kosmische Geschwindigkeit entspricht 141,5 %, also gilt:

$$v_2 = \frac{7{,}92 \cdot 141{,}5}{100} = 11{,}2\,.$$

Für die dritte kosmische Geschwindigkeit erhalten Sie:

$$v_3 = \frac{7{,}92 \cdot 211}{100} = 16{,}7\,.$$

Die zweite kosmische Geschwindigkeit beträgt 11,2 km/s, die dritte 16,7 km/s.

269. $x = \frac{300 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 80}{3 \cdot 80 \cdot 85} = 352{,}9.$ Es können rund 353 l Wasser auf 80 °C erwärmt werden.

270. $x = \frac{54 \cdot 14 \cdot 30}{18 \cdot 1} = 1260\,.$ Es sind 1,26 t Natronlauge notwendig.

271. Molekulargewicht des NaCl in kg:

$$M_{NaCl} = 23\,\text{kg} + 35{,}5\,\text{kg} = 58{,}5\,\text{kg}$$

$$x = \frac{35{,}5 \cdot 585 \cdot 90 \cdot 98}{58{,}5 \cdot 100 \cdot 100} = 313{,}1\,.$$

Man kann rund 313 kg Chlor gewinnen.

272. In 100 g einer x %igen Schwefelsäure sind x g 100 %ige Schwefelsäure enthalten. In 520 g 16 %iger Schwefelsäure sind dann 83,2 g reine Schwefelsäure enthalten.

273. 70 t Kalilauge enthalten 16,8 t 100 %iges KOH.

274. Es müssen 680 g genommen werden.

275. Die Produktion wurde um 124 % gesteigert.

276. Man gewinnt 2700 kg Salz.

277. Es sind 2,0 t Feuchtigkeit enthalten.

278. $x = 112{,}5$. Die Arbeitsproduktivität müßte um 12,5 % zunehmen.

279. Von den Gesamteinnahmen des Staatshaushaltes stammen aus dem volkseigenen Sektor 32517,7 Mill. DM, aus dem genossenschaftlichen und privaten Sektor 18291,2 Mill. DM.

280. Die Selbstkosten werden 1965 voraussichtlich 576428,80 DM betragen.

281. Die Aufwendungen wurden um etwa 7,7 % erhöht.

282. Es müssen 593 Mill. DM aufgebracht werden.

283. Der neue Zinsfuß beträgt $4\frac{1}{4}$ %.

284. Der Zinszuschlag beträgt 23,67 DM.

285. a) 199,50 DM   b) 70,88 DM

286. a) 8731,76 DM   b) 689,14 DM   c) 895,96 DM

287. a) 5 %   b) 3,5 %   c) 4,5 %

288. a) 24 Tage   b) 90 Tage   c) 63 Tage

289. Das Guthaben beträgt 4500 DM.

290. Siehe Bild 44!

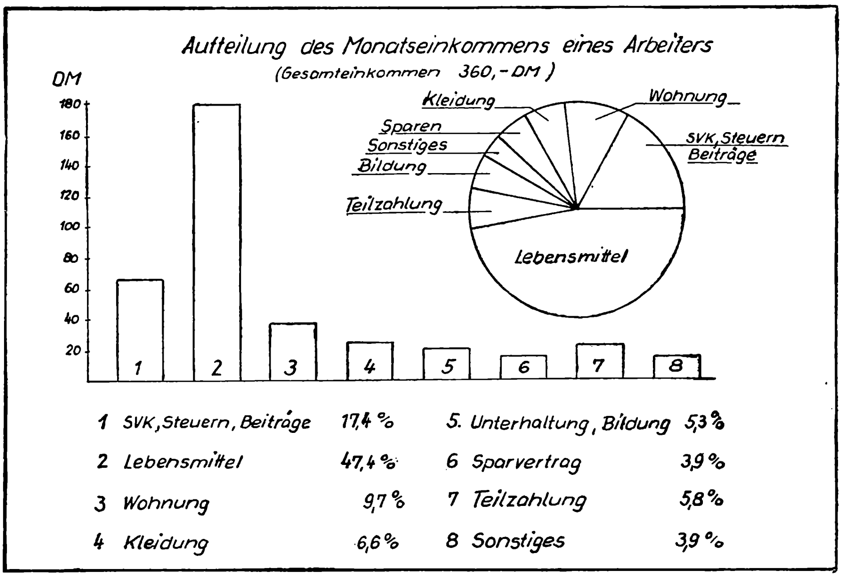


Bild 44

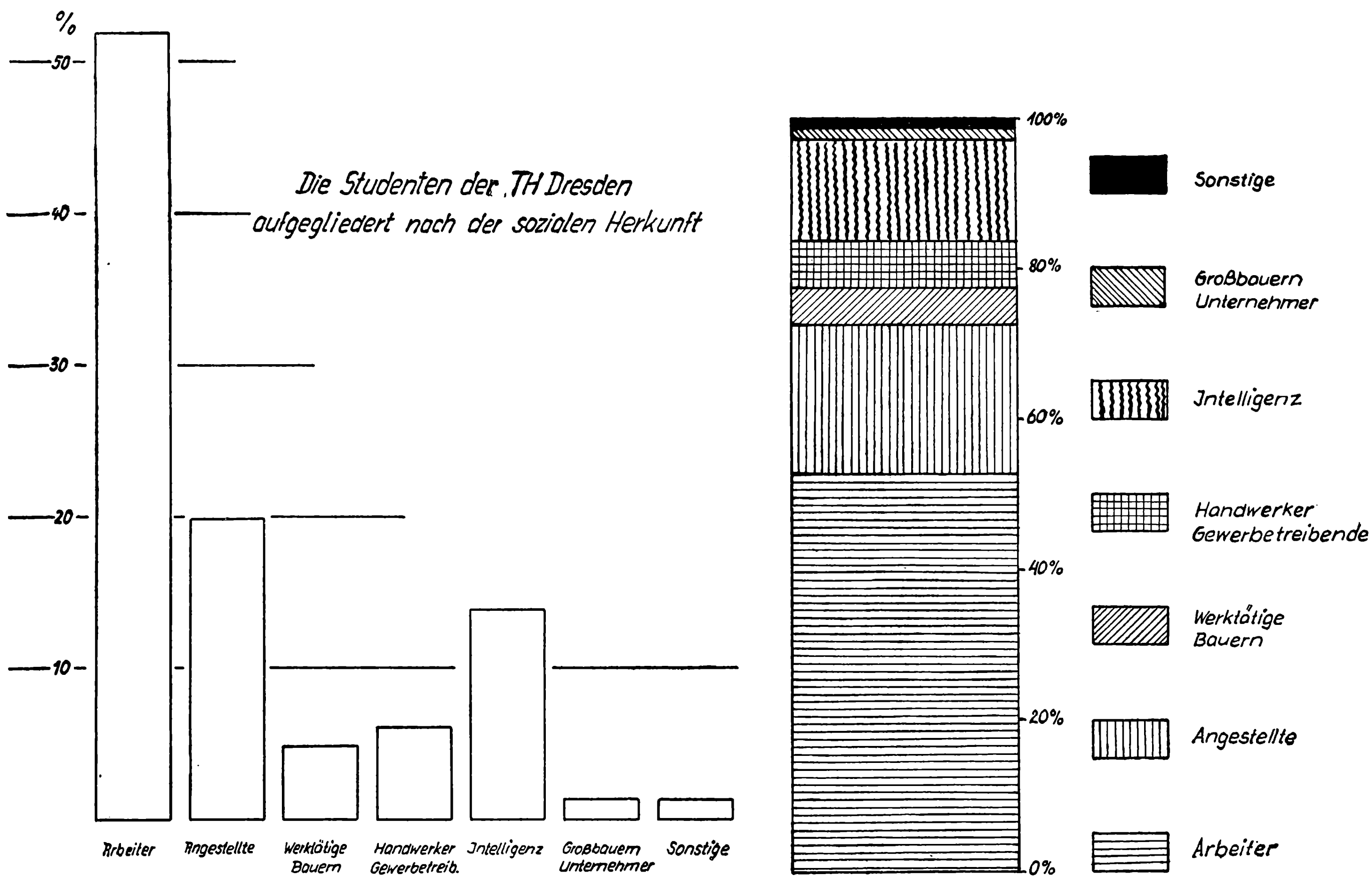

Die Studenten der TH Dresden
aufgegliedert nach der sozialen Herkunft
%
50
40
30
20
10
Arbeiter
Angestellte
Werktätige Bauern
Handwerker Gewerbetreib.
Intelligenz
Großbauern Unternehmer
Sonstige
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Sonstige
Großbauern Unternehmer
Intelligenz
Handwerker Gewerbetreibende
Werktätige Bauern
Angestellte
Arbeiter

Bild 45

291. Siehe Bild 45!

Ziehen Sie zum Vergleich Bild 18 heran. Dort sind die Studierenden an westdeutschen Hochschulen nach ihrer sozialen Herkunft aufgegliedert. Aus der Gegenüberstellung wird Ihnen leicht ersichtlich, wo der Geldbeutel des Vaters das Studium ermöglicht, also nur einzelne das Vorrecht des Studiums genießen, und wo die Leistung den Ausschlag gibt, also allen die Möglichkeit eines Studiums gegeben ist, nämlich in unserem Arbeiter-und-Bauern-Staat.

292. a) Es wird hier zweierlei gezeigt:

1. Es wird die Entwicklung der Ausfuhr und der Einfuhr der DDR von 1950 bis 1965 dargestellt. Die angegebenen Zahlen sind Prozentsätze, wobei der Stand von 1950 mit 100 % bezeichnet ist.
2. Es wird die Entwicklung der Ausfuhr mit der Entwicklung der Einfuhr verglichen, wobei bei beiden Werten, eben um sie in Beziehung zueinander setzen zu können, der Stand von 1950 als 100 % angenommen wird.
   Beachten Sie, daß das **nicht** heißt, daß 1950 Ausfuhr und Einfuhr den gleichen Wert gehabt hätten.
   Deshalb kann man aus diesem Diagramm auch nicht schlußfolgern, daß die Ausfuhr die Einfuhr wertmäßig übersteigt. Es könnte durchaus das Gegenteil der Fall sein, dann nämlich, wenn die Einfuhr 1950 das Vielfache der Ausfuhr betragen hätte. Aus dem Diagramm läßt sich also lediglich ablesen, daß die Ausfuhr von 1950 bis 1958 stärker gewachsen ist und von 1958 bis 1965 auch stärker wachsen soll als die Einfuhr.
   Beachten Sie weiterhin, daß das Diagramm ab 1958 nicht mehr maßgerecht ist! Die Strecke 1958 bis 1965 ist nämlich verkürzt dargestellt.

b) Um diese Frage zu beantworten, brauchen Sie nur festzustellen, in welchem Jahre die betreffende Schaulinie am steilsten verläuft. Hier erkennen Sie, wie wichtig die Einhaltung des richtigen Maßstabes ist. Beide Kurven zeigen nämlich die stärkste Steigung im Zeitabschnitt 1958 bis 1965. Es hat also zunächst den Anschein, daß in diesem Zeitraum der Zuwachs am größten ist. Das stimmt jedoch nicht. Überzeugen Sie sich davon, indem Sie den Maßstab der waagerechten Achse auch für diesen Zeitabschnitt einhalten und die Werte von 1965 an **die** Stelle rücken, wo sie tatsächlich hingehören (Bild 46)!

Nun können Sie ablesen:

Maximum der Ausfuhrsteigerung 1956/57 (99 %)

Maximum der Einfuhrsteigerung 1956/57 (48 %)

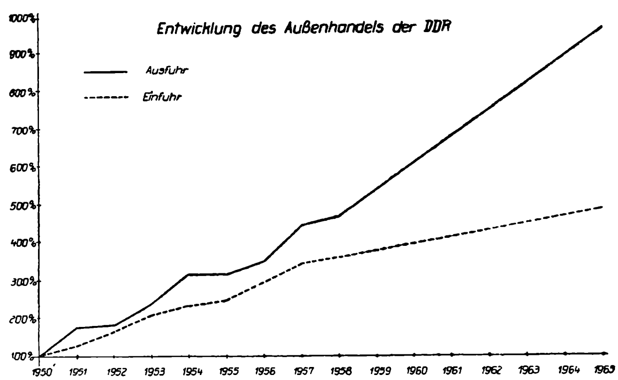


Bild 46

293. Siehe Bild 47! Wie Sie sehen, sind auf der waagerechten Achse die Grundzahlen 1 bis 10, auf der dazu senkrechten Achse als Quadratzahlen die Zahlen 1 bis 100 abgetragen. (Beachten Sie die unterschiedlichen Maßstäbe!) Die Kurve erhalten Sie, wenn Sie über den Grundzahlen die zugehörigen Quadratzahlen als Strecken darstellen und die Endpunkte dieser Strecken durch eine Kurve verbinden. [Kurvenlineal benutzen! Wo es nötig ist, Zwischenwerte aufsuchen, z. B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$]. Sie können mit diesem Diagramm außer den Quadratzahlen auch die Wurzelwerte bestimmen, und zwar für alle Zahlen, wenn Sie die im Kapitel Tafelrechnen angeführte Kommaregel beachten. Allerdings haben Sie hier eine geringere Genauigkeit, als wenn Sie mit der Tafel arbeiten. Wenn Sie das Diagramm aber im Format DIN A 4 auf Millimeterpapier zeichnen, dürfte die Genauigkeit für viele Rechnungen ausreichen.

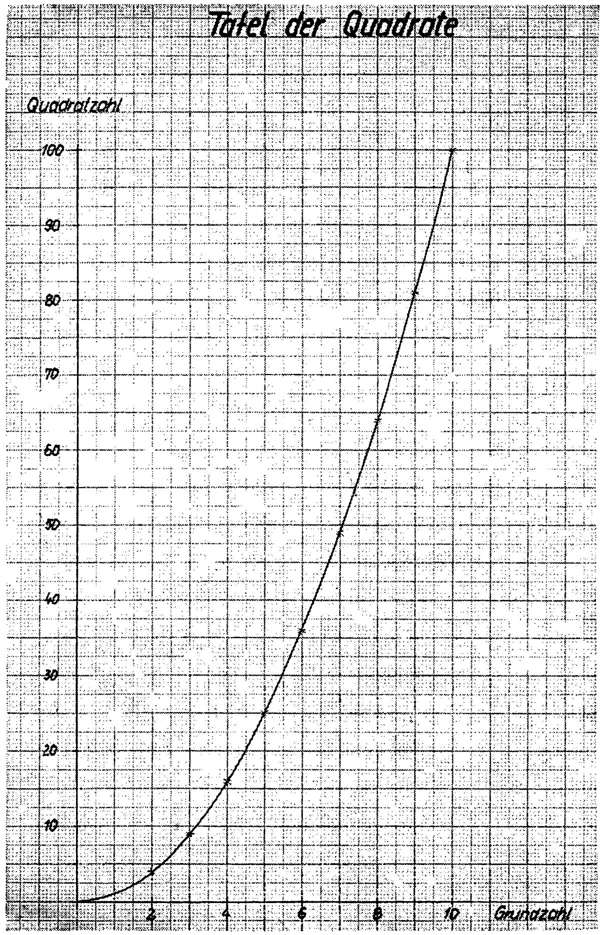


Bild 47

294. a) Die Masse eines Körpers ist abhängig von seiner Dichte und seinem Volumen, wobei die Dichte ϱ als konstant angenommen wird:

$$m = f(V) = \varrho \cdot V$$

b) Der Umfang eines Kreises ist abhängig von seinem Radius:

$$U = f(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$$

c) Der von einem Fahrzeug zurückgelegte Weg ist bei konstanter Geschwindigkeit von der Fahrzeit abhängig:

$$s = f(t) = v \cdot t$$

Wenn der Weg von einer „Unterwegsstation“ aus gerechnet wird, muß noch der vorher zurückgelegte Weg (l) addiert werden:

$$s = f(t) = vt + l$$

295. a) Maßzahl des Abstandes von der y-Achse,
b) Maßzahl des Abstandes von der x-Achse.

296. P_1 liegt im II., P_2 im IV., P_3 im III. Quadranten.

297. a) P_1 und P_2 liegen auf der y-Achse,
b) P_3 und P_4 liegen auf der x-Achse.

298. Siehe Bild 48!

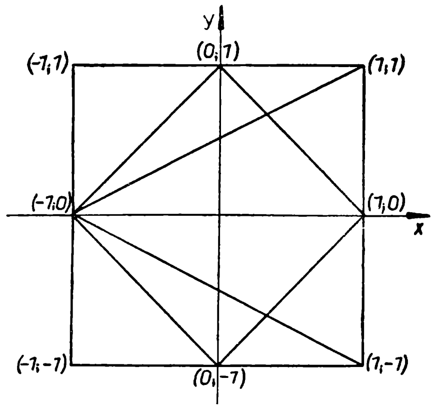


Bild 48

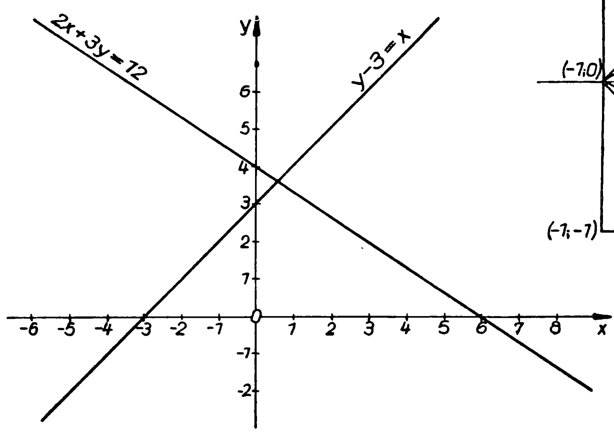


Bild 49

299. x ist die unabhängige Veränderliche, y ist die abhängige Veränderliche (Variable).

300. Weil das Bild einer linearen Funktion eine Gerade (eine Linie) ergibt.

301. Die 2 ist der Richtungsfaktor, der die Steigung der Geraden angibt; 5 ist das absolute Glied, das den Abschnitt auf der y-Achse angibt.

302. Die Gerade fällt und geht durch den Koordinatenursprung.

303. a) Schnittpunkt P_1 (0; 4) und Schnittpunkt P_0 (6; 0);
b) Schnittpunkt P_1 (0; 3) und Schnittpunkt P_0 (— 3; 0); Bild 49.

304. Die Nullstelle einer Funktion ist die Abszisse des Schnittpunktes der zugehörigen Kurve mit der x-Achse, also die x-Koordinate, zu der $y = 0$ gehört.

305. a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = -8$ c) $x_0 = 2{,}5$ (Bild 50)

306. a) $x = -2$ b) $x = 7$ (Bild 51)

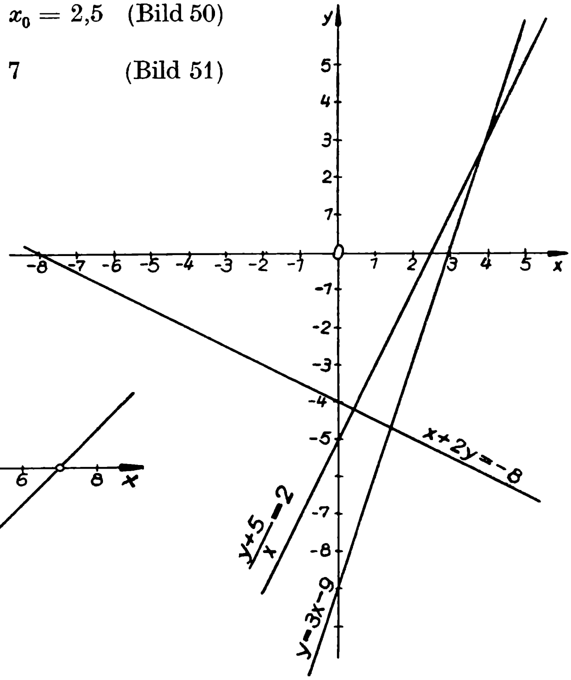


Bild 50

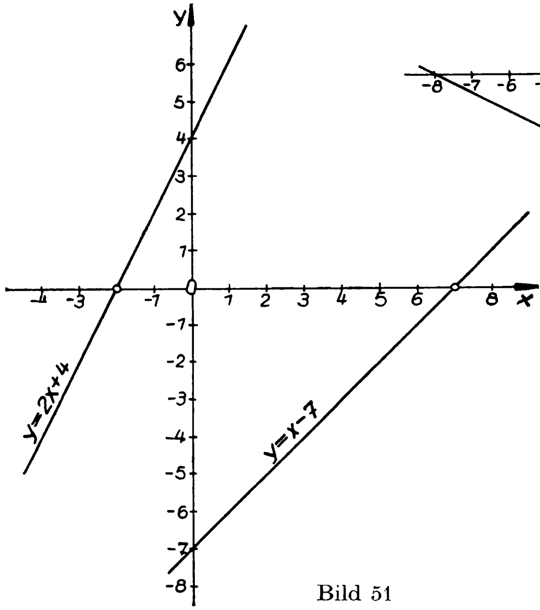


Bild 51

307. a) Wenn sich die Kurven zweier linearer Funktionen auf der y-Achse schneiden sollen, müssen die absoluten Glieder der beiden Funktionen gleich sein.

b) Wenn die Geraden parallel laufen sollen, müssen die Richtungsfaktoren gleich sein.

308. Parallel zur y-Achse: $x = a$ (wobei a beliebige Zahlenwerte annehmen kann).
Parallel zur x-Achse: $y = b$ (wobei b beliebige Zahlenwerte annehmen kann).

309.	$x = -6$;	$y = 4$	310.	$x = 0{,}5$;	$y = -5$
311.	$x = 3$;	$y = -2$	312.	$x = -2$;	$y = -4{,}5$
313.	$v = -3$;	$w = 0{,}25$	314.	$x = a + b$;	$y = a - b$
315.	$x_1 = 0{,}1$;	$x_2 = 0{,}2$	316.	$x = (a + b)^2$;	$y = (a - b)^2$
317.	$x = -7$;	$y = -10$	318.	$u = 0{,}5$;	$v = 0{,}8$
319.	$x_1 = 4a + 3b$;	$x_2 = 3a - 4b$	320.	$x = 1{,}1$;	$y = 2{,}2$
321.	$q = -0{,}2$;	$r = 0{,}5$	322.	$x = 12$;	$y = 15$

323. $x = \frac{m+n}{m}$; $y = \frac{m-n}{n}$ 324. $x = 4$; $y = 8$

325. $x = 1{,}5$; $y = 2{,}5$ 326. $x = 3$; $y = -2$

327. $x = -2$; $y = -4{,}5$

328. Abhängigkeit:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{85}{37}$	$-\frac{54}{37}$	$-\frac{23}{37}$	$\frac{8}{37}$	$\frac{39}{37}$

329. Eindeutige Lösung: $x = 5$; $y = 3$

330. Widerspruch 331. $x = 10$; $y = 5$

332. $x = m - n$; $y = m + n$ 333. $x = 6$; $y = -5$

334. $x = 1$; $y = -1$ 335. $x = 2$; $y = -2$

336. $x = \frac{q^2}{p}$; $y = \frac{p^2}{q}$ 337. $x = \frac{1}{13}$; $y = -\frac{1}{2}$

338. Ansatz:
$$\begin{array}{l|r|}\text{(I)} & x = y + 3{,}0 \\ \text{(II)} & \pi x + \pi y = 104{,}0\end{array}$$
$$\underline{\underline{x = 18{,}1}};\quad \underline{\underline{y = 15{,}1}}$$

Die Durchmesser sind 18,1 m und 15,1 m.

339. Ansatz:
$$\begin{array}{l|l|}\text{(I)} & \frac{85}{x} + \frac{91}{y} = 1 \\ \text{(II)} & \frac{115}{x} + \frac{49}{y} = 1\end{array}$$
(Vgl. Lehrbeispiel 128.)
$$\underline{\underline{x = 150}};\quad \underline{\underline{y = 210}}$$

Pumpe A füllt den Behälter in 150 min, Pumpe B in 210 min.

340. Ansatz:
$$\begin{array}{l|l|}\text{(I)} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \text{(II)} & \frac{20}{x} + \frac{15}{y} = 1\end{array}$$
$$\underline{\underline{x = 30}};\quad \underline{\underline{y = 45}}$$

Monteur A braucht 30 Tage, Monteur B 45 Tage.

341. Ansatz:
$$\begin{array}{l|r|}\text{(I)} & 1{,}3x + 1{,}6y = 1{,}5\,(x + y) \\ \text{(II)} & 1{,}3(x + 8) + 1{,}6(y - 14) = 1{,}4\,(x + y - 6)\end{array}$$
$$\underline{\underline{x = 12}};\quad \underline{\underline{y = 24}}$$

Von der geringeren Sorte 12 kg, von der besseren Sorte 24 kg.

342. Ansatz: (I), (II)

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & (v_1 + v_2) \cdot 15 = 120 \\ \text{(II)} & v_1 - v_2 = 2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{v_1 = 5}}; \quad \underline{\underline{v_2 = 3}}$$

Die Geschwindigkeiten sind 3 m/s und 5 m/s.

343. Die erste Legierung enthält $876^0/_{00}$ (= 0,876) Silber, das sind $0{,}876 \cdot 5$ kg; die zweite Legierung enthält $825^0/_{00}$ (= 0,825) Silber, das sind $0{,}825 \cdot 6$ kg.

Ansatz:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3{,}5x + 1{,}5y = 0{,}876 \cdot 5 \\ \text{(II)} & 2{,}5x + 3{,}5y = 0{,}825 \cdot 6 \end{array}$$

$$x = 0{,}930; \quad \underline{\underline{y = 0{,}750}}$$

Sorte I enthält $930^0/_{00}$, Sorte II $750^0/_{00}$ Silber.

344. $x = 3$; $y = 2$

345. $x = 17$; $y = 1$

346. $x = 5a - 3b$; $y = 3a - 5b$

347. $x = 17$; $y = 12$

348. $x = 15$; $y = 5$

349. $x = 8$; $y = 6$

350. $x = 7$; $y = 3$

351. $x_1 = 1{,}2$; $x_2 = 1{,}8$

352. $x = 1{,}4$; $y = 2{,}4$

353. $u = -34$; $v = 33$

354. $x = \frac{a+b}{a}$; $y = \frac{a-b}{b}$

355. $x = y = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3} = \frac{1}{a-b}$

356. $x = 7$; $y = 4$

357. $x = -1$; $y = 2$

358. Die Gleichungen widersprechen einander.

359. Die Gleichungen sind voneinander abhängig.

360. $x = 100$; $y = 10$

361. $x = 0{,}5$; $y = -0{,}5$

362. $x = 1{,}5$; $y = 0{,}5$

363. $x = 0{,}5$; $y = 2{,}5$

364. $x = \frac{1}{b}$ $y = \frac{1}{a}$

365. $x = 6$; $y = 2$

366. Für das Drehmoment gilt: $M = P \cdot l$.

Ansatz:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & P \cdot l = (P + 12)(l - 1) \\ \text{(II)} & P \cdot l = (P - 18)(l + 4) \end{array}$$

$$\underline{\underline{P = 36}}; \quad \underline{\underline{l = 4}}$$

Die Kraft beträgt 36 kp, der Arm ist 4 cm lang.

367. Die erste Gleichung entspricht der Übung 342. Die zweite Gleichung erhalten Sie, wenn Sie die Wege der beiden Körper $s_1 = v_1 \cdot t$ und $s_2 = v_2 \cdot t + l$ gleichsetzen, wobei l die Länge der Kreisbahn ist, die der zweite Körper zusätzlich zurücklegen muß, wenn er den ersten Körper überholen will.

Ansatz: (I) $(v_1 + v_2) \cdot 18 = 225$
(II) $v_1 \cdot 90 = v_2 \cdot 90 + 225$

$$\underline{\underline{v_1 = 7{,}5}}; \quad \underline{\underline{b_2 = 5}}$$

Die Geschwindigkeiten sind 7,5 m/s und 5 m/s.

368. Ansatz: (I) $P_1 + P_2 = 45$
(II) $P_1 - P_2 = 5$

$$\underline{\underline{P_1 = 25}}; \quad \underline{\underline{P_2 = 20}}$$

Die Kräfte sind 25 kp bzw. 20 kp.

369. Ansatz: (I) $x:y = 11:7$
(II) $(x-4):(y-4) = 5:3$

$$\underline{\underline{x = 44}}; \quad \underline{\underline{y = 28}}$$

Die Anzahl der Zähne beträgt 44 bzw. 28.

370. Ansatz: (I) $1{,}4x + 3{,}5y = 4{,}9 \cdot 0{,}825$
(II) $3{,}2x + 2{,}4y = 5{,}6 \cdot 0{,}775$

$$\underline{\underline{x = 0{,}700}}; \quad \underline{\underline{y = 0{,}875}}$$

Der Feingehalt beträgt 700‰ bzw. 875‰.

371. Ansatz: (I) $25x + 16y = 93{,}63$
(II) $24x + 20y = 96{,}52$

$$\underline{\underline{x = 2{,}83}}; \quad \underline{\underline{y = 1{,}43}}$$

Der Monteurstundenlohn beträgt 2,83 DM, der Lehrlingsstundenlohn 1,43 DM.

372. Ansatz: (I) $x + y = 6500$
(II) $\frac{2{,}5x}{100} - \frac{3y}{100} = 25$

$$\underline{\underline{x = 4000}}; \quad \underline{\underline{y = 2500}}$$

Die Kreditbeträge sind 4000 DM und 2500 DM.

373. Ansatz: (I) $\frac{3{,}5x}{200} + \frac{4y}{200} = 46{,}25$
(II) $\frac{4x}{200} + \frac{3{,}5y}{200} = 47{,}50$

$$\underline{\underline{x = 1500}}; \quad \underline{\underline{y = 1000}}$$

Die beiden Darlehen betragen 1500 DM und 1000 DM.

374. Ansatz: (I) $\quad x + y = 7500$
(II) $\quad 1{,}20x + 1{,}25y = 9145$

$$\underline{\underline{x = 4600}}; \quad \underline{\underline{y = 2900}}$$

Der erste Betrieb erzeugte im 1. Halbjahr 4600 Maschinen, im 2. Halbjahr 5520 Maschinen,

der zweite 2900 und 3625 Maschinen.

375. Ansatz: (I) $\quad 15\,\mathrm{A} + 20\,\mathrm{B} = 75{,}10$
(II) $\quad 20\,\mathrm{A} + 15\,\mathrm{B} = 90{,}10$

$$\underline{\underline{\mathrm{A} = 3{,}86}}; \quad \underline{\underline{\mathrm{B} = 0{,}86}}$$

Lösungsmittel A kostet 3,86 DM/kg, B 0,86 DM/kg.

376. Ansatz (mit der Zinsformel):

$$\text{(I)} \quad \frac{g \cdot p}{100} = 84$$

$$\text{(II)} \quad \frac{g\,(p - 0{,}5)}{100} = 84 - 14$$

$$\underline{\underline{g = 2800}}; \quad \underline{\underline{p = 3}}$$

Der Kredit beträgt 2800 DM, der Zinsfuß betrug anfangs 3 %.