

Rahmenprogramm

**für Arbeitsgemeinschaften
der Klassen 9 und 10**

Arbeiten mit Mengen



Das vorliegende Rahmenprogramm ist ab 1. September 1977 verbindliche Grundlage für die Tätigkeit der Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 9 und 10.

Berlin, März 1976

**Dietzel
Stellvertreter des Ministers**

2. Auflage

Lizenz Nr. 203/1000/81 (UN)

LSV 0600

Printed in the German Democratic Republic

Satz und Druck: Druckerei Schweriner Volkszeitung II-16-8

Verlagstitelnummer 30 06 14-2

Vorbemerkungen

Die Arbeitsgemeinschaft „Arbeiten mit Mengen“ soll die Teilnehmer wesentlich systematischer und umfassender als dies im obligatorischen Unterricht möglich ist mit grundlegenden Begriffen der Mengenlehre – einschließlich der zugehörigen Symbolik – vertraut machen sowie ihnen die Bedeutung mengentheoretischer Betrachtungs- und Arbeitsweisen für die Bewältigung unterschiedlichster inner- und außermathematischer Probleme verdeutlichen.

Die Teilnehmer sollen befähigt werden, Begriffe, Symbole, Denk- und Arbeitsweisen der Mengenlehre zunehmend selbständig auf verschiedenartige Situationen und Probleme aus der gesellschaftlichen Praxis, aus dem Unterricht anderer Fächer, vor allem aber aus dem obligatorischen Mathematikunterricht anzuwenden. Damit soll ein tieferes inhaltliches Verständnis sowohl dieser Gegenstände als auch der Elemente der Mengenlehre selbst erreicht werden. Es kommt darauf an, den Teilnehmern die Zweckmäßigkeit dieser Begriffsbildungen und die große Breite ihrer Anwendbarkeit bewußt zu machen, wozu neben den stets einzubeziehenden außermathematischen Beispielen das Arbeiten mit Mengen innerhalb unterschiedlicher zentraler Gegenstände des obligatorischen Mathematikunterrichts zu dienen hat. Damit erfährt zugleich das diesbezügliche Wissen und Können der Schüler eine dauerhafte Festigung, Vertiefung und Erweiterung.

Im Mathematiklehrgang der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR wird auf eine geschlossene Behandlung der Mengenlehre als selbständige Stoffeinheit verzichtet, was zur Folge hat, daß Begriffe und Denkweisen der Mengenlehre ab Klasse 6 zum Teil mit erheblichen zeitlichen Unterbrechungen im Unterricht auftreten. Deshalb kann nicht bei allen Teilnehmern ein gefestigtes und systematisiertes Wissen und Können auf diesem Gebiet erwartet werden. Erstes Teilziel der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit muß es daher sein, eine gemeinsame solide Ausgangsbasis für die weitere Arbeit für alle Teilnehmer – auch wenn sie aus verschiedenen Klassen und Schulen kommen – zu schaffen. Dazu ist es aber weder erforderlich noch zu empfehlen, die vor allem in Kapitel 1 konzentrierten theoretischen Stoffe geschlossen am Anfang zu behandeln. Dies ist nur bis zu einem solchen Maße zweckmäßig, daß dann relativ systematisch an die Behandlung von Zahlenmengen (einschließlich Lösungsmengen für Gleichungen und Ungleichungen) und Punktmengen herangegangen werden kann. Die weiteren theoretischen Elemente sind dann im Verlauf des gesamten Lehrgangs an dafür geeigneten Stellen einzuführen und von da ab bei jeder sich bietenden Gelegenheit zu verwenden. Eine strenge wissenschaftliche Systematik ist weder hinsichtlich der theoretischen Stoffe des Kapitels 1 noch bei den verschiedenen Anwendungsbereichen (etwa der Gleichungslehre oder der Geometrie) anzustreben, vielmehr muß stets das Arbeiten mit Mengen im Zentrum stehen und somit auch ausschlaggebend für Auswahl und Anordnung der jeweiligen Inhalte sein.

In Verbindung mit der Entwicklung des Wissens und Könnens der Teilnehmer im Arbeiten mit Mengen, das von hohem mathematischen Bildungswert ist, sind dieser Arbeitsgemeinschaft weitere Ziele gestellt.

Das Arbeiten mit Mengen enthält wesentliche Potenzen für die weltanschaulich-philosophische und politisch-moralische Erziehung der Teilnehmer. Durch mengentheoretische Betrachtungs- und Arbeitsweisen kann den Teilnehmern der Bezug zwischen Mathematik und objektiver Realität sowie der genetische Aufbau mathematischer Theorien verdeutlicht werden. Weltanschaulich-philosophische Einsichten können insbesondere erzielt werden, indem durch Arbeiten mit Mengen deutlich wird, daß der Begriff der natürlichen Zahl und die Operation mit natürlichen Zahlen sowie die darauf aufbauenden Zahlenbereichserweiterungen nicht „übernatürlichen Ursprungs“ und auch keine willkürlichen Schöpfungen des menschlichen Geistes sind. Ähnliche weltanschaulich-philosophische Betrachtungen sind innerhalb der anderen Kapitel möglich.

Zur politisch-moralischen Erziehung der Teilnehmer hat die Arbeitsgemeinschaft vor allem durch die umfassende Nutzung der Potenzen, die im zunehmend selbständigen Lösen von anspruchsvollen Aufgaben liegen, beizutragen. Hier spielt die Herausbildung einer kritischen Haltung gegenüber eigenen Ergebnissen, die Gewöhnung an exaktes und sauberes Arbeiten genauso eine Rolle wie die Entwicklung von Beharrlichkeit und des Willens zur Überwindung von Schwierigkeiten.

Durch Aufträge, die an Gruppen von Teilnehmern erteilt werden und die arbeitsteilig oder kooperativ auszuführen sind, ist die Entwicklung von kollektivem Verhalten und Verantwortungsbewußtsein zu unterstützen.

Es wird empfohlen, den Schülertitel „Arbeiten mit Mengen“ von Fanghänel/Vockenberger (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1978) in der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit zu nutzen.

Thematische Übersicht

1. Grundbegriffe der Mengenlehre
2. Arbeiten mit Zahlenmengen
 - 2.1. Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen
 - 2.2. Teilbarkeit natürlicher Zahlen
 - 2.3. Arbeiten mit Mengen beim Aufbau weiterer Zahlenbereiche
3. Arbeiten mit Mengen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
 - 3.1. Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen
 - 3.2. Gleichungen und Ungleichungen höheren Grades mit einer Variablen
 - 3.3. Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen
 - 3.4. Gleichungs- und Ungleichungssysteme
4. Arbeiten mit Mengen in der Geometrie
5. Mengen und Funktionen

Hinweise zur Gestaltung der Arbeitsgemeinschaft

Die für die Arbeitsgemeinschaft zur Verfügung stehende Zeit erfordert — auch in Abhängigkeit von dem anfangs vorhandenen Wissen und Können der Schüler — gewisse Schwerpunktsetzungen. Dabei ist zunächst erst einmal zu berücksichtigen, daß die angestrebten Ziele nicht durch eine systematische Behandlung der theoretischen Elemente der Mengenlehre allein oder durch eine systematische und umfassende Wiederholung ganzer Stoffgebiete aus dem obligatorischen Unterricht, aus denen bestimmte Elemente nachfolgend im „Inhalt der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit“ angegeben sind, erreicht werden können. Vielmehr kommt es immer darauf an, den Gesichtspunkt des Auftretens und Anwendens grundlegender Begriffe der Mengenlehre zum entscheidenden Auswahlprinzip für die in der Arbeitsgemeinschaft zu behandelnden Stoffe zu machen und dabei die spezifischen Zielstellungen der einzelnen Kapitel zu beachten. In Abhängigkeit von der konkreten Situation ist eine Konzentration auf Schwerpunkte und damit eine Auswahl aus den fünf angebotenen Komplexen zu empfehlen. Neben dem ersten Komplex, auf den keinesfalls verzichtet werden darf, sind mindestens zwei weitere Komplexe gründlich zu behandeln. Dabei ist das Gesamtziel, den Teilnehmern einen umfassenden Überblick über Anwendungsbereiche der Mengenlehre zu geben, konsequent zu verfolgen.

Der Erfolg der Tätigkeit der Arbeitsgemeinschaft wird wesentlich davon abhängig sein, wie es dem Leiter gelingt, eine möglichst aktive Beteiligung aller Teilnehmer zu erreichen.

Das methodische Vorgehen sollte sich dadurch von dem im obligatorischen Mathematikunterricht unterscheiden, indem Diskussionen (z. B. nach gemeinsamem Literaturstudium), Kurzvorträge einzelner Teilnehmer (z. B. zu bereits bekannten theoretischen Grundlagen oder zu wesentlichen Elementen der aus dem obligatorischen Unterricht einzubeziehenden Stoffgebieten) sowie vor allem das weitgehend selbständige Lösen von Aufgaben im Mittelpunkt stehen.

Dies soll nicht nur dem Festigen des Gelernten (Übungsaufgaben) dienen, sondern auch dem selbständigen Anwenden grundlegender Begriffe der Mengenlehre auf vielfältige Sachverhalte innerhalb und außerhalb der Mathematik. Dabei sollte das selbständige Finden von Lösungsansätzen und Ausführen der Lösungen besonders betont werden. Es ist zu ergänzen durch arbeitsteiliges Vorgehen (bei umfangreichen Aufgaben), durch das Vortragen von „Musterlösungen“ und durch das abschließende Diskutieren von einzelnen Lösungswegen und Ergebnissen.

Ein derartiges Vorgehen dient gleichzeitig der Realisierung der übergreifenden Zielsetzungen. Diese sind auch bei der Auswahl der Beispiele und Aufgaben zu beachten. Durch sie soll den Teilnehmern immer wieder verdeutlicht werden, daß durch mengentheoretische Begriffsbildungen, Denk- und Arbeitsweisen sehr verschiedenartige Situationen und Probleme aus dem Leben der sozialistischen Gesellschaft einer mathematischen Betrachtung zugänglich werden. Die Beispiele und Aufgaben sind also keineswegs nur dem obligatorischen Mathematikunterricht zu entnehmen.

Inhalt der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit

1. Grundbegriffe der Mengenlehre

Mit der Behandlung dieser Thematik wird in erster Linie das Ziel verfolgt, die Teilnehmer an dieser Arbeitsgemeinschaft mit den nachfolgend benötigten grundlegenden Begriffsbildungen sowie mit der hier erforderlichen Symbolik aus der Mengenlehre vertraut zu machen. Dabei ist zu beachten, daß diese Begriffe und Symbole zu einem erheblichen Teil bereits aus verschiedenen Stoffgebieten des obligatorischen Unterrichts der Klassen 6 bis 9 bekannt sind. An diese Einzelkenntnisse ist anzuknüpfen, ihre nochmalige Behandlung erfolgt hier vor allem unter dem Gesichtspunkt, die Fähigkeit der Teilnehmer zur selbständigen Anwendung dieser Begriffe und Symbole weiterzuentwickeln. Das soll so weit wie möglich in Einheit mit den hier neu zu erarbeitenden Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre geschehen, bei deren Einführung verstärkt von Beispielen aus dem unmittelbaren Erfahrungsbereich der Schüler auszugehen ist.

Wie bereits gesagt, ist eine systematische Behandlung des gesamten Kapitels zu Beginn der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit nicht zu empfehlen. So kann auf „Durchschnitt“, „Äquivalenzrelationen“ und „Zerlegungen“ zunächst verzichtet werden, allerdings sind diese Stoffe dann an entsprechenden Stellen nachzuholen.

Eine spätere zusammenhängende Systematisierung aller theoretischen Elemente ist jedoch unbedingt zu empfehlen, um auf diese Weise die Realisierung der oben angegebenen grundlegenden Zielstellung für dieses Kapitel zu sichern. Die Behandlung der Begriffe der Mengenlehre hat in jedem Fall auf der Basis eines reichen, vielfältigen Beispielmaterials zu erfolgen, durch das einerseits ein hinreichendes inhaltliches Verständnis für diese Begriffsbildung und andererseits ihre feste Verbindung mit dem Leben gesichert wird.

- Bilden von Mengen, dabei Wiederholen von „Menge“, „endliche Menge“ und „unendliche Menge“, „Element einer Menge“ und „Teilmenge einer Menge“, der Schreibweise „ $M = \{ \dots \}$ “ für endliche Mengen sowie der Zeichen „ $\in$ “, „ $\notin$ “, „ $\subseteq$ “ und der dazugehörigen Sprechweisen anhand geeigneter Beispiele aus dem Mathematikunterricht und dem täglichen Leben;
- Darstellen von Mengen durch Aufweisen ihrer Elemente oder durch Anführen einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente; Übungen;
- Einführung von „echte Teilmenge“ und „ $\subset$ “; Veranschaulichung von Mengen und von Element-Mengen-Beziehungen sowie von Teilmengen-Mengen-Beziehungen durch Mengendiagramme (Venndiagramme);
- Hinweis auf Mengenbildungsprinzip und Stufenproblematik;
- Wiederholen der Gleichheit von Mengen;
Einführen von „gleichmächtig“ anhand von Beispielen; Übungen;
- Wiederholen von „die leere Menge“ und des Symbols „ $\emptyset$ “;

- Einführen von „echte Teilmenge“ und „ $\cup$ “; Veranschaulichung von
- Wiederholen von „Durchschnitt von Mengen“ und des Symbols „ $\cup$ “
Einführen von „elementfremd“;
- Anwenden der eingeführten bzw. wiederholten Grundbegriffe auf einfache Beispiele (aus Mathematik und gesellschaftlicher Praxis);
- Definieren von „Zerlegung einer Menge (nach einer Äquivalenzrelation)“; Übungen; Hinweis auf den Hauptsatz über Äquivalenzrelationen.

2. Arbeiten mit Zahlenmengen

Ziel dieses Stoffgebietes ist es, die behandelten Begriffsbildungen aus der Mengenlehre speziell auf Zahlenmengen anzuwenden und dabei zugleich das Wissen und Können der Teilnehmer über Zahlen bzw. das Arbeiten mit ihnen zu festigen und zu erweitern.

Schwerpunkt des Abschnitts 2.1. ist es, die Rolle mengentheoretischer Begriffsbildungen als Grundlage für den Begriff der natürlichen Zahl – speziell der endlichen Kardinalzahl als Klasse gleichmächtiger Mengen – und für Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen und deren Gesetzmäßigkeiten herauszuarbeiten. Bei dieser innermathematischen Anwendung von Begriffen und Denkweisen der Mengenlehre geht es also vor allem darum, inhaltlich längst Bekanntes theoretisch wesentlich zu vertiefen und es dadurch erheblich zu festigen. Auch die Behandlung eines Gefüges von Definitionen und Sätzen dient primär diesem Zweck.

Dabei sollen die Teilnehmer auch den Begriff der endlichen Kardinalzahl als Ergebnis eines Abstraktionsprozesses kennenlernen. Auf die damit verbundenen weltanschaulichen Fragen des Zusammenhangs von Mathematik und objektiver Realität ist ebenso einzugehen wie auf die historische Entwicklung des Zahlbegriffs.

Im Abschnitt 2.2. liegt das Schwergewicht auf der Vertiefung und Systematisierung des Wissens und Könnens der Teilnehmer auf dem Gebiet der Teilbarkeitslehre für natürliche Zahlen, soweit dort die Begriffe und Symbole der Mengenlehre Anwendung finden können. Zunächst ist also im Prinzip Bekanntes mit Hilfe der Begriffsbildungen der Mengenlehre vertiefend zu wiederholen.

Es kommt in diesem Abschnitt aber auch darauf an, durch die Behandlung von Zahlenkongruenzen und Restklassen sowie des Rechnens mit Kongruenzen die mathematische Bildung der Schüler zu erweitern. Dabei ist auf vorhandene Beziehungen zum obligatorischen Schulstoff besonderer Wert zu legen, wobei einem beispielhaften, auf vielfältige Anwendung und möglichst selbständiges Aufgabenlösen zielendes Arbeiten der Vorzug gegenüber einer systematischen Behandlung des Rechnens mit Zahlenkongruenzen zu geben ist.

Im Abschnitt 2.3. geht es vor allem darum, die Begriffsbildungen der Mengenlehre bei den Betrachtungen zum Aufbau der einzelnen Zahlenbereiche möglichst intensiv zu nutzen und nicht etwa die Gesamtthematik ohne Akzentsetzung zu wiederholen. Es empfiehlt sich, als erste Zahlenbereichserweiterung den Aufbau des Bereichs der ganzen Zahlen vorzunehmen und von dort zum Bereich der rationalen Zahlen überzugehen. Dabei ist vor allem die Analogie des Vorgehens bei diesen beiden Zahlenbereichserweiterungen herauszustellen, während zum Bereich der reellen Zahlen lediglich eine Wiederholung des in Klasse 9 Behandelten vorgenommen werden sollte.

Die abschließenden Betrachtungen zur Abzählbarkeit bzw. Nichtabzählbarkeit unendlicher Zahlenmengen sind auf wenige Beispiele zu beschränken und sollen die Schüler mit der für sie neuen Beweisidee (Diagonalverfahren) lediglich bekanntmachen.

2.1. Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen

- Wiederholen von Beispielen für endliche und unendliche Zahlenmengen; ihre Darstellung in Mengenschreibweise;
- Erläutern des Unterschiedes zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen;
- Definieren von „(endliche) Kardinalzahl“ als Klasse gleichmächtiger endlicher Mengen; Erläutern des Abstraktionsprozesses zur Gewinnung der natürlichen Zahlen; Bemerkungen zur historischen Entwicklung des Zahlbegriffs;
- Erläutern der mengentheoretischen Grundlagen der Kleiner-Relation für natürliche Zahlen sowie der Addition natürlicher Zahlen und ihrer Kommutativität und Assoziativität;
- Einführen von „Differenzmenge“ (zweier endlicher Mengen) und des Symbols „ $\setminus$ “; Übungen;
Erläutern der mengentheoretischen Grundlagen der Subtraktion natürlicher Zahlen und einiger daraus resultierender Eigenschaften der Subtraktion (z. B. Bedingung für die Existenz der Differenz, Nichtkommutativität);
- Wiederholen von „geordnetes Paar“ und Einführen von „geordnetes Tripel“; Definieren der Gleichheit geordneter Paare bzw. Tripel; Definieren von „Produktmenge“ und des Symbols „ $\times$ “; Übungen; Nachweisen einiger Eigenschaften der Produktmenge (Nichtkommutativität, Nichtassoziativität, Gleichmächtigkeit von $M_1 \times M_2$ und $M_2 \times M_1$);
- Erläutern der mengentheoretischen Grundlagen der Multiplikation natürlicher Zahlen und ihrer Kommutativität, Assoziativität und Distributivität bezüglich der Addition.

2.2. Teilbarkeit natürlicher Zahlen

- Wiederholen der Definition der Teilbarkeitsbeziehung für geordnete Paare natürlicher Zahlen sowie der entsprechenden Symbole und Sprechweisen; Wiederholen von „Menge der Teiler (Vielfachen) einer natürlichen Zahl“; Verschiedene Verfahren zur Ermittlung und Angabe der Menge der Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl; deren Begründung unter Verwendung der Begriffsbildungen und der Symbolik der Mengenlehre; Übungen; Wiederholen der Definition für „Primzahl“ und „zusammengesetzte Zahl“; Übungen;
- Definieren von „gemeinsamer Teiler“, „gemeinsames Vielfaches“ und „teilerfremd“ unter Verwendung von Begriffsbildungen und Symbolen aus der Mengenlehre;
- Definieren von „g. g. T.“ und „k. g. V.“; Wiederholen, Begründen und Neueinführen von Verfahren zur Ermittlung von g. g. T. bzw. k. g. V.; Übungen;
- Wiederholen und Beweisen von Teilbarkeitssätzen für natürliche Zahlen;
- Euklidischer Algorithmus und seine Anwendungen auf die Ermittlung des g. g. T. zweier (großer) natürlicher Zahlen sowie auf die Gewinnung des Hauptsatzes über den g. g. T. (mit Beweis eines Spezialfalls);
- Anwendung des Hauptsatzes über den g. g. T. auf Restklassenbildungen; Einführen von „restgleich bezüglich Divisor d “ bzw. „kongruent modulo d “ und des Symbols „ $a \equiv b \pmod{d}$ “. Nachweis der Zahlenkongruenz als Äquivalenzrelation, Einführen von „Restklassen“; Erweiterung der Teilbarkeitsbeziehung auf ganze Zahlen; Übungen; Anwendungen, insbesondere Beweis von bekannten Teilbarkeitssätzen und Formulierung von Sätzen über die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13;
- Beispiele für das Rechnen mit Kongruenzen; Lineare Kongruenzen; Übungen und einfache Anwendungen.

2.3. Arbeiten mit Mengen beim Aufbau weiterer Zahlenbereiche

- Wiederholende und vertiefende Betrachtungen zum Aufbau der Bereiche der ganzen und der rationalen Zahlen; dabei Erläuterung der Prinzipien der Zahlenbereichserweiterung; Wiederholungen zum Bereich der reellen Zahlen; Wiederholen der zwischen den Zahlenbereichen und wichtigen ihrer Teilbereiche bestehenden Zusammenhänge unter besonderer Berücksichtigung der Begriffsbildungen und der Symbolik der Mengenlehre; Übungen;
- Behandlung von Beispielen für Zahlenmengen unterschiedlicher Mächtigkeit, dabei Einführen von „abzählbar“ und „nicht abzählbar“. Beweise für die Abzählbarkeit der Menge der ganzen und der Menge der rationalen Zahlen sowie der Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen im Intervall $0 < x < +1$.

3. Arbeiten mit Mengen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Bei der Behandlung dieses umfangreichen Kapitels kommt es darauf an, den Teilnehmern deutlich werden zu lassen, wie die grundlegenden Begriffe und Arbeitsweisen der Mengenlehre zum rationalen Lösen unterschiedlicher Typen von Gleichungen und Ungleichungen Verwendung finden und somit ein wichtiges Mittel zur Beherrschung dieses wesentlichen und für die praktische Anwendung äußerst bedeutsamen Teilbereichs der Mathematik sind. Es ist daher wichtig, die Realisierung folgender Zielsetzungen sinnvoll miteinander zu verbinden:

- Festigen der eingeführten grundlegenden Begriffe und Symbole der Mengenlehre durch deren systematische und konsequente Anwendung bei grundsätzlichen Überlegungen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen sowie von einigen einfachen Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen;
- Nutzen dieser Begriffe und Symbole zum tieferen Verständnis grundlegender theoretischer Zusammenhänge zwischen Gleichungen bzw. Ungleichungen und deren Lösung sowie zwischen Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen und deren Lösung;
- Festigen und Vertiefen der Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen sowie von Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen, wobei sowohl das Lösen durch inhaltliche Überlegungen als auch das kalkülmäßig — algorithmische Lösen zu beachten sind.
- Weiterentwickeln der Fähigkeit der Schüler, mathematische Begriffe und Methoden zur Bewältigung praktischer Probleme bewußt zu verwenden, wobei insbesondere auch ein Beitrag zur weltanschaulichen Bildung und Erziehung zu leisten ist.

Um dies zu erreichen, ist es notwendig, für alle zu behandelnden Typen von Gleichungen, Ungleichungen und Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen das einheitliche theoretische Fundament sorgfältig herauszuarbeiten und bewußtzumachen; dabei sind stärker als im obligatorischen Unterricht Begriffe und Symbole der Mengenlehre zu benutzen. Die Auswahl und Reihenfolge der Inhalte für die einzelnen Zusammenkünfte der Arbeitsgemeinschaft darf nicht vordergründig an einer systematischen Behandlung der einzelnen Gleichungs- bzw. Ungleichungstypen orientiert sein, sondern muß vielmehr stets unter dem Aspekt der Anwendung von Begriffen, Symbolen und Arbeitsweisen der Mengenlehre sowie im Hinblick auf die angestrebten weltanschaulichen Einsichten über das Verhältnis von Mathematik und objektiver Realität, über die Rolle der Mathematik beim Erkennen und Verändern der Wirklichkeit u. ä. erfolgen. Daher können mit einer bloßen Nacheinanderbehandlung des Lösens der nachstehend genannten Typen von Gleichungen, Ungleichungen und Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen die genannten Zielsetzungen nicht erfüllt werden.

Eine tiefere gedankliche Durchdringung der theoretischen Zusammenhänge ist auch deshalb notwendig, damit das aus dem obligatorischen

Unterricht Bekannte widerspruchsfrei und fest mit dem Neuen verbunden werden kann und nicht als korrekturbedürftig erscheint.

Die geometrische Interpretation von Lösungsmengen (Zahlenmengen) als Punktmengen, wie sie durch die den Teilnehmern bereits bekannte eindeutige Abbildung von Zahlen in bzw. auf die Menge der Punkte einer Geraden oder einer Ebene möglich wird, ist hier ebenfalls zu behandeln. Damit werden einerseits Verbindungen zu den in Abschnitt 1 genannten Grundlagen hergestellt und wichtige Vorleistungen für den Abschnitt 5 erbracht, andererseits wird damit ein anschauliches Vorgehen, das den Teilnehmern auch die Möglichkeit einer Kontrolle der Ergebnisse bietet, erreicht.

3.1. Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen

- Wiederholen der Begriffe „Gleichung“, „Ungleichung“, „wahre (bzw. falsche) Aussage“; Übungen;
Unterscheiden von erfüllbaren, unerfüllbaren und allgemeingültigen Gleichungen („Identitäten“); Definieren von „Lösung“, „Variablengrundbereich“, „Lösungsmenge“, „äquivalente Umformung“;
- Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen, dabei Wiederholen des Zusammenhangs zwischen Lösungsmenge und Variablengrundbereich; Übungen und Anwendungen;
- Lösen von Gleichungen des Typs $ax + b = c$ und Ungleichungen der Typen $ax + b < c$ und $|ax + b| > c$ durch Fallunterscheidungen; Angeben der Lösungsmenge unter Verwendung von Vereinigung bzw. Durchschnitt dabei vorkommender Lösungsmengen.

3.2. Gleichungen und Ungleichungen höheren Grades mit einer Variablen

- Wiederholen des Lösens von quadratischen Gleichungen (insbesondere Herleitung der Lösungsformel; Satz von Vieta; Zerlegung in Linearfaktoren; grafische Veranschaulichung); Übungen und Anwendungen;
- Lösen von Ungleichungen des Typs $ax^2 + bx + c < 0$ durch quadratische Ergänzung sowie durch Zerlegung in Linearfaktoren; Angeben der Lösungsmenge bei den erforderlichen Fallunterscheidungen unter Verwendung von Vereinigung und Durchschnitt dabei vorkommender Lösungsmengen; geometrische Veranschaulichung der Lösungsmengen; Lösen von Anwendungsaufgaben;
- Lösen einiger Gleichungen bzw. Ungleichungen höheren als 2. Grades, wenn diese als Produkt von zwei höchstens quadratischen Faktoren oder als biquadratische Gleichung gegeben sind; dabei Angeben der Lösungsmenge unter Verwendung von Vereinigung bzw. Durchschnitt der vorkommenden Lösungsmengen.

3.3. Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen

- Erweitern von „Lösung“ auf Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mehreren Variablen; Definieren von „Lösungsgrundbereich“ unter Verwendung der Produktmenge;
Erweitern von „Lösungsmenge“ und „äquivalente Umformung“ auf Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mehreren Variablen;
- Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen des Typs $ax + by + c = 0$ bzw. $ax + by + c < 0$, dabei Veranschaulichung der Lösungsmenge als Punktmenge; Behandeln der Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Variablengrundbereich;
- Lösen diophantischer Gleichungen, dabei Verwenden von Durchschnitt und Zahlenkongruenzen.

3.4. Gleichungs- und Ungleichungssysteme

- Wiederholen des Lösens von Gleichungssystemen aus zwei linearen Gleichungen; Übungen;
- Lösen von Ungleichungssystemen aus zwei linearen Ungleichungen; Übungen;
- Lösen von Systemen aus einer linearen Gleichung und einer linearen Ungleichung; Übungen;
- Lösen von Systemen aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung bzw. Ungleichung; Übungen.

4. Arbeiten mit Mengen in der Geometrie

Mit der Behandlung dieses Abschnitts wird das Ziel verfolgt, die Anwendbarkeit grundlegender Begriffe der Mengenlehre in der Geometrie zu zeigen. Sie beruht auf der Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen, und deshalb ist es notwendig, diesen Begriff mittels eines vielfältigen Beispielmaterials zu erläutern. Die dazu verwendete Umformulierung bekannter Definitionen für geometrische Objekte in die mengentheoretische Redeweise ist geeignet, bei den Teilnehmern sowohl ihre Fähigkeiten im Anwenden der behandelten grundlegenden Begriffe der Mengenlehre zu entwickeln als auch ihre Kenntnisse über Definitionen geometrischer Objekte zu festigen. Um dies zu erreichen, sollten auch umgekehrt Definitionen geometrischer Objekte in mengentheoretischer Darstellung vorgegeben und ihre Umformulierung in die den Schülern vertraute Darstellung gefordert werden. Dabei sollten die Schüler immer wieder veranlaßt werden, das so definierte geometrische Objekt zu zeichnen und zu bezeichnen. Auch Definitionen für solche geometrischen Objekte sollten berücksichtigt werden, für die aus dem obligatorischen Unterricht keine Definitionen bekannt sind, und es sollten für die

Teilnehmer neuartige Definitionen (etwa unter Verwendung der Vereinigung oder des Durchschnitts von Punktmengen) für bekannte Objekte verwendet werden, so daß auf diese Weise Zusammenhänge zwischen geometrischen Objekten aufgedeckt und bewußtgemacht werden können.

Die Behandlung dieser Thematik sollte hauptsächlich durch möglichst selbständiges Lösen sorgfältig ausgewählter und aufeinander abgestimmter Aufgaben erfolgen; Systematik und Vollständigkeit durch Behandlung aller möglichen Fälle sind nicht anzustreben. Auch das Formulieren und Beweisen geometrischer Sätze ist auf die Behandlung weniger, aber instruktiver Beispiele zu beschränken. Das dient hauptsächlich dem Zweck, den Schülern typische Anwendungen von Definitionen in der mengentheoretischen Form zu zeigen, soll aber auch zur Entwicklung des Beweisverständnisses und der Fähigkeiten im selbständigen Führen einfacher Beweise beitragen.

Ein weiterer Schwerpunkt ist das Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben, die hier vor allem unter dem Aspekt der Anwendung der Mengenlehre bei der Ermittlung von Lösungswegen betrachtet werden, das heißt, die Analyse der Aufgabe und nicht die Ausführung ihrer Lösung steht im Mittelpunkt. Bei ihr ist konsequent mit Bestimmungslinien als speziellen Punktmengen zu arbeiten, so daß sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten für Begriffsbildungen und Symbole der Mengenlehre ergeben.

Die wertvollen erzieherischen Potenzen des relativ selbständigen und erfolgreichen Suchens nach Lösungen für geometrische Aufgaben wie die Entwicklung der Exaktheit bei der Aufgabenerfassung und des planvollen überlegten Vorgehens bei der Suche nach der Lösung sowie des Willens, Schwierigkeiten zu überwinden und der kritischen Einschätzung des Erreichten (z. B. auf Richtigkeit und Vollständigkeit des Lösungsplanes) sind dabei bewußt und zielstrebig für die Erziehung der Teilnehmer zu nutzen.

- Lagebeziehungen zwischen Punkt und Gerade, Punkt und Ebene und zwischen zwei Geraden in mengentheoretischer Interpretation und Darstellung; Strahlen, Strecken und Winkel als Punktmengen; Übungen;
- geometrische Objekte als Punktmengen; Definitionen für Dreiecke und (konvexe) Vierecke als Punktmengen, auch für alle ihre aus dem Unterricht bekannten Spezialfälle; Beweise für weitere Eigenschaften dieser Figuren unter Verwendung der behandelten Definitionen;
- spezielle Punktmengen, die als Bestimmungslinien Anwendung finden, insbesondere Kreise und Kreisbögen, Strahlen, Mittelsenkrechten von Strecken, Parallelen zu einer Geraden, Winkelhalbierende; Durchschnitte solcher Punktmengen und Untersuchungen ihrer Mächtigkeit, Fallunterscheidungen; Übungen; Anwendungen auf geometrische Grundkonstruktionen;

- Anwenden von Bestimmungslinien beim Lösen planimetrischer Konstruktionsaufgaben für Dreiecke und Vierecke, dabei vor allem Entwicklung von Lösungsplänen sowie Untersuchungen zur Konstruierbarkeit und zur Anzahl der Lösungen, Fallunterscheidungen; Übungen im Entwickeln von Lösungsplänen für Dreiecks- und Vierecks-konstruktionen, bei denen auch Stücke in den Figuren (Winkelhalbierende, Höhen, Seitenhalbierende; Diagonalen) gegeben sind bzw. zunächst nur Teilfiguren konstruierbar sind; Übungen und einfache Anwendungen.

5 Mengen und Funktionen

Bei der Behandlung dieses Abschnittes kommt es erneut darauf an, den Teilnehmern die Reichweite und Tragfähigkeit mengentheoretischen Arbeitens zu verdeutlichen. Dazu sind die entsprechenden Kenntnisse aus dem obligatorischen Unterricht über Abbildungen und Funktionen aufzugreifen und zu erweitern.

Die Arbeit mit geeigneten Beispielen sollte im Vordergrund stehen, wobei neben Beispielen aus der unmittelbaren Erfahrungswelt der Teilnehmer auch Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen aus dem Geometrieunterricht der Klassen 6 bzw. 8 sowie die der darstellenden Geometrie in Klasse 7 zugrunde liegenden Abbildungen betrachtet werden sollten. Die Potenzien für die weltanschauliche Bildung und Erziehung sind bewußt zu nutzen, insbesondere ist anhand des für die Mathematik zentralen Begriffes der Funktion auf die Rolle der Mathematik beim Erfassen und Verändern der Wirklichkeit einzugehen.

Das zu erreichende gründliche Verständnis der Teilnehmer für die Abbildung von Mengen ist als Grundlage für eine zielgerichtete Wiederholung und Vertiefung des Funktionsbegriffes zu nutzen. Die den Schülern aus dem obligatorischen Unterricht der Klassen 8, 9 und 10 bekannten Begriffe wie „Funktion“, „Definitionsbereich“, „Wertebereich“, „Funktionswert“, „Graph einer Funktion“ sind zu reaktivieren und anhand von Beispielen mit den Begriffsbildungen der Mengenlehre zu beschreiben. Diese sind auch anzuwenden, um anhand konkreter Aufgaben Teile von Funktionsbildern bzw. Schnittpunkte zwischen Bildern verschiedener Funktionen zu beschreiben.

Schließlich sind die Begriffsbildungen der Mengenlehre zu nutzen, um durch die Erarbeitung einer Übersicht und Klassifikation der aus dem obligatorischen Unterricht bekannten Funktionen zur Vertiefung und Festigung des Funktionsbegriffes beizutragen.

Bei der methodischen Gestaltung der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit kommt es auch in diesem Abschnitt nicht auf eine vollständige und systematische Abhandlung theoretischer Fragen an, vielmehr sollte die Arbeit mit Beispielen und insbesondere das Lösen entsprechender Aufgaben im Mittelpunkt stehen.

- Wiederholen von „geordnetes Paar“ und Definieren von „Produktmenge“ (vgl. Abschnitt 2.1.);
- Definieren von „Abbildung aus (bzw. von) einer Menge M in (bzw. auf) eine Menge N “ mit Hilfe von Übungen, dabei Berücksichtigen der vier möglichen Fälle der Abbildung von Mengen; weitere Beispiele als Übungen;
- Wiederholen von „eindeutig“ und „umkehrbar eindeutig“; Beispiele für mehrdeutige, eindeutige und umkehrbar eindeutige Abbildungen von Mengen;
- Behandeln von Beispielen für den Spezialfall „Abbildung einer Menge auf sich selbst“; Hintereinanderausführung solcher Abbildungen (z. B. bei geometrischen Abbildungen und speziellen Permutationsgruppen);
- Wiederholen von Definitionen für „Funktion“, „Definitionsbereich“, „Wertebereich“, „Funktionswert“; Übungen;
- Wiederholen von Funktionen, deren Definitions- und Wertebereiche Zahlenmengen sind; Übungen im Darstellen solcher Funktionen, insbesondere durch Punktmengen in der Ebene;
- Verwenden von Begriffen aus der Mengenlehre zum Klassifizieren der aus dem obligatorischen Unterricht bekannten Funktionen.