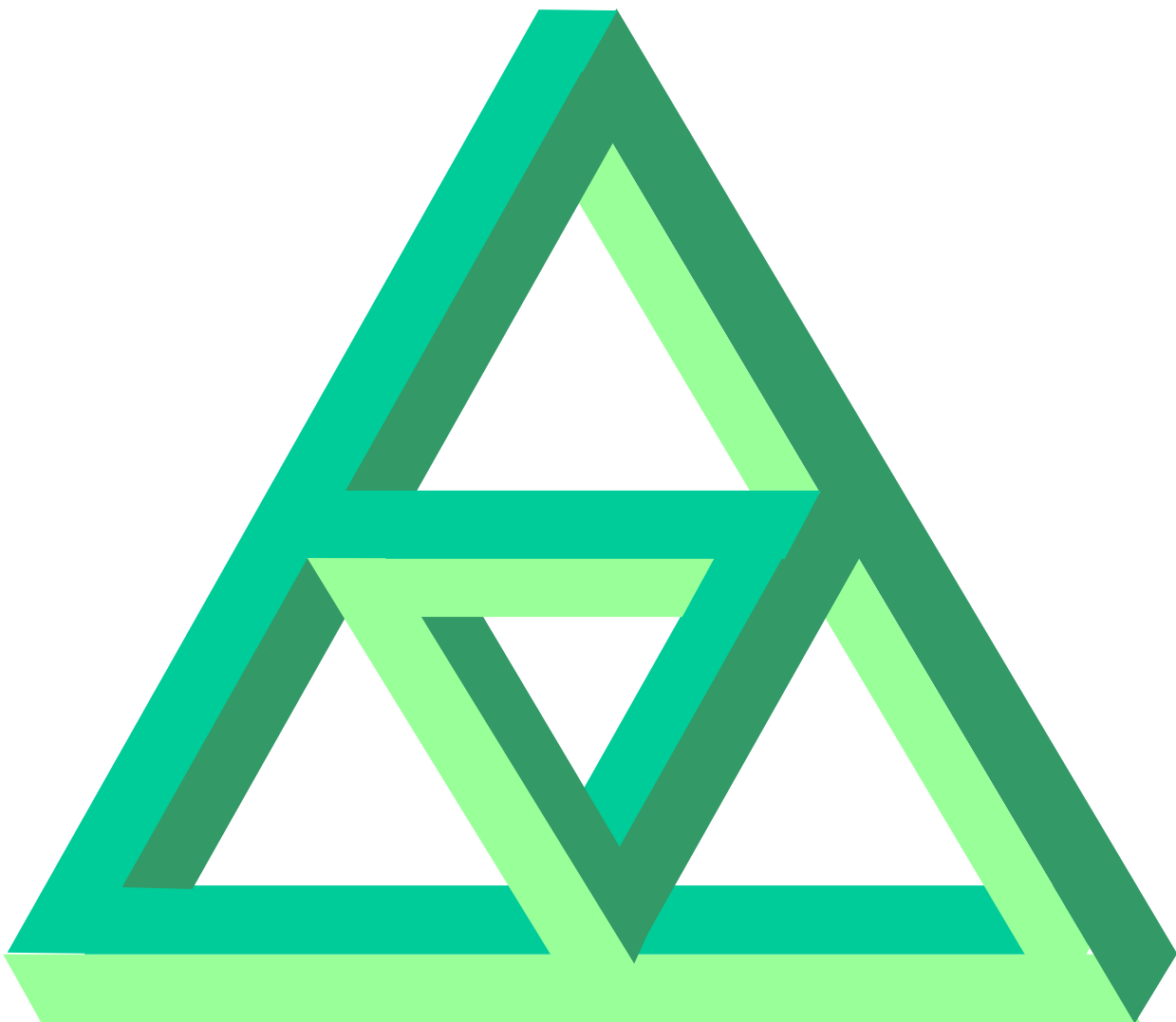


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO650921** und **MO651021** der Regionalrunde greifen wir noch einmal ein sehr frühes Thema auf: „Thema 7 – Kryptogramme“. Obwohl solche Aufgaben durch systematisches Probieren gelöst werden und damit in die Unterhaltungsmathematik fallen können, sind sie eine effektive Übung für die Anwendungen von Fallunterscheidungen.

Mit der aktuellen Aufgabe **A4-4** aus dem sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik wiederholen wir das Thema 4.1 „Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung“ aus Heft 03/2021. Anstelle der Berechnung von Längen geeigneter Strecken steht hier der Lösungsansatz im Vordergrund, kongruente Teilflächen zu finden, deren Flächeninhalt ohne rechnerischen Aufwand ermittelt werden kann.

Da die „Mathematischen Kostproben“ die themenbezogene Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe fördern möchte, nehmen wir den 25. Jahrgang zum Anlass, auf zurückliegende Themen hinzuweisen und die zugehörigen Aufgabensammlungen zu wiederholen. Wir setzen dies in diesem Heft mit dem **Thema 7** „Kryptogramme“ aus dem Jahr 2021 fort. Die Lösungen sind in den angegebenen Heften enthalten bzw. werden auf formlose Anfrage per pdf-Dokument zugesandt.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 7.3 – Kryptogramm

Aufgabe 7.10 – MO650921/MO651021. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne bei der schriftlichen Multiplikation in der Aufgabe

6	*	*	.	*	*	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	*	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	*

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Rechnung (im Zehnersystem) korrekt ist.

Lösungshinweise: Wir bestimmen Schritt für Schritt mögliche Werte für einzelne der Sterne, wozu wir die Bezeichnungen $a, \dots, m$ für Ziffern im Zehnersystem einführen. Zunächst ergibt sich aus dem Additionsschema

6	*	*	.	*	*	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	b	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	a

dass $a = 4$ und $b = 8$ gilt, weil dies für $b + 4 = x \cdot 10 + 2$ im Bereich der Ziffern und mit $x \in \{0, 1\}$ die einzige Lösung ist. Im Additionsschema

6	c	d	.	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

ergibt sich die erste Zeile aus $\overline{6cd} \cdot e$, die zweite aus $\overline{6cd} \cdot f$ und die dritte aus $\overline{6cd} \cdot 8$, da im Multiplikationsschema der Multiplikand (linker Faktor) mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators (rechter Faktor) multipliziert und daraus das Additionsschema gebildet wird.

Wegen der 4 am Ende der dritten Produktzeile gilt $d = 3$ oder $d = 8$, weil nur $3 \cdot 8 = 24$ und $8 \cdot 8 = 64$ auf 4 enden. Wir betrachten deshalb zwei Fälle.

Fall 1: $d = 3$: Wir setzen die Ziffer ein. Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile folgt $e = 6$ und $f = 6$, weil 18 das einzige Produkt einer Ziffer mit 3 ist, das auf 8 endet. Für die dritte Zeile des Additionsschemas ergibt sich $\overline{6c3} \cdot 8 = \overline{**44}$, woraus $c = 4$ oder $c = 9$ folgt, denn nur $4 \cdot 8 + 2 = 34$ und $9 \cdot 8 + 2 = 74$ ergeben eine 4 an der Zehnerstelle.

6	c	3	$\cdot$	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile folgt $e = 6$ und $f = 6$, weil 18 das einzige Produkt einer Ziffer mit 3 ist, das auf 8 endet. Für die dritte Zeile des Additionsschemas ergibt sich $\overline{6c3} \cdot 8 = \overline{**44}$, woraus $c = 4$ oder $c = 9$ folgt, denn nur $4 \cdot 8 + 2 = 34$ und $9 \cdot 8 + 2 = 74$ ergeben eine 4 an der Zehnerstelle.

Wegen $643 \cdot 668 = 429\,524$ und $693 \cdot 668 = 462\,924$ führen aber beide Möglichkeiten auf keine Lösung.

Fall 2: $d = 8$: Wir setzen die Ziffer ein. Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile können e und f nur 1 oder 6 sein. $e = 1$ oder $f = 1$ kommen nicht in Frage, da $\overline{6c8} \cdot 1$ nur dreistellig ist, während die entsprechenden Zeilen im Additionsschema vier Stellen haben. Es gilt also auch in diesem Fall $e = f = 6$.

6	c	8	$\cdot$	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

Um die Zehnerziffer 4 in der dritten Zeile des Additionsschemas zu erhalten, gibt es nur die Möglichkeiten $c = 1$ oder $c = 6$, denn im Schema $\overline{6c8} \cdot 8 = \overline{**44}$ ergeben nur $1 \cdot 8 + 6 = 14$ und $6 \cdot 8 + 6 = 54$ eine 4 an der Zehnerstelle.

Im Fall von $c = 1$ erhalten wir $618 \cdot 668 = 412\,824$, was keine Lösung der Aufgabe ist. $c = 6$ dagegen liefert die Lösung $668 \cdot 668 = 446\,224$. Dies ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

6	6	8	$\cdot$	6	6	8
	4	0	0	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	4	4	6	2	2	4

□

Lösungsvariante: Wir untersuchen zuerst im Additionsschema das Teilergebnis $\overline{6xy} \cdot 8 = \overline{ab44}$. Da die linke Seite durch 8 teilbar ist, muss b eine ungerade Ziffer sein, weil nach den bekannten Teilbarkeitsregeln für 8 die letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden müssen. Wir formen die Multiplikationsaufgabe zunächst um zu

$$600 \cdot 8 + \overline{xy} \cdot 8 = 1000 \cdot a + \overline{b44}, \text{ also } \overline{xy} = 125 \cdot a + \overline{b44} : 8 - 600.$$

Wir setzen nun nacheinander die ungeraden Ziffern für b ein und erhalten unter Einhaltung von $0 \leq \overline{xy} < 99$ folgende Aussagen.

$b = 1$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 18 - 600 = 125 \cdot a - 582$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 43$ und $643 \cdot 8 = 5144$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	4	3	.	*	1	8
	4	*	*	8		
		c	d	3	8	
+			5	1	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, müsste $b = 6$ gelten. Jedoch gilt $643 \cdot 3 = 1829 \neq \overline{cd38}$.

$b = 3$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 43 - 600 = 125 \cdot a - 557$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 68$ mit $668 \cdot 8 = 5344$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	6	8	.	*	3	8
	4	*	*	8		
		c	d	0	8	
+			5	3	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 1$ oder $b = 6$ gelten. Wegen $668 \cdot 1 < 1000$ entfällt diese Lösung. Dagegen gilt $668 \cdot 6 = 4008$.

$b = 5$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 68 - 600 = 125 \cdot a - 532$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 93$ mit $693 \cdot 8 = 5544$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	9	3	.	*	b	8
	4	*	*	8		
		c	d	8	8	
+			5	5	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 6$ gelten. Jedoch führt dies zu keiner Lösung, denn es gilt $693 \cdot 6 = 4158 \neq \overline{cd88}$.

$b = 7$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 93 - 600 = 125 \cdot a - 507$ ist für keine ganze Zahl erfüllbar.

$b = 9$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 118 - 600 = 125 \cdot a - 482$ ist nur für $a = 4$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 18$ mit $618 \cdot 8 = 4944$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	1	8	.	*	b	8
	4	*	*	8		
		c	d	4	8	
+			4	9	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 1$ oder $b = 6$ gelten. Wegen $18 \cdot 1 < 1000$ entfällt die Lösung mit $b=1$. Außerdem gilt $618 \cdot 6 = 4928 \neq \overline{cd48}$.

Folglich kann es nur eine Lösung geben, in der nun nur die folgenden Sternchen verbleiben:

6	6	8	·	*	6	8
	4	*	*	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	*	4	*	2	2	4

Aufgrund des mittleren Produktes finden wir unmittelbar eine Lösung der Aufgabe:

6	6	8	·	6	6	8
	4	0	0	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	4	4	6	2	2	4

Eine weitere Lösung kann es aber nicht geben, da der zweite Faktor wegen $668 \cdot 1 < 1000$ nicht mit 1 beginnen kann und für andere Hunderterziffer das erste Produkt nicht auf 8 endet.

Als erste Aufgabe dieses Typs in den Mathematik-Olympiaden finden wir bereits eine Aufgabe zur VIII. MO 1968.

Aufgabe 7.11 – MO081014. In

1	*	*	·	*	*
	*	*	*	1	
		*	*	*	1
	*	*	*	1	*

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösungshinweise: Wir können aufgrund des Verfahrens der schriftlichen Addition am rechten Rand das Schema unmittelbar ergänzen und setzen anstelle der Sternchen schrittweise Buchstaben, um die Zwischenschritte anschaulich erklären zu können.

1	a	b	·	c	d
	e	f	g	1	
		h	i	0	1
	*	*	*	1	1

Offenbar müssen im unteren Zwischenprodukt $\overline{1ab} \cdot d = \overline{hu01}$ die Ziffern b und d ungerade sein, damit das Produkt ungeradzahlig wird. Es gibt nur vier Paare von ungeraden Ziffern, deren Produkt auf 1 endet. Wir untersuchen also vier Fälle.

Fall 1: $b = 1$ und $d = 1$, also $\overline{1a1} \cdot 1 = \overline{hu01}$. Dies führt zu $a = 0$ und damit $h = 0$ und $i = 1$, also zu

1	0	1	·	c	1
	e	f	g	1	
		0	1	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Zwischenprodukt müssen wir die Aufgabe $101 \cdot c = \overline{efg}1$ lösen. Wir erkennen wegen der Einerziffern unmittelbar $f = 1$ und damit eine Lösung des Kryptogramms:

1	0	1	·	1	1
	0	1	0	1	
		0	1	0	1
	0	1	1	1	1

Fall 2: $b = 3$ und $d = 7$ hat das Kryptogramm die Darstellung

1	a	3	·	b	7
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a3} \cdot 7 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $3 \cdot 7 = 21$ muss das Produkt $a \cdot 7$ auf 8 enden, was auf $a = 4$ führt. Wir erhalten also $143 \cdot 7 = 1001$ und somit

1	4	3	·	b	7
	c	d	e	1	
		1	0	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $143 \cdot b = \overline{cde}1$, woraus unmittelbar $d = 7$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	4	3	·	7	7
	1	0	0	1	
		1	0	0	1
	1	1	0	1	1

Fall 3: $b = 7$ und $d = 3$ mit dem Kryptogramm

1	a	7	·	b	3
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a7} \cdot 3 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $3 \cdot 7 = 21$ muss das Produkt $a \cdot 3$ auf 8 enden, was auf $a = 6$ führt. Wir erhalten also $167 \cdot 3 = 0501$ und somit

1	6	7	·	b	3
	c	d	e	1	
		0	5	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $167 \cdot b = \overline{cde1}$, woraus unmittelbar $b = 3$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	6	7	·	3	3
	0	5	0	1	
		0	5	0	1
	0	5	5	1	1

Fall 4: $b = 9$ und $d = 9$ mit dem Kryptogramm

1	a	9	·	b	9
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a9} \cdot 9 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $9 \cdot 9 = 81$ muss das Produkt $a \cdot 9$ auf 2 enden, was auf $a = 8$ führt. Wir erhalten also $189 \cdot 9 = 1701$ und somit

1	8	9	·	b	9
	c	d	e	1	
		1	7	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $189 \cdot b = \overline{cde1}$, woraus unmittelbar $b = 9$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	8	9	·	9	9
	1	7	0	1	
		1	7	0	1
	1	8	7	1	1

Wir haben also insgesamt vier Lösungen gefunden:

$101 \cdot 11 = 01111$, $143 \cdot 77 = 11011$, $167 \cdot 33 = 05511$ und $189 \cdot 99 = 18711$.



Aufgabe 7.12 – MO451044. In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne * durch die Ziffern 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

	*	*	*				*	*	*
+	*	*	*			+	*	*	*
+	*	*	*			+	*	*	*
=	9	9	9			1	0	0	0

Hinweis: Aufgrund der Forderung, jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal zu verwenden, wird diese Sternchen-Aufgabe zu einem Kryptogramm im engeren Sinne, weil verschiedenen Buchstaben dann auch verschiedene Zahlen bedeuten.

Lösungshinweise: Der Unterscheidbarkeit wegen ersetzen wir die Sterne durch Variablen:

	a	b	c				a	b	c
+	d	e	f			+	d	e	f
+	g	h	i			+	g	h	i
=	9	9	9			1	0	0	0

Zur linken Summe: O.B.d.A. legen wir $a > d > g$, $b > e > h$ und $c > f > i$ fest, da Vertauschen der Ziffern innerhalb einer Spalte am Endergebnis der Summe nichts ändert. Alle übrigen Lösungen der Aufgabe ergeben sich aus so einer Lösung, indem wir die Ziffern geeignet innerhalb der Spalten vertauschen. Für das Vertauschen der Ziffern innerhalb einer Spalte gibt es $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, insgesamt erzeugt jede Lösung somit $216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ verschiedene Lösungen der Aufgabe.

Addieren wir die linke Summe per Hand, so ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$\text{rechte Spalte: } c + f + i = 10 \cdot \ddot{u}_1 + 9$$

$$\text{mittlere Spalte: } b + e + h + \ddot{u}_1 = 10 \cdot \ddot{u}_2 + 9$$

$$\text{linke Spalte: } a + d + g + \ddot{u}_2 = 9$$

mit geeigneten Überträgen $\ddot{u}_1$ und $\ddot{u}_2$. Es gilt $\ddot{u}_1 \leq 1$ und $\ddot{u}_2 \leq 1$:

Angenommen, es wäre $\ddot{u}_2 \geq 2$. Dann gilt

$$24 = 9 + 8 + 7 \geq c + f + i = 10 \cdot \ddot{u}_1 + 9 \geq 10 \cdot 2 + 9 = 29$$

was einen Widerspruch darstellt. Also ist $\ddot{u}_1 \leq 1$.

Angenommen, es wäre $\ddot{u}_2 \geq 2$. Dann gilt

$$25 = 9 + 8 + 7 + 1 \geq b + e + h + \ddot{u}_1 = 10 \cdot \ddot{u}_2 + 9 \geq 29,$$

was einen Widerspruch darstellt. Also ist $\ddot{u}_2 \leq 1$.

Es gilt sogar $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 1$, denn Addition der obigen drei Gleichungen liefert

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 = 27 + 10 \cdot (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2),$$

also $45 = 27 + 9 \cdot (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2)$, da die Summe der Zahlen 1, 2, ..., 9 genau 45 beträgt. Also gilt $\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 = 2$, und wegen $\ddot{u}_1, \ddot{u}_2 \leq 1$ folgt daher $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 1$.

Lösungen der linken Summe genügen also immer den Gleichungen

$$a + b + c = 19,$$

$$d + e + f = 18,$$

$$g + h + i = 8.$$

Unter Beachtung der festgelegten Monotonie liefert gezieltes Probieren für das Tripel (a, d, g) nur die Möglichkeiten (5, 2, 1) und (4, 3, 1). Daraus ergeben sich nun leicht genau fünf Grundlösungen bis auf Vertauschungen innerhalb der Spalten:

$$5\,9\,8 + 2\,6\,7 + 1\,3\,4 = 9\,9\,9$$

$$5\,8\,9 + 2\,7\,6 + 1\,3\,4 = 9\,9\,9$$

$$5\,8\,9 + 2\,6\,7 + 1\,4\,3 = 9\,9\,9$$

$$4\,9\,8 + 3\,7\,6 + 1\,2\,5 = 9\,9\,9$$

$$4\,7\,9 + 3\,6\,8 + 1\,5\,2 = 9\,9\,9$$

Durch unabhängiges Vertauschen der Ziffern in jeder der drei Spalten können aus jeder Grundlösung jeweils $6^3 = 216$ paarweise verschiedene Lösungen der Aufgabe erzeugt werden. Somit besitzt die Aufgabe $5 \cdot 216 = 1080$ Lösungen.

Zur rechten Summe: Wir untersuchen die Reste der Summenden bei Division durch 9. Schreiben wir $\overline{xyz}$ für die Zahl $100x + 10y + z$ und $Q(w)$ für die Quersumme einer Zahl w , so lässt die Summe der drei Zahlen bei Division durch 9 den Rest

$$Q(\overline{abc}) + Q(\overline{dfe}) + Q(\overline{ghi}) = a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

also den Rest 0. Das ist offensichtlich ein Widerspruch, da $1000 = 9 \cdot 111 + 1$ bei Division durch 9 den Rest 1 lässt. Somit besitzt die gestellte Aufgabe keine Lösungen. $\square$

Aufgabe 7.13 – MO561013. In der Gleichung $***** - ***** = 2017$ Ist jeder Stern so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

- Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
- Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen im Folgenden mit $\overline{abcde}$ die Zifferndarstellung einer fünfstelligen Zahl der Form $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a). Wir untersuchen die Aufgabe

$$\overline{abcde} - \overline{fghij} = 2017,$$

wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bezeichnet und alle Ziffern paarweise verschieden sind. Da die Differenz kleiner als 10000 ist, folgt $a = f + 1$. Dann verbleibt als Subtraktionsaufgabe

$$\overline{ghij} - \overline{bcde} = 10000 - 2017 = 7983.$$

Das ist nur möglich, wenn $g - b = 7$ oder $g - b = 8$ gilt. Aus $g - b = 7$ würde $g \geq 7$ und $\overline{hij} - \overline{cde} = 983$ gelten. Dies ist jedoch nicht möglich, weil $\overline{hij} < 987$ und $\overline{cde} \geq 012$ erfüllt ist. Somit muss $g - b = 8$ gelten. Dafür finden wir die zwei Möglichkeiten $g = 8$ und $b = 0$ sowie $g = 9$ und $b = 1$.

In jedem Fall gilt $\overline{cde} - \overline{hij} = 1000 - 983 = 17$. Wegen $0 < \overline{cde} - \overline{hij} < 100$ erhalten wir wie oben $c = h + 1$.

Also finden wir die Beziehung $\overline{ij} - \overline{de} = 100 - 17 = 83$. Also gilt $i - d = 8$ oder $i - d = 9$. Allerdings folgt aus $i - d = 9$, dass $i = 9$ und $d = 0$ sein muss. Jedoch sind die Ziffern 9 oder 0 schon vergeben.

Folglich gilt $i - d = 8$ und wir haben dafür die zwei Möglichkeiten $i = 9$ und $d = 1$ sowie $i = 8$ und $d = 0$, je nachdem, welche Ziffern für g und b bereits vergeben sind.

Schließlich finden wir noch $j - e = 3$.

Wir können b, d, g, i aus der Menge $\{0, 1, 8, 9\}$ und a, c, e, f, h, j aus der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ auswählen. Dafür gibt es drei Fälle:

- *Fall 1:* Wenn $(j, e) = (5, 2)$ ist, dann sind die Paare (a, f) und (c, h) gleich den Paaren $(4, 3)$ und $(7, 6)$.
- *Fall 2:* Wenn $(j, e) = (6, 3)$ ist, dann gibt es keine Lösungen.
- *Fall 3:* Wenn $(j, e) = (7, 4)$ ist, dann sind die Paare (a, f) und (c, h) gleich den Paaren $(3, 2)$ und $(6, 5)$.

Daher gibt es die folgenden acht Lösungen:

$$\begin{array}{ll} 40712 - 38695 = 2017, & 70412 - 68395 = 2017, \\ 41702 - 39685 = 2017, & 71402 - 69385 = 2017, \\ 30614 - 28597 = 2017, & 60314 - 58297 = 2017, \\ 31604 - 29587 = 2017 & \text{und} \quad 61304 - 59287 = 2017. \end{array}$$

□

Aufgabe 7.14. Das Aufschreiben des nachfolgend angegebenen Polynoms als Produkt zweier Linearfaktoren erfolgte so hastig, dass einige Ziffern unleserlich sind. (Jedes Sternchen bedeutet eine unlesbare Ziffer.)

$$x^2 + * x - * 1 = (x + **) \cdot (x - *).$$

Vervollständigen Sie diese Gleichung und untersuchen Sie, ob es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Gleichung zu vervollständigen.

Lösungshinweise: Wir schreiben die Gleichung mit Variablen, die für Ziffern stehen.

$$\begin{aligned} x^2 + a \cdot x - 10b - 1 &= (x + 10c + d) \cdot (x - e) \\ x^2 + a \cdot x - 10b - 1 &= x^2 + 10cx + dx - ex - 10ce - de \\ 10ce + de - 10b - 1 &= x \cdot (10c + d - e - a) \end{aligned}$$

Damit die Gleichung für alle x erfüllt ist, muss $10c + d - e - a = 0$ und damit auch $10ce + de - 10b - 1 = 0$ gelten. Wegen $10c + d = e + a$ folgt also

$$e(10c + d) - 10b - 1 = e(e + a) - 10b - 1 = 0,$$

also $e^2 + ea - 10b - 1 = 0$. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichung finden wir

$$e_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 10b + 1}.$$

Wir suchen nun alle Paare $(a; b)$, für die die Diskriminante unter dem Wurzelzeichen das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Es genügt, geradzahlige Ziffern a zu untersuchen.

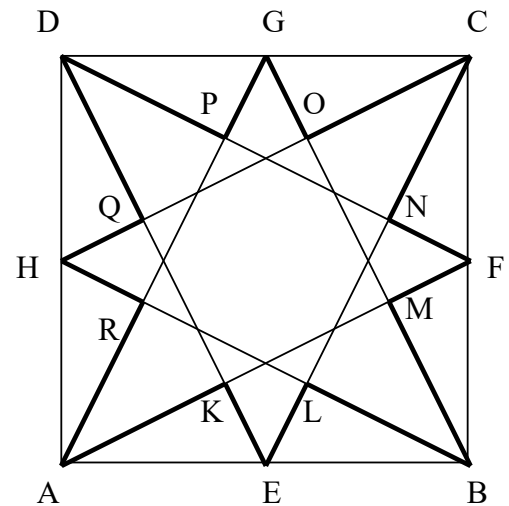
$$\begin{aligned} a = 0: & \quad b = 8 \rightarrow e = 9: x^2 - 81 = (x + 10c + d)(x - 9), \\ & \quad x + 9 = x + 10c + de, c = 0, d = 9 \\ a = 2: & \quad \text{keine Lösung} \\ a = 4: & \quad b = 2 \rightarrow e = 3: x^2 + 4x - 21 = (x + 10c + d)(x - 2), \\ a = 6: & \quad b = 10 \\ a = 8: & \quad \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Thema 4.1 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung³

Aufgabe KZM 4-4. In einem Quadrat $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und $\overline{DA}$ mit E, F, G bzw. H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, Q, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze). Man berechne den Flächeninhalt dieses Sechszehnecks im Verhältnis zum Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.

³ *Nach:* Ambrus A, Berta T. Zur Verwendung von Quadrat- Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben. In: Mathematikinformation, Heft Nr. 45, TU Braunschweig, klartext GmbH print- & medienservice, Göttingen, 2006.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Quadrates mit a . Den gesuchten Flächeninhalt erhalten wir, indem wir vom Flächeninhalt a^2 des Quadrates $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke $\triangle AKE, \triangle BLE, \triangle BMF, \triangle CNF, \triangle COG, \triangle DPG, \triangle DQH$ und $\triangle ARH$ subtrahieren. Nach Konstruktion sind diese acht Dreiecke untereinander kongruent, denn sie stimmen sämtlich in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein.



Aus Symmetriegründen ist das Viereck $KMOQ$ ein Quadrat. Deshalb ist das Dreieck $\triangle AKE$ rechtwinklig und zudem ähnlich dem Dreieck $\triangle ABF$ (www). Außerdem ist $KE \parallel BM$.

Aus dem Strahlensatz mit den Strahlen AB und AF sowie den Parallelen KE und BM folgt deshalb:

$$|\overline{KE}| : |\overline{MB}| = |\overline{AE}| : |\overline{AB}| = 1 : 2$$

d.h. wegen $|\overline{AK}| = |\overline{MB}|$ gilt $|\overline{AK}| = 2 \cdot |\overline{KE}|$. Aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das Dreieck $\triangle AKE$ mit dem rechten Winkel im Eckpunkt K , ergibt sich

$$|\overline{KE}|^2 + (2 \cdot |\overline{KE}|)^2 = |\overline{AE}|^2 \quad \text{d.h.} \quad 5 \cdot |\overline{KE}|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks AKE beträgt folglich

$$\frac{|\overline{KE}| \cdot 2|\overline{KE}|}{2} = |\overline{KE}|^2 = \frac{a^2}{20}.$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt $a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5} \cdot a^2$ und für das Verhältnis der Flächeninhalte gilt $A_{\text{Quadrat}} : A_{\text{Sechszehneck}} = 5 : 3$. $\square$

Hinweis: Anstelle der Bestimmung von Streckenlängen, die zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, kann die Zerlegung der Grundfigur in kongruente Teilflächen zum Ergebnis allein durch Auszählen der betroffenen Teilflächen gelingen.

Lösungsvariante: Wir überziehen das Ausgangsquadrat $ABCD$ mit einem 12×12 - Netz. In diesem Fall liegen auch die Eckpunkte E, F, G und H des Sechszehnecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt des inneren Quadrates $WXYZ$ kann allein durch Auszählen ermittelt werden: $4 \cdot 4 = 16$ dieser Gitterquadrate. Zur gesuchten Fläche gehören weiterhin acht rechtwinklige Dreiecke wie $\triangle WVG$ mit den Katheten 2×1 (d.h. mit dem Flächeninhalt von 4 Gitterquadraten), also zusammen bereits $16 + 8 \cdot 4 = 48$ Gitterquadrate.

Zur gesuchten Fläche gehören auch weitere acht Dreiecke wie ΔAKX . Deren Flächeninhalte setzen sich jeweils zusammen aus dem Flächeninhalt solcher Dreiecke wie ΔAUX mit 4 Gitterquadraten und solcher Dreiecke wie ΔKXU . Wir verwenden, dass dieses Dreieck ähnlich zu dem Dreieck ΔXUY ist. Somit verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate ihrer Hypotenusen, also wie

$$(\sqrt{2^2 + 4^2})^2 = 20 \text{ zu } 2^2 = 4, \text{ d.h. wie } 5 : 1.$$

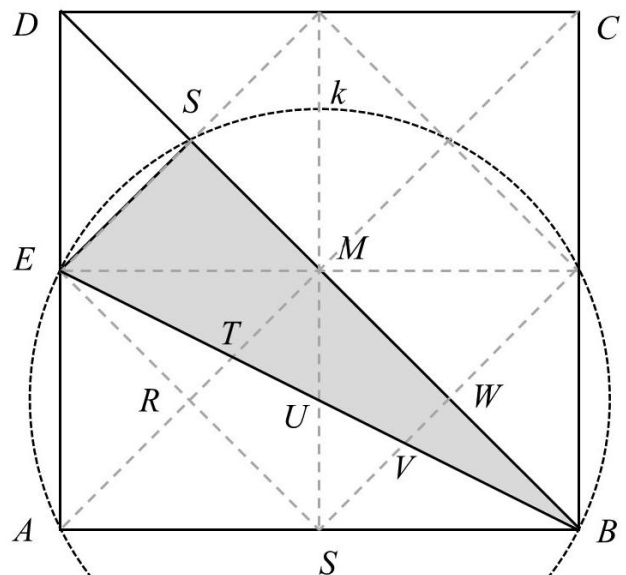
Da der Flächeninhalt des Dreiecks ΔXUY vier Kästchen umfasst, beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔKXU $\frac{4}{5}$ Kästchen. Insgesamt kommen zur Fläche noch $8 \cdot \left(4 + \frac{4}{5}\right) = 38 + \frac{2}{5}$ Gitterquadrate hinzu. Somit beträgt das gesuchte Verhältnis

$$144 : \left(48 + 38 + \frac{2}{5}\right) = 144 : 86.4 = (5 \cdot 28.8) : (3 \cdot 28.8) = 5 : 3.$$

Solche Flächenzerlegungen sind auch bei den folgenden Aufgaben hilfreich.

Aufgabe 4.01 – MO601023. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es sei E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises k . Der Kreis k schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in S . Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBS .

Lösungshinweise: Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck ΔEBS nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt S . Weiter gilt wegen $\sphericalangle DSE = 90^\circ$ und $\sphericalangle EDS = 45^\circ$ gemäß Innenwinkelsummensatzes gilt auch $\sphericalangle SED = 45^\circ$. Das Dreieck ΔESD ist folglich gleichschenkelig-rechtwinklig. So können wir das Quadrat $ABCD$ mit 16 zum Dreieck ΔESD kongruenten Dreiecken vollständig und überschneidungsfrei überdecken.



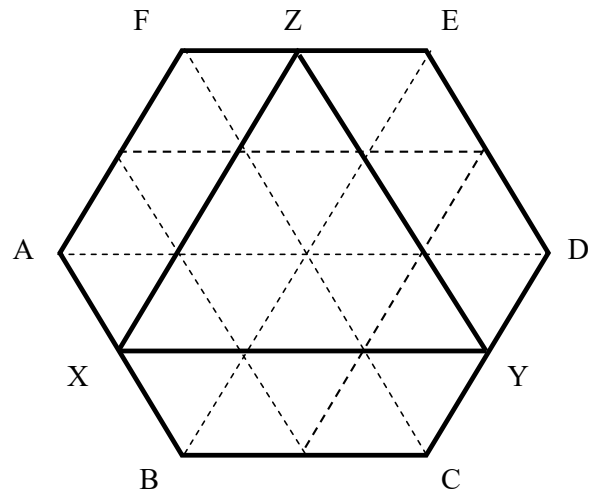
Wir beschreiben nun die gesuchte (in der Abbildung grau hinterlegte) Fläche mittels dieser Teildreiecke. Offensichtlich stimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔEMS mit dem eines Überdeckungsdreiecks überein. Weiterhin ist das Dreieck ΔERT kongruent zum Dreieck ΔBWV , denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|BW| = |ER|$ überein. Also gilt $A_{ETM} + A_{BWV} = A_{ETM} + A_{ERT} = A_{ERM}$ und damit stimmt auch dies

mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Schließlich ist das Dreieck $\triangle MTU$ kongruent zum Dreieck $\triangle SVU$, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|SU| = |MU|$ überein. Also stimmt die Summe $A_{MTU} + A_{MUVW} = A_{SVU} + A_{MUVW} = A_{MSW}$ mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Somit entspricht der Flächeninhalt genau dem Dreifachen des Flächeninhalts eines solchen Überdeckungsdreiecks und damit $\frac{3}{16}$ der Quadratfläche. $\square$

Aufgabe 4.02. In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ seien X, Y und Z die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$.

Gesucht ist das Verhältnis $A_S:A_D$, wenn A_S der Flächeninhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.

Lösungshinweise: Eine Skizze verweist bereits auf den Lösungsansatz durch „Auszählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegen wir das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ in 24 kongruente Teildreiecke, von denen das Dreieck $\triangle XYZ$ insgesamt 9 dieser Teildreiecke umfasst.



Das gesuchte Verhältnis beträgt also $9 : 24 = 3 : 8$. $\square$

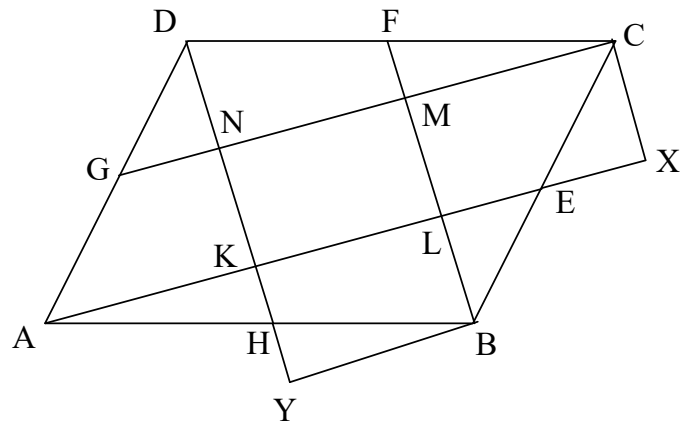
Aufgabe 4.03 – MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit H, E, F bzw. G bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus.

- Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.
- Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$.

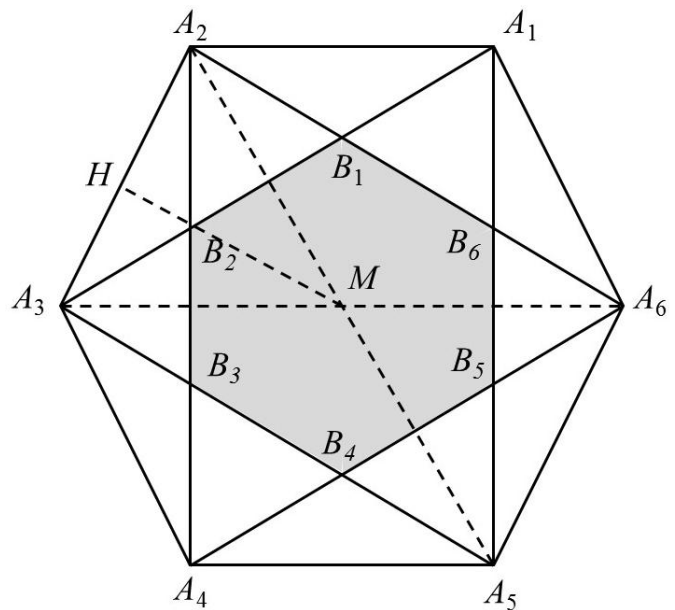
Lösungshinweise: Wieder bereitet die Teilaufgabe (a) die Lösung für (b) vor. Fertigen wir eine Skizze an und beachten die in (a) zu zeigende Streckenabschnitte, so erkennen wir die prinzipielle Möglichkeit, das Parallelogramm $ABCD$ mit zu $KLMN$ kongruenten Parallelogrammen zu überdecken, wobei allerdings Eckpunkte wie X und Y außerhalb der Fläche von $ABCD$ liegen.

Wir sehen, dass die Dreiecke $\triangle BEL$ und $\triangle EXC$ sowie $\triangle AKH$ und $\triangle HYB$ kongruent sind und die entstandenen Vierecke $LXCM$ bzw. $KYBL$ jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm $KLMN$ sind.

Ergänzen wir in analoger Weise die Figur über DF und AG wird unmittelbar ersichtlich, dass die Gesamtfläche des Parallelogramms $ABCD$ aus 5 Parallelogrammen der Größe $KLMN$ zusammengesetzt werden kann. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$ wie 1 : 5. $\square$



Aufgabe 4.04 - MO450924. In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2\dots A_6$ mit dem Flächeninhalt A schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$, $\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2\dots B_6$ mit dem Flächeninhalt B aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt B in Abhängigkeit von A .



Lösungshinweise: Zeichnen wir in die Skizze zusätzlich die Geraden A_2A_5 , A_3A_6 und MB_2 ein, so erkennen wir, dass das Dreieck ΔA_2A_3M gleichseitig ist und durch die (Hilfs-) Linien in sechs flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird. Davon gehören zwei der sechs Teildreiecke zur gesuchten Fläche B . Also nimmt im Dreieck ΔA_2A_3M die Fläche von B genau $\frac{1}{3}$ der zu A gehörenden Fläche ein. Da diese Argumentation für jedes Paar benachbarter Eckpunkte von A ebenso richtig ist, finden wir $B = \frac{1}{3} \cdot A$. $\square$

Rückblick: Thema 07 – Kryptogramme⁴

Aufgabe 7.01 – MO301021. In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe O braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt werden.

		M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

- a) Beweisen Sie, dass in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe O durch die Ziffer 0 ersetzt wird!

⁴ Siehe Heft 07/2021

- b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für A befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Aufgabe 7.02 – MO330923. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (M , R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

		M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

Geben Sie eine Lösung an! Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 7.03 – MO331023. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
=	F	Ü	N	F

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Aufgabe 7.04. Finden Sie alle Lösungen des folgenden Kryptogramms. Dabei bezeichnen A und B (mit $B > 1$) zwei verschiedene Ziffern.

$$A^B + B^A = (A + B^B)^B$$

Aufgabe 7.05 – MO431034. Das Kryptogramm soll in einem n -adischen Positionssystem gelöst werden. Ermitteln Sie das kleinste n , für welches das Kryptogramm eine Lösung hat.

		A	S	T	A
+		E	R	N	I
=	N	A	M	E	N

Aufgabe 7.06 – MO560931/MO561031. In der Gleichung $* \cdot * * * = 6 \cdot * * 5 + 2017$ ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sternchen dürfen durch die gleichen Ziffern ersetzt werden. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 7.07 – MO020911. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt.

x	x	x	x	x	x	x	x	:	x	x	x	=	x	x	x	x	x
	x	x	x														
			x	x	x	x											
				x	x	x											
				x	x	x	x										
				8	x	x	x										
							0										

Aufgabe 7.08 – MO330944. Jemand findet die Aufgabe

$$22! = 11240007277^{**}607680000.$$

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von $22!$ entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Aufgabe 7.09 – MO351033. Die Zahl $20!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

$$20! = 24329020^{*}81766^{*****}$$

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2025

Aufgabe. Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke $\overline{CD}$, einen inneren Punkt Q der Strecke $\overline{BC}$ und einen inneren Punkt R der Strecke $\overline{CD}$ zeichnen.

Dabei stellt sich Ulrike die Aufgabe zu erreichen, dass für die Flächeninhalte $F_1(\Delta ABP)$ und $F_2(\Delta AQR)$ die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt. Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare bzw. unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösungshinweise: Offensichtlich gilt für das ΔABP die Flächenberechnung $F_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$, da das Lot von P auf $\overline{AB}$ die Länge der Seite $\overline{BC}$ hat.

Wir zerlegen die Fläche F_2 durch eine Gerade parallel zu AB durch den Punkt Q , die die Strecke AR in dem Punkt Q' schneidet. Dann gilt

$$F_2 = F_3(\Delta Q'QR) + F_4(\Delta AQQ')$$

Das Lot von Q' auf AB hat die Länge der Strecke $\overline{BQ}$. Das Lot von R auf $Q'Q$ hat die Länge der Strecke QC . Wegen $|\overline{BQ}| + |\overline{QC}| = |\overline{BC}|$ finden wir folgende Abschätzung:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{Q'Q}| \cdot |\overline{QC}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{Q'Q}| \cdot |\overline{BQ}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{Q'Q}| \cdot |\overline{BC}|$$

Nun gilt aber stets $|\overline{Q'Q}| < |\overline{AB}|$ (weil die Strecke AR im Inneren des Rechtecks verläuft). Somit gilt stets $F_1 > F_2$. Nur Waltraud kann ihre Aufgabe lösen. Die Aufgaben von Ulrike und Vera sind unlösbar. $\square$

Monatsaufgabe 03/2026⁵

Man untersuche, ob es für $n = 2$ und für $n = 3$ jeweils positive natürliche Zahlen a und b gibt, so dass

$$\sum_{k=0}^n (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2$$

gilt!

Termine

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Regionalausscheid Südwestsachsen

6. bis 7. März 2026, solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestraße 88, 09116 Chemnitz

Känguru-Wettbewerb 2026 traditionell am dritten Donnerstag im März, am 19. März 2026, <https://www.mathe-kaenguru.de/>

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Landeswettbewerb Sachsen

28. März 2026, IHK Chemnitz, Straße der Nationen 25, 09111 Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Thema 7.3 – Kryptogramm.....	3
Thema 4 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung.....	12
Rückblick: Thema 07 – Kryptogramme.....	16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2025	18
Monatsaufgabe 03/2026.....	19
Termine.....	19

⁵ Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe ⁶	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021 MO650921 MO561013 MO451044 MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023 MO450924 MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

⁶ Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.