

W. I. SMIRNOW

LEHRGANG
DER
HÖHEREN
MATHEMATIK

TEIL IV/2



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

Hochschulbücher für Mathematik

Gegründet von H. Grell, K. Maruhn und W. Rinow

Band 5b

Lehrgang der höheren Mathematik

Teil IV/2

von W. I. Smirnow

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Mit 16 Abbildungen

Elfte Auflage



**VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1989**

Titel der Originalausgabe:

В. И. Смирнов, Курс высшей математики
Том четвертый, Часть вторая
Издание шестое
Наука, Москва 1981

Die Ausgabe in deutscher Sprache (nach der 3. russischen Auflage) besorgten:

Christa Berg und Lothar Berg (Übersetzer),
Herbert Beckert, Günter Schmidt, Hans Schubert (Wissenschaftliche Redaktion).

Die Übersetzung der Änderungen und Ergänzungen nach der 6. russischen Auflage
besorgte Ehrhard Herbst (Wissenschaftliche Redaktion: G. Wildenhain).

ISBN 3-326-00367-6

ISSN 0073-2842

Verlagslektor: Erika Arndt

Verlagshersteller: Norma Braun

© der deutschsprachigen Ausgabe: 1958 und 1989

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR - 1080 Berlin, Postfach 1216

Lizenznummer: 206 • 435/64/88

Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei „G. W. Leibniz“, Gräfenhainichen • 6945

LSV 1034

Bestellnummer: 571 685 4

03000

Vorwort zur sechsten russischen Auflage

Im Vorwort zur zweiten Auflage des fünften Bandes (1959) schrieb WLADIMIR IWANOWITSCH SMIRNOW: „Ein sechster Teil des ‚Lehrganges der höheren Mathematik‘, der einige Fragen der modernen Theorie der Differentialoperatoren mit einer oder mit mehreren unabhängigen Veränderlichen behandeln soll, ist vorgesehen.“ Er wollte, daß ich als Koautor dieses neuen Bandes fungierte. Jedoch haben verschiedene Dinge und Umstände die Realisierung dieses Vorhabens verhindert; es wurde beschlossen, sich auf eine Erweiterung des vierten Bandes zu beschränken. Dazu wurde die Theorie des Lebesgueschen Integrals und des Raumes L_2 in den zweiten Band übernommen, während der vierte Band in zwei Teile zerlegt wurde. Im ersten Teil werden die Theorie der Integralgleichungen im Raum der stetigen Funktionen und im Raum L_2 , die Variationsrechnung, die Theorie der verallgemeinerten Ableitungen, die grundlegenden Eigenschaften der Räume W_2^1 und W_2^2 sowie das Problem der Bestimmung des Minimums eines quadratischen Funktional in allgemeiner Form dargelegt. Dieser Teil wurde 1974 herausgegeben. Die Überarbeitung und Erweiterung des zweiten Teils des vierten Bandes erfolgte zu einer Zeit, als die Gesundheit von WLADIMIR IWANOWITSCH durch eine schwere Krankheit angegriffen war. Nichtsdestoweniger fand er die Kraft, die von mir geschriebenen Ergänzungen und Änderungen aufmerksam zu lesen und zu redigieren sowie Wünsche zur endgültigen Fassung dieses Buches auszusprechen. WLADIMIR IWANOWITSCH hatte vor, einen Teil des Stoffes der vorigen Ausgabe, der seiner Meinung nach im Licht der folgenden Untersuchungen etwas veraltet erschien, herauszunehmen. Im Ergebnis einer gemeinsamen Erörterung willigte er aber ein, ihn beizubehalten und nur einige, zur Koordinierung des alten und neuen Textes notwendige Korrekturen anzubringen.

Wegen der zuvor in den vorangehenden Bänden vorgenommenen Veränderungen wurde eine Korrektur der Hinweisnummern erforderlich. Diese werden anhand der letzten Auflagen aller Bände gegeben, nämlich der 23. Auflage des ersten Bandes (1974), der 21. Auflage des zweiten Bandes (1974), der 10. Auflage des ersten Teils des dritten Bandes (1974), der 9. Auflage des zweiten Teils des dritten Bandes (1974), der ersten Auflage des ersten Teils des vierten Bandes (1974) und der zweiten Auflage des fünften Bandes (1959). Der Hinweis auf den ersten Teil des dritten Bandes erfolgt z. B. in der Form [III/1, 140], wobei die Zahl 140 die Nummer des Abschnitts angibt. Ist das vorliegende Buch gemeint, so wird die Nummer des Bandes nicht mitgeschrieben, sondern es wird nur die Nummer des entsprechenden Abschnitts (z. B. [150]) und manchmal auch die Seite angegeben.

Die von Frau Prof. O. A. LADYSHENSKAJA im Vorwort erwähnten Änderungen der Hinweisnummern wurden bzw. werden in den deutschsprachigen Ausgaben der einzelnen Teilbände berücksichtigt. Die Änderungen sind enthalten bei

Teil I ab 11. Auflage,

Teil II ab 11. Auflage,

Teil III/1 ab 7. Auflage,

Teil III/2 ab 14. Auflage,

Teil V ab 10. Auflage.

Inhalt

I. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen

§ 1.	Differentialgleichungen erster Ordnung	11
1.	Quasilineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen	11
2.	Das Cauchysche Problem und die Charakteristiken	14
3.	Quasilineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen	18
4.	Beispiele	22
5.	Ein Hilfssatz	23
6.	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung	27
7.	Charakteristische Mannigfaltigkeiten	30
8.	Die Cauchysche Methode	31
9.	Das Cauchysche Problem	33
10.	Die Eindeutigkeit der Lösung	35
11.	Der singuläre Fall	37
12.	Nichtlineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen	39
13.	Vollständiges, allgemeines und singuläres Integral	41
14.	Das vollständige Integral und das Cauchysche Problem	43
15.	Beispiele	45
16.	Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen	48
17.	Der Satz von JACOBI	50
18.	Systeme zweier Differentialgleichungen erster Ordnung	51
19.	Die Methode von LAGRANGE und CHARPIT	53
20.	Systeme linearer Differentialgleichungen	55
21.	Vollständige und Jacobische Systeme	57
22.	Die Integration vollständiger Systeme	59
23.	Die Poissonschen Klammern	60
24.	Die Methode von JACOBI	63
25.	Kanonische Systeme	64
26.	Beispiele	65
27.	Die Majorantenmethode	66
28.	Der Satz von S. KOWALEWSKAJA	69
29.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	74
§ 2.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	76
30.	Die Typen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung	76
31.	Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	78
32.	Normalformen bei zwei unabhängigen Veränderlichen	80
33.	Das Cauchysche Problem	83
34.	Charakteristische Streifen	85
35.	Ableitungen höherer Ordnung	87
36.	Reelle und komplexe Charakteristiken	89

37.	Die grundlegenden Sätze	90
38.	Vorintegrale	92
39.	Die Monge-Ampèresche Differentialgleichung	93
40.	Charakteristiken bei beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen	94
41.	Bicharakteristiken	97
42.	Der Zusammenhang mit einem Variationsproblem	100
43.	Ausbreitung von Unstetigkeiten	103
44.	Starke Unstetigkeiten	104
45.	Die Riemannsche Integrationsmethode	108
46.	Charakteristische Anfangswerte	112
47.	Existenzsätze	113
48.	Die Formel der partiellen Integration und die Greensche Formel	117
49.	Die Methode von VOLTERRA	119
50.	Die Formel von SOBOLEW	122
51.	Die Formel von SOBOLEW (Fortsetzung)	125
52.	Die Konstruktion der Funktion σ	127
53.	Allgemeine Anfangsbedingungen	131
54.	Die verallgemeinerte Wellengleichung	133
55.	Die Wellengleichung für beliebig viele unabhängige Veränderliche	134
56.	Die energetische Ungleichung	137
57.	Der Eindeutigkeitssatz und der Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen	141
58.	Der Fall der Wellengleichung	144
59.	Der Satz über die Einbettung in den Raum stetiger Funktionen und einige seiner Folgerungen	146
60.	Verallgemeinerte Lösungen von Gleichungen zweiter Ordnung	150
61.	Über die Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen des Cauchyschen Problems für die Wellengleichung	155
62.	Elliptische Differentialgleichungen	156
§ 3.	Systeme partieller Differentialgleichungen	160
63.	Charakteristiken bei Systemen partieller Differentialgleichungen	160
64.	Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen	164
65.	Die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen	166
66.	Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik	167
67.	Die Gleichungen der Elastizitätstheorie	170
68.	Anisotrope elastische Körper	172
69.	Elektromagnetische Wellen	173
70.	Starke Unstetigkeiten in der Elastizitätstheorie	178
71.	Charakteristiken und große Frequenzen	181
72.	Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher	183
73.	Beispiele	185

II. Randwertprobleme

§ 1.	Randwertprobleme bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung	188
74.	Die Greensche Funktion einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung	188
75.	Überführung in eine Integralgleichung	191
76.	Die Symmetrie der Greenschen Funktion	193
77.	Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems	194
78.	Über das Vorzeichen der Eigenwerte	196
79.	Beispiele	197

80.	Die verallgemeinerte Greensche Funktion	199
81.	Die Legendreschen Polynome	204
82.	Die Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen	207
83.	Differentialgleichungen vierter Ordnung	208
84.	Erweiterung des Entwicklungssatzes durch W. A. STEKLOW	210
85.	Rechtfertigung der Fourierrmethode für die Wärmeleitungsgleichung	213
86.	Rechtfertigung der Fourierrmethode für die Schwingungsgleichung	215
87.	Die Eindeutigkeitsätze	218
88.	Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen	219
89.	Ein Satz von COURANT	223
90.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte	224
91.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenfunktionen	228
92.	Das Ritzsche Verfahren	230
93.	Ein Beispiel von RITZ	231
§ 2.	Elliptische Differentialgleichungen	233
94.	Das Newtonsche Potential	233
95.	Das Potential einer Doppelschicht	236
96.	Eigenschaften des Potentials einer einfachen Schicht	243
97.	Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht	244
98.	Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht (Fortsetzung)	247
99.	Der direkte Wert der Normalableitung auf S	248
100.	Die Ableitung des Potentials einer einfachen Schicht nach einer beliebigen Richtung	251
101.	Das logarithmische Potential	255
102.	Integralformeln und Parallellflächen	257
103.	Folgen harmonischer Funktionen	261
104.	Formulierung der inneren Randwertprobleme für die Laplacesche Gleichung	264
105.	Äußere Probleme im ebenen Fall	266
106.	Die Kelvintransformation	269
107.	Die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems	272
108.	Lösung der Randwertprobleme im dreidimensionalen Fall	275
109.	Untersuchung der auftretenden Integralgleichungen	277
110.	Übersicht über die Ergebnisse zur Lösbarkeit der betrachteten Randwertprobleme	281
111.	Randwertprobleme in der Ebene	282
112.	Die Integralgleichung der Kugelfunktionen	284
113.	Das Wärmegleichgewicht eines Wärme ausstrahlenden Körpers	285
114.	Das alternierende Verfahren von SCHWARZ	286
115.	Beweis des Hilfssatzes	289
116.	Das alternierende Verfahren von SCHWARZ (Fortsetzung)	290
117.	Sub- und superharmonische Funktionen	293
118.	Einige Hilfssätze	296
119.	Die Methode der Unter- und Oberfunktionen	297
120.	Untersuchung der Randwerte	300
121.	Die Laplacesche Differentialgleichung im n -dimensionalen Raum	304
122.	Die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators	305
123.	Die Eigenschaften der Greenschen Funktion	307
124.	Die Greensche Funktion für ebene Bereiche	310
125.	Beispiele	314
126.	Die Greensche Funktion und die inhomogene Differentialgleichung	315
127.	Eigenwerte und Eigenfunktionen	318
128.	Die Normalableitung der Eigenfunktionen	322
129.	Die Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen	323

130.	Die Helmholtzsche Gleichung und das Ausstrahlungsprinzip	325
131.	Der Eindeutigkeitssatz	327
132.	Die Prinzipien der Grenzamplitude und der Grenzabsorption	328
133.	Randwertprobleme für die Helmholtzsche Differentialgleichung	330
134.	Die Beugung einer elektromagnetischen Welle	335
135.	Der Vektor der magnetischen Feldstärke	337
136.	Der Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen	338
137.	Die Differentialgleichung $\Delta v - \lambda v = 0$	341
138.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte	345
139.	Der Beweis des Satzes aus [138]	350
140.	Lineare Differentialgleichungen allgemeinerer Gestalt	357
141.	Der Greensche Tensor	358
142.	Das ebene statische Problem der Elastizitätstheorie	360
143.	Über die Ergebnisse von SCHAUDER	362
144.	Die verallgemeinerten Lösungen der Klasse $W^2_2(D)$	365
145.	Die erste grundlegende (energetische) Ungleichung	369
146.	Der Raum $W^{2,0}_2(D)$ und die zweite grundlegende Ungleichung	371
147.	Einige Ausführungen über Hilbertsche Räume und über Operatoren in Hilbertschen Räumen	378
148.	Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems im Raum $W^2_2(D)$	381
149.	Über die Fredholmsche Lösbarkeit des Dirichletschen Problems	385
150.	Über das Spektrum symmetrischer Operatoren	390
§ 3.	Parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen	395
151.	Die Abhängigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung von der Anfangs- und Randbedingung sowie von der Störfunktion	395
152.	Die Potentiale der Wärmeleitungsgleichung im eindimensionalen Fall	397
153.	Wärmequellen im mehrdimensionalen Fall	400
154.	Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung	401
155.	Anwendung der Laplacetransformation	402
156.	Anwendung des Differenzenverfahrens	406
157.	Die Fourierrmethode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung	409
158.	Die inhomogene Differentialgleichung	411
159.	Die Eigenschaften der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung	414
160.	Die verallgemeinerten Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht im eindimensionalen Fall	416
161.	Sub- und superparabolische Funktionen	421
162.	Parabolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung	422
163.	Die Fourierrmethode für parabolische Differentialgleichungen	426
164.	Die zweite grundlegende Ungleichung und die Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems	430
165.	Hyperbolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung für das erste Anfangs-Randwertproblem	433
166.	Die Fourierrmethode für Gleichungen vom hyperbolischen Typus	436
167.	Ein Randwertproblem für die Kugel	440
168.	Die Schwingungen des Innengebietes einer Kugel	444
169.	Untersuchung der Lösung	447
170.	Das Randwertproblem der Telegraphengleichung	449
	Literaturhinweise	452
	Namen- und Sachverzeichnis	467

I. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Quasilineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Schon mehrmals sind bisher Differentialgleichungen aufgetreten, welche partielle Ableitungen der gesuchten Funktion enthalten. Diese Differentialgleichungen, die aus konkreten Problemen der mathematischen Physik hervorgingen, hatten stets eine spezielle Gestalt. Das Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln. Dabei beginnen wir mit der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer einzigen gesuchten Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ hat die Gestalt

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

wobei die x_k unabhängige Veränderliche und die $p_k = u_{x_k}$ die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion nach diesen unabhängigen Veränderlichen bedeuten. Wir behandeln zunächst Differentialgleichungen, die in bezug auf die partiellen Ableitungen p_k linear sind, d. h. Differentialgleichungen der Gestalt

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) p_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) p_n = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (1)$$

wobei die Koeffizienten a_k und c gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_k und der gesuchten Funktion u sind. Da die Funktion u in beliebiger Weise in den Koeffizienten vorkommen kann, werden diese Differentialgleichungen meist nicht lineare, sondern *quasilineare Differentialgleichungen* genannt. In diesem Abschnitt wollen wir eine Differentialgleichung der Gestalt (1) im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher untersuchen. In diesem Spezialfall werden die unabhängigen Veränderlichen gewöhnlich mit x und y und die partiellen Ableitungen mit $p = u_x$ und $q = u_y$ bezeichnet. Wir untersuchen also die Differentialgleichung

$$a(x, y, u) p + b(x, y, u) q = c(x, y, u). \quad (2)$$

Es sei daran erinnert, daß wir uns schon früher [II, 22] mit linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt haben. Damals haben wir gesehen, daß die Integration der Differentialgleichung (2) der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen äquivalent ist. Zu den früher erhaltenen Ergebnissen fügen wir jetzt einige neue hinzu, die sich für die spätere Untersuchung schwierigerer Probleme als nützlich erweisen werden.

Die gegebenen Funktionen $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ und $c(x, y, u)$ bestimmen im x, y, u -Raum ein Richtungsfeld, und zwar gibt es in jedem festen Punkt dieses Raumes eine Richtung, deren Richtungskosinus zu a , b und c proportional sind. Dieses Richtungsfeld bestimmt eine Schar von Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung des Feldes in diesem Punkt besitzen. Man erhält die Kurven-

schar durch Integration des Systems

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \quad (3)$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen, das man auch, wenn man den gemeinsamen Wert der drei Quotienten mit ds bezeichnet, in der Form

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \quad (4)$$

schreiben kann. Die Größen p, q und -1 sind dem Richtungskosinus der Normalen der gesuchten Fläche $u = u(x, y)$ proportional; die Differentialgleichung (2) bringt zum Ausdruck, daß

$$ap + bq + c(-1) = 0$$

ist, die Normalen der gesuchten Fläche und die Feldrichtung also zueinander orthogonal sind. Aus der Differentialgleichung (2) ergibt sich somit, daß in jedem Punkt der gesuchten Fläche die durch das Richtungsfeld bestimmte Richtung in der Tangentialebene der Fläche liegt. Die durch das Differentialgleichungssystem (4) bestimmten Kurven nennt man die *charakteristischen Kurven* oder die *Charakteristiken* der Differentialgleichung (2). Stellt eine Fläche $u = u(x, y)$ den geometrischen Ort für die Charakteristiken der Differentialgleichung (2) dar, wird also die Fläche von Kurven l' erzeugt, die dem Differentialgleichungssystem genügen, so liegt in jedem Punkt dieser Fläche die Tangente der Kurve l' , die von diesem Punkt ausgeht, in der Tangentialebene der Fläche. Folglich genügt diese Fläche der Differentialgleichung (2), d. h., sie ist eine Integralfläche dieser Differentialgleichung. Wenn somit eine Fläche $u = u(x, y)$ von Charakteristiken der Differentialgleichung (2) erzeugt wird, ist sie eine Integralfläche dieser Differentialgleichung.

Wir setzen voraus, daß die Fläche $u = u(x, y)$ in jedem Punkt eine Tangentialebene besitzt und daß sich die Richtung der Flächennormalen längs der Fläche stetig ändert. Dies ist der Fall, wenn die Ableitungen erster Ordnung von $u(x, y)$ existieren und stetig sind.

Wenn wir im folgenden von einer Integralfläche sprechen, so nehmen wir an, daß diese Fläche die soeben angegebene Eigenschaft besitzt. Allgemein nennen wir Flächen mit dieser Eigenschaft *glatt*.

Wir haben soeben gezeigt, daß eine glatte Fläche, die eine Gleichung der Gestalt $u = u(x, y)$ besitzt und von Charakteristiken erzeugt wird, eine Integralfläche ist. Man kann zeigen, daß auch umgekehrt eine *glatte Fläche mit Charakteristiken überdeckt werden kann, wenn sie die Differentialgleichung (2) erfüllt, d. h., wenn sie eine Integralfläche ist*.

Genügt nämlich eine Fläche S der Differentialgleichung (2), so liegt in jedem ihrer Punkte die Richtung (a, b, c) in der Tangentialebene von S und liefert somit auf S ein Richtungsfeld. Integrieren wir die zu diesem Richtungsfeld gehörige gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, so finden wir Kurven l' , die auf der Fläche S liegen und dem Differentialgleichungssystem (4) genügen. Als eine solche Differentialgleichung erster Ordnung kann beispielsweise die Gleichung

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)}$$

dienen, in der u durch den Ausdruck $u = u(x, y)$ der Flächengleichung zu ersetzen ist. Wir nehmen an, daß der Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf die Differential-

gleichung anwendbar ist, wobei die Integralkurven l , ohne sich zu schneiden, ein gewisses Gebiet D überdecken und die Funktion $u = u(x, y)$ in diesem Gebiet erklärt ist. Die Kurven l' sind nun die Kurven auf S , deren Projektion auf die x, y -Ebene die Kurven l ergeben.

Bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir gesehen [II, 50, 51], daß die gesuchten Funktionen durch die Anfangswerte für einen gegebenen Wert der unabhängigen Veränderlichen völlig bestimmt sind. Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die willkürlichen Konstanten bestimmen, die im allgemeinen Integral vorkommen, falls wir dieses ermitteln konnten. Die Lösungen lassen sich aber auch ohne Kenntnis eines allgemeinen Integrals durch Anfangsbedingungen bestimmen, und zwar mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation, die wir beim Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes benutzt haben [II, 51]. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) enthält nicht willkürliche Konstante, sondern willkürliche Funktionen [II, 23], und das Problem, die Lösungen durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen, läßt sich in diesem Fall folgendermaßen formulieren: *Gesucht ist diejenige Integralfläche der Differentialgleichung (2), die durch eine vorgegebene Kurve l im x, y, u -Raum hindurchgeht.* Bezeichnen wir mit λ die Projektion der Kurve l auf die x, y -Ebene, so besteht das gestellte Problem darin, diejenige Lösung der Differentialgleichung (2) zu ermitteln, die in den Punkten der Kurve λ vorgegebene Werte annimmt. Wir skizzieren jetzt die Behandlung des Problems [II, 23]. Es sei M_0 ein Punkt der Kurve l . Wir benutzen seine Koordinaten als Anfangswerte der Funktionen, die durch das Differentialgleichungssystem (4) bestimmt werden. Auf Grund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erhalten wir eine wohlbestimmte Charakteristik, die durch diesen Punkt M_0 hindurchgeht. Führen wir dies für jeden Punkt der Kurve l durch, so erhalten wir eine Schar von Charakteristiken; wir setzen voraus, daß diese eine Fläche S erzeugen, die durch $u = u(x, y)$ darstellbar sei. Die Fläche geht durch die Kurve l und ist somit eine Integralfläche der Differentialgleichung (2).

Ein strenger Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unseres Problems erfordert einige Voraussetzungen über die rechten Seiten der Differentialgleichungen (4) und einige wesentliche Einschränkungen in bezug auf die Kurve l . Ist beispielsweise die vorgegebene Kurve l selbst eine Charakteristik, so führt das angegebene Verfahren zur Konstruktion der Charakteristiken durch die Punkte der Kurve l nicht zu einer Fläche, sondern nur zur Kurve l selbst. In diesem Fall kann es unendlich viele Lösungen geben [II, 24]. Um dies nachzuweisen, legen wir durch einen beliebigen Punkt von l eine Kurve l_1 , die keine Charakteristik ist. Wenn wir durch die Punkte dieser Kurve die entsprechenden Charakteristiken hindurchlegen (unter denen sich auch die vorgegebene Kurve l befindet), erhalten wir unter bestimmten Voraussetzungen eine Integralfläche, die durch die gegebene Kurve l hindurchgeht. Da nun l_1 beliebig gewählt ist, kann das Problem unendlich viele Lösungen besitzen, wenn die gegebene Kurve l eine Charakteristik ist. Es kann auch vorkommen, daß das Problem überhaupt keine Lösung hat. Dies gilt dann, wenn die Charakteristiken, die durch die Punkte von l hindurchgehen, in der Umgebung dieser Kurve keine Fläche erzeugen, die eine explizite Gleichung $u = u(x, y)$ besitzt, wobei $u(x, y)$ eindeutig und stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn die fraglichen Charakteristiken eine Zylinderfläche bilden, deren Erzeugenden zur u -Achse parallel verlaufen. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die Bedingungen, unter denen das gestellte Problem eine wohlbestimmte Lösung besitzt.

2. Das Cauchysche Problem und die Charakteristiken. Unter dem Cauchyschen Problem versteht man gewöhnlich das im vorigen Abschnitt formulierte Problem, diejenige Integralfläche der Differentialgleichung (2) zu bestimmen, die durch eine gegebene Kurve l geht. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems genau untersuchen zu können, benutzen wir den folgenden Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz. Sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen des Systems

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

in dem Bereich, der durch die Ungleichungen

$$|x-a| \leq A, \quad |y_k - b_k| \leq B \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

definiert ist, stetige Funktionen ihrer Argumente und existieren außerdem in diesem Bereich stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$, so ist die nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz durch beliebige Anfangswerte $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ aus dem Innern des Bereiches (6) bestimmte Lösung

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

des Differentialgleichungssystems (5) eine stetige Funktion ihrer Argumente und besitzt partielle Ableitungen $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s^0}$ nach den Anfangswerten, die ebenfalls stetige Funktionen ihrer Argumente $x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ sind.

Um unsere Ausführungen nicht zu unterbrechen, verschieben wir den Beweis dieses Satzes auf einen der folgenden Abschnitte.

Wir kehren zur Lösung des Cauchyschen Problems zurück und setzen voraus, daß die Gleichung der Kurve l in einer Parameterdarstellung

$$x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t), \quad z_0 = z_0(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (7)$$

gegeben ist und daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (4) den Voraussetzungen des soeben formulierten Satzes in einem Bereich des x, y, u -Raumes genügen, der die Kurve l im Innern enthält. Nehmen wir die Koordinaten der Punkte von l als Anfangswerte für $s=0$, so erhalten wir für hinreichend kleine s

$$x = x(s, x_0, y_0, u_0), \quad y = y(s, x_0, y_0, u_0), \quad u = u(s, x_0, y_0, u_0)$$

oder mit (7)

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t) \quad (8)$$

als Lösung des Differentialgleichungssystems (4).

Setzen wir noch voraus, daß die rechten Seiten der Gleichungen (7) stetig nach t differenzierbar sind, und benutzen den angegebenen Satz, so finden wir, daß die Funktionen (8) stetige Ableitungen nicht nur nach s , sondern auch nach t besitzen. Bei beliebig vorgegebenem t aus dem Intervall $t_0 < t < t_1$ sind die Funktionen (8) für alle hinreichend kleinen s bestimmt. Die Funktionaldeterminante der ersten beiden dieser Funktionen nach s und t lautet

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s. \quad (9)$$

Für das Folgende ist wesentlich, ob diese Determinante von 0 verschieden ist oder nicht. Wir betrachten zunächst den Fall $\Delta \neq 0$ längs der Kurve l und darauf

den Fall $\Delta = 0$ längs l . Wir beginnen mit dem Fall

$$\Delta \neq 0 \quad (\text{längs der Kurve } l), \quad (10)$$

d. h. $\Delta \neq 0$ für $s=0$. Da die in Δ vorkommenden Ableitungen stetig sind, gilt deshalb $\Delta \neq 0$ auch in einer gewissen Umgebung des Anfangswertes $s=0$ und des Wertes t , der zu einem beliebigen Punkt M von l gehört. Demzufolge kann man die ersten beiden Gleichungen (8) nach s und t auflösen für alle x und y , die sich in einer Umgebung der Koordinaten x_0, y_0 des Punktes M befinden. Diese Auflösung ist eindeutig, und die erhaltenen Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$ haben stetige Ableitungen erster Ordnung [III/1, 19]. Setzen wir die Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$ in die dritte Gleichung (8) ein, so erhalten wir in der erwähnten Umgebung eine Funktion $u(x, y)$, die stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt; die Fläche $u = u(x, y)$ enthält dabei ein bestimmtes Stück der Kurve l , das in der Umgebung von M liegt. Aus den geometrischen Überlegungen des vorigen Abschnittes geht unmittelbar hervor, daß $u(x, y)$ der Differentialgleichung (2) genügt. Wir werden das auch noch analytisch nachweisen.

Bemerkung. Wir haben die Lösung $u(x, y)$ nur in der Umgebung eines beliebig vorgegebenen Punktes M der Kurve l konstruiert; man sagt auch, es ist eine lokale Lösung des Problems konstruiert worden. Unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten a, b, c und die Kurve l kann man die Integralfläche auch in einer gewissen Umgebung der ganzen Kurve l konstruieren, d. h. für alle Punkte (x, y) , die der Kurve $x = x_0(t), y = y_0(t)$ in der x, y -Ebene hinreichend benachbart sind. Hierbei nimmt man an, daß die Ableitungen $x'_0(t)$ und $y'_0(t)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Eine genaue Formulierung analoger Resultate geben wir im folgenden Abschnitt.

Die Existenz einer Lösung in einem vorgegebenen Bereich der x, y -Ebene im Großen nachzuweisen, ist äußerst schwierig. Man kann einen Bereich B der x, y -Ebene und in ihm eine Funktion $b(x, y)$ konstruieren, die Ableitungen jeder Ordnung besitzt derart, daß für die Differentialgleichung

$$u_x + b(x, y) u_y = 0$$

die Funktion $u = \text{const}$ die einzige Lösung ist, welche stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt und im ganzen Bereich B existiert.

Jetzt zeigen wir, daß die konstruierte Funktion $u(x, y)$ tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Wenn wir die Kettenregel und die Beziehungen (4) benutzen, erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$$

Diese Beziehung gilt für alle s und t , die in einer Umgebung des Wertes $s=0$ und desjenigen Wertes von t liegen, der zu einem beliebigen Punkt $M(x_0, y_0, z_0)$ der Kurve l gehört. Es ist aber $\frac{du}{ds} = c$; also erfüllt die Funktion $u(x, y)$ für alle x, y in einer Umgebung von $u(x, y)$ die Differentialgleichung (2).

Zum Beweis der Eindeutigkeit braucht man nur zu zeigen, daß jede durch l verlaufende glatte Integralfläche $u = u(x, y)$ aus Charakteristiken erzeugt werden kann. Wir bilden das System der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = a[x, y, u(x, y)], \quad \frac{dy}{ds} = b[x, y, u(x, y)]. \quad (11)$$

Nach unseren Voraussetzungen sind die rechten Seiten so beschaffen, daß für alle x, y in einer Umgebung von x_0, y_0 der Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt. Da die Integralfäche eine explizite Darstellung $u = u(x, y)$ besitzt und durch das in der Umgebung des Punktes $M(x_0, y_0, z_0)$ verlaufende Stück der Kurve l hindurchgeht, sind die Koordinaten x, y verschiedener Punkte von l in der Umgebung von M verschieden (wir nehmen an, daß l doppelpunktfrei ist). Benutzen wir diese Koordinaten als Anfangswerte bei der Integration des Systems (11) und setzen wir die erhaltenen Lösungen in die Funktion $u = u(x, y)$ ein, so erhalten wir eine Schar von Kurven auf unserer Integralfäche. Längs dieser Kurven sind wegen (11) die ersten beiden Differentialgleichungen (4) erfüllt. Es läßt sich leicht verifizieren, daß auch die dritte Differentialgleichung erfüllt ist. Denn wegen (11) erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$$

Da aber $u = u(x, y)$ eine Integralfäche ist, also $u_x a + u_y b = c$ gilt folgt $\frac{du}{ds} = c$. Somit sind die konstruierten Kurven, welche die Fläche $u = u(x, y)$ überdecken, wirklich Charakteristiken. Also hat das Cauchysche Problem unter der Bedingung (10) genau eine Lösung. Auf die Frage der Eindeutigkeit gehen wir noch einmal bei der Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung ein.

Wir setzen nun voraus, daß längs der Kurve l , also für $s = 0$,

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = 0 \quad (12)$$

gilt.

Existiert in diesem Fall eine Integralfäche $u = u(x, y)$ mit stetigen Ableitungen erster Ordnung, die durch die Kurve l hindurchgeht, so muß diese Kurve, wie wir sogleich zeigen wollen, eine Charakteristik sein. Wenn wir davon sprechen, daß die Fläche $u = u(x, y)$ durch die Kurve l hindurchgeht, ist dies stets lokal zu verstehen, d. h., wir betrachten nur eine gewisse Teilkurve von l .

Wir nehmen an, die Größen a und b seien längs l von 0 verschieden. Unter Berücksichtigung der ersten beiden Differentialgleichungen (4) läßt sich die Bedingung (12) auch in der Gestalt

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = k \quad (s = 0) \quad (13)$$

schreiben, wobei mit k die beiden übereinstimmenden Quotienten bezeichnet sind. Es sei $u = u(x, y)$ eine Integralfäche, die durch l hindurchgeht. Setzen wir in $u(x, y)$ die Ausdrücke $x = x_0(t)$ und $y = y_0(t)$ ein, differenzieren nach t und benutzen (13), so erhalten wir $\frac{du}{dt} = u_x k a + u_y k b$. Da $u = u(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist, ergibt sich daraus $\frac{du}{dt} = k c$. Diese Beziehung führt gerade auf das Differentialgleichungssystem

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = \frac{u_t}{c} \quad (s = 0),$$

aus dem hervorgeht, daß l eine Charakteristik ist. Also gilt: *Dafür, daß im Fall $\Delta = 0$ eine Integralfäche existiert, die durch eine Kurve l hindurchgeht, ist notwendig, daß diese Kurve eine Charakteristik ist.* Dann gehen durch die Kurve l , wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, unendlich viele Integralfächen hindurch. Bei der Durchführung des letzten Beweises war wesentlich, daß die Integral-

fläche $u = u(x, y)$, die durch l hindurchgeht, in den Punkten dieser Kurve stetige Ableitungen besitzt. Es kann vorkommen, wie wir an einem Beispiel sehen werden, daß durch eine Kurve l , längs der $\Delta = 0$ gilt, die aber keine Charakteristik ist, trotzdem eine Integralfläche hindurchgeht; dann sind die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ in den Punkten von l nicht mehr stetig, mit anderen Worten, l ist eine singuläre Kurve der Integralfläche. Ist l keine Charakteristik, gilt aber $\Delta = 0$ längs l , so bedeutet dies, daß längs der Kurve

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} \neq \frac{u_t}{c}$$

ist.

Wir erwähnen noch eine Besonderheit des Systems (4). Der Hilfsparameter s kommt auf der rechten Seite der Gleichungen nicht vor, so daß eine der willkürlichen Konstanten als additiver Summand bei s auftritt. Diese willkürliche Konstante spielt keine wesentliche Rolle und bedeutet nur, daß der Anfangswert s willkürlich gewählt werden kann. Somit treten bei der Integration dieses Systems nur zwei wesentliche willkürliche Konstanten auf. Man erkennt dies sofort, wenn man das Differentialgleichungssystem (4) in der Form (3) darstellt.

Wir erinnern daran, daß sich die inhomogene quasilineare Differentialgleichung (2) in eine homogene lineare Differentialgleichung überführen läßt, wenn wir die Lösung in der impliziten Form [II, 21]

$$\varphi(x, y, u) = C \quad (14)$$

suchen, mit einer willkürlichen Konstanten C . Auf Grund der Differentiationsregel für implizite Funktionen gilt

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

und die Differentialgleichung (2) führt auf die homogene lineare Differentialgleichung

$$a(x, y, u) \varphi_x + b(x, y, u) \varphi_y + c(x, y, u) \varphi_u = 0. \quad (15)$$

Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist das System (3). Sind $\varphi_1(x, y, u) = C_1$, $\varphi_2(x, y, u) = C_2$ zwei unabhängige Integrale dieses Systems, so ist auch die Funktion $\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2)$, wobei F eine willkürliche Funktion ihrer Argumente bedeutet, eine Lösung der Differentialgleichung (15). Wir haben gesehen, in welcher Weise aus den Nebenbedingungen des Cauchyschen Problems die Gestalt dieser Funktion bestimmt werden kann [II, 24].

Die angestellten Überlegungen geben zu folgender Frage Anlaß. Wir suchten die Lösung der Differentialgleichung (2) aus der Gesamtheit von Lösungen, welche durch eine implizite Gleichung der Gestalt (14) gegeben werden, in der eine willkürliche Konstante C auftritt. Es ist leicht zu zeigen, daß uns auf diesem Wege keine einzige Lösung unserer Differentialgleichung verlorengeht. Da die Anfangswerte im Cauchyschen Problem willkürlich sind, können wir nämlich annehmen, daß jede Lösung unserer Differentialgleichung in einer ganzen Schar von Lösungen vorkommt, deren Anfangswerte eine willkürliche Konstante enthalten. Lösen wir nach dieser willkürlichen Konstanten auf, so können wir uns davon überzeugen, daß wir jede Lösung aus einer Gleichung der Gestalt (14) erhalten können. Uns könnten nur diejenigen (singulären) Lösungen verlorengehen, die wir nicht durch die angegebene Konstruktion der Lösung des Cauchyschen Problems erhalten können. Solche Lösungen kann es nicht geben, wenn die Funktionen a , b und c gewisse allgemeine

Bedingungen erfüllen. Diese Betrachtungen sind rein formaler Natur, und wir werden auf exaktere Formulierungen nicht eingehen.

3. Quasilineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen. Wir behandeln jetzt die quasilineare Differentialgleichung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) p_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) p_n = c(x_1, \dots, x_n, u). \quad (16)$$

Dabei setzen wir stets voraus, daß die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ für die betrachteten Werte der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ nicht gleichzeitig verschwinden, d. h., daß $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ ist. Bei der Untersuchung der Differentialgleichung (16) bedienen wir uns einer geometrischen Terminologie in Analogie zum dreidimensionalen Raum. Im vorliegenden Fall haben wir es mit einem $(n+1)$ -dimensionalen Raum mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n, u$ zu tun. Unter einer m -dimensionalen *Mannigfaltigkeit* verstehen wir in diesem Raum eine Gesamtheit von Punkten, deren Koordinaten sich durch m willkürliche Parameter ausdrücken lassen ($m \leq n$):

$$x_k = x_k(t_1, \dots, t_m), \quad u = u(t_1, \dots, t_m) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dabei nehmen wir an, daß sich jeweils m dieser Gleichungen nach $t_1, \dots, t_m$ auflösen lassen. Für $m = n$ ergibt sich eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, die wir eine Fläche nennen. Benutzen wir die Größen $x_1, \dots, x_n$ als Parameter, so haben wir eine explizite Gleichung für die Fläche in der Form $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Diese Gestalt muß gerade die Gleichung einer Integralfläche der Differentialgleichung (16) haben. Für $m = 1$ heißt die entsprechende eindimensionale Mannigfaltigkeit eine Kurve des $(n+1)$ -dimensionalen Raumes.

Die Charakteristiken der Differentialgleichung (16) definieren wir durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k(x_1, \dots, x_n, u), \quad \frac{du}{ds} = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (17)$$

in dem s einen Parameter bezeichnet. Jede Lösung dieser Gleichungen, mit Ausnahme der Lösungen, in denen alle x_k und u konstant sind, liefert eine Kurve des $(n+1)$ -dimensionalen Raumes. Eine Lösung, in der alle x_k und u konstant sind, kann aber wegen $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$ nicht existieren. Die Koordinaten dieser Kurven lassen sich durch den Parameter s ausdrücken. Um aus diesen Kurven eine Fläche zu konstruieren, müssen wir von einer Kurvenschar ausgehen, die von $n-1$ willkürlichen Parametern abhängt. Im allgemeinen erhält man daraus eine Gesamtheit von Punkten, die von n Parametern abhängt. *Wenn eine glatte Fläche $u = u(x_1, \dots, x_n)$ von einer Schar von Charakteristiken erzeugt wird, die von $n-1$ Parametern abhängt, ist sie eine Integralfläche der Gleichung (16).* Denn differenzieren wir $u(x_1, \dots, x_n)$ nach s und benutzen die Differentialgleichungen (17), so erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = \sum_{k=1}^n u_{x_k} a_k.$$

Auf Grund der letzten Differentialgleichung (17) folgt aber hieraus die Differentialgleichung (16). Umgekehrt kann jede glatte Integralfläche $u = u(x_1, \dots, x_n)$ von einer Schar von Charakteristiken erzeugt werden, die von $n-1$ Parametern abhängt. Denn ist eine Integralfläche $u = u(x_1, \dots, x_n)$ gegeben, so können wir die x_k aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k[x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)] \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

bestimmen, das uns $n-1$ willkürliche Konstanten liefert. Die willkürliche Konstante, die additiv zu s hinzutritt, spielt keine wesentliche Rolle. Setzen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems (18) in die rechte Seite von $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ein, differenzieren nach s und benutzen die Differentialgleichungen (16) und (18), so finden wir, daß u die letzte der Differentialgleichungen (17) erfüllt.

Wie in [2] nehmen wir an, daß die Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ und die Funktionen auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (17) stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Das Cauchysche Problem für die Differentialgleichung (16) besteht in der Bestimmung derjenigen Integralfläche, die eine vorgegebene $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_k = x_k(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad u = u(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

enthält; dabei sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen in einem Bereich D des $(n-1)$ -dimensionalen Raumes der $t_1, \dots, t_{n-1}$ stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Wir setzen voraus, daß der Rang der Matrix, die aus den Ableitungen $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$ besteht, gleich $n-1$ ist und daß verschiedenen Systemen von Werten $t_1, \dots, t_{n-1}$ verschiedene Punkte $(x_1, \dots, x_n)$ entsprechen. Weiterhin setzen wir, wie bereits erwähnt wurde, voraus, daß die Koeffizienten $a_k(x_1, \dots, x_n, u)$ und $c(x_1, \dots, x_n, u)$ in einem Bereich des Raumes, der die Mannigfaltigkeit (19) im Innern enthält, stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Insbesondere kann die Anfangsbedingung beim Cauchyschen Problem darin bestehen, daß die gesuchte Funktion u für einen vorgegebenen Wert einer unabhängigen Veränderlichen als Funktion der übrigen Veränderlichen gegeben ist,

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, \dots, x_n). \quad (20)$$

Die Lösung des Problems erfolgt wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Die Ausdrücke (19) benutzen wir als Anfangsbedingungen bei der Integration des Differentialgleichungssystems (17). Damit erhalten wir eine Lösung der Gestalt

$$x_k = x_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}), \quad u = u(s, t_1, \dots, t_{n-1}). \quad (21)$$

Im folgenden spielt die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (22)$$

eine wesentliche Rolle, die wir mit Hilfe der Differentialgleichungen (17) in der Gestalt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (23)$$

schreiben können. Ist diese Determinante auf der Mannigfaltigkeit (19), d. h. für $s=0$, von 0 verschieden, so lassen sich die ersten n Gleichungen von (21) nach $s, t_1, \dots, t_{n-1}$ auflösen. Setzen wir diese Lösung in die letzte der Gleichungen (21) ein, so erhalten wir eine Integralfläche der Differentialgleichung (16). In diesem Fall kann das Cauchysche Problem keine weiteren Lösungen besitzen. Dies alles läßt sich ebenso beweisen wie im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher.

Nun betrachten wir den Fall, daß die Anfangsbedingung die Form (20) hat, und nehmen an, daß die $x_2, \dots, x_n$ jetzt die Rolle der Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$ spielen. Dabei wollen wir noch voraussetzen, daß die Differentialgleichung linear und die Determinante (23) auf unserer Mannigfaltigkeit von 0 verschieden ist. Wegen $\frac{\partial x_p}{\partial x_q} = 0$ für $p \neq q$ und $\frac{\partial x_p}{\partial x_p} = 1$ ergibt sich $\Delta = a_1 \neq 0$. Dividieren wir die Differentialgleichung durch den Koeffizienten a_1 , so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$p_1 + a_2(x_1, \dots, x_n) p_2 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) p_n = b(x_1, \dots, x_n) u + c(x_1, \dots, x_n). \quad (24)$$

Wir setzen noch voraus, daß die Koeffizienten a_k, b und c für $\alpha \leq x_1 \leq \beta$ und beliebige reelle Werte von $x_2, \dots, x_n$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x_2, \dots, x_n$ besitzen und daß ferner die Koeffizienten für diese Werte der Veränderlichen beschränkt sind: $|a_k| \leq M, |b| \leq M, |c| \leq M$.

Wählen wir x_1 als unabhängige Veränderliche, so können wir das Differentialgleichungssystem (17) in der Gestalt

$$\frac{dx_k}{dx_1} = a_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=2, \dots, n), \quad (25)$$

$$\frac{du}{dx_1} = b(x_1, \dots, x_n) u + c(x_1, \dots, x_n) \quad (26)$$

schreiben.

Es sei $x_1^{(0)}$ ein Anfangswert von x_1 aus dem Intervall $[\alpha, \beta]$. Wir integrieren das Differentialgleichungssystem (25) mit beliebigen Anfangsbedingungen

$$x_k|_{x_1=x_1^{(0)}} = x_k^{(0)} \quad (k=2, \dots, n).$$

Aus $|a_k| \leq M$ folgt, daß die Lösungsfunktionen x_k des Differentialgleichungssystems (25) beschränkte Ableitungen besitzen, $\left| \frac{dx_k}{dx_1} \right| \leq M$. Damit bleiben auch die Lösungen x_k selbst dem absoluten Betrag nach beschränkt: $|x_k - x_k^{(0)}| \leq M(\beta - \alpha)$. Durch Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation [II, 51] können wir uns leicht davon überzeugen, daß die Lösungen

$$x_k = \varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad (k=2, \dots, n) \quad (27)$$

auf dem ganzen Intervall $\alpha \leq x_1 \leq \beta$ für beliebige Anfangswerte $x_k^{(0)}$ ($k=2, \dots, n$) existieren. Wir können sagen, daß diejenige Integralkurve, die durch den Punkt $A_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ geht, auch den Punkt $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ enthält, dessen Koordinaten durch (27) bestimmt sind. Auf Grund des Eindeutigkeitsatzes gilt: Wählen wir den Punkt A als Anfangspunkt, so geht die zugehörige Integralkurve durch den Punkt A_0 . Hieraus folgt, daß die Gleichungen (27) für beliebige x_k nach $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ auflösbar sind, wobei die Lösungen die Gestalt

$$x_k^{(0)} = \varphi_k(x_1^{(0)}, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=2, \dots, n) \quad (27_1)$$

haben.

Jetzt wollen wir das Cauchysche Problem mit der Anfangsbedingung (20) lösen. Dazu müssen wir nach den vorhergehenden Ausführungen die Differentialgleichungen (25) und (26) für die Anfangswerte

$$x_k|_{x_1=x_1^{(0)}} = x_k^{(0)} \quad (k=2, \dots, n), \quad u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

integrieren, wobei die willkürlichen Werte $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ jetzt die Rolle von $t_1, \dots, t_{n-1}$ spielen. Setzen wir (27) in die Differentialgleichung (26) ein und integrieren die entstehende Gleichung, so erhalten wir

$$u = e^\omega \left[\varphi(x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} c(x_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) e^{-\omega} dx_1 \right] \quad (28)$$

mit

$$\omega = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} b(x_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) dx_1,$$

wobei in den Argumenten von b und c die Funktionen $\varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ stehen. Setzen wir in die rechte Seite von (28) die Ausdrücke (27₁) ein, so erhalten wir die gesuchte Lösung $u(x_1, \dots, x_n)$ des Cauchyschen Problems. Sie existiert auf dem ganzen Intervall $\alpha \leq x_1 \leq \beta$ und für beliebige $x_2, \dots, x_n$. Dieses Ergebnis beruht auf der Linearität der Differentialgleichung und auf den Voraussetzungen über a_k , b und c .

Für die quasilineare Differentialgleichung (16) läßt sich der Existenzbereich der Lösung unter bestimmten Voraussetzungen in bezug auf a_k und c bestimmen. Wir wollen das entsprechende Resultat angeben.

Es sei $a_1 = 1$. Die Koeffizienten a_k und c mögen stetig und beschränkt sein sowie für

$$|x_1 - x_1^{(0)}| \leq a, \quad (29)$$

$$b_k < x_k < c_k \quad (k=2, \dots, n) \quad (30)$$

und für beliebige reellwertige u stetige Ableitungen besitzen, die dem absoluten Betrag nach nicht größer sind als die Konstante A . Ferner sei die Funktion $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ unter den Bedingungen (30) stetig und beschränkt und habe stetige Ableitungen erster Ordnung, die dem absoluten Betrag nach nicht größer sind als eine Konstante B . Unter diesen Voraussetzungen hat die Differentialgleichung (16) (für $a_1 \equiv 1$) mit der Anfangsbedingung (20) in dem Gebiet, das durch die Ungleichungen

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < a, \quad |x_1 - x_1^{(0)}| < \frac{1}{nA} \lg \left[1 + \frac{n}{(n-1)(B+1)} \right]$$

und durch die Ungleichungen (30) bestimmt wird, eine Lösung (E. KAMKE, Differentialgleichungen, Teil II, 5. Aufl., Leipzig 1965).

Jetzt betrachten wir den Fall, daß $\Delta = 0$ auf der Mannigfaltigkeit (19) gilt. Wir nehmen an, daß einer der Minoren der Determinante Δ , die zu den Elementen der ersten Zeile gehören, von 0 verschieden ist. Die Beziehung $\Delta = 0$ zeigt dann, daß die Elemente der ersten Zeile Linearkombinationen der entsprechenden Elemente der übrigen Zeilen sind; es gilt also eine Beziehung der Gestalt

$$a_k = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \quad (31)$$

in der die λ_j Funktionen der Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$ sind. Wenn auf der Mannigfaltigkeit (19) die Funktion c speziell durch

$$c = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u}{\partial t_j} \quad (32)$$

dargestellt wird, heißt die Mannigfaltigkeit (19) *charakteristische Mannigfaltigkeit* unserer Differentialgleichung. Es läßt sich zeigen: Jede charakteristische Mannigfaltigkeit (19) der Differentialgleichung (16) kann von Charakteristiken dieser Differentialgleichung erzeugt werden; wenn für eine Mannigfaltigkeit (19) speziell $\Delta = 0$ gilt und wenn durch sie eine glatte Integralfläche $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gelegt werden kann, ist diese Mannigfaltigkeit charakteristisch.

Durch eine charakteristische Mannigfaltigkeit können unendlich viele Integralflächen gehen.

Ebenso wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher können wir die inhomogene quasilineare Differentialgleichung (16) in eine homogene lineare Differentialgleichung überführen, wenn wir die Lösung der Differentialgleichung (16) in der impliziten Form

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, u) = C$$

ansetzen, wobei C eine willkürliche Konstante bezeichnet. Für die Funktion φ erhalten wir die Differentialgleichung

$$a_1 \varphi_{x_1} + \dots + a_n \varphi_{x_n} + c \varphi_u = 0.$$

Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{c}. \quad (33)$$

Sind

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u) = C_1, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u) = C_n \quad (34)$$

von einander unabhängige Integrale dieses Systems, so liefert die Gleichung $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$, in welcher F eine willkürliche Funktion der Argumente ist, die Lösung der Differentialgleichung (16) in impliziter Form. Auf der rechten Seite der letzten Gleichung haben wir an Stelle einer willkürlichen Konstanten 0 geschrieben, da F eine willkürliche Funktion der Argumente ist. Zur Konstruktion der Integralfläche, welche die gegebene Mannigfaltigkeit (19) enthält, setzen wir die Ausdrücke (19) in die linken Seiten der Integrale (34) ein. Eliminieren wir aus den so erhaltenen n Gleichungen die $n-1$ Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$, so erhalten wir zwischen den willkürlichen Konstanten die Beziehung $F(C_1, \dots, C_n) = 0$. Aus der linken Seite dieser Beziehung ergibt sich die Gestalt der Funktion F . Setzen wir nämlich an Stelle der C_k die Funktionen $\varphi_k(x_1, \dots, x_n, u)$ ein, so erhalten wir gerade die Gleichung der gesuchten Integralfläche.

4. Beispiele. 1. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$3(u-y)^2 p - q = 0. \quad (35)$$

Das Differentialgleichungssystem (4) lautet dann

$$\frac{dx}{ds} = 3(u-y)^2, \quad \frac{dy}{ds} = -1, \quad \frac{du}{ds} = 0, \quad (36)$$

und seine durch Anfangswerte x_0, y_0, u_0 der Veränderlichen x, y, u festgelegte Lösung lautet

$$x = (u_0 - y_0 + s)^3 + x_0 - (u_0 - y_0)^3, \quad y = -s + y_0, \quad u = u_0. \quad (37)$$

Die Gleichungen (7) der Kurve l , durch welche die gesuchte Integralfläche hindurchgehen soll, seien

$$x = 0, \quad y = t, \quad u = t. \quad (38)$$

Setzen wir in (37) $x_0 = 0$ und $y_0 = u_0 = t$, so erhalten wir

$$x = s^3, \quad y = -s + t, \quad u = t;$$

die Determinante $\Delta = x_s y_t - x_t y_s = 3s^2$ verschwindet für $s = 0$, d. h. längs l . Die Kurve (38) ist keine Charakteristik der Differentialgleichung (35), da wegen der letzten Diffe-

rentialgleichung (36) die Größe u längs einer Charakteristik konstant sein muß. Trotzdem gibt es eine Integralfäche der Differentialgleichung (35), die durch die Kurve (38) hindurchgeht, und zwar die Fläche

$$u = \sqrt[3]{x+y}.$$

Im vorliegenden Fall ist $p = u_x = \frac{1}{3} x^{-2/3}$, und diese partielle Ableitung existiert längs der Kurve (38) nicht.

2. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$p_1 + p_2 + p_3 = u$$

für eine Funktion u dreier unabhängiger Veränderlicher. Durch Integration des zugehörigen Differentialgleichungssystems (17) erhalten wir die folgende Lösung, die durch Anfangswerte x_k^0 und u_0 bestimmt ist:

$$x_k = s + x_k^0, \quad u = u_0 e^s \quad (k=1, 2, 3). \quad (39)$$

Gesucht ist diejenige Integralfäche, welche die Mannigfaltigkeit

$$x_1 = t_1 + t_2, \quad x_2 = t_1 - t_2, \quad x_3 = 1, \quad u = t_1 t_2$$

enthält. Setzen wir diese Ausdrücke an Stelle der Anfangswerte in die Gleichungen (39) ein, so erhalten wir

$$x_1 = s + t_1 + t_2, \quad x_2 = s + t_1 - t_2, \quad x_3 = s + 1, \quad u = t_1 t_2 e^s. \quad (40)$$

Die ersten drei Gleichungen sind nach s , t_1 und t_2 auflösbar (es ist $\Delta \neq 0$):

$$s = x_3 - 1, \quad t_1 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - 2x_3 + 2), \quad t_2 = \frac{1}{2} (x_1 - x_2).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung (40) ein, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Integralfäche

$$u = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 - 2x_3 + 2) (x_1 - x_2) e^{x_3-1}.$$

3. Schließlich sei diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$u_x - u_y = f(x+y)$$

gesucht, die nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig ist und für $x=0$ der Bedingung $u=0$ genügt. Mit Hilfe der Transformation $x=x_1$, $x+y=y_1$ erhalten wir ohne Mühe

$$u(x, y) = x f(x+y).$$

Diese Gleichung liefert die Lösung unseres Problems, wenn die Funktion $f(t)$ eine stetige Ableitung besitzt. Hat $f(t)$ keine stetige Ableitung, so hat das gestellte Problem keine Lösungen. Man kann beweisen, daß stetige Funktionen $f(t)$ existieren, die nirgends eine Ableitung besitzen. Dieses Beispiel zeigt die Wichtigkeit der Voraussetzung über die Existenz und Stetigkeit der Ableitung von c in der Differentialgleichung (2) [O. PERRON, Math. Z. 27 (1928)].

5. Ein Hilfssatz. In diesem Abschnitt wollen wir den in [2] formulierten Satz beweisen. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz. Wir setzen voraus, daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen des Systems

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (41)$$

einen Parameter λ enthalten. Weiterhin seien die Ausdrücke auf den rechten Seiten stetige Funktionen, die für

$$|x-a| \leq A, \quad |y_k - b_k| \leq B \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (42)$$

und jedes λ aus einem gewissen Intervall $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ stetige Ableitungen nach allen y_k besitzen; dabei sind a und b_k vorgegebene Zahlen.

Es sei M das Maximum der absoluten Beträge $|f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)|$ ($k=1, \dots, n$) für die angegebenen Werte der Veränderlichen. Dann hat das Differentialgleichungssystem (41) eine eindeutig bestimmte Lösung, welche die Anfangsbedingungen

$$y_k|_{x=a} = b_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (43)$$

erfüllt. Die Lösung existiert auf dem Intervall $|x-a| \leq h$, wobei h die kleinere der beiden Zahlen A und $\frac{B}{M}$ bezeichnet. Man kann die Lösung in diesem Intervall mit Hilfe sukzessiver Approximation erhalten [II, 51]. Die einzelnen Näherungsfunktionen, die nach den Formeln aus [II, 51] berechnet werden, sind stetige Funktionen von x und λ . Wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz in bezug auf x und λ [II, 51] sind auch die Funktionen, welche das Differentialgleichungssystem (41) lösen und die Anfangsbedingungen (43) erfüllen, stetige Funktionen der Argumente x und λ . Wir hätten natürlich auch voraussetzen können, daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (41) nicht einen, sondern mehrere Parameter enthalten.

Damit gilt der folgende

Hilfssatz. *Enthalten die rechten Seiten des Systems (41) mehrere Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und genügen sie den angegebenen Bedingungen, so besteht die Lösung des Systems, welche den Anfangsbedingungen (43) genügt, wobei a und b_k vorgegebene Zahlen sind, aus Funktionen $y_k = \psi_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, die in bezug auf x und λ_s stetig sind.*

Bemerkung. Die Werte x_0 und y_k^0 mögen im Innern des Bereiches (42) liegen. Die Lösungen, welche den Anfangsbedingungen $y_k(x_0) = y_k^0$ genügen, sind Funktionen dieser Anfangswerte:

$$y_k = \psi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0); \quad (44)$$

dabei sind diese Funktionen in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ erklärt. Führen wir die neue unabhängige Veränderliche $\xi = x - x_0$ und die neuen Funktionen $\eta_k = y_k - y_k^0$ ein, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\eta_k}{d\xi} = f_k(\xi + x_0, \eta_1 + y_1^0, \eta_2 + y_2^0, \dots, \eta_n + y_n^0, \lambda),$$

d. h., die Anfangswerte x_0, y_k^0 kommen in den rechten Seiten als Parameter vor, während in den neuen Anfangsbedingungen $\eta_k(0) = 0$ nur feste Zahlen auftreten. Nach dem Hilfssatz können wir schließen, daß die Funktionen (44) stetige Funktionen ihrer Argumente sind.

Wir gehen nun zum Beweis des in [2] formulierten Satzes über, wobei wir zur Vereinfachung zunächst den Fall einer einzigen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (45)$$

betrachten. Wir setzen voraus, daß die Funktion auf der rechten Seite stetig ist und für

$$|x-a| \leq A, \quad |y-b| \leq B \quad (46)$$

eine stetige Ableitung nach y besitzt.

Wir betrachten die Lösung der Differentialgleichung (45), die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genügt, wobei sich x_0 und y_0 im Innern des Bereiches (46) befinden. Diese Lösung ist eine Funktion von x_0 und y_0 ,

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \quad (47)$$

und ist für Werte von x erklärt, die hinreichend nahe bei x_0 liegen. Wir ändern den Anfangswert der Funktion ein wenig und betrachten die neue Lösung

$$y^+ = \varphi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0). \quad (48)$$

Ist Δy_0 dem absoluten Betrag nach hinreichend klein, so existieren die Lösungen (47) und (48) in einer bestimmten Umgebung des Wertes $x = x_0$.

Aus (45) folgt

$$\frac{d(y^+ - y)}{dx} = f(x, y^+) - f(x, y).$$

Diese Differentialgleichung läßt sich auch in der Form

$$\frac{d(y^+ - y)}{dx} = a(x, \Delta y_0) (y^+ - y) \quad (49)$$

schreiben mit

$$a(x, \Delta y_0) = \frac{f(x, y^+) - f(x, y)}{y^+ - y}. \quad (50)$$

Der letzte Ausdruck ist eine bekannte Funktion von x und Δy_0 , da wir die Lösungen (47) und (48) als bekannt voraussetzen. Man erkennt, daß die Funktion $a(x, \Delta y_0)$ eine stetige Funktion ihrer Argumente ist. Dies ist für solche Werte von x und Δy_0 klar, für die $y^+ - y \neq 0$ gilt. Haben jedoch die Funktionen y^+ und y für $x \rightarrow x'$ und $\Delta y_0 \rightarrow \alpha'$ einen gemeinsamen Grenzwert y' , so folgt aus der vorausgesetzten Existenz einer stetigen Ableitung unmittelbar die Beziehung

$$\frac{f(x, y^+) - f(x, y)}{y^+ - y} = f_y[x, y + \theta(y^+ - y)] \rightarrow f_y(x, y') \quad (0 < \theta < 1),$$

d. h., auch in diesem Fall ist die Funktion (50) stetig. Dividieren wir beide Seiten von (49) durch Δy_0 , so erhalten wir für den Quotienten $(y^+ - y)/\Delta y_0$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y^+ - y}{\Delta y_0} \right) = a(x, \Delta y_0) \cdot \frac{y^+ - y}{\Delta y_0}. \quad (51)$$

Für $x = x_0$ gilt $y^+|_{x=x_0} = y_0 + \Delta y_0$ und $y|_{x=x_0} = y_0$, d. h.

$$\left. \frac{y^+ - y}{\Delta y_0} \right|_{x=x_0} = 1. \quad (52)$$

Somit ist der Quotient $(y^+ - y)/\Delta y_0$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = a(x, \Delta y_0) u, \quad (53)$$

die der Anfangsbedingung

$$u|_{x=x_0} = 1 \quad (54)$$

genügt.

Da die rechte Seite der Differentialgleichung (53) eine stetige Funktion des Parameters Δy_0 ist für alle Δy_0 , die hinreichend nahe bei 0 liegen, ist auch die Lösung u , die der Bedingung (54) genügt, eine stetige Funktion von Δy_0 ; insbesondere existiert der Grenzwert des angegebenen Quotienten für $\Delta y_0 \rightarrow 0$, d. h., die Funktion (47) besitzt die partielle Ableitung $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$. Diese partielle Ableitung muß die Lösung der Differentialgleichung (53) für $\Delta y_0 = 0$ sein. Wegen (50) ist aber $a(x, 0) = f_y[x, \varphi(x, x_0, y_0)]$. Folglich können wir behaupten, daß die partielle Ableitung $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = f_y[x, \varphi(x, x_0, y_0)] u \quad (55)$$

darstellt, die der Bedingung (54) genügt. Da die rechte Seite der Differentialgleichung (55) eine stetige Funktion der Parameter x_0 und y_0 ist, finden wir durch nochmalige Anwendung des Hilfssatzes, daß die partielle Ableitung $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ ebenfalls eine stetige Funktion ihrer Argumente ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Fügen wir zu x_0 einen Zuwachs Δx_0 hinzu und wiederholen die vorhergehenden Überlegungen, so können wir beweisen, daß die Funktion (47) eine stetige partielle Ableitung $\varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$ besitzt. Diese partielle Ableitung muß ebenfalls der Differentialgleichung (55) genügen, sie erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung (54), sondern die Bedingung

$$u|_{x=x_0} = -f(x_0, y_0).$$

Diese Bedingung erhält man unmittelbar, wenn man die Differentialgleichung (45) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ als Integralgleichung

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

schreibt [II, 51]. Differenzieren wir beide Seiten der Integralgleichung nach x_0 , so erhalten wir gerade die angegebene Anfangsbedingung für $u = \varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$.

Bemerkung 2. Der Beweis bleibt auch für das Differentialgleichungssystem (5) gültig. Eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems sei

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (56)$$

Fügen wir zu y_i^0 einen Zuwachs Δy_i^0 hinzu, so erhalten wir eine andere Lösung

$$y_k^+ = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i^0 + \Delta y_i^0, y_{i+1}^0, \dots, y_n^0).$$

Schreiben wir das Differentialgleichungssystem (5) für y_k und y_k^+ auf und subtrahieren die entsprechenden Gleichungen voneinander, so können wir die Differenz, die wir auf der rechten Seite erhalten, in der Form

$$\begin{aligned} & f_k(x, y_1^+, \dots, y_n^+) - f_k(x, y_1, \dots, y_n) \\ &= [f_k(x, y_1^+, y_2^+, \dots, y_n^+) - f_k(x, y_1, y_2^+, \dots, y_n^+)] \\ & \quad + [f_k(x, y_1, y_2^+, y_3^+, \dots, y_n^+) - f_k(x, y_1, y_2, y_3^+, \dots, y_n^+)] \\ & \quad + \dots + [f_k(x, y_1, \dots, y_{n-1}^+, y_n^+) - f_k(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)] \end{aligned}$$

schreiben. Für die Quotienten $u_k = (y_k^+ - y_k) / \Delta y_i^0$ erhalten wir das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{kj}(x, y_j^0) u_j$$

mit

$$a_{kj} = \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j^+, \dots, y_n^+) - f_k(x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}^+, \dots, y_n^+)}{y_j^+ - y_j}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u_k|_{x=x_0} = 0 \quad (k \neq i), \quad u_i|_{x=x_0} = 1. \quad (57)$$

Im übrigen verläuft der Beweis analog, und wir können uns davon überzeugen, daß die Funktionen (56) stetige partielle Ableitungen nach den y_i^0 besitzen. An Stelle der Differentialgleichung (55) erhalten wir für diese partiellen Ableitungen das Differentialgleichungssystem

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j} u_j, \quad (58)$$

wobei in den Koeffizienten an Stelle der y_k die Funktionen (56) einzusetzen sind. Die Anfangsbedingungen sind wie früher die Bedingungen (57). Wir erwähnen noch, daß wir das Differentialgleichungssystem (58) unmittelbar erhalten können, wenn wir die

Funktionen (56) in die Differentialgleichungen (5) einsetzen und beide Seiten nach den y_i^0 differenzieren. Aber den Beweis, daß die partiellen Ableitungen nach den y_i^0 existieren, können wir nicht umgehen und dürfen streng genommen die Reihenfolge der Differentiationen nach x und den y_i^0 auf der linken Seite nicht ändern. Übrigens läßt sich im Fall einer einzigen Differentialgleichung die homogene lineare Differentialgleichung (55) in geschlossener Form lösen.

Bemerkung 3. Wenn die rechten Seiten f_k der Differentialgleichungen (5) unter den Bedingungen (6) stetige partielle Ableitungen nach den y_s bis zu einer Ordnung m besitzen, haben auch die Funktionen $\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ stetige partielle Ableitungen nach den y_s^0 bis zur Ordnung m . Haben die Funktionen f_k eine stetige partielle Ableitung nach x , so folgt wiederum aus (5), daß die φ_k stetige Ableitungen nach x bis zur zweiten Ordnung besitzen.

6. Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir gehen nun zur Untersuchung allgemeiner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung über. Wie im Fall quasilinearer Differentialgleichungen nehmen wir zunächst an, daß nur zwei unabhängige Veränderliche vorhanden sind. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion u von zwei unabhängigen Veränderlichen hat die Gestalt

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (59)$$

Wir klären zunächst in großen Zügen die geometrische Bedeutung dieser Differentialgleichung. In einem beliebigen festen Punkt (x, y, u) stellt (59) eine Beziehung zwischen p und q dar, d. h. zwischen den Richtungskosinus der Flächennormale. Die dieser Beziehung genügenden Normalen bilden eine Kegelfläche mit der Spitze (x, y, u) . Die Ebenen, die durch den Punkt (x, y, u) gehen und auf den Erzeugenden dieses Kegels senkrecht stehen, sind die möglichen Tangentialebenen der gesuchten Integralfächen in dem festen Punkt (x, y, u) . Diese Ebenenschar hängt, wie auch die Schar der Erzeugenden des Normalenkegels, von einem einzigen Parameter ab. Die Enveloppe dieser Ebenenschar stellt einen neuen Kegel dar, den wir *T-Kegel*¹⁾ nennen wollen. Die Beziehung (59) ist folglich gleichbedeutend mit der Vorgabe des *T-Kegels* in jedem Punkt des Raumes, und eine Integralfäche der Differentialgleichung (59) muß die Eigenschaft besitzen, daß in jedem ihrer Punkte die Tangentialebene den zu diesem Punkt gehörigen *T-Kegel* berührt.

Wir wollen die Gleichungen der Erzeugenden des *T-Kegels* für einen vorgegebenen Punkt (x, y, u) aufstellen. Die Größen p und q seien Funktionen eines Parameters a , die in dem festen Punkt (x, y, u) die Gleichung (59) erfüllen. Der *T-Kegel* ist die Enveloppe der Ebenenschar

$$p(a)(X-x) + q(a)(Y-y) - (U-u) = 0. \quad (60)$$

Differenzieren wir nach dem Parameter a , so erhalten wir die weitere Gleichung

$$\frac{dp}{da}(X-x) + \frac{dq}{da}(Y-y) = 0. \quad (61)$$

Durch Differentiation der Beziehung (59) nach a kommen wir zu

$$P \frac{dp}{da} + Q \frac{dq}{da} = 0 \quad (62)$$

mit

$$P = F_p, \quad Q = F_q. \quad (63)$$

¹⁾ Oft auch Mongescher Kegel genannt. (Anm. d. Red.)

Im folgenden nehmen wir an, daß für die betrachteten Werte der Veränderlichen die Größen F_p und F_q nicht gleichzeitig verschwinden, d. h., daß $F_p^2 + F_q^2 > 0$ gilt. Dadurch werden nur singuläre Lösungen der Differentialgleichung (59) ausgeschlossen. Nehmen wir noch an, daß auch die Größen $\frac{dp}{da}$ und $\frac{dq}{da}$ nicht beide gleichzeitig verschwinden, so erhalten wir aus den homogenen Differentialgleichungen (61) und (62) die Beziehung

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q},$$

und schließlich liefert uns (60) die endgültigen Gleichungen für die Erzeugenden des Kegels:

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{U-u}{pP+qQ}. \quad (64)$$

Um die verschiedenen Erzeugenden des T -Kegels zu erhalten, müssen wir in den Nennern die verschiedenen Werte von p und q einsetzen, die im festen Punkt (x, y, u) die Beziehung (59) erfüllen.

Im Fall der quasilinearen Differentialgleichung (2) hatten wir in jedem Punkt eine wohlbestimmte Richtung, und die Tangentialebene der gesuchten Integralfläche mußte diese Richtung enthalten. Jetzt haben wir in jedem Punkt an Stelle einer einzigen festen Richtung den T -Kegel, und die Tangentialebene der gesuchten Integralfläche muß diesen Kegel berühren. Wir können somit für die nichtlineare Differentialgleichung (59) nicht wie im Fall der quasilinearen Differentialgleichung (2), wo wir ein wohlbestimmtes Richtungsfeld hatten, unmittelbar die charakteristischen Kurven konstruieren, da wir ja an Stelle eines Richtungsfeldes das Feld der T -Kegel haben. Wir wollen jedoch nun zeigen: Haben wir eine Integralfläche S , d. h. eine Lösung $u = u(x, y)$ der Differentialgleichung (59), so können wir sie mit Kurven überdecken, die den charakteristischen Kurven der quasilinearen Differentialgleichung (2) vollkommen entsprechen. In jedem Punkt der Integralfläche muß nämlich die Tangentialebene den T -Kegel berühren, der zu diesem Punkt gehört, und deshalb muß sie die Erzeugende des Kegels enthalten, längs der sie den Kegel berührt. Diese Erzeugenden der T -Kegel in verschiedenen Punkten der Fläche bilden auf der Integralfläche ein Richtungsfeld. Integrieren wir die zu diesem Richtungsfeld gehörige Differentialgleichung erster Ordnung, so können wir unsere Fläche mit einer Kurvenschar $\{l'\}$ bedecken, die von einem einzigen Parameter abhängt. Die Richtungskosinus des Richtungsfeldes müssen den in (64) auftretenden Nennern proportional sein, wobei die Größen p und q unmittelbar durch die Gleichung der betrachteten Integralfläche bestimmt sind. Somit müssen längs der Kurven, welche die Integralfläche überdecken, die Beziehungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP+qQ} \quad (65)$$

oder

$$\frac{dx}{ds} = P, \quad \frac{dy}{ds} = Q, \quad \frac{du}{ds} = pP + qQ \quad (66)$$

erfüllt sein. Um diese Kurven auf einer vorgegebenen Integralfläche zu ermitteln, genügt es, die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \quad (67)$$

zu integrieren, wobei die Nenner der auftretenden Brüche nur die Veränderlichen x und y enthalten, da die Funktion u und ihre partiellen Ableitungen p und q auf der vorgegebenen Integralfäche bekannte Funktionen von x und y sind. Integrieren wir die Differentialgleichung (67) und benutzen die Gleichung $u = u(x, y)$ der Fläche, so erhalten wir die Kurven l' . Die rechten Seiten der Gleichungen (66) haben nur für eine fest gegebene Integralfäche $u = u(x, y)$ einen bestimmten Sinn. Kennen wir die Integralfäche, so können wir p und q als Funktionen von x und y berechnen. Wir ergänzen nun das Gleichungssystem (66) durch zwei weitere Gleichungen, welche die Ableitungen von p und q enthalten, so daß wir ein System von Differentialgleichungen erhalten, das von der Wahl einer festen Integralfäche der Differentialgleichung (59) unabhängig ist. Mit r , σ und t bezeichnen wir die zweiten Ableitungen der Funktion u , also

$$r = u_{xx}, \quad \sigma = u_{xy}, \quad t = u_{yy},$$

und mit X , Y und U die Ableitungen der linken Seite von (59) nach x , y und u , also

$$X = F_x, \quad Y = F_y, \quad U = F_u.$$

Differenzieren wir die linke Seite von (59) nach x und y , so erhalten wir

$$X + Up + Pr + Q\sigma = 0, \quad Y + Uq + P\sigma + Qt = 0.$$

Andererseits gilt offenbar

$$\frac{dp}{ds} = r \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dy}{ds} = Pr + Q\sigma,$$

$$\frac{dq}{ds} = \sigma \frac{dx}{ds} + t \frac{dy}{ds} = P\sigma + Qt.$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{ds} = -(X + Up), \quad \frac{dq}{ds} = -(Y + Uq),$$

die wir noch zu (66) hinzufügen können. Somit erhalten wir folgendes System von fünf Differentialgleichungen für fünf Funktionen des Parameters s :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= P, & \frac{dy}{ds} &= Q, & \frac{du}{ds} &= pP + qQ, \\ \frac{dp}{ds} &= -(X + Up), & \frac{dq}{ds} &= -(Y + Uq). \end{aligned} \tag{68}$$

Wir können also behaupten, daß auf jeder Integralfäche längs jeder der soeben konstruierten Kurven l' die Differentialgleichungen (68) erfüllt sein müssen. Das Differentialgleichungssystem (68) können wir auch unabhängig von den Integralfächen der Differentialgleichung (59) betrachten. Es heißt *charakteristisches System* der Differentialgleichung (59).

Bei der Herleitung der Differentialgleichungen (68) haben wir die Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion u benutzt. Außerdem ist für die Integration von (68) wesentlich, daß die Funktionen auf den rechten Seiten stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen. Berücksichtigen wir dies alles, so können wir das erhaltene Ergebnis formulieren. Es sei $u(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (59), die in der Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Ferner sei $u_0 = u(x_0, y_0)$, $p_0 = u_x(x_0, y_0)$ und $q_0 = u_y(x_0, y_0)$. Wir setzen voraus, daß die Funktion $F(x, y, u, p, q)$ eindeutig und stetig ist und in einer Um-

gebung der Werte $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Dann hat das Differentialgleichungssystem (68) eine wohlbestimmte Lösung $x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)$ mit den Anfangswerten x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 für $s=0$. Aus unseren Überlegungen folgt, daß die Integralfläche $u=u(x, y)$ die angegebene Lösung von (68) für alle s enthält, die hinreichend nahe bei 0 liegen, d. h., es gilt

$$u_0(s) = u[x_0(s), y_0(s)], \quad p_0(s) = u_x[x_0(s), y_0(s)], \quad q_0(s) = u_y[x_0(s), y_0(s)].$$

Das Differentialgleichungssystem (68) können wir, wie wir bereits erwähnt haben, unabhängig von der Differentialgleichung (59) als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen x, y, u, p, q auffassen. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß es das Integral

$$F(x, y, u, p, q) = C \quad (69)$$

besitzt. Denn differenzieren wir die linke Seite der Identität (69) nach s und benutzen die Differentialgleichungen (68), so erhalten wir

$$\frac{dF}{ds} = XP + YQ + U(pP + qQ) - P(X + Up) - Q(Y + Uq) \equiv 0.$$

7. Charakteristische Mannigfaltigkeiten. Jede Lösung des Differentialgleichungssystems (68) läßt sich durch fünf Funktionen

$$x(s), y(s), u(s), p(s), q(s) \quad (70)$$

des Hilfsparameters s darstellen. Wir wollen uns nun mit denjenigen Lösungen des Systems beschäftigen, die beim Einsetzen in das Integral (69) der Konstanten C den Wert 0 erteilen. Solche Lösungen von (68) nennen wir charakteristische Streifen der Differentialgleichung (59). *Ein charakteristischer Streifen der Differentialgleichung (59) wird durch ein System von Funktionen (70) gegeben, die dem Differentialgleichungssystem (68) und der Bedingung*

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (71)$$

genügen. Die ersten drei Funktionen von (70) bestimmen eine Raumkurve; die letzten beiden Funktionen bestimmen längs dieser Kurve eine Tangentialebene. Jede Raumkurve, die Bestandteil eines charakteristischen Streifens ist, nennt man gewöhnlich eine *charakteristische Kurve* der Differentialgleichung (59). In [7] haben wir gezeigt, daß im allgemeinen die Integralfläche mit charakteristischen Streifen überdeckt werden kann, folglich auch mit den zu diesen Streifen gehörigen charakteristischen Kurven. Betrachten wir auf einer beliebigen Integralfläche einen Punkt (x_0, y_0, u_0) und die zu diesem Punkt gehörigen Werte $p=p_0$ und $q=q_0$, so bestimmt das Differentialgleichungssystem (68) nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz genau einen charakteristischen Streifen mit den Anfangswerten x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 , und dieser Streifen muß ganz der gewählten Integralfläche angehören. *Wenn also ein charakteristischer Streifen mit einer Integralfläche ein Element gemeinsam hat, liegt er vollständig auf dieser Integralfläche.* Aus diesem Satz folgt unmittelbar: Berühren sich zwei Integralflächen in einem Punkt, d. h., haben sie in diesem Punkt gemeinsame Werte von p und q , so muß der zu diesen Anfangswerten gehörige charakteristische Streifen den beiden Integralflächen angehören. Mit anderen Worten: *Berühren sich zwei Integralflächen in einem Punkt, so berühren sie sich längs des ganzen charakteristischen Streifens, dessen Anfangselement das Flächenelement des Berührungspunktes ist.* Bei allen diesen Überlegungen nehmen wir natürlich an, daß die Integralflächen und die Funktion F den im vorhergehen-

den Abschnitt angegebenen Bedingungen genügen und sich die ganze Betrachtung auf die Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) bezieht.

Bemerkung. Dafür, daß eine Lösung des Differentialgleichungssystems (68) die Beziehung (71) erfüllt, d. h. einen charakteristischen Streifen darstellt, ist wegen (69) hinreichend, daß ihre Anfangswerte x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 diese Beziehung erfüllen, daß also

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0 \quad (72)$$

gilt.

8. Die Cauchysche Methode. Wir haben den Zusammenhang des Differentialgleichungssystems (68) mit der Differentialgleichung (59) geklärt. Wir setzen jetzt voraus, daß wir das Differentialgleichungssystem (68) integrieren und somit alle nur möglichen charakteristischen Streifen finden können. Wir wollen zeigen, auf welche Weise wir aus diesen charakteristischen Streifen die Integralflächen der Differentialgleichung (59) aufbauen können. Hierzu nehmen wir an, daß sich die Lösung des Differentialgleichungssystems (68) durch einen Parameter s und die Anfangswerte der gesuchten Funktionen in der Form

$$\begin{aligned} x &= x(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ y &= y(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ u &= u(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ p &= p(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ q &= q(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \end{aligned} \quad (73)$$

ausdrücken lassen. Da wir eine Schar von charakteristischen Streifen erhalten wollen, nehmen wir an, daß die Anfangswerte x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 Funktionen eines Parameters t sind,

$$x_0(t), y_0(t), u_0(t), p_0(t), q_0(t), \quad (74)$$

die natürlich die Beziehung (72) erfüllen. Außerdem setzen wir voraus, daß sie für $t_0 < t < t_1$ stetige Ableitungen besitzen und daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (68) in einem Bereich, der die Mannigfaltigkeit (74) im Innern enthält, stetige Ableitungen nach x, y, u, p, q besitzen. Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, ist die Beziehung (71) auch für beliebige Werte von s erfüllt.

Setzen wir die Funktionen (74) in die rechten Seiten von (73) ein, so erhalten wir

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t), \quad (75)$$

$$p = p(s, t), \quad q = q(s, t). \quad (76)$$

Die Gleichungen (75) bilden die Parameterdarstellung einer Fläche. Ist die Determinante

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s \quad (77)$$

von 0 verschieden, was wir im folgenden annehmen wollen, so können wir die explizite Gleichung $u = u(x, y)$ dieser Fläche in derselben Weise wie für eine quasilineare Differentialgleichung bestimmen. Die Gleichung (71) ist, wie wir gesehen haben, erfüllt, aber es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob die Funktionen p und q , die durch (76) bestimmt sind, die partiellen Ableitungen der Funktion $u(x, y)$ nach x bzw. y darstellen. Ist dies der Fall, so müssen, wenn wir die Funktion $u(x, y)$

nach s und t differenzieren, die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} - p \frac{\partial x}{\partial s} - q \frac{\partial y}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - p \frac{\partial x}{\partial t} - q \frac{\partial y}{\partial t} &= 0\end{aligned}\quad (78)$$

erfüllt sein. Da die zweireihige Determinante, die aus den Koeffizienten von p und q besteht, nach Voraussetzung von 0 verschieden ist, können wir auch umgekehrt zeigen, daß die durch (76) definierten Funktionen p und q die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ nach x und y darstellen, wenn sie die Beziehungen (78) erfüllen. Die erste Beziehung (78) folgt unmittelbar aus den ersten drei Differentialgleichungen des Systems (68). Es bleibt nur noch zu klären, unter welchen Bedingungen die zweite Beziehung (78) erfüllt ist. Wir nehmen an, daß $F(x, y, u, p, q)$ in der Umgebung von x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Dann haben die rechten Seiten der Differentialgleichung (68) stetige Ableitungen erster Ordnung, und aus diesen Differentialgleichungen folgt, daß die x_s, y_s, u_s stetige Ableitungen nach t besitzen, daß also stetige Ableitungen x_{st}, y_{st}, u_{st} existieren. Dann existieren auch die stetigen Ableitungen x_{ts}, y_{ts}, u_{ts} und sind gleich den soeben angegebenen Ableitungen. Denn hat die Funktion $f(x, y)$ in einem Bereich eine stetige Ableitung f_{xy} , so hat sie auch die Ableitung f_{yx} , und es gilt $f_{yx} = f_{xy}$. Diesen Satz kann man durch eine kleine Abänderung der Überlegungen aus [1, 155] beweisen.

Bezeichnen wir die linke Seite der zweiten Beziehung (78) mit L , so erhalten wir durch Differentiation nach s

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} - p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Differenzieren wir die erste Beziehung (78), die, wie wir soeben gesehen haben, wirklich erfüllt ist, nach t , so finden wir andererseits

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - p \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - q \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Subtrahieren wir diese Beziehung von der vorhergehenden, so erhalten wir $\frac{\partial L}{\partial s}$ in der Gestalt

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}$$

oder, unter Benutzung des Differentialgleichungssystems (68),

$$\frac{\partial L}{\partial s} = P \frac{\partial p}{\partial t} + Q \frac{\partial q}{\partial t} + (X + Up) \frac{\partial x}{\partial t} + (Y + Uq) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Durch Differentiation der Beziehung (71), der die Funktionen (75) und (76) genügen, nach t ergibt sich

$$0 = X \frac{\partial x}{\partial t} + Y \frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial p}{\partial t} + Q \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Subtrahieren wir diese Beziehung von der vorhergehenden, so können wir schließlich den Ausdruck für $\frac{\partial L}{\partial s}$ in $\frac{\partial L}{\partial s} = U \left(p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ oder $\frac{\partial L}{\partial s} = -UL$ überführen.

Hieraus folgt

$$L = L_0 e^{-\int_0^s U ds},$$

wobei L_0 der Wert ist, den die linke Seite der zweiten Beziehung (78) für $s=0$ annimmt:

$$L_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial t}.$$

Aus diesen Formeln folgt unmittelbar, daß die Beziehung $L=0$ für alle s erfüllt ist, wenn sie für $s=0$ gilt. Die zweite Beziehung (78) gilt also genau dann, wenn die Funktionen (74) der Relation

$$\frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt} \quad (79)$$

genügen. Wenn die Determinante Δ für $s=0$ und $t=t'$ ($t_0 < t' < t_1$) von 0 verschieden ist und die Funktionen (74) den Beziehungen

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0, \quad \frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt} \quad (80)$$

genügen, bestimmen also die Gleichungen (75) für Werte von s und t , die nahe bei $s=0$ bzw. $t=t'$ liegen, eine Integralfläche $u=u(x, y)$ der Differentialgleichung (59). Die ersten beiden Gleichungen (75) liefern stetig differenzierbare Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$. Setzen wir sie in $u(s, t)$, $p(s, t)$, $q(s, t)$ ein, so erhalten wir stetig differenzierbare Funktionen von x und y , und es gilt $p=u_x$ und $q=u_y$. Hieraus erkennt man, daß die Funktion $u(x, y)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. Für die erhaltene Lösung gilt für $s=0$ die Beziehung $u_0(t) = u[x_0(t), y_0(t)]$ für solche Werte von t , die nahe bei t' liegen. Die Fläche $u=u(x, y)$ enthält ein Teilstück der Kurve $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$, $u=u_0(t)$, welches zur Umgebung des Wertes $t=t'$ gehört. Dementsprechend hat die Lösung des Cauchyschen Problems, das wir im nächsten Abschnitt behandeln wollen, wie in [2] lokalen Charakter.

9. Das Cauchysche Problem. Das Cauchysche Problem läßt sich für die Differentialgleichung (59) in derselben Weise formulieren wie für eine quasilineare Differentialgleichung: *Gesucht ist eine Integralfläche, die durch eine vorgegebene Kurve l hindurchgeht.* Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß sich die gegebene Kurve in einer zur y, u -Ebene parallelen Ebene $x=x_0$ befindet und eine explizite Darstellung $u=\varphi(y)$ besitzt, d. h., wir suchen eine Integralfläche, die der Bedingung

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y) \quad (81)$$

genügt. Bei der Untersuchung des Cauchyschen Problems werden wir außer der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auch stets die (in einem bestimmten Sinne) stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten beweisen. Es sei u_1 eine Lösung des Problems, wenn in (81) die Funktion $\varphi(y)$ durch $\varphi(y) + \delta(y)$ ersetzt ist. Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten bedeute in diesem Fall folgendes: In einem endlichen Variabilitätsbereich für x und y wird die Größe $|u - u_1|$ beliebig klein, wenn $|\delta(y)|$ hinreichend klein ist. Ein Anfangswertproblem, dessen Lösung stetig von den Anfangswerten abhängt, nennt man gewöhnlich *sachgemäß*.

Wir nehmen an, daß sich die Differentialgleichung (59) nach p auflösen läßt,

$$p = f(x, y, u, q). \quad (82)$$

Hieraus folgt

$$L = L_0 e^{-\int_0^s U ds},$$

wobei L_0 der Wert ist, den die linke Seite der zweiten Beziehung (78) für $s=0$ annimmt:

$$L_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial t}.$$

Aus diesen Formeln folgt unmittelbar, daß die Beziehung $L=0$ für alle s erfüllt ist, wenn sie für $s=0$ gilt. Die zweite Beziehung (78) gilt also genau dann, wenn die Funktionen (74) der Relation

$$\frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt} \quad (79)$$

genügen. Wenn die Determinante Δ für $s=0$ und $t=t'$ ($t_0 < t' < t_1$) von 0 verschieden ist und die Funktionen (74) den Beziehungen

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0, \quad \frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt} \quad (80)$$

genügen, bestimmen also die Gleichungen (75) für Werte von s und t , die nahe bei $s=0$ bzw. $t=t'$ liegen, eine Integralfäche $u=u(x, y)$ der Differentialgleichung (59). Die ersten beiden Gleichungen (75) liefern stetig differenzierbare Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$. Setzen wir sie in $u(s, t)$, $p(s, t)$, $q(s, t)$ ein, so erhalten wir stetig differenzierbare Funktionen von x und y , und es gilt $p=u_x$ und $q=u_y$. Hieraus erkennt man, daß die Funktion $u(x, y)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. Für die erhaltene Lösung gilt für $s=0$ die Beziehung $u_0(t) = u[x_0(t), y_0(t)]$ für solche Werte von t , die nahe bei t' liegen. Die Fläche $u=u(x, y)$ enthält ein Teilstück der Kurve $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$, $u=u_0(t)$, welches zur Umgebung des Wertes $t=t'$ gehört. Dementsprechend hat die Lösung des Cauchyschen Problems, das wir im nächsten Abschnitt behandeln wollen, wie in [2] lokalen Charakter.

9. Das Cauchysche Problem. Das Cauchysche Problem läßt sich für die Differentialgleichung (59) in derselben Weise formulieren wie für eine quasilineare Differentialgleichung: *Gesucht ist eine Integralfäche, die durch eine vorgegebene Kurve l hindurchgeht.* Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß sich die gegebene Kurve in einer zur y, u -Ebene parallelen Ebene $x=x_0$ befindet und eine explizite Darstellung $u=\varphi(y)$ besitzt, d. h., wir suchen eine Integralfäche, die der Bedingung

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y) \quad (81)$$

genügt. Bei der Untersuchung des Cauchyschen Problems werden wir außer der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auch stets die (in einem bestimmten Sinne) stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten beweisen. Es sei u_1 eine Lösung des Problems, wenn in (81) die Funktion $\varphi(y)$ durch $\varphi(y) + \delta(y)$ ersetzt ist. Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten bedeute in diesem Fall folgendes: In einem endlichen Variabilitätsbereich für x und y wird die Größe $|u - u_1|$ beliebig klein, wenn $|\delta(y)|$ hinreichend klein ist. Ein Anfangswertproblem, dessen Lösung stetig von den Anfangswerten abhängt, nennt man gewöhnlich *sachgemäß*.

Wir nehmen an, daß sich die Differentialgleichung (59) nach p auflösen läßt,

$$p = f(x, y, u, q). \quad (82)$$

10. Die Eindeutigkeit der Lösung. Bei der Lösung des Cauchyschen Problems haben wir eine Integralfäche mit Hilfe charakteristischer Streifen konstruiert. Unter den Voraussetzungen von [8] und der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Lösung $u(x, y)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, haben wir bewiesen, daß die Integralfäche mit charakteristischen Streifen überdeckt werden kann, woraus unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung $u(x, y)$ folgt. Unter unseren Voraussetzungen hatten wir in [9] eine Lösung $u(x, y)$ des Problems (82), (81) mit stetigen Ableitungen zweiter Ordnung erhalten. Der angegebene einfache Eindeutigkeitsbeweis gilt dagegen nicht, wenn wir nur voraussetzen, daß die Funktion $u(x, y)$ stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt.

Auf andere Weise läßt sich der Eindeutigkeitssatz auch unter der Voraussetzung, daß nur stetige Ableitungen erster Ordnung existieren, ohne große Schwierigkeit beweisen. Wir führen den Beweis für die Differentialgleichung (82) unter der Anfangsbedingung (81). Die Grundlage für den Beweis bildet ein Hilfssatz.

Hilfssatz. Die Funktion $u(x, y)$ sei in dem abgeschlossenen Dreiecksbereich Δ , der von den Geraden

$$x = x_0, \quad x - x_0 = \frac{1}{A}(y - y_1), \quad x - x_0 = -\frac{1}{A}(y - y_2) \quad (y_1 < y_2) \quad (88)$$

gebildet wird, stetig. Außerdem sei sie für $x > x_0$ in einem größeren Dreieck, das durch die Geraden

$$x = x_0, \quad x - x_0 = \frac{1}{A}(y - y_3), \quad x - x_0 = -\frac{1}{A}(y - y_4) \quad (y_3 < y_1 < y_2 < y_4) \quad (89)$$

begrenzt ist, erklärt und habe dort stetige Ableitungen erster Ordnung, die in Δ mit Ausnahme eventuell der Grundlinie $x = x_0$ die Bedingung

$$|u_x| \leq A|u_y| + B|u| \quad (90)$$

erfüllen. Auf der Grundlinie $x = x_0$ sei die Ungleichung

$$|u(x_0, y)| \leq M \quad (91)$$

erfüllt. Unter diesen Voraussetzungen gilt im ganzen Dreieck Δ die Ungleichung

$$|u(x, y)| \leq M e^{B(x-x_0)}. \quad (92)$$

Zunächst beweisen wir diesen Hilfssatz für $A = B = 1$. Wir führen den Beweis indirekt. Es möge also in Δ Punkte geben, in denen $|u(x, y)| > M e^{x-x_0}$ ist. Dann nimmt die Funktion $u(x, y) e^{x_0-x}$ den größten absoluten Betrag nicht auf der Grundlinie an.

Da alle Bedingungen nur absolute Beträge der Funktion $u(x, y)$ und ihrer Ableitungen enthalten, können wir, notfalls durch Änderung des Vorzeichens von $u(x, y)$, annehmen, daß das Produkt $u(x, y) e^{x_0-x}$ den größten positiven Wert nicht auf der Grundlinie von Δ annimmt. Dann kann man eine hinreichend kleine positive Zahl λ so festlegen, daß auch die Funktion

$$v(x, y) = u(x, y) e^{-(1+\lambda)(x-x_0)} \quad (93)$$

ihren größten positiven Wert nicht auf der Grundlinie von Δ annimmt. Hieraus ergibt sich ein Widerspruch. Denn wird der größte Wert in einem Punkt im Innern von Δ angenommen, so muß dort $v_x = v_y = 0$ gelten, woraus $u_x - (1+\lambda)u = 0$ und $u_y = 0$ ($u > 0$) folgt. Dies widerspricht aber der Bedingung (90) für $A = B = 1$. Wird der größte Wert in einem Punkt auf der Seite $x - x_0 = y - y_1$ (aber nicht in

der Spitze von Δ) angenommen, so muß dort $v_y \leq 0$ gelten. Durch Differentiation längs dieser Seite erhalten wir $v_x + v_y = 0$. Dies führt zu den Relationen

$$u_y \leq 0, \quad u_x = -u_y + (1 + \lambda) u \quad (u > 0), \quad (94)$$

die wiederum der Bedingung (90) für $A = B = 1$ widersprechen. Wird der größte Wert auf der Seite $x - x_0 = -(y - y_2)$ angenommen, so erhalten wir entsprechend $v_y \geq 0$ und $v_x - v_y = 0$, woraus

$$u_y \geq 0, \quad u_x = u_y + (1 + \lambda) u \quad (u > 0) \quad (95)$$

folgt, ebenfalls im Widerspruch zur Bedingung (90) für $A = B = 1$. Schließlich nehmen wir an, daß die Funktion (93) in der Spitze des Dreiecks Δ den größten Wert annimmt. Auf jeden Fall muß in diesem Punkt $v_x \geq 0$, also $u_x \geq (1 - \lambda) u$ gelten. Ist hierbei $u_y = 0$, so ergibt sich wie soeben ein Widerspruch zu (90). Gilt in der Spitze $u_y < 0$, so erhalten wir durch Differentiation längs der Seite $x - x_0 = y - y_1$ die Beziehung $v_x + v_y \geq 0$. Hieraus folgen die Ungleichungen $u_y < 0$, $u_x \geq -u_y + (1 + \lambda) u$, die mit (90) für $A = B = 1$ im Widerspruch stehen. Gilt in der Spitze $u_y > 0$, so gelangen wir durch Differentiation längs der Seite $x - x_0 = -(y - y_2)$ in derselben Weise zu einem Widerspruch.

Damit ist der Hilfssatz für $A = B = 1$ bewiesen. Jetzt wollen wir ihn auf den allgemeinen Fall übertragen. In dem Dreieck mit den Seiten (88) sind die Bedingungen (90) und (91) erfüllt. Führen wir die neuen unabhängigen Veränderlichen

$x' = Bx, y' = \frac{B}{A} y$ ein, so geht das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' mit den Seiten

$$x' = Bx_0, \quad x' - Bx_0 = y' - y'_1, \quad x - Bx_0 = -(y' - y'_2) \quad \left(y'_k = \frac{B}{A} y_k \right)$$

über, und an Stelle von (90) gilt

$$|u_{x'}| \leq |u_{y'}| + |u|,$$

während die Bedingung (91) wie früher die Gestalt $|u(Bx_0, y')| \leq M$ hat. Wie wir bewiesen haben, folgt daraus in Δ' die Ungleichung $|u(x', y')| \leq M e^{x' - Bx_0}$, die, wenn wir zu den früheren unabhängigen Veränderlichen zurückkehren, zu der in Δ gültigen Ungleichung (92) führt.

Jetzt gehen wir zum Beweis der Tatsache über, daß die Differentialgleichung (82) mit der Bedingung (81) unter den angegebenen Voraussetzungen eindeutig lösbar ist. In dem Streifen $x_0 \leq x \leq x_1$ seien zwei Lösungen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ gegeben, wobei $|u_k(x, y)|$ und $|u_{ky}(x, y)|$ ($k = 1, 2$) nicht größer sind als eine gewisse Zahl M_1 . Bezüglich $f(x, y, u, q)$ genügt es anzunehmen, daß die Ungleichung

$$|f(x, y, u_2, q_2) - f(x, y, u_1, q_1)| \leq B|u_2 - u_1| + A|q_2 - q_1|$$

für alle (x, y) aus diesem Streifen und alle u_k, q_k ($k = 1, 2$) mit $|u_k|, |q_k| \leq M_1$ erfüllt ist. Hier sind A und B gewisse Konstanten. Subtrahiert man von der Gleichung (82) für $u_2(x, y)$ die Gleichung (82) für $u_1(x, y)$ und benutzt diese Eigenschaft der Funktion f , so erhält man die Ungleichung

$$|(u_2 - u_1)_x| \leq A|(u_2 - u_1)_y| + B|u_2 - u_1|.$$

Wenden wir auf die Differenz $u_2 - u_1$ den bewiesenen Hilfssatz an und beachten, daß sie für $x = x_0$ verschwindet, also $M = 0$ ist, so sehen wir aus (92), daß im ganzen Dreieck Δ die Beziehung $u_2(x, y) - u_1(x, y) = 0$ gilt, womit die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen ist. Der allgemeine Fall der Differentialgleichung (59) mit Cauchy'schen Anfangsbedingungen auf einer beliebigen Kurve kann durch Substitution der

Veränderlichen und Auflösung der Differentialgleichung nach einer Veränderlichen auf den eben behandelten Fall zurückgeführt werden. Dies haben wir bereits in [9] getan.

Jetzt betrachten wir im Dreieck Δ zwei Lösungen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ der Differentialgleichung (82) mit den verschiedenen Anfangsbedingungen

$$u_1|_{x=x_0} = \psi_1(y), \quad u_2|_{x=x_0} = \psi_2(y).$$

Wenden wir auf die Differenz $u_2 - u_1$ den Hilfssatz an, so erhalten wir im Dreieck Δ die Ungleichung

$$|u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leq \max_{y_1 \leq y \leq y_2} |\psi_2(y) - \psi_1(y)| e^{B(x-x_0)}.$$

Sie zeigt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den durch (81) eingeführten Anfangswerten $\psi(y)$.

Bemerkung. Bei der Lösung des Cauchyschen Problems kann, wenn die Funktion $\psi(y)$ keine stetigen Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, die Anwendung der Cauchyschen Methode auf eine Fläche $u = u(x, y)$ führen, für die die Funktion $u(x, y)$ keine Ableitung besitzt. Es läßt sich zeigen, daß das Problem in diesem Fall keine Lösung mit stetiger Ableitung besitzt [A. HAAR, Acta Szeged 4 (1928)]. Der Beweis des oben benutzten Hilfssatzes für allgemeinere Fälle und seine Anwendung auf den Beweis des Existenzsatzes für partielle Differentialgleichungen ist in der Arbeit von A. D. MYCHKIS, Die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems (russ.), Uspechi mat. nauk 3: 2 (1948), zu finden.

11. Der singuläre Fall. Wir skizzieren jetzt allgemein den Fall, daß längs eines vorgegebenen Streifens, der die beiden Beziehungen (80) erfüllt, die Determinante (87) gleich 0 ist,

$$\Delta_0 = x_s y_t - x_t y_s |_{s=0} = y'_0(t) F_{p_0} - x'_0(t) F_{q_0} = 0. \quad (96)$$

Weiterhin setzen wir voraus, daß eine Integralfläche $u = u(x, y)$ existiert, die durch diesen Streifen hindurchgeht, wobei die Funktion $u(x, y)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Verschwinden F_{p_0} und F_{q_0} nicht gleichzeitig, so folgt aus (96) und der zweiten Beziehung von (80), daß unser Streifen die Differentialgleichungen (66) erfüllt, wenn der Parameter s mit dem Buchstaben t bezeichnet wird. Die Rechnungen in [6] zeigen nun, daß der Streifen dann auch allen Differentialgleichungen (68) genügt, also ein charakteristischer Streifen ist. Somit gilt: *Wenn die Bedingung (96) erfüllt ist und eine Integralfläche existiert, die den vorgegebenen Streifen enthält, muß dieser ein charakteristischer Streifen sein. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Ausdrücke F_{p_0} und F_{q_0} nicht zugleich verschwinden.* Dann können durch diesen Streifen genau wie im Fall quasilinearer Differentialgleichungen unendlich viele Integralflächen hindurchgehen. Der Beweis dieser letzten Aussage läßt sich genau wie für quasilineare Differentialgleichungen führen. Man hat einen Streifen ω zu konstruieren, der mit dem Streifen (74) einen Punkt (x_0, y_0, u_0) und in diesem Punkt die Größen p_0 und q_0 gemeinsam hat; außerdem muß längs des Streifens ω die Determinante (87) von 0 verschieden sein. Durch diesen Streifen geht unter gewissen Voraussetzungen eine wohlbestimmte Integralfläche hindurch, die den charakteristischen Streifen (74) enthält; denn sie enthält sein Anfangselement. Da der Streifen ω sonst beliebig gewählt werden kann, gibt es unendlich viele Lösungen des Problems.

Ist längs eines vorgegebenen Streifens $\Delta_0 = 0$, ist aber der Streifen nicht charakteristisch, so ist die Lösung des Problems unmöglich, wenn man von der Funktion

$u(x, y)$ verlangt, daß sie stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Es kann aber vorkommen, daß die entsprechende Kurve eine singuläre Linie einer Integralfäche ist. Hierzu bemerken wir, daß wir bei der Cauchyschen Methode die Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $u(x, y)$ benutzt haben. Ist die Beziehung (96) erfüllt und ist der Streifen nicht charakteristisch, so sind längs dieses Streifens nur die ersten drei Differentialgleichungen des Systems (68) erfüllt.

Diese Überlegungen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Ist eine Kurve l gegeben, so zeigt die erste Bedingung (80), daß in jedem Punkt dieser Kurve die Ebene, die durch die Größen $p_0(t)$ und $q_0(t)$ bestimmt ist, den T -Kegel berühren muß, während die zweite Bedingung damit gleichwertig ist, daß diese Ebene die Tangente von l enthalten muß. Erinnern wir uns an die Gleichung (64) für die Erzeugenden des Kegels, so sehen wir, daß die Bedingung $\Delta_0 \neq 0$ ausdrückt, daß längs l die Tangenten an l nicht mit den Erzeugenden des Kegels identisch sind. Wegen der Auflösbarkeit der Gleichungen (86) nach $p_0(t)$ und $q_0(t)$ läßt sich in jedem Punkt von l eine Ebene konstruieren, welche die Tangente an l enthält und den T -Kegel berührt. Wir nehmen an, daß sich diese Ebenen längs l stetig ändern (die Funktionen $p_0(t)$ und $q_0(t)$ müssen dann stetige Ableitungen besitzen).

Ergänzen wir auf diese Weise die Kurve l zu einem Streifen und benutzen die Werte dieses Streifens für die Lösungen (73) als Anfangswerte, so erhalten wir eine Integralfäche. Sind die Tangenten von l Erzeugende des T -Kegels, so erhalten wir die Werte p_0 und q_0 längs des T -Kegels, wenn wir die Tangentialebene des Kegels längs der entsprechenden Erzeugenden konstruieren. Der auf diese Weise entstandene Streifen ist möglicherweise ein charakteristischer Streifen. In diesem Fall hat das Problem unendlich viele Lösungen. Es genügt, die Kurve l mit einer anderen Kurve l_1 zum Schnitt zu bringen, deren Tangente im Schnittpunkt in derselben Tangentialebene des T -Kegels liegt wie die Tangente an l , aber nicht mit dieser übereinstimmt. Außerdem sollen längs l_1 die Tangenten nicht mit den Erzeugenden der T -Kegel übereinstimmen. Die Integralfäche, die durch l_1 hindurchgeht, enthält die Kurve l . Es kann schließlich auch vorkommen, daß die Tangenten der Kurve l mit den Erzeugenden der T -Kegel übereinstimmen, daß aber diese Kurve nicht charakteristisch ist, d. h., daß man aus dieser Kurve keinen charakteristischen Streifen erhält, wenn man sie nach dem obigen Verfahren zu einem Streifen ergänzt. Durch jeden Punkt von l können wir in diesem Fall trotzdem einen charakteristischen Streifen legen, der die Anfangswerte x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 hat. Bilden diese charakteristischen Streifen eine Integralfäche mit einer expliziten Darstellung $u = u(x, y)$, so ist die Kurve l eine singuläre Linie der konstruierten Integralfäche. Bei diesen Überlegungen nehmen wir an, daß es in jedem Punkt einen wohlbestimmten T -Kegel gibt.

Wir erwähnen noch einen wichtigen Typ von Integralfächen der Differentialgleichung (59). Wir legen einen Punkt (x_0, y_0, u_0) fest. Dann ist die zweite Beziehung (80) für beliebige Werte p_0 und q_0 erfüllt, da alle Ableitungen, die in dieser Beziehung vorkommen, jetzt identisch verschwinden. Wir brauchen also lediglich die erste Beziehung (80) zu berücksichtigen, die uns im allgemeinen unendlich viele Werte p_0 und q_0 liefert. Dies sind gerade diejenigen Werte p_0 und q_0 , welche die möglichen Lagen der Tangentialebene in (x_0, y_0, u_0) bestimmen. Wie oben können wir p_0 und q_0 als Funktionen eines Parameters t annehmen, $p_0 = p_0(t)$, $q_0 = q_0(t)$. Setzen wir die festen Werte x_0, y_0, u_0 und die angegebenen Ausdrücke $p_0(t)$ und $q_0(t)$ in (73) ein, so erhalten wir eine Integralfäche der Differentialgleichung (59), welche die Gestalt einer Kegelfläche mit der Spitze im Punkt (x_0, y_0, u_0) hat. Diese Fläche hat im allgemeinen krummlinige Erzeugende, die in der Spitze (x_0, y_0, u_0)

die Erzeugenden des T -Kegels berühren. Man nennt diese Fläche gewöhnlich *Integralkonoid der Differentialgleichung* (59) mit der Spitze (x_0, y_0, u_0) . Man kann zeigen, daß die Lösung des Cauchyschen Problems auf die folgende Konstruktion zurückgeführt werden kann. Wenn man die Integralkonoide konstruiert, deren Spitzen auf der vorgegebenen Kurve l liegen, erhält man in ihrer Enveloppe gerade die Lösung des Problems. Alle diese Überlegungen erfordern natürlich strenge analytische Beweise, auf die wir aber nicht eingehen wollen.

12. Nichtlineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen. Jetzt betrachten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (97)$$

Die Cauchysche Methode zur Integration dieser Differentialgleichung läßt sich ebenso entwickeln wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Wir geben deshalb nur die Resultate an. Das zur Differentialgleichung (97) gehörige charakteristische System hat die Gestalt

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1 P_1 + \dots + p_n P_n} = \frac{dp_1}{-(X_1 + U p_1)} = \dots = \frac{dp_n}{-(X_n + U p_n)} = ds \quad (98)$$

$$(X_k = F_{x_k}, P_k = F_{p_k}, U = F_u).$$

Formal kommt man folgendermaßen zu diesem System. Es sei die Lösung $u = u(x_1, \dots, x_n)$ der Differentialgleichung (97) mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung gegeben. Dann sind die Ausdrücke X_k , P_k und U nach dem Einsetzen von $u = u(x_1, \dots, x_n)$ und $p_k = u_{x_k}(x_1, \dots, x_n)$ Funktionen von $x_1, \dots, x_n$.

Wir schreiben unser Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit einer Hilfsveränderlichen s in der Form

$$\frac{dx_k}{ds} = P_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Setzen wir die Lösung in die Gleichung $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ein, so erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^n p_i P_i \quad \text{und ebenso} \quad \frac{dp_k}{ds} = \sum_{i=1}^n u_{x_k x_i} P_i.$$

Durch Differentiation von (97) nach x_k ergibt sich

$$X_k + U p_k + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = X_k + U p_k + \sum_{i=1}^n u_{x_k x_i} P_i,$$

woraus

$$\frac{dp_k}{ds} = -(X_k + U p_k)$$

folgt. Somit haben wir alle Differentialgleichungen des Systems (98) erhalten. Nun gehen wir genauer auf das System (98) ein, das wir als ein Differentialgleichungssystem für die Funktionen x_k , u , p_k der einen Hilfsveränderlichen s auffassen.

Es besitzt offenbar das Integral

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = C.$$

Wir setzen voraus, daß wir unser System integrieren können; die Lösung sei

$$x_k = x_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \quad u = u(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \quad p_k = p_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \quad (99)$$

wobei $x_k^{(0)}$, $u^{(0)}$, $p_k^{(0)}$ die Anfangswerte der Funktionen für $s=0$ sind. Wir nehmen an, daß diese Anfangswerte Funktionen von $n-1$ Parametern sind:

$$x_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad u^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad p_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}). \quad (100)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (99) ein, so werden die Veränderlichen x_k und u durch n Parameter ausgedrückt. Wir betrachten die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(s, t_1, \dots, t_{n-1})},$$

die sich mit Rücksicht auf die ersten Differentialgleichungen unseres Systems auch in der Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (101)$$

schreiben läßt. Ist diese Determinante in der Umgebung des Anfangswertes $s=0$ von 0 verschieden, so liefern uns die Gleichungen (100) eine Fläche, die eine explizite Darstellung $u=u(x_1, \dots, x_n)$ besitzt. Diese Fläche ist genau dann eine Integralfäche der Differentialgleichung (97), wenn die Funktionen (100) den n Beziehungen

$$F(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) = 0, \quad (102)$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j} = \sum_{s=1}^n p_s^{(0)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial t_j} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (103)$$

genügen.

Das Cauchysche Problem besteht in der Ermittlung einer Integralfäche der Differentialgleichung (97), die eine vorgegebene $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad u^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1})$$

enthält. Wir nehmen an, daß diese Mannigfaltigkeit zur Mannigfaltigkeit (100) derart ergänzt werden kann, daß die Beziehungen (102) und (103) erfüllt sind. Ist hierbei die Determinante (101) längs dieser Mannigfaltigkeit von 0 verschieden, so führt die angegebene Methode zur Lösung des Cauchyschen Problems.

Ebenso wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher können wir ein Integralkonoid der Differentialgleichung (97) konstruieren, wenn wir einen beliebigen Punkt $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$ festhalten und die Größen $p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}$ als Funktionen von $n-1$ Parametern so wählen, daß die Beziehung (102) erfüllt ist.

Ist die Differentialgleichung (97) nach p_1 auflösbar,

$$p_1 = f(x_1, \dots, x_n, u, p_2, \dots, p_n), \quad (104)$$

und hat die Anfangsbedingung die Gestalt

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, \dots, x_n), \quad (105)$$

so hat das Cauchysche Problem eine eindeutig bestimmte Lösung.

Wir führen hier nicht alle notwendigen Voraussetzungen über die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von f und ψ an, da Analogie zum Fall $n=2$ vorliegt. Für die Diffe-

rentialgleichung (104) mit den Anfangsbedingungen (105) kann man unter bestimmten Voraussetzungen in bezug auf f und ψ auch den Bereich bestimmen, in dem die Integralfläche existiert. Wir setzen voraus, daß die Funktion f stetig ist und für $|x_1 - x_1^{(0)}| \leq \alpha$ bei beliebigen Werten von x_k, p_k und u die stetigen Ableitungen f_{x_k}, f_{p_k} und f_u ($k=2, \dots, n$) besitzt. Außerdem setzen wir voraus, daß diese Ableitungen wiederum stetige Ableitungen nach x_1, x_k, u und p_k besitzen und daß die Ableitungen $f_{x_1}, f_{x_k}, f_u, f_{p_k}, f_{x_k x_l}, f_{x_k u}, f_{x_k p_l}, f_{u u}, f_{u p_k}, f_{p_k p_l}$ dem absoluten Betrag nach für die angegebenen Werte der Argumente durch eine Zahl A beschränkt sind. Wir setzen schließlich noch voraus, daß die Funktion $\psi(x_2, \dots, x_n)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und die Ungleichung

$$|\psi_{x_k}| + \sum_{i=2}^n |\psi_{x_k x_i}| \leq B \quad (k=2, \dots, n)$$

erfüllt ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert in einem Bereich $|x_1 - x_1^{(0)}| \leq \alpha$ für beliebige x_k ($k=2, \dots, n$) eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (104) mit der Bedingung (105), wobei $\alpha \leq \alpha$ ist und außerdem die Bedingung

$$\alpha < \frac{1}{A} \lg \left[1 + \frac{\lg 3}{2(n-1)(B+1)} \right]$$

erfüllt sein muß [vgl. E. KAMKE, Math. Z. **49** (1943)].

13. Vollständiges, allgemeines und singuläres Integral. In diesem und dem folgenden Abschnitt behandeln wir eine weitere Methode zur Integration der Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (106)$$

und insbesondere zur Lösung des Cauchyschen Problems. Sie führt bei konkreten Beispielen oftmals leicht zur Lösung. Bei der Herleitung der Cauchyschen Methode haben wir die Bedingungen für ihre Anwendbarkeit sowie die Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Cauchyschen Problems angegeben. Jetzt wollen wir dieses Problem im wesentlichen formal behandeln und dabei weitgehend die Theorie der Enveloppen einer ein- bzw. zweiparametrischen Flächenschar benutzen.

Bei der Anwendung der Cauchyschen Methode zur Integration der Differentialgleichung (106) müssen wir imstande sein, das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = \frac{dp}{-(X + Up)} = \frac{dq}{-(Y + Uq)} \quad (107)$$

vollständig zu integrieren. Wir zeigen jetzt, daß die Integration der Differentialgleichung (106) nur die Kenntnis einer Lösung dieser Differentialgleichung erfordert, die von zwei willkürlichen Konstanten abhängt. Angenommen, wir hätten eine solche Lösung

$$u = \varphi(x, y, a, b) \quad (108)$$

mit den willkürlichen Konstanten a und b . Für die partiellen Ableitungen p und q erhält man

$$p = \varphi_x(x, y, a, b), \quad q = \varphi_y(x, y, a, b). \quad (109)$$

Folglich gilt die Beziehung

$$F[x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi_x(x, y, a, b), \varphi_y(x, y, a, b)] = 0, \quad (110)$$

die nicht nur in bezug auf x und y , sondern auch in bezug auf a und b identisch erfüllt sein muß. Wir nehmen an, daß sich aus den drei Beziehungen (108) und (109) die Größen a und b eliminieren lassen und daß diese Elimination auf die Differentialgleichung (106) führt. In diesem Fall heißt die Lösung (108) der Differentialgleichung (106) *vollständiges Integral* dieser Differentialgleichung. Aus einem vollständigen Integral einer Differentialgleichung kann man leicht weitere Lösungen gewinnen. Wir setzen dazu in der Lösung (108) für die Konstante b eine beliebige Funktion $b = \omega(a)$ der Konstanten a ein. Dadurch gelangen wir zu einer Schar von Integralfächen, die von einem Parameter a abhängt:

$$u = \varphi[x, y, a, \omega(a)] . \quad (111)$$

Die Enveloppe dieser Schar, die man durch Elimination von a aus der Gleichung (111) und der Gleichung

$$\varphi_a[x, y, a, \omega(a)] + \varphi_b[x, y, a, \omega(a)] \omega'(a) = 0 \quad (112)$$

erhält, hat längs der Berührungskurve mit einer jeden eingehüllten Fläche dieselben Werte p und q wie diese Fläche; deshalb ist die Enveloppe auch eine Integralfäche der Differentialgleichung (106). Die Gesamtheit aller solcher Integralfächen bei beliebiger Wahl der differenzierbaren Funktion $\omega(a)$ liefert das *allgemeine Integral* der Differentialgleichung (106). Dieses Integral enthält offenbar eine willkürliche Funktion $\omega(a)$. Wir können weiterhin die Enveloppe der von zwei Parametern a und b abhängigen Integralfächen (108) konstruieren. Dies führt zur Elimination von a und b aus der Gleichung (108) und den Gleichungen

$$\varphi_a(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi_b(x, y, a, b) = 0 . \quad (113)$$

Die hieraus hervorgehende Lösung enthält keine willkürlichen Elemente mehr und wird gewöhnlich *singuläres Integral* der Differentialgleichung (106) genannt. Wir setzen hierbei natürlich voraus, daß alle durchgeführten Eliminationen möglich sind und auf Funktionen mit stetigen Ableitungen führen.

Statt durch geometrische Überlegungen können wir das allgemeine und das singuläre Integral auch durch die Methode der Variation der willkürlichen Konstanten erhalten. Wir machen für die Lösung der Differentialgleichung (106) einen Ansatz der Gestalt (108) und fassen dabei a und b als gesuchte Funktionen von x und y auf. Die partiellen Ableitungen der Funktion u werden dann nicht mehr durch (109) ausgedrückt, sondern durch

$$p = \varphi_x + \varphi_a a_x + \varphi_b b_x, \quad q = \varphi_y + \varphi_a a_y + \varphi_b b_y .$$

Unterwerfen wir die gesuchten Funktionen a und b den beiden Bedingungen

$$\varphi_a a_x + \varphi_b b_x = 0, \quad \varphi_a a_y + \varphi_b b_y = 0, \quad (114)$$

so bleiben die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen die gleichen wie in (109), und die Funktion (108) liefert wie früher eine Integralfäche. Es bleiben noch die Gleichungen (114) zu untersuchen. Sie haben offenbar die Lösungen $a = \text{const}$ und $b = \text{const}$, was wiederum auf ein vollständiges Integral führt. Eine weitere einfache Lösung erhält man, wenn a und b die Beziehungen $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$ erfüllen. Es ergibt sich das singuläre Integral. Ist wenigstens eine dieser beiden Beziehungen nicht erfüllt, so muß die Determinante des in bezug auf φ_a und φ_b homogenen Gleichungssystems (114) verschwinden:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \equiv 0 .$$

Wir nehmen hierbei an, daß a und b nicht beide zugleich konstant sind. Dann bedeutet das Verschwinden der Funktionaldeterminante, daß zwischen a und b eine funktionale Beziehung besteht [III/1, 18]. Wir setzen voraus, daß diese Beziehung die Gestalt $b = \omega(a)$ hat. Dann führen die Gleichungen (114) zu einer einzigen, die sich in der Gestalt

$$\varphi_a + \varphi_b \omega'(a) = 0$$

schreiben läßt, und wir erhalten das allgemeine Integral. Man kann zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die angegebenen Lösungen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung (116) darstellen. Dies läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß wir das Cauchysche Problem lösen können, wenn wir das vollständige Integral kennen.

14. Das vollständige Integral und das Cauchysche Problem. Wir zeigen jetzt, wie man aus einem vollständigen Integral die Lösung des Cauchyschen Problems erhält. Gesucht sei die Integralfäche, die durch die Kurve

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t) \quad (115)$$

hindurchgeht.

Wir haben also im allgemeinen Integral, das durch die Beziehungen (111) und (112) bestimmt ist, eine solche Funktion $b = \omega(a)$ zu ermitteln, daß die erhaltene Integralfäche durch die Kurve (115) hindurchgeht. Zunächst beweisen wir eine Eigenschaft der Enveloppe einer Flächenschar. Es sei eine einparametrische Flächenschar

$$\psi(x, y, u, a) = 0 \quad (116)$$

gegeben. Wir setzen voraus, daß durch jeden Punkt M der Kurve (115) eine Fläche der Schar (116) hindurchgeht, deren Tangentialebene im Punkt M die Tangente der Kurve (115) im Punkt M enthält. Wir zeigen, daß dann die Enveloppe der Schar (116) die Kurve (115) enthält. Nach Voraussetzung gilt nämlich

$$\psi[x(t), y(t), u(t), a] = 0, \quad (117)$$

wobei verschiedenen Punkten M der Kurve (115) verschiedene Werte der Konstante a , d. h. verschiedene Flächen der Schar (116), entsprechen. Differenzieren wir diese Identität nach t , so erhalten wir

$$\psi_x x_t + \psi_y y_t + \psi_u u_t + \psi_a a_t = 0.$$

Andererseits führt die Tatsache, daß die Tangentialebenen einer jeden Fläche der Schar (116) die entsprechenden Tangenten der Kurve (115) enthalten, zu der Identität

$$\psi_x x_t + \psi_y y_t + \psi_u u_t = 0. \quad (118)$$

Aus den letzten beiden Identitäten ergibt sich $\psi_a a_t = 0$, wegen $a_t \neq 0$ gilt also $\psi_a = 0$. Somit erfüllen die Funktionen (115) die Gleichungen $\psi = 0$ und $\psi_a = 0$ identisch in bezug auf t , d. h., die Enveloppe der Schar (116) enthält tatsächlich die Kurve (115).

Wir setzen nun voraus, daß wir ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (106) kennen, und schreiben es in der impliziten Form

$$\varphi(x, y, u, a, b) = 0. \quad (119)$$

Wir müssen die Funktion $b = \omega(a)$ so bestimmen, daß die Beziehungen (117) und (118) erfüllt sind. Die linke Seite der Gleichung (118) ist die Ableitung der linken Seite von (117) nach t . Bezeichnen wir mit $\Psi(t, a, b)$ die linke Seite der Gleichung (119) nach dem Einsetzen der Funktionen (115), so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\Psi(t, a, b) = 0, \quad \Psi_t(t, a, b) = 0. \quad (120)$$

Eliminieren wir t aus diesen Gleichungen, so finden wir eine Beziehung zwischen a und b , d. h. die gesuchte Funktion $b = \omega(a)$. Somit muß man zur Lösung des Cauchy'schen Problems mit Hilfe des vollständigen Integrals die Funktionen (115) in den Ausdruck für das vollständige Integral einsetzen, die erhaltene Gleichung nach t differenzieren und aus diesen beiden Gleichungen t eliminieren. Dies führt zu einer Beziehung zwischen den Konstanten a und b . Die zu dieser Beziehung gehörige allgemeine Integralfäche geht gerade durch die Kurve (115).

Man kann auch anders vorgehen. Drücken wir mit Hilfe der Gleichungen (120) die Konstanten a und b durch t aus und setzen sie in (119) ein, so erhalten wir eine Flächenschar, die von einem Parameter t abhängt. In der Enveloppe dieser Schar haben wir dann die gesuchte Integralfäche, die durch die Kurve (115) hindurchgeht.

Wir weisen noch auf einen Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Integral und den charakteristischen Streifen hin, die sich durch die Integration des Differentialgleichungssystems (107) ergeben. Die Enveloppe der Schar (111) berühre eine Fläche der Schar längs einer Kurve l_a . Konstruieren wir längs dieser Kurve die Tangentialebene, die der Enveloppe und dieser Fläche gemeinsam ist, so erhalten wir einen Streifen. Dieser Streifen gehört zwei Integralfächen an, der Enveloppe und der Fläche der Schar; folglich muß er ein charakteristischer Streifen sein. Somit wird durch

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, b), & \varphi_a(x, y, a, b) + \varphi_b(x, y, a, b) \omega'(a) &= 0, \\ p &= \varphi_x(x, y, a, b), & q &= \varphi_y(x, y, a, b) \end{aligned} \quad (121)$$

für jeden festen Wert von a und bei beliebiger Wahl von $b = \omega(a)$ die Lösung des Differentialgleichungssystems (107) bestimmt, die der Bedingung (106) genügt.

Wir können annehmen, daß durch (121) vier der Größen x, y, u, p, q als Funktionen der fünften Größe und von drei willkürlichen Konstanten a, b und $c = \omega'(a)$ bestimmt werden. Das allgemeine Integral des Differentialgleichungssystems (107) enthält vier willkürliche Konstanten. Wegen der Beziehung (106) kann aber die Schar aller charakteristischer Streifen nur von drei willkürlichen Konstanten abhängen, was wir auch aus (121) erhalten haben. In einem der folgenden Abschnitte werden wir für den Fall beliebig vieler unabhängiger Veränderlicher durch unmittelbare Rechnung verifizieren, daß die Gleichungen (121) tatsächlich eine Lösung des Differentialgleichungssystems (107) liefern.

Schließlich wollen wir noch die Möglichkeit untersuchen, das singuläre Integral unmittelbar durch die Differentialgleichung ohne Zuhilfenahme eines vollständigen Integrals zu bestimmen. Differenzieren wir die Identität (110) nach a und b , so erhalten wir

$$F_u \varphi_a + F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} = 0, \quad F_u \varphi_b + F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} = 0.$$

Wenn wir die Definition (113) des singulären Integrals berücksichtigen, sehen wir, daß auf einer singulären Integralfäche die beiden Relationen

$$F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} = 0, \quad F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} = 0$$

erfüllt sind. Wir nehmen an, die Determinante dieses in bezug auf F_p und F_q homogenen Gleichungssystems sei auf der singulären Integralfäche von 0 verschieden, was im Grunde mit der Voraussetzung gleichwertig ist, daß sich die Gleichungen (109) nach a und b auflösen lassen. Dann folgt aus dem Gleichungssystem:

$$F_p = F_q = 0. \quad (122)$$

Somit kann man das singuläre Integral durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad F_p(x, y, u, p, q) = 0, \quad F_q(x, y, u, p, q) = 0 \quad (123)$$

erhalten. Die Gleichungen (122) zeigen, daß man den Satz über implizite Funktionen nicht auf die Gleichung (106) in bezug auf die Veränderlichen p oder q anwenden kann. Folglich ist es unmöglich, das singuläre Integral wie in [9] als Lösung eines Cauchyschen Problems zu erhalten; denn dort mußten wir annehmen, daß die Gleichung nach p (oder q) auflösbar ist. Zu diesem Ergebnis können wir auch auf anderem Wege gelangen. Welche Kurve wir auch auf einer singulären Integralfäche wählen, längs dieser Kurve ist wegen (122) die Determinante (96) stets gleich 0. Dies zeigt gerade, daß es für keine Kurve auf der Fläche des singulären Integrals eine eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyschen Problems gibt. Wir betonen nochmals, daß diese Betrachtungen rein formal sind.

15. Beispiele. 1. Die Differentialgleichung

$$u = xp + yq + f(p, q) \quad (124)$$

ist ein Analogon zur Clairautschen Differentialgleichung, die wir früher schon untersucht hatten [II, 11], Ersetzen wir p und q durch a und b , so erhalten wir, wie sich leicht nachprüfen läßt, das vollständige Integral $u = ax + by + f(a, b)$. Die Differentialgleichung $u = xp + yq + pq$ hat das vollständige Integral $u = ax + by + ab$, und nach der oben angegebenen Methode erhalten wir das singuläre Integral $u = -xy$. Wählen wir auf dieser Fläche eine beliebige Kurve

$$x_0 = \varphi(t), \quad y_0 = \psi(t), \quad u_0 = -\varphi(t) \psi(t), \quad (125)$$

so haben die Gleichungen (86),

$$\begin{aligned} \varphi(t) p_0 + \psi(t) q_0 + p_0 q_0 + \varphi(t) \psi(t) &= 0, \\ \varphi'(t) \psi(t) + \psi'(t) \varphi(t) + \varphi'(t) p_0 + \psi'(t) q_0 &= 0, \end{aligned}$$

die Lösungen $p_0 = -\psi(t)$, $q_0 = -\varphi(t)$, und längs der Kurve (125) gilt

$$F_p = q_0 + \varphi(t) \equiv 0, \quad F_q = p_0 + \psi(t) \equiv 0.$$

Für die Differentialgleichung

$$u = xp + yq - \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (124_1)$$

lautet das singuläre Integral

$$u = \frac{1}{2} (x^2 + y^2). \quad (126)$$

Lösen wir die Differentialgleichung (124₁) nach p auf, so erhalten wir

$$F = p - x + \sqrt{x^2 + 2qy - 2u - q^2} = 0,$$

und die partielle Ableitung der linken Seite dieser Gleichung nach u wird längs der Fläche (126) gleich ∞ .

2. Es sei eine Differentialgleichung gegeben, die nur p und q enthält:

$$f(p, q) = 0.$$

Eine solche Differentialgleichung hat offenbar die Lösung $u = ax + cy + b$, wobei die Konstanten a und c die Beziehung $f(a, c) = 0$ erfüllen müssen. Lösen wir sie nach c auf, $c = f_1(a)$, so erhalten wir das vollständige Integral der Differentialgleichung in der Gestalt $u = ax + f_1(a)y + b$. Diese Gleichung liefert eine Ebenenschar. Das allgemeine Integral ist die Enveloppe einer einparametrischen Ebenenschar, also eine abwickelbare Fläche [II, 153].

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$p^2 + q^2 = k^2. \quad (127)$$

Da sich der Richtungskosinus der Normalen zur gesuchten Fläche bezüglich der u -Achse durch

$$\cos(n, u) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

ausdrücken läßt, besagt die Differentialgleichung (127) offenbar geometrisch, daß die Normalen der gesuchten Fläche mit der u -Achse einen konstanten Winkel bilden. Ein vollständiges Integral der Differentialgleichung ist die Ebenenschar

$$u = ax + \sqrt{k^2 - a^2}y + b.$$

Das Differentialgleichungssystem (68) hat die Form

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = 2q, \quad \frac{du}{ds} = 2(p^2 + q^2), \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0,$$

und seine mit Hilfe von Anfangswerten ausgedrückte Lösung lautet

$$x = 2p_0s + x_0, \quad y = 2q_0s + y_0, \quad u = 2(p_0^2 + q_0^2)s + u_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0. \quad (128)$$

Die charakteristischen Streifen erhalten wir, wenn wir die Größen p_0 und q_0 der Bedingung $p_0^2 + q_0^2 = k^2$ unterwerfen. Es ergeben sich Geraden, längs deren die Größen p und q einen konstanten Wert haben.

Nun soll eine Integralfläche durch den Kreis

$$x_0 = \cos t, \quad y_0 = 0, \quad u_0 = \sin t$$

gelegt werden. Die Differentialgleichungen (86) lauten dann $p_0^2 + q_0^2 = k^2$, $\cos t = -p_0 \sin t$, woraus die Beziehungen

$$p_0 = -\cot t, \quad q_0 = \sqrt{k^2 - \cot^2 t}$$

hervorgehen. Setzen wir diese Ausdrücke in die ersten drei Gleichungen (128) ein, so erhalten wir eine Parameterdarstellung der gesuchten Fläche mit Hilfe der Parameter s und t :

$$x = -2s \cot t + \cos t, \quad y = 2s \sqrt{k^2 - \cot^2 t}, \quad u = 2k^2s + \sin t.$$

3. Allgemeiner ist folgender Typ von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$f_1(x, p) = f_2(y, q).$$

Zur Ermittlung eines vollständigen Integrals setzen wir beide Seiten der Differentialgleichung gleich ein und derselben Konstanten a , also $f_1(x, p) = a$ und $f_2(y, q) = a$. Lösen wir diese Gleichungen nach p und q auf, so erhalten wir $p = \varphi_1(x, a)$ und $q = \varphi_2(y, a)$, und ein vollständiges Integral wird

$$u = \int \varphi_1(x, a) dx + \int \varphi_2(y, a) dy + b,$$

wobei b eine zweite willkürliche Konstante bezeichnet. Durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Differentialgleichung

$$pq - xy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{x} = \frac{y}{q} \quad (129)$$

erhalten wir

$$u = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{2a} y^2 + b. \quad (130)$$

Gesucht sei die Integralfäche durch die Kurve

$$x = t, \quad y = \frac{1}{t}, \quad u = 1.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (130) ein und differenzieren nach t , so erhalten wir

$$1 = \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{2at^2} + b, \quad at - \frac{1}{at^3} = 0.$$

Die Elimination von t liefert $b=0$, und wir erhalten die einparametrische Schar von Integralfächen

$$u = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{2a} y^2.$$

Die Enveloppe dieser Schar ist die gesuchte Integralfäche $u = xy$.

Wenn wir als Anfangsbedingung die Kurve

$$x = t, \quad y = t, \quad u = t^2 \quad (131)$$

nehmen, so erhalten wir durch Anwendung unseres Verfahrens die Gleichungen

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} - 1\right)t^2 + b = 0, \quad 2\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} - 1\right)t = 0,$$

aus denen $a=1$ und $b=0$ folgt. Setzen wir diese Werte in das vollständige Integral ein, so erhalten wir $2u = x^2 + y^2$, und diese Fläche geht, ebenso wie $u = xy$, durch die Kurve (131). Es ist leicht zu sehen, daß wir die Kurve (131) zu einem charakteristischen Streifen ergänzen können, indem wir $p=t$ und $q=t$ setzen. In der Tat erfüllen die Funktionen $x=t$, $y=t$, $u=t^2$, $p=t$, $q=t$ die Differentialgleichung (129) und das Differentialgleichungssystem (107).

4. Enthält eine Differentialgleichung die unabhängigen Veränderlichen nicht,

$$F(u, p, q) = 0,$$

so kann man ein vollständiges Integral aufstellen, wenn man für die Lösung den Ansatz

$$u = \varphi(x + ay) \quad (132)$$

macht, wobei a eine willkürliche Konstante ist. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$pq - u = 0. \quad (133)$$

Führen wir die Transformation (132) durch und setzen $\xi = x + ay$, so erhalten wir $a[\varphi'(\xi)]^2 - \varphi(\xi) = 0$, und durch Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ergibt sich das vollständige Integral

$$u = \frac{(x + ay + b)^2}{4a}$$

der Differentialgleichung (133). Das Differentialgleichungssystem (68) lautet für die Differentialgleichung (133)

$$\frac{dx}{ds} = q, \quad \frac{dy}{ds} = p, \quad \frac{du}{ds} = 2pq, \quad \frac{dp}{ds} = p, \quad \frac{dq}{ds} = q,$$

und seine Integration ergibt

$$\begin{aligned} x &= q_0 e^s + (x_0 - q_0), & y &= p_0 e^s + (y_0 - p_0), & u &= p_0 q_0 e^{2s} + (u_0 - p_0 q_0), \\ p &= p_0 e^s, & q &= q_0 e^s. \end{aligned} \quad (131_1)$$

Gesucht ist die Integralfläche, die durch die Gerade

$$x_0 = t, \quad y_0 = 1, \quad u_0 = t$$

geht. Zur Bestimmung von p_0 und q_0 haben wir die Gleichungen $p_0 q_0 = t$, $p_0 = 1$, aus denen $p_0 = 1$ und $q_0 = t$ folgt. Setzen wir diese Werte in die ersten drei Gleichungen (133₁) ein und substituieren wir $e^s = v$, so erhalten wir mit Hilfe der Parameter v und t die Parameterdarstellung

$$x = tv, \quad y = v, \quad u = tv^2$$

der gesuchten Fläche, die auf die explizite Form $u = xy$ der Flächengleichung führt.

16. Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen. Unter einem *vollständigen Integral* der Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (134)$$

versteht man eine Lösung

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \quad (135)$$

dieser Gleichung, die n willkürliche Konstanten a_s enthält derart, daß die Elimination der a_s aus den Gleichungen

$$p_k = \varphi_{x_k}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (135_1)$$

und der Gleichung (135) auf die Differentialgleichung (134) führt. Wir nehmen an, die a_k seien Funktionen von $n-1$ Parametern,

$$a_k = a_k(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (136)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (135) ein und eliminieren die $n-1$ Parameter aus den n Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \\ \varphi_{t_j}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) &= 0 \quad (j = 1, \dots, n-1), \end{aligned} \quad (137)$$

so erhalten wir ein allgemeines Integral der Differentialgleichung (134), das von der Wahl der n Funktionen (136) abhängt. Wir gehen nun zur Lösung des Cauchyschen Problems über. Es sei die Integralfläche der Differentialgleichung (134) gesucht, die eine vorgegebene $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$u = u(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad x_k = x_k(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (138)$$

enthält. Das Problem läßt sich in derselben Weise lösen wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Setzen wir den Ausdruck (138) in (135) ein, so gelangen wir zu einer Gleichung der Gestalt

$$\psi(t_1, \dots, t_{n-1}, a_1, \dots, a_n) = 0. \quad (139)$$

Fügen wir zu dieser Gleichung noch die $n-1$ Gleichungen

$$\psi_{t_1} = 0, \psi_{t_2} = 0, \dots, \psi_{t_{n-1}} = 0 \quad (140)$$

hinzu, die wir durch Differentiation von (139) nach $t_1, \dots, t_{n-1}$ erhalten, so haben wir n Gleichungen, aus denen wir die a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) als Funktionen der Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$, d. h. die Funktionen (136), bestimmen können. Setzen wir die erhaltenen Funktionen in die Gleichungen (137) ein und eliminieren daraus die Größen $t_1, \dots, t_{n-1}$, so kommen wir zu der Integralfläche, welche die Mannigfaltigkeit (138) enthält. Wir bemerken noch, daß in (139) die Zahl der unabhängigen

Parameter kleiner als $n-1$ sein kann. Ist dies der Fall, so muß man eben nach den unabhängigen Parametern differenzieren.

Halten wir die Parameter t_j fest, so bestimmen die n Gleichungen (137) mit den $n+1$ Veränderlichen $u, x_1, \dots, x_n$ eine Kurve im $(n+1)$ -dimensionalen Raum. Fügen wir noch die Gleichungen (135₁) hinzu, so ergänzen wir die Kurve zu einem Streifen erster Ordnung. Dieser Streifen gehört zwei Integralflächen an, der Enveloppe der Flächen, die man durch Elimination der Parameter t_j aus (137) erhält, und einer der eingehüllten Flächen. Deshalb muß dieser Streifen charakteristisch sein, d. h., er muß dem Cauchyschen Differentialgleichungssystem genügen. Dies gibt uns, wenn wir ein vollständiges Integral (135) kennen, die Möglichkeit, eine Lösung des Differentialgleichungssystems (98) zu konstruieren, die von $2n-1$ willkürlichen Konstanten abhängt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß a_n eine Funktion der Größen $a_1, \dots, a_{n-1}$ ist, welche die Rollen der Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$ spielen. Die Gleichungen (137) und (135₁) nehmen die Gestalt

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \\ \varphi_{a_j} + \varphi_{a_n} b_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \\ p_k &= \varphi_{x_k}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (141)$$

an, wenn wir mit b_j die Ableitung von a_n nach a_j bezeichnen. Diese Gleichungen (141) bestimmen den oben erwähnten Streifen erster Ordnung, wobei wir nicht nur die Größen $a_1, \dots, a_n$, sondern auch die Größen $b_1, \dots, b_{n-1}$ als willkürlich annehmen können, da die Funktion $a_n(a_1, \dots, a_{n-1})$ willkürlich gewählt werden kann. Jetzt wollen wir formal beweisen, daß der durch (141) bestimmte Streifen dem Differentialgleichungssystem (98) genügt.

Setzen wir in die Differentialgleichung (134) an Stelle der Größen u und p_k die Ausdrücke (141) ein, so müssen wir eine Identität in bezug auf die x_k und a_k ($k=1, \dots, n$) erhalten. Differenzieren wir diese Identität nach a_s , so finden wir

$$U\varphi_{a_j} + \sum_{k=1}^n P_k \varphi_{x_k} a_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad U\varphi_{a_n} + \sum_{k=1}^n P_k \varphi_{x_k} a_n = 0.$$

Multiplizieren wir die letzte Identität mit b_j , addieren sie zu den vorhergehenden Identitäten und benutzen (141), so erhalten wir die $n-1$ Identitäten

$$\sum_{k=1}^n P_k (\varphi_{a_j} x_k + \varphi_{a_n} x_k b_j) = 0. \quad (142)$$

Bilden wir andererseits von der linken Seite der zweiten Gleichung (141) das totale Differential, so finden wir die $n-1$ Identitäten

$$\sum_{k=1}^n (\varphi_{a_j} x_k + \varphi_{a_n} x_k b_j) dx_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n-1). \quad (143)$$

Nehmen wir an, wenigstens eine der $(n-1)$ -reihigen Determinanten aus den Koeffizienten der Systeme (142) oder (143) sei von 0 verschieden, so können wir schließen, daß die dx_k zu den P_k proportional sein müssen, daß also die Beziehungen

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}$$

gelten. Weiterhin folgt aus (141) die Relation $du = \sum_{k=1}^n p_k dx_k$, und wir kommen zu

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1 P_1 + \dots + p_n P_n}. \quad (144)$$

Wir kehren nochmals zu der Identität zurück, die man erhält, wenn man in die Gleichung (134) für u und p_k die Ausdrücke aus (141) einsetzt, und differenzieren sie nach x_k :

$$X_k + U \varphi_{x_k} + \sum_{i=1}^n P_i \varphi_{x_i x_k} = 0.$$

Multiplizieren wir diese Identität mit dx_k und setzen [nach (144)] $P_i dx_k = P_k dx_i$, so erhalten wir

$$(X_k + U p_k) dx_k + P_k \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i x_k} dx_i = 0.$$

Wegen $\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i x_k} dx_i = dp_k$ folgt hieraus

$$(X_k + U p_k) dx_k + P_k dp_k = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx_k}{P_k} = \frac{dp_k}{-(X_k + U p_k)},$$

und wir erhalten schließlich das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1 P_1 + \dots + p_n P_n} = \frac{dp_1}{-(X_1 + U p_1)} = \dots = \frac{dp_n}{-(X_n + U p_n)}. \quad (145)$$

17. Der Satz von Jacobi. Jetzt betrachten wir den Spezialfall der Differentialgleichung (134), daß sie die gesuchte Funktion u nicht enthält und nach einer der Ableitungen aufgelöst werden kann. Um die Formeln in symmetrischer Form schreiben zu können, bezeichnen wir die unabhängigen Veränderlichen mit $t, x_1, \dots, x_n$ und nehmen an, daß die Differentialgleichung nach $p_0 = u_t$ aufgelöst ist, d. h., daß sie die Gestalt

$$p_0 + H(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (146)$$

hat. Das zu dieser Differentialgleichung gehörige Differentialgleichungssystem (145) lautet

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{H_{p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{H_{p_n}} = \frac{dp_1}{-H_{x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{-H_{x_n}} = \frac{du}{p_0 + p_1 H_{p_1} + \dots + p_n H_{p_n}}. \quad (147)$$

Alle in (147) vorkommenden Quotienten mit Ausnahme des letzten enthalten die Größen p_0 und u nicht, und wir erhalten das sogenannte kanonische Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{dt} = H_{p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -H_{x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

wobei wir die x_k und p_k als Funktionen von t annehmen. Gelingt es uns, dieses System zu integrieren, so finden wir p_0 aus (146) und können u mit Hilfe von Quadraturen aus der Gleichung $du = (p_0 + p_1 H_{p_1} + \dots + p_n H_{p_n}) dt$ bestimmen.

Da die Differentialgleichung (146) die Größe u nicht enthält, können wir zu jeder Lösung dieser Differentialgleichung eine willkürliche Konstante addieren. Wir nehmen an, daß wir ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (146) kennen, welches $n+1$ willkürliche Konstante enthalten muß, davon eine additiv:

$$u = \psi(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) - a_0.$$

Wir wenden jetzt die Gleichungen (141) an; dabei spielt die Rolle von a_n hier die Konstante a_0 . Da jetzt $\varphi_{a_0} = -1$ ist, erhalten wir ein allgemeines Integral des

kanonischen Differentialgleichungssystems in der Gestalt

$$\varphi a_k = b_k, \quad p_k = \varphi x_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dies ist der bekannte Jacobische Satz, den wir bereits in [IV/1, 91] angegeben haben.

Bemerkung. Enthält die Differentialgleichung (134), wie soeben vorausgesetzt, zwar die gesuchte Funktion u nicht, ist sie aber nicht nach einem der p_k auflösbar,

$$F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

so lautet das zu dieser Differentialgleichung gehörige System (145)

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{dp_1}{-F_{x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{-F_{x_n}} = \frac{du}{p_1 F_{p_1} + \dots + p_n F_{p_n}} = ds.$$

Wir erhalten also wiederum ein kanonisches System

$$\frac{dx_k}{ds} = F_{p_k}, \quad \frac{dp_k}{ds} = -F_{x_k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

in dem an Stelle der einen unabhängigen Veränderlichen jetzt der Parameter s steht. Läßt sich dieses Differentialgleichungssystem integrieren, so läßt sich u mit Hilfe von Quadraturen ermitteln.

Der Jacobische Satz zeigt, auf welche Weise wir das zugehörige kanonische System integrieren können, wenn wir ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (146) kennen. Die Cauchysche Methode, die wir in [12] dargelegt haben, zeigt, daß wir auch umgekehrt, wenn das Differentialgleichungssystem (147) integriert werden kann, die Lösungen der Differentialgleichung (146) ermitteln können, die beliebige Cauchysche Anfangsbedingungen erfüllen. Benutzen wir diesen Zusammenhang, so können wir leicht zeigen, daß wir insbesondere auch ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (146) konstruieren können.

18. Systeme zweier Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir haben eine Reihe von Beispielen angeführt, in denen ein vollständiges Integral mit Hilfe von elementaren Verfahren ermittelt werden konnte. Es entsteht die Frage, ob es möglich ist, eine allgemeine Methode zur Ermittlung eines vollständigen Integrals einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung aufzustellen. Zur Entwicklung einer solchen Methode ist es notwendig, zunächst das Problem der Auflösung zweier Differentialgleichungen erster Ordnung für eine einzige gesuchte Funktion

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad \Phi(x, y, u, p, q) = 0$$

zu untersuchen. Wir nehmen an, diese Differentialgleichungen seien nach p und q auflösbar, so daß wir sie in der Gestalt

$$p = f(x, y, u), \quad q = g(x, y, u) \tag{148}$$

schreiben können. Hier und im folgenden (bis [27]) beschränken wir uns auf formale Betrachtungen. Wir nennen das System (148) *vollständig integrierbar*, wenn es eine Lösung besitzt, die von einer willkürlichen Konstante abhängt. Jetzt wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung herleiten, unter der das System vollständig integrierbar ist, und für den Fall, daß sie erfüllt ist, ein Verfahren zur Ermittlung der Lösung angeben. Differenzieren wir die erste Differentialgleichung (148) nach y und die zweite nach x , so erhalten wir offenbar

$$f_y + f_u q = g_x + g_u p$$

oder wegen (148)

$$f_y + f_u g = g_x + g_u f. \quad (149)$$

Ist diese Beziehung zwischen den Veränderlichen x, y, u nicht identisch erfüllt, so bestimmt sie u als Funktion von x und y , und nur diese Funktion, die keine willkürliche Konstante enthält, kommt als Lösung des Differentialgleichungssystems (148) in Frage. Somit ist für die vollständige Integrierbarkeit des Systems (148) notwendig, daß die Beziehung (149) identisch erfüllt ist. Wir zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, und geben gleichzeitig eine Methode zur Ermittlung der Lösungen von (148) an. Wir können die erste Differentialgleichung (148) als Differentialgleichung mit einer einzigen unabhängigen Veränderlichen x auffassen, da y darin nur als Parameter auftritt. Integrieren wir diese Differentialgleichung erster Ordnung, so erhalten wir u als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x , des Parameters y und der willkürlichen Konstanten $C(y)$, die wir als Funktion von y annehmen können:

$$u = \varphi[x, y, C(y)]. \quad (150)$$

Diese Funktion muß auch der zweiten Differentialgleichung (148) genügen, d. h., es muß die Differentialgleichung

$$\varphi_y + \varphi_C \frac{dC}{dy} = g(x, y, u)$$

oder

$$\frac{dC}{dy} = \frac{g(x, y, u) - \varphi_y}{\varphi_C} \quad (151)$$

erfüllt sein, wobei wir auf der rechten Seite u gemäß (150) zu ersetzen haben. Wir zeigen nun, daß die rechte Seite von (151) die Veränderlichen x nicht explizit enthält, wenn die Beziehung (149) identisch erfüllt ist. Denn setzen wir die Ableitung der rechten Seite von (151) nach x gleich 0, so erhalten wir

$$(g_x + g_u \varphi_x - \varphi_{yx}) \varphi_C - \varphi_{Cx}(g - \varphi_y) = 0. \quad (152)$$

Da aber die Funktion (150) der ersten Differentialgleichung (148) genügt, gelten offenbar die Beziehungen

$$\varphi_x = f, \quad \varphi_{yx} = f_y + f_u \varphi_y, \quad \varphi_{Cx} = f_u \varphi_C,$$

mit deren Hilfe sich die Gleichung (152) in der Gestalt

$$(g_x + g_u f - f_y - f_u \varphi_y) \varphi_C - f_u \varphi_C (g - \varphi_y) = 0$$

schreiben läßt. Diese Relation ist offenbar erfüllt, da wir die Beziehung (149) als identisch erfüllt voraussetzen. Somit stellt die Gleichung (151) eine Differentialgleichung erster Ordnung für $C(y)$ dar. Integrieren wir sie, so erhalten wir einen Ausdruck für C als Funktion der Veränderlichen y und einer willkürlichen Konstanten b . *Das System (148) ist also genau dann vollständig integrierbar, wenn die Beziehung (149) identisch erfüllt ist.* Ist diese Bedingung erfüllt, so führt die Integration des Differentialgleichungssystems (148) auf die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, und die allgemeine Lösung von (148) enthält eine willkürliche Konstante.

In unmittelbarem Zusammenhang mit dem soeben gelösten Problem steht das Problem, die totale Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R du = 0 \quad (153)$$

zu integrieren, in der P , Q und R vorgegebene Funktionen von x , y und u sind. Diese Differentialgleichung führt unmittelbar auf das Differentialgleichungssystem (148), wenn wir

$$f = -\frac{P}{R}, \quad g = -\frac{Q}{R}$$

setzen, und die Integrabilitätsbedingung (149) führt auf die Beziehung

$$P(R_y - Q_u) + Q(P_u - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0$$

zwischen den Koeffizienten. Wir haben bereits früher darauf hingewiesen, daß diese Beziehung eine notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit der Differentialgleichung (153) darstellt [II, 79].

19. Die Methode von Lagrange und Charpit. Diese Methode liefert ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion eines vollständigen Integrals einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen:

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (154)$$

Zunächst suchen wir eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\Phi(x, y, u, p, q) = a \quad (155)$$

zu gewinnen, in der a eine willkürliche Konstante bedeutet, für welche die Differentialgleichungen (154) und (155) nach p und q auflösbar sind und das durch die Auflösung erhaltene Differentialgleichungssystem der Gestalt (148) vollständig integrierbar ist. Ist uns dies gelungen, so erhalten wir bei Integration des Differentialgleichungssystems eine weitere willkürliche Konstante b und damit ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (154). Die Integrabilitätsbedingung (149) läßt sich auch in der Gestalt

$$p_y + p_u q = q_x + q_u p \quad (156)$$

schreiben. Alle partiellen Ableitungen, die in dieser Identität vorkommen, müssen wir mit Hilfe der Differentiationsregel für implizite Funktionen berechnen, da durch (154) und (155) die Größen p und q als implizite Funktionen der Veränderlichen x , y , u bestimmt sind. Differenzieren wir die Beziehungen (154) und (155) nach u , so erhalten wir

$$F_u + F_p p_u + F_q q_u = 0, \quad \Phi_u + \Phi_p p_u + \Phi_q q_u = 0,$$

woraus

$$p_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_q \\ \Phi_u & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \Phi_p & \Phi_q \end{vmatrix}}, \quad q_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_u \\ \Phi_p & \Phi_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \Phi_p & \Phi_q \end{vmatrix}}$$

hervorgeht. Entsprechend ergibt sich durch Differentiation nach x und y

$$q_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ \Phi_p & \Phi_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \Phi_p & \Phi_q \end{vmatrix}}, \quad p_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ \Phi_y & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \Phi_p & \Phi_q \end{vmatrix}},$$

die Integrabilitätsbedingung (156) läßt sich somit in

$$-\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ \Phi_y & \Phi_q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_u & F_q \\ \Phi_u & \Phi_q \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ \Phi_p & \Phi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p & F_u \\ \Phi_p & \Phi_u \end{vmatrix} p = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} F_p & F_x + F_u p \\ \Phi_p & \Phi_x + \Phi_u p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y + F_u q \\ \Phi_q & \Phi_y + \Phi_u q \end{vmatrix} = 0 \quad (157)$$

überführen. Rechnen wir die Determinanten aus und benutzen die Bezeichnungen aus [6], so erhalten wir zur Bestimmung der gesuchten Funktion Φ die partielle Differentialgleichung

$$P\Phi_x + Q\Phi_y + (pP + qQ)\Phi_u - (X + Up)\Phi_p - (Y + Uq)\Phi_q = 0. \quad (158)$$

Genaugenommen muß diese Differentialgleichung erfüllt sein, wenn darin p und q durch ihre Ausdrücke aus (154) und (155) ersetzt werden. Wir fordern aber mehr, und zwar, daß sie identisch erfüllt ist. Das zu der linearen homogenen Differentialgleichung (158) gehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist gerade das Cauchysche System (107):

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = \frac{dp}{-(X + Up)} = \frac{dq}{-(Y + Uq)}. \quad (159)$$

Es genügt, ein Integral dieses Systems zu ermitteln, für das die Differentialgleichungen (154) und (155) nach p und q auflösbar sind.

Wir wissen, daß das Differentialgleichungssystem (159) das triviale Integral $F = C$ besitzt. Die Kenntnis dieses Integrals kann die Ermittlung eines weiteren Integrals erleichtern. Hierbei brauchen wir nicht das angegebene Integral zu benutzen, sondern können einfach die Beziehung $F = 0$ nehmen.

Enthält die Differentialgleichung (154) die gesuchte Funktion u nicht,

$$F(x, y, p, q) = 0,$$

so machen wir den Ansatz eines von u unabhängigen Integrals

$$\Phi(x, y, p, q) = a.$$

Die Bedingung (157) lautet dann

$$\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ \Phi_p & \Phi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y \\ \Phi_q & \Phi_y \end{vmatrix} = 0 \quad (160)$$

oder

$$(F_p\Phi_x - F_x\Phi_p) + (F_q\Phi_y - F_y\Phi_q) = 0,$$

was auf die Ermittlung eines Integrals des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dp}{-X} = \frac{dq}{-Y} \quad (161)$$

hinausläuft.

Der auf der linken Seite von (160) stehende Ausdruck wird gewöhnlich die *Poissonsche Klammer* der Funktionen F und Φ genannt und mit (F, Φ) bezeichnet, während der auf der linken Seite von (157) stehende Ausdruck die *Mayersche Klammer*¹⁾ der Funktionen F und Φ genannt und mit $[F, \Phi]$ bezeichnet wird. Wenn wir für eine beliebige Funktion ω , die von den Veränderlichen x, y, u, p, q abhängt, vorübergehend die Bezeichnung

$$\frac{d\omega}{dx_i} = \omega_x + \omega_u p, \quad \frac{d\omega}{dy} = \omega_y + \omega_u q$$

¹⁾ In der deutschen Literatur meist Jacobische Klammer genannt. (Anm. d. Red.)

Es lassen sich nun neue lineare homogene Differentialgleichungen bilden, die aus den Differentialgleichungen (163) folgen und trotzdem von diesen linear unabhängig sein können. Zunächst stellen wir hierzu eine Reihe elementarer Identitäten auf. Sind u_1 und u_2 zwei beliebige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$, so gelten offenbar die Identitäten

$$X_k(u_1 + u_2) = X_k(u_1) + X_k(u_2), \quad X_k(u_1 u_2) = u_1 X_k(u_2) + u_2 X_k(u_1). \quad (164)$$

Setzen wir in $X_i(u)$ an Stelle der Funktion u die linke Seite der k -ten Gleichung ein, d. h. den Ausdruck $X_k(u)$, so erhalten wir wegen (164)

$$X_i(X_k(u)) = \sum_{s=1}^n X_i(a_{ks}) u_{x_s} + \sum_{s=1}^n a_{ks} X_i(u_{x_s})$$

und entsprechend

$$X_k(X_i(u)) = \sum_{s=1}^n X_k(a_{is}) u_{x_s} + \sum_{s=1}^n a_{is} X_k(u_{x_s}).$$

Weiterhin gilt offenbar

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} X_i(u_{x_s}) = \sum_{s=1}^n a_{ks} \sum_{t=1}^n a_{it} u_{x_s} x_t = \sum_{s,t=1}^n a_{it} a_{ks} u_{x_s} x_t.$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht bei der Vertauschung der Indizes i und k , es ist also

$$\sum_{s=1}^n a_{is} X_k(u_{x_s}) = \sum_{s=1}^n a_{ks} X_i(u_{x_s}).$$

Somit ergibt sich die Identität

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = \sum_{s=1}^n [X_i(a_{ks}) - X_k(a_{is})] u_{x_s}, \quad (165)$$

deren rechte Seite eine lineare homogene Funktion der $p_s = u_{x_s}$ mit Koeffizienten darstellt, die nur von den x_k abhängen. Wir erweitern nun den Begriff der Poissonschen Klammern auf den Fall beliebig vieler unabhängiger Veränderlicher. Sind φ und ψ beliebige Funktionen der Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ und $p_1, \dots, p_n$, so definieren wir, analog zu der früheren Definition, die Poissonsche Klammer zweier Funktionen durch die Gleichung

$$(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^n (\varphi p_j \psi_{x_j} - \psi x_j \varphi_{p_j}). \quad (166)$$

Für $\varphi = X_i(u)$ und $\psi = X_k(u)$ gilt

$$\varphi p_j = a_{ij}, \quad \psi x_j = \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j} p_s, \quad \varphi x_j = \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{is}}{\partial x_j} p_s, \quad \psi p_j = a_{kj}.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die rechte Seite der Definitionsgleichung (166) ergibt sich

$$(X_i(u), X_k(u)) = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{\partial a_{is}}{\partial x_j} \right) p_s$$

oder

$$(X_i(u), X_k(u)) = \sum_{s=1}^n [X_i(a_{ks}) - X_k(a_{is})] p_s.$$

Durch Vergleich mit der rechten Seite von (165) gelangen wir zu der wichtigen Identität

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = (X_i(u), X_k(u)). \quad (167)$$

Erfüllt u alle Differentialgleichungen des Systems (163), d. h., gilt

$$X_l(u) \equiv 0 \quad (l = 1, \dots, m),$$

so muß diese Funktion auch die lineare homogene Differentialgleichung

$$(X_i(u), X_k(u)) = 0 \quad (168)$$

für beliebige Indizes i und k erfüllen. Geben wir diesen Indizes alle nur möglichen Werte,

so haben wir $\frac{m(m-1)}{2}$ neue lineare homogene Differentialgleichungen, die in dem angegebenen Sinne aus dem Differentialgleichungssystem (163) folgen. Einige dieser neuen Differentialgleichungen können identisch erfüllt sein, d. h., alle Koeffizienten der p_k können verschwinden. Die nicht identisch erfüllten neuen Differentialgleichungen fügen wir in einer bestimmten Reihenfolge zu den Differentialgleichungen des Systems (163) hinzu, indem wir jedesmal prüfen, ob eine neue Differentialgleichung eine Linearkombination der bereits vorhandenen ist. Nur wenn dies nicht der Fall ist, fügen wir die Differentialgleichung den vorhandenen hinzu. Verfahren wir so mit allen Differentialgleichungen, so erhalten wir ein neues System, in dem die Anzahl der Differentialgleichungen größer als m sein kann. Für das neue System bilden wir wieder die Poissonschen Klammern aus den linken Seiten, ohne natürlich diejenigen Poissonschen Klammern zu wiederholen, die wir bereits für das ursprüngliche System aufgestellt haben. Die sich ergebenden neuen Differentialgleichungen fügen wir wie soeben zu diesem System hinzu. Setzen wir das Verfahren fort, so kann es zwei verschiedene Fälle geben. Es kann vorkommen, daß wir zu einem System gelangen, in dem die Zahl der Differentialgleichungen gleich n ist. Solch ein System hat nur die triviale Lösung $u = \text{const}$, folglich hat auch das ursprüngliche System nur die triviale Lösung. Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß wir zu einem System aus weniger als n Differentialgleichungen gelangen, bei dem sich alle mit Hilfe der Poissonschen Klammern entstehenden neuen Differentialgleichungen als Linearkombinationen der bereits vorhandenen erweisen. Ein solches Differentialgleichungssystem heißt *vollständig*. Somit folgt aus den vorhergehenden Überlegungen, daß *unser ursprüngliches System entweder nur die triviale Lösung besitzt oder aber einem vollständigen System gleichwertig ist*. Wir sind also beim Problem der Integration eines vollständigen Systems angelangt. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, unser ursprüngliches System (163) sei bereits vollständig, d. h., alle Poissonschen Klammern $(X_i(u), X_k(u))$ seien Linearkombinationen der linken Seiten der Differentialgleichungen (163),

$$(X_i(u), X_k(u)) = \sum_{l=1}^m \beta_l^{(i,k)} X_l(u), \quad (169)$$

wobei die Koeffizienten $\beta_l^{(i,k)}$ Funktionen der x_k sind oder identisch verschwinden.

21. Vollständige und Jacobische Systeme. Wir wollen zunächst einige grundlegende Eigenschaften vollständiger Systeme von Differentialgleichungen nachweisen. Wir führen an Stelle der x_k neue unabhängige Veränderliche

$$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ein und nehmen dabei an, daß sich diese Transformationsgleichungen nach den x_k auflösen lassen. Das Differentialgleichungssystem (163) lautet in den neuen unabhängigen Veränderlichen:

$$Y_j(u) = b_{j1} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + b_{jn} \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

wobei nach der Kettenregel

$$b_{jl} = \sum_{s=1}^n a_{js} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s} = X_j(y_l) \quad (170)$$

gilt. Bei beliebiger Wahl der Funktion u gilt $Y_j(u) = X_j(u)$; dabei ist die rechte Seite in den unabhängigen Veränderlichen x_k und die linke Seite in den unabhängigen Ver-

Das ursprüngliche System war ein Jacobisches System und somit vollständig, deshalb muß auch das transformierte System vollständig sein. Da dieses aber nach den Ableitungen aufgelöst ist, muß es ebenfalls ein Jacobisches System sein. Übrigens folgt aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes unmittelbar, daß die Transformation eines Jacobischen Systems auf neue unabhängige Veränderliche wieder zu einem Jacobischen System führt.

Die erste Differentialgleichung (174) zeigt, daß die Funktion u von y_1 unabhängig ist. Wir beweisen, daß die Koeffizienten in den übrigen Differentialgleichungen des Systems (174) die Veränderliche y_1 ebenfalls nicht enthalten. Jeder Ausdruck

$$Y_1(Y_i(u)) - Y_i(Y_1(u)) = \frac{\partial c_{i,m+1}}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_{m+1}} + \dots + \frac{\partial c_{in}}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

muß identisch verschwinden, weil das Differentialgleichungssystem (174) ein Jacobisches System ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wir können somit im System (174) die erste Differentialgleichung unberücksichtigt lassen und die übrigen unter der Voraussetzung integrieren, daß u nicht von y_1 abhängt. Wir gelangen somit zu einem vollständigen System von $m-1$ Differentialgleichungen mit $n-1$ unabhängigen Veränderlichen. Führen wir mit diesem System eine entsprechende Operation durch wie oben, so gelangen wir zu einem vollständigen System von $m-2$ Differentialgleichungen mit $n-2$ unabhängigen Veränderlichen, usw. Schließlich gelangen wir zu einer einzigen Differentialgleichung mit $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen für die Funktion u . Bezeichnen wir die Veränderlichen wieder mit $y_1, \dots, y_{n-m+1}$, so erhalten wir eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} + g_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \dots + g_{n-m+1} \frac{\partial u}{\partial y_{n-m+1}} = 0,$$

wobei die unabhängigen Veränderlichen y_i Funktionen der ursprünglichen unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ sind. Das zu dieser Differentialgleichung gehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen hat $n-m$ unabhängige Integrale

$$\psi_1(y_1, \dots, y_{n-m+1}) = C_1, \dots, \psi_{n-m}(y_1, \dots, y_{n-m+1}) = C_{n-m}.$$

Eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung läßt sich in der Gestalt

$$u = \Psi(\psi_1, \dots, \psi_{n-m})$$

darstellen, wobei Ψ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Der letzte Ausdruck liefert gleichzeitig auch eine allgemeine Lösung des ursprünglichen Differentialgleichungssystems (163).

23. Die Poissonschen Klammern. Obige Resultate benutzen wir zur Herleitung einer Methode, nach der wir ein vollständiges Integral einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen finden können. Wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher müssen wir zunächst ein Hilfsproblem betrachten. Gesucht sei eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$, deren partielle Ableitungen als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_k vorgegeben sind:

$$p_k = p_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (175)$$

Da das Ergebnis der Differentiationen von der Reihenfolge unabhängig ist, müssen die Funktionen (175) den $\frac{n(n-1)}{2}$ Beziehungen

$$\frac{\partial p_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad (176)$$

genügen.

Diese Integrabilitätsbedingungen sind zur Bestimmung der Funktion u nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Dies wurde für die Fälle $n=2$ und $n=3$ bereits früher bewiesen [II, 76]. Verallgemeinern wir die Stokessche Formel auf den Fall des

n -dimensionalen Raumes, so erhalten wir wie im Fall $n=3$, daß das Kurvenintegral

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{(x_1, \dots, x_n)} \sum_{s=1}^n p_s(x_1, \dots, x_n) dx_s,$$

falls die Bedingungen (176) erfüllt sind, unter bestimmten Voraussetzungen über das Definitionsgebiet nicht vom Wege abhängt und eine Funktion u darstellt, welche die partiellen Ableitungen (175) besitzt.

Es läßt sich durch Induktionsschluß beweisen, daß die Bedingungen (176) für beliebiges n hinreichend sind. Wir nehmen an, daß unsere Aussage im Fall $n-1$ unabhängiger Veränderlicher bereits bewiesen ist, und zeigen, daß sie dann auch für n Veränderliche richtig ist, setzen also voraus, daß die Funktionen (175) den Beziehungen (176) genügen. Da wir unsere Behauptung für $n-1$ unabhängige Veränderliche als bewiesen annehmen, können wir unter Benutzung der ersten $n-1$ Funktionen (175) eine Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_{n-1}$ konstruieren, welche die partiellen Ableitungen $u_{x_k} = p_k(x_1, \dots, x_n)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) besitzt. Diese Funktion enthält x_n als Parameter, da diese Veränderliche in den p_k vorkommt. Außerdem können wir zu der Funktion u eine willkürliche Konstante hinzufügen, die als Funktion des Parameters x_n angenommen werden darf.

Somit erhalten wir die Funktion

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + c(x_n),$$

die den $n-1$ Bedingungen

$$u_{x_k} = p_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

genügt.

Es bleibt noch $c(x_n)$ so zu wählen, daß die Bedingung $u_{x_n} = p_n(x_1, \dots, x_n)$ erfüllt ist. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dc(x_n)}{dx_n} = p_n(x_1, \dots, x_n) - u_{x_n}.$$

Wir brauchen uns lediglich davon zu überzeugen, daß die rechte Seite dieser Differentialgleichung nur von x_n abhängt. Differenzieren wir nach x_k für $k < n$ und berücksichtigen die Beziehungen (176) sowie $u_{x_k} = p_k$, so erhalten wir

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_k} = \frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_n} \equiv 0,$$

was zu beweisen war.

Wir setzen nun voraus, daß die partiellen Ableitungen p_k in impliziter Form durch n Gleichungen

$$F_s(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_s \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (177)$$

bestimmt sind, von denen wir voraussetzen, daß sie nach den p_k auflösbar sind. Dafür, daß die durch die Gleichungen (177) bestimmten p_k den Beziehungen (176) genügen, ist notwendig und hinreichend, daß alle Poissonschen Klammern, die sich aus den linken Seiten der Gleichungen (177) bilden lassen, identisch verschwinden, d. h., es müssen die folgenden $\frac{n(n-1)}{2}$ Identitäten in bezug auf die x_i und p_j erfüllt sein:

$$(F_i, F_k) = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \frac{\partial F_k}{\partial x_s} - \frac{\partial F_i}{\partial x_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \right) \equiv 0. \quad (178)$$

Hierbei setzen wir voraus, daß auf den rechten Seiten der Gleichungen (177) willkürliche Konstante stehen.

Um diese Aussage zu beweisen, wählen wir zwei der Gleichungen (177) und differenzieren sie nach der unabhängigen Veränderlichen x_s :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial F_k}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0.$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial F_k}{\partial p_s}$, die zweite mit $\frac{\partial F_i}{\partial p_s}$, subtrahieren die erste von der zweiten und summieren über s , so erhalten wir

$$(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0.$$

Ändern wir in der zweiten Summe die Bezeichnung der Summationsveränderlichen, so können wir die letzte Gleichung auch in der Gestalt

$$(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (179)$$

schreiben. Genügen die p_k den Beziehungen (176), so folgt aus (179) unmittelbar, daß für beliebige Indizes die Identitäten (178) erfüllt sein müssen. Jetzt setzen wir umgekehrt voraus, daß die Identitäten (178) erfüllt sind, und beweisen, daß die durch (177) bestimmten p_k die Beziehungen (176) erfüllen. Mit den Identitäten (178) ergibt sich aus der Gleichung (179)

$$\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = 0$$

für beliebige Werte der Indizes i und k . Setzen wir $k=1, 2, \dots, n$, so erhalten wir n Relationen, die wir als System von n homogenen Gleichungen für die n Ausdrücke

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (180)$$

auffassen können. Die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems ist die Funktionaldeterminante der Funktionen F_s nach den Veränderlichen p_s , von der wir voraussetzen, daß sie von 0 verschieden ist (das System (177) sollte nach den p_s auflösbar sein). Folglich müssen alle Ausdrücke (180) gleich 0 sein. Halten wir den Index j fest und setzen $i=1, 2, \dots, n$, so erhalten wir ein homogenes System für die Größen

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \quad (s=1, 2, \dots, n), \quad (181)$$

dessen Determinante wiederum die Funktionaldeterminante der F_s nach den p_s ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß alle Ausdrücke (181) verschwinden müssen, was wir gerade beweisen wollten. *Dafür, daß das System (177) solche Größen p_k bestimmt, welche partielle Ableitungen einer Funktion u sind, ist also notwendig und hinreichend, daß sich die Funktionen F_i paarweise in Involution zueinander befinden.* Wir haben vorausgesetzt, daß die rechten Seiten der Gleichungen (177) willkürliche Konstante sind. Im Zusammenhang damit mußten wir fordern, daß die Bedingungen (178) identisch erfüllt sind. Legen wir den Wert einiger dieser Konstanten fest, so genügt es, zu fordern, daß die Bedingungen (178) auf Grund der so erhaltenen Gleichungen (177) erfüllt sind.

Wir wollen noch einige elementare Eigenschaften der Poissonschen Klammern herleiten. Sind φ und ψ zwei beliebige Funktionen der Veränderlichen x_k und p_k und a und b zwei Zahlen, so folgen aus der Definition der Poissonschen Klammern unmittelbar die Beziehungen

$$(\varphi, \varphi) = 0, \quad (\psi, \varphi) = -(\varphi, \psi), \quad (0, \varphi) = 0 \quad (a\varphi, b\psi) = ab(\varphi, \psi).$$

Ist ω eine weitere Funktion dieser Veränderlichen, so gilt die Identität

$$((\varphi, \psi), \omega) + ((\psi, \omega), \varphi) + ((\omega, \varphi), \psi) = 0, \quad (182)$$

die gewöhnlich Jacobische Identität genannt wird. Diese Identität enthält ineinandergeschachtelte Poissonsche Klammern. Zur Berechnung des ersten Summanden in (182) müssen wir zunächst die Poissonsche Klammer (φ, ψ) und darauf unter Benutzung der erhaltenen Funktion die Klammer $((\varphi, \psi), \omega)$ bilden. Um die Identität (182) zu verifizieren, gehen wir davon aus, daß jeder Summand dieser Identität Ableitungen erster

Ordnung enthält. Wegen der Symmetrie dieser Identität in bezug auf alle drei Funktionen sowie in bezug auf die Veränderlichen x_k und p_k genügt es, einzusehen, daß sich auf der linken Seite alle Glieder aufheben, die $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}$ enthalten. Aus der Definition der Poissonschen Klammern erkennen wir, daß der Koeffizient von $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}$ auf der linken Seite von (182) folgende Gestalt hat:

$$\sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial p_s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \omega}{\partial p_s} \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial \omega}{\partial x_s} - \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \frac{\partial \omega}{\partial p_s} \right) - \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial p_s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \right].$$

Führen wir die Differentiationen durch, so folgt sofort, daß dieser Koeffizient tatsächlich gleich 0 ist.

24. Die Methode von Jacobi. Wir verallgemeinern nun die Methode von LAGRANGE und CHARPIT, indem wir ein vollständiges Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen ermitteln. Dabei nehmen wir an, daß die Differentialgleichung die gesuchte Funktion nicht enthält, also von der Gestalt

$$F_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (183)$$

ist. Gelingt es uns, noch $n-1$ Funktionen F_k so auszuwählen, daß die erhaltenen n Funktionen paarweise in Involution zueinander liegen und das (177) entsprechende System (mit $a_1=0$) nach den p_k auflösbar ist, so finden wir aus ihm Größen p_k , die den Bedingungen (176) genügen, und aus diesen erhalten wir u . Das System (177) liefert uns $n-1$ willkürliche Konstanten; bei der Bestimmung der Funktion u aus ihren partiellen Ableitungen p_k ergibt sich eine weitere willkürliche Konstante. Die Ermittlung der Funktionen F_k läßt sich schrittweise durchführen. Wir setzen voraus, daß bereits m Funktionen $F_1, F_2, \dots, F_m$ vorhanden sind, die paarweise in Involution zueinander liegen und nach m der Größen p_k auflösbar sind. Zur Ermittlung der folgenden Funktion F_{m+1} müssen wir die m Gleichungen

$$(F_1, u) = 0, (F_2, u) = 0, \dots, (F_m, u) = 0 \quad (184)$$

aufstellen. Dies sind lineare homogene Differentialgleichungen für die gesuchte Funktion $u = F_{m+1}$ der $2n$ unabhängigen Veränderlichen x_k und p_k .

Ausgeschrieben lautet das System für F_{m+1}

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right) = 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (185)$$

Wir nehmen an, daß eine m -reihige Determinante aus den Ableitungen der Funktionen F_j nach den Veränderlichen p_k von 0 verschieden ist; folglich ist im System (185) der Rang der Matrix aus den Koeffizienten der Ableitungen gleich m , d. h., die Differentialgleichungen (185) sind linear unabhängig. Wir zeigen nun, daß dieses System vollständig ist. Zum Beweis bilden wir die Differenzen (165) für das System (184):

$$(F_p, (F_q, u)) - (F_q, (F_p, u)).$$

Wir haben zu beweisen, daß diese Differenzen identisch verschwinden. Unter Benutzung der Identität (182) können wir die Differenzen in

$$-((F_q, u), F_p) - ((u, F_p), F_q) = ((F_p, F_q) u)$$

umformen. Die Funktionen F_p und F_q liegen aber zueinander in Involution, woraus unmittelbar hervorgeht, daß die betrachteten Differenzen gleich 0 sind. Nach [22] hat das System (185) somit $2n-m$ unabhängige Lösungen. Unter ihnen befinden sich die trivialen Lösungen

$$u = F_1, u = F_2, \dots, u = F_m. \quad (186)$$

Außer diesen müssen also noch $2n - 2m$ Lösungen existieren, die zusammen mit den Lösungen (186) nach $2n - m$ der Veränderlichen x_k und p_k auflösbar sind. Somit hat das System (185) sicher eine solche Lösung $u = F_{m+1}$, daß die Gleichungen $F_1 = 0, F_2 = a_2, \dots, F_{m+1} = a_{m+1}$ nach $m + 1$ der Größen p_k auflösbar sind. Zur Ermittlung der folgenden Funktion F_{m+2} konstruieren wir das System

$$(F_1, u) = 0, \dots, (F_{m+1}, u) = 0,$$

auf das wir dieselben Überlegungen wie für das System (184) anwenden können. Durch Fortsetzung des Verfahrens konstruieren wir n Funktionen, die paarweise in Involution zueinander liegen und für die das System (177) (mit $a_1 = 0$) nach allen p_k auflösbar ist. Auf diese Weise gelangen wir, wie wir gesehen haben, zu einem vollständigen Integral der Differentialgleichung (183).

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung die gesuchte Funktion nicht enthält. Haben wir eine Gleichung, die u selbst enthält,

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

so können wir, indem wir die Zahl der unabhängigen Veränderlichen um 1 erhöhen, zu einer Differentialgleichung übergehen, welche die gesuchte Funktion nicht enthält. Man braucht nur die Lösung u in der impliziten Form

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = C$$

zu suchen, wobei C eine willkürliche Konstante ist. Unter Anwendung der Differentiationsregel für implizite Funktionen erhalten wir für v eine Differentialgleichung, welche die gesuchte Funktion selbst nicht enthält.

25. Kanonische Systeme. Wir wollen jetzt einen Zusammenhang zwischen den vorhergehenden Überlegungen und dem Cauchyschen Differentialgleichungssystem herstellen. Wir betrachten den Fall, daß die Differentialgleichung die gesuchte Funktion nicht enthält und sich nach einer der Ableitungen auflösen läßt. Aus Symmetriegründen führen wir $n + 1$ unabhängige Veränderliche ein und bezeichnen eine von ihnen mit t . Die Ableitung nach t sei $p_0 = u_t$. Die Differentialgleichung hat dann die Form

$$p_0 + H(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (187)$$

und das zugehörige Cauchysche System ist das kanonische System [17]

$$\frac{dx_k}{dt} = H_{p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -H_{x_k}. \quad (188)$$

Es sei

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = C$$

ein Integral dieses Systems. Wegen (188) gilt dann

$$\varphi_t + \sum_{k=1}^n \left(\varphi_{x_k} \frac{dx_k}{dt} + \varphi_{p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = 0.$$

Diese Relation läßt sich auch in der Gestalt

$$\varphi_t + (H, \varphi) = 0 \quad (189)$$

schreiben. Dafür, daß die Funktion φ ein Integral des Differentialgleichungssystems darstellt, ist demnach notwendig und hinreichend, daß sie der Gleichung (189) genügt. Nunmehr setzen wir voraus, daß die Funktionen φ und ψ zwei Integrale des Differentialgleichungssystems sind, und zeigen, daß auch ihre Poissonsche Klammer (φ, ψ) ein Integral des Differentialgleichungssystems darstellt (oder konstant ist). Aus der Definition der Poissonschen Klammer folgt unmittelbar die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi, \psi) = (\varphi_t, \psi) + (\varphi, \psi_t).$$

Setzen wir die Funktion $\omega = (\varphi, \psi)$ in die Beziehung (189) an Stelle von φ ein, so erhalten wir

$$(\varphi_t, \psi) + (\varphi, \psi_t) + (H, (\varphi, \psi)) = 0.$$

Da aber φ und ψ Integrale sind, können wir in der letzten Relation $\varphi_t = -(H, \varphi)$, $\psi_t = -(H, \psi)$ setzen. Somit gelangen wir zu der Beziehung

$$-((H, \varphi), \psi) - (\varphi, (H, \psi)) + (H, (\varphi, \psi)) = 0,$$

die wegen (182) identisch erfüllt ist. *Die Poissonsche Klammer zweier Integrale eines kanonischen Systems ist also wieder ein Integral dieses Systems oder eine Konstante.*

Wir setzen voraus, daß wir n Integrale

$$\varphi_s(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_s \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (190)$$

des Differentialgleichungssystems (188) kennen, die paarweise in Involution zueinander liegen und sich nach den p_k auflösen lassen. Wir fügen zu den Gleichungen (190) die Differentialgleichung (187) selbst hinzu und zeigen, daß die erhaltenen $n + 1$ Funktionen paarweise in Involution zueinander liegen, wobei $t, x_1, \dots, x_n$ die unabhängigen Veränderlichen und $p_0, p_1, \dots, p_n$ die zugehörigen Ableitungen sind. Die Funktionen (190) liegen offenbar auch nach Hinzunahme der neuen unabhängigen Veränderlichen t paarweise in Involution zueinander, da sie allesamt p_0 nicht enthalten. Es genügt, zu verifizieren, daß jede der Funktionen (190) mit der linken Seite der Differentialgleichung (187) in Involution liegt. Setzen wir die entsprechende Poissonsche Klammer gleich 0, so gelangen wir gerade zu der Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + (H, \varphi_s) = 0,$$

die gewiß erfüllt ist, da die Funktionen (190) Integrale des Differentialgleichungssystems (188) sind. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus [24] können wir sagen: Wenn wir die Gleichungen (190) nach den p_k ($k = 1, \dots, n$) und die Differentialgleichung (187) nach p_0 auflösen und die erhaltenen Ausdrücke p_k in die Funktion H einsetzen, ist die Summe

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n - H dt$$

das totale Differential einer Funktion $v(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$. Diese Funktion liefert offenbar ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (187). Mit Hilfe des Jacobischen Satzes können wir beweisen, daß wir die übrigen n Integrale des kanonischen Systems (190) durch einfache Differentiation erhalten; denn sie sind durch die Gleichungen $v_{a_k} = b_k$ ($k = 1, \dots, n$) bestimmt.

26. Beispiele. 1. Wir untersuchen das System der beiden linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X_1 &= p_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1) p_3 + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4) p_4 = 0, \\ X_2 &= p_2 + (x_3 x_4 - x_2) p_3 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2) p_4 = 0. \end{aligned} \quad (191)$$

Bilden wir die Poissonsche Klammer der linken Seiten, so erhalten wir noch die Differentialgleichung

$$X_3 = p_3 + x_1 p_4 = 0.$$

Die Poissonschen Klammern (X_1, X_3) und (X_2, X_3) unterscheiden sich von der linken Seite der letzten Differentialgleichung nur durch einen Faktor. Somit haben wir ein vollständiges System, das aus drei Differentialgleichungen besteht. Lösen wir es nach p_1, p_2, p_3 auf, so erhalten wir das Jacobische System

$$p_1 + (x_3 + 3x_1^2) p_4 = 0, \quad p_2 + x_2 p_4 = 0, \quad p_3 + x_1 p_4 = 0.$$

Die letzte Differentialgleichung hat die Lösungen x_1, x_2 und $x_4 - x_1 x_3$. Führen wir die unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und $t = x_4 - x_1 x_3$ ein, so erhält das Differential-

gleichungssystem die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3x_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Die ersten beiden Differentialgleichungen bilden ein Jacobisches System mit den unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, t . Die zweite von ihnen hat die Lösungen x_1 und $t - \frac{x_2^2}{2}$.

Führen wir die neuen unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2 und $\tau = t - \frac{x_2^2}{2}$ ein, so lassen sich die beiden Differentialgleichungen in

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3x_1^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

überführen. Die erste dieser Differentialgleichungen hat die Lösung

$$u = \tau - x_1^3 \quad \text{oder} \quad u = x_4 - x_1 x_3 - \frac{x_2^2}{2} - x_1^3.$$

Eine willkürliche Funktion dieses Argumentes ist Lösung des Differentialgleichungssystems (191).

2. Wir suchen nun ein vollständiges Integral der Differentialgleichung

$$F_1 = (p_1 + x_2)^2 + (x_1 + p_2)^2 - x_3 p_3 = 0. \quad (192)$$

Die Gleichung $(F_1, u) = 0$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} 2(p_1 + x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2(x_1 + p_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} - 2(x_1 + p_2) \frac{\partial u}{\partial p_1} \\ - 2(p_1 + x_2) \frac{\partial u}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial u}{\partial p_3} = 0. \end{aligned} \quad (193)$$

Diese Differentialgleichung hat offenbar die Lösung $u = x_1 + p_2$. Wir setzen

$$F_2 = x_1 + p_2 = a_2 \quad (192_1)$$

und fügen zur Differentialgleichung (193) noch die Gleichung $(F_2, u) = 0$, d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

hinzu. Diese Differentialgleichung und die Differentialgleichung (193) haben die Lösung $u = x_3 p_3$, es ist also

$$F_3 = x_3 p_3 = a_3. \quad (192_2)$$

Nun lösen wir (192), (192₁) und (192₂) nach p_1, p_2 und p_3 auf und erhalten

$$p_1 = -x_2 + \sqrt{a_3 - a_2^2}, \quad p_2 = a_2 - x_1, \quad p_3 = \frac{a_3}{x_3}.$$

Berechnen wir die Funktion u aus ihren partiellen Ableitungen, so finden wir ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (192):

$$u = -x_1 x_2 + \sqrt{a_3 - a_2^2} x_1 + a_2 x_2 + a_3 \lg x_3 + a.$$

27. Die Majorantenmethode. Bei der Untersuchung des Cauchyschen Problems setzten wir die gegebenen und die gesuchten Funktionen als reelle Funktionen reeller unabhängiger Veränderlicher voraus. Die ganze Theorie läßt sich auch unter der Voraussetzung entwickeln, daß alle Funktionen analytische Funktionen ihrer Argumente sind. Diese können dann sowohl reelle als auch komplexe Werte annehmen. Von diesem Gesichtspunkt aus wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit

der Lösung des Cauchyschen Problems beweisen. Zunächst müssen wir aber noch einige Hilfssätze aufstellen.

Es sei eine Potenzreihe

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \sum_{p_1, \dots, p_m=0}^{\infty} a_{p_1 \dots p_m} z_1^{p_1} \dots z_m^{p_m} \quad (194)$$

von m Veränderlichen gegeben, die konvergieren möge, wenn die Bedingungen

$$|z_1| \leq R_1, \dots, |z_m| \leq R_m \quad (195)$$

erfüllt sind. Wir nehmen an, daß die Konvergenzradien der Reihe (194) noch etwas größer als die Zahlen R_k sind. Es sei M der größte Wert, den der absolute Betrag der Funktion (194) unter den Bedingungen (195) annimmt. Wir haben gesehen [III/2, 84], daß die durch Reihenentwicklung der Funktion

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{z_1}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z_2}{R_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_m}{R_m}\right)} \quad (196)$$

entstehende Potenzreihe nur positive Koeffizienten besitzt, die nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihe (194).

Unter der *Majorante* einer Reihe

$$\sum_{p_1, \dots, p_m=0}^{\infty} c_{p_1 \dots p_m} z_1^{p_1} \dots z_m^{p_m} \quad (197)$$

wird allgemein eine Reihe derselben Gestalt verstanden, deren Koeffizienten nicht-negativ (d. h. größer als 0 oder gleich 0) und nicht kleiner als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten der Reihe (197) sind. Bekanntlich konvergiert jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises [III/2, 84] absolut. Konvertiert eine Majorante der Reihe (197) für $|z_k| < \varrho_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), so konvergiert offenbar auch die Reihe (197) in den Kreisgebieten $|z_k| < \varrho_k$. Jetzt nehmen wir im Ausdruck (196) alle Zahlen R_k als gleich an (man kann alle Zahlen R_k durch die kleinste Zahl R ersetzen) und betrachten die beiden Funktionen

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{z_1}{R}\right) \left(1 - \frac{z_2}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{z_m}{R}\right)} \quad (198)$$

und

$$\frac{M}{1 - \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_m}{R}} \quad (199)$$

Die Potenzreihenentwicklungen dieser Funktionen lauten

$$\sum_{p_1, \dots, p_m=0}^{\infty} M \frac{z_1^{p_1} \dots z_m^{p_m}}{R^{p_1 + \dots + p_m}} \quad \text{und} \quad \sum_{p=0}^{\infty} M \frac{(z_1 + \dots + z_m)^p}{R^p}.$$

Durch Ausrechnen von $(z_1 + \dots + z_m)^p$ können wir uns davon überzeugen, daß die Koeffizienten in der Reihenentwicklung der Funktion (199) nicht kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten in der Entwicklung von (198); die Funktion (199) (oder die zugehörige Potenzreihe) ist also ebenfalls eine Majorante der Funktion (197) (d. h. der zugehörigen Potenzreihe).

Die Majorantenmethode wird beim Beweis der Existenz von Lösungen von

Differentialgleichungen im Fall analytischer Funktionen angewandt. Wir führen zunächst den entsprechenden Beweis für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gegeben, deren rechte Seite im Punkt $x=y=0$ regulär ist, d. h. sich in eine Potenzreihe nach x und y entwickeln läßt, die in einer Umgebung von $x=y=0$ konvergiert:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq} x^p y^q. \quad (200)$$

Gesucht sei die Lösung dieser Gleichung, die im Punkt $x=0$ regulär ist und der Anfangsbedingung

$$y|_{x=0} = 0 \quad (201)$$

genügt. Zur Konstruktion der gesuchten Lösung genügt es, ihre Maclaurinsche Reihe aufzustellen, d. h., die Werte der Ableitungen für $x=0$ zu berechnen. Das Absolutglied dieser Maclaurinschen Reihe ist wegen der Anfangsbedingung (201) gleich 0. Der Wert der ersten Ableitung für $x=0$ ergibt sich aus der Differentialgleichung; wir erhalten $y'_0 = a_{00}$. Zur Bestimmung der zweiten Ableitung differenzieren wir beide Seiten der Differentialgleichung nach x ,

$$y'' = \sum_{p,q=0}^{\infty} p a_{pq} x^{p-1} y^q + \sum_{p,q=0}^{\infty} q a_{pq} x^p y^{q-1} y'.$$

Setzen wir in die rechte Seite dieser Gleichung $x=0$, $y=0$, $y' = a_{00}$ ein, so erhalten wir den Wert der zweiten Ableitung für $x=0$:

$$y''_0 = a_{10} + a_{01} a_{00}.$$

Setzen wir dieses Verfahren weiter fort, so können wir die Ableitungen jeder Ordnung für $x=0$ bestimmen und die Maclaurinsche Reihe

$$y_0 + \frac{y'_0}{1!} x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \dots \quad (y_0 \neq 0) \quad (202)$$

bilden. Aus unserer Rechnung geht hervor, daß höchstens eine reguläre Lösung existieren kann, die der vorgegebenen Anfangsbedingung genügt. Damit wir aber aussagen können, daß eine solche Lösung wirklich existiert, müssen wir beweisen, daß die Reihe (202) einen positiven Konvergenzradius besitzt, denn alle bisher durchgeführten Operationen sind wegen der Grundeigenschaften von Potenzreihen nur im Innern ihrer Konvergenzkreise erlaubt. Erweist sich die Reihe (202) als konvergent, so folgt aus dem Bildungsgesetz ihrer Koeffizienten unmittelbar, daß ihre Summe der Gleichung (200) genügt.

Aus unserer Rechnung folgt, daß die Koeffizienten der Reihe (202) Polynome der Größen a_{pq} mit nichtnegativen Zahlenkoeffizienten sind. Denn bei der schrittweisen Differentiation der Gleichung (200) und beim Einsetzen der bereits gefundenen Werte der Ableitungen in die rechte Seite werden die Koeffizienten nur addiert und multipliziert. Ersetzen wir deshalb die auf der rechten Seite der Gleichung (200) stehende Reihe durch eine Majorante, so erhalten wir auch für die Reihe (202) eine Majorante. Konvergiert diese Majorante für hinreichend kleine x , so konvergiert die zur Gleichung (200) gehörende Reihe (202) erst recht. Der Grundgedanke unseres Beweises besteht im folgenden: Wir ersetzen die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (200) durch eine solche Majorante, daß wir dabei eine

Differentialgleichung erhalten, die sich in geschlossener Form integrieren läßt. Hierzu setzen wir voraus, die auf der rechten Seite der Gleichung (200) stehende Reihe konvergiere für $|x| \leq R$ und $|y| \leq R$ absolut und gleichmäßig, und M sei der größte Wert der Summe dieser Reihe unter den soeben angegebenen Bedingungen. Gehen wir zur Majorante über, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right)}, \quad (203)$$

in der eine Trennung der Veränderlichen möglich ist:

$$\left(1 - \frac{y}{R}\right) dy = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)} dx.$$

Durch Integration ergibt sich wegen (201)

$$y - \frac{y^2}{2R} = -MR \lg \left(1 - \frac{x}{R}\right),$$

woraus

$$y = R - R \sqrt{1 + 2M \lg \left(1 - \frac{x}{R}\right)} \quad (204)$$

folgt; das Vorzeichen der Wurzel wurde dabei so gewählt, daß die Anfangsbedingung (201) erfüllt ist. Die Funktion (204) ist im Punkt $x=0$ regulär und läßt sich daher in eine Potenzreihe entwickeln.

Die Koeffizienten dieser Reihe sind offenbar mit den Koeffizienten identisch, die wir mit Hilfe des angegebenen Verfahrens aus der Differentialgleichung (203) durch gliedweise Differentiation bilden können. Somit ist die zur Majorantengleichung gehörige Reihe (202) in der Umgebung von $x=0$ konvergent. Wie wir gesehen haben, konvergiert die Reihe (202) für die ursprüngliche Gleichung erst recht. Somit ist nicht nur die Eindeutigkeit, sondern auch die Existenz einer regulären Lösung von (200) nachgewiesen, die der Anfangsbedingung (201) genügt.

28. Der Satz von S. Kowalewskaia. Die Methode der Majorantenreihen oder -funktionen werden wir auch beim Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des Cauchyschen Problems für eine partielle Differentialgleichung anwenden. Hierbei betrachten wir stets explizite Differentialgleichungen. Es sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$p_1 = f(x_1, \dots, x_n, u, p_2, \dots, p_n) \quad (205)$$

gegeben, in der f im Punkt

$$x_1 = \dots = x_n = 0, \quad u = u^{(0)}, \quad p_2 = p_2^{(0)}, \dots, p_n = p_n^{(0)} \quad (206)$$

eine reguläre Funktion darstellt; wir haben dabei o. B. d. A. die Ausgangswerte der unabhängigen Veränderlichen gleich 0 angenommen. Gesucht ist diejenige Lösung der Differentialgleichung, die der Cauchyschen Bedingung

$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2, \dots, x_n) \quad (207)$$

genügt.

Wir nehmen an, die Funktion $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ sei für $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ regulär, und es gelte außerdem

$$(\varphi)_0 = u^{(0)}, \quad (\varphi x_k)_0 = p_k^{(0)} \quad (k=2, \dots, n). \quad (208)$$

Der untere Index 0 möge hier und im folgenden darauf hinweisen, daß alle Argumente der Funktion gleich 0 zu setzen sind. Bevor wir zur Lösung dieses Problems übergehen, vereinfachen wir mit Hilfe einer elementaren Transformation der gesuchten Funktion die Cauchyschen Bedingungen des Problems, und zwar führen wir an Stelle von u eine neue gesuchte Funktion u' ein durch

$$u = u' + \varphi(x_2, \dots, x_n) + Ax_1.$$

Dabei bezeichne die Konstante A den Wert der rechten Seite von (205) für die Ausgangswerte (206) der Argumente, d. h., A ist das Absolutglied der Potenzreihenentwicklung der Funktion f ,

$$A = f(0, \dots, 0, (\varphi)_0, (\varphi x_2)_0, \dots, (\varphi x_n)_0).$$

Die neue gesuchte Funktion muß der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'_1 = f(x_1, \dots, x_n, u' + \varphi + Ax_1, \varphi x_2 + u'_2, \dots, \varphi x_n + u'_n) \\ - f(0, \dots, 0, (\varphi)_0, (\varphi x_2)_0, \dots, (\varphi x_n)_0) \end{aligned} \quad (209)$$

genügen, und an Stelle der Anfangsbedingung (207) erhalten wir die Anfangsbedingung

$$u'|_{x_1=0} = 0.$$

Jetzt wenden wir unsere Aufmerksamkeit den Argumenten der auf der rechten Seite von (209) stehenden Funktion zu. Das Argument $u' + \varphi + Ax_1$ wird gleich $(\varphi)_0$, wenn wir alle x_s und ebenso u' gleich 0 setzen. Ebenso wird jedes der Argumente $\varphi x_k + u'_k$ gleich $(\varphi x_k)_0$, wenn wir wieder alle x_s und u'_k gleich 0 setzen. Somit sind die Argumente der betrachteten Funktion, wenn die Größen x_s , u' und u'_k gleich 0 sind, gerade mit den Anfangswerten (208) identisch, für die die Funktion f regulär ist. Somit ist die Funktion auf der rechten Seite der Differentialgleichung (209) im Punkt

$$x_1 = \dots = x_n = u' = u'_2 = \dots = u'_n = 0 \quad (210)$$

regulär.

Außerdem folgt unter Berücksichtigung des auf der rechten Seite von (209) stehenden Subtrahenden, daß diese rechte Seite für die Anfangswerte (210) gleich 0 ist. Somit haben wir den Cauchyschen Anfangswert und alle Anfangswerte für die Argumente der auf der rechten Seite unserer Differentialgleichung stehenden Funktion in 0 übergeführt. In der früheren Bezeichnungsweise erhalten wir also das Problem: Gegeben ist eine Differentialgleichung

$$p_1 = f(x_1, \dots, x_n, u, p_2, \dots, p_n), \quad (211)$$

wobei f eine im Punkt

$$x_1 = \dots = x_n = u = p_2 = \dots = p_n = 0$$

reguläre Funktion ist, die dort verschwindet. Gesucht ist die Lösung dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u|_{x_1=0} = 0 \quad (212)$$

genügt. Wir bemerken, daß sich die rechte Seite der Differentialgleichung (211) in eine Reihe entwickeln lassen muß,

$$f = \sum_{s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n=0}^{\infty} a_{s_1 \dots s_n t_1 \dots t_n} x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} u^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n} \quad (a_{0 \dots 00 \dots 0} = 0), \quad (213)$$

die für alle hinreichend nahe bei 0 liegenden Werte der Argumente konvergiert.

Genau wie im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen berechnen wir unter Benutzung der Differentialgleichung (211) und der Anfangsbedingung (212) die Koeffizienten der Maclaurinschen Reihe für die gesuchte Funktion u , d. h. die Werte aller partiellen Ableitungen im Punkt $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Bei der Differentiation nach einer von x_1 verschiedenen Variablen können wir zuvor $x_1 = 0$ setzen.

Damit folgt aus der Anfangsbedingung (212)

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_2 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_0 = 0, \quad (214)$$

wobei die α_k beliebige ganze nichtnegative Zahlen bezeichnen. Jetzt rechnen wir die Anfangswerte derjenigen Ableitungen aus, in denen eine Differentiation nach x_1 vorkommt. Aus der Differentialgleichung (211) folgt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_0 = 0. \quad (215)$$

Differenzieren wir beide Seiten der Differentialgleichung (211) beliebig oft nach den Veränderlichen $x_2, \dots, x_n$, setzen danach die Argumente gleich 0 und benutzen auf der rechten Seite die bereits ausgerechneten Werte (214) und (215) der Ableitungen, so können wir für beliebige nichtnegative Werte $\alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\left(\frac{\partial^{1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1 \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_0$$

bestimmen. Nun benutzen wir die aus (211) durch Differentiation nach x_1 entstehende Differentialgleichung und verfahren mit ihr ebenso wie mit (211). Dadurch erhalten wir für die Ableitungen wohlbestimmte Werte

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha_2+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^2 \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_0.$$

Setzen wir das Verfahren fort, so können wir alle partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion für die Ausgangswerte der Argumente berechnen und die Maclaurinsche Reihe

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_0 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (216)$$

aufstellen. Die Überlegungen enthalten, wie im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung, den Eindeutigkeitsbeweis für eine reguläre Lösung des gestellten Cauchyschen Problems. Zum Beweis der Existenz müssen wir zeigen, daß die Reihe (216), wenn man die erhaltenen Werte für die Ableitungen eingesetzt hat, in gewissen Kreisen um den Koordinatenursprung konvergiert. Genau wie im vorhergehenden Abschnitt können wir schließen: Wenn wir die Reihe (213) durch eine Majorante ersetzen und wenn für die erhaltene Majorantendifferentialgleichung die

soeben gebildete Reihe (216) konvergiert, ist die entsprechende Reihe für die ursprüngliche Differentialgleichung erst recht konvergent. Wir setzen voraus, die Reihe (213) konvergiere für

$$|x_1| \leq \varrho, \dots, |x_n| \leq \varrho, \quad |u| \leq \varrho, \quad |p_2| \leq R, \dots, |p_n| \leq R$$

absolut und gleichmäßig. Es sei M das Maximum, das der absolute Betrag von (213) in diesem Wertebereich annimmt. Die Funktion

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{\varrho}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{p_2}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{p_n}{R}\right)} - M$$

ist eine Majorante von (213); auf der rechten Seite haben wir dabei die Zahl M abgezogen, damit das Absolutglied fortfällt, das auch in der Reihe (213) fehlt. Die Funktion

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_n + u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{p_2 + \dots + p_n}{R}\right)} - M$$

ist dann erst recht eine Majorante der Reihe (213). Dividieren wir in ihr die Veränderliche x_1 durch eine Zahl α , die der Bedingung $0 < \alpha < 1$ genügt, so treten die Potenzen dieser Zahl in den Nennern der Koeffizienten derjenigen Glieder auf, welche eine Potenz von x_1 enthalten, und die Funktion

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x_1}{\alpha} + x_2 + \dots + x_n + u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{p_2 + \dots + p_n}{R}\right)} - M$$

ist natürlich auch eine Majorante von (213). Wir erhalten somit die Majorantendifferentialgleichung

$$p_1 = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x_1}{\alpha} + x_2 + \dots + x_n + u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{p_2 + \dots + p_n}{R}\right)} - M. \quad (217)$$

Berechnen wir die Koeffizienten der Maclaurinschen Reihe derjenigen Lösung dieser Differentialgleichung, welche der Anfangsbedingung (212) genügt, so erhalten wir eine Potenzreihe, die für $x_s = 0$ verschwindet und eine Majorante der für die Differentialgleichung (211) aufgestellten Reihe (216) ist. Konvergiert diese Reihe, so konvergiert die Reihe (216) erst recht. Jetzt konstruieren wir die Lösung der Differentialgleichung (217), die für $x_1 = 0$ nicht verschwindet, sondern der Bedingung

$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2, \dots, x_n) \quad (218)$$

genügt; dabei sei φ eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten. Die sukzessive Berechnung der Reihenkoeffizienten läßt sich für diese Lösung in derselben Weise durchführen wie vorhin, nur führt die Anfangsbedingung (218) dazu, daß auf der rechten Seite der Gleichung (214) für alle nichtnegativen Werte α_k an Stelle von 0 bestimmte nichtnegative Zahlen stehen. Die Berechnung der anderen Koeffizienten läßt sich wie vorhin durchführen, dabei werden die bereits gefundenen nichtnegativen Koeffizienten in der Entwicklung der rechten Seite von (218) nur addiert und multipliziert. Ersetzen wir somit für die Differentialgleichung (217) die

Anfangsbedingung (212) durch die Anfangsbedingung (218), in der sich die Funktion φ in eine Reihe mit reellwertigen nichtnegativen Koeffizienten entwickeln läßt, so finden wir, daß die Reihe (216) für die Differentialgleichung (217) mit der Anfangsbedingung (218) eine Majorante der entsprechenden Reihe für die Differentialgleichung (217) mit der Anfangsbedingung (212) ist. Sie ist dann erst recht eine Majorante der Reihe (216) für die Differentialgleichung (211) mit der Anfangsbedingung (212). Wir brauchen also nur noch zu beweisen, daß die Reihe (216) für die Differentialgleichung (217) mit einer beliebigen Anfangsbedingung der Gestalt (218), wobei φ die angegebene Eigenschaft besitzt, im Innern einer bestimmten Kreisfläche um den Koordinatenursprung konvergiert.

Mit anderen Worten: Wir haben eine Lösung der Differentialgleichung (217) zu konstruieren, die einer Anfangsbedingung der Gestalt (218) genügt und sich in eine Maclaurinsche Reihe entwickeln läßt, wenn die x_k hinreichend klein sind. Wir suchen diese Lösung als Funktion von nur einem einzigen Argument $z = x_1 + \alpha(x_2 + \dots + x_n)$. Dann gilt

$$u_{x_1} = \frac{du}{dz}, \quad u_{x_k} = \alpha \frac{du}{dz} \quad (k=2, \dots, n);$$

folglich hat die Differentialgleichung (217) die Gestalt

$$\frac{du}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{z}{\alpha} + u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{(n-1)\alpha}{R} \frac{du}{dz}\right)} - M$$

oder

$$\left(1 - \frac{(n-1)M\alpha}{R}\right) \frac{du}{dz} - \frac{(n-1)\alpha}{R} \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{M}{1 - \frac{\frac{z}{\alpha} + u}{\varrho}} - M.$$

Wir nehmen an, die Zahl α sei so klein, daß der Koeffizient von $\frac{du}{dz}$ positiv ist. Auf der rechten Seite der letzten Differentialgleichung erhalten wir durch Entwicklung in eine geometrische Reihe eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten ohne Absolutglied. Damit läßt sich die letzte Differentialgleichung zur Abkürzung in der Gestalt

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2h \frac{du}{dz} + \varphi(z, u) = 0$$

schreiben, wobei $h > 0$ ist und $\varphi(z, u)$ eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten ohne Absolutglied darstellt. Durch Auflösung nach $\frac{du}{dz}$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dz} = h - h \sqrt{1 - \frac{1}{h^2} \varphi(z, u)}; \quad (219)$$

dabei ist die Wurzel für $z = u = 0$ gleich 1. Durch Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$-h \sqrt{1 - \frac{1}{h^2} \varphi(z, u)} = -h + \frac{1}{2!} \frac{\varphi}{h} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} \frac{\varphi^2}{h^3} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} \frac{\varphi^3}{h^5} + \dots,$$

und alle Koeffizienten bei den Potenzen von $\varphi(z, u)$ sind positiv. Setzen wir für φ die Entwicklung nach Potenzen von z und u ein, so erhalten wir auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (219) eine Potenzreihe $\varphi_1(z, u)$ mit positiven Koeffizienten ohne Absolutglied und gelangen damit zu der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{du}{dz} = \varphi_1(z, u).$$

Einen Satz über die Existenz einer regulären Lösung dieser Differentialgleichung, die der Anfangsbedingung $u|_{z=0} = 0$ genügt, haben wir bereits bewiesen. Die Lösung läßt sich als Reihe

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

darstellen, deren sämtliche Koeffizienten positiv sind. Setzen wir in diese Entwicklung $z = x_1 + \alpha(x_2 + \dots + x_n)$ ein, so erhalten wir eine Lösung der Differentialgleichung (217), die sich durch eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten darstellen läßt. Die Lösung genügt für $x_1 = 0$ einer Anfangsbedingung der Form (218), wobei $\psi(x_2, \dots, x_n)$ eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten ist. Auf Grund der vorhergehenden Ausführungen ist mit der Konstruktion dieser Lösung von (217) der Existenzbeweis für eine Lösung des Cauchyschen Problems beendet. Der dargestellte Beweis stammt von GOUBSAT. Der eben bewiesene Satz wird gewöhnlich Satz von KOWALEWSKI genannt, da er in seiner endgültigen Form zuerst von S. W. KOWALEWSKI (KOWALEWSKAJA) bewiesen wurde.

Aus dem Beweis folgt: Die Radien der Kreise (für die Veränderlichen x_k), in denen die Reihe (216) für die Lösung des Problems (211), (212) konvergiert, hängen nur von den Konvergenzradien der rechten Seite der Differentialgleichung (213) und vom Maximum M des absoluten Betrages dieser rechten Seite, nicht aber von der konkreten Gestalt der Funktion f ab. Für das Problem (205), (207) kommt noch die Abhängigkeit von den Konvergenzradien und dem Maximum des absoluten Betrages der in Bedingung (207) auftretenden Funktion $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ hinzu. Eine entsprechende Bemerkung gilt auch für die Ergebnisse des folgenden Abschnitts.

29. Differentialgleichungen höherer Ordnung. Die dargestellte Methode können wir fast ohne jede Änderung auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Als Beispiel betrachten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, die nach der Ableitung zweiter Ordnung bezüglich x aufgelöst ist:

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t) \quad (p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy}). \quad (220)$$

Die Cauchyschen Anfangsbedingungen bestehen hier in der Vorgabe von u und p für $x=0$,

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad p|_{x=0} = \psi(y). \quad (221)$$

Die Funktionen $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ seien im Punkt $y=0$ regulär. Wir führen die Bezeichnungen

$$\varphi(0) = u_0, \quad \psi(0) = p_0, \quad \varphi'(0) = q_0, \quad \psi'(0) = s_0, \quad \varphi''(0) = t_0$$

ein und setzen voraus, daß die Funktion auf der rechten Seite der Differentialgleichungen im Punkt

$$x=y=0, \quad u=u_0, \quad p=p_0, \quad q=q_0, \quad s=s_0, \quad t=t_0$$

regulär ist. Dann hat die Gleichung (220) eine eindeutig bestimmte reguläre Lösung, die den Cauchyschen Bedingungen (221) genügt. Den Beweis dieser Behauptung werden wir nicht führen, da er ganz analog zu dem vorhergehenden Beweis verläuft; wir wollen lediglich zeigen, daß wir die Maclaurinschen Koeffizienten der gesuchten Lösung in eindeutiger Weise berechnen können. Die Anfangsbedingungen (221) liefern unmittelbar die Werte der Ableitungen

$$\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^{1+\alpha} u}{\partial x \partial y^\alpha}\right)_0$$

für beliebige nichtnegative Werte α , d. h., die Anfangsbedingungen liefern die Anfangswerte der gesuchten Funktion und derjenigen ihrer Ableitungen, in denen nicht mehr als einmal nach x differenziert wird. Die Differentialgleichung selbst liefert danach

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0.$$

Differenzieren wir beide Seiten der Differentialgleichung (220) mehrmals nach y , so erhalten wir die Werte

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x^2 \partial y^\alpha}\right)_0.$$

Differenzieren wir schließlich beide Seiten der Differentialgleichung (220) nach x und benutzen die erhaltene Differentialgleichung in derselben Weise wie soeben die Differentialgleichung (220), so erhalten wir die Werte

$$\left(\frac{\partial^{3+\alpha} u}{\partial x^3 \partial y^\alpha}\right)_0.$$

Führen wir das Verfahren fort, so erhalten wir in eindeutiger Weise alle Maclaurinschen Koeffizienten der gesuchten Funktion.

Wir formulieren nun den Satz von KOWALEWSKI für den allgemeinen Fall eines Systems von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Es sei ein System von m Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen $u_1, \dots, u_m$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ gegeben:

$$\frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}} = f_k \left(x_i, u_i, \frac{\partial^{l_i} u_i}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \right) \quad (k=1, \dots, m). \quad (222)$$

Die rechten Seiten dieser Differentialgleichung enthalten die unabhängigen Veränderlichen x_s , die Funktionen u_k und ihre Ableitungen bis zur Ordnung r_k ; dabei dürfen die Ableitungen $\frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}}$, nach denen das System aufgelöst ist, nicht auf den rechten Seiten vorkommen. Die Cauchyschen Anfangsbedingungen haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} u_k|_{x_1=0} &= \varphi_k(x_2, \dots, x_n), & \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= \varphi_k^{(1)}(x_2, \dots, x_n), \dots, \\ \frac{\partial^{r_k-1} u_k}{\partial x_1^{r_k-1}} \Big|_{x_1=0} &= \varphi_k^{(r_k-1)}(x_2, \dots, x_n) & (k=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (223)$$

Die auf den rechten Seiten der Beziehungen (223) stehenden Funktionen setzen wir für $x_2 = \dots = x_n = 0$ als regulär voraus. Es werden die Anfangswerte der gesuchten Funktionen u_k und ihrer Ableitungen nach x_1 bis zur Ordnung $r_k - 1$ vorgegeben.

Wir setzen voraus, daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (222) reguläre Funktionen sind für diejenigen Werte ihrer Argumente, die gleich den Anfangswerten der Funktionen sind, welche wir durch Differentiation aus den Funktionen (223) erhalten haben.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die Existenz und Eindeutigkeit einer regulären Lösung des Differentialgleichungssystems (222) mit den Anfangsbedingungen (223) beweisen.

Bemerkung. Man kann die gesamte Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch unter Beschränkung auf analytische Funktionen entwickeln. Im folgenden werden wir aber bei der Untersuchung der Differentialgleichungen höherer Ordnung die Unzulänglichkeit dieses Standpunktes erkennen.

§ 2. Differentialgleichungen höherer Ordnung

30. Die Typen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Darlegung der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung beginnen wir mit der Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x) u_{x_k} + c(x) u = 0. \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_{ik} seien gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_s . Da das Ergebnis zweier Differentiationen von der Reihenfolge unabhängig ist, können wir offenbar $a_{ki} = a_{ik}$ annehmen. Alle Funktionen und unabhängigen Veränderlichen setzen wir als reell voraus.

Die allgemeine Theorie gründet sich auf die Einteilung der Differentialgleichungen in Typen. Für Differentialgleichungen, die zu verschiedenen Typen gehören, lassen sich völlig verschiedene Grundprobleme aufstellen, die unterschiedliche Lösungsverfahren erfordern. Die Funktionen, welche Lösungen von Differentialgleichungen verschiedener Typen sind, besitzen verschiedenartige analytische Eigenschaften. Im vorliegenden Abschnitt nehmen wir eine Typeneinteilung (*Klassifikation*) für die Differentialgleichungen der Gestalt (1) vor. Zu diesem Zweck bilden wir mit Hilfsveränderlichen ξ_s die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k. \quad (2)$$

Erteilen wir den Veränderlichen x_s bestimmte Werte $x_s = x_s^{(0)}$, so erhalten wir eine quadratische Form mit Zahlenkoeffizienten. Ist diese Form positiv oder negativ definit [III/1, 35], so sagt man, daß die Differentialgleichung (1) im Punkt $x_s = x_s^{(0)}$ vom *elliptischen Typus* ist, oder einfach, daß sie dort *elliptisch* ist. Weiterhin sagt man, daß die Differentialgleichung in einem Bereich D des $x_1, \dots, x_n$ -Raumes elliptisch ist, wenn sie in allen Punkten dieses Bereiches vom elliptischen Typus ist. Die Zugehörigkeit zum elliptischen Typus läßt sich dadurch charakterisieren, daß in jedem Punkt des Bereiches D bei Transformation der quadratischen Form (2) auf eine Summe von Quadraten (auf Hauptachsen) alle entstehenden Koeffizienten ein und daselbe Vorzeichen besitzen, wobei keiner dieser Koeffizienten 0 sein darf.

Weiter sagen wir, daß die Differentialgleichung (1) im Bereich D vom *hyperboli-*

schen Typus (oder kurz *hyperboltsch*) ist, wenn nach Durchführung der Hauptachsen-transformation alle Koeffizienten der quadratischen Form (2) außer einem ein und dasselbe Vorzeichen haben, der eine übrigbleibende Koeffizient aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Wenn von diesen Koeffizienten keiner verschwindet und weder elliptischer noch hyperbolischer Typus vorliegt, sagt man manchmal, die Differentialgleichung sei vom *ultrahyperboltschen Typus*. Sind die Koeffizienten a_{ik} konstant, so hängt die Zugehörigkeit der Differentialgleichung zu einem bestimmten Typus nicht von den Werten der unabhängigen Veränderlichen ab. Die einfachste elliptische Gleichung ist die Laplacesche Differentialgleichung; eine hyperbolische Differentialgleichung ist die Wellengleichung.

Schließlich ist es üblich, aus den Differentialgleichungen der allgemeinen Gestalt (1) noch eine Klasse von Gleichungen hervorzuheben, die *parabolische* Differentialgleichungen genannt werden. Diese Differentialgleichungen werden nicht nur mit Hilfe der Koeffizienten $a_{ik}(x)$ vor den Ableitungen höchster Ordnung, sondern auch mit Hilfe der Koeffizienten $b_i(x)$ vor den Ableitungen u_{x_i} definiert. Für diese Klasse verschwindet nach der Transformation der quadratischen Form (2) in die Summe der Quadrate ein Koeffizient, während die anderen gleiches Vorzeichen besitzen. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß man mittels einer nichtentarteten linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen die Differentialgleichung (1) in dem fixierten Punkt $x = x^{(0)}$ in die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x^{(0)}) u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^n b'_i(x^{(0)}) u_{y_i} + c(x^{(0)}) u = 0$$

überführen kann.

Man sagt, die Differentialgleichung (1) ist vom parabolischen Typus (oder kurz parabolisch), falls nach solch einer Transformation ein Koeffizient $\lambda_i(x^{(0)})$ (beispielsweise $\lambda_n(x^{(0)})$) verschwindet, während alle anderen positiv (oder negativ) sind und der Koeffizient $b'_n(x^{(0)})$ vor der Ableitung u_{y_n} von 0 verschieden ist. Ein einfaches Beispiel für eine parabolische Differentialgleichung ist die Wärmeleitungsgleichung:

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n} = 0.$$

Die Veränderlichen x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) nennt man dabei gewöhnlich räumliche Veränderliche und x_n zeitliche Veränderliche.

Die von uns erklärten Klassen (Typen) von Differentialgleichungen umfassen nicht alle Gleichungen der Gestalt (1). Tatsächlich gibt es unter diesen auch solche, für die einige Koeffizienten $\lambda_i(x^{(0)})$ verschwinden. Wenn in diesem Fall die diesen Koeffizienten entsprechenden $b'_i(x^{(0)})$ von 0 verschieden sind, sagt man manchmal, die Differentialgleichung ist im Punkt $x^{(0)}$ *ultraparabolisch* oder *parabolisch* mit mehreren Zeiten. Anderenfalls gehen in die Differentialgleichung keine Ableitungen in bestimmten Richtungen ein, die ihnen entsprechenden y_i spielen dann die Rolle freier Parameter. Wir betrachten nicht alle möglichen Situationen und beschränken uns im weiteren auf die Untersuchung der Fälle, in denen die Differentialgleichung im gesamten uns interessierenden Bereich einem der klassischen Typen (elliptischer, hyperbolischer bzw. parabolischer Typus) angehört.

Enthalten die Koeffizienten a_{ik} der Differentialgleichung (1) die Funktion u und ihre partiellen Ableitungen u_{x_i} , so läßt sich der Typus der Differentialgleichung nur für eine feste Lösung $u^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ dieser Differentialgleichung bestimmen.

Setzen wir $u = u^{(0)}$ und $u_{x_i} = u_{x_i}^{(0)}$ in die Koeffizienten a_{ik} ein, so erhalten wir Funktionen, die nur von den x_s abhängen, und wir können auf Grund der vorhergehenden Ausführungen entscheiden, welchem Typus die Differentialgleichung für die gegebene Lösung $u^{(0)}$ angehört.

Für eine nichtlineare Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0$$

hat man zur Bestimmung des *Typus der Differentialgleichung für eine gegebene Lösung* $u^{(0)}$ die Koeffizienten a_{ik} mittels

$$a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_k}}$$

für $u = u^{(0)}$ zu berechnen und danach den Typus der linearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} = 0$$

festzustellen.

31. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung (1) mit konstanten Koeffizienten a_{ik} und bilden die zugehörige quadratische Form. Mit Hilfe einer linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen versuchen wir, alle Ausdrücke in der Differentialgleichung (1), die zweite Ableitungen enthalten, in eine möglichst einfache Form zu transformieren. Wir führen dazu statt der x_s durch eine lineare Transformation

$$y_k = c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

neue unabhängige Veränderliche y_s ein, wobei wir natürlich annehmen, daß die aus den Koeffizienten dieser Transformation gebildete Determinante von 0 verschieden sei. Die Ableitungen nach den ursprünglichen Veränderlichen lassen sich durch die Ableitungen nach den neuen Veränderlichen ausdrücken:

$$u_{x_i} = \sum_{s=1}^n c_{si} u_{y_s}, \quad u_{x_i x_k} = \sum_{s,t=1}^n c_{si} c_{tk} u_{y_s y_t}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (1) ein, so erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a'_{ik} u_{y_i y_k} + \dots = 0,$$

wobei sich die neuen Koeffizienten a'_{ik} durch die ursprünglichen folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$a'_{ik} = \sum_{s,t=1}^n c_{is} c_{kt} a_{st}. \quad (3)$$

Wir führen andererseits in die quadratische Form (2) mit Hilfe der zur Matrix der c_{ik} transponierten Matrix an Stelle der Veränderlichen ξ_s neue Veränderliche η_s ein, indem wir mit Hilfe dieser Matrix die ursprünglichen Veränderlichen durch die neuen ausdrücken, d. h.

$$\xi_k = c_{1k}\eta_1 + \dots + c_{nk}\eta_n \quad (k = 1, \dots, n)$$

setzen. Damit läßt sich leicht verifizieren, daß die transformierte quadratische Form gerade die durch (3) definierten Koeffizienten a'_{ik} besitzt; es gilt also

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k = \sum_{i,k=1}^n a'_{ik} \eta_i \eta_k.$$

Nun lassen sich bekanntlich die Koeffizienten c_{ik} stets so wählen, daß die quadratische Form (2) Hauptachsengestalt annimmt,

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i^2,$$

daß also mit anderen Worten $a'_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $a'_{ii} = \lambda_i$ gilt. Die Vorzeichen der Koeffizienten λ_i bestimmen gerade den Typus der Differentialgleichung. Mit der früheren Bezeichnung für die unabhängigen Veränderlichen nimmt die transformierte Differentialgleichung die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{x_i x_i} + \dots = 0$$

an. Ist die Differentialgleichung nicht nur in bezug auf die Ableitungen zweiter Ordnung, sondern auch in bezug auf die Ableitungen erster Ordnung und die Funktion selbst linear und sind alle auftretenden Koeffizienten konstant, so hat die transformierte Differentialgleichung die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n b'_i u_{x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n). \quad (4)$$

Versehen wir die unabhängigen Veränderlichen x_s mit passend gewählten Zahlenfaktoren, so können wir stets erreichen, daß die von 0 verschiedenen Koeffizienten λ_i gleich 1 oder -1 sind. Jetzt setzen wir voraus, alle λ_i seien von 0 verschieden, und zeigen, daß wir in diesem Fall mit Hilfe einer elementaren Transformation der gesuchten Funktion die Differentialgleichung auch von den Gliedern befreien können, welche erste Ableitungen enthalten. An Stelle von u führen wir durch

$$u = ve - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b'_i}{\lambda_i} x_i \quad (5)$$

eine neue gesuchte Funktion v ein.

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (4) ein, so erhalten wir, wie sich leicht nachprüfen läßt, eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_{x_i x_i} + c_1 v = f_1(x_1, \dots, x_n).$$

Für elliptische Differentialgleichungen haben alle λ_i dasselbe Vorzeichen. Multiplizieren wir nötigenfalls beide Seiten der Differentialgleichung mit -1 , so können wir annehmen, alle λ_i seien positiv. Führen wir an Stelle der x_i durch $x_i = \sqrt{\lambda_i} x'_i$ neue unabhängige Veränderliche x'_i ein, so befreien wir uns von den Koeffizienten λ_i . Unter Benutzung der früheren Bezeichnungen finden wir also, daß sich jede lineare elliptische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + c_1 u = f(x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

überführen läßt.

Jede beliebige hyperbolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

läßt sich in die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n x_n} + cu = f(x_1, \dots, x_n)$$

überführen, während jede parabolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n x_n} + cu = f(x_1, \dots, x_n)$$

übergeführt werden kann. Hierbei nennt man die unabhängige Veränderliche x_n zeitliche Veränderliche und bezeichnet sie mit t .

32. Normalformen bei zwei unabhängigen Veränderlichen. In [31] haben wir gezeigt, daß wir im Fall konstanter Koeffizienten alle Glieder unserer Differentialgleichung, die Ableitungen zweiter Ordnung enthalten, stets mit Hilfe einer linearen Transformation in eine gewisse Normalform überführen können. Falls die Koeffizienten von den x_s abhängen, können wir natürlich nicht erwarten, daß die Transformation in eine Normalform mit Hilfe einer linearen Transformation der Veränderlichen möglich ist. Wir müssen vielmehr allgemeinere Transformationen benutzen, und selbst dann läßt sich eine solche Transformation im allgemeinen nur für den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher durchführen. Wir betrachten dazu eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, die in bezug auf die Ableitungen zweiter Ordnung linear ist:

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + \dots = 0. \quad (7)$$

An Stelle von x und y führen wir neue unabhängige Veränderliche ξ, η ein,

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (8)$$

Die Beziehungen

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x, & u_y &= u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \varphi_y + u_{\eta\eta} \varphi_y^2 + u_{\xi\xi} \varphi_{xx} + u_{\xi\eta} \varphi_{xy} + u_{\eta\eta} \varphi_{yy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + u_{\xi\xi} \varphi_{yy} + u_{\xi\eta} \varphi_{xy} + u_{\eta\eta} \psi_{xy}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + u_{\xi\xi} \varphi_{xy} + u_{\xi\eta} \varphi_{xy} + u_{\eta\eta} \psi_{xy} \end{aligned}$$

drücken die Ableitungen nach den ursprünglichen Veränderlichen durch die Ableitungen nach den neuen Veränderlichen aus. Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (7) ein, so erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$a'(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + 2b'(\xi, \eta) u_{\xi\eta} + c'(\xi, \eta) u_{\eta\eta} + \dots = 0$$

mit

$$\begin{aligned} a'(\xi, \eta) &= a \varphi_x^2 + 2b \varphi_x \varphi_y + c \varphi_y^2, \\ c'(\xi, \eta) &= a \psi_x^2 + 2b \psi_x \psi_y + c \psi_y^2, \\ b'(\xi, \eta) &= a \varphi_x \psi_x + b (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + c \varphi_y \psi_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Durch unmittelbares Einsetzen läßt sich die Identität

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2) (\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2 \quad (10)$$

verifizieren.

Man erkennt leicht, daß das Vorzeichen der Differenz $ac - b^2$ den Typus der Differentialgleichung (7) bestimmt. Im Fall $ac - b^2 < 0$ ist die Differentialgleichung

hyperbolisch, im Fall $ac - b^2 > 0$ elliptisch und im Fall $ac - b^2 = 0$ parabolisch. Wegen (10) wird durch eine Transformation der Veränderlichen das Vorzeichen dieser Differenz und damit der Typus der Differentialgleichung nicht geändert.

Für eine hyperbolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat die Normalform bei zwei unabhängigen Veränderlichen die Gestalt

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0. \quad (11)$$

Führen wir an Stelle von x und y durch

$$\xi = \frac{x+y}{2}, \quad \eta = \frac{x-y}{2} \quad (12)$$

neue unabhängige Veränderliche ξ, η ein, so gelangen wir für den hyperbolischen Typus zu der Normalform

$$u_{\xi\eta} + \dots = 0. \quad (13)$$

Wir sehen somit, daß wir für den hyperbolischen Typus im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher die Normalform in der Gestalt (11) oder (13) wählen können. Die beiden Differentialgleichungen lassen sich leicht ineinander überführen.

Jetzt kehren wir zur Differentialgleichung (7) zurück und setzen voraus, diese Gleichung sei in einem Bereich D der x, y -Ebene hyperbolisch. Dies bedeutet, daß die quadratische Gleichung

$$a(x, y) \tau^2 + 2b(x, y) \tau + c(x, y) = 0 \quad (14)$$

für Werte x, y aus D voneinander verschiedene reelle Wurzeln besitzt. Hierbei nehmen wir entweder $a \neq 0$ oder $c \neq 0$ an. Denn für $a = c = 0$ hat die Differentialgleichung (7) bereits die Normalform (13). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a \neq 0$ annehmen. Wir betrachten nun die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$a(x, y) u_x^2 + 2b(x, y) u_x u_y + c(x, y) u_y^2 = 0. \quad (15)$$

Bezeichnen wir mit $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ die Wurzeln der Gleichung (14), so sehen wir, daß die Differentialgleichung (15) in die beiden Differentialgleichungen

$$u_x = f_1(x, y) u_y \quad (16_1)$$

und

$$u_x = f_2(x, y) u_y \quad (16_2)$$

zerfällt. Sind die Koeffizienten a, b und c und damit auch die Funktionen f_1 und f_2 hinreichend glatt, so haben die Differentialgleichungen (16₁) und (16₂) in einem Teilbereich von D Lösungen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung (vgl. [2]). Eine Lösung der Differentialgleichung (16₁) verwenden wir in der Transformation (8) als Funktion $\varphi(x, y)$, eine Lösung der Differentialgleichung (16₂) als $\psi(x, y)$. Man kann diese Lösungen so wählen, daß die Determinante $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x$ in dem angegebenen Teilbereich von D von 0 verschieden ist. Es gilt

$$\varphi_x = f_1 \varphi_y, \quad \psi_x = f_2 \psi_y,$$

woraus

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = (f_1 - f_2) \varphi_y \psi_y \quad (17)$$

folgt. Aus diesen Beziehungen ergibt sich: Wenn die Determinante in einem Punkt verschwindet, sind beide partielle Ableitungen erster Ordnung von φ oder ψ in diesem Punkt gleich 0. Somit müssen wir solche Lösungen der Differentialgleichungen (16₁) und (16₂) bestimmen, bei denen die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung nicht zugleich verschwinden.

Die Funktionen φ und ψ erfüllen die Differentialgleichung (15), und wegen (9) gilt $a' = c' = 0$. Aus der Identität (10) folgt $b' \neq 0$, so daß die Differentialgleichung (7) in die Gestalt (13) transformiert wird.

Wie wir in [2] gesehen haben, haben die Lösungen der Differentialgleichungen (16₁) und (16₂) lokalen Charakter, d. h., wir können Lösungen dieser Differentialgleichungen, die keine Konstanten sind, nur in einem gewissen Bereich konstruieren, der im allgemeinen nur ein Teil des Bereiches ist, in dem die Funktionen $f_k(x, y)$ stetig differenzierbar sind. Die Transformation der Differentialgleichung (7) auf eine Normalform ist nur in dem konstruierten Bereich möglich. Diese Bemerkung über den lokalen Charakter der Transformation der Differentialgleichung (7) in eine Normalform bezieht sich auch auf die weiteren Betrachtungen.

Wir betrachten nun eine elliptische Differentialgleichung. In diesem Fall ist $ac - b^2 > 0$, und die Wurzeln der Gleichung (14) sind konjugiert komplex. Wir bilden wiederum die Differentialgleichung (15). Die eine der Differentialgleichungen (16) lautet

$$u_x = \frac{-b + \sqrt{ac - b^2} i}{a} u_y,$$

wobei wir die Quadratwurzel beispielsweise positiv wählen. Setzen wir voraus, daß die Koeffizienten a , b und c analytische Funktionen von x und y sind und $a \neq 0$ gilt, so kommen wir zu einer Lösung $u = \varphi(x, y) + \psi(x, y) i$ dieser Differentialgleichung, die ebenfalls eine analytische Funktion ist [28]; dabei gilt

$$\varphi_x = -\frac{b}{a} \varphi_y - \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \psi_y, \quad \psi_x = -\frac{b}{a} \psi_y + \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \varphi_y.$$

Jetzt führen wir die Veränderlichkeitstransformation (8) durch. Unter Benutzung des Differentialgleichungssystems für φ und ψ und der Beziehungen (9) erhalten wir

$$b' = 0, \quad a' = c' = (ac - b^2) (\varphi_y^2 + \psi_y^2).$$

Nach Division durch a' nimmt die Differentialgleichung die Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0 \quad (18)$$

an. An Stelle der Beziehung (17) gilt

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \frac{2\sqrt{ac - b^2}}{a} \varphi_y \psi_y.$$

Somit ist das Problem auch für den elliptischen Fall gelöst. Eine Lösung dieses Problems im Großen unter bestimmten Bedingungen für die Koeffizienten a , b und c , die nicht als analytisch vorausgesetzt werden, enthält die Arbeit von I. N. ВЕКУА, Das Problem der Zurückführung elliptischer Differentialformen auf die kanonische Gestalt und ein verallgemeinertes System Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungen (russ.), Doklady AN SSSR 100 (1955); siehe auch sein Buch „Verallgemeinerte analytische Funktionen“, Berlin 1963 (Übersetzung aus dem Russischen).

Es bleibt noch der Fall einer parabolischen Differentialgleichung zu untersuchen. In diesem Fall hat die Gleichung (14) eine Doppelwurzel, und die Differentialgleichung (15) führt nur zu einer einzigen Differentialgleichung, d. h., die Differentialgleichungen (16₁) und (16₂) sind identisch. Als Funktion $\varphi(x, y)$ nehmen wir eine Lösung dieser Differentialgleichung, die zweite Funktion $\psi(x, y)$ wählen wir belie-

big, doch so, daß die Funktionaldeterminante von φ und ψ von 0 verschieden ist. Wegen der Wahl von $\varphi(x, y)$ gilt in der transformierten Differentialgleichung $\alpha' = 0$. Außerdem muß $ac - b^2 = 0$ sein, da die Differentialgleichung parabolisch ist, und aus der Beziehung (10) folgt $b' = 0$. Somit erhalten wir durch Transformation $\alpha' = b' = 0$. Die Funktion c' kann nicht identisch verschwinden, da wir anderenfalls eine Differentialgleichung erster Ordnung erhalten würden und die inverse Transformation von ξ, η auf x, y keine Differentialgleichung zweiter Ordnung (7) liefern könnte. Somit erhalten wir im parabolischen Fall die kanonische Form

$$u_{\eta\eta} + \dots = 0, \quad (19)$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder keine Ableitungen zweiter Ordnung, aber unbedingt ein Glied mit einer ersten Ableitung nach ξ enthalten.

33. Das Cauchysche Problem. Wir haben gesehen [29], daß für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad (20)$$

die Cauchyschen Anfangsbedingungen beispielsweise in der Vorgabe der Funktion u und ihrer Ableitung $u_x = p$ für einen Anfangswert $x = x_0$ bestehen können:

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad p|_{x=x_0} = \psi(y). \quad (21)$$

Diese Anfangsbedingungen heißen *spezielle Cauchysche Anfangsbedingungen*. Sie bringen zum Ausdruck, daß längs einer Geraden $x = x_0$ der x, y -Ebene die Werte der gesuchten Funktion und ihrer partiellen Ableitung p vorgegeben sind. Wir bemerken hierzu, daß sich die Werte der anderen partiellen Ableitung erster Ordnung $q|_{x=x_0} = \varphi'(y)$ unmittelbar aus der ersten Bedingung (21) ergeben. Somit kennen wir auf Grund der Anfangswerte längs der Kurve $x = x_0$ die Funktion selbst und ihre beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung. Es lassen sich auch leicht allgemeinere Cauchysche Anfangsbedingungen aufstellen. In der x, y -Ebene sei eine doppel-punktfreie Kurve λ gegeben; wir nehmen an, daß längs dieser Kurve die Werte der gesuchten Funktion u vorgegeben sind. Dann kennen wir längs der Kurve λ auch die Ableitung von u in Richtung der Tangente an die Kurve λ . Damit wir auch die Ableitung erster Ordnung in einer beliebigen Richtung kennen, müssen wir entlang der Kurve λ noch eine andere Größe vorgeben, und zwar muß dort die Ableitung von u in einer beliebigen Richtung, die von der Richtung der Tangente an λ verschieden ist, gegeben sein. Da dann die Ableitungen auf λ in zwei Richtungen der x, y -Ebene bekannt sind, läßt sich auf λ auch die Ableitung in einer beliebigen Richtung dieser Ebene berechnen. Somit müssen wir im vorliegenden Fall entlang der Kurve λ die Werte der Funktion selbst und ihrer Ableitung in einer beliebigen Richtung, die nicht mit der Richtung der Tangente an λ identisch ist, vorgeben. Die Vorgabe der Funktion u entlang der Kurve λ der x, y -Ebene bestimmt eine Kurve l im dreidimensionalen x, y, u -Raum. Außerdem sind längs λ die partiellen Ableitungen p und q bekannt. Somit bestehen schließlich die Cauchyschen Anfangsbedingungen in der Vorgabe einer Kurve l im dreidimensionalen x, y, u -Raum und in der Vorgabe von Tangentialebenen längs dieser Kurve. Unter Benutzung einer Parameterdarstellung können wir diese allgemeinen Cauchyschen Anfangsbedingungen in die folgende Gestalt überführen: Gegeben sind fünf Funktionen eines einzigen Parameters,

$$x(t), y(t), u(t), p(t), q(t), \quad (22)$$

welche der Bedingung

$$du = p \, dx + q \, dy \quad (23)$$

genügen. Diese Beziehung besagt, daß die Vorgabe der beiden partiellen Ableitungen p und q längs λ nicht der Vorgabe der Funktion u selbst widerspricht, d. h., daß die Ableitung in Richtung der Tangente von λ , die man aus den vorgegebenen Größen p und q errechnet, den Wert hat, den man aus der längs λ vorgegebenen Funktion u erhält. Die fünf Funktionen (22), die der Bedingung (23) genügen, bestimmen einen *Streifen* im dreidimensionalen x, y, u -Raum, und das Cauchysche Problem besteht in der Ermittlung einer Integralfläche der Differentialgleichung (20), die den vorgegebenen Streifen enthält.

In analoger Weise läßt sich das Cauchysche Problem auch im allgemeinen Fall beliebig vieler unabhängiger Veränderlicher stellen. Wir betrachten beispielsweise die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen

$$F(x_1, x_2, x_3, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots) = 0. \quad (24)$$

Die Cauchyschen Anfangsbedingungen bestehen jetzt in der Vorgabe der Funktion u und ihrer partiellen Ableitungen erster Ordnung auf einer Fläche S des dreidimensionalen x_1, x_2, x_3 -Raumes. Sind die Werte von u auf S gegeben, so genügt es zur Bestimmung aller ihrer auf S angenommenen partiellen Ableitungen erster Ordnung, auf S eine Ableitung nach einer beliebigen Richtung vorzugeben, die nicht in der Tangentialebene der Fläche S liegt. Ist die Fläche S , auf der die Cauchyschen Anfangswerte vorgegeben sind, die Ebene $x_1 = x_1^{(0)}$, so erhalten wir z. B.

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, x_3), \quad u_{x_1}|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, x_3) \quad (25)$$

als spezielle Cauchysche Anfangsbedingungen. In Parameterdarstellung bestehen die Cauchyschen Bedingungen in der Vorgabe von sieben Funktionen in zwei Parametern,

$$x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2), u(t_1, t_2), u_{x_1}(t_1, t_2), u_{x_2}(t_1, t_2), u_{x_3}(t_1, t_2), \quad (26)$$

welche die Bedingung

$$du = u_{x_1} \, dx_1 + u_{x_2} \, dx_2 + u_{x_3} \, dx_3 \quad (27)$$

erfüllen.

Die vorgegebenen Funktionen x_1, x_2, x_3 bestimmen eine Fläche, während die übrigen Anfangswerte eine Funktion u und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auf dieser Fläche bestimmen. Anfangswerte (26), die der Bedingung (27) genügen, nennt man gewöhnlich einen *Streifen* oder genauer einen *Streifen erster Ordnung* im vierdimensionalen x_1, x_2, x_3, u -Raum. Das Cauchysche Problem besteht in der Bestimmung einer Integralfläche der Differentialgleichung (24), die den vorgegebenen Streifen enthält. Falls die Funktion u von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ abhängt, besteht ein Streifen aus $2n+1$ Funktionen von $n-1$ Parametern

$$x_k(t_1, \dots, t_{n-1}), u(t_1, \dots, t_{n-1}), u_{x_k}(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n);$$

dabei müssen diese Funktionen der Beziehung

$$du = \sum_{k=1}^n u_{x_k} \, dx_k$$

genügen. Stellt eine der unabhängigen Veränderlichen die Zeit t dar und ist die Fläche, auf der die Cauchyschen Anfangswerte vorgegeben sind, die Ebene $t=0$,

so haben wir das übliche Problem der mathematischen Physik vor uns, eine vorgegebene Differentialgleichung mit vorgegebenen Anfangsbedingungen zu integrieren [II, 176].

Die Cauchyschen Anfangswerte bestimmen auf einer Kurve oder Fläche eine Funktion u und alle ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung. Wenn wir neben den Anfangsbedingungen noch die Differentialgleichung benutzen, können wir, wie wir in [29] gesehen haben, auf unserer Kurve oder Fläche im Fall der speziellen Cauchyschen Anfangsbedingungen auch alle Ableitungen zweiter Ordnung der gesuchten Funktion in eindeutiger Weise bestimmen. Wir nennen den gegebenen Streifen einen *charakteristischen Streifen*, wenn sich die Ableitungen zweiter Ordnung aus dem vorgegebenen Streifen und der Differentialgleichung nicht eindeutig bestimmen lassen. Im folgenden Abschnitt gehen wir für den Fall der quasilinearen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen darauf genauer ein.

34. Charakteristische Streifen. Wir untersuchen eine Differentialgleichung der Gestalt

$$ar + 2bs + ct + h = 0, \quad (28)$$

in der die Koeffizienten a, b, c und h gegebene Funktionen von x, y, u, p, q sind. Gesucht ist eine Integralfäche dieser Differentialgleichung, die einen vorgegebenen Streifen

$$x(t), y(t), u(t), p(t), q(t) \quad (du = p dx + q dy) \quad (29)$$

enthält. Offenbar gilt

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy;$$

fügen wir noch die Differentialgleichung selbst hinzu, so erhalten wir die drei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} dx \cdot r + dy \cdot s &= dp, \\ dx \cdot s + dy \cdot t &= dq, \\ ar + 2bs + ct &= -h \end{aligned} \quad (30)$$

zur Bestimmung der Ableitungen zweiter Ordnung der gesuchten Funktion auf der Grundkurve $\lambda(x(t), y(t))$, auf der die Cauchyschen Anfangswerte vorgegeben sind. In diesem Gleichungssystem sind r, s, t die gesuchten Funktionen, alle übrigen Größen sind wegen (29) bekannte Funktionen des Parameters t . Ist die Determinante des Systems von 0 verschieden, so erhalten wir für die Ableitungen zweiter Ordnung bestimmte Werte. Somit ist die Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ableitungen zweiter Ordnung nicht oder nicht eindeutig bestimmt werden können. In entwickelter Form lautet diese Gleichung

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0. \quad (32)$$

Wir suchen eine weitere Bedingung, die uns garantiert, daß das Problem insbesondere mehrdeutig lösbar ist, d. h., daß das Gleichungssystem (30) unendlich viele Lösungen besitzt. Hierzu nehmen wir an, daß einer der zweireihigen Minoren

der Determinante (31) von 0 verschieden ist. Beispielsweise sei

$$\begin{vmatrix} 0 & dy \\ a & c \end{vmatrix} = -a \, dy \neq 0.$$

Im vorliegenden Fall besitzt das System (30) eine charakteristische Determinante [III/1, 9]. Für die mehrdeutige Lösbarkeit dieses Systems ist notwendig und hinreichend, daß zusätzlich zur Bedingung (31) das Verschwinden der charakteristischen Determinante [III/1, 9] gefordert wird:

$$\begin{vmatrix} dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \\ a & -h & c \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a \, dp \, dy + h \, dx \, dy + c \, dx \, dq = 0. \quad (33)$$

Mit der Beziehung (23) erhalten wir schließlich die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} a \, dy^2 - 2b \, dx \, dy + c \, dx^2 &= 0, \\ a \, dp \, dy + h \, dx \, dy + c \, dx \, dq &= 0, \\ du &= p \, dx + q \, dy, \end{aligned} \quad (34)$$

die den charakteristischen Streifen als einen Streifen festlegen, auf dem die Bestimmung der Ableitungen zweiter Ordnung aus dem Gleichungssystem (30) zu unendlich vielen Lösungen führt.

Zunächst behandeln wir den Fall der speziellen Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad p|_{x=x_0} = \psi(y). \quad (35)$$

In den Funktionen (29) steht jetzt an Stelle des Parameters t die Veränderliche y , und die Veränderliche x hat den konstanten Wert $x = x_0$. Die Bedingung (32) führt auf $a = 0$. Wir bemerken, daß diese Beziehung nicht identisch erfüllt zu sein braucht, sondern nur nach dem Einsetzen der Anfangswerte (35) in die Funktion a . Das Gleichungssystem (30) lautet damit

$$s \, dy = dp, \quad t \, dy = dq, \quad 2bs + ct = -h.$$

Es ist genau dann mehrdeutig lösbar, wenn die dritte Gleichung eine Folge der ersten beiden ist. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dy und berücksichtigen die ersten beiden Gleichungen, so gelangen wir zu der Bedingung

$$2b \, dp + c \, dq = -h \, dy,$$

die in diesem Fall die Bedingung (33) ersetzt. Damit erhalten wir im Fall der speziellen Cauchyschen Anfangsbedingungen (35) schließlich folgende Bedingungen, die einen charakteristischen Streifen bestimmen:

$$a = 0, \quad 2b \, dp + c \, dq = -h \, dy, \quad du = q \, dy. \quad (36)$$

Die Bedingung $a = 0$ zeigt, daß es nicht möglich ist, aus der Differentialgleichung (28) die Größe u_{xx} zu ermitteln. Die zweite Bedingung

$$2b \frac{dp}{dy} + c \frac{dq}{dy} + h = 0$$

drückt aus: Die auf der Geraden $x = x_0$ vorgegebenen Größen p und q sind so beschaffen, daß die Beziehung (28) erfüllt ist; denn auf dieser Geraden gilt $s = \frac{dp}{dy}$ und $t = \frac{dq}{dy}$. Aus der dritten Bedingung folgt

$$q|_{x=x_0} = \varphi'(y).$$

35. Ableitungen höherer Ordnung. Im vorigen Abschnitt haben wir die Ableitungen zweiter Ordnung auf einem vorgegebenen Streifen bestimmt. Jetzt wollen wir die Ableitungen höherer Ordnung bestimmen. Wir setzen voraus, die Determinante in (31) sei von 0 verschieden, bilden das vollständige Differential der ersten beiden Gleichungen (30) und differenzieren die vorgegebene Gleichung (28) nach x und y . Somit haben wir zur Bestimmung der vier Ableitungen dritter Ordnung von u auf dem vorgegebenen Streifen die vier linearen Gleichungen

$$(dx)^2 u_{xxx} + 2 dx dy u_{xxy} + (dy)^2 u_{xyy} = \dots,$$

$$(dx)^2 u_{xxy} + 2 dx dy u_{xyy} + (dy)^2 u_{yyy} = \dots,$$

$$au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} = \dots,$$

$$au_{xxy} + 2bu_{xyy} + cu_{yyy} = \dots.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (dx)^2 & 2 dx dy & (dy)^2 & 0 \\ 0 & (dx)^2 & 2 dx dy & (dy)^2 \\ a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \end{vmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß diese Determinante gleich dem Quadrat der Determinante (31) und damit ebenfalls von 0 verschieden ist. Zum Beweis bezeichnen wir mit γ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$a + 2b\gamma + c\gamma^2 = 0 \quad (37)$$

und addieren zu den Elementen der ersten Spalte von Δ_1 die mit γ multiplizierten Elemente der zweiten Spalte, die mit γ^2 multiplizierten Elemente der dritten Spalte und die mit γ^3 multiplizierten Elemente der vierten Spalte. Dann lauten die Elemente der ersten Spalte

$$(dx + \gamma dy)^2, \gamma(dx + \gamma dy)^2, 0, 0,$$

und man erkennt, daß die Determinante Δ_1 jetzt ein homogenes Polynom vierten Grades in bezug auf dx und dy ist, welches durch $(dx + \gamma dy)^2$ teilbar ist. Der Koeffizient von $(dx)^4$ in Δ_1 ist gleich c^2 . Bezeichnen wir mit γ_1 und γ_2 die Wurzeln der Gleichung (37), so erhalten wir

$$\Delta_1 = c^2(dx + \gamma_1 dy)^2 (dx + \gamma_2 dy)^2$$

oder, wenn wir die Eigenschaften der Wurzeln einer quadratischen Gleichung berücksichtigen,

$$\Delta_1 = (c dx^2 - 2b dx dy + a dy^2)^2 = \Delta^2.$$

Beim Beweis haben wir vorausgesetzt, daß die Gleichung (37) verschiedene Wurzeln hat. Ist aber die Beziehung $\Delta_1 = \Delta^2$ unter dieser Voraussetzung richtig, so ist sie auch richtig, wenn die Gleichung (37) gleiche Wurzeln hat. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, die Koeffizienten a, b, c derart etwas abzuändern, daß die Gleichung (37) verschiedene Wurzeln hat, und darauf in der Beziehung $\Delta_1 = \Delta^2$ den Grenzübergang durchzuführen, bei dem die geänderten Koeffizienten gegen ihre ursprünglichen Werte streben, für welche die Gleichung (37) gleiche Wurzeln besitzt.

Ganz analog können wir fünf lineare Gleichungen zur Bestimmung der fünf Ableitungen vierter Ordnung aufstellen; die Determinante dieses Gleichungssystems ist ebenfalls von 0 verschieden und so fort. Wir setzen nun voraus, daß die auf-

tretenden Funktionen regulär analytisch sind. Genau wie im Fall spezieller Cauchy-scher Anfangsbedingungen und einer nach r aufgelösten Differentialgleichung [29] können wir in diesem allgemeineren Fall unter der Voraussetzung, daß die Determinante Δ von 0 verschieden ist, auf einem vorgegebenen Streifen die Ableitungen jeder Ordnung bestimmen. Würden wir die zugehörige Taylorsche Reihe bilden, so könnten wir wie in [28] ihre Konvergenz beweisen.

Wir gehen nun zum Fall eines charakteristischen Streifens über. Dabei beschränken wir uns auf die Betrachtung spezieller Cauchyscher Anfangsbedingungen (35). Diese Anfangsbedingungen liefern uns s und t für $x = x_0$, und es bleibt nur noch r zu bestimmen. Beim Einsetzen der erhaltenen Anfangswerte in die Gleichung (28) erhalten wir wegen (36) eine Identität, und die Ableitung r erweist sich für $x = x_0$ zunächst als völlig unbestimmt. Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung (28) nach x ,

$$ar_x + 2bs_x + ct_x + (a_x + a_u p + a_v r + a_q s) r + (\dots) s + (\dots) t + (\dots) = 0. \quad (38)$$

Die Punkte sollen dabei Ausdrücke andeuten, die dem Ausdruck in der ersten Klammer analog sind. Setzen wir in diese Gleichung die Anfangswerte (35) und die bereits bekannten Ableitungen zweiter Ordnung

$$s|_{x=x_0} = \psi'(y), \quad t|_{x=x_0} = \varphi''(y)$$

ein, so erhalten wir mit $r|_{x=x_0} = \omega(y)$ für die gesuchte Funktion $\omega(y)$, wie sich leicht verifizieren läßt, die Riccatische Differentialgleichung

$$\alpha(y) \omega'(y) + \beta(y) \omega^2(y) + \gamma(y) \omega(y) + \delta(y) = 0,$$

in der α, β, γ und δ bekannte Funktionen von y sind. Haben wir eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung, so kennen wir die Größe r für $x = x_0$, folglich kennen wir auch alle Ableitungen dritter Ordnung für $x = x_0$ mit Ausnahme von u_{xxx} . Zur Bestimmung des Anfangswertes dieser Ableitung müssen wir die Gleichung (38) nach x differenzieren und in die erhaltene Gleichung alle bereits berechneten Anfangswerte einsetzen. Auf diese Weise finden wir für die gesuchte Funktion $u_{xxx}|_{x=x_0} = \omega_1(y)$ eine lineare Differentialgleichung

$$\alpha_1(y) \omega'_1(y) + \beta_1(y) \omega_1(y) + \gamma_1(y) = 0.$$

Dieses Verfahren läßt sich weiter fortsetzen. Bei der Integration der Riccatischen Differentialgleichung und der weiteren linearen Differentialgleichungen werden immer wieder neue willkürliche Konstante eingeführt; die Schwierigkeit des Problems besteht darin, die Werte dieser Konstanten so zu wählen, daß die erhaltene Taylorsche Reihe konvergiert. Man kann beweisen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen, daß für die hyperbolische Differentialgleichung diese Wahl auf unendlich viele Arten möglich ist, daß also durch einen charakteristischen Streifen wirklich unendlich viele Integralflächen hindurchgehen. Die Bedingungen (36) oder, im allgemeineren Fall, (34) stellen somit notwendige und hinreichende Bedingungen für die Anfangswerte dar, die erfüllt sein müssen, wenn Integralflächen existieren sollen, welche den vorgegebenen charakteristischen Streifen enthalten.

Als Beispiel betrachten wir eine einfache parabolische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$t - u_x = 0, \quad \text{d. h.} \quad u_x = u_{yy}. \quad (39)$$

Bei diesem Beispiel ist $a = b = 0$ und $c = -1$; die Gleichung (32) liefert $dx = 0$, d. h. $x = \text{const.}$ Versucht man also, das Cauchysche Problem für eine Kurve $x = x_0$ zu lösen, so müssen dabei gewisse Besonderheiten auftreten. Wir nehmen an, daß

spezielle Cauchysche Anfangsbedingungen (35) vorgegeben sind. Setzen wir in der Differentialgleichung (39) $x=x_0$, so erhalten wir $\psi(y)=\varphi''(y)$, woraus ersichtlich ist, daß die Funktion $\psi(y)$ durch die Vorgabe der Funktion $\varphi(y)$ vollständig bestimmt ist. Dies entspricht der Tatsache, daß die zweite Bedingung (36) erfüllt sein muß. Somit genügt es im vorliegenden Fall, nur die erste Bedingung (35) vorzugeben.

Differenzieren wir die Differentialgleichung (39) nach x und setzen $x=x_0$, so können wir die Anfangswerte $r|_{x=x_0}=\varphi^{(IV)}(y)$ vollständig bestimmen. Differenzieren wir jetzt (39) zweimal nach x und setzen $x=x_0$, so erhalten wir, da wir die Anfangswerte von r bereits kennen, die Anfangswerte der Ableitung dritter Ordnung nach x usw. Die Anfangswerte der Ableitungen nach x sind jetzt eindeutig bestimmt, und die vorhin angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen arten in endliche Beziehungen aus. Bestimmen wir die Anfangswerte der Ableitungen jeder Ordnung nach x für $x=x_0$, so können wir die zugehörige Taylorsche Reihe konstruieren. Es zeigt sich, daß sie in einer Umgebung von $x=x_0$ nur dann konvergiert, wenn $\varphi(y)$ eine ganze Funktion ist, die einer gewissen Nebenbedingung genügt. Wir erinnern daran, daß wir bei dem Problem der Wärmeausbreitung in einem unendlichen langen Stab [II, 214] eine der ersten Bedingung (35) genügende Lösung der Differentialgleichung (39) in Gestalt eines bestimmten Integrals konstruiert haben. Dabei war es natürlich nicht nötig, vorauszusetzen, daß $\varphi(y)$ eine ganze Funktion ist. Wollen wir zu den früheren Bezeichnungen aus [II, 214] übergehen, so müssen wir in der Differentialgleichung (39) die Größe x durch t und die Größe y durch x ersetzen sowie in der Differentialgleichung aus [II, 214] $a^2=1$ annehmen.

Setzen wir $\varphi(y)=0$, so erhalten wir offenbar eine Lösung der Differentialgleichung (39), die identisch 0 ist. Wir zeigen, daß es noch eine elementare Lösung der Differentialgleichung (39) gibt, die mit Ausnahme des Punktes $y=0$, $x=x_0$ dieselbe Anfangsbedingung $u|_{x=x_0}=0$ erfüllt. Wir setzen

$$u = \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} e^{-\frac{y^2}{4(x-x_0)}} \quad \text{für } x > x_0, \quad (40_1)$$

$$u = 0 \quad \text{für } x \leq x_0. \quad (40_2)$$

Die Funktion (40₁) und alle ihre Ableitungen streben gegen 0, wenn x (von größeren Werten her) gegen x_0 strebt. Die durch (40₁) und (40₂) definierte Funktion u sowie alle ihre Ableitungen bleiben also beim Durchgang durch die Gerade $x=x_0$ stetig und verschwinden auf dieser Geraden. Eine Ausnahme bildet nur der Punkt $x=x_0$, $y=0$, in dem die konstruierte Funktion eine Singularität besitzt. Durch Differentiation von (40₁) überzeugen wir uns unmittelbar davon, daß die konstruierte Funktion der Differentialgleichung (39) genügt. Die konstruierte Funktion ist natürlich in keinem Punkt der Geraden $x=x_0$ eine reguläre analytische Funktion von x , denn links von dieser Geraden ist sie identisch 0 und rechts von 0 verschieden. Somit läßt sich die konstruierte Funktion nicht in eine Taylorsche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ entwickeln. Die Lösung (40₁) unterscheidet sich nur um einen konstanten Faktor von der Lösung, welche eine elementare Wärmequelle beschreibt [II, 214].

36. Reelle und komplexe Charakteristiken. Da die Koeffizienten der Differentialgleichung (28) nicht nur von x und y , sondern auch von u , p und q abhängen können, läßt sich der Typus der Differentialgleichung nur für einen festen Punkt des fünfdimensionalen x, y, u, p, q -Raumes bestimmen. Dabei haben wir für $b^2-ac > 0$ den hyperbolischen, für $b^2-ac < 0$ den elliptischen und für $b^2-ac = 0$ den parabolischen

schen Typus. Es sei ein Streifen (29) gegeben, den wir als reell voraussetzen. Ist auf diesem Streifen unsere Differentialgleichung elliptisch, so kann der Ausdruck auf der linken Seite der Bedingung (32) nicht verschwinden, folglich kann kein reeller Streifen charakteristisch sein. Wir beschränken uns nun auf den hyperbolischen Typus. Die Gleichung (32) stellt eine quadratische Gleichung in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ dar. Im hyperbolischen Fall hat sie zwei verschiedene reelle Wurzeln, die wir mit $\mu_1(x, y, u, p, q)$ und $\mu_2(x, y, u, p, q)$ bezeichnen. Die Gleichung (32) zerfällt damit in die zwei Gleichungen $dy = \mu_i dx$ ($i = 1, 2$). Wir können somit an Stelle der Gleichungen (34) die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} dy - \mu_i dx &= 0, \\ a\mu_i dp + h\mu_i dx + c dq &= 0 \quad (i = 1, 2), \\ du &= p dx + q dy \end{aligned} \quad (41)$$

schreiben, zu denen zwei Systeme von Charakteristiken gehören.

Besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn die Differentialgleichung in bezug auf die Ableitungen zweiter Ordnung linear ist, d. h., wenn die Koeffizienten a, b und c nur von den unabhängigen Veränderlichen x, y abhängen. In diesem Fall ist die Gleichung (32) eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit den Veränderlichen x und y :

$$a(x, y) dy^2 - 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0.$$

Im hyperbolischen Fall bestimmt sie in der x, y -Ebene zwei Kurvenscharen, die gewöhnlich *charakteristische Kurven* oder *Charakteristiken* der Differentialgleichung (28) genannt werden. Die spezifische Eigenschaft einer jeden charakteristischen Kurve besteht in folgendem: Wenn wir längs dieser Kurve Cauchysche Anfangswerte, d. h. die Funktion u und ihre Ableitungen erster Ordnung, vorgeben, dann führt der auf diese Weise erhaltene Streifen entweder zu einem System sich widersprechender Gleichungen (30) für die Ableitungen zweiter Ordnung, oder er ist ein charakteristischer Streifen. Für jede von den Charakteristiken verschiedene Kurve führen beliebige Cauchysche Anfangswerte zu wohlbestimmten Werten für die Ableitungen zweiter und höherer Ordnung. Im elliptischen Fall hat die Gleichung (32) für $\frac{dy}{dx}$ komplexe Wurzeln, und es gibt in der x, y -Ebene keine charakteristischen

Kurven. Gehen wir zu komplexen Werten der Veränderlichen x, y über, so können wir aus der Gleichung (32) komplexe Charakteristiken erhalten. Hierbei setzen wir natürlich alle Funktionen als analytisch voraus. Im parabolischen Fall liefert uns schließlich die Gleichung (32) in der x, y -Ebene eine einzige Schar von Charakteristiken. Kehren wir zu den Ergebnissen von [32] zurück, so sehen wir, daß wir bei der Überführung der Differentialgleichung in kanonische Form als Koordinatenlinien in der x, y -Ebene die Schar der charakteristischen Kurven benutzt haben.

37. Die grundlegenden Sätze. Charakteristische Mannigfaltigkeiten sind wie im Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung bei der Integration unserer Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung. Wir gehen nun auf die grundlegenden Sätze ein, die denen für Differentialgleichungen erster Ordnung völlig entsprechen.

Wir nehmen an, daß sich zwei Integralflächen der Differentialgleichung (28) längs einer Kurve l des x, y, u -Raumes von endlicher Ordnung berühren, d. h.,

daß entlang dieser Kurve die Integralflächen eine gemeinsame Tangentialebene haben, aber bestimmte Ableitungen von höherer als erster Ordnung für diese Integralflächen voneinander verschieden sind. Man sieht leicht, daß die Kurve mit den zugehörigen Tangentialebenen einen charakteristischen Streifen darstellen muß. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde aus den Überlegungen in [35] hervorgehen, daß wir längs l wohlbestimmte Werte für die Ableitungen jeder Ordnung erhalten. Somit gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Berühren sich zwei Integralflächen längs einer Kurve l von endlicher Ordnung, so stellt diese Kurve mit den zugehörigen Tangentialebenen einen charakteristischen Streifen dar.*

Die grundlegende Eigenschaft eines charakteristischen Streifens ist, daß die Differentialgleichung längs eines solchen Streifens zu einem unterbestimmten Gleichungssystem (30) für die Ableitungen zweiter Ordnung führt. Diese Eigenschaft hängt natürlich nicht von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen ab, so daß wir den folgenden Satz erhalten.

Satz 2. *Bei einer beliebigen umkehrbaren und glatten Transformation der Veränderlichen x, y gehen charakteristische Streifen wieder in charakteristische Streifen über.*

Es sei eine Integralfläche S der Differentialgleichung (28) gegeben. Auf dieser Fläche sind u, p und q bestimmte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y . Setzen wir in die Koeffizienten der Differentialgleichung (28) an Stelle von u, p, q die entsprechenden Funktionen von x und y ein, so erhalten wir für diese Koeffizienten bestimmte Ausdrücke in x und y , und die Gleichung (32) stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung dar, die auf der Fläche S zwei Kurvenscharen bestimmt. Auf einer jeden Kurve l dieser Scharen sind die Gleichungen (23) und (32) erfüllt, und man sieht leicht, daß längs einer solchen Kurve auch die zweite Gleichung (34) erfüllt sein muß. Denn wäre sie nicht erfüllt, so hätten wir ein System sich widersprechender Gleichungen zur Bestimmung der Ableitungen zweiter Ordnung, im Gegensatz zu der Tatsache, daß der durch die Kurve l und die Tangentialebenen der Integralfläche S bestimmte Streifen sich auf der Integralfläche S befindet. Wir erhalten somit den folgenden dritten Satz.

Satz 3. *Jede Integralfläche kann mit einer Schar charakteristischer Streifen bedeckt werden.*

Bemerkung. Wollen wir im Reellen bleiben, so gilt dieses Resultat nur im hyperbolischen oder parabolischen Fall; dabei können wir im hyperbolischen Fall die Integralfläche mit zwei Scharen charakteristischer Streifen bedecken.

Wir beweisen jetzt die Umkehrung hiervon, und zwar den folgenden vierten Satz.

Satz 4. *Erzeugt eine Schar charakteristischer Streifen eine Fläche $S: u = u(x, y)$, wobei die Funktion $u(x, y)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, so ist diese Fläche eine Integralfläche der Differentialgleichung (28).*

Es sei eine Fläche S gegeben, die mit einer Schar von Streifen überdeckt ist, auf denen die Gleichungen (34) erfüllt sind. Auf jedem dieser Streifen gilt

$$dp = r \, dx + s \, dy, \quad dq = s \, dx + t \, dy.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für dp und dq in die zweite Gleichung von (34) ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$as \, dy^2 + (ar + ct + h) \, dx \, dy + cs \, dx^2 = 0,$$

$$a \, dy^2 - 2b \, dx \, dy + c \, dx^2 = 0.$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit s und subtrahieren sie von der ersten, so gelangen wir gerade zu der ursprünglichen Differentialgleichung (28), wobei zu beachten ist, daß das Produkt $dx dy$ von 0 verschieden ist, da x und y unabhängige Veränderliche sind.

Im Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung erhielten wir für die charakteristischen Streifen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, mit Hilfe dessen sich die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen ließ. Im vorliegenden Fall stellt das System (34) ein System von drei (totalen) Differentialgleichungen für fünf gesuchte Funktionen dar. In einer Arbeit von LEWY (Math. Ann. 97) wird gezeigt, wie man das System (34) so erweitern kann, daß man ein spezielles System von fünf Differentialgleichungen erster Ordnung mit fünf unbekannten Funktionen erhält. Für dieses System läßt sich in bestimmter Weise eine Lösung des Cauchyschen Problems konstruieren, die auf eine Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (28) führt.

Im folgenden Abschnitt behandeln wir spezielle Fälle, in denen das System (34) ein Integral besitzt.

38. Vorintegrale. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen transformieren wir zunächst die Gleichungen (34), welche die charakteristischen Streifen bestimmen, auf eine neue Form. Auf Grund der Eigenschaften der Wurzeln μ_1, μ_2 der quadratischen Gleichung (37) gilt $\mu_1\mu_2 = \frac{c}{a}$. Mit Hilfe dieser Beziehung können wir das System (41) für $i=1$ in der Gestalt

$$dy - \mu_1 dx = 0, \quad dp + \mu_2 dq + \frac{h}{a} dx = 0 \quad du - (p + q\mu_1) dx = 0 \quad (42)$$

schreiben.

Das zweite System (für $i=2$) geht aus dem System (42) durch Vertauschung der Buchstaben μ_1 und μ_2 hervor. Gesucht ist eine Funktion $V(x, y, u, p, q)$, deren vollständiges Differential infolge der Gleichungen (42) gleich 0 ist:

$$V_x dx + V_y dy + V_u du + V_p dp + V_q dq = 0. \quad (43)$$

Bestimmen wir dy, du und dp aus dem System (42) und setzen die erhaltenen Ausdrücke in die linke Seite von (43) ein, so müssen die Koeffizienten der verbleibenden Differentiale dx und dq einzeln gleich 0 sein. Die Funktion V ist also genau dann ein Integral des Systems (42),

$$V(x, y, u, p, q) = C, \quad (44)$$

wenn sie den beiden linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$V_x + \mu_1 V_y + (p + \mu_1 q) V_u - \frac{h}{a} V_p = 0, \quad V_q - \mu_2 V_p = 0 \quad (45)$$

genügt. Vertauschen wir in diesen Differentialgleichungen μ_1 und μ_2 miteinander so erhalten wir ein analoges Differentialgleichungssystem, welches eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß die Funktion V ein Integral des zweiten Systems charakteristischer Streifen ist. Ein Lösungsverfahren für das Differentialgleichungssystem (45) wurde in [12] dargelegt. Wir nehmen an, daß wir eine Lösung gefunden haben, die von der trivialen Lösung $V = \text{const}$ verschieden ist. Wir zeigen, daß dann jede Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung (44), die keine singuläre Lösung ist, auch eine Lösung der Differentialgleichung (28) ist. Es muß nämlich das vollständige Differential von V infolge von (42) verschwinden, d. h., es muß eine Linear-

kombination der linken Seiten dieser Gleichungen sein:

$$dV = \alpha(dy - \mu_1 dx) + \beta \left(dp + \mu_2 dq + \frac{h}{a} dx \right) + \gamma(du - p dx - q dy). \quad (46)$$

Es sei nun eine Integralfäche S der Differentialgleichung (44) gegeben. Auf dieser Fläche sind u, p und q bestimmte Funktionen von x und y . Integrieren wir die Differentialgleichung erster Ordnung $dy - \mu_1 dx = 0$, so erhalten wir eine Kurvenschar, welche die Fläche S überdeckt. Außerdem gilt auf diesen Kurven offenbar $du = p dx + q dy$. Demzufolge sind die Faktoren von α und γ in (46) längs unserer Kurven gleich 0, und wir erhalten längs dieser Kurven, d. h. auf der Fläche S , die Beziehung

$$\beta \left(dp + \mu_2 dq + \frac{h}{a} dx \right) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist die Integralfäche S keine singuläre Lösung, folglich ist auf der linken Seite von (43) der Koeffizient von dp oder dq von 0 verschieden. Hieraus ergibt sich $\beta \neq 0$, folglich sind auf unseren Kurven alle drei Gleichungen (42) erfüllt, d. h., die Fläche S ist mit charakteristischen Streifen der Differentialgleichung (28) überdeckt. Auf Grund des Satzes 4 aus [87] ist dann aber diese Fläche eine Integralfäche der Differentialgleichung (28). Kennen wir also ein Integral (44), so erhalten wir eine Klasse von Lösungen der Differentialgleichung (28), wenn wir die Differentialgleichung erster Ordnung (43) integrieren. Wir nehmen nun an, daß wir zwei unabhängige Lösungen V_1 und V_2 des Differentialgleichungssystems (45) gefunden haben. Dann ist auch der Ausdruck $V_1 - \Phi(V_2)$ für jede beliebige Funktion Φ eine Lösung des Systems (45), und wir haben ein Integral

$$V_1 - \Phi(V_2) = 0 \quad (47)$$

des Differentialgleichungssystems (42), welches die willkürliche Funktion Φ enthält. Gesucht sei eine Integralfäche der Differentialgleichung (28), die einen vorgegebenen Streifen (29) enthält. Setzen wir in die Funktionen V_1 und V_2 an Stelle der Größen x, y, u, p, q ihre Ausdrücke aus (29) ein, so erhalten wir zwei wohlbestimmte Funktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ des Parameters t . Die Gleichung (47) lautet dann $v_1(t) - \Phi[v_2(t)] = 0$. An Stelle von t führen wir die neue Veränderliche $\sigma = v_2(t)$ ein. Lösen wir diese Gleichung nach t auf, so erhalten wir $t = \omega(\sigma)$, und die vorhergehende Gleichung, ausgedrückt in der Veränderlichen σ , bestimmt die Gestalt der Funktion $\Phi(\sigma) = v_1[\omega(\sigma)]$. Haben wir die Funktion $\Phi(\sigma)$ bestimmt, so können wir (47) als Differentialgleichung erster Ordnung auffassen. Lösen wir für sie das Cauchysche Problem mit den Anfangswerten (29), so erhalten wir auch eine Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (28). Ein Integral des Differentialgleichungssystems (42) oder des analogen Systems, das man durch Vertauschung von μ_1 und μ_2 erhält, wird gewöhnlich *Vorintegral der Differentialgleichung* (28) genannt. Ist das Differentialgleichungssystem (45) vollständig, so hat es drei unabhängige Lösungen. Man kann zeigen, daß dies nur für $\mu_1 = \mu_2$ möglich ist.

Bemerkung. Wenn $h = 0$ ist und die Koeffizienten a, b und c konstant sind oder nur von p und q abhängen, hängen μ_1 und μ_2 ebenfalls nur von p und q ab, und wir können eine Lösung des Differentialgleichungssystems (45) finden, indem wir V als Funktion von p und q allein ansetzen. Dann ist die erste Differentialgleichung für jedes beliebige $V(p, q)$ erfüllt, denn es gilt $h = 0$. Zur Ermittlung von V haben wir also die eine Differentialgleichung $V_q - \mu_2(p, q) V_p = 0$. Haben wir eine Lösung dieser Differentialgleichung $V_1(p, q)$ gefunden, so erhalten wir die Differentialgleichung erster Ordnung $V_1(p, q) = \text{const}$, deren sämtliche Lösungen auch die ursprüngliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen. An Stelle von $\mu_2(p, q)$ hätten wir auch die zweite Wurzel $\mu_1(p, q)$ der Gleichung (32) benutzen können; damit hätten wir eine zweite Differentialgleichung erster Ordnung $V_2(p, q) = \text{const}$ erhalten.

39. Die Monge-Ampèresche Differentialgleichung. Die gesamte hier entwickelte Theorie der charakteristischen Streifen und der Vorintegrale läßt sich unmittelbar auch auf

allgemeinere Differentialgleichungen übertragen, die in bezug auf r, s, t und $rt - s^2$ linear sind, also die Form

$$ar + 2bs + ct + g(rt - s^2) + h = 0 \quad (g \neq 0)$$

haben. Eine solche Differentialgleichung wird gewöhnlich *Monge-Ampèresche Differentialgleichung* genannt. Ist ein Streifen vorgegeben, so ist die Bestimmung der Ableitungen zweiter Ordnung auf diesem Streifen völlig eindeutig, wenn der Ausdruck

$$A = a \, dy^2 - 2b \, dx \, dy + c \, dx^2 + g(dx \, dp + dy \, dq)$$

von 0 verschieden ist. Verschwindet dieser Ausdruck, während der Ausdruck

$$B = a \, dp \, dy + h \, dx \, dy + c \, dp \, dx + g \, dp \, dq$$

von 0 verschieden ist, so führt die Bestimmung der Ableitungen zweiter Ordnung zu einem System einander widersprechender Gleichungen. Ein charakteristischer Streifen ist durch die drei Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad du = p \, dx + q \, dy$$

bestimmt. Bezeichnen wir mit μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^2 + 2b\mu + ac - gh = 0,$$

so können zwei Scharen charakteristischer Streifen durch die Gleichungen

$$g \, dp + c \, dx + \mu_1 \, dy = 0, \quad g \, dq + a \, dy + \mu_2 \, dx = 0, \quad du = p \, dx + q \, dy$$

bestimmt werden. Das System der zweiten Schar erhält man aus diesem System, wenn man in den Gleichungen μ_1 und μ_2 vertauscht. Alle diese Ergebnisse lassen sich ebenso herleiten wie die vorhergehenden. Für die Monge-Ampèresche Differentialgleichung bleiben auch die in [37] dargelegten grundlegenden Sätze richtig.

Bei der Ermittlung der Vorintegrale gelangen wir anstatt zu (45) zu dem Differentialgleichungssystem

$$V_x + p V_u - \frac{c}{g} V_p - \frac{\mu_2}{g} V_q = 0, \quad V_y + q V_u - \frac{\mu_1}{g} V_p - \frac{a}{g} V_q = 0.$$

Das zweite System erhält man aus diesem wiederum durch Vertauschung von μ_1 und μ_2 . Es bleiben auch alle angegebenen Eigenschaften der Vorintegrale erhalten.

40. Charakteristiken bei beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen. Wir untersuchen nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen,

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \dots = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (48)$$

in der die nicht hingeschriebenen Glieder keine Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Die Koeffizienten a_{ik} sollen zunächst nur von den unabhängigen Veränderlichen x_s abhängen. Wir wollen jetzt lediglich die Frage untersuchen, wann wir aus der Differentialgleichung (48) und den Cauchyschen Anfangswerten die Ableitungen zweiter Ordnung nicht eindeutig bestimmen können, d. h., wann wir bei der Ermittlung dieser Ableitungen zu einem Widerspruch oder zu einer Unbestimmtheit gelangen. Diese Bedingung entspricht der Bedingung (32) im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Wir beginnen mit dem Fall, daß die Cauchyschen Anfangsbedingungen die spezielle Form

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, \dots, x_n), \quad u_{x_1}|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, \dots, x_n)$$

haben. Diese Anfangsbedingungen geben uns die Möglichkeit, auf der Hyperfläche $x_1 = x_1^{(0)}$ alle Ableitungen erster Ordnung und alle Ableitungen zweiter Ordnung

mit Ausnahme von $u_{x_1 x_1}$ zu bestimmen. Zur Bestimmung dieser Ableitung müssen wir die Differentialgleichung (48) selbst benutzen und in ihr $x_1 = x_1^{(0)}$ setzen. Ist hierbei $a_{11} \neq 0$, so erhalten wir einen bestimmten Wert für die gesuchte Ableitung. Ist nach dem Einsetzen von $x_1 = x_1^{(0)}$ dagegen $a_{11} = 0$, so stellt die entsprechende Gleichung entweder einen Widerspruch oder eine Identität dar. Somit hat im Fall spezieller Cauchyscher Anfangsbedingungen die gesuchte Bedingung die Gestalt

$$a_{11} = 0. \quad (49)$$

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Fall über, daß die Cauchyschen Anfangswerte auf einer Hyperfläche

$$\omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (50)$$

vorgegeben sind. Außer dieser Funktion ω_1 wählen wir noch $n-1$ Funktionen $\omega_s(x_1, \dots, x_n)$ ($s=2, \dots, n$), mit denen wir die unabhängigen Veränderlichen

$$x'_s = \omega_s(x_1, \dots, x_n) \quad (s=1, \dots, n) \quad (51)$$

einführen können; diese Gleichungen sollen sich also nach den x_s auflösen lassen. Wir drücken nun die Ableitungen nach den ursprünglichen Veränderlichen durch die Ableitungen nach den neuen Veränderlichen aus, wobei wir nur diejenigen Glieder aufschreiben, in denen die uns interessierenden Ableitungen vorkommen:

$$u_{x_i} = u_{x'_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} + \dots, \quad u_{x_i x_k} = u_{x'_1 x'_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \dots$$

Die transformierte Differentialgleichung hat die Gestalt

$$a'_{11} u_{x'_1 x'_1} + \dots = 0$$

mit

$$a'_{11} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}. \quad (52)$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder enthalten die Ableitung $u_{x'_1 x'_1}$ nicht. Wegen (51) sind die Anfangswerte für die transformierte Differentialgleichung auf der Hyperfläche $x'_1 = 0$ vorgegeben, d. h., die Anfangsbedingungen haben die vorhin betrachtete spezielle Form. Somit ist (49) die gesuchte Bedingung, die nur in den neuen unabhängigen Veränderlichen geschrieben werden muß. Wegen (52) können wir somit aussagen: Bei vorgegebenen Cauchyschen Anfangswerten auf der Hyperfläche (50) führt die Ermittlung der Ableitungen zweiter Ordnung genau dann zu einem Widerspruch oder zu einer Unbestimmtheit, wenn die Funktion ω_1 die Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = 0 \quad (53)$$

erfüllt; dabei braucht diese Gleichung nur als Folge von $\omega_1 = 0$ erfüllt zu sein. Jede Hyperfläche, die dieser Bedingung genügt, nennen wir eine *charakteristische Fläche* oder eine *Charakteristik der Differentialgleichung* (48).

Wir legen nun einen beliebigen Punkt $M_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ fest. Die Koeffizienten a_{ik} haben in diesem Punkt feste Werte, die wir mit $a_{ik}^{(0)}$ bezeichnen. Die Richtungen der Vektoren, deren reelle Komponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^{(0)} \alpha_i \alpha_k = 0 \quad (53_1)$$

erfüllen, nennen wir charakteristische Normalenrichtungen im Punkt M_0 .¹⁾ Die Gleichung (53) besagt, daß die Richtung der Flächennormalen in jedem Punkt der Fläche $\omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ charakteristische Normalenrichtung ist. Ist die Fläche $S(\omega_1 = 0)$ so beschaffen, daß in keinem ihrer Punkte die Normalenrichtung charakteristisch ist, d. h., ist die linke Seite der Gleichung (53) auf der ganzen Fläche von 0 verschieden, so folgt aus den vorhergehenden Ausführungen, daß wir die Differentialgleichung (48) in der Form

$$u_{x'_1 x'_1} = \sum_{i,k=2}^n a'_{ik} u_{x'_i x'_k} + \sum_{i=2}^n a'_{i1} u_{x'_i x'_1} + \dots \quad (48_1)$$

schreiben können, wenn wir die Variablentransformation (51) durchführen. Die Fläche S geht dabei in die Ebene $x'_1 = 0$ über. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, das Cauchysche Problem, dessen Anfangswerte auf der Fläche S vorgegeben sind, in ein Cauchysches Problem überzuführen, dessen Anfangswerte auf der Ebene $x'_1 = 0$ vorgegeben sind. Hat die Differentialgleichung (48) analytischen Charakter (ist sie beispielsweise linear und hat sie analytische Koeffizienten), ist weiterhin die Fläche S keine charakteristische Fläche und ω_1 eine analytische Funktion, so kann das transformierte Cauchysche Problem, unter entsprechenden Bedingungen, nach dem Satz von S. W. KOWALEWSKI gelöst werden. Ist die Fläche S charakteristisch, so müssen die Funktion u und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auf S durch eine Beziehung miteinander verknüpft sein. Es lassen sich nämlich die Funktion u und ihre partiellen Ableitungen auf S durch ebensolche Größen auf der Ebene $x'_1 = 0$ ausdrücken und umgekehrt. Es sei

$$u = \varphi_0(x'_2, \dots, x'_n), \quad u_{x'_1} = \varphi_1(x'_2, \dots, x'_n) \quad \text{für } x'_1 = 0,$$

$$u_{x'_k} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'_k} \quad (k = 2, \dots, n).$$

Ist S eine charakteristische Fläche, so gilt in der transformierten Differentialgleichung $a'_{11} = 0$ für $x'_1 = 0$, und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=2}^n a'_{ik} u_{x'_i x'_k} + \sum_{i=2}^n a'_{i1} u_{x'_i x'_1} + \dots = 0,$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder nur Ableitungen erster Ordnung enthalten. Somit muß zwischen den Funktionen φ_0 und φ_1 die Beziehung

$$\sum_{i,k=2}^n a'_{ik} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x'_i \partial x'_k} + \sum_{i=2}^n a'_{i1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_i} + \dots = 0$$

bestehen, die im allgemeinen in bezug auf φ_0 und φ_1 nicht identisch erfüllt ist.

Jetzt setzen wir voraus, daß die Koeffizienten a_{ik} nicht nur von den x_s , sondern auch von u und den u_{x_s} abhängen. Die Cauchyschen Anfangswerte auf der $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit (50) hängen von $n-1$ Parametern ab. Wir nehmen an, daß $x_2, \dots, x_n$ diese Parameter sind. Setzen wir die Anfangswerte in die Koeffizienten a_{ik} ein, so erhalten wir wie früher die Gleichung (53), die als Folge von (50) erfüllt sein muß, und wir können entscheiden, ob die Fläche $\omega_1 = 0$ bei den vorgegebenen Anfangswerten charakteristisch ist.

¹⁾ Diese Richtungen sind von den Richtungen der von M_0 ausgehenden Bicharakteristiken, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, zu unterscheiden. (Anm. d. Red.)

Im folgenden beschränken wir uns lediglich auf den Fall, daß die Koeffizienten a_{ik} nur von den x_s abhängen. Wir bemerken: Ist die Differentialgleichung (48) elliptisch, so kann die Gleichung (53) wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher keine reellen Lösungen haben mit Ausnahme der Lösung $\omega_1 = \text{const.}$ Diese Lösung ist offenbar für unser Problem nicht von Interesse.

41. Bicharakteristiken. Die Gleichung (53) mußte als Folge von (50) erfüllt sein. Wir fordern nun, daß diese Gleichung in bezug auf alle x_s identisch erfüllt ist. Dann ist sie eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, und jede nichtkonstante Lösung liefert uns nicht nur eine einzige Charakteristik, sondern eine ganze Charakteristikenschar

$$\omega_1(x_1, \dots, x_n) = C, \quad (54)$$

wobei C eine willkürliche Konstante bezeichnet. Dafür, daß die Gleichung (54) für beliebige Konstanten C eine Schar von Charakteristiken bestimmt, ist umgekehrt notwendig und hinreichend, daß die Funktion ω_1 der Differentialgleichung (53) identisch genügt. Genau wie in [2] können wir zeigen, daß jede Charakteristik in einer Schar der Gestalt (54) vorkommt, so daß die Lösungen der Differentialgleichung (53) alle Charakteristiken liefern.

In den Differentialgleichungen der mathematischen Physik spielt die unabhängige Veränderliche, die die Zeit darstellt, im Vergleich mit den übrigen Veränderlichen, die gewöhnlich die Raumkoordinaten darstellen, eine besondere Rolle. Im folgenden nehmen wir an, diese besondere unabhängige Veränderliche sei die Veränderliche x_n , und bezeichnen sie mit t . Für die übrigen Veränderlichen führen wir die Bezeichnung $x_1, \dots, x_m$ ein, wir setzen also $n = m + 1$.

Wir schreiben die Flächengleichung (50) in der nach t aufgelösten Form

$$t - \omega(x_1, \dots, x_m) = 0$$

und nehmen an, daß die Koeffizienten a_{ik} nicht von t abhängen.

Setzen wir die linke Seite der Gleichung $t - \omega = 0$ in die Gleichung (53) ein, so erhalten wir für die Funktion ω die Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} - 2 \sum_{i=1}^m a_{in} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a_{nn} = 0. \quad (55)$$

Diese Gleichung muß strenggenommen auf Grund der Beziehung $t = \omega$ erfüllt sein. Da sie aber t überhaupt nicht enthält, muß sie identisch erfüllt sein. Jetzt kehren wir zum allgemeinen Fall zurück und bilden das zur Differentialgleichung erster Ordnung (53) gehörige Cauchysche System. Die Differentialgleichung (53) enthält die Funktion ω_1 nicht selbst, so daß wir im zugehörigen Cauchyschen System den Quotienten, der $d\omega_1$ enthält, nicht hinzuschreiben brauchen. Somit erhalten wir das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_k}{ds} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} p_i, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (56_1)$$

$$\frac{dp_k}{ds} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j, \quad (56_2)$$

wobei s ein Hilfsparameter ist. Wir wählen eine Schar charakteristischer Hyperflächen $\omega_1(x_1, \dots, x_n) = C$ und setzen $p_k = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$. Dadurch werden die p_i als Funktionen von $x_1, \dots, x_n$ ausgedrückt. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die rechten Seiten

der Differentialgleichungen (56₁) ergibt sich ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für $x_1, \dots, x_n$. Setzen wir eine beliebig gewählte Lösung dieses Systems in die soeben gewonnenen Ausdrücke für die p_k ein, so können wir leicht verifizieren, daß die erhaltenen Funktionen den Differentialgleichungen (56₂) genügen. In der Tat gilt

$$\frac{dp_k}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_k \partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_k \partial x_i} a_{ij} p_j = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_k} a_{ij} p_j. \quad (57)$$

Ersetzen wir in (53) den Index k durch j und differenzieren beide Seiten nach x_k , so erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} p_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \equiv 0.$$

Wegen $a_{ij} = a_{ji}$ sind die letzten beiden Summen einander gleich. Unter Benutzung der entstehenden Identität lassen sich die Relationen (57) in der Gestalt

$$\frac{dp_k}{ds} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j$$

schreiben, die gerade mit (56₂) übereinstimmen. Wir bemerken, daß die Beziehung (54) ein Integral des Differentialgleichungssystems (56₁) liefert. Denn es gilt

$$\frac{d\omega_1}{ds} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = 2 \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i},$$

und die letzte Summe ist wegen (53) identisch gleich 0. Diejenigen Kurven des Raumes R_n mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n$, die sich durch Integration des Differentialgleichungssystems (56₁) ergeben, in dem $p_i = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}$ zu setzen ist, heißen die

Bicharakteristiken, die zur Schar $\omega_1 = C$ von charakteristischen Flächen gehören.

Nehmen wir bei der Integration des Differentialgleichungssystems (56₁) als Anfangswerte x_k einen Punkt, der auf einer Hyperfläche $\omega_1 = C_0$ liegt, so liegt die ganze zugehörige Bicharakteristik auf dieser Hyperfläche, d. h., *jede charakteristische Fläche der Differentialgleichung (48) kann durch Bicharakteristiken erzeugt werden*. Wir stellen nun die Bedingungen auf, unter denen die Lösungen des Differentialgleichungssystems (56₁), (56₂) eine charakteristische Hyperfläche erzeugen. Die Fläche (54) stellt eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im Raum R_n dar. In der Gleichung der Bicharakteristiken kommt bereits ein Parameter s vor, folglich müssen wir zur Erzeugung der charakteristischen Hyperfläche (54) eine Schar von Bicharakteristiken benutzen, die von $n-2$ Parametern abhängt. Wir nehmen an, daß die in das Differentialgleichungssystem (56₁), (56₂) eingehenden Anfangswerte $x_k^{(0)}$ und $p_k^{(0)}$ von $n-2$ Parametern $t_1, \dots, t_{n-1}$ abhängen. Durch Wiederholung der Überlegungen aus [8] erkennen wir: Dafür, daß die erhaltene Schar von Bicharakteristiken eine charakteristische Hyperfläche erzeugt, ist notwendig und hinreichend, daß die Anfangswerte den Beziehungen

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^{(0)} p_i^{(0)} p_k^{(0)} = 0, \quad (58)$$

$$\sum_{s=1}^n p_s^{(0)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial t_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n-2) \quad (59)$$

genügen [12], wobei die Größen $a_{ik}^{(0)}$ aus den a_{ik} entstehen, wenn man $x_s = x_s^{(0)}$ einsetzt. Hierbei setzen wir voraus, daß wenigstens eine der Funktionaldeterminanten

ten $(n-1)$ -ter Ordnung, die sich aus den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ in bezug auf $s, t_1, \dots, t_{n-2}$ bilden lassen, von 0 verschieden ist.

Alle diese Resultate folgen unmittelbar aus dem Cauchyschen Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung [12]. Im vorliegenden Fall kommt die nur unwesentliche Schwierigkeit hinzu, daß die Gleichung für die Integralfäche in der impliziten Form $\omega_1(x_1, \dots, x_n) = C$ gesucht ist und daß im Zusammenhang damit das Cauchysche System (56) die Funktion ω_1 selbst nicht enthält.

Eine wichtige Rolle spielt in der mathematischen Physik eine spezielle Integralfäche der Differentialgleichung (53), das sogenannte *charakteristische Konoid* der Differentialgleichung. Diese charakteristische Fläche erhält man durch die angegebene Methode, wenn man die $x_k^{(0)}$ (die Spitze des Konoids) als fest, d. h. als unabhängig von den Parametern, annimmt und die $p_k^{(0)}$ der Bedingung (58) unterwirft. Durch diese Bedingung sind die n Größen $p_k^{(0)}$ als Funktionen von $n-1$ Parametern bestimmt. Da die Gleichung (58) homogen ist, tritt einer der Parameter in den $p_k^{(0)}$ als Faktor auf. Es läßt sich aber leicht verifizieren, daß sich die Differentialgleichungen (56₁) und (56₂) nicht ändern, wenn man s durch $\frac{1}{\alpha}s$ und p_k

durch αp_k ersetzt, wobei α von s unabhängig ist. Somit ist der in den $p_k^{(0)}$ multiplikativ auftretende Parameter überflüssig, da schon s ein solcher Parameter ist. Folglich können wir eine der Größen $p_k^{(0)}$ beispielsweise gleich 1 annehmen.

Sind die Koeffizienten a_{ik} konstant, so ergibt sich aus den Differentialgleichungen (56₂), daß auch die p_k Konstante sein müssen, und aus den Differentialgleichungen (56₁) erkennt man, daß die x_k Polynome ersten Grades von s sind. Sind die a_{ik} konstant, so sind also die Bicharakteristiken Geraden des R_n .

Jetzt behandeln wir einen wichtigen Spezialfall. Wir führen die schon angegebene Bezeichnung $x_1 = t$ ein und betrachten eine Differentialgleichung der speziellen Gestalt

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^m a_{ik} u_{x_i x_k} + \dots = 0, \quad (60)$$

wobei $m = n-1$ ist und die Koeffizienten a_{ik} die Veränderliche t nicht enthalten, also nur von $x_1, \dots, x_m$ abhängen. Wir nehmen an, daß die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

für alle Werte ξ_s positiv definit ist. Die Differentialgleichung (53) lautet jetzt

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = 0.$$

Wir suchen eine charakteristische Hyperfläche in der nach t aufgelösten Form

$$\omega(x_1, \dots, x_m) - t = 0 \quad \text{oder} \quad t = \omega(x_1, \dots, x_m). \quad (61)$$

Dabei ist $p_0 = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = -1$, und für die Funktion ω erhalten wir die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \omega_{x_i} \omega_{x_k} = 1 \quad (62)$$

oder

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} p_i p_k = 1. \quad (63)$$

Das zugehörige Cauchysche Differentialgleichungssystem lautet

$$\frac{dx_k}{2 \sum_{i=1}^m a_{ki} p_i} = \frac{dt}{2 \sum_{i,k=1}^m a_{ik} p_i p_k} = \frac{dp_k}{\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j}.$$

Nehmen wir eine bestimmte charakteristische Hyperfläche (61), so folgt aus (63) und dem zuletzt angegebenen System, daß die Bicharakteristiken, welche die Hyperfläche erzeugen, dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^m a_{ki} p_i \quad (p_i = \omega_{x_i}) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (64)$$

genügen.

Wir brauchen die Fläche (61) nicht als starre Fläche des n -dimensionalen Raumes R_n mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_m, t$ aufzufassen, sondern können sie als Fläche deuten, die sich im m -dimensionalen Raum R_m der Koordinaten $x_1, \dots, x_m$ im Laufe der Zeit bewegt. Hierbei fassen wir die Lösungen des Differentialgleichungssystems (64) als Kurven λ im Raum R_m auf, die in einer Parameterdarstellung mit Hilfe des Parameters t (der Zeit) bestimmt sind. Die Kurve λ wird im Raum R_m natürlich nicht mehr auf der sich bewegenden Fläche (61) liegen.

Haben wir beispielsweise im Raum R_3 mit den Koordinaten x_1, x_2, t den Kegel

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2 = 0,$$

so müssen wir ihn in der x_1, x_2 -Ebene als Kreis um den Koordinatenursprung mit veränderlichem Radius ct deuten. Sind die geradlinigen Erzeugenden dieses Kegels Bicharakteristiken, so stellen die Kurven λ in der x_1, x_2 -Ebene das Geradenbüschel durch den Koordinatenursprung dar. Dieses Beispiel entspricht dem Fall der Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0,$$

den wir später behandeln werden.

42. Der Zusammenhang mit einem Variationsproblem. Es sei A die Matrix der Koeffizienten a_{ik} . Lösen wir die Differentialgleichungen (64) nach den p_i auf, so erhalten wir $p_i = A^{-1} \frac{dx_k}{dt}$, wobei A^{-1} wie immer die Inverse der Matrix A ist. Setzen wir die erhaltenen Ausdrücke p_i in die linke Seite der Gleichung (63) ein, so geht die quadratische Form in den p_i in eine quadratische Form in den $\frac{dx_k}{dt}$ über:

$$\sum_{i,k=1}^m b_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} p_i p_k = 1, \quad (65)$$

wobei die Matrix B der Koeffizienten b_{ik} mit der Matrix A durch die Gleichung

$$B = (A^{-1})^* A A^{-1} = (A^{-1})^*$$

zusammenhängt [III/1, 32]; unter Berücksichtigung der Symmetrie von A ergibt sich $B = A^{-1}$.

Wir führen im Raum R_m durch die Gleichung

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^m b_{ik} dx_i dx_k$$

eine Metrik ein. Das Integral längs einer beliebigen Bicharakteristik, die zu einer charakteristischen Hyperfläche (61) gehört,

$$\int d\sigma = \int_{t_0} \sqrt{\sum_{i,k=1}^m b_{ik} dx_i dx_k} = \int_{t_0} \sqrt{\sum_{i,k=1}^m b_{ik} x'_i x'_k} dt \quad (66)$$

ist wegen (65) gleich der Differenz der Werte von t , die zu den Endpunkten des Integrationsweges gehören. Die Länge einer beliebigen Teilkurve der Bicharakteristik ist im Fall der Metrik (66) durch die Differenz der Zeitwerte bestimmt, die zu den Endpunkten der Kurve gehören.

Vergleichen wir diese Resultate mit denen aus [IV/1, 89], so sehen wir, daß die Differentialgleichung (63) die Differentialgleichung der Fundamentalfunktion des Feldes für das Integral (66) ist. Somit stellt die Schar der Hyperflächen $\omega(x_1, \dots, x_m) = t$ eine Schar von Transversalflächen dar, die einem Feld des zum Integral (66) gehörigen Variationsproblems entsprechen. Weiterhin läßt sich leicht nachprüfen, daß die zu einer Schar von charakteristischen Flächen gehörigen Bicharakteristiken, die durch die Differentialgleichungen (64) bestimmt sind, Extremalen des Feldes sind. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur unter Benutzung der Differentialgleichung (64) nachzuprüfen, daß sich die Bicharakteristiken mit den Hyperflächen $\omega(x_1, \dots, x_m) = t$ transversal schneiden.

In der Tat, die Transversalitätsbedingung führt im vorliegenden Fall auf die Proportionalität der Größen $p_i = \omega_{x_i}$ mit den Ableitungen des Integranden in (66) nach den x'_i [IV/1, 89], d. h. zur Proportionalität von p_i und $\sum_{k=1}^m b_{ik} x'_k$. Lösen wir die Differentialgleichungen (64) nach den p_i auf, so erhalten wir

$$p_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} x'_k.$$

Dies beweist gerade unsere Behauptung, daß sich die charakteristischen Hyperflächen der Schar mit den zugehörigen Bicharakteristiken transversal schneiden.

Wir bemerken: Dem charakteristischen Konoid entsprechen Quasikugeln im Raum R_m mit dem Radius t und dem Zentrum $(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$, dem die Spitze des Konoids entspricht.

Entspricht der Differentialgleichung (60) ein Wellenvorgang im Raum R_m , so bestimmt die Differentialgleichung erster Ordnung (63) die geometrische Optik dieses Vorganges mit Hilfe der charakteristischen Flächen. Die Bicharakteristiken sind Strahlen, welche dieselbe geometrische Optik bestimmen. Diese Überlegungen bringen die geometrische Optik in unmittelbaren Zusammenhang mit einem Variationsproblem. Ist eine Wellenfront S_0 für $t=0$ gegeben, so müssen wir, um die Wellenfront S_t in einem beliebigen Zeitpunkt t zu erhalten, eine Schar von Quasikugeln mit den Mittelpunkten auf S_0 und dem Radius t konstruieren und die Enveloppe dieser Schar bilden (Huygenssche Konstruktion). Diese Konstruktion entspricht den Ausführungen in [11] über die Lösung des Cauchyschen Problems für Differentialgleichungen erster Ordnung mit Hilfe der zugehörigen charakteristischen Konoide. Auf den Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion wollen

wir nicht näher eingehen. Er läßt sich auf Grund der Theorie des vollständigen Integrals durchführen. Es sei noch erwähnt, daß die Enveloppe der Quasikugeln mit dem Radius t aus zwei Hyperflächen bestehen kann. Nur eine von ihnen liefert die Wellenfront im Zeitpunkt t .

Alle vorhergehenden Überlegungen lassen sich nicht nur im Raum R_m , sondern auch im Raum R_n durchführen, wenn wir t gleichfalls als Raumkoordinate auffassen. Aus Symmetriegründen betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung (48),

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \dots = 0 \quad (a_{ki} = a_{ik}), \quad (67)$$

in der die a_{ik} vorgegebene Funktionen von $x_1, \dots, x_n$ bezeichnen. Die charakteristischen Flächen sind durch die Differentialgleichung

$$D(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} p_i p_k = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right) \quad (68)$$

bestimmt, wobei wir mit $D(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ die linke Seite dieser Differentialgleichung bezeichnet haben. Das zu dieser Differentialgleichung gehörige Cauchy'sche System, d. h. das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches die Bicharakteristiken bestimmt, wird durch die Differentialgleichungen (56₁) und (56₂) gegeben. Ersetzen wir den Hilfsparameter s durch $\frac{s}{2}$, so können wir dieses System in der Gestalt

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{2} D_{p_k}, \quad \frac{dp_k}{ds} = -\frac{1}{2} D_{x_k} \quad (k=1, \dots, n) \quad (69)$$

schreiben.

Die ersten Differentialgleichungen dieses Systems haben die Gestalt

$$\frac{dx_k}{ds} = \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i \quad (k=1, \dots, n).$$

Lösen wir sie nach den p_1 auf und setzen die erhaltenen Ausdrücke in (68) ein, so finden wir

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad (70)$$

wobei sich die Matrix B der Koeffizienten b_{ik} aus der Beziehung $B = A^{-1}$ ergibt. Im Raum R_n führen wir die Metrik

$$d\sigma_1^2 = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} dx_i dx_k$$

ein.

Ein wesentlicher Unterschied zum Vorhergehenden besteht darin, daß die rechte Seite dieser Definitionsgleichung für eine hyperbolische Differentialgleichung sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann (indefinite quadratische Form [III/1, 35]); folglich kann $d\sigma_1$ imaginär sein.

Aus (70) folgt, daß für eine Bicharakteristik die Beziehung $d\sigma_1 = 0$ typisch ist, d. h., bei unserer Metrik ist die Länge jeder Teilkurve der Bicharakteristik gleich 0. Zum Verständnis dieses Ergebnisses ist der nichtreelle Charakter der eingeführten Metrik zu beachten.

43. Ausbreitung von Unstetigkeiten. Jetzt setzen wir voraus, daß eine Lösung u der Differentialgleichung (48) auf der Fläche

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (71)$$

in den Ableitungen zweiter Ordnung eine Unstetigkeit erster Art hat, wobei die Lösung selbst und ihre Ableitungen erster Ordnung beim Durchgang durch die Fläche (71) stetig bleiben. Wir fassen die Lösung u auf den beiden Seiten der Fläche (71) als zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (48) auf. Diese Lösungen haben auf der Fläche (71) dieselben Cauchyschen Werte, aber ihre Ableitungen zweiter Ordnung haben verschiedene Werte. Deshalb muß die Fläche (71) eine charakteristische Fläche der Differentialgleichung (67) sein. Zu demselben Resultat würden wir gelangen, wenn wir voraussetzten, daß nicht nur die Lösung u und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, sondern auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung beim Durchgang durch die Fläche (71) stetig bleiben, aber die Ableitungen einer höheren als der zweiten Ordnung eine Unstetigkeit besitzen. Im allgemeinen sagt man, daß die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (67) auf der Fläche (71) eine *schwache Unstetigkeit* besitzt, wenn die Funktion u und ihre ersten Ableitungen beim Durchgang durch die Fläche stetig bleiben und bestimmte Ableitungen von höherer als erster Ordnung auf der Fläche (71) eine Unstetigkeit erster Art besitzen. Aus den vorhergehenden Überlegungen ergibt sich, daß *nur eine charakteristische Fläche eine Fläche schwacher Unstetigkeit sein kann.*

Zeichnen wir wie früher die unabhängige Veränderliche $x_n = t$ aus, so haben wir an Stelle von (71) eine sich bewegende Fläche schwacher Unstetigkeit im Raum R_m :

$$\psi(x_1, \dots, x_m, t) = 0. \quad (72)$$

Jetzt wollen wir die Geschwindigkeit bestimmen, mit der sich diese Fläche bewegt. In einem Punkt M der Fläche (72) konstruieren wir die Flächennormale nach der Seite, auf der $\psi > 0$ ist. Es sei M_1 der Schnittpunkt der so orientierten Normalen mit derjenigen Fläche, die zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gehört. Den Grenzwert des Quotienten $\frac{|MM_1|}{\Delta t}$ für $\Delta t \rightarrow 0$ nennt man gewöhnlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fläche (72). Führen wir die Bezeichnung

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^m \psi_{x_i}^2} \quad (73)$$

ein, so erhalten wir für die Richtungskosinus der Normalen

$$\cos(n, x_i) = \frac{\psi_{x_i}}{g}. \quad (74)$$

Durch Differentiation der Beziehung (72) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^m \psi_{x_i} dx_i + \psi_t dt = 0.$$

Die Größen dx_i kann man als Projektion der in Normalenrichtung erfolgenden infinitesimalen Verschiebung MM_1 auf die Koordinatenachsen auffassen, und infolgedessen gilt

$$\sum_{i=1}^m \psi_{x_i} |MM_1| \cos(n, x_i) + \psi_t dt = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (74) erhalten wir für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fläche (72)

$$P = -\frac{\psi_t}{g}. \quad (75)$$

Im Fall $m=2$ haben wir eine sich in der x_1, x_2 -Ebene bewegendende Kurve, im Fall $m=3$ eine sich im dreidimensionalen x_1, x_2, x_3 -Raum bewegendende Fläche.

Als Beispiel betrachten wir die Wellengleichung für $m=1$,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Die grundlegende Differentialgleichung (53) hat die Gestalt

$$\psi_t^2 - a^2 \psi_x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\psi_t}{\psi_x} = \pm a;$$

sie zeigt, daß sich jede schwache Unstetigkeit längs der x -Achse mit der Geschwindigkeit $\pm a$ bewegen muß. Die Charakteristiken in der x, t -Ebene sind die beiden Geradenscharen $x \pm at = c$. Wir betrachten noch die Differentialgleichung

$$u_{tt} - f(u_x, u_t) u_{xx} = 0,$$

die bei der Untersuchung der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit im eindimensionalen Fall auftritt. Die Bedingung (53) lautet jetzt

$$\psi_t^2 - f(u_x, u_t) \psi_x^2 = 0.$$

Wir nehmen an, daß auf der einen Seite der Unstetigkeitsstelle auf der x -Achse Ruhe herrscht. Dann gilt auf dieser Seite der Unstetigkeitsstelle und in der Unstetigkeitsstelle selbst $u_x = u_t = 0$. Die vorhergehende Bedingung nimmt somit die Gestalt $\psi_t^2 - f(0, 0) \psi_x^2 = 0$ an, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit wird durch

$$P = \pm \sqrt{f(0, 0)} \quad (76)$$

gegeben.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Wellengleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0$$

über. Die Differentialgleichung (53) läßt sich jetzt in der Gestalt

$$\psi_t^2 - a^2(\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2) = 0$$

oder, unter Benutzung des Ausdruckes (73), in der Gestalt $\psi_t^2 - a^2 g^2 = 0$ schreiben. Diese Differentialgleichung erster Ordnung besagt, daß sich jede charakteristische Kurve in der x_1, x_2 -Ebene mit der Geschwindigkeit a bewegen muß. Ein ganz analoges Resultat erhalten wir auch für die charakteristischen Flächen im dreidimensionalen x_1, x_2, x_3 -Raum, wenn wir von der Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0$$

ausgehen. Dabei können wir annehmen, daß der Koeffizient a^2 von den Koordinaten x_1, x_2, x_3 abhängt.

44. Starke Unstetigkeiten. Bei der Untersuchung der unstetigen Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben wir vorausgesetzt, daß die Funktion selbst und ihre Ableitungen erster Ordnung beim Durchgang durch die Unstetigkeitsfläche stetig bleiben und daß die Ableitungen zweiter oder höherer Ordnung

einen Sprung machen (schwache Unstetigkeit). Nur unter dieser Voraussetzung konnten wir beweisen, daß die Unstetigkeitsfläche eine charakteristische Fläche ist. Jetzt gehen wir zur Untersuchung *starker Unstetigkeiten* über. Dies bedeutet, daß im Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bereits die Ableitungen *erster* Ordnung unstetig sind. Unser Ziel ist, die Bedingungen aufzustellen, unter denen die Unstetigkeitsfläche wiederum eine charakteristische Fläche ist. Wir betrachten die Wellengleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen und führen den auf der linken Seite der Differentialgleichung stehenden Operator

$$\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

ein, der gewöhnlich *Lorentzoperator* genannt wird. Außerdem führen wir noch einen Operator ein, der Ableitungen erster Ordnung enthält:

$$P(u) = u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) - \frac{1}{a^2} u_t \cos(n, t). \quad (77)$$

Dabei ist n eine Richtung im x, y, t -Raum. Es sei D ein Bereich im x, y, t -Raum, S die diesen Bereich begrenzende Fläche und n die Richtung der äußeren Normalen der Fläche S . Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes können wir wie in [II, 203] für den Lorentzoperator die Greensche Formel

$$\iiint_D [v \square u - u \square v] d\tau = \iint_S [v P(u) - u P(v)] dS \quad (78)$$

aufstellen, in der u und v zwei Funktionen sind, die in D stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen.

Insbesondere gilt für beliebige Funktionen $u \in C^2(D)$ und $v \in C_0^\infty(D)$ ¹⁾

$$\iiint_D [v \square u - u \square v] d\tau = 0. \quad (79)$$

Nun nehmen wir an, der Bereich D werde durch eine Fläche σ in zwei Teile D_1 und D_2 geteilt, wobei die Fläche σ eine Unstetigkeitsfläche für die Ableitungen erster Ordnung der Funktion u darstellt. Wir wollen die Bedingungen angeben, welche für diese Unstetigkeit gelten müssen, damit die Formel (79) für den gesamten Bereich D richtig bleibt, wenn sie auf eine Funktion u mit unstetigen Ableitungen und eine beliebige Funktion v mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung angewendet wird. Vor allem setzen wir voraus, daß die Funktion u selbst beim Durchgang durch σ stetig bleibt. Es sei M ein Punkt der Fläche σ und l eine beliebige Richtung, die in der Tangentialebene von σ im Punkt M liegt. Wir nehmen an, daß die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial l}$ bei der Annäherung an den Punkt M von beiden Seiten der Fläche σ her ein und denselben Grenzwert hat und daß dieser Grenzwert gleich der Ableitung der Funktion u auf der Fläche σ nach der Richtung l ist. Diese Bedingung wird zuweilen *kinematische Kompatibilitätsbedingung* genannt. Ist n die feste Richtung der Normalen von σ im Punkt M , so setzen wir voraus, daß $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an den Punkt M von der einen oder der anderen Seite der Fläche her bestimmte Grenzwerte besitzt; diese Grenzwerte können aber auf den verschiedenen Seiten der Fläche verschieden sein.

¹⁾ Wir erinnern daran, daß $C_0^\infty(D)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in D bezeichnet.

Wir gehen nun zur Formulierung der *dynamischen Kompatibilitätsbedingung* über und nehmen an, daß der Ausdruck (77) bei Annäherung an einen beliebigen Punkt der Fläche (n sei die Richtung der Normalen in diesem Punkt) auf beiden Seiten der Fläche gleiche Grenzwerte besitzt, wenn in beiden Fällen ein und dieselbe Normalenrichtung n genommen wird. Weiterhin nehmen wir an, daß sich die Formel (78) auf die beiden Teilbereiche D_1 und D_2 von D einzeln anwenden läßt. Dies ist gewiß dann der Fall, wenn die Funktion u in D_1 und D_2 Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, die auf den Oberflächen stetige Grenzwerte haben. Wenden wir die Formel (78) auf D_1 und D_2 an, so haben wir auf der Fläche σ in diesen beiden Fällen gerade entgegengesetzte Richtungen der äußeren Normalen, so daß sich die Ausdrücke $P(u)$ in den beiden Integralen nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Addieren wir diese beiden Formeln, so erhalten wir (79) für den ganzen Bereich D , da die beiden Integrale über σ sich gegenseitig aufheben. Somit erhalten wir unter den angegebenen Voraussetzungen bezüglich der starken Unstetigkeit der Funktion u , daß die Formel (79) auch für den ganzen räumlichen Bereich D richtig ist.

Jetzt leiten wir einige wichtige Folgerungen aus unseren Voraussetzungen ab. Es sei $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor der Normalen von σ . Wir betrachten das Vektorprodukt $\text{grad } u \times \mathbf{n}$. Bezeichnen wir mit $\mathbf{l}$ den Einheitsvektor, der die Richtung der Projektion von $\text{grad } u$ auf die Tangentialebene von σ hat, so daß $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial l} \mathbf{l} + \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n}$ ist, so ist das angegebene Vektorprodukt gleich $\frac{\partial u}{\partial l} \mathbf{l} \times \mathbf{n}$, und deshalb ist es beim Durchgang durch die Fläche σ stetig. Bilden wir die drei Komponenten dieses Vektorprodukts, so erhalten wir die folgenden drei Ausdrücke, die wegen der *kinetischen Kompatibilitätsbedingungen* beim Durchgang durch σ stetig sein müssen:

$$\begin{aligned} u_x \cos(n, y) - u_y \cos(n, x) &= M_1, \\ u_y \cos(n, t) - u_t \cos(n, y) &= M_2, \\ u_t \cos(n, x) - u_x \cos(n, t) &= M_3. \end{aligned} \quad (80)$$

Außerdem liefert uns die oben formulierte Bedingung einen vierten Ausdruck, der ebenfalls beim Durchgang durch σ stetig bleiben muß:

$$u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) - \frac{1}{a^2} u_t \cos(n, t) = M_4. \quad (81)$$

Die Gleichungen (80) und (81) fassen wir als vier lineare Gleichungen für u_x , u_y und u_t auf. Hat die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems den Rang 3, d. h., ist wenigstens eine der Determinanten dritter Ordnung der Koeffizientenmatrix von 0 verschieden, so können wir die zugehörigen drei Gleichungen nach den Ableitungen u_x , u_y und u_t auflösen und damit diese Ableitungen durch die stetigen Funktionen M_k ausdrücken. Dann wären aber alle Ableitungen erster Ordnung der Funktion u beim Durchgang durch σ stetig, es wäre also keine starke Unstetigkeit vorhanden. Daher muß der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als 3 sein, d. h., alle Determinanten dritter Ordnung der Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} \cos(n, y) & -\cos(n, x) & 0 \\ 0 & \cos(n, t) & -\cos(n, y) \\ -\cos(n, t) & 0 & \cos(n, x) \\ \cos(n, x) & \cos(n, y) & -\frac{1}{a^2} \cos(n, t) \end{array} \right\| \quad (82)$$

müssen gleich 0 sein.

Wie man leicht überprüft, gilt

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \left[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) - \frac{1}{\alpha^2} \cos^2(n, t) \right]^2$$

sowie $\Delta_4 = 0$, wobei Δ_k die Determinante derjenigen Matrix ist, die man aus der Matrix (82) durch Streichung der k -ten Zeile erhält. Also ist das Verschwinden aller Δ_k mit der Gleichung

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) - \frac{1}{\alpha^2} \cos^2(n, t) = 0 \quad (83)$$

äquivalent. Ist $\psi(x, y, t) = 0$ die Gleichung der Fläche σ , so läßt sich diese Beziehung offenbar in

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 - \frac{1}{\alpha^2} \psi_t^2 = 0$$

überführen; wir sehen somit, daß auch im Fall einer starken Unstetigkeit die Fläche σ eine charakteristische Fläche der Differentialgleichung $\square u = 0$ sein muß. Ist die Bedingung (83) erfüllt, so kann man leicht beweisen, daß auch alle Determinanten dritter Ordnung der Matrix (82) gleich 0 sind und daß M_4 eine Linearkombination von M_1 , M_2 und M_3 ist, und zwar gilt offenbar

$$\cos(n, t) M_4 = \cos(n, y) M_2 - \cos(n, x) M_3.$$

Ist also die kinematische Kompatibilitätsbedingung erfüllt, aus der die Stetigkeit von M_1 , M_2 , und M_3 hervorgeht, und ist die Fläche σ eine charakteristische Fläche der Differentialgleichung $\square u = 0$, so folgt hieraus bereits die Stetigkeit des Ausdrucks M_4 , d. h. die dynamische Kompatibilitätsbedingung. Wir bemerken noch, daß wir bei unseren Überlegungen zu der Gleichung der charakteristischen Fläche ohne Untersuchung der Lösungen der Differentialgleichungen $\square u = 0$ gelangt sind. Wir sind lediglich von der Greenschen Formel (79) ausgegangen, die den auf der linken Seite unserer Differentialgleichung stehenden Ausdruck $\square u$ enthält.

Damit haben wir die folgende Aussage bewiesen: Wenn die Funktion u auf der Fläche σ eine starke Unstetigkeit besitzt und auf dieser Fläche den kinematischen und dynamischen Kompatibilitätsbedingungen genügt, dann ist σ eine charakteristische Fläche, und die Funktion u erfüllt für beliebiges $v \in C_0^\infty(D)$ (sogar für beliebiges $v \in C_0^2(D)$) die Identität (79).

Es gilt auch die Umkehrung: Wenn die Funktion u eine starke Unstetigkeit auf der Fläche σ besitzt, auf σ den kinematischen Kompatibilitätsbedingungen genügt und für beliebiges $v \in C_0^\infty(D)$ die Identität (79) erfüllt, dann ist σ eine charakteristische Fläche, und die Funktion u genügt der dynamischen Kompatibilitätsbedingung: Der Sprung $[P(u)]_\sigma$ der Funktion $P(u)$ beim Durchgang durch die Fläche σ ist gleich 0.

Nach Voraussetzung ist nämlich u stetig in D (also $[u]_\sigma = 0$), während $[\text{grad } u]_\sigma \neq 0$ gilt. Aus der Beziehung (79) folgt

$$\int_\sigma v [P(u)]_\sigma dS = 0.$$

Das bedeutet aber wegen der hinreichend großen Willkürlichkeit bei der Wahl von v [IV/1, 71, 112], daß $[P(u)]_\sigma = 0$ gilt. Das ist gerade die dynamische Kompatibilitätsbedingung. Schließlich folgt wie oben aus $[\text{grad } u]_\sigma \neq 0$ sowie der Tatsache, daß die Ausdrücke $[u_x]_\sigma$, $[u_y]_\sigma$, $[u_t]_\sigma$ dem homogenen Gleichungssystem (80), (81) genügen, daß σ eine charakteristische Fläche ist.

Vom Gesichtspunkt physikalischer Probleme bedeutet $\square u = f$, daß sich die äußeren und inneren Kräfte, die auf ein Volumenelement im x, y, t -Raum einwirken, im Gleichgewicht befinden, während $[P(u)]_\sigma = 0$ bedeutet, daß keine äußeren Oberflächenkräfte auf ein Flächenelement der Fläche σ wirken. Aus unseren Untersuchungen folgt, daß dieses Paar von Differentialgleichungen mit der Identität

$$\iiint_D [vf - u \square v] d\tau = 0$$

äquivalent ist, falls u den obigen Glattheitsforderungen in D_1 und D_2 genügt; v ist hier eine beliebige Funktion aus $C_0^\infty(D)$. In [60] werden wir breitere Klassen unstetiger Lösungen der Gleichung $\square u = f$ sowie weiterer linearer Differentialgleichungen beschreiben. Dabei benutzen wir zu ihrer Definition Identitäten solcher Gestalt.

45. Die Riemannsche Integrationsmethode. Nunmehr gehen wir zur Lösung des Cauchyschen Problems über und beginnen mit dem Fall einer linearen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, wobei wir die Differentialgleichung bereits in der Normalform

$$L(u) = u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y) \quad (84)$$

annehmen.

Im folgenden werden wir oft die Argumente der Koeffizienten und der Funktion $f(x, y)$ weglassen. Mit $L(u)$ bezeichnen wir die linke Seite der Differentialgleichung. Wir bemerken, daß die grundlegende Beziehung (32), welche die Charakteristiken bestimmt, für unsere Differentialgleichung die Gestalt $dx dy = 0$ hat, so daß die Charakteristiken der Differentialgleichung (84) die achsenparallelen Geraden $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ sind. Neben dem Operator $L(u)$ führen wir den sogenannten *adjungierten Operator* ein, der durch

$$L^*(v) = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$$

definiert ist. Die Koeffizienten a und b nehmen wir hierbei natürlich als stetig differenzierbar an. Mit Hilfe der Ausdrücke für $L(u)$ und $L^*(v)$ läßt sich die elementare Identität

$$2[vL(u) - uL^*(v)] = (u_x v - v_x u + 2buv)_y + (u_y v - v_y u + 2auv)_x \quad (85)$$

leicht beweisen.

Wir betrachten in der x, y -Ebene einen (abgeschlossenen) Bereich D mit der Randkurve λ und setzen voraus, daß die Funktionen u und v im Bereich D stetige Ableitungen erster Ordnung und eine stetige gemischte Ableitung zweiter Ordnung besitzen. Integrieren wir unter diesen Voraussetzungen beide Seiten der Identität (85) über D und benutzen die bekannte Formel [II, 72]

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\lambda} P dx + Q dy,$$

so erhalten wir folgende *Greensche Formel*:

$$\begin{aligned} & 2 \iint_D [vL(u) - uL^*(v)] dS \\ &= \oint_{\lambda} - (u_x v - v_x u + 2buv) dx + (u_y v - v_y u + 2auv) dy. \end{aligned} \quad (86)$$

Nach diesen einleitenden Rechnungen gehen wir nun zur Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (84) über.

In der x, y -Ebene geben wir eine Kurve l vor, die von jeder achsenparallelen Geraden nicht mehr als einmal geschnitten wird. Die Gleichung einer solchen Kurve kann in der Gestalt $x=x(y)$ oder $y=y(x)$ geschrieben werden. Wir nehmen an, daß auf unserer Kurve l die Ableitungen $x'(y)$ und $y'(x)$ existieren und von 0 verschieden sind. Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (84) für Cauchy'sche Anfangswerte auf l . Längs dieser Kurve sind also die Werte der Funktion u und ihrer partiellen Ableitungen u_x, u_y vorgegeben, wobei wie immer die Bedingung $du = u_x dx + u_y dy$ erfüllt sein muß. Wir können annehmen, daß die Größen u, u_x und u_y längs l entweder als Funktionen von x allein oder als Funktionen von y allein vorgegeben sind.

Hierbei setzen wir voraus, daß die Funktion, welche die Werte von u auf l liefert, eine stetige Ableitung besitzt und daß u_x sowie u_y stetige Funktionen sind. Die Koeffizienten a und b haben nach Voraussetzung stetige partielle Ableitungen, die Koeffizienten c und f sind in einem Bereich, der l enthält und auf den sich unsere weiteren Betrachtungen beziehen, stetig. Später werden wir beweisen, daß das Problem unter unseren Voraussetzungen eine Lösung besitzt. Jetzt wollen wir zunächst eine Lösungsformel konstruieren unter der Voraussetzung, daß eine Lösung existiert.

Wir nehmen als Bereich D denjenigen Teilbereich der x, y -Ebene, der durch die Kurve l und die beiden Geraden begrenzt wird, die parallel zu den Achsen verlaufen und durch einen festen Punkt $P(x, y)$ hindurchgehen (Abb. 1). Wir nehmen an, daß uns in diesem Bereich eine Lösung der homogenen adjungierten Differentialgleichung

$$L^*(v) = 0 \quad (87)$$

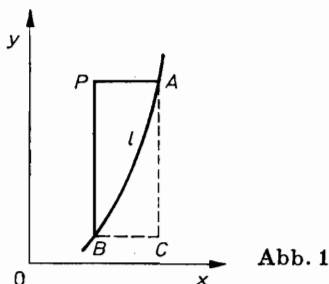


Abb. 1

bekannt ist. Durch Anwendung der Formel (86) auf die gesuchte Lösung u des Cauchyschen Problems und auf unsere Lösung der Differentialgleichung (87) erhalten wir wegen (84)

$$-2 \iint_D v f d\sigma = \int_{AB} + \int_{BP} + \int_{PA}. \quad (88)$$

Die Integration über die Randkurve λ setzt sich aus der Integration über die Teilkurve AB von l und über die achsenparallelen Strecken BP und PA zusammen. Das Integral über die Kurve l ist bekannt, da auf dieser Kurve die Werte der gesuchten Funktion u und ihrer beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung vorgegeben sind. Nunmehr betrachten wir die Integrale über die beiden Strecken. Längs PA ändert sich nur x , folglich erhalten wir bei der Integration über PA das Integral

$$- \int_{PA} (u_x v - v_x u + 2buv) dx.$$

Der Integrand läßt sich auch in der Form

$$u_x v - v_x u + 2buv = (uv)_x + 2u(bv - v_x)$$

schreiben, daher gilt

$$- \int_{PA} (u_x v - v_x u + 2buv) dx = (uv)_P - (uv)_A - \int_{PA} 2u(bv - v_x) dx,$$

wobei beispielsweise $(uv)_P$ den Wert des Produkts uv im Punkt P bezeichnet.

Ebenso liefert uns die Integration über BP

$$\int_{BP} (u_y v - v_y u + 2auv) dy = (uv)_P - (uv)_B + \int_{BP} 2u(av - v_y) dy.$$

Der Ausdruck (88) läßt sich somit in der Gestalt

$$\begin{aligned} 2v(P)u(P) = & \int_{AB} [(u_x v - v_x u + 2buv) dx - (u_y v - v_y u + 2auv) dy] \\ & + u(A)v(A) + u(B)v(B) \\ & + \int_{PA} 2u(bv - v_x) dx + \int_{PB} 2u(av - v_y) dy - 2 \iint_D f v d\sigma \end{aligned} \quad (89)$$

schreiben. Jetzt nehmen wir an, daß v nicht eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (87) ist, sondern eine Lösung, die die Bedingungen

$$bv - v_x = 0 \text{ auf } PA \quad \text{und} \quad av - v_y = 0 \text{ auf } PB$$

erfüllt und für die außerdem $v(P) = 1$ ist. In diesem Fall verschwinden in (89) die Integrale über PA und PB , und wir erhalten die Formel

$$\begin{aligned} 2u(x_0, y_0) = & u(A)v(A) + u(B)v(B) \\ & + \int_{AB} (u_x v - v_x u + 2buv) dx - (u_y v - v_y u + 2auv) dy - 2 \iint_D f v d\sigma, \end{aligned} \quad (90)$$

durch die der Wert der gesuchten Funktion $u(P)$ in dem Punkt P , dessen Koordinaten wir mit x_0, y_0 bezeichnen, ausgedrückt wird. Nunmehr gehen wir näher auf die Bedingungen ein, denen die Lösung v der Differentialgleichung (87) genügen muß. Längs der Geraden PA soll

$$v_x = b(x, y_0) v$$

gelten. Diese Gleichung können wir als gewöhnliche Differentialgleichung in bezug auf die unabhängige Veränderliche x auffassen, und durch Integration erhalten wir für v auf der Strecke PA

$$v(x, y_0) = e^{\int_{x_0}^x b(x, y_0) dx} \quad (\text{auf } PA). \quad (91)$$

Ebenso erhalten wir auf der Strecke PB

$$v(x_0, y) = e^{\int_{y_0}^y a(x_0, y) dy} \quad (\text{auf } PB). \quad (92)$$

Hierbei gilt im Punkt $P(x_0, y_0)$ die Beziehung $v(x_0, y_0) = 1$. Somit muß die Lösung v der Differentialgleichung (87) auf den Strecken PA und PB vorgegebene Werte annehmen, die durch (91) und (92) bestimmt sind. Sie hängt natürlich von der Wahl des Punktes (x_0, y_0) ab, d. h., sie ist im Grunde genommen eine von einem Punktepaar abhängige Funktion. Wir bezeichnen sie mit

$$v(x, y; x_0, y_0). \quad (93)$$

Diese Lösung der Differentialgleichung (87), die den Bedingungen (91) und (92) genügt, heißt *Riemannsche Funktion*. Sie hängt weder von den Cauchyschen Anfangswerten auf l noch von der Gestalt dieser Kurve ab. Der Punkt (x, y) spielt die Rolle eines Argumentes und der Punkt (x_0, y_0) die Rolle eines Parameters. Wir könnten die Existenz einer Lösung des Problems unmittelbar beweisen, indem wir verifizieren, daß durch (90) wirklich eine Funktion $u(x_0, y_0)$ geliefert wird, die der Differentialgleichung (84) und den Bedingungen auf l genügt. Dieser Beweis ist aber mit einigen Schwierigkeiten verbunden; wir geben deshalb in einem der folgenden Abschnitte einen anderen Beweis für die Existenz der Lösung des Cauchyschen Problems.

Die Riemannsche Methode führt die Lösung des Cauchyschen Problems auf die Ermittlung der Riemannschen Funktion (93) zurück. Diese Funktion ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung (87), die vom selben Typus ist wie die Differentialgleichung (84), doch unter Nebenbedingungen, die von den Cauchyschen Bedingungen völlig verschieden sind. Wie wir gesehen haben, sind nur die Werte der Funktion v selbst auf den beiden Charakteristiken PA und PB , die durch den gegebenen Punkt P hindurchgehen, vorgegeben. Im folgenden werden wir die Existenz der Riemannschen Funktion beweisen. Jetzt bemerken wir nur noch, daß wir die grundlegende Formel (90) unter der Voraussetzung erhalten haben, daß eine Lösung des Problems existiert. Existiert also eine Lösung des Problems, so muß sie sich durch die Formel (90) ausdrücken lassen; damit ist die Eindeutigkeit einer Lösung des Cauchyschen Problems bewiesen. Es bleibt aber noch zu zeigen, daß die Formel (90) tatsächlich eine Lösung des Problems liefert. Später werden wir nicht nur die Existenz der Riemannschen Funktion, sondern auch die Existenz einer Lösung des Cauchyschen Problems beweisen. Damit ist dann gezeigt, daß die Formel (90) wirklich die Lösung des Problems liefert.

Nunmehr nehmen wir einstweilen alle angegebenen Existenzsätze als bewiesen an und ziehen aus der Formel (90) einige Folgerungen. Wie wir soeben erwähnt haben, beweist diese Formel die *Eindeutigkeit* der Lösung unseres Problems. Außerdem folgt aus dieser Formel unmittelbar, daß sich, wenn wir die Cauchyschen Anfangswerte auf der Kurve l hinreichend wenig ändern, auch die Lösung des Problems um eine beliebig kleine Größe ändert: Die *Lösung des Cauchyschen Problems hängt stetig von den Anfangswerten ab*. Außerdem folgt aus der Formel (90) unmittelbar, daß der Wert der gesuchten Funktion u im Punkt P nur von den Anfangswerten abhängt, die auf der Teilkurve AB von l gegeben sind. Setzen wir diese auf dem Kurvenstück AB vorgegebenen Anfangswerte über die Kurve AB hinaus längs l auf zwei verschiedene Weisen stetig fort, so erhalten wir außerhalb des Kurvendreiecks PAB zwei verschiedene Lösungen des Cauchyschen Problems, d. h., wir haben zwei verschiedene Systeme von Cauchyschen Anfangswerten, die zwei verschiedene Lösungen des Cauchyschen Problems bestimmen; diese Lösungen sind aber in dem Kurvendreieck PAB identisch, da die Anfangswerte längs der Kurve AB in beiden Problemen übereinstimmen. Die Charakteristiken PA und PB sind diejenigen Kurven, längs deren sich die im Dreieck PAB übereinstimmenden Lösungen in zwei verschiedene Lösungen aufspalten.

Die Überlegungen des vorliegenden Abschnitts setzen natürlich nicht voraus, daß die auftretenden Funktionen analytisch sind. Zum Schluß weisen wir noch auf die Rolle der Bedingung hin, daß die achsenparallelen Geraden, d. h. die Charakteristiken, die Kurve l jeweils nur in einem Punkt schneiden sollen. Wir nehmen (Abb. 2) eine Kurve l_1 , die von den zur x -Achse parallelen Geraden in zwei Punkten geschnitten wird, und geben auf ihr Cauchysche Anfangswerte vor. Durch Anwen-

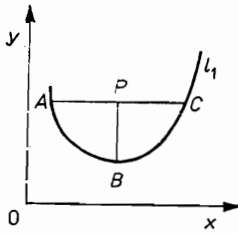


Abb. 2

derung der Riemannschen Methode können wir den Wert der gesuchten Funktion u im Punkt P bestimmen, indem wir entweder das Kurvendreieck PAB oder das Kurvendreieck PBC benutzen. Hierbei erhalten wir im allgemeinen im Punkt P verschiedene Werte für u , so daß unser Problem unlösbar ist.

46. Charakteristische Anfangswerte. Wir betrachten nun das Problem, auf das die Konstruktion der Riemannschen Funktion hinausläuft, und gehen dabei nur auf den Fall einer homogenen Differentialgleichung ein. Es soll also eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \quad (94)$$

bestimmt werden, wenn nur die Werte der gesuchten Funktion u auf den achsenparallelen Strecken CA und CB vorgegeben sind (Abb. 1). Mit ξ, η bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes C . Sind die Werte von u auf CB gegeben, so kennen wir längs CB auch die partielle Ableitung u_x . Dann geht aber die Differentialgleichung (94), wenn wir $y = \eta$ und die bekannten Funktionen u und u_x einsetzen, in eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion u_y längs CB über. Durch Integration dieser Differentialgleichung erhalten wir die Werte der partiellen Ableitung u_y längs CB . Da wir auch die Werte von u längs CA kennen, können wir in derselben Weise die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung von u längs CA ermitteln. Die willkürlichen Konstanten, die wir bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten, sind eindeutig bestimmt, da die Größen u_y und u_x im Punkt C bekannt sind. Diese Überlegungen zeigen, warum es genügt, längs der Charakteristiken CA und CB nur die Werte der Funktion u selbst vorzugeben. Die dargelegte Riemannsche Methode läßt sich auch auf das vorliegende Problem anwenden, und wir erhalten für die gesuchte Funktion die Darstellung

$$2u(P) = u(A)v(A) + u(B)v(B) + \int_{CA} (u_y v - v_y u + 2auv) dy + \int_{CB} (u_x v - v_x u + 2bu v) dx,$$

wobei v wie vorher die Riemannsche Funktion (93) bezeichnet.

Im ersten der beiden Integrale schreiben wir den Integranden in der Gestalt

$$u_y v - v_y u + 2auv = -(uv)_y + 2v(au + u_y)$$

und führen die Integration durch. Eine entsprechende Umformung nehmen wir auch mit dem zweiten Integral vor. Damit ergibt sich die Formel

$$u(P) = u(C)v(C) + \int_{CA} v(au + u_y) dy + \int_{CB} v(bu + u_x) dx. \quad (95)$$

Die erhaltene Darstellungsformel benutzen wir jetzt zum Beweis einer Eigenschaft der Riemannschen Funktion. Zunächst bemerken wir, daß der zum Operator $L^*(v)$

adjungierte Operator der Ausgangsoperator $L(u)$ ist. Denn es ist

$$L^*(v) = v_{xy} - av_x - bv_y + (c - a_x - b_y) v,$$

und der zu L^* adjungierte Operator lautet

$$L_1(u) = u_{xy} + (au)_x + (bu)_y + (c - a_x - b_y) u = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = L(u).$$

Nun wenden wir die Formel (95) auf die Riemannsche Funktion u des Operators $L^*(v)$ an. Im Operator $L^*(v)$ sind die Koeffizienten von v_x und v_y gleich $-a$ bzw. $-b$, folglich ist die Riemannsche Funktion dieses Operators eine Lösung der Differentialgleichung (94), die auf den Strecken CA und CB den Differentialgleichungen $au + u_y = 0$ und $bu + u_x = 0$ genügt und außerdem die Bedingung $u(C) = 1$ erfüllt. Der Punkt $C(\xi, \eta)$ spielt hierbei die gleiche Rolle wie der Punkt $P(x_0, y_0)$ für die Funktion (93).

Durch Anwendung von (95) auf diesen Spezialfall gelangen wir zu der Beziehung

$$u(x_0, y_0; \xi, \eta) = v(\xi, \eta; x_0, y_0),$$

d. h., die Riemannsche Funktion (93) des Operators $L(u)$ geht in die Riemannsche Funktion des adjungierten Operators $L^*(v)$ über, wenn wir in ihr die Punkte (x, y) und (x_0, y_0) vertauschen. Ist $L^*(v)$ mit $L(v)$ identisch, so heißt $L(u)$ *selbstadjungiert*. Für einen selbstadjungierten Operator ist die Riemannsche Funktion eine symmetrische Funktion der beiden Punkte, von denen sie abhängt. Unter Berücksichtigung der Ausdrücke für $L(u)$ und $L^*(v)$ lassen sich leicht Bedingungen dafür angeben, daß $L(u)$ selbstadjungiert ist; sie lauten $a = b \equiv 0$. Das Problem, die Lösung der Differentialgleichung (94) bei vorgegebenen Werten der Funktion auf zwei Charakteristiken zu bestimmen, nennt man gewöhnlich das *charakteristische Anfangswertproblem*. Die Formel (95) zeigt wie beim Cauchyschen Problem, daß das charakteristische Anfangswertproblem nur eine *einzige* Lösung haben kann.

47. Existenzsätze. Es bleiben nun noch die Sätze zu beweisen, welche die *Existenz* einer Lösung des Cauchyschen Problems sowie des charakteristischen Anfangswertproblems sichern. Wir beginnen mit dem letzteren Problem und behandeln nur den Fall einer homogenen Differentialgleichung. Gesucht ist also eine Lösung der Differentialgleichung (94), die auf den Charakteristiken $x = x_0$ und $y = y_0$ vorgegebene Werte

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad u|_{y=y_0} = \psi(x) \quad [\varphi(y_0) = \psi(x_0)] \quad (96)$$

annimmt. Setzen wir voraus, daß der Koeffizient b eine stetige Ableitung nach y besitzt, so können wir die Differentialgleichung (94) in das System der beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u_x + bu = w, \quad (97)$$

$$w_y + aw = du \quad (98)$$

mit

$$d = ab + b_y - c$$

überführen; für die neu eingeführte Funktion w erhalten wir dabei die Anfangsbedingung

$$w|_{y=y_0} = \varphi'(x) + b(x, y_0) \varphi(x) = \omega(x). \quad (99)$$

Fassen wir die Gleichung (97) als gewöhnliche lineare Differentialgleichung auf und berücksichtigen die erste Bedingung (96), so können wir die Funktion $u(x, y)$ mit

Hilfe der Funktion $w(x, y)$ ausdrücken:

$$u(x, y) = e^{-\int_{x_0}^x b(\xi, y) d\xi} \left[\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^{\xi} b(\xi', y) d\xi'} w(\xi, y) d\xi + \psi(y) \right].$$

Ebenso liefert die Differentialgleichung (98)

$$w(x, y) = e^{-\int_{y_0}^y a(x, \eta) d\eta} \left[\int_{y_0}^y e^{\int_{y_0}^{\eta} a(x, \eta') d\eta'} d(x, \eta) u(x, \eta) d\eta + \varphi'(x) + b(x, y_0) \varphi(x) \right].$$

Diese Integralgleichungen sind den Differentialgleichungen (97) und (98) mit den Anfangsbedingungen (96) gleichwertig. Führen wir die Bezeichnungen

$$K_1(x, y; \xi) = e^{\int_{x_0}^{\xi} b(\xi', y) d\xi'}, \quad K_2(x, y; \eta) = e^{\int_{y_0}^{\eta} a(x, \eta') d\eta'} d(x, \eta) \quad (100)$$

ein, so können wir die letzten beiden Integralgleichungen in der Gestalt

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-\int_{x_0}^x b(\xi, y) d\xi} \left[\psi(y) + \int_{x_0}^x K_1(x, y; \xi) w(\xi, y) d\xi \right], \\ w(x, y) &= e^{-\int_{y_0}^y a(x, \eta) d\eta} \left[\omega(x) + \int_{y_0}^y K_2(x, y; \eta) u(x, \eta) d\eta \right] \end{aligned} \quad (101)$$

schreiben. Die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation mit den üblichen Konvergenzbetrachtungen liefert den Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Integralgleichungssystems (101). Damit man von den Differentialgleichungen (97) und (98) auf (94) zurückgehen kann, muß eine stetige gemischte Ableitung u_{xy} existieren. Aus den Integralgleichungen (101), denen die stetigen Funktionen $u(x, y)$ und $w(x, y)$ genügen, ist ersichtlich, daß u_{xy} stetig ist, falls die Funktion $b(x, y)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und die Funktion $\varphi(y)$ eine stetige Ableitung besitzt. Setzen wir den Ausdruck für $w(x, y)$ aus der zweiten Integralgleichung (101) in die erste ein, so erhalten wir für $u(x, y)$ eine gewöhnliche Volterrasche Integralgleichung mit einem Doppelintegral.

Wir gehen zum Existenzbeweis für die Lösung des Cauchyschen Problems über. Die Gleichung der Kurve l , auf der die Cauchyschen Anfangswerte vorgegeben sind, läßt sich, wie wir gesehen haben, in der Gestalt $x = x(y)$ oder $y = y(x)$ schreiben; dabei mögen die Funktionen $x(y)$ und $y(x)$ stetige Ableitungen besitzen, die nicht gleich 0 sind. Die Cauchyschen Anfangswerte auf l können wir als Funktionen annehmen, die entweder von der unabhängigen Veränderlichen x oder von der unabhängigen Veränderlichen y abhängen. Wir schreiben diese Anfangswerte in der Form

$$u|_{x=x(y)} = \psi(y) = \psi_1(x), \quad u_x|_{y=y(x)} = \varphi_1(x).$$

Bei der Integration der Differentialgleichungen (97) und (98) haben wir die Anfangswerte

$$u|_{x=x(y)} = \psi(y), \quad w|_{y=y(x)} = \varphi_1(x) + b[x, y(x)] \psi_1(x) = \omega_1(x)$$

zu berücksichtigen. Dann erhalten wir wie soeben das Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-\int_{x(y)}^x b(\xi, y) d\xi} \left[\psi(y) + \int_{x(y)}^x K_1(x, y; \xi) w(\xi, y) d\xi \right], \\ w(x, y) &= e^{-\int_{y(x)}^y a(x, \eta) d\eta} \left[\omega_1(x) + \int_{y(x)}^y K_2(x, y; \eta) u(x, \eta) d\eta \right], \end{aligned} \quad (102)$$

in dem $K_1(x, y; \xi)$, $K_2(x, y; \eta)$ wiederum durch die Ausdrücke (100) definiert sind. Der Konvergenzbeweis für die Methode der sukzessiven Approximation läßt sich auch für dieses Integralgleichungssystem in der üblichen Weise durchführen; mit diesem Beweis ist dann die Existenz einer Lösung bewiesen. Hat der Punkt P dieselbe Lage wie in Abb. 1, so kann man in den Abschätzungen die Länge des Integrationsweges bei der Integration über ξ durch $\alpha - x$ und bei der Integration über η durch $\beta - y$ ersetzen, wobei α und β die größten Werte von x und y in dem Rechteck mit achsenparallelen Seiten sind, in welchem wir die Lösung des Problems betrachten. (In diesem Rechteck mögen die Koeffizienten den angegebenen Bedingungen genügen, beispielsweise sollen die Koeffizienten a und b stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen und c und f stetig sein, da wir diese Voraussetzungen bei der Riemannschen Methode benötigen.) Wir hätten auch die inhomogene Differentialgleichung (84) behandeln können. Man braucht dabei nur auf der rechten Seite der Differentialgleichung (98) die Funktion $f(x, y)$ hinzuzufügen. Mit Hilfe des Integralgleichungssystems (102) kann man auch leicht die Eindeutigkeit der Lösung beweisen, ohne die Riemannsche Methode zu benutzen.

Man kann zum Beweis des Existenzsatzes die Methode der sukzessiven Approximation auch unmittelbar auf die Differentialgleichung (94) in derselben Weise anwenden, wie wir dies bei gewöhnlichen Differentialgleichungen getan haben. Wir beginnen mit dem Fall der charakteristischen Anfangsbedingungen (96). Die Differentialgleichung (94) mit den Anfangsbedingungen (96) ist der Integrodifferentialgleichung

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y [a(\xi, \eta) u_{\xi}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_{\eta}(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) u(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (103)$$

gleichwertig, wobei der integralfreie Bestandteil in dieser Gleichung auf Grund der Beziehung $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ die Anfangsbedingungen (96) erfüllt.

Als erste Näherung können wir die Funktion

$$u_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0)$$

benutzen. Die übrigen Näherungen ergeben sich sukzessive aus den Gleichungen

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (104)$$

Durch elementare Abschätzungen läßt sich zeigen, daß die Folge der Funktionen

$$u_n(x, y), \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}$$

in dem in Abb. 1 eingezeichneten Rechteck B gleichmäßig konvergiert; dabei nehmen wir an, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung in diesem Rechteck stetige Funktionen sind. Führen wir in der Beziehung (104) den Grenzübergang durch, so können wir uns ohne Mühe davon überzeugen, daß die Grenzfunktion der Folge $\{u_n(x, y)\}$ die Integrodifferentialgleichung (103) und damit auch die Differentialgleichung (94) erfüllt sowie die Anfangswerte (96) annimmt.

Wir gehen nun zum Cauchyschen Problem über. Es sei R ein Rechteck, das im Inneren den Teil der Kurve l enthält, auf dem die Cauchyschen Anfangswerte vorgegeben sind. Außerdem sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung in R stetige Funktionen sein. Es sei (x, y) ein Punkt im Innern dieses Rechtecks. Wir bezeichnen mit D_{xy} das Kurvendreieck PAB , das durch die Teilkurve AB von l und die beiden achsen-

parallelen Strecken PA und PB , die von dem Punkt $P(x, y)$ ausgehen, begrenzt wird. Die Cauchyschen Anfangsbedingungen lassen sich in der Gestalt

$$u|_l = \varphi(x) + \psi(y), \quad u_x|_l = \varphi'(x), \quad u_y|_l = \psi'(y) \quad (105)$$

schreiben. Denn wie bereits erwähnt wurde, können wir stets annehmen, daß sich die Anfangswerte für u_x und u_y durch x oder y ausdrücken lassen. Durch Integration dieser Funktionen erhalten wir gerade die Anfangswerte für u in der angegebenen Gestalt. Die Differentialgleichung (94) mit den Anfangswerten (105) ist der Integrodifferentialgleichung

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{D_{xy}} [a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) u(\xi, \eta)] d\xi d\eta$$

gleichwertig.

In der Integrodifferentialgleichung (103) haben wir ein Doppelintegral mit Angabe der Integrationsgrenzen geschrieben; bei dieser Schreibweise ist die Lage des Punktes $P(x, y)$ in bezug auf die Charakteristiken $x = x_0$ und $y = y_0$ gleichgültig. In der letzten Integrodifferentialgleichung schreiben wir ein Gebietsintegral und wählen die gegenseitige Lage des Punktes, der Kurve und der Achsen so wie in Abb. 1. Als erste Näherung benutzen wir

$$u_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y);$$

die folgenden Näherungen lassen sich aus den Gleichungen

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) + \iint_{D_{xy}} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta$$

berechnen. Wie vorhin können wir mit Hilfe elementarer Abschätzungen der Integrale zeigen, daß die Folge $\{u_n(x, y)\}$ im Rechteck R gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die gerade die Lösung des Cauchyschen Problems ist.

Die Methode der sukzessiven Approximation können wir auch benutzen, um Lösungen des Cauchyschen Problems für quasilineare hyperbolische Differentialgleichungen zu bestimmen. Dafür ist es zweckmäßig, das ursprüngliche Cauchysche Problem in ein Cauchysches Problem mit homogenen Anfangsbedingungen überzuführen. Wir betrachten die Gleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q). \quad (106)$$

Wir setzen voraus, daß sich die Cauchyschen Anfangswerte auf der Kurve $l \{y = y(x)\}$ durch die unabhängige Veränderliche x ausdrücken lassen, daß man also $u(x)$, $p(x)$, $q(x)$ schreiben kann, wobei $u'(x) = p(x) + y'(x) q(x)$ gilt. Weiterhin setzen wir voraus, daß diese Funktionen stetige Ableitungen haben. Dann bilden wir die Hilfsfunktion

$$\omega(x, y) = u(x) + [y - y(x)] q(x),$$

die offenbar stetige Ableitungen ω_x und ω_y besitzt. Diese Funktion ω erfüllt auf der Kurve l die geforderten Anfangsbedingungen. Nunmehr führen wir an Stelle von u die neue gesuchte Funktion $u_1 = u - \omega$ ein, deren Cauchysche Anfangswerte auf l verschwinden. Hierbei müssen wir natürlich auch die Differentialgleichung (106) auf die neue gesuchte Funktion transformieren. Wir können somit annehmen, daß für die Differentialgleichung (106) verschwindende Cauchysche Anfangswerte vorliegen. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktion f auf der rechten Seite der Differentialgleichung nach allen ihren Argumenten stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, und zwar für Punkte (x, y) , die hinreichend nahe an der Kurve l liegen, und für Werte u, p, q , die hinreichend klein sind. Die Differentialgleichung (106) läßt sich im Fall verschwindender Anfangswerte in die Integrodifferentialgleichung

$$u(x, y) = - \iint_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u, p, q) d\xi d\eta$$

überführen. Auf diese Integrodifferentialgleichung können wir die übliche Methode der sukzessiven Approximation anwenden, wenn wir uns auf Punkte (x, y) beschränken, die in einer gewissen Umgebung der Kurve l liegen. Als erste Näherung haben wir $u_0 = p_0 = q_0 = 0$ zu wählen, die folgenden Näherungen lassen sich aus den Gleichungen

$$u_n(x, y) = - \iint_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) d\xi d\eta,$$

$$p_n(x, y) = \int_{BP} f(x, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) d\eta,$$

$$q_n(x, y) = \int_{AP} f(\xi, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) d\xi$$

berechnen.

Bemerkung. Bei der Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation auf eine lineare Differentialgleichung könnten wir natürlich auch eine inhomogene Differentialgleichung zugrunde legen und wie soeben für die Differentialgleichung (94) die Anfangswerte im Cauchyschen Problem oder im charakteristischen Anfangswertproblem in 0 überführen. Dabei würde die homogene Ausgangsdifferentialgleichung in eine inhomogene Differentialgleichung für die transformierte Funktion übergehen.

48. Die Formel der partiellen Integration und die Greensche Formel. Die Formeln von GREEN und OSTROGRADSKI sind Folgerungen der Formeln der partiellen Integration (16₁) und (31₂) für Doppel- bzw. Dreifachintegrale, die in [II, 66, 72] bewiesen wurden. Letztere können in einer einheitlichen, in einer für Integrale beliebiger Vielfachheit bequemen Form geschrieben werden, wenn man sich der Integrale über die Hyperfläche S des euklidischen Raumes R^m in der Gestalt $\int_S f dS$ bedient. Dabei ist dS das (immer positive) Oberflächenelement, und $\int_S f dS$ gibt den Inhalt der Hyperfläche S an. In [II, 65, 142] wurden alle diese Begriffe für den Fall $m=3$ eingeführt. Für $m>3$ werden sie analog erklärt; ist S insbesondere durch die Gleichung

$$x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

explizit gegeben, wobei $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$ ein beschränktes Gebiet D_{m-1} des R^{m-1} durchläuft, dann ist im Punkt $x = (x', \varphi(x'))$ der Fläche S

$$dS = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_{x_i}^2(x')} dx' \quad \text{mit} \quad dx' = dx_1 \dots dx_{m-1}$$

und

$$\int_S f dS = \int_{D_{m-1}} f(x') \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_{x_i}^2(x')} dx',$$

wobei $f(x')$ den Wert der Funktion f im Punkt $x = (x', \varphi(x'))$ der Fläche S bezeichnet. Wenn die glatte Fläche S der Rand eines gewissen beschränkten Gebietes D des Raumes R^m ist, kann man sie so in eine endliche Anzahl von Teilflächen S_k ($k=1, \dots, N$) zerlegen, daß jede Teilfläche S_k durch eine explizite Gleichung gegeben ist, indem man eine Koordinate x_{i_k} durch die übrigen ausdrückt. Das Integral $\int_S f dS$ über die Fläche S kann dann als Summe der Integrale $\int_{S_k} f dS$ über die Teilfläche S_k erklärt werden.

Die Formel der partiellen Integration hat die Gestalt

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_D u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S uv \cos(n, x_i) dS \quad (i=1, \dots, m). \quad (107)$$

Sie ist bekanntlich gültig, wenn D ein beschränktes Gebiet des euklidischen Raumes R^m mit der glatten Hyperfläche S als Rand ist und die Funktionen u und v zur Klasse $C^1(\bar{D})$, der Klasse der in $\bar{D} = D \cup S$ stetigen und stetig differenzierbaren Funktionen, gehören. Der in der Formel auftretende Ausdruck $\cos(n, x_i)$ bezeichnet den Kosinus des Winkels zwischen der x_i -Achse und der bezüglich des Gebietes D äußeren Normalen an S . Die Formel (107) ist eine Folgerung der Formel

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_S w \cos(n, x_i) dS,$$

die für beliebiges i ($i = 1, \dots, m$) und für alle S und w gilt, die den obigen Glattheitsvoraussetzungen genügen. Tatsächlich führt sie auf die Formel (107), wenn $w = uv$ gesetzt wird.

Wir erhalten mit Hilfe von (107) die Greensche Formel für einen beliebigen linearen Differentialoperator zweiter Ordnung. Wir setzen voraus, das alle weiter unten auftretenden Ableitungen in dem beschränkten Gebiet D bis an den glatten Rand S heran stetig sind.

Es sei

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^m b_k u_{x_k} + cu \quad (108)$$

und

$$L^*(v) = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial (b_k v)}{\partial x_k} + cv, \quad (109)$$

wobei a_{ik} , b_k und c gegebene Funktionen von x sind. Wir betrachten das Integral

$$\int_D v L(u) dx \quad (dx = dx_1 \dots dx_m)$$

und formen es mittels der Formel (107) um, indem wir alle Ableitungen von u auf v übertragen. Das führt auf die Greensche Formel

$$\int_D [v L(u) - u L^*(v)] dx = \int_S [v P(u) - u P(v) + uv Q] dS \quad (110)$$

mit

$$P(u) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i), \quad Q = \sum_{i=1}^m \left(b_i - \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right) \cos(n, x_i); \quad (111)$$

dabei ist n die Richtung der äußeren Normalen von S . In den Punkten der Fläche S bestimmen wir eine Richtung v . Zu diesem Zweck setzen wir

$$N = \sqrt{\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^m a_{ik} \cos(n, x_i) \right]^2} \quad (112)$$

und definieren die Richtung v durch

$$\cos(v, x_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m a_{ik} \cos(n, x_i) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (113)$$

Damit läßt sich der erste Ausdruck (111) in der Gestalt

$$P(u) = N \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(v, x_k) = N \frac{\partial u}{\partial v}$$

schreiben, und die Greensche Formel (110) lautet schließlich

$$\int_D [v L(u) - u L^*(v)] d\tau = \int_S \left[N \left(v \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial v}{\partial v} \right) + uv Q \right] dS. \quad (114)$$

Sind die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

erfüllt, so verschwindet Q , der Operator $L^*(v)$ ist mit $L(v)$ identisch, und wir können $L(u)$ in der Gestalt

$$L(u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m a_{ik} u_{x_k} + cu$$

schreiben. In diesem Fall heißt der Operator $L(u)$ symmetrisch. Im allgemeinen Fall wird der Differentialoperator L^* nicht mit L übereinstimmen. Er heißt im Sinne von LAGRANGE zu L adjungierter Operator.

49. Die Methode von Volterra. Die Lösung des Cauchyschen Problems für Differentialgleichungen zweiter Ordnung bereitet im Fall von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen erheblich größere Schwierigkeiten. Für die Wellengleichung haben wir explizite Formeln für die Lösung des Cauchyschen Problems mit Anfangsbedingungen in $t=0$ angegeben [II, 184]. Die Methode, mit der wir diese Formeln erhielten, läßt sich jedoch nicht auf allgemeinere Fälle übertragen. In diesem Abschnitt legen wir eine andere Methode zur Lösung des Cauchyschen Problems für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar. Diese Methode, die eine Verallgemeinerung der Riemannschen Methode darstellt, beruht wie die vorige Methode auf einer originellen Anwendung der Greenschen Formel. Sie liefert die Lösung des Cauchyschen Problems nicht nur für Anfangsbedingungen auf der Achse $t=0$, sondern auch für einige nichtcharakteristische Flächen. Die Grundidee dieser Methode ist eng mit den Methoden verwandt, die für Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten angewendet werden.

Jetzt setzen wir voraus, die Hyperfläche S sei eine charakteristische Hyperfläche der Differentialgleichung $L(u)=0$ oder $L(u)=f$, wobei f eine vorgegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist. Es sei $\omega(x_1, \dots, x_m)=0$ die Gleichung dieser Hyperfläche. Die Größen $\cos(n, x_i)$ sind den partiellen Ableitungen $p_i = \omega_{x_i}$ proportional, und wegen (113) sind die Richtungskosinus der Richtung v den Größen

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} p_i$$

proportional. Diese Summen stellen die rechten Seiten der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_k}{ds} = \sum_{i=1}^m a_{ik} p_i$$

für die Bicharakteristiken [41] dar, welche die charakteristische Hyperfläche S erzeugen. Wir können somit aussagen: *Ist S eine charakteristische Hyperfläche, so ist die Richtung v in jedem Punkt von S mit der Richtung der Bicharakteristik identisch, die auf S liegt und durch diesen Punkt hindurchgeht.* Folglich liegt in diesem Fall die Richtung v in der Tangentialebene von S . Die Richtung v wird zuweilen Richtung der Konormalen von S genannt. Jetzt gehen wir auf die Bedeutung der Greenschen Formel (114) für die Lösung des Cauchyschen Problems ein. Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$L(u) = -f, \quad (115)$$

wenn die Werte der Funktion u und der Konormalableitung $\frac{\partial u}{\partial v}$ auf einer Fläche S_1

vorgegeben sind. Wir nehmen an, die Fläche S_1 sei so beschaffen, daß auf ihr die Richtung ν nicht in der Tangentialebene liegt. Dann kann man aus der Vorgabe von u und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf S_1 die Ableitung der Funktion u auf S nach einer beliebigen Richtung bestimmen. Zur Ermittlung des Wertes von u in einem Punkt $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, der nicht auf S_1 liegt, gehen wir in folgender Weise vor. Wir konstruieren das charakteristische Konoid der Differentialgleichung (115) mit der Spitze in M_0 und setzen voraus, daß die eine Hälfte dieses Konoids mit der Fläche S_1 einen beschränkten Bereich D des $x_1, \dots, x_m$ -Raumes begrenzt (Abb. 3). Dann wenden wir auf den Bereich D die Greensche Formel (114) an, in der wir für u die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (115) und für v eine singuläre Lösung der adjungierten Differentialgleichung $L^*(v)=0$ nehmen. Die Oberfläche des Bereiches D besteht aus einem Stück der Fläche S_1 , auf dem u und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ vorgegeben sind, und aus der Mantelfläche Γ des charakteristischen Konoids. Da die Richtung ν auf Γ mit der Tangentenrichtung der Bicharakteristik, die auf Γ liegt, übereinstimmt, können wir bei der Integration über Γ partiell integrieren.

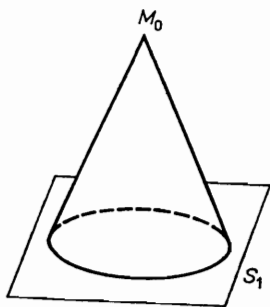


Abb. 3

Wir führen diese Methode für die Wellengleichung

$$L(u) = u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = -f(x, y, t) \quad (116)$$

durch. Das charakteristische Konoid ist im vorliegenden Fall ein Kreiskegel, bei dem der Winkel zwischen den Erzeugenden und der Höhe gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. Der Operator $L(u)$ ist selbstadjungiert, die Relation (112) liefert $N=1$, und aus den Gleichungen (113) folgt

$$\cos(\nu, x) = \cos(n, x), \quad \cos(\nu, y) = \cos(n, y), \quad \cos(\nu, t) = -\cos(n, t),$$

woraus man erkennt, daß die Richtung ν das Spiegelbild der Richtung n an der Ebene $t=0$ ist. Die Gleichung des charakteristischen Kegels mit der Spitze (x_0, y_0, t_0) lautet

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (t-t_0)^2 = 0. \quad (117)$$

Als Lösung der Differentialgleichung $L(v)=0$ nehmen wir die Funktion

$$v = \lg \left[\sqrt{\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - 1} - \frac{t-t_0}{r} \right] \quad (118)$$

mit

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2.$$

Weiterhin nehmen wir diejenige Hälfte des Kegels (117), die in Richtung abnehmender Werte geöffnet ist. Auf der Mantelfläche Γ dieses Kegels gilt $\frac{t-t_0}{r} = -1$, so daß die Lösung (118) auf dieser Fläche verschwindet. Die Differentiation nach v auf Γ ist die Differentiation in der Richtung der Konormalen auf Γ , d. h. in der Richtung der Erzeugenden des Kegels; folglich gilt auf Γ nicht nur $v=0$, sondern auch $\frac{\partial v}{\partial v}=0$. Aber die Lösung (118) hat für $r=0$ eine Singularität, d. h., die durch die Spitze des Kegels parallel zur t -Achse verlaufende Gerade ist eine singuläre Linie der Lösung (118). Wir schließen diese Linie in einen Kreiszylinder T_ε mit dem Radius ε ein. Den restlichen Teil des Bereiches D bezeichnen wir mit D' . Die Begrenzung dieses Bereiches enthält außer S_1 und Γ auch die Mantelfläche T_ε des ausgeschnittenen Zylinders (Abb. 4). Es sei S'_1 derjenige Teil der Fläche S_1 , der in unserem Kegel liegt, mit Ausnahme des Flächenstückes, das sich in dem Zylinder T_ε befindet. Jetzt wenden wir die Formel (114) an. Unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen $L(v)=L^*(v)$, $L(u)=-f(x, y, t)$, $L(v)=0$ und der auf Γ gültigen Beziehungen $v=\frac{\partial v}{\partial v}=0$ erhalten wir

$$\iint_{T_\varepsilon \cup S'_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial v}{\partial v} \right) dS = - \iint_{D'} f v d\tau. \quad (119)$$

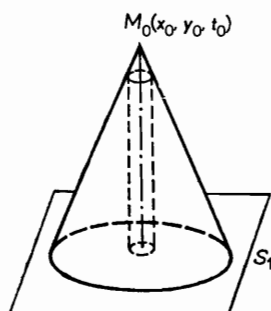


Abb. 4

Auf der Fläche T_ε ist die Richtung v mit der Richtung der äußeren Normalen identisch, d. h., sie ist der zu r gehörigen Richtung entgegengesetzt, wobei r von der zur t -Achse parallelen Gerade $x=x_0$, $y=y_0$ aus zu rechnen ist. Bezeichnen wir mit φ den Polarwinkel im Koordinatensystem $x-x_0=r \cos \varphi$ und $y-y_0=r \sin \varphi$, so erhalten wir

$$\iint_{T_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial v} dS = \iint_{T_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial v} \varepsilon d\varphi dt. \quad (120)$$

Auf T_ε ist $r=\varepsilon$, und wegen (118) ist v von der Ordnung $\lg \varepsilon$. Da $\varepsilon \lg \varepsilon \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist, finden wir, daß das Integral (120) mit ε gegen 0 strebt. Weiterhin gilt

$$\frac{\partial v}{\partial v} = - \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{t-t_0}{r \sqrt{(t-t_0)^2 - r^2}},$$

wobei wir die Wurzel als positiv annehmen. Auf T_ε gilt

$$\sqrt{(t-t_0)^2 - r^2} = \sqrt{(t-t_0)^2 - \varepsilon^2},$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt diese Wurzel gegen $t_0 - t$, da $t < t_0$ ist. Somit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\varepsilon} \frac{(t-t_0) u}{\sqrt{(t-t_0)^2 - \varepsilon^2}} d\varphi dt = 2\pi \int_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t) dt,$$

wobei t' der Wert von t im Schnittpunkt der Geraden $r=0$ mit der Fläche S_1 ist. Folglich geht aus (119) die Beziehung

$$2\pi \int_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t) dt = \iint_{S_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \iiint_D f v d\tau$$

hervor; dabei ist S_2 derjenige Teil der Fläche S_1 , der sich im Innern unseres Kegels befindet. Auf der rechten Seite stehen vorgegebene Größen, und durch Differentiation nach t_0 erhalten wir schließlich

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\iint_{S_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \iiint_D f v d\tau \right]. \quad (121)$$

Diese Formel haben wir unter der Voraussetzung erhalten, daß eine Lösung des Problems existiert. Strenggenommen müssen wir noch verifizieren, daß die rechte Seite von (121) tatsächlich allen Bedingungen des Problems genügt. Dies macht aber große Mühe, da sich bei der Änderung von t_0 auch die Lage des Kegels (117) ändert. Ist S_2 die Ebene $t=0$, so haben wir die bereits früher erhaltene Lösung. Die hier behandelte Methode zur Lösung des Cauchyschen Problems stammt von VOLTERRA. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet man in dem Buch von A. G. WEBSTER und G. SZEGÖ, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Leipzig und Berlin 1930, Kap. 6.

Mit der Greenschen Formel hängt auch eine andere Methode zur Lösung des Cauchyschen Problems zusammen: die Methode von HADAMARD. Bei der Anwendung dieser Methode benutzt man eine Lösung der Differentialgleichung $L^*(v)=0$, die auf der ganzen Mantelfläche des charakteristischen Konoids bzw. des Kegels (117) im Fall der Differentialgleichung (116) unendlich wird. Dieser Umstand erfordert bei der Anwendung der Greenschen Formel besondere Vorsichtsmaßnahmen und führt naturgemäß zu einem neuen Integralbegriff.

Für eine Differentialgleichung der Gestalt

$$L(u) = \sum_{s=1}^m u_{x_s x_s} - u_{tt} = -f$$

lautet die singuläre Lösung von HADAMARD

$$v = \left[(t-t_0)^2 - \sum_{s=1}^m (x_s - x_s^{(0)})^2 \right]^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2}}.$$

Eine ausführliche Darlegung der Methode in ihrer Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten findet man in dem Buch von J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris 1932. In dem Buch von R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Band II, wird die Methode von HADAMARD auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angewandt.

50. Die Formel von Sobolew. Wir hatten für die Wellengleichung mit vier unabhängigen Veränderlichen die Kirchhoffsche Formel abgeleitet [II, 212]. Es sei u

eine Lösung der Wellengleichung, die in einem Bereich D des x_1, x_2, x_3 -Raumes, der durch eine Fläche S begrenzt wird, stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Die Kirchhoffsche Formel drückt den Wert von u in einem beliebigen Punkt im Innern des Bereiches D durch ein Integral über die Fläche S aus, wobei in diesem Integral die retardierten¹⁾ Werte der Funktion u und ihrer ersten Ableitungen vorkommen. Wir haben auch gesehen, daß die Kirchhoffsche Formel bei spezieller Wahl der Fläche S zur Lösung des Cauchyschen Problems führt, und zwar dann, wenn die Anfangswerte für $t=0$ vorgegeben sind [II, 212]. Die Kirchhoffsche Formel läßt sich auch auf den Fall der Wellengleichung mit einer beliebigen geraden Anzahl von unabhängigen Veränderlichen

$$u_{tt} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_{2k+1} x_{2k+1}}$$

erweitern und liefert für diese Differentialgleichung in der gleichen Weise die Lösung des Cauchyschen Problems (vgl. [55]).

Jetzt wollen wir die Kirchhoffsche Formel auf den Fall der Wellengleichung mit einem veränderlichen Koeffizienten

$$u_{tt} = c^2(x, y, z) (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (122)$$

verallgemeinern, wobei $c(x, y, z)$ eine positive Funktion bedeutet, die hinreichend oft differenzierbar ist. Im folgenden werden wir an Stelle von $c(x, y, z)$ oft $c(M)$ schreiben, falls M den Punkt mit den Koordinaten x, y, z bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Charakteristikentheorie für die Differentialgleichung (122) gelangen wir naturgemäß zum Extremalproblem für das Funktional

$$J = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c(x, y, z)} = \int_{M_0}^{M_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{c(x, y, z)}. \quad (123)$$

Die Transversalitätsbedingung ist jetzt mit der Orthogonalitätsbedingung identisch, und wir können das Feld für das Variationsproblem so konstruieren, wie dies in [42] gezeigt worden ist. Es sei $\tau(M, M_0)$ die Fundamentalfunktion des Zentralfeldes mit dem Zentrum M_0 . Diese Funktion stellt den Wert des Integrals (123) dar, das über die Extremale von M_0 bis M erstreckt wird. Die Gleichung $\tau(M, M_0) = \text{const}$ liefert die Quasikugeln mit dem Zentrum M_0 bezüglich der durch (123) definierten Metrik. Für die Funktion $\tau(M, M_0)$ muß die Differentialgleichung

$$\text{grad}^2 \tau(M, M_0) = \frac{1}{c^2(M)}, \quad (124)$$

d. h.

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \frac{1}{c^2(M)} \quad (124_1)$$

erfüllt sein. Die Funktion $\tau(M, M_0)$ ist offenbar eine symmetrische Funktion von M_0 und M . Ist c konstant, so gilt $\tau(M, M_0) = \frac{r}{c}$, wobei r die Entfernung von M_0 bis M angibt. Im allgemeinen Fall benutzen wir bei der Bestimmung der retardierten Werte einer beliebigen Funktion $u(M, t)$ an Stelle von $\frac{r}{c}$ die Größe τ ; wie in [II, 212] führen wir noch die Bezeichnung

$$u(M, t - \tau) = [u(M, t)]$$

ein. Wir setzen voraus, daß $u(M, t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (122) ist, und schreiben der Einfachheit halber $u(M, t - \tau) = u_1(M, t)$.

¹⁾ Auch „nacheilend“ genannt. (Anm. d. Red)

In der Differentialgleichung (122) gehen wir zu den retardierten Werten über,

$$[u_{tt}] = c^2(M) [\Delta u], \quad (125)$$

dabei ist Δ der Laplacesche Operator. Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{grad } u_1 &= [\text{grad } u] - [u_t] \text{ grad } \tau, \\ \Delta u_1 &= \text{div grad } u_1 \\ &= [\Delta u] - 2[\text{grad } u_t] \cdot \text{grad } \tau - [u_t] \Delta \tau + [u_{tt}] \text{ grad}^2 \tau \end{aligned} \quad (126)$$

drücken wir $[\Delta u]$ durch u_1 aus. Setzen wir in (125) an Stelle von $[\Delta u]$ den Ausdruck aus der letzten Gleichung ein, so erhalten wir mit Hilfe von (124)

$$\frac{1}{c^2(M)} [u_{tt}] = \Delta u_1 + 2[\text{grad } u_t] \cdot \text{grad } \tau + [u_t] \Delta \tau - [u_{tt}] \frac{1}{c^2(M)}.$$

Analog zur ersten Beziehung (126) gilt

$$\text{grad } \frac{\partial u_1}{\partial t} = [\text{grad } u_t] - [u_{tt}] \text{ grad } \tau.$$

Setzen wir den Ausdruck für $[\text{grad } u_t]$ aus der letzten Beziehung in die vorletzte ein, so erhalten wir die für das Folgende wichtige Beziehung

$$\Delta u_1 = -2 \text{ grad } \tau \cdot \text{grad } \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta \tau \frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit einer zunächst unbestimmten Funktion $\sigma(M)$,

$$\sigma \Delta u_1 = -2\sigma \text{ grad } \tau \cdot \text{grad } \frac{\partial u_1}{\partial t} - \sigma \Delta \tau \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad (127)$$

und wählen diese Funktion $\sigma(M)$ so, daß die rechte Seite die Divergenz eines Vektors der Gestalt $-\frac{\partial u_1}{\partial t} \mathbf{w}$ ist, wobei $\mathbf{w}$ ein nicht von u_1 abhängiger Vektor ist:

$$\sigma \Delta u_1 = \text{div} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} \mathbf{w} \right). \quad (128)$$

Durch Auflösung der rechten Seite ergibt sich

$$\sigma \Delta u_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \text{div } \mathbf{w} - \text{grad } \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot \mathbf{w}.$$

Beim Vergleich mit (127) sehen wir, daß die Beziehung (128) tatsächlich erfüllt ist und $\mathbf{w}$ nicht von u_1 abhängt, wenn die Relationen

$$\mathbf{w} = 2\sigma \text{ grad } \tau, \quad \text{div } \mathbf{w} = \sigma \Delta \tau \quad (129)$$

erfüllt sind. Setzen wir die erste Relation in die zweite ein, so erhalten wir zur Bestimmung von σ die Differentialgleichung

$$\text{div} (2\sigma \text{ grad } \tau) = \sigma \Delta \tau,$$

d. h.

$$2 \text{ grad } \sigma \cdot \text{grad } \tau + \sigma \Delta \tau = 0 \quad (130)$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$2(\sigma_x \tau_x + \sigma_y \tau_y + \sigma_z \tau_z) + \sigma \Delta \tau = 0. \quad (131)$$

Wir haben also zur Bestimmung von σ eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Kennen wir σ , so können wir den Vektor $\mathbf{w}$ aus der ersten Relation (129) bestimmen. Es sei D ein Bereich des dreidimensionalen x, y, z -Raumes und S die

diesen Bereich begrenzende Fläche. Wir setzen voraus, daß die Funktionen σ und u_1 in D stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Dann wenden wir die Greensche Formel

$$\int_D \int \int (\sigma \Delta u_1 - u_1 \Delta \sigma) dv = \int_S \int \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right) dS$$

an, wobei n die Richtung der äußeren Normalen von S bedeutet. Unter Benutzung von (128) und (129) läßt sich die Greensche Formel in der Gestalt

$$- \int_D \int \int u_1 \Delta \sigma dv - \int_D \int \int \operatorname{div} \left(2\sigma \frac{\partial u_1}{\partial t} \operatorname{grad} \tau \right) dv = \int_S \int \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right) dS$$

schreiben. Wenden wir auf das Integral, das die Divergenz enthält, die Formel von GAUSS und OSTROGRADSKI an, so erhalten wir

$$\int_S \int \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n} + 2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) dS + \int_D \int \int u_1 \Delta \sigma dv = 0.$$

Kehren wir zur Funktion u zurück und berücksichtigen wir die Beziehung

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] - \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \frac{\partial \tau}{\partial n},$$

so erhalten wir die für das Folgende wichtige Formel

$$\int_S \int \left\{ \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} dS + \int_D \int \int [u] \Delta \sigma dv = 0. \quad (132)$$

Bei allen diesen Rechnungen braucht das Feld kein Zentralfeld zu sein, es kann auch ein beliebiges Feld sein. Die Funktion σ , die der Differentialgleichung (130) genügen muß, hängt offenbar von τ , d. h. von der Wahl des Feldes ab. Im folgenden werden wir es nur mit einem Zentralfeld zu tun haben und die zugehörige Funktion mit $\sigma(M, M_0)$ bezeichnen. Alle unsere Überlegungen beziehen sich nur auf eine Umgebung des Punktes M_0 , in der sich die Extremalen des Integrals (123) nicht schneiden und ein Feld bilden. Ist c konstant, so gilt, wie wir gezeigt haben, $\tau = \frac{r}{c}$, und es läßt sich leicht verifizieren, daß die Funktion $\sigma = \frac{1}{r}$ der Differentialgleichung (130) genügt.

51. Die Formel von Sobolew (Fortsetzung). Wir nehmen an, es sei uns gelungen, eine Funktion $\sigma(M, M_0)$ zu konstruieren, die in der Umgebung des Punktes M_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, im Punkt M_0 eine Singularität hat und außer der Gleichung (130) noch den folgenden Bedingungen genügt:

1. Das Produkt $\sigma(M, M_0) \tau(M, M_0)$ hat auch noch im Punkt M_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und es gilt

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \sigma(M, M_0) \tau(M, M_0) = \frac{1}{c(M_0)}. \quad (133)$$

2. Es ist

$$\sigma(M_0, M) = \sigma(M, M_0). \quad (134)$$

3. Der Laplacesche Operator von $\sigma(M, M_0)$ erfüllt die Ungleichung

$$|\Delta \sigma(M, M_0)| \leq \frac{K}{\tau(M, M_0)}, \quad (135)$$

wobei K eine Konstante ist (die nicht von M abhängt).

4. Ist S_1 eine geschlossene Fläche, die den Punkt M_0 im Innern enthält, und ist n die Richtung der äußeren Normalen von S_1 , so gilt, wenn die Fläche S_1 auf den Punkt M_0 zusammenschrumpft, die Grenzwertrelation

$$\lim_{S_1 \rightarrow M_0} \iint_{S_1} \frac{\partial \sigma(M, M_0)}{\partial n} dS = -4\pi. \quad (136)$$

Ist c konstant, so genügt die Funktion $\sigma = \frac{1}{r}$ allen diesen Bedingungen.

Mit Hilfe einer Funktion $\sigma(M, M_0)$ mit diesen Eigenschaften leiten wir jetzt eine Darstellungsformel für die Lösungen der Differentialgleichung (122) her. Es sei $u(M, t)$ eine solche Lösung in dem Bereich D , der durch die Fläche S begrenzt wird, und M_0 ein Punkt im Innern von D . Wir setzen voraus, daß ein Zentralfeld mit dem Zentrum M_0 existiert, welches den Bereich D enthält, und daß wir eine Funktion $\sigma(M, M_0)$ mit den soeben formulierten Eigenschaften kennen.

Aus dem Bereich D schließen wir das Innere einer kleinen Kugel S_ε mit dem Zentrum M_0 und dem Radius ε aus. Auf den übrigbleibenden Bereich D' können wir die Formel (132) anwenden und erhalten

$$\iint_S \left\{ \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} dS + \iint_{S_\varepsilon} \{ \quad \} dS + \iiint_{D'} [u] \Delta \sigma dv = 0. \quad (137)$$

Wir zeigen, daß das Integral über S_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $-4\pi u(M_0, t)$ strebt. Die Werte $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$ und $\frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$ sind bei Annäherung an M_0 beschränkt; $\tau(M, M_0)$ hat auf S_ε die Ordnung ε , wegen (133) hat $\sigma(M, M_0)$ auf S_ε die Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, und der Flächeninhalt von S_ε hat die Ordnung ε^2 . Hieraus folgt, daß die Integrale

$$\iint_{S_\varepsilon} \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad \text{und} \quad \iint_{S_\varepsilon} \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] dS$$

mit ε gegen 0 streben. Übrig bleibt das Integral

$$-\iint_{S_\varepsilon} [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} dS = -\iint_{S_\varepsilon} u(M, t - \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial n} dS.$$

Hier hat man die Normale in bezug auf den Bereich D' als äußere Normale zu wählen, d. h. als innere in bezug auf die Kugel S_ε . Auf der Kugel strebt $u(M, t - \tau)$ gegen $u(M_0, t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, und unter Berücksichtigung der Relation (136) und der Richtung der Normalen sehen wir, daß das letzte Integral in der Tat den Grenzwert $-4\pi u(M_0, t)$ besitzt. Die Beziehung (137) liefert beim Grenzübergang die gesuchte Formel

$$u(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_D [u] \Delta \sigma dv, \quad (138)$$

die von S. L. SOBOLEW aufgestellt wurde.

Ist c konstant, so ist $\sigma = \frac{1}{r}$ und $\Delta \sigma = 0$, das dreifache Integral fällt fort, und wir erhalten die übliche Kirchhoffsche Formel. Bei veränderlichem c (inhomogenem Medium) hängt der Wert von u im Punkt M_0 nicht nur von der Ausstrahlung aus den Punkten der Fläche S , sondern auch von der Ausstrahlung aus den Punkten des ganzen Bereiches D ab.

Die Formel (138) kann zur Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (122) benutzt werden. Gesucht sei die Lösung der Differentialgleichung (122), die den vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$u(M, t)|_{t=0} = f_0(M), \quad u_t(M, t)|_{t=0} = f_1(M) \quad (139)$$

genügt. Wir wenden auf die gesuchte Lösung die Formel (138) an, wobei wir als Fläche S die Quasikugel S_t mit dem Mittelpunkt M_0 und dem Radius t benutzen. Wir nehmen also an, daß die Gleichung der Fläche S von der Form $\tau(M, M_0) = t$ ist. Hierbei müssen auf der rechten Seite die Werte der Funktionen

$$[u], \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right], \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$$

im Zeitpunkt $t - \tau(M, M_0)$ oder, wegen $\tau(M, M_0) = t$, im Zeitpunkt 0 genommen werden. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (139) läßt sich die Gleichung (138) in

$$u(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \left\{ \sigma \frac{\partial f_0}{\partial n} - f_0 \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} f_1 \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_t} [u] \Delta \sigma dv$$

überführen, wobei D_t der durch die Quasikugel S_t begrenzte Bereich ist. Das auf der rechten Seite stehende Doppelintegral stellt eine bekannte Funktion dar, die wir mit $F(M_0, t)$ bezeichnen. Wir erhalten somit für $u(M, t)$ die Integralgleichung

$$u(M_0, t) = F(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_t} [u] \Delta \sigma(M; M_0) dv. \quad (140)$$

Bei der Herleitung dieser Integralgleichung mußten wir voraussetzen, t sei so beschaffen, daß im Bereich D_t ein Zentralfeld mit dem Zentrum M_0 und eine Funktion $\sigma(M, M_0)$ mit den angegebenen Eigenschaften existieren.

Bemerkung. Bei einer Änderung von M_0 und t ändert sich auch der Bereich D_t , so daß die Integralgleichung (140) einer Volterraschen Integralgleichung entspricht. Man kann zeigen, daß diese Gleichung für hinreichend kleine t eine eindeutige Lösung besitzt, die man durch Anwendung der üblichen Methode der sukzessiven Approximation erhalten kann, und daß diese Lösung auch zugleich eine Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (122) ist. Gehen wir vom ganzen Raum aus, so muß t trotzdem klein sein, weil bei einer Vergrößerung von D_t möglicherweise Singularitäten im Feld des Variationsproblems auftreten können. Bei Vorhandensein einer Begrenzung müssen wir natürlich mit einer Rückwirkung der an der Begrenzung gespiegelten Wellenbewegung rechnen, wodurch das Intervall, in dem t variieren kann, ebenfalls wesentlich eingeschränkt wird.

52. Die Konstruktion der Funktion σ . Wir gehen nun zur Konstruktion einer Funktion σ mit den angegebenen Eigenschaften über. Wir zeigen, daß diese Funktion einen expliziten Ausdruck in geschlossener Form besitzt, wenn wir die Extremalen, aus denen das Zentralfeld besteht, als bekannt annehmen. Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Liegt ein System von Differentialgleichungen*

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, x_3) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (141)$$

vor und ist die allgemeine Lösung

$$x_k = \varphi_k(t, a_1, a_2, a_3) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (142)$$

bekannt, so gilt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \lg \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}. \quad (143)$$

In dieser Beziehung steht unter dem Logarithmus die Funktionaldeterminante der Funktionen (142) nach a_1, a_2, a_3 und auf der rechten Seite sind die x_k durch die Funktionen (142) zu ersetzen. Wir bilden diese Funktionaldeterminante und differenzieren sie nach t . Wenn wir die grundlegende Definition einer Determinante als Summe von Produkten ihrer Elemente berücksichtigen, so können wir zeigen, daß es bei der Differentiation einer Determinante genügt, jeweils eine Spalte zu differenzieren und die erhaltenen Determinanten zu addieren [III/2, 122]. Somit ergibt sich die Identität

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a_1 \partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a_2 \partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a_3 \partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a_1 \partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a_2 \partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_3} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a_3 \partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_1 \partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_2 \partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_3} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_3 \partial t} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (144)$$

Da die Funktionen (142) dem Differentialgleichungssystem (141) genügen müssen, sind die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = X_k(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

in bezug auf t und die a_k identisch erfüllt. Durch Differentiation dieser Identitäten nach a_s ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial a_s \partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_s}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für die zweiten Ableitungen in die rechte Seite der Beziehung (144) ein und zerlegen jede Determinante in eine Summe von drei Determinanten, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)},$$

womit (143) bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathbf{t}$ das Feld der Tangentenvektoren einer zweiparametrischen Kurvenschar, die den dreidimensionalen Raum oder einen Teilbereich davon überdeckt, und es gelte $|\mathbf{t}|=1$. Wir wählen die beiden Parameter a_1 und a_2 , welche eine Kurve der Schar festlegen, und die Bogenlänge s auf dieser Kurve als krummlinige Koordinaten. Die Bogenlänge ist dabei entweder von einer Fläche aus zu zählen, welche alle Kurven der Schar schneidet, oder von einem Punkt aus, in dem sich alle diese Kurven schneiden. Ist Δ die Funktionaldeterminante der Transformation der kartesischen in die neuen Koordinaten, so gilt die Beziehung*

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s}. \quad (145)$$

Es seien $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ die Komponenten des Vektors $\mathbf{t}$ im Punkt (x, y, z) . Dann erfüllen die Kurven der Schar das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{ds} = X, \quad \frac{dy}{ds} = Y, \quad \frac{dz}{ds} = Z.$$

Da die rechten Seiten die Größe s nicht enthalten, tritt eine der willkürlichen Konstanten s_0 als Summand bei s auf, und das allgemeine Integral des Differentialgleichungssystems hat die Gestalt

$$x = \varphi_1(s + s_0, a_1, a_2) \quad y = \varphi_2(s + s_0, a_1, a_2), \quad z = \varphi_3(s + s_0, a_1, a_2).$$

Unter Berücksichtigung des vorhergehenden Hilfssatzes erhalten wir

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s} \lg \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(s_0, a_1, a_2)},$$

und wegen

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial s_0} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial s}$$

ergibt sich gerade die Beziehung (145).

Jetzt kehren wir zu dem bereits betrachteten Zentralfeld von Extremalen mit dem Zentrum M_0 und zur Differentialgleichung (130) zurück, der die Funktion σ genügen muß. Der Vektor $\operatorname{grad} \tau$ berührt die Extremalen, und aus (124) folgt $\frac{\partial \tau}{\partial s} = n(M)$ mit $n(M) = \frac{1}{c(M)}$. Auf Grund dessen läßt sich die Differentialgleichung (130) in

$$2 \frac{\partial \sigma(M)}{\partial s} n(M) + \sigma(M) \Delta \tau(M) = 0$$

überführen, wobei die Bogenlänge s vom Punkt M_0 aus gerechnet wird.

Zur Berechnung von $\Delta \tau(M)$ benutzen wir den Hilfssatz 2. Es gilt

$$\operatorname{grad} \tau(M) = n(M) \mathbf{t},$$

wobei $\mathbf{t}$ den Einheitsvektor der Tangenten an die Extremalen des Feldes darstellt. Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \tau(M) = \Delta \tau(M) = \mathbf{t} \cdot \operatorname{grad} n(M) + n(M) \operatorname{div} \mathbf{t}.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist die Ableitung von $n(M)$ nach s , der zweite ist wegen Hilfssatz 2 gleich

$$n(M) \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s},$$

und die Differentialgleichung für $\sigma(M)$ erhält die Form

$$2 \frac{\partial \sigma}{\partial s} n(M) + \sigma \left[\frac{\partial n(M)}{\partial s} + n(M) \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s} \right] = 0$$

oder

$$2 \frac{\partial \lg \sigma}{\partial s} = - \frac{\partial \lg n}{\partial s} - \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s}.$$

Hieraus geht durch Integration die Beziehung $\sigma(M) = \frac{\Psi(a_1, a_2)}{\sqrt{n(M) \Delta}}$ hervor, in der $\Psi(a_1, a_2)$ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente bedeutet. Als Parameter a_1 und a_2 nehmen wir die Winkel θ_0, φ_0 aus dem System der Kugelkoordinaten, durch welche

die Richtung der Tangente an die Extremalen im Punkt M_0 festgelegt wird. Die letzte Beziehung nimmt dann die Form

$$\sigma(M) = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M) \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}} \quad (146)$$

an. Die Gestalt der Funktion $\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)$ bestimmen wir aus der ersten in [51] angegebenen Bedingung für die Funktion $\sigma(M)$. Diese Bedingung lautet

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \sigma(M) \tau(M) = n(M_0).$$

Wegen der Gestalt des Integrals (123) gilt

$$\tau(M) = \int_0^s n(M) ds,$$

wobei längs einer Extremalen zu integrieren ist. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau(M)}{s} = n(M_0),$$

so daß die Bedingung für $\sigma(M)$ in

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sigma(M) s = 1 \quad (147)$$

übergeht. Dabei ist zu beachten, daß der Punkt M für $s \rightarrow 0$ gegen M_0 strebt.

Zur Untersuchung der Funktionaldeterminante, die in (146) auftritt, kehren wir zu den Beziehungen zurück, die wir in [IV/1, 90] für kanonische Veränderliche beim Problem der geodätischen Linien aufgestellt haben. Jetzt gilt

$$\varphi = n^2(M) (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

und die kanonischen Veränderlichen lauten

$$p_1 = 2n^2(M) x', \quad p_2 = 2n^2(M) y', \quad p_3 = 2n^2(M) z'.$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen sind

$$x'_0 = \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \quad y'_0 = \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \quad z'_0 = \cos \vartheta_0$$

und

$$p_{10} = 2n^2(M_0) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \quad p_{20} = 2n^2(M_0) \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \quad p_{30} = 2n^2(M_0) \cos \vartheta_0. \quad (148)$$

Die Gleichungen für die Extremalen des Feldes haben die Gestalt

$$x = \varphi_1(r_1, r_2, r_3, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_2(\quad), \quad z = \varphi_3(\quad), \quad (149)$$

wobei $r_k = s p_{k0}$ ist und die φ_k Funktionen sind, welche stetige Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung besitzen. Differenzieren wir die erste dieser Gleichungen nach s und setzen danach $s=0$, so erhalten wir

$$\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_1} \right)_{s=0} p_{10} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_2} \right)_{s=0} p_{20} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_3} \right)_{s=0} p_{30}.$$

Da ϑ_0 und φ_0 willkürlich sind, ergeben sich unter Benutzung von (148) die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_2} \right)_{s=0} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_3} \right)_{s=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_1} \right)_{s=0} = \frac{1}{2n^2(M_0)}.$$

Aus (149) erhalten wir allgemein die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial r_k}\right)_{s=0} = \frac{1}{2n^2(M_0)}, \quad \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial r_l}\right)_{s=0} = 0 \quad (l \neq k).$$

Mit Hilfe von (148) und (149) können wir die Funktionaldeterminante der Funktionen φ_k nach den Veränderlichen $s, \vartheta_0, \varphi_0$ bilden. Bei der Differentiation nach ϑ_0 und φ_0 vermittelt r_k ergibt sich der Faktor s ; zwei Spalten der Determinante enthalten ebenfalls diesen Faktor. Dividieren wir die Determinante durch s^2 und führen den Grenzübergang $s \rightarrow 0$ durch, so erhalten wir unter Benutzung der vorhergehenden Beziehungen

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 & \cos \vartheta_0 \cos \varphi_0 & -\sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \\ \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 & \cos \vartheta_0 \sin \varphi_0 & \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \vartheta_0 & -\sin \vartheta_0 & 0 \end{vmatrix} = \sin \vartheta_0.$$

Zur Bestimmung der willkürlichen Funktion in (146) multiplizieren wir beide Seiten von (146) mit s und lassen s gegen 0 streben. Mit Hilfe der letzten Beziehung und der Bedingung (147) ergibt sich

$$1 = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M_0) \sin \vartheta_0}} \quad \text{oder} \quad \Psi(\vartheta_0, \varphi_0) = \sqrt{n(M_0) \sin \vartheta_0}.$$

Damit erhalten wir für die Funktion σ den Ausdruck

$$\sigma(M, M_0) = \sqrt{\frac{n(M_0) \sin \vartheta_0}{n(M) \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}}. \quad (150)$$

Man kann zeigen, daß diese Funktion alle in [51] geforderten Eigenschaften besitzt. Ist $n(M) = \text{const}$, so sind $s, \vartheta_0, \varphi_0$ die üblichen Kugelkoordinaten des Punktes M , und es ergibt sich $\sigma = \frac{1}{r}$.

53. Allgemeine Anfangsbedingungen. Wir nehmen jetzt an, die Anfangswerte seien nicht auf der Ebene $t=0$, sondern auf einer beliebigen Fläche mit der Gleichung $t = \varphi(M)$ vorgegeben:

$$u|_{t=\varphi(M)} = f_0(M), \quad u_t|_{t=\varphi(M)} = f_1(M). \quad (151)$$

Wir lösen das Problem für $t > \varphi(M)$. An Stelle der Hyperkugel $\tau(M, M_0) = t$ betrachten wir die Fläche

$$\tau(M, M_0) + \varphi(M) = t \quad (152)$$

und setzen voraus, daß für alle hinreichend kleinen positiven Werte der Differenz $t - \varphi(M)$ die Fläche (152) eine geschlossene Fläche des dreidimensionalen Raumes ist, die den Punkt M_0 im Innern enthält. Dabei ist der im Innern dieser Fläche liegende Teil des Raumes durch die Ungleichung

$$\tau(M, M_0) + \varphi(M) < t \quad (153)$$

bestimmt. Wir benutzen nun die Formel (138), indem wir als Fläche S die Fläche (152) wählen. Dann gilt im Integranden des Integrals über S

$$[u] = u(M, t - \tau) = u[M, \varphi(M)] = f_0(M), \quad [u_t] = f_1(M).$$

Wir zeigen, daß sich auch $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]$ durch die Anfangswerte ausdrücken läßt. Es gilt

$$\frac{\partial f_0(M)}{\partial n} = \frac{\partial u[M, \varphi(M)]}{\partial n} = \frac{\partial u(M, t)}{\partial n} \Big|_{t=\varphi(M)} + \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=\varphi(M)} \cdot \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n},$$

woraus

$$\left. \frac{\partial u(M, t)}{\partial n} \right|_{t=\varphi(M)} = \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} - \left. \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \right|_{t=\varphi(M)} \cdot \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n}$$

und damit

$$\left[\frac{\partial u(M, t)}{\partial n} \right] = \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} - \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} f_1(M)$$

folgt. Führen wir die Bezeichnung

$$F(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau(M, M_0) + \varphi(M) = t} \left\{ \sigma \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} + \sigma \left(\frac{\partial \tau}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) f_1(M) - \frac{\partial \sigma}{\partial n} f_0 \right\} dS$$

ein, so erhalten wir für $u(M_0, t)$ die Gleichung

$$u(M_0, t) = F(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau(M, M_0) + \varphi(M) < t} [u] \Delta \sigma(M, M_0) dv, \quad (154)$$

die der Gleichung (140) entspricht. Wie oben läßt sie sich mittels der Methode der sukzessiven Approximation lösen und liefert die Lösung des Cauchyschen Problems mit den Anfangsbedingungen (151). Die genaue Durchführung aller Beweise verlangt, daß die Funktionen $c(M)$, $f_0(M)$, $f_1(M)$, $\varphi(M)$ stetige partielle Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung besitzen.

Nun wollen wir auf den Zusammenhang der Fläche (152) mit der Charakteristiken-theorie eingehen. Das charakteristische Konoid der Differentialgleichung (122) mit der Spitze (M_0, t) hat im vierdimensionalen M, t_1 -Raum die Gleichung

$$t_1 = t - \tau(M, M_0), \quad (155)$$

wobei t_1 und $M(x, y, z)$ die laufenden Koordinaten, t und M_0 Parameter bezeichnen. Die Fläche (152) stellt den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte des dreidimensionalen Raumes dar, welche dieselben Koordinaten x, y, z haben wie die Schnittpunkte des charakteristischen Konoids (155) mit der Fläche $t_1 = \varphi(M)$ im vierdimensionalen Raum, d. h., die Fläche (152) ist die Projektion dieses Schnittes in den dreidimensionalen x, y, z -Raum. Zur Veranschaulichung beschränken wir uns vorübergehend auf den dreidimensionalen x, y, t_1 -Raum. Der Gleichung (155) entspricht eine gewöhnliche Konoidfläche. Diese Fläche schneidet die Fläche $t_1 = \varphi(x, y)$ längs einer gewissen Kurve. Die Projektion dieser Kurve auf die x, y -Ebene muß eine geschlossene Kurve l sein, die der Fläche (152) entspricht. Die Projektion der Spitze des Konoids auf die x, y -Ebene muß im Innern von l liegen, und das dreifache Integral in (154) hat als Analogon ein Doppelintegral über denjenigen Teil der x, y -Ebene, der im Innern von l liegt. Dieser Bereich hängt natürlich von der Lage der Spitze (x_0, y_0, t) des Konoids ab. Nähert sich diese Spitze einem Punkt (x'_0, y'_0, t') der Fläche $t_1 = \varphi(x, y)$, so muß sich die Kurve l auf den Punkt (x'_0, y'_0) zusammenziehen. Völlig analog dazu muß die geschlossene Fläche S sich auf den Punkt M'_0 zusammenziehen, wenn die Spitze des Konoids (155) gegen einen Punkt (M'_0, t') der Fläche $t_1 = \varphi(M)$ strebt.

Alle diese geometrischen Eigenschaften der Fläche S , die zu einem strengen Existenzbeweis für die Lösung des Cauchyschen Problems notwendig sind, hängen damit zusammen, daß die Tangentialebene der Fläche $t = \varphi(M)$ nicht zu stark gegen die Ebene $t = 0$ geneigt sein darf. Man kann zeigen, daß sich diese Bedingung in der Gestalt

$$\text{grad}^2 \varphi(M) < \frac{1}{c^2(M)} \quad (156)$$

schreiben läßt. Hierbei ist wesentlich, daß die Funktion $c^2(M)$ mit der Funktion $\tau(M, M_0)$ durch die Differentialgleichung (124) zusammenhängt. Ist die Bedingung (156) erfüllt, so sagt man, die Fläche $t = \varphi(M)$ sei raumartig orientiert. Im Fall der allgemeineren hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^m a_{ij} u_{x_i x_j} + \dots = 0,$$

in der die a_{ij} Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_m$ sind, sagt man, die Fläche $t = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sei in einem ihrer Punkte raumartig orientiert, wenn in diesem Punkt die Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} < 1$$

erfüllt ist. Diese Methode und ihre Anwendung auf die Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (122) ist in den Arbeiten von S. L. SOBOLEW in den Trudy Seismologitscheskogo Inst. AN SSSR, Nr. 6 (1930) und Nr. 42 (1934) dargelegt. Sie wurde von W. G. GOGOLADSE auf allgemeinere lineare hyperbolische Differentialgleichungen mit vier unabhängigen Veränderlichen übertragen (Doklady AN SSSR 1 (1934)). Weiterhin wurde sie in einer Arbeit von S. L. SOBOLEW, Matem. sb. 1 (43) (1936), 39–72, auf allgemeine lineare hyperbolische Differentialgleichungen mit einer großen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt. Im folgenden Abschnitt geben wir die Änderungen an, die bei der Übertragung der Methode auf allgemeinere Differentialgleichungen auftreten (vgl. die Arbeit von W. G. GOGOLADSE). Danach erläutern wir die Erweiterung der Methode auf eine beliebige gerade Anzahl von unabhängigen Veränderlichen am Fall der Wellengleichung mit konstantem Koeffizienten c^2 .

54. Die verallgemeinerte Wellengleichung. An Stelle von (122) untersuchen wir die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \sum_{i=1}^3 a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^3 b_i u_{x_i} + h u, \quad (157)$$

in der die Koeffizienten a_i, b_i, c und h Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und die a_i größer als eine positive Zahl sind. Statt (123) bilden wir das Funktional

$$J = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c} \quad (158)$$

mit

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i^2}{a_i} \quad (159)$$

Die Fundamentalfunktion $\tau(M, M_0)$ des Zentralfeldes erfüllt die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^3 a_i \tau_{x_i}^2 = \frac{1}{c^2}. \quad (160)$$

Die retardierten Werte einer beliebigen Funktion $u(M, t)$ definieren wir wie in [50]. An Stelle von (131) erhalten wir für die Funktion σ die Differentialgleichung

$$2 \sum_{i=1}^3 a_i \tau_{x_i} \sigma_{x_i} + \sigma \sum_{i=1}^3 \left[a_i \tau_{x_i x_i} + \left(2 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i \right) \tau_{x_i} \right] = 0. \quad (161)$$

Die Bedingung (133) nimmt die Gestalt

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \sigma(M, M_0) \tau(M, M_0) = \frac{n(M_0)}{\sqrt{a_1^0 a_2^0 a_3^0}} \quad \left(n(M) = \frac{1}{c(M)} \right) \quad (162)$$

an, wobei a_i^0 der Wert der Funktion a_i im Punkt M_0 ist. An Stelle von (135) gilt die Abschätzung

$$|L(\sigma)| \leq \frac{K}{\tau(M, M_0)}, \quad (163)$$

in der mit $L(u)$ die rechte Seite der Differentialgleichung (157) bezeichnet wird und K eine Konstante ist. Die Bedingung (136) nimmt die Gestalt

$$\lim_{S_1 \rightarrow M_0} \iint_{S_1} \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_{x_i} \cos(n, x_i) dS = -4\pi \quad (164)$$

an. Statt (138) gilt

$$\begin{aligned} u(M_0, t) = & \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \sigma P([u]) - [u] P(\sigma) + \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] P(\tau) + \sigma R[u] \right\} dS \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_D [u] L^*(\sigma) dv \end{aligned} \quad (165)$$

mit

$$\begin{aligned} P(v) = & \sum_{i=1}^3 a_i v_{x_i} \cos(n, x_i), \quad R = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i \right) \cos(n, x_i), \\ L^*(\sigma) = & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 a_i \sigma}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i \sigma}{\partial x_i} + h \sigma \right); \end{aligned}$$

dabei ist $L^*(\sigma)$ der zu $L(\sigma)$ adjungierte Operator. Unter Benutzung der Darstellung (165) läßt sich das Cauchysche Problem mit den Anfangsbedingungen (139) wie in [51] auf die Auflösung einer Integralgleichung der Gestalt

$$u(M_0, t) = F(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_D [u] L^*(\sigma) dv$$

zurückführen.

Bemerkung. In der Schreibweise der Differentialgleichung (157) liegt eine gewisse Unbestimmtheit, die daher rührt, daß wir einen beliebigen Faktor c^2 auszeichnen können. Wenn wir insbesondere beide Seiten der Differentialgleichung mit c^2 multiplizieren und diese Funktion in die Koeffizienten der Differentialgleichung einbeziehen, können wir $c \equiv 1$ annehmen.

Für die Funktion $\sigma(M, M_0)$ erhält man den zu (150) analogen Ausdruck

$$\sigma^2(M, M_0) = \frac{n(M_0) \sin \theta_0 \int_0^s \sum_{i=1}^3 \left(b_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) \frac{1}{a_i} \frac{dx_i}{ds} ds}{n(M) \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(s, \theta_0, \varphi_0)} \sqrt{a_1^0 a_2^0 a_3^0}}. \quad (166)$$

Hierbei bedeutet s die Bogenlänge der Extremalen, die M_0 und M verbindet, falls ds^2 durch (159) definiert wird.

55. Die Wellengleichung für beliebige viele unabhängige Veränderliche. Bei mehr als vier unabhängigen Veränderlichen erfordert die Anwendung der Methode von

S. L. SOBOLEW die Einführung von mehreren Funktionen σ . Wir führen dies am Beispiel der Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \sum_{i=1}^{2k+1} u_{x_i x_i} \quad (167)$$

durch. (Vgl. S. L. SOBOLEW, Über eine Verallgemeinerung der Kirchhoffschen Formel (russ.), Doklady AN SSSR 1 (1933), 256–262).

Mit M bezeichnen wir einen Punkt des Raumes R^{2k+1} mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_{2k+1}$. Außerdem betrachten wir den Raum R^{2k+2} mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_{2k+1}, t_1$ oder M, t_1 . Der zu (167) gehörige charakteristische Kegel mit der Spitze (M_0, t) hat in R^{2k+2} die Gleichung

$$t_1 = t - \frac{r}{c} \quad (168)$$

mit

$$r^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} (x_i - x_i^0)^2. \quad (169)$$

Mit $[\varphi]$ bezeichnen wir wie immer die retardierten Werte der Funktion φ ,

$$[\varphi(M, t)] = \varphi\left(M, t - \frac{r}{c}\right),$$

d. h. die Werte von φ auf der in Richtung abnehmender t -Werte geöffneten Hälfte des Kegels (168). Wie wir bereits in [40] bemerkt haben, müssen auf einer charakteristischen Fläche zwischen einer Funktion u , die der Gleichung (167) genügt, und ihren Ableitungen gewisse Beziehungen erfüllt sein. Diese Beziehungen wollen wir jetzt für die Ableitungen

$$u_s = \left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right] \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (170)$$

von u nach t aufstellen, wobei wir die u_s als Funktionen über R^{2k+1} auffassen. Zunächst bemerken wir, daß die grundlegende Differentialgleichung (124) jetzt die Gestalt

$$\left(\text{grad} \frac{r}{c} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (171)$$

hat. Differenzieren wir die Funktion u_s nach den Koordinaten, die sowohl explizit als auch vermittels des Argumentes $t - \frac{r}{c}$ auftreten, so erhalten wir unter Benutzung der leicht zu beweisenden Relation

$$\text{grad } u_{s+1} \cdot \text{grad} \frac{r}{c} = \left[\text{grad} \frac{\partial^{s+1} u}{\partial t^{s+1}} \right] \cdot \text{grad} \frac{r}{c} - \left[\frac{\partial^{s+2} u}{\partial t^{s+2}} \right] \text{grad}^2 \frac{r}{c},$$

worin durch Punkte skalare Produkte in R^{2k+1} bezeichnet werden, die Beziehung

$$\Delta u_s = -2 \text{ grad } u_{s+1} \cdot \text{grad} \frac{r}{c} - u_{s+1} \Delta \frac{r}{c}. \quad (172)$$

Führen wir den Operator

$$L(v) = -2 \text{ grad } v \cdot \text{grad} \frac{r}{c} - v \Delta \frac{r}{c} = -\frac{2}{c} \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{x_i - x_i^{(0)}}{r} v_{x_i} - \frac{v}{c} \Delta r \quad (173)$$

ein, so können wir die Beziehung (171) in der Gestalt

$$\Delta u_s = L(u_{s+1}) \quad (174)$$

schreiben. Dies sind gerade die gesuchten Beziehungen, die auf dem Kegel (168) erfüllt sein müssen. Der Operator L erfüllt die Beziehung

$$vL(w) + wL(v) = -\operatorname{div} \left(2vw \operatorname{grad} \frac{r}{c} \right). \quad (175)$$

Für die Potenzen von r gilt

$$\Delta r^s = (2k + s - 1) s r^{s-2}, \quad L(r^s) = -\frac{2}{c} (s + k) r^{s-1}. \quad (176)$$

Für die Funktionen

$$\sigma_i = \frac{(2k-2)(2k-4)\dots(2i+2)2i}{(k-i)! c^{k-i} (2k-2)(2k-3)\dots(k+i-1)} r^{-k-i+1}, \quad \sigma_k = r^{-2k+1} \quad (177)$$

$$(i=1, 2, \dots, k-1)$$

gilt

$$L(\sigma_1) = 0, \quad L(\sigma_{i+1}) = \Delta \sigma_i, \quad \Delta \sigma_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k-1). \quad (178)$$

Es sei D ein Bereich des Raumes R^{2k+1} , der den Punkt M_0 nicht enthält. Wir bilden das $(2k+1)$ -fache Integral

$$\int_D \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} [(u_{s-1} \Delta \sigma_{k-s+1} - \sigma_{k-s+1} \Delta u_{s-1}) + (\sigma_{k-s+1} L(u_s) + u_s L(\sigma_{k-s+1}))] dx_1 \dots dx_{2k+1}. \quad (179)$$

Aus (174) und (178) geht hervor, daß dieses Integral gleich 0 ist. Unter Berücksichtigung von (175) und

$$v \Delta w - w \Delta v = \operatorname{div} (v \operatorname{grad} w - w \operatorname{grad} v)$$

können wir das Integral (179) in ein Integral über die Oberfläche S umwandeln, die den Bereich D begrenzt. Berücksichtigen wir noch die Beziehung

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \left[\frac{\partial^{s+1} u}{\partial t^s \partial n} \right] - \left[\frac{\partial^{s+1} u}{\partial t^{s+1}} \right] \frac{\partial}{\partial n} \frac{r}{c},$$

so können wir

$$\int_S \sum_{s=1}^k (-1)^s \left\{ \frac{\partial \sigma_{k-s+1}}{\partial n} \left[\frac{\partial^{s-1} u}{\partial t^{s-1}} \right] - \sigma_{k-s+1} \left[\frac{\partial^s u}{\partial n \partial t^{s-1}} \right] - \sigma_{k-s+1} \frac{\partial}{\partial n} \frac{r}{c} \left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right] \right\} dS = 0$$

schreiben, wobei n die Richtung der äußeren Normalen von S ist. Enthält der Bereich D den Punkt M_0 im Innern, so ist diese Beziehung auf den Bereich anwendbar, der aus D durch den Ausschluß einer kleinen Kugel um M_0 entsteht. Gehen wir danach zur Grenze über, so erhalten wir die Formel

$$u(M_0, t) = A \int_S \sum_{s=1}^k (-1)^s \left\{ \frac{\partial \sigma_{k-s+1}}{\partial n} \left[\frac{\partial^{s-1} u}{\partial t^{s-1}} \right] - \sigma_{k-s+1} \left[\frac{\partial^s u}{\partial n \partial t^{s-1}} \right] - \sigma_{k-s+1} \frac{\partial}{\partial n} \frac{r}{c} \left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right] \right\} dS, \quad (180)$$

wobei die Konstante A durch den Ausdruck

$$A = \frac{\prod_{i=1}^{2k-1} \Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}{2(2k-1) \pi^{\frac{2k-1}{2}} \prod_{i=1}^{2k-1} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}$$

gegeben ist. Für $2k+1=3$ ist die Formel (180) mit der Kirchhoffschen Formel identisch. Wählen wir als Fläche S die Kugel mit dem Mittelpunkt M_0 und dem Radius ct , so lassen sich die retardierten Werte der Ableitungen der Funktion u durch die Anfangswerte von u und u_t für $t=0$ ausdrücken, und wir erhalten die Lösung des Cauchyschen Problems, die wir früher bereits auf andere Weise erhalten haben [II, 184], in expliziter Form. In derselben Weise können wir unter Benutzung von (180) das Cauchysche Problem auch dann lösen, wenn die Anfangswerte auf der Fläche $t_1 = \varphi(M)$ vorgegeben sind. Da unter dem Integralzeichen auch die Ableitungen der Anfangswerte vorkommen, ist für die Lösung des Problems erforderlich, daß diese Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung, die von k abhängt, stetig sind, was wir bereits früher erwähnt haben.

In einer Arbeit von S. A. CHRISTIANOWITSCH, Matem. sb. 2 (44) (1937), 871–900, wurde diese Methode auch auf nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen ausgedehnt.

56. Die energetische Ungleichung. Wir betrachten die hyperbolische Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f, \quad (181)$$

in der a_{ik} , b_i , c und f von $x_1, \dots, x_n, t$ abhängen, b_i , c und f stetig sind und die a_{ik} in Bereichen des $x_1, \dots, x_n, t$ -Raumes, auf die wir noch zurückkommen werden, stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen. Da die Differentialgleichung (181) zum hyperbolischen Typus gehört, gilt eine Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\nu > 0), \quad (182)$$

wobei wir annehmen, daß ν für die erwähnten Bereiche eine positive Konstante ist. Im folgenden möge der größeren Anschaulichkeit halber $n=2$ sein, so daß wir den dreidimensionalen Raum R mit den Koordinaten x_1, x_2, t betrachten. Die Überlegungen lassen sich auch auf den allgemeinen Fall übertragen.

Unsere Aufgabe besteht darin, die Lösungen der Differentialgleichung (181) mit Hilfe der Anfangswerte und der Koeffizienten abzuschätzen. Aus diesen Abschätzungen folgt unter anderem dann die *Eindeutigkeit* der Lösung des Cauchyschen Problems und ihre *stetige Abhängigkeit* von den Anfangswerten (*Stabilität*). Unsere Überlegungen ähneln denen, die wir zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems und des Randwertproblems für die Wellengleichung durchgeführt haben [II, 192].

Zunächst beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. Wenn die nichtnegative absolut stetige Funktion $w(t)$ für fast alle $t > 0$ der Ungleichung

$$\frac{dw(t)}{dt} \leq c_1(t) w(t) + c_2(t) \quad (183)$$

genügt, dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \leq e^{\int_0^t c_1(t_1) dt_1} \left[w(0) + \int_0^t c_2(t_2) e^{-\int_0^{t_2} c_1(t_1) dt_1} dt_2 \right]. \quad (184)$$

$c_1(t)$ bezeichnen hierbei integrierbare Funktionen. Gilt darüber hinaus noch $c_1(t) \geq 0$, so besteht für fast alle $t > 0$ die Beziehung

$$\frac{dw(t)}{dt} \leq c_1(t) e^{\int_0^t c_1(t_1) dt_1} \left[w(0) + \int_0^t c_2(t_2) e^{-\int_0^{t_2} c_1(t_1) dt_1} dt_2 \right] + c_2(t). \quad (185)$$

Ist $c_1(t)$ eine positive Konstante c_1 und $c_2(t)$ eine nichtfallende Funktion, so folgt aus den Ungleichungen (184), (185) insbesondere

$$w(t) \leq w(0) e^{c_1 t} + \frac{e^{c_1 t} - 1}{c_1} c_2(t) \quad (186)$$

und

$$\frac{dw(t)}{dt} \leq [c_1 w(0) + c_2(t)] e^{c_1 t}. \quad (187)$$

Zum Beweis multiplizieren wir die Ungleichung (183) mit $e^{-\int_0^t c_1(t_1) dt_1}$ und schreiben das Ergebnis in der Form

$$\frac{d}{dt} (w(t) e^{-\int_0^t c_1(t_1) dt_1}) \leq c_2(t) e^{-\int_0^t c_1(t_1) dt_1}.$$

Integrieren wir diese Ungleichung bezüglich t von 0 bis t , so erhalten wir die Beziehung (184). Daraus sowie aus (183) folgt im Fall $c_1(t) \geq 0$ die Ungleichung (185) und der Hilfssatz ist bewiesen.

In einem Gebiet, welches an die Ebene $t=0$ angrenzt und vollständig im Halbraum $t > 0$ liegt, sei eine Lösung der Gleichung (181) bekannt, die einschließlich ihrer zweiten Ableitungen in diesem Gebiet und auf dessen Rand stetig ist. Wir setzen voraus, daß dieses Gebiet ein Gebiet D vom Typus eines abgeschnittenen Kegels enthält, dessen untere Basis $B(0)$ in der Ebene $t=0$ und dessen obere Basis $B(T)$ in der Ebene $t=T > 0$ liegt. Weiterhin sei $\cos(n, t)$ auf der Mantelfläche S positiv, und S sei *raumartig orientiert*, d. h., auf der Fläche gilt

$$\cos^2(n, t) - \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} \cos(n, x_i) \cos(n, x_k) \geq 0. \quad (188)$$

Wir erinnern daran, daß n hier die bezüglich D äußere Normale an S bezeichnet. Mit $B(t_1)$ bezeichnen wir den Schnitt von D mit der Ebene $t=t_1$. Wir betrachten für $t \in [0, T]$ die Gleichung

$$-\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t L(u) dx_1 dx_2 dt_1 = -\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t f dx_1 dx_2 dt_1. \quad (189)$$

Unter Verwendung der Identitäten

$$\begin{aligned} 2u_t u_{tt} &= \frac{\partial u_t^2}{\partial t}, \\ 2 \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i x_k} u_t &= 2 \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik} u_{x_k} u_t) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} \\ &\quad - 2 \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} u_t + \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} \end{aligned}$$

sowie mittels der Formel (107) kann man die Gleichung (189) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} \int \left(\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_i^2 \right) dx_1 dx_2 - \int_{B(0)} \int \left(\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_i^2 \right) dx_1 dx_2 \\ & + \int_0^t \int_{\partial B(t_1)} \left[-2 \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_k} u_t \cos(n, x_i) + \left(\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_i^2 \right) \cos(n, t) \right] dS dt_1 \\ & + \int_0^t \int_{B(t_1)} \left(2 \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} u_t - \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} - 2 \sum_{i=1}^2 b_i u_{x_i} u_t - 2c u u_t \right) dx_1 dx_2 dt_1 \\ & = - \int_0^t \int_{B(t_1)} 2u_t f dx_1 dx_2 dt_1 \end{aligned} \quad (190)$$

bringen, wobei $\partial B(t_1)$ den Rand von $B(t_1)$ bezeichnet. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen im dritten Summanden ist nicht negativ, da er sich nur um den positiven Faktor $\cos(n, t)$ von der Summe

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} (u_{x_i} \cos(n, t) - u_t \cos(n, x_i)) (u_{x_k} \cos(n, t) - u_t \cos(n, x_k)) \\ & + u_i^2 \left(\cos^2(n, t) - \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} \cos(n, x_i) \cos(n, x_k) \right) \end{aligned}$$

unterscheidet. In dieser Summe ist die erste Komponente eine Form der Gestalt $\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} \xi_i \xi_k$, die für beliebige ξ_i nichtnegativ ist; die zweite Komponente ist nichtnegativ wegen der Voraussetzung (188). Auf Grund dessen folgt aus (190) die Ungleichung

$$\begin{aligned} K(t) \leq K(0) - \int_0^t \int_{B(t_1)} \left(2 \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} u_t - \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} - 2 \sum_{i=1}^2 b_i u_{x_i} u_t \right. \\ \left. - 2c u u_t \right) dx_1 dx_2 dt_1 - \int_0^t \int_{B(t_1)} 2u_t f dx_1 dx_2 dt_1, \end{aligned} \quad (191)$$

wobei

$$K(t) = \iint_{B(t)} \left(\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_i^2 \right) dx_1 dx_2 \quad (192)$$

gesetzt wurde. Wir setzen voraus, daß die Ungleichungen

$$\left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right|, \quad \left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} \right|, \quad |b_i|, \quad |c| \leq C_0 \quad (193)$$

mit einer gewissen positiven Zahl C_0 gelten. Dann gilt

$$\left| \iint_{B(t_1)} \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} dx_1 dx_2 \right| \leq C_0 \iint_{B(t_1)} \sum_{i,k=1}^2 |u_{x_i}| \cdot |u_{x_k}| dx_1 dx_2.$$

Ferner ist stets

$$\sum_{i,k=1}^2 |u_{x_i}| |u_{x_k}| \leq 2 \sum_{k=1}^2 u_{x_k}^2.$$

Wegen (182) erhalten wir

$$\sum_{i,k=1}^2 u_{x_i}^2 \leq \frac{1}{\nu} \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k},$$

und folglich gilt

$$\left| \int_0^t \iint_{B(t_1)} \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} dx_1 dx_2 dt_1 \right| \leq C_1 \int_0^t K(t_1) dt_1$$

mit einer von den Koeffizienten abhängigen positiven Konstanten C_1 . Völlig analog gilt

$$\left| \int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t \sum_{i,k=1}^2 \left(b_i - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right) u_{x_i} dx_1 dx_2 dt_1 \right| \leq C_2 \int_0^t K(t_1) dt_1$$

mit einer entsprechenden Konstanten C_2 . Wir setzen

$$L(t) = \iint_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2. \quad (194)$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichung $|2ab| \leq a^2 + b^2$ und unter Beachtung von

$$\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} \geq 0 \quad (195)$$

erhalten wir

$$\left| \int_0^t \iint_{B(t_1)} 2cu_t u dx_1 dx_2 dt_1 \right| \leq C_3 \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)] dt_1.$$

Weiter folgt aus $|2fu_t| \leq u_t^2 + f^2$ und (195) die Ungleichung

$$\left| \iint_{B(t_1)} 2fu_t dx_1 dx_2 \right| \leq K(t_1) + M(t_1)$$

mit

$$M(t_1) = \iint_{B(t_1)} f^2 dx_1 dx_2. \quad (196)$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Abschätzungen in (191) finden wir

$$K(t) \leq K(0) + (C_1 + C_2 + C_3 + 1) \int_0^t K(t_1) dt_1 + C_3 \int_0^t L(t_1) dt_1 + \int_0^t M(t_1) dt_1. \quad (197)$$

Wir kommen nun zur Abschätzung von $L(t)$. Hierzu gehen wir von dem Integral

$$J_1(t) = \int_0^t \iint_{B(t_1)} [u^2(x_1, x_2, t_1)]_{t_1} dx_1 dx_2 dt_1$$

aus. Es läßt sich als dreifaches Integral über dem Bereich D_t auffassen, der nach unten durch die Ebene $t=0$, nach oben durch eine Ebene $t=\text{const}$ und nach den Seiten durch die Fläche S begrenzt wird, auf der $\cos(n, t) > 0$ gilt. Wenn wir die Formel von GAUSS und OSTROGRADSKI anwenden, erhalten wir leicht die Ungleichung

$$J_1(t) \geq \iint_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2 - \iint_{B(0)} u^2 dx_1 dx_2$$

oder

$$\iint_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2 \leq \iint_{B(0)} u^2 dx_1 dx_2 + \int_0^t \iint_{B(t_1)} 2uu_{t_1} dx_1 dx_2 dt_1, \quad (198)$$

woraus mit Hilfe der Ungleichung $|2uu_t| \leq u_t^2 + u^2$ und (195)

$$L(t) \leq L(0) + \int_0^t K(t_1) dt_1 + \int_0^t L(t_1) dt_1 \quad (199)$$

folgt. Durch Addition von (197) und (199) ergibt sich

$$K(t) + L(t) \leq K(0) + L(0) + C \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)] dt_1 + \int_0^t M(t_1) dt_1, \quad (200)$$

dabei hängt die Konstante $C = C_1 + C_2 + C_3 + 2$ von den Koeffizienten a_{ik} , b_i , c und den Ableitungen der a_{ik} ab. Nun benutzen wir die Ungleichungen (186) und (187). Die Funktion

$$w(t) = \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)] dt_1$$

genügt den Voraussetzungen des Hilfssatzes mit

$$c_1(t) = C, \quad c_2(t) = K(0) + L(0) + \int_0^t M(t_1) dt_1 \quad \text{und} \quad w(0) = 0.$$

Daher gelten für sie die Ungleichungen

$$w(t) = \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)] dt_1 \leq \frac{e^{Ct} - 1}{C} \left[\delta + \int_0^t M(t_1) dt_1 \right]$$

und

$$\frac{dw(t)}{dt} = K(t) + L(t) \leq e^{Ct} \left[\delta + \int_0^t M(t_1) dt_1 \right] \quad (201)$$

mit $\delta = K(0) + L(0)$. Diese Ungleichungen nennen wir *energetische* Ungleichungen.

Wegen der Voraussetzung (182) gilt

$$K(t) \leq \iint_{B(t)} (v u_{x_1}^2 + v u_{x_2}^2 + u_t^2) dx_1 dx_2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die in (182) auftretende Größe v der Ungleichung $0 < v \leq 1$ genügt. Dann folgt aus (201) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \iint_{B(t)} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_t^2 + u^2) dx_1 dx_2 \\ & \leq \frac{e^{Ct}}{v} \left[\iint_{B(0)} \left(\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_t^2 + u^2 \right) dx_1 dx_2 + \int_0^t \iint_{B(t_1)} f^2 dx_1 dx_2 dt_1 \right]. \end{aligned} \quad (202)$$

Sie ist für alle t aus $[0, T]$ und beliebige Gebiete des oben beschriebenen Typus gültig. Die in ihr auftretenden Konstanten C und v hängen nur von den Koeffizienten der Gleichung (181) ab; sie sind unabhängig von der betrachteten Lösung u und von der Störfunktion f .

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Abschätzungen findet man in den Arbeiten von FRIEDRICHS, LEWY und SCHAUDER.

57. Der Eindeutigkeitssatz und der Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen. Aus unseren Ungleichungen folgt sofort die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-

schen Problems sowie die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten und der rechten Seite der Differentialgleichung. Betrachten wir die Differenz zweier Lösungen des Cauchyschen Problems, die zu denselben Anfangswerten gehören, so können wir den Eindeutigkeitssatz durch die gleichwertige Aussage ersetzen: Ist die Funktion f in der Differentialgleichung (181) identisch 0 und haben die Anfangswerte die Gestalt

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (203)$$

so ist $u \equiv 0$ die einzige Lösung des Problems. In einem beliebigen Punkt $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ bilden wir das charakteristische Konoid und setzen voraus, daß es mit der Ebene $t=0$ einen Bereich D der angegebenen Gestalt bildet. Es sei $u(x_1, x_2, t)$ eine Lösung des Problems mit $f \equiv 0$ und den Anfangsbedingungen (203), die nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung im Bereich D stetig ist. Wir können beispielsweise die Ungleichung (200) anwenden, in der wegen der Anfangsbedingungen $\delta=0$ ist. Somit gilt

$$L(t) = \iint_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2 = 0,$$

woraus $u \equiv 0$ in D folgt. Diese Überlegung bleibt richtig, wenn die homogenen Anfangsbedingungen (203) nicht auf der ganzen x, y -Ebene, sondern nur auf der Grundfläche $B(0)$ des Bereich D vorgegeben sind, denn auch dann ist $\delta=0$. Hieraus kann man schließen, daß die Lösung der homogenen Differentialgleichung (181) im Punkt $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ nur von den Anfangswerten auf der Grundfläche $B(0)$ des charakteristischen Konoids mit der Spitze $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ abhängt. Dabei wird vorausgesetzt, daß dieses Konoid mit der Ebene $t=0$ einen Bereich D von der angegebenen Art bildet.

Analog dazu ist die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten mit der folgenden Aussage gleichwertig: Ist $f \equiv 0$ und sind die Funktionen $\varphi_0(x_1, x_2)$ und $\varphi_1(x_1, x_2)$, die in den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x_1, x_2), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2) \quad (204)$$

vorkommen, klein (in irgendeinem Sinne), so ist auch die Lösung $u(x_1, x_2, t)$ klein. Wir nehmen an, die Anfangswerte seien in dem Sinne klein, daß die Integrale $L(0)$ und $K(0)$ klein sind; wir nehmen also an, daß die Ungleichungen $L(0) \leq \varepsilon$ und $K(0) \leq \varepsilon$ erfüllt sind, wobei ε eine kleine positive Zahl ist. Dann folgt aus (200) unmittelbar, daß die Integrale $L(t)$ und $K(t)$ im ganzen Bereich D den Abschätzungen

$$K(t) \leq 2\varepsilon e^{Pt}, \quad L(t) \leq 2\varepsilon e^{Pt}$$

genügen. Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten läßt sich nicht nur im Sinne der Abschätzung von $K(t)$ und $L(t)$ beweisen, sondern auch im Sinne der Abschätzung des absoluten Betrages der Funktion selbst, wenn nur $n=1$ ist, d. h., wenn wir lediglich zwei unabhängige Veränderliche x_1 und t haben. Dies folgt unmittelbar aus der Riemannschen Methode [45], wenn die Differentialgleichung in die kanonische Form übergeführt wird, die bei Anwendung der Riemannschen Methode zugrunde gelegt wird. Sind mehr als zwei unabhängige Veränderliche vorhanden und sind $|\varphi_0|$ sowie $|\varphi_1|$ klein, so folgt daraus nicht, daß $|u|$ (für $f \equiv 0$) klein ist. Nunmehr wollen wir mit Hilfe unserer Ungleichungen den Fall $n=1$ behandeln.

In diesem Fall haben wir die unabhängigen Veränderlichen x, t , und der Bereich D ist das im allgemeinen krummlinige Trapez ABB_1A_1 . Die Gerade A_1B_1 hat die Gleichung $t=C$. Es sei $x=\xi_1(t)$ die Gleichung der Seite AA_1 und $x=\xi_2(t)$ die der

Seite BB_1 . Wir nehmen an, daß nicht nur die Funktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$, die in den Anfangsbedingungen (204) vorkommen, sondern auch die Ableitung $\varphi'_0(x)$ dem absoluten Betrag nach klein sind. Dann sind auch die Integrale über die Quadrate dieser Größen auf der Grundlinie AB des Bereiches D und deshalb auch die Werte $L(0)$ und $K(0)$ klein, wobei im vorliegenden Fall

$$K(t) = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} [a(x, t) u_x^2 + u_t^2] dx$$

mit $a(x, t) \equiv m > 0$ gilt. Da $L(0)$ und $K(0)$ klein sind, folgt aus den oben bewiesenen Abschätzungen, daß die Größen $L(t)$ und $K(t)$ für $0 \leq t \leq C$ klein sind, so daß wir schließen können, daß die Integrale

$$\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u^2(x, t) dx, \quad \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u_x^2(x, t) dx, \quad \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u_t^2(x, t) dx \quad (205)$$

klein sind. Wir nehmen an, daß diese Integrale nicht größer sind als eine bestimmte positive Zahl η . Unter Anwendung der Bunjakowskischen Ungleichung folgt

$$\{u(x, t) - u[\xi_1(t), t]\}^2 = \left[\int_{\xi_1(t)}^x u_x(x', t) dx' \right]^2 \leq \int_{\xi_1(t)}^x u_x^2(x', t) dx' \int_{\xi_1(t)}^x 1^2 dx'$$

und daher

$$\{u(x, t) - u[\xi_1(t), t]\}^2 \leq a\eta(\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)), \quad (206)$$

wenn a den größten Wert der Differenz $\xi_2(t) - \xi_1(t)$ in D bezeichnet.

In derselben Weise ergibt sich die Abschätzung

$$\left[\int_{\xi_1(t)}^x u(x', t) dx' \right]^2 \leq a\eta \quad (\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)). \quad (207)$$

Aus (206) folgt

$$u[\xi_1(t), t] = u(x, t) + v(x, t) \quad (|v(x, t)| \leq \sqrt{a\eta}). \quad (208)$$

Integrieren wir beide Seiten für $\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)$ nach x und benutzen (207), so erhalten wir die Ungleichung

$$|u[\xi_1(t), t]| \leq \frac{\sqrt{a\eta}}{b} + \sqrt{a\eta}, \quad (209)$$

in der b gleich der Differenz $\xi_2(T) - \xi_1(T)$ ist; es gilt also $|u[\xi_1(t), t]| \leq (1 + b^{-1}) \sqrt{a\eta}$. Unter Benutzung von (208) finden wir mit Hilfe der eben bewiesenen Ungleichung die Abschätzung

$$|u(x, t)| \leq (2 + b^{-1}) \sqrt{a\eta}, \quad (210)$$

in der η eine Schranke für die Integrale (205) und $b = \xi_2(T) - \xi_1(T)$ ist. Somit haben wir unter der Annahme $b > 0$ die gesuchte Abschätzung für $|u(x, t)|$ im ganzen Bereich D erhalten. Jetzt gehen wir zur Abschätzung der Lösung $u(x, t)$ in Abhängigkeit von der Störfunktion f über.

Wir setzen voraus, daß homogene Anfangsbedingungen (203) vorliegen und daß f von 0 verschieden ist. Es sei $|f| \leq M_0$, wobei M_0 eine positive Zahl ist. Dann erhalten wir mittels (196) und (201)

$$K(t) + L(t) \leq at M_0^2 e^{Ct}. \quad (211)$$

Man kann an Stelle der Abschätzung für $|f|$ auch die in Formel (201) eingehende Größe $M(t_1)$ abschätzen.

Die Integrale $K(t)$ und $L(t)$ sind für die Differenz $u_2 - u_1$ zweier Lösungen u_1 und u_2 der Differentialgleichung (181) mit verschiedenen Störfunktionen, aber gleichen Anfangswerten beliebig klein, wenn der absolute Betrag der Differenz $f_2 - f_1$ hinreichend klein ist.

Im Fall $n=1$ können wir wie vorhin daraus eine Abschätzung für $|u_2 - u_1|$ herleiten.

58. Der Fall der Wellengleichung. Für die homogene Wellengleichung

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_{tt} = 0 \quad (212)$$

hat die energetische Ungleichung die Gestalt

$$\int_{B(t)} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) dx \leq \int_{B(0)} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) dx \quad (213)$$

mit $dx = dx_1 \dots dx_n$. Dies überlegt man sich leicht mittels (191). Die energetische Ungleichung wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, daß u stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Wenn nun u in den betrachteten Gebieten stetige Ableitungen bis zur Ordnung $m+1$ besitzt, dann genügt jede beliebige Ableitung $D^l u$ ($l \leq m-1$) einerseits der Gleichung (212), andererseits gilt auch die Abschätzung (213), also

$$\int_{B(t)} \left[\sum_{i=1}^n (D^l u_{x_i})^2 + (D^l u_t)^2 \right] dx \leq \int_{B(0)} \left[\sum_{i=1}^n (D^l u_{x_i})^2 + (D^l u_t)^2 \right] dx. \quad (214)$$

Die Poissonsche Formel [II, 184] liefert die Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung (212). Dabei wächst die Glattheit der Lösung mit der Glattheit der Anfangswerte $\varphi(x) = u|_{t=0}$ und $\psi(x) = u_t|_{t=0}$.

Die Ungleichungen (214) gestatten, die Lösbarkeit des Cauchyschen Problems für nichtglatte Anfangswerte zu untersuchen. Dazu sei φ eine über die Kugel $B_R = \{x: |x| < R\}$ quadratisch integrierbare Funktion, die in B_R quadratisch integrierbare verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung m besitzt [IV/1, 113, 114]. Mit anderen Worten: Es sei $\varphi \in W_2^m(B_R)$. Bezüglich der Funktion ψ setzen wir voraus, daß sie zur Menge $W_2^{m-1}(B_R)$ gehört.¹⁾ Wie in den Fällen $m=1$ und $m=2$ [IV/1, 115] kann die Menge $W_2^m(B_R)$ als Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \tilde{\varphi})_m = \int_{B_R} \left[\varphi \tilde{\varphi} + \sum_{l=1}^m \sum_{(i)} D^l \varphi D^l \tilde{\varphi} \right] dx$$

aufgefaßt werden. Hier bezeichnet D^l eine beliebige Ableitung der Ordnung l und $\sum_{(i)}$ die Summation aller dieser Ableitungen. Man kann beweisen, daß $W_2^m(B_R)$ ein vollständiger Hilbertscher Raum ist.

Mit φ_h bezeichnen wir die Mittelfunktionen von φ , wie sie in [IV/1, 110] erklärt wurden. Es ist bekannt, daß diese Funktionen in der Kugel B_{R-h} im klassischen Sinne unendlich oft differenzierbar sind und daß sie für $h \rightarrow 0$ in der Norm des Raumes $W_2^m(B_{R_1})$ gegen die Funktion φ konvergieren, wobei R_1 eine beliebige positive Zahl kleiner als R ist. Analog konvergieren die ψ_h gegen die Funktion ψ in den Normen von $W_2^{m-1}(B_{R_1})$.

Es sei $u_h(x, t)$ die den Anfangswerten φ_h und ψ_h entsprechende Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung (212). Aus den Poissonschen Formeln

¹⁾ $W_2^0(D)$ wird gewöhnlich mit $L_2(D)$ bezeichnet.

ist bekannt, daß u_h stetige Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt. Wir lassen h gegen 0 konvergieren und untersuchen diesen Grenzübergang im Kegel $D_1 = \{(x, t) : |x| < R_1, 0 < t < |x|\}$. Der Kegel D_1 genügt allen Forderungen, wie sie an das Gebiet in [56] gestellt wurden. Daher gelten für u_h die Ungleichungen (214), wobei die Menge $B(t_1)$ durch den Schnitt von D_1 mit der Ebene $t=t_1$ ersetzt wird. Diese Ungleichungen gelten auch für die Funktionen $v_{1,2}(x, t) = u_{h_1}(x, t) - u_{h_2}(x, t)$ (weil auch sie Lösungen der Gleichung (212) sind). Also gilt

$$\int_{B(t)} \left[\sum_{i=1}^n (D^l(v_{1,2})_{x_i})^2 + (D^l(v_{1,2})_t)^2 \right] dx \leq \int_{B(0)} \left[\sum_{i=1}^n (D^l(v_{1,2})_{x_i})^2 + (D^l(v_{1,2})_t)^2 \right] dx. \quad (215)$$

Streben h_1 und h_2 gegen 0, so konvergiert die rechte Seite von (215) gegen 0 ($l=0, 1, \dots, m-1$), folglich gilt dies für beliebige Schnitte $B(t)$ ($t \in [0, R_1]$). Die Funktionen $v_{1,2}$ konvergieren in den Normen von $L_2(B(t))$ ebenfalls gegen 0, denn für jede glatte Funktion v gilt

$$v(x, t) = v(x, 0) + \int_0^t v_t(x, t_1) dt_1,$$

woraus wegen der Bunjakowskischen Ungleichung

$$v^2(x, t) \leq 2v^2(x, 0) + 2t \int_0^t v_t^2(x, t_1) dt_1$$

sowie

$$\int_{B(t)} v^2 dx \leq 2 \int_{B(0)} v^2 dx + 2t \int_0^t \int_{B(t_1)} v_t^2 dx dt_1 \quad (216)$$

folgt. Nach der Integration von (215) und (216) bezüglich t in den Grenzen von 0 bis $t_2 \leq R_1$ überzeugt man sich leicht davon, daß die Funktionen $v_{1,2}$ einschließlich ihrer Ableitungen bis zur Ordnung m in der Norm von $L_2(D_1)$ gegen 0 konvergieren. Wegen der Vollständigkeit des Raumes $L_2(D_1)$ und der in [IV/1, 113, 114] beschriebenen Eigenschaften verallgemeinerter Ableitungen existiert ein Element u des Raumes $W_2^m(D_1)$ derart, daß u_h in der Norm von $W_2^m(D_1)$ gegen u konvergiert. Weiterhin erhält man aus (215) und (216), daß $u_h(x, t)$ in der Norm von $W_2^m(B(t))$ und $u_{ht}(x, t)$ in der Norm von $W_2^{m-1}(B(t))$ für beliebiges $t \in [0, R_1]$ konvergiert; somit liegt die Funktion $u(x, t)$ im Raum $W_2^m(B(t))$ und die Funktion $u_t(x, t)$ im Raum $W_2^{m-1}(B(t))$ für beliebiges $t \in [0, R_1]$. Außerdem gelten für u die Ungleichungen (214) und (216). Für $m \geq 2$ genügt u für fast alle (x, t) aus D_1 der Gleichung (212). Auf diese Weise haben wir eine Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung (212) im Gebiet D_1 unter der Voraussetzung gefunden, daß die Anfangswerte φ bzw. ψ Elemente des Raumes $W_2^m(B_R)$ bzw. $W_2^{m-1}(B_R)$ ($m \geq 2$) sind. Darüber hinaus haben wir gezeigt, daß sich die Glattheit dieser Lösung in der Zeit nicht verschlechtert, wenn diese Glattheit durch die Zugehörigkeit von $u(x, t)$ bzw. $u_t(x, t)$ zum Raum $W_2^m(B(t))$ bzw. $W_2^{m-1}(B(t))$ charakterisiert wird. Wenn sich die Norm von φ bzw. ψ im Raum $W_2^m(B_R)$ bzw. $W_2^{m-1}(B_R)$ nur wenig ändert, dann verändert sich die Norm der entsprechenden Lösung u und ihrer Ableitung u_t im Raum $W_2^m(B(t))$ bzw. $W_2^{m-1}(B(t))$ ebenfalls nur geringfügig. Genauer gesagt, falls u_k ($k=1, 2$) Lösungen der Gleichung (212) mit den entsprechenden Anfangswerten φ_k und ψ_k ($k=1, 2$) sind, dann gelten für ihre Differenz $v = u_1 - u_2$ die Ungleichungen (214) und (216), die ja die stetige Abhängigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems von den Anfangswerten charakterisieren. Die Lösung des Cauchyschen Problems, wie sie von uns oben gefunden wurde, ist in der Funktionenklasse $W_2^m(D_1)$

im Fall $m \geq 2$ eindeutig bestimmt. Für diese Funktionenklasse gelten nämlich die in [56] gezogenen Schlußfolgerungen, falls alle auftretenden Integrale im Sinne von LEBESGUE verstanden und die dortigen Ungleichungen nicht für alle, sondern für fast alle t aus $[0, T]$ betrachtet werden.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit nun auf die besondere Bedeutung der Räume $W_2^m(B(t))$ für die hyperbolischen Gleichungen. Mittels dieser Räume ist es gelungen, eine äußerst wichtige Eigenschaft der Lösungen der Gleichung (212) zu erfassen: Die Glattheit verschlechtert sich nicht mit wachsender Zeit. Weil darüber hinaus eine Änderung der Richtung der Zeitachse (d. h., t wird durch $-t$ ersetzt) keinen Einfluß auf die Gleichung (212) hat, wird das Cauchysche Problem in Richtung der abnehmenden Zeit auf die gleiche Weise gelöst; damit verschlechtert sich die Glattheit der Lösungen auch bei abnehmender Zeit nicht. Wir haben somit die folgende Aussage bewiesen: Die Lösungen der homogenen Wellengleichung behalten für beliebiges t stets die Glattheit der Anfangszeit. Das gilt, wenn die Glattheit der Lösung u durch die Zugehörigkeit des Paares $\{u(x, t), u_t(x, t)\}$ zu den Räumen $W_2^m(B(t)) \times W_2^{m-1}(B(t))$ ($t \in (-R_1, R_1)$) charakterisiert wird. Mit Hilfe anderer Räume läßt sich diese Eigenschaft nicht feststellen. Sie ist z. B. nicht erfüllt, wenn die Glattheit der Lösungen durch die Stetigkeit dieser oder jener Ableitungen charakterisiert wird (R. COURANT und D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II, Kap. VI, § 10, Punkt 4 der russischen oder englischen Ausgabe; die deutsche Ausgabe enthält den Punkt nicht).

Wir haben am Beispiel der Gleichung (212) gezeigt, wie man die Ungleichung (213) und ihre Folgerungen (214) für die Lösung und die Analyse des Cauchyschen Problems benutzen kann. Auf ähnliche Weise kann man auch den Fall der inhomogenen Wellengleichung behandeln. Darüber hinaus spielt die Ungleichung (201) mit ihren Folgerungen eine fundamentale Rolle beim Studium des Cauchyschen Problems für hyperbolische Gleichungen der allgemeinen Gestalt (181). Im folgenden Kapitel illustrieren wir dies am Beispiel komplizierterer Probleme für die Gleichung (181). Wir zeigen dort auch, wie aus den entsprechenden Ergebnissen die Lösbarkeit des Cauchyschen Problems für die Gleichung (181) abgeleitet werden kann.

59. Der Satz über die Einbettung in den Raum stetiger Funktionen und einige seiner Folgerungen. Es zeigt sich, daß eine Funktion $f(x)$ ($x \in D \subset R^n$), die bezüglich

aller x_i quadratisch integrierbare Ableitungen bis zur Ordnung l mit $l \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ besitzt, zu einer in $\bar{D}$ stetigen Funktion $\hat{f}(x)$ äquivalent ist; $\max_{x \in \bar{D}} |\hat{f}(x)|$ läßt sich dann durch die Norm von f im Raum $W_2^l(D)$ abschätzen. Das gilt unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet D , z. B. für glatt berandete Gebiete. Die formulierte Aussage ist ein Spezialfall des Einbettungssatzes von S. L. SOBOLEW. Wir beweisen eine etwas schwächere Behauptung: Die Funktion $\hat{f}$ ist stetig im offenen Gebiet D , und $\max_{x \in D} |\hat{f}(x)|$ kann für beliebige innere Teilgebiete D' von D durch die Norm von f im Raum $W_2^l(D)$ abgeschätzt werden. Zunächst überzeugen wir uns von der Gültigkeit des folgenden Satzes.

Satz 1. *Hat die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ im Innern eines n -dimensionalen Kugelkörpers D stetige Ableitungen bis zur Ordnung l und gelten die Abschätzungen*

$$\int_D \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \dots dx_n \leq A^2 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, l), \quad (217)$$

so sind in einer beliebigen im Innern von D gelegenen konzentrischen Kugel D_1 für die Funktion u und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ die Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial^\beta f}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \leq cA \quad \left(\beta = 0, 1, \dots, l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1 \right) \quad (218)$$

erfüllt, wobei die Konstante c nur von D_1 abhängt und $\left[\frac{n}{2}\right]$ die größte ganze positive Zahl bezeichnet, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist.

Zum Beweis bilden wir die Hilfsfunktion

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} & \text{für } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases} \quad (219)$$

mit

$$u = \frac{\frac{1}{2} - x}{\left(\frac{2}{3} - x\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)}.$$

Offenbar gilt $u \rightarrow \infty$, wenn x von größeren Werten her gegen $\frac{1}{3}$ strebt, und $u \rightarrow -\infty$, wenn x von kleineren Werten her gegen $\frac{2}{3}$ strebt. Hierbei strebt $\sigma(x)$ gegen 1 bzw. gegen 0, und es läßt sich leicht nachprüfen, daß alle Ableitungen von $\sigma(x)$ für $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{2}{3}$ stetig sind. Es sei M_0 ein beliebiger Punkt aus D_1 und h die Differenz der Radien von D und D_1 . Wir führen Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt M_0 ein,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-2} &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}, \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \varphi, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

wobei $0 \leq \theta_k \leq \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt. Für das Volumenelement erhalten wir

$$d\omega_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi.$$

Lassen wir dr fort und setzen $r=1$, so erhalten wir das Flächenelement $d\sigma_n$ der Oberfläche der Einheitskugel. Weiterhin führen wir die Funktion

$$\begin{aligned} F(M) &= f(M) \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial r^{l-1}} \left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] - \frac{\partial f(M)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^{l-2}}{\partial r^{l-2}} \left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] + \dots \\ &\quad + (-1)^{l-1} \frac{\partial^{l-1} f(M)}{\partial r^{l-1}} \cdot \left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] \end{aligned}$$

ein, wobei r die Entfernung zwischen M_0 und M ist. Die Beziehungen

$$\begin{aligned} F(M_0) &= f(M_0), & F(M) &= 0 \quad \text{für } r=h, \\ \frac{\partial F(M)}{\partial r} &= f(M) \cdot \frac{\partial^l}{\partial r^l} \left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] + (-1)^{l-1} \frac{\partial^l f}{\partial r^l} \cdot \left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] \end{aligned} \quad (220)$$

lassen sich unmittelbar nachprüfen, und es gilt

$$f(M_0) = - \int_0^h \frac{\partial F(M)}{\partial r} dr,$$

wobei die Integration längs eines Strahls durchzuführen ist, der vom Punkt M_0 ausgeht. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Beziehung mit $d\sigma_n = \frac{d\omega_n}{r^{n-1} dr}$ und integrieren über $0 \leq \theta_s \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, so erhalten wir

$$f(M_0) = - \frac{1}{\sigma_n} \int_{D_0} \frac{\partial F(M)}{\partial r} r^{k-n+1} dx_1 \dots dx_n;$$

dabei ist D_0 die Kugel mit dem Mittelpunkt M_0 und dem Radius h , und σ_n bezeichnet den Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel in R_n . Setzen wir $k = \left[\frac{n}{2} \right]$ und schreiben die letzte Beziehung in der Gestalt

$$f(M_0) = - \frac{1}{\sigma_n} \int_{D_0} \frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} r^{k-n+1} dx_1 \dots dx_n,$$

so erhalten wir unter Anwendung der Bunjakowskischen Ungleichung die Abschätzung

$$f^2(M_0) \leq \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{D_0} \left(\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} \right)^2 dx_1 \dots dx_n \int_{D_0} r^{2k-2n+2} r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\psi.$$

Für geradzahliges n ist der Exponent im letzten Integral gleich 1, für ungeradzahliges n ist er gleich 0. Somit ergibt sich die Ungleichung

$$f^2(M_0) \leq c_1 \int_{D_0} \left(\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} \right)^2 dx_1 \dots dx_n, \quad (221)$$

in der die Konstante c_1 nur von h abhängt. Wir kehren nun zur Beziehung (220) zurück. Der Koeffizient von f auf der rechten Seite ist für $r \leq \frac{h}{3}$ wegen (219) gleich 0. Andererseits können wir auf Grund der Kettenregel zeigen, daß der Ausdruck $\frac{\partial^l f}{\partial r^l}$ eine Linearkombination der Ableitungen der Ordnung l nach $x_1, \dots, x_n$ mit beschränkten Koeffizienten ist. Deshalb gilt

$$\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} = af + \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

wobei a eine beschränkte stetige Funktion ist und $|a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}| \leq c_2 r^{l-k-1}$ gilt. Für $l \geq k+1$, d. h. für $l \geq \left[\frac{n}{2} \right] + 1$, sind alle Koeffizienten in dieser Beziehung beschränkt, und unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

und der Abschätzung (217) erhalten wir wegen (221) die Abschätzung

$$f^2(M_0) \leq c^2 A^2,$$

in der die Konstante c nur von h abhängt. Gilt für eine ganze positive Zahl β die Ungleichung $l - \beta \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, d. h. $\beta \leq l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, so bleiben alle vorhergehenden Überlegungen richtig, wenn wir f durch eine beliebige partielle Ableitung der Ordnung β von f und l durch $l - \beta$ ersetzen. Somit erhalten wir gerade die Abschätzungen (218), und der Satz ist bewiesen.

Die Funktion f genüge nun allen Voraussetzungen dieses Satzes mit Ausnahme der Voraussetzung der Stetigkeit von f und der Stetigkeit der Ableitungen von f ; die Funktion f sei also ein Element des Raumes $W_2^l(D)$. Wir fixieren eine beliebige zu D konzentrische Kugel D_2 mit kleinerem Radius. Für die Punkte dieser Kugel bilden wir die Mittelfunktionen f_h [IV/1, 110], wobei h nicht größer als die Differenz der Radien von D und D_2 vorausgesetzt wird. Es gilt dann

$$\int_{D_2} f_h^2(x) dx \leq \int_D f^2(x) dx. \quad (222)$$

Aus der Definition der f_h und der Bunjakowskischen Ungleichung erhalten wir nämlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{D_2} f_h^2(x) dx &= \int_{D_2} \left[\frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) f(y) dy \right]^2 dx \\ &\leq \int_{D_2} \left[\frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy \frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) f^2(y) dy \right] dx \\ &= \int_{D_2} \left[\frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) f^2(y) dy \right] dx \\ &\leq \int_D \left[f^2(y) \frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dx \right] dy = \int_D f^2(y) dy. \end{aligned}$$

Weil für alle Ableitungen der Ordnung k mit $k \leq l$

$$\frac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_h$$

gilt, folgt aus (217) und (222), daß die Integrale der Quadrate aller $\left(\frac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)$ ($0 \leq k \leq l$) über D_2 die Größe A^2 nicht überschreiten. Also haben wir die Ungleichung

$$\|f_h\|_{2,D_2}^{(l)} = \left\{ \int_{D_2} \left[f_h^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{(k)} \left(\frac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \leq c_1 A. \quad (223)$$

Weiterhin ist bekannt, [IV/1, 111], daß f_h mit $h \rightarrow 0$ in der in (223) erklärten Norm von $W_2^l(D_2)$ gegen f konvergiert. Daher gilt $\|f_{h_1} - f_{h_2}\|_{2,D_2}^{(l)} \rightarrow 0$ für $h_1, h_2 \rightarrow 0$. Wendet man die Ungleichung (218) auf die Funktion $f_{h_1} - f_{h_2}$ in einer zu D_2 konzentrischen Kugel D_1 von kleinerem Radius an, so erkennt man, daß die Differenz $f_{h_1} - f_{h_2}$ für $h_1, h_2 \rightarrow 0$ einschließlich ihrer Ableitungen nach x bis zur Ordnung $l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ gleichmäßig in $x \in D_1$ gegen 0 konvergiert. Da ja die Funktionen f_h außerdem un-

endlich oft differenzierbar sind, ist die ihnen entsprechende Grenzfunktion $\hat{f}$ einschließlich ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ in $\bar{D}_1$ stetig. Diese Funktion stimmt in fast allen x mit f überein. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Werden in den Bedingungen des vorangehenden Satzes die Voraussetzungen über die Stetigkeit von f weggelassen und die Ableitungen von f als verallgemeinerte Ableitungen aufgefaßt, so existiert eine zu f äquivalente Funktion $\hat{f}$, die einschließlich ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ in der offenen Kugel D stetig ist. Für $\hat{f}$ gilt die Abschätzung (218).*

Dieser Satz und die in [58] dargelegten Ergebnisse erlauben die Formulierung der folgenden Aussagen über die Existenz klassischer Lösungen des Cauchyschen Problems für die Gleichung (212):

Ist $\varphi(x) = u|_{t=0}$ Element des Raumes $W_{2,\text{loc}}^m(R^n)$ und $\psi(x) = u_t|_{t=0}$ Element von $W_{2,\text{loc}}^{m-1}(R^n)$ mit $m = l + \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$ ($l \geq 2$), dann ist die entsprechende Lösung $u(x, t)$ des Cauchyschen Problems für die Gleichung (212) stetig, und sie besitzt stetige Ableitungen bis zur Ordnung l .

Hierbei bedeutet die Zugehörigkeit von φ zu $W_{2,\text{loc}}^m(R^n)$, daß $\varphi \in W_2^m(B)$ für jede beliebige Kugel $B \subset R^n$ gilt. Aus den Überlegungen in [58] folgt die Existenz der Lösung $u(x, t)$ des Cauchyschen Problems sowie die Zugehörigkeit zu $W_{2,\text{loc}}^m(R^{n+1})$. Das sichert mit Satz 2 dieses Abschnitts die Stetigkeit von $u(x, t)$ einschließlich der Ableitungen bis zur Ordnung $l = m - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

Für die inhomogene Gleichung $\square u = f(x, t)$ ist die Lösung des Cauchyschen Problems für diese Anfangswerte klassisch, wenn $f \in W_{2,\text{loc}}^{m-1}(R_+^{n+1})$ mit $R_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$ gilt.

60. Verallgemeinerte Lösungen von Gleichungen zweiter Ordnung. In [44] haben wir die Frage untersucht, für welche im Gebiet D gegebenen Funktionen $u(x, t)$, deren erste Ableitungen Unstetigkeiten auf der glatten Fläche σ haben und die außerhalb von σ der Gleichung $\square u = 0$ bzw. $\square u = f$ genügen, hat es Sinn, die Bezeichnung Lösung (besser verallgemeinerter Lösung) dieser Gleichungen im Gebiet D beizubehalten. Vom Gesichtspunkt physikalischer Probleme, die auf solche Gleichungen führen, müssen diese Funktionen der Forderung $[P(u)]_\sigma = 0$ genügen. Das bedeutet, daß auf der Unstetigkeitsfläche keine äußeren Kräfte konzentriert sind. Vom mathematischen Gesichtspunkt wiederum ist es wünschenswert, daß für diese Funktionen die Greensche Formel (79) gültig bleibt. Die zentrale Rolle dieser Formel wurde in dem langwierigen Prozeß der Untersuchung von Differentialgleichungen verständlich. Wie wir in [44] gezeigt haben, sind diese Forderungen gleichwertig, falls u „reguläre“ Unstetigkeiten besitzt, d. h., u genügt den kinematischen Kompatibilitätsbedingungen, und die Unstetigkeitsfläche ist glatt. Für solche u , die allen diesen Bedingungen genügen sowie außerhalb von σ die Gleichung $\square u = f$ erfüllen, gilt

$$\int_D u \square \eta \, dx \, dt = \int_D f \eta \, dx \, dt \quad (224)$$

für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D)$. Andererseits wurden in [IV/1, 113, 114] die Begriffe der verallgemeinerten Ableitung und des verallgemeinerten Differential-

operators für Funktionen aus $L_2(D)$ erklärt. Entsprechend dieser Definitionen bedeutet die Gleichung (224), daß für u der verallgemeinerte Operator $\square$ erklärt ist und $\square u = f$ gilt.

Die Funktion $u(x, t)$ heißt *verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der Gleichung $\square u = f$ im Gebiet D* , falls sie über jedes beschränkte, echt in D enthaltene Teilgebiet D' quadratisch integrierbar ist und der Beziehung (224) für $\eta \in C_0^\infty(D)$ genügt. Wir werden unter D' nur derartige Teilgebiete von D verstehen.

Analog heißt die Funktion $u(x)$ *verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der Gleichung*

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad (225)$$

im Gebiet D , falls sie über alle Teilgebiete D' quadratisch integrierbar ist und für alle $\eta \in C_0^\infty(D)$ die Gleichung

$$\int_D u L^*(\eta) dx = \int_D f \eta dx \quad (226)$$

erfüllt. Hier bezeichnet L^* den im Sinne von LAGRANGE zu L adjungierten Operator:

$$L^*(\eta) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 (a_{ik} \eta)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (b_i \eta)}{\partial x_i} + c \eta.$$

Damit diese Definition korrekt ist, muß man fordern, daß die Koeffizienten a_{ik} zweimal differenzierbar sind und die Koeffizienten b_i Ableitungen erster Ordnung besitzen. Wir setzen voraus, daß die Ableitungen $D^l a_{ik}$ ($l=1, 2$) und $D b_i$ stetig in D sind. Die Lösungen der Gleichung (225) der Klasse $C^2(D)$ (bisher haben wir im grunde genommen nur solche Lösungen betrachtet) werden wir *klassische* Lösungen nennen. Die klassischen Lösungen der Gleichung (225) genügen der Beziehung (226), weil für beliebige $u \in C^2(D)$ und $\eta \in C_0^\infty(D)$ die Greensche Formel

$$\int_D u L^*(\eta) dx = \int_D \eta L(u) dx \quad (227)$$

gilt. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Wenn die Funktion $u \in C^2(D)$ der Beziehung (226) genügt, dann ist u klassische Lösung der Gleichung (225). Tatsächlich folgt aus (226) und (227)

$$\int_D [L(u) - f] \eta dx = 0$$

für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D)$. Daraus ergibt sich nach der Anwendung von Satz 2 aus [IV/1, 113] auf ein Gebiet D' , daß $L(u) = f$ gilt.

Es gilt der folgende

Satz 3. *Wenn die Koeffizienten von L im Gebiet D konstant sind, dann kann jede verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der homogenen Gleichung (225) durch klassische Lösungen dieser Gleichung in der Norm von $L_2(D')$ approximiert werden.*

Zum Beweis sei u eine verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der homogenen Gleichung (225) in D , d. h. $u \in L_2(D')$ für beliebiges D' und

$$\int_D u L^*(\eta) dx = 0 \quad (228)$$

für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D)$. Wir wählen als η die in [IV/1, 112] beschriebene Mittel-funktion v_h einer Funktion $v \in C_0^\infty(D)$. Für hinreichend kleines h liegt diese Mittel-funktion in $C_0^\infty(D)$. Da der Kern der Mittelung nur von der Differenz abhängt, gilt für eine beliebige Ableitung D^l von v die Gleichung $D^l v_h = (D^l v)_h$ und damit

$L(v_h) = (L(v))_h$. Weiterhin ist mit Hilfe des Satzes von FUBINI leicht einzusehen, daß für beliebiges u aus $L_2(D)$ und w aus $C_0^\infty(D)$

$$\int_D u w_h \, dx = \int_D u_h w \, dx \quad (229)$$

gilt, wobei h hinreichend klein gewählt ist (h muß kleiner sein als der Abstand des Trägers von w zum Rand von D). Aus all dem ergeben sich die Gleichungen

$$0 = \int_D u L^*(v_h) \, dx = \int_D u (L^*(v))_h \, dx = \int_D u_h L^*(v) \, dx = \int_D L(u_h) v \, dx. \quad (230)$$

Wir fixieren ein beliebiges echtes Teilgebiet D' des Gebietes D . Die Beziehungen (230) gelten für beliebiges v aus $C_0^\infty(D')$ und beliebiges h kleiner als der Abstand von D' zum Rand von D . Das garantiert nach Satz 2 aus [IV/1, 112] die Gleichung $L(u_h) = 0$ in D' , d. h., u_h ist klassische Lösung der homogenen Gleichung (225). Für $h \rightarrow 0$ konvergieren die u_h in der Norm von $L_2(D')$ gegen die verallgemeinerte Lösung u . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Man sieht leicht, daß auch die Umkehrung gilt: *Wenn die Funktion u in der Norm von $L_2(D')$ ($D' \subset D$) durch klassische Lösungen u_m der homogenen Gleichung (225) approximiert werden kann, dann ist u verallgemeinerte Lösung dieser Gleichung im Gebiet D .*

Auf Grund dieser beiden Aussagen könnte man eine andere Definition der verallgemeinerten Lösungen der Gleichung $L(u) = 0$ im Gebiet D angeben: als Grenzwerte klassischer Lösungen in der Norm von $L_2(D')$. Dabei ist diese Definition der obigen äquivalent. Wir werden mit dieser Definition jedoch nicht arbeiten, weil sie nur auf Operationen mit konstanten Koeffizienten (oder allgemeiner mit genügend glatten Koeffizienten) anwendbar ist. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß von S. L. SOBOLEW in Arbeiten aus den dreißiger Jahren gerade diese Methode zur Untersuchung unstetiger Lösungen der Wellengleichung und zur Bestimmung der Lösung des zugehörigen Cauchyschen Problems entwickelt wurde. S. L. SOBOLEW und eine Reihe anderer Autoren untersuchten die Lösbarkeit des Cauchyschen Problems für hyperbolische Gleichungen mit variablen Koeffizienten. Dabei ging man von der klassischen Lösung des Cauchyschen Problems für speziell konstruierte Gleichungen aus, die die gegebene Gleichung approximieren. Die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (oder des zugehörigen Cauchyschen Problems) wurde dann als Grenzwert (in gewissen Normen) klassischer Lösungen der approximierenden Gleichungen (oder der zugehörigen Cauchyschen Probleme) erklärt. Für diejenigen Gleichungen bzw. für die zugehörigen Randwertprobleme, für die man eine gewisse, recht gute Integraldarstellung hatte, wurde die verallgemeinerte Lösung mit Hilfe dieser Darstellungen definiert (vgl. die Arbeiten von N. M. GÜNTER, J. LERAY u. a.). Die dominierende Rolle der Beziehung (226) wurde nicht sofort erkannt, obwohl sie schon in Arbeiten der zwanziger Jahre auftrat (z. B. in der Arbeit von N. WIENER, The operational calculus, Math. Ann. 95 (1926), 557–584).

Später (Ende der vierziger/Anfang der fünfziger Jahre) wurden Definitionen der verallgemeinerten Lösung von Cauchyschen Problemen und von Randwertproblemen für Gleichungen unterschiedlichsten Typus angegeben, die weder die Darstellung dieser Lösung noch Approximationsprozesse benutzten. Diese Definitionen, die auf Integralidentitäten basieren, erwiesen sich bei der Lösung von Randwertproblemen als fruchtbar. Namentlich in den Arbeiten von O. A. LADYSHENSKAJA, insbesondere in ihrer Monographie „Das gemischte Problem für die hyperbolische Gleichung“ (russ.), Moskau 1953, wurde dieses Konzept systematisch

weiterentwickelt. In diesen Arbeiten wurde verständlich, weshalb es im Fall variabler, hinreichend glatter Koeffizienten sinnvoll ist, statt einer gewissen Klasse verallgemeinerter Lösungen des Problems eine ganze Skala verallgemeinerter Lösungen einzuführen. Dagegen kann man mitunter im Fall nichtglatter Koeffizienten der Gleichung kaum eine zugehörige Klasse verallgemeinerter Lösungen definieren. Wenn beispielsweise die Ableitungen der Koeffizienten a_{ik} , b_i der Gleichung (225), die in den Ausdruck L^* eingehen, nicht existieren, ist die oben mit Hilfe der Identität (226) gegebene Definition der verallgemeinerten Lösung nicht korrekt. Im folgenden Kapitel definieren wir die verallgemeinerten Lösungen unter verschiedenster Randwertprobleme, die zu diesem oder jenem Funktionenraum gehören; wir zeigen, wie man mit ihrer Hilfe die Lösbarkeit dieser Probleme untersuchen kann.

Hier betrachten wir jedoch das Cauchysche Problem

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f, \quad (231)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (232)$$

unter der Voraussetzung, daß die Gleichung hyperbolisch ist und die Koeffizienten von L hinreichend glatt sind. Nach der Multiplikation der Gleichung (231) mit einer beliebigen Funktion $\eta(x, t) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ (wir erinnern, daß diese Funktionen kompakte Träger besitzen) integrieren wir die erhaltene Gleichung über den Bereich $R_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$. Anschließend integrieren wir die linke Seite so lange partiell, bis keine Ableitung der Funktion u mehr auftritt. Dabei separieren wir die Randintegrale über die Ebene $R_0^n = \{(x, t) : x \in R^n, t = 0\}$, die die Funktionen $u|_{t=0}$ und $u_t|_{t=0}$ enthalten. Diese ersetzen wir entsprechend (232) durch φ und ψ . Im Ergebnis dieser Operationen gelangen wir zu der Gleichung

$$\int_{R_+^{n+1}} u L^*(\eta) \, dx \, dt + \int_{R_0^n} (\psi \eta - \varphi \eta_t) \, dx = \int_{R_+^{n+1}} f \eta \, dx \, dt. \quad (233)$$

Dabei ist

$$L^*(\eta) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2(a_{ik}\eta)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(b_i \eta)}{\partial x_i} + c\eta - \eta_{tt},$$

während alle Integrale faktisch nur über die beschränkten Bereiche gebildet werden, wo $\eta(x, t)$ von 0 verschieden ist.

Eine Funktion u aus $L_{2,loc}(R_+^{n+1})$ (d. h., u ist quadratisch integrierbar über jedes beschränkte Teilgebiet des R_+^{n+1}), die für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$ der Integralidentität (233) genügt, heißt *verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 des Cauchyschen Problems* (231), (232).

Offensichtlich ist diese Definition auch dann nicht absurd, wenn die Ableitungen der Koeffizienten von L , die in L^* eingehen, stetig sind und $f \in L_{1,loc}(R_+^{n+1})$ sowie $\varphi, \psi \in L_{1,loc}(R^n)$ gilt, d. h., alle in (233) auftretenden Integrale konvergieren. Die klassische Lösung von (231), (232) genügt der Identität (233). Genügt weiter die für $t \geq 0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion u dieser Identität für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$, so ist u Lösung des Problems (231), (232). Um sich davon zu überzeugen, genügt es, durch partielle Integration die Ableitungen von η auf u zu übertragen. Das führt auf die Gleichung

$$\int_{R_+^{n+1}} [L(u) - f] \eta \, dx \, dt + \int_{R_0^n} [(\psi - u_t) \eta - (\varphi - u) \eta_t] \, dx = 0 \quad (234)$$

Für $\eta \in C_0^\infty(R_+^{n+1})$ verschwinden die Integrale über R_0^n . Aus (234) folgern wir nach Satz 2 aus [IV/1, 113], daß $Lu = f$ in R_+^{n+1} gilt. Dann ist (234) mit der Identität

$$\int_{R_0^n} [(\psi - u_t) \eta - (\varphi - u) \eta_t] dx = 0 \quad (235)$$

gleichwertig. Wir wählen nun diejenigen η aus $C_0^\infty(R^{n+1})$, die für $t=0$ verschwinden. Dann fällt aus (235) das Integral heraus, welches η enthält. Aus der verbliebenen Beziehung folgt (wieder wegen Satz 2 [IV/1, 113]) die Gleichung $\varphi = u|_{t=0}$, denn für $\eta|_{t=0}$ kann eine beliebige Funktion aus $C_0^\infty(R^n)$ gewählt werden. Auf diese Weise reduziert sich (235) auf die Identität

$$\int_{R_0^n} (\psi - u_t) \eta dx = 0.$$

Daraus schließen wir analog auf $\psi = u_t|_{t=0}$. Damit haben wir uns davon überzeugt, daß die Identität (233) alle Informationen über das Problem (231), (232) enthält. Aus dem Beweis dieser Tatsache wird deutlich, wie wichtig es war, daß diese Identität für alle η aus $C_0^\infty(R^{n+1})$ erfüllt sein mußte. Hätten wir eine kleinere Klasse von Funktionen η gewählt, z. B. nur $\eta \in C_0^\infty(R_+^{n+1})$ gefordert, so hätten wir nicht nachweisen können, daß die Funktion u den Anfangsbedingungen (232) genügt. Aus all dem wird deutlich, daß die vorhin gegebene Definition der verallgemeinerten Lösung des Problems (231), (232) in der Tat eine Erweiterung des klassischen Lösungsbegriffes darstellt. Eine solche Erweiterung ist notwendig, wenn die Funktionen f , φ und ψ nicht hinreichend glatt sind. Ist f z. B. unstetig oder sind φ bzw. ψ nicht differenzierbar, dann besitzt das Problem (231), (232) bekanntlich keine klassische (zweimal in R_+^{n+1} stetig differenzierbare) Lösung.

Die eingeführte Erweiterung des Begriffes der Lösung des Problems (231), (232) benötigt jedoch in einer Beziehung noch eine Rechtfertigung. Wir haben nämlich in [57] bewiesen, daß das Problem (231), (232) im Bereich der klassischen Lösungen deterministischen Charakter besitzt: Das Problem kann nicht zwei verschiedene Lösungen haben. Diese zu den wichtigsten Eigenschaften der dynamischen Probleme zählende Tatsache sollte möglichst erhalten bleiben. Daher ist es notwendig zu klären, ob der Eindeigkeitssatz für die oben definierte Klasse verallgemeinerter Lösungen erhalten bleibt. Der in [56] angeführte Beweis läßt sich nicht übertragen, denn für seine Gültigkeit ist es erforderlich, daß die Lösungen zumindest verallgemeinerte Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. Eine andere Methode zum Beweis des Eindeigkeitssatzes wurde Anfang des Jahrhunderts von HOLMGREN gegeben. Er fordert, daß man die klassische Lösung des adjungierten Problems für hinreichend glatte und finite Störfunktionen und Anfangswerte bestimmen kann. Dieses Problem ist im wesentlichen das gleiche wie das Ausgangsproblem (231), (232). Für Gleichungen mit variablen Koeffizienten wurde es von J. HADAMARD sowie anschließend von J. SCHAUDER und anderen mit schwierigsten Methoden und unter starken Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten von L untersucht. Es war wünschenswert, andere Wege zum Beweis des Eindeigkeitssatzes für verallgemeinerte Lösungen zu finden, nämlich solche Methoden, die nicht darauf basierten, die klassische Lösung des adjungierten Problems bestimmen zu können. Das gelang O. A. LADYSHENSKAJA Anfang der fünfziger Jahre (vgl. die auf Seite 152 zitierte Monographie, ihren Artikel: Über die Lösbarkeit grundlegender Randwertprobleme für Differentialgleichungen parabolischen und elliptischen Typus, Doklady AN SSSR 97 (1954), 395–398, und andere). Was die Bestimmung der verallgemeinerten Lösungen des Problems (231), (232) betrifft,

so kann man dazu das Galerkin-Verfahren, das Differenzenverfahren, die Funktionalmethode von O. A. LADYSHENSKAJA oder andere Methoden benutzen.

61. Über die Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen des Cauchy-schen Problems für die Wellengleichung. Für die Wellengleichung

$$\square u \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_{tt} = f \quad (236)$$

kann man die verallgemeinerten Lösungen des Cauchyschen Problems für „schlechte“ f , φ und ψ unter Verwendung der Formel von POISSON-KIRCHHOFF erhalten. Gilt beispielsweise $f \in L_{2, \text{loc}}(R^{n+1})$, $\varphi \in W_{2, \text{loc}}^1(R^n)$ und $\psi \in L_{2, \text{loc}}(R^n)$, so betrachten wir ihre Mittelfunktionen f_h , φ_h und ψ_h sowie die ihnen entsprechende klassische Lösung u_h des Cauchyschen Problems für den Operator $\square$. Für $h \rightarrow 0$ konvergiert f_h in der Norm von $L_2(D)$ gegen f , φ_h in der Norm von $W_2^1(D)$ gegen φ und ψ_h in der Norm von $L_2(D)$ gegen ψ . Hier sind D bzw. $\bar{D}$ beliebige beschränkte Gebiete des R^{n+1} bzw. des R^n . Aus der Ungleichung (202) für $L = \square$ folgt die Existenz einer Funktion $u(x, t)$, des Grenzwertes der Funktionen u_h in der Norm von $W_2^1(D)$. Diese Grenzfunktion ist die verallgemeinerte Lösung des Problems (236), (232). Tatsächlich genügt jede Funktion u_h der Identität (233) mit $f = f_h$, $\varphi = \varphi_h$ und $\psi = \psi_h$. In dieser Identität kann man den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ (für festes η aus $C_0^\infty(R^{n+1})$) ausführen. Im Ergebnis sehen wir, daß auch u dieser Beziehung genügt. Die von uns gefundene Lösung besitzt sogar eine größere Glattheit, als sie in der Definition der verallgemeinerten Lösung der Klasse L_2 gefordert wird. Für die Konstruktion von Lösungen für weniger glatte f , φ und ψ müssen Ungleichungen aufgestellt werden, in denen die Norm der Lösung durch die jeweiligen Normen der Räume abgeschätzt wird, die f , φ bzw. ψ enthalten. Wir werden solche Abschätzungen hier nicht vornehmen, sondern statt dessen nach der Methode von HOLMGREN den Satz über die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung der Klasse L_2 des Problems (236), (232) beweisen.

Es seien u' und u'' zwei solche Lösungen. Ihre Differenz v liegt dann im Raum $L_{2, \text{loc}}(R_+^{n+1})$ und genügt der Identität

$$\int_{R_+^{n+1}} v \square \eta \, dx \, dt = 0 \quad (237)$$

für beliebige $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$. Wir betrachten den Streifen $\Pi = \{(x, t) : x \in R^n, t \in (0, T)\}$ und das Problem

$$\square w = \tilde{f}(x, t), \quad w|_{t=T} = 0, \quad w_t|_{t=T} = 0 \quad (238)$$

unter der Voraussetzung $\tilde{f} \in C_0^\infty(\Pi)$.¹⁾ Die Kirchhoffsche Formel liefert die Lösung. Sie ist unendlich oft differenzierbar und verschwindet für $t = T$ sowie in den Punkten (x, t) mit $t \in [-T, T]$ und hinreichend großem $|x|$. Multipliziert man die Lösung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $\chi(t)$, die für $t \geq 0$ gleich 1 und für $t \leq -T$ gleich 0 ist, so erhält man die Funktion $\tilde{w}(x, t) = w(x, t) \chi(t)$ aus $C_0^\infty(R^{n+1})$, die für $t \geq 0$ mit $w(x, t)$ übereinstimmt. Daher können wir in (237) für η die Funktion $\tilde{w}$ wählen. Wegen $\square w = \tilde{f}$ erhalten wir

$$\int_{R_+^{n+1}} v \tilde{f} \, dx \, dt = 0.$$

¹⁾ Dieses Problem nennt man auch das zum Ausgangsproblem adjungierte Problem.

Da diese Gleichung für beliebiges f aus $C_0^\infty(\Pi)$ erfüllt ist, muß $v \equiv 0$ in Π gelten. Wegen der Willkürlichkeit der Wahl von T gilt $v \equiv 0$ in R_+^{n+1} , und der Satz ist damit bewiesen.

62. Elliptische Differentialgleichungen. Bis jetzt haben wir bei der Untersuchung des Cauchyschen Problems nur hyperbolische Differentialgleichungen behandelt. Nunmehr wollen wir auf die einfachste elliptische Differentialgleichung eingehen, die Laplacesche Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (239)$$

Bekanntlich [III/2, 22] ist jede Lösung dieser Differentialgleichung der Realteil einer analytischen Funktion $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ i. Wir untersuchen eine Lösung u der Differentialgleichung (239) in der Umgebung eines Punktes, den wir als Koordinatenursprung wählen können. Nehmen wir an, daß die Funktion u in diesem Punkt und in seiner Umgebung stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, so läßt sich $f(z)$ in eine Potenzreihe entwickeln,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

die in einem Kreis $|z| < R$ konvergiert, wobei $c_n = a_n + b_n i$ komplexe Zahlen sind. Trennen wir in den Gliedern der Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i) (x + yi)^n$$

Real- und Imaginärteil, so erhalten wir für $u(x, y)$ eine Reihenentwicklung, die nach homogenen Polynomen von x und y fortschreitet,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \dots \right] + b_n \left[-n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3 - \dots \right] \right\}, \quad (240)$$

und diese Reihe ist unter der Bedingung $\sqrt{x^2 + y^2} < R$ absolut konvergent. Wir schreiben sie als Doppelreihe, die nach ganzen positiven Potenzen von x und y fortschreitet,

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} d_{pq} x^p y^q. \quad (241)$$

Sie konvergiert, wenn die reellen Werte x und y hinreichend nahe bei 0 liegen. Denn die absoluten Beträge der Glieder der Reihe (241) sind nicht größer als die Glieder der Doppelreihe, die wir aus der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|x| + |y|)^n$$

erhalten. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \quad (r > 0)$$

konvergiert aber für $r < R$, woraus unmittelbar folgt, daß die Reihe (241) unter der Bedingung $|x| + |y| < R$ absolut konvergiert. In dieser Reihe können wir die Glieder umordnen und so die Reihe (240) erhalten, d. h., die Summe der Reihe (241)

ist gleich $u(x, y)$. Somit läßt sich jede Lösung der Differentialgleichung (239) in der Umgebung eines beliebigen Punktes (x, y) durch eine Potenzreihe darstellen, falls die betrachtete Lösung in diesem Punkt keine Singularität besitzt. *Jede Lösung der Differentialgleichung (239) ist also eine analytische Funktion von x und y .* Hieraus folgt unmittelbar, daß eine harmonische Funktion Ableitungen jeder Ordnung besitzt und daß zwei harmonische Funktionen überall einander gleich sind, wenn sie in einem gewissen zweidimensionalen Teil der x, y -Ebene einander gleich sind.

Bemerkung. Ein völlig anderes Bild haben wir bei der hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{yy} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (242)$$

wobei a eine vorgegebene reelle Zahl bezeichnet. Diese Differentialgleichung hat offenbar [II, 177] die Lösung

$$u = \varphi(x + ay), \quad (243)$$

wobei φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. In der Theorie der reellen Funktionen einer Veränderlichen wird bewiesen, daß man eine Funktion $\varphi(t)$ konstruieren kann, die eine stetige Ableitung erster und zweiter Ordnung, aber für keinen Wert von t eine Ableitung dritter Ordnung besitzt. Für eine solche Funktion $\varphi(t)$ hat die Lösung von (242) in keinem Punkt (x, y) eine Ableitung dritter Ordnung, deshalb kann sie natürlich keine analytische Funktion von x und y sein.

Auch für die Differentialgleichung (239) läßt sich das *Cauchysche Problem* formulieren. Beispielsweise kann man die Lösung der Differentialgleichung (239) suchen, für die u selbst und die Ableitung u_x für $x=0$ vorgegeben sind,

$$u|_{x=0} = f_0(y), \quad u_x|_{x=0} = f_1(y); \quad (244)$$

dabei sind $f_0(y)$ und $f_1(y)$ vorgegebene analytische Funktionen von y [29]. Dieses Problem hat in der Umgebung von $x=0$ eine wohlbestimmte Lösung. Eine solche Problemstellung ist aber *vom physikalischen Standpunkt aus unnatürlich*. Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Lösung dieses Problems auch vom mathematischen Gesichtspunkt aus einen wesentlichen Mangel besitzt. Wir setzen

$$f_0(y) = 0 \quad \text{und} \quad f_1(y) = \frac{1}{n} \sin(ny), \quad (245)$$

wobei n eine vorgegebene positive Zahl bezeichnet. Man kann leicht nachprüfen, daß eine Lösung der Differentialgleichung, die diesen Anfangswerten genügt, durch

$$u = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2n^2} \sin(ny) \quad (246)$$

gegeben wird. Für $n \rightarrow \infty$ streben nun die Anfangswerte $f_1(y)$ gleichmäßig in bezug auf y gegen 0, denn es gilt $|\sin(ny)| \leq 1$, aber die Lösung (246) strebt gegen ∞ , wenn $x \neq 0$ und ny kein Vielfaches von π ist. Ist nämlich beispielsweise $x > 0$, so gilt $e^{-nx} \rightarrow 0$, und der Bruch $\frac{e^{nx}}{n^2}$ strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ , da die Exponentialfunktion e^{nx} stärker wächst als n^2 . Somit wächst die Lösung unbeschränkt, wenn die Anfangswerte gegen 0 streben. Wir erkennen also aus diesem Beispiel, daß die Lösung des Cauchyschen Problems für die Differentialgleichung (239) nicht stetig

von den Anfangswerten abhängt. Bei einer hyperbolischen Differentialgleichung ist dagegen die stetige Abhängigkeit stets vorhanden [57, 58].

Wir haben schon bewiesen, daß die Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher analytisch sind. Dasselbe gilt auch im Fall dreier unabhängiger Veränderlicher:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Dies wollen wir jetzt beweisen. Es sei eine Lösung u der Differentialgleichung gegeben, die im Koordinatenursprung und seiner Umgebung stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Die Funktion u ist somit in einer abgeschlossenen Kugel um den Koordinatenursprung mit einem Radius R harmonisch. Wir können den Wert dieser Funktion in einem beliebigen Punkt (x, y, z) im Innern der Kugel durch ihre Werte in den Punkten (ξ, η, ζ) der Kugeloberfläche S ausdrücken [II, 207]:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S u(\xi, \eta, \zeta) \frac{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} dS. \quad (247)$$

Für alle Werte x, y, z , die hinreichend nahe bei 0 liegen, können wir die Funktion

$$[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-3/2} = R^{-3} \left[1 + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (2\xi x + 2\eta y + 2\zeta z)}{R^2} \right]^{-3/2}$$

unter Benutzung der Newtonschen binomischen Reihe in eine Potenzreihe nach ganzen positiven Potenzen von x, y, z entwickeln. Dann läßt sich auch der gesamte Integrand von (247) in eine solche Reihe entwickeln, deren Koeffizienten von ξ, η, ζ abhängen. Integrieren wir diese Reihe gliedweise über S , so erhalten wir die Potenzreihe für $u(x, y, z)$.

Entsprechend läßt sich zeigen, daß auch die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

analytische Funktionen der Veränderlichen x und y sind, wovon im folgenden Kapitel noch die Rede sein wird.

In Arbeiten von S. N. BERNSTEIN wird bewiesen, daß die Lösungen einer großen Klasse elliptischer Differentialgleichungen analytisch sind.

Bisher ging es um klassische, d. h. zweimal stetig differenzierbare Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Wir untersuchen nun, welche Eigenschaften die verallgemeinerten (unstetigen) Lösungen dieser Gleichungen besitzen. Wir betrachten die Differentialgleichung (239) und den ihr entsprechenden Laplace-Operator Δ . Für diesen Operator kann man die gleichen Überlegungen anstellen wie für den Operator $\square = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (vgl. [43] und [44]) und gelangt dabei zu den Schlußfolgerungen: Die Gleichung (239) hat keine Lösungen mit schwachen und keine Lösungen mit starken Unstetigkeiten, die den kinematischen sowie den dynamischen Kompatibilitätsbedingungen genügen. Das ist sofort offensichtlich, denn sowohl für die eine als auch für die andere Lösung wurde festgestellt, daß die Unstetigkeitsflächen (sowohl für die schwache als auch für die starke Unstetigkeit) nur charakteristische Flächen sein können, aber solche Flächen gibt es bei elliptischen Differentialgleichungen nicht.

Wir beweisen eine allgemeinere Aussage:

Satz. Jede verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der Laplace-Gleichung ist auch klassische Lösung.

Diese Aussage gilt für eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher. Nur zur besseren Anschaulichkeit betrachten wir die Gleichung (239). Es sei $u(x, y)$ die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (239) im Kreis $D_{\varrho_0} = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < \varrho_0\}$, d. h., es gilt $u \in L_2(D_\varrho)$ für beliebiges $\varrho < \varrho_0$ und

$$\iint_{D_{\varrho_0}} u \Delta \eta \, dx \, dy = 0 \quad (248)$$

für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D_{\varrho_0})$. Nach dem in [60] bewiesenen Satz sind die Mittelfunktionen u_h der Funktion u harmonische (und daher auch analytische) Funktionen, die für $h \rightarrow 0$ in den Normen von $L_2(D_\varrho)$ ($\varrho < \varrho_0$) gegen u konvergieren. Wir erinnern daran, daß die u_h in D_ϱ mit $\varrho \leq \varrho_0 - h$ erklärt sind. Im weiteren benutzen wir die folgende Eigenschaft harmonischer Funktionen:

$$u_h(x, y) = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{B_\varepsilon(x, y)} u_h(x', y') \, dx' \, dy', \quad (249)$$

wobei $B_\varepsilon(x, y)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt in (x, y) und dem Radius ε ist, der in D_{ϱ_0-h} liegt. Wir zeigen, daß die Menge der Funktionen $\{u_h\}$ ($0 < h \leq h_1$) in D_{ϱ_1} ($\varrho_1 < \varrho_0 - 2h_1$) gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. Dazu benutzen wir die Bunjakowskische Ungleichung sowie die Tatsache, daß für $h \leq h_1$

$$\iint_{D_{\varrho_1+h_1}} u_h^2(x', y') \, dx' \, dy' \leq \iint_{D_{\varrho_1+2h_1}} u^2(x', y') \, dx' \, dy' \equiv c_{\varrho_1+2h_1}^2$$

gilt (vgl. (222)). Auf Grund dessen besteht für beliebiges $(x, y) \in D_{\varrho_1}$ und $h \leq h_1$ die Abschätzung

$$|u_h(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi h_1}} \left(\iint_{B_{h_1}(x, y)} u_h^2(x', y') \, dx' \, dy' \right)^{1/2} \leq \frac{c_{\varrho_1+2h_1}}{\sqrt{\pi h_1}}. \quad (250)$$

Weiter gilt für beliebige (x, y) und $(\tilde{x}, \tilde{y})$ aus D_{ϱ_1} und $h \leq h_1$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |u_h(x, y) - u_h(\tilde{x}, \tilde{y})| &\leq \frac{1}{\pi h_1^2} \iint_{\tilde{D}} |u_h(x', y')| \, dx' \, dy' \\ &\equiv \frac{1}{\pi h_1^2} \left(\iint_{\tilde{D}} |u_h(x', y')|^2 \, dx' \, dy' \right)^{1/2} |\tilde{D}|^{1/2} \leq \frac{2d^{1/2}}{\pi h_1^{3/2}} c_{\varrho_1+2h_1}, \end{aligned} \quad (251)$$

wobei $\tilde{D} = (B_{h_1}(x, y) \cup B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y})) \setminus (B_{h_1}(x, y) \cap B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ die symmetrische Differenz der Kreise $B_{h_1}(x, y)$ und $B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $|\tilde{D}|$ den Flächeninhalt von $\tilde{D}$ sowie $d = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$ den Abstand von (x, y) und $(\tilde{x}, \tilde{y})$ bezeichnet. Aus den Ungleichungen (250) und (251) folgt die gleichmäßige Beschränktheit und die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen $\{u_h(x, y)\}$ im Kreis D_{ϱ_1} . Daher ist die Grenzfunktion $u(x, y)$ dieser Funktionen stetig in $\bar{D}_{\varrho_1}$. Zum Nachweis der Harmonizität der Funktion wenden wir die Formel von POISSON (Formel (25) aus [II, 205]) auf u_h ($h \leq h_1$) und einen beliebig fixierten Kreis $B_\varepsilon(x, y) \subset D_{\varrho_1}$ an. In dieser Formel kann man den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ vollziehen und sich davon überzeugen, daß die Formel auch für die Funktion u gilt. Daraus folgt nun wie in [II, 206], daß u in $B_\varepsilon(x, y)$ harmonisch ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Also haben wir uns davon überzeugt, daß für die Gleichung $\Delta u = 0$ alle verallgemeinerten Lösungen der Klasse L_2 auch klassische Lösungen, d. h. gewöhnliche harmonische Funktionen sind. Dagegen erweitert der Übergang zu verallgemeiner-

ten Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\Delta u = f \quad (252)$$

wesentlich die Menge der Lösungen. Es ist bekannt, daß für glatte f eine Lösung von (252) durch das Newtonsche Potential gegeben ist. Im Fall von drei räumlichen Veränderlichen hat dieses Potential die Gestalt

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{f(x', y', z')}{r} dx' dy' dz' \quad (253)$$

mit $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Wenn die Funktion f in der Abschließung $\bar{D}$ des beschränkten Gebietes D stetig differenzierbar ist, dann hat die Funktion (253) in D stetige Ableitungen zweiter Ordnung und genügt in D der Gleichung (252). Dagegen gibt es solche stetigen Funktionen f , für die die Funktion (253) keine stetigen Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und daher keine klassische Lösung der Gleichung (252) ist. Wir zeigen, daß die Funktion u für beliebige in $\bar{D}$ stetige Funktionen f verallgemeinerte Lösung der Klasse L_2 der Gleichung (252) ist. Dafür genügt es, wenn wir $u \in L_2(D')$ ($D' \subset D$) und

$$\iiint_D u \Delta \eta \, dx \, dy \, dz = \iiint_D f \eta \, dx \, dy \, dz \quad (254)$$

für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D)$ zeigen. Nach unseren Voraussetzungen bezüglich f ist die Funktion u stetig und stetig differenzierbar in $\bar{D}$, und damit liegt sie im Raum $L_2(D)$. Zur Verifikation der Gleichung (254) betrachten wir die Funktion

$$u_{(h)}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{f_h(x', y', z')}{r} dx' dy' dz'. \quad (255)$$

Hier ist f_h die Mittelfunktion von f , die durch 0 außerhalb von D fortgesetzt wurde [IV/1, 110]. Für $u_{(h)}$ und f_h gilt die Identität (254):

$$\iiint_D u_{(h)} \Delta \eta \, dx \, dy \, dz = \iiint_D f_h \eta \, dx \, dy \, dz. \quad (256)$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergieren die Funktionen f_h in der Norm von $L_2(D)$ gegen f ; sie konvergieren in jedem echten Teilgebiet D' von D sogar gleichmäßig gegen f . Daraus folgert man leicht, daß $u_{(h)}$ in jedem Teilgebiet D' gleichmäßig gegen u konvergiert. Damit kann in der Beziehung (256) der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ (für fixiertes η aus $C_0^\infty(D)$) vollzogen werden, und man erkennt die Gültigkeit von (254) für u . Die Beziehung (254) gilt auch für beliebiges $f \in L_2(D)$. Darüber hinaus haben für $f \in L_2(D)$ die Lösungen $u(x)$ der Gleichung (252) verallgemeinerte Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach x und genügen der Gleichung fast überall. Wir beweisen dies in [148] für elliptische Differentialgleichungen allgemeiner Gestalt. Hier bemerken wir noch, daß die in diesem Abschnitt formulierten und bewiesenen Sätze auch für die Wärmeleitungsgleichung gelten; insbesondere sind die verallgemeinerten Lösungen der Klasse L_2 der homogenen Wärmeleitungsgleichung auch klassische Lösungen. Den Beweis dieser Aussage findet man in dem Buch von S. L. SOBOLEW, Gleichungen der mathematischen Physik (russ.), 2. Aufl., Moskau 1954, S. 314. Man kann den Beweis auch leicht selbst führen.

§3. Systeme partieller Differentialgleichungen

63. Charakteristiken bei Systemen partieller Differentialgleichungen. Jetzt gehen wir zur Untersuchung von Systemen partieller Differentialgleichungen über.

Im analytischen Fall wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-schen Problems bereits bewiesen [28]. Im nichtanalytischen Fall ist diese Frage bedeutend schwieriger als bei einer einzigen Differentialgleichung. Sehr allgemeine Resultate hat in dieser Richtung I. G. PETROWSKI in seinen Arbeiten „Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen“ (russ.), Matem. sb. 2 (1937), und „Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Bereich nichtanalytischer Funktionen“ (russ.), Bjull. Mosk. Univ. 1938, erhalten. Einige sich hierauf beziehende Resultate sind in dem Buch „Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen“ von I. G. PETROWSKI dargelegt worden. Dort wird auch die einschlägige Literatur zitiert und ein Überblick über die erhaltenen Resultate gegeben.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen etwas kürzer fassen; wir beginnen mit der Darlegung der Charakteristikentheorie und untersuchen die mit dieser Theorie zusammenhängenden unstetigen Lösungen. Die Darstellung dieses Problems entnehmen wir im wesentlichen dem Buch von T. LEVI-CIVITA, Carratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa (1931).

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \Phi_i(x_k, u_s) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (1)$$

Da es ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung ist, bestehen die Cauchyschen Anfangsbedingungen in der Vorgabe der Werte der Funktionen $u_s(x_1, \dots, x_n)$ auf einer gegebenen Fläche des $x_1, \dots, x_n$ -Raumes. Wir nehmen an, daß die Fläche, auf der diese Anfangswerte vorgegeben sind, die Ebene $x_1=0$ ist; es sind also spezielle Cauchysche Anfangswerte

$$u_j|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \dots, x_n) \quad (j=1, \dots, m) \quad (2)$$

vorgegeben. Diese Anfangswerte ermöglichen es uns, auf der Ebene $x_1=0$ alle Ableitungen erster Ordnung mit Ausnahme der Ableitungen $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$ zu berechnen. Läßt sich das Differentialgleichungssystem (1), wenn wir in ihm $x_1=0$ und die übrigen Anfangswerte (2) einsetzen, nach den $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$ auflösen, so erhalten wir in der Ebene $x_1=0$ die Werte aller Ableitungen erster Ordnung. Andernfalls nennen wir die Ebene $x_1=0$ *charakteristisch*. Allgemeiner heißt eine Fläche

$$\omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (3)$$

mit auf ihr vorgegebenen Anfangswerten *charakteristische Fläche*, wenn wir aus diesen Anfangswerten zusammen mit dem Differentialgleichungssystem (1) nicht alle Ableitungen erster Ordnung auf der Fläche eindeutig bestimmen können. Falls die Koeffizienten $a_{ij}^{(k)}$ nur die x_s enthalten, brauchen wir die Anfangswerte der Funktionen u_j auf der Fläche (3) nicht zu kennen. Um die Bedingungen zu erhalten, die eine charakteristische Fläche (3) erfüllen muß, führen wir wie in [40] an Stelle der x_k durch

$$x'_k = \omega_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, n) \quad (4)$$

neue unabhängige Veränderliche x'_k ein, wobei die $n-1$ Funktionen $\omega_2, \dots, \omega_n$ so zu wählen sind, daß sich diese Gleichungen nach den x_k auflösen lassen. Drücken wir die Ableitungen nach den ursprünglichen Veränderlichen durch die Ableitungen nach den neuen Veränderlichen aus, so erhalten wir

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x'_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}.$$

Diese Ausdrücke setzen wir in das Differentialgleichungssystem (1) ein, wobei wir nur diejenigen Glieder aufschreiben, welche die Ableitungen $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ enthalten:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x'_1} + \dots = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (11)$$

In den neuen Veränderlichen erhalten wir spezielle Cauchysche Anfangswerte, und zwar beziehen sich diese Anfangswerte auf die Ebene $x'_1=0$. Diese Ebene ist charakteristisch, wenn man aus dem Differentialgleichungssystem (1) die Ableitungen $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ nicht eindeutig bestimmen kann, also genau dann, wenn die Determinante aus den Koeffizienten der $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ gleich 0 ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}, \quad (5)$$

so erhalten wir die folgende Differentialgleichung erster Ordnung, der jede charakteristische Fläche des Differentialgleichungssystems (1) genügen muß:

$$|\omega_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1m} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \dots & \omega_{mm} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung ist in bezug auf die Ableitungen $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ eine Gleichung m -ten Grades. Sie entspricht der Differentialgleichung (53) aus [40].

Die Gleichung (6) muß als Folge von (3) erfüllt sein. Fordern wir, daß sie identisch erfüllt ist, d. h., betrachten wir sie als Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $\omega_1(x_1, \dots, x_n)$, so erhalten wir eine Schar $\omega_1(x_1, \dots, x_n) = C$ charakteristischer Flächen des Differentialgleichungssystems (1). Es läßt sich zeigen (vgl. [3]), daß jede charakteristische Fläche in eine solche Schar eingebettet werden kann.

Ist die Funktion $\omega_1(x_1, \dots, x_n)$ so beschaffen, daß die linke Seite der Differentialgleichung (6) auf der Fläche $\omega_1=0$ von 0 verschieden ist, so können wir nach der Variablentransformation (4) das transformierte Differentialgleichungssystem (1) nach den $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ auflösen.

Ersetzen wir auf der linken Seite der Differentialgleichung (6) die Ableitungen $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ durch α_k , so erhalten wir eine Gleichung m -ten Grades für die Komponenten des Vektors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, die in jedem Punkt die charakteristischen Richtungen bestimmt. In jedem Punkt einer charakteristischen Fläche hat die Normale eine charakteristische Richtung.

Ganz analog dazu können wir auch das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0 \quad (7)$$

betrachten, wobei wir wie immer $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{lk}$ annehmen. Sind auf der Hyperebene $x_1=0$ spezielle Cauchysche Anfangsbedingungen

$$u_j|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \psi_j(x_2, \dots, x_n) \quad (j=1, \dots, m)$$

vorgegeben, so kennen wir auf dieser Hyperfläche alle Ableitungen erster Ordnung und alle Ableitungen zweiter Ordnung mit Ausnahme von $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$. Setzen wir die Anfangswerte in die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems ein und setzen die Determinante aus den Koeffizienten der $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$ gleich 0, so erhalten wir eine Bedingung dafür, daß die Hyperebene $x_1=0$ eine *charakteristische Fläche* ist. Im allgemeinen Fall sind die Funktionen und ihre Ableitungen erster Ordnung auf der Fläche (3) vorgegeben; wir suchen die Bedingung dafür, daß man aus dem Differentialgleichungssystem (7) zusammen mit den Anfangsbedingungen die Ableitungen zweiter Ordnung nicht eindeutig bestimmen kann. Wir führen hierzu an Stelle der x_k durch (4) neue Veränderliche x'_k ein. Die Ableitungen nach den ursprünglichen Veränderlichen sind, durch die Ableitungen nach den neuen Veränderlichen ausgedrückt,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial x'_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} + \dots.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (7) ein und schreiben nur diejenigen Glieder auf, die $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1}$ enthalten, so erhalten wir in den neuen unabhängigen Veränderlichen das System der Differentialgleichungen

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}^{k,l} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1} + \dots = 0.$$

In den neuen Veränderlichen beziehen sich die Anfangswerte auf die Ebene $x'_1=0$, und wir müssen eine Bedingung dafür aufstellen, daß man aus dem letzten System die Ableitungen $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1}$ nicht eindeutig bestimmen kann. Führen wir analog zu vorhin die Bezeichnungen

$$\omega'_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{k,l} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} \quad (8)$$

ein, so können wir eine solche Bedingung in der Gestalt

$$|\omega'_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \dots & \omega'_{1m} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \dots & \omega'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega'_{m1} & \omega'_{m2} & \dots & \omega'_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

schreiben. Die linke Seite dieser Differentialgleichung erster Ordnung ist ein homogenes Polynom $2m$ -ten Grades in bezug auf die Ableitungen $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$.

Jetzt kehren wir zu den Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung zurück. Ersetzen wir auf der linken Seite der Differentialgleichung (6) die Ableitungen $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ durch α_k , so erhalten wir eine Gleichung

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (10)$$

wobei Φ ein homogenes Polynom m -ten Grades in den Argumenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ist mit Koeffizienten, die von $x_1, \dots, x_n$ abhängen. Verschwindet in einem Bereich D des $x_1, \dots, x_n$ -Raumes die linke Seite der Gleichung (10) nur für $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, so sagt man, das Differentialgleichungssystem (1) sei im Bereich D *elliptisch*. Ent-

sprechend läßt sich der elliptische Typus auch für das Differentialgleichungssystem (7) definieren. Der Begriff hyperbolischer Typus wird bei Differentialgleichungssystemen nicht ganz einheitlich verwendet. Auf diese Frage kommen wir noch im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher zurück. Läßt sich in einem Punkt $(x_1, \dots, x_n)$ oder in einem Bereich D durch eine passende lineare Transformation der Veränderlichen α_s das homogene Polynom $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ in ein Polynom überführen, das von weniger als n Veränderlichen abhängt, so sagt man, das Differentialgleichungssystem (1) sei in diesem Punkt bzw. Bereich *parabolisch ausgeartet*.

Enthalten die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (1) die Funktionen u_j (ist also das System *quasilinear*), so können wir, wenn wir in diesen Koeffizienten die Anfangswerte der Funktionen u_j auf der Fläche $\omega_1 = 0$ einsetzen, die Differentialgleichung (6) aufstellen und die Frage entscheiden, ob die Fläche $\omega_1 = 0$ für diese Anfangswerte charakteristisch ist. Entsprechendes gilt auch für das Differentialgleichungssystem (7), wenn die Koeffizienten a_{ij}^{kl} die Funktionen u_j und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung enthalten (vgl. [30]). Das Differentialgleichungssystem können wir in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen, wenn wir die mn neuen Funktionen

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = w_{jk} \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n) \quad (10_1)$$

eingeführen. Setzen wir (10₁) in die Differentialgleichungen (7) ein, so erhalten wir m Differentialgleichungen erster Ordnung für die $m + mn$ Funktionen u_j und w_{jk} . Zu diesen Differentialgleichungen fügen wir noch die mn Differentialgleichungen (10₁) hinzu.

64. Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen. Wir wollen nun eine Aussage über die Differentiation einer Funktion längs einer Fläche beweisen. Damit wir uns alles anschaulich geometrisch vorstellen können, wollen wir dieselbe für den Fall dreier unabhängiger Veränderlicher beweisen.

Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ sei auf der einen Seite einer Fläche S mit der Gleichung

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bis an S heran stetig. Außerdem setzen wir voraus, daß ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auf derselben Seite von S stetig sind und auf S bestimmte Grenzwerte f_{x_i} besitzen. Ist auf der betrachteten Seite der Fläche eine Kurve l in einer Parameterdarstellung $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) vorgegeben, wobei die Funktionen $x_i(t)$ stetige Ableitungen nach t besitzen, so ist die Funktion f längs l eine Funktion von t , und es gilt

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^3 f_{x_k} x'_k(t). \quad (11)$$

Hilfssatz. Die Beziehung (11) gilt auch, wenn l auf S liegt.

Die Kurve l können wir als hinreichend klein voraussetzen. Es seien N_1 und N_2 ihre Endpunkte und N ein veränderlicher Punkt auf l . Wir legen durch jeden Punkt N eine Gerade parallel zur Flächennormalen n_1 im Punkt N_1 ; dabei sei n_1 nach der Seite hin gerichtet, auf der die Funktion f erklärt ist. Auf jeder dieser Geraden tragen wir eine Strecke NN' von ein und derselben Länge δ ab. Wir setzen voraus, daß die Endpunkte N' dieser Strecken eine Kurve l' bilden, die doppeltpunktfrei ist und in dem Bereich liegt, in dem die Funktion f erklärt ist. Die Punkte dieser Kurve haben die Koordinaten $\xi_i = x_i(t) + \delta \cos(n_1, x_i)$. Längs l' können wir die Beziehung

(11) anwenden:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{l'} = \sum_{k=1}^3 f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x'_k(t).$$

Durch Integration beider Seiten vom Parameterwert $t=t_1$, der zum Punkt N_1 gehört, bis zu einem veränderlichen Wert t ergibt sich

$$f(t)|_{l'} - f(t_1)|_{l'} = \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^3 f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x'_k(t) dt,$$

dabei sind $f(t_1)$ und $f(t)$ die Werte von f auf l' in den Punkten, die zu den entsprechenden Werten von t gehören. Nach Voraussetzung sind f und f_{x_k} bis an S heran stetig, daher ist der Integrand auf der rechten Seite eine gleichmäßig stetige Funktion des Parameters δ . Durch den Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ geht aus der letzten Beziehung die Relation

$$f(t) - f(t_1) = \int_{t_1}^t \sum_{k=1}^3 f_{x_k}[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] x'_k(t) dt$$

hervor, auf deren linker Seite die Werte von f auf l stehen. Durch Differentiation beider Seiten nach t ergibt sich schließlich die Beziehung (11). Diesen Hilfssatz benutzen wir nicht nur in diesem Abschnitt, sondern auch im folgenden Kapitel.

Wir kommen nun zum Fall beliebig vieler Veränderlicher und setzen voraus, daß eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ beim Durchgang durch die Fläche S mit der Gleichung

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (12)$$

stetig ist und daß ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auf den beiden Seiten dieser Fläche bestimmte voneinander verschiedene Grenzwerte haben. Die Ableitungen erster Ordnung der Funktion f sollen also auf der Fläche (12) eine Unstetigkeit erster Art haben. Wir bezeichnen die eine Seite der Fläche als positiv und die andere als negativ. Zur Kennzeichnung der Grenzwerte auf der positiven Seite versehen wir die entsprechenden Werte mit dem Zeichen $+$, auf der negativen Seite mit dem Zeichen $-$. So können wir beispielsweise die Bedingung für die Stetigkeit von f beim Durchgang durch S in der Gestalt $f^+ = f^-$ schreiben. Weiterhin führen wir den Sprung der Ableitungen erster Ordnung ein:

$$[f_{x_k}] = f_{x_k}^+ - f_{x_k}^-.$$

Längs einer jeden auf der Fläche (12) verlaufenden Kurve l stimmen nach Voraussetzung f^+ und f^- überein. Damit erhalten wir nach dem Hilfssatz

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}^+ dx_k = \sum_{k=1}^n f_{x_k}^- dx_k \quad \text{auf } S. \quad (13)$$

Auf der Fläche S können wir die Veränderlichen x_k nicht unabhängig voraussetzen. Ist die Gleichung der Fläche S beispielsweise in expliziter Form gegeben, so ist eine der Koordinaten eine Funktion der übrigen, die man bereits als unabhängig voraussetzen kann.

Die letzte Formel können wir in die Gestalt

$$\sum_{k=1}^n [f_{x_k}] dx_k = 0$$

überführen. Darüber hinaus gilt

$$\sum_{k=1}^n \psi_{x_k} dx_k = 0.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit einem zunächst unbestimmten Faktor h und subtrahieren sie von der vorangehenden Beziehung, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n \{f_{x_k} - h\psi_{x_k}\} dx_k = 0.$$

Wir wählen nun den Faktor h so, daß der Koeffizient vor dem Differential der abhängigen Veränderlichen verschwindet. Die übrigen Koeffizienten vor den Differentialen der unabhängigen Veränderlichen müssen natürlicherweise verschwinden [I, 167]. Auf diese Weise erhalten wir die n Gleichungen

$$[f_{x_k}] = h\psi_{x_k}, \quad (14)$$

d. h., der Sprung einer jeden Ableitung erster Ordnung muß zur partiellen Ableitung der linken Seite von (12) nach der entsprechenden Veränderlichen proportional sein. Diese Bedingungen nennt man gewöhnlich *kinematische Kompatibilitätsbedingungen*.

Nun betrachten wir den Fall, daß die Funktion f und ihre Ableitungen erster Ordnung beim Durchgang durch die Fläche (12) stetig bleiben, aber die Ableitungen zweiter Ordnung eine Unstetigkeit erleiden. Die obigen Überlegungen lassen sich dann auf jede der Funktionen f_{x_k} anwenden. Jede dieser Funktionen besitzt ihren Proportionalitätsfaktor h_k in den kinematischen Kompatibilitätsbedingungen, und der Sprung der Ableitung der Funktion f_{x_k} nach einer jeden Veränderlichen x_l muß zu ψ_{x_l} proportional sein; wir erhalten also für die Sprünge der Ableitungen zweiter Ordnung die Beziehungen

$$[f_{x_k x_l}] = f_{x_k x_l}^+ - f_{x_k x_l}^- = h_k \psi_{x_l}.$$

Berücksichtigen wir die Vertauschbarkeit der Differentiationen auf der positiven wie auf der negativen Seite der Fläche, so erhalten wir $h_k \psi_{x_l} = h_l \psi_{x_k}$ oder $\frac{h_k}{\psi_{x_k}} = \frac{h_l}{\psi_{x_l}}$.

Anders ausgedrückt, das Verhältnis $h_k : \psi_{x_k}$ hängt nicht vom Index k ab. Setzen wir $h_k : \psi_{x_k} = h$, so nehmen schließlich die letzten Beziehungen die Gestalt

$$[f_{x_k x_l}] = h\psi_{x_k} \psi_{x_l} \quad (15)$$

an. Dies sind die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen für eine Unstetigkeit zweiter Ordnung (Unstetigkeit der Ableitungen zweiter Ordnung).

65. Die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen. Jetzt kehren wir zu dem System von Differentialgleichungen erster Ordnung (1) zurück und setzen voraus, daß die Fläche (3) eine charakteristische Fläche dieses Systems ist und eine Lösung u auf ihr eine schwache Unstetigkeit hat, d. h., die Funktion u selbst ist stetig, und nur die Ableitungen erster Ordnung machen einen Sprung. Es sei u^+ die auf der positiven Seite der Fläche stetige Lösung und u^- die auf der negativen Seite der Fläche stetige Lösung, mit denen u übereinstimmt. Wir können für u^+ und u^- das Differentialgleichungssystem (1) aufschreiben und die Differenz der entsprechenden Differentialgleichungen auf der Fläche (3) bilden. Hierbei sind die Glieder Φ_i beim Durchgang durch die Fläche stetig und heben sich beim Subtrahieren auf. Somit gelangen wir zu den folgenden m Gleichungen, denen die Sprünge der Ableitungen erster Ordnung genügen müssen:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = 0. \quad (16)$$

Bei der Herleitung dieser Bedingungen war das Differentialgleichungssystem (1), das gewöhnlich einen physikalischen Prozeß beschreibt, von grundlegender Bedeutung; die Bedingungen (16) für die Sprünge nennen wir die *dynamischen Kompatibilitätsbedingungen*. Jede der Funktionen u_j hat ihren Proportionalitätsfaktor h_j in den kinematischen Kompatibilitätsbedingungen (14):

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (17)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Bedingungen (16) ein und berücksichtigen (5), so erhalten wir für die Koeffizienten h_j ein System von m homogenen linearen Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^m \omega_{ij} h_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (18)$$

Aus der Gleichung der charakteristischen Fläche (6) folgt unmittelbar, daß die Determinante dieses Systems gleich 0 ist, und somit können wir eine von 0 verschiedene Lösung des Systems ermitteln. Im allgemeinen Fall, in dem der Rang der Koeffizientenmatrix des Systems (18) gleich $m - 1$ ist, läßt sich die allgemeine Lösung dieses Systems bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor bestimmen, der aber bei der Bestimmung des qualitativen Bildes der Unstetigkeit keine wesentliche Rolle spielt.

Wir gehen nun zur Behandlung des Systems der Differentialgleichungen zweiter Ordnung (7) über. In diesem Fall ist eine Lösung mit einer schwachen Unstetigkeit eine Lösung, bei der die Funktion selbst und ihre Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Genau wie oben erhalten wir für die Sprünge der Ableitungen zweiter Ordnung die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right] = 0. \quad (19)$$

Jede Funktion u_j besitzt ihren Proportionalitätsfaktor h_j in den kinematischen Kompatibilitätsbedingungen

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}. \quad (20)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Bedingung (19) ein und benutzen (8), so erhalten wir wiederum ein homogenes Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \omega'_{ij} h_j = 0 \quad (21)$$

für die Faktoren h_j , dessen Determinante wegen (9) gleich 0 ist.

66. Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik. Nun wollen wir die Charakteristiken-theorie auf die Differentialgleichungen der Hydrodynamik anwenden. Mit u_1, u_2, u_3 bezeichnen wir die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, mit p den Druck, mit ϱ die Dichte und mit f_1, f_2, f_3 die Komponenten der auf die Masseinheit bezogenen äußeren Kraft. Die unabhängigen Veränderlichen sind die Zeit t und die Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 . Die drei Eulerschen Gleichungen lauten

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

und die Kontinuitätsgleichung ist [II, 114, 115]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} u_k + \varrho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Wir nehmen die Flüssigkeit als kompressibel an und setzen voraus, daß die Zustandsgleichung durch Abhängigkeit des Druckes von der Dichte gegeben ist, $p = p(\varrho)$, wobei $p(\varrho)$ eine vorgegebene Funktion bezeichnet. Somit erhalten wir für die Funktionen u_1, u_2, u_3, ϱ der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, t die vier Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k + \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} &= f_i \quad (i=1, 2, 3), \\ \varrho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} u_k &= 0. \end{aligned}$$

Die durch (5) definierten Größen ω_{ij} sind hier

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \omega_{21} = \omega_{13} = \omega_{31} = \omega_{23} = \omega_{32} = 0, \\ \omega_{1i} &= \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} u_k \quad (i=1, 2, 3, 4), \\ \omega_{i4} &= \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}, \quad \omega_{4i} = \varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \quad (i \neq 4), \end{aligned}$$

wobei ω_1 wie früher die linke Seite der Gleichung der charakteristischen Fläche

$$\omega_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad (22)$$

ist. Wie oben bezeichnen wir mit g^2 die Summe

$$g^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \right)^2.$$

Die Differentialgleichung erster Ordnung (6), der die charakteristische Fläche (22) genügen muß, lautet jetzt

$$\begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{d\omega_1}{dt} & 0 & \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \\ \varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} & \frac{d\omega_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} u_3 \right).$$

Durch Ausrechnen dieser Determinante ergibt sich

$$\left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)^2 \left[\left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)^2 - g^2 \frac{dp}{d\varrho} \right] = 0. \quad (23)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit P der Fläche (22) in Richtung der Flächennormalen läßt sich bekanntlich durch die Gleichung (75) aus [43] ausdrücken. In jedem Augenblick geht die Fläche (22) durch Flüssigkeitsteilchen hindurch. Es sei u_n die Geschwindigkeitskomponente eines Flüssigkeitsteilchens, das sich auf der Fläche befindet, in Richtung der zugehörigen Flächennormalen. Beachten wir, daß $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} : g$ die Richtungskosinus dieser Normalen sind (die nach der Seite gerichtet ist, auf der $\omega_1 > 0$ ist), so erhalten wir

$$u_n = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}.$$

Die Differenz $P - u_n$, welche die Geschwindigkeit der Fläche gegenüber den Flüssigkeitsteilchen ausdrückt, nennt man gewöhnlich *Relativgeschwindigkeit der Welle*. Für

diese Geschwindigkeit erhalten wir den Ausdruck

$$V = P - u_n = -\frac{1}{g} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \frac{1}{g} \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$$

oder

$$V = -\frac{1}{g} \frac{d\omega_1}{dt}. \quad (24)$$

Die Differentialgleichung (23) der charakteristischen Flächen zerfällt in die beiden Gleichungen

$$V^2 = 0, \quad V^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (25)$$

Der ersten Gleichung entspricht der Fall einer stationären Unstetigkeit. Im folgenden betrachten wir nur die zweite Gleichung. Die durch sie bestimmte Geschwindigkeit V ist die Schallgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (26)$$

Jetzt wollen wir mit Hilfe der kinematischen und der dynamischen Kompatibilitätsbedingungen den Charakter der Unstetigkeit untersuchen. Wir bezeichnen mit h_k die in (17) auftretenden Unstetigkeitskoeffizienten für die Funktionen u_k und mit r den entsprechenden Koeffizienten für die Funktion ρ . Die Gleichungen (18) lauten dann

$$\frac{d\omega_1}{dt} h_k + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} r = 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

oder wegen (24) und (25)

$$-gh_k + \frac{1}{\rho} V \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} r = 0.$$

Daher ist

$$h_k = \frac{rV}{\rho} \cos \alpha_k, \quad (27)$$

wobei $\cos \alpha_k$ die Richtungskosinus der Normalen der Unstetigkeitsfläche bedeuten. Wir fassen h_1, h_2, h_3 als Komponenten eines Vektors $\mathbf{h}$ auf (Unstetigkeitsvektor für die Ableitungen der Geschwindigkeit). Die obigen Beziehungen lauten in vektorieller Schreibweise

$$\mathbf{h} = \frac{rV}{\rho} \mathbf{n},$$

wenn $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor der Normalen der Unstetigkeitsfläche ist. Somit sehen wir, daß der *Unstetigkeitsvektor für die Ableitungen der Geschwindigkeit gerade die Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche besitzt* (Longitudinalwelle).

Die Komponenten w_i des Beschleunigungsvektors lassen sich durch

$$w_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k \quad (i=1, 2, 3)$$

ausdrücken; sie sind beim Durchgang durch die Fläche unstetig. Wir setzen voraus, daß auf der einen Seite der Fläche Ruhe herrscht. Da die Geschwindigkeit selbst stetig ist, sind ihre Grenzwerte auf beiden Seiten der Fläche gleich 0. Die Ableitungen der Geschwindigkeit sind auf der Fläche gerade von der Größe des Sprunges, weil sie auf derjenigen Seite der Fläche, auf der Ruhe herrscht, verschwinden. Dasselbe gilt auch für die Komponenten des Beschleunigungsvektors. Der Sprung dieser Komponenten wird

wegen (27) und (24) durch die Gleichungen

$$[w_i] = h_i \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 h_i u_k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = h_i \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{rgV^2}{\varrho} \cos \alpha_i,$$

in Vektorschreibweise durch die Gleichung

$$[\mathbf{w}] = -\frac{rgV^2}{\varrho} \mathbf{n}$$

bestimmt. Unter der angegebenen Bedingung liefert dieser Ausdruck den Beschleunigungsvektor auf der Unstetigkeitsfläche.

Wir betrachten noch den sogenannten stationären Fall, in dem die Funktionen u_k und ϱ nicht von t abhängen. Nehmen wir an, daß auch ω_1 von t unabhängig ist, so finden wir $P=0$ und $V=-u_n$. Wenn wir voraussetzen, daß die Geschwindigkeit der sich bewegenden Flüssigkeit in einem Bereich kleiner als die Schallgeschwindigkeit (26) ist,

so gilt erst recht $|u_n| < \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, und die Gleichung $V=-u_n$ ist unmöglich. Somit sehen wir, daß es bei Unterschallgeschwindigkeit im stationären Fall keine sich ausbreitende Unstetigkeit geben kann.

67. Die Gleichungen der Elastizitätstheorie. Als Beispiel für die Anwendung der Charakteristikentheorie auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersuchen wir die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie für den einfachen Fall eines homogenen isotropen Mediums. Wir bezeichnen mit u_1, u_2, u_3 die Komponenten des Verschiebungsvektors und mit λ und μ die üblichen Konstanten eines elastischen Stoffes. Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie bestehen in dem folgenden System von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen u_1, u_2, u_3 der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, t :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_i - \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \dots = 0.$$

Dann gilt

$$\omega'_{ij} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} + \delta_{ij} \left[\mu \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \right)^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (28)$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Nach Ausrechnung der Determinante hat die Differentialgleichung (9) jetzt die Gestalt

$$\left[(\lambda + 2\mu) g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \left[\mu g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] = 0. \quad (29)$$

Auf Grund der Beziehung (75) aus [43] liefert diese Differentialgleichung die beiden möglichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$P_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \quad P_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

einer Unstetigkeitsfläche. Man nimmt hier die Deformation als klein an, so daß es keinen Sinn hat, auch noch eine Relativgeschwindigkeit einzuführen, d. h. eine Geschwindigkeit in bezug auf die Masseteilchen des Mediums.

Wir wollen nun den Charakter der Unstetigkeit untersuchen. Wir führen die Unstetigkeitskoeffizienten h_j der Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion u_j ein:

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}. \quad (30)$$

Wegen (28) lauten die Gleichungen (21) jetzt

$$\left[\mu g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} h_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = g \cos(n, x_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

in denen n die Richtung der Normalen von (3) bezeichnet, können wir die letzten Gleichungen in die Gestalt

$$\left[\mu g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_i + (\lambda + \mu) g^2 \cos(n, x_i) \sum_{j=1}^3 \cos(n, x_j) h_j = 0$$

überführen.

Weiterhin führen wir den Vektor $\mathbf{h}$ mit den Komponenten h_1, h_2, h_3 ein. Dann lassen sich unsere Gleichungen in der Gestalt

$$\left[\mu g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_i + (\lambda + \mu) g^2 \cos(n, x_i) h_n = 0$$

schreiben, wobei h_n die Projektion des Vektors $\mathbf{h}$ auf die Normale $\mathbf{n}$ der Fläche (3) ist. In vektorieller Schreibweise lauten sie

$$\left[\mu g^2 - \varrho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \mathbf{h} + (\lambda + \mu) g^2 h_n \mathbf{n} = 0, \quad (31)$$

wenn $\mathbf{n}$ den Einheitsvektor der Normalen der Fläche (3) bezeichnet. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit P_2 ist der Koeffizient von $\mathbf{h}$ gleich 0, und es folgt $h_n = 0$, d. h., der Vektor $\mathbf{h}$ muß in der Tangentialebene der Fläche (3) liegen (Transversalwelle). Für die Geschwindigkeit P_1 folgt aus (31) unmittelbar, daß sich $\mathbf{h}$ nur durch einen Zahlenfaktor von $\mathbf{n}$ unterscheidet, d. h., $\mathbf{h}$ hat die Richtung der Normalen der Fläche (3) (Longitudinalwelle). Wir bemerken noch, daß der Faktor in der Differentialgleichung (29), der die Geschwindigkeit der Transversalwelle liefert, dort im Quadrat vorkommt. Dies findet im folgenden Abschnitt seine Erklärung, in dem wir die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie für ein anisotropes Medium betrachten.

Wir klären nun die mechanische Bedeutung des Vektors $\mathbf{h}$. Wir setzen voraus, daß auf der einen Seite der Fläche schwacher Unstetigkeit $S: \omega_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ Ruhe herrscht, d. h., die u_j ($j = 1, 2, 3$) seien dort gleich 0. In den Punkten der Fläche S sind die u_j und ihre Ableitungen erster Ordnung ebenfalls gleich 0. Auf derjenigen Seite, auf der eine Bewegung stattfindet, sind die zweiten Ableitungen der u_j auf S durch die Beziehungen (30) bestimmt, da auf der anderen Seite der Fläche diese Ableitungen identisch gleich 0 sind; es gilt also

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_S = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \Big|_S \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

wobei $x_0 = t$ ist. Wir wählen einen beliebigen Punkt M auf der Fläche S als Koordinatenursprung des x_0, x_1, x_2, x_3 -Raumes und entwickeln die u_j in der Umgebung des Punktes M in eine Maclaurinsche Reihe, die wir bei den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen. Da die u_j und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in M verschwinden, erhalten wir unter Berücksichtigung der obigen Beziehungen die Näherungsgleichung

$$u_j \sim \frac{h_j}{2} \sum_{i,k=0}^3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right)_0 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \right)_0 x_i x_k;$$

dabei zeigt der Index 0 an, daß die Werte der Ableitungen im Punkt M zu nehmen sind.

Da die Funktion ω_1 im Punkt M verschwindet, erhalten wir für sie folgende Maclaurinsche Reihe, die nach den Gliedern erster Ordnung abgebrochen worden ist:

$$\omega_1 \sim \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right)_0 x_i.$$

Die vorhergehende Relation läßt sich dann in der Gestalt

$$\mathbf{u} \sim \frac{h}{2} \omega_1^2(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

schreiben. Diese Näherungsgleichung für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ gilt in der Nähe der Unstetigkeitsfläche auf der Seite, auf der eine Bewegung stattfindet.

68. Anisotrope elastische Körper. Wir führen hier die Komponenten des Deformationstensors in etwas anderer Bezeichnungsweise als in [IV/1, 104] ein:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für einen anisotropen Körper mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen läßt sich die Arbeit der auf die Volumeneinheit bezogenen Deformationskräfte durch die Komponenten des Deformationstensors in Form eines homogenen Polynoms zweiten Grades ausdrücken,

$$A = \frac{1}{2} (a\varepsilon_1^2 + b\varepsilon_2^2 + c\varepsilon_3^2 + 2a'\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2b'\varepsilon_3\varepsilon_1 + 2c'\varepsilon_1\varepsilon_2 + a''\gamma_1^2 + b''\gamma_2^2 + c''\gamma_3^2);$$

dabei sind die Koeffizienten $a, b, \dots, c''$ Funktionen von x_1, x_2, x_3, t oder im Fall eines homogenen Mediums Konstanten. Die Differentialgleichung (229) und die beiden analogen Differentialgleichungen in [IV/1, 104] lassen sich unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right) - \varrho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right) - \varrho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + X_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_3} \right) - \varrho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + X_3 &= 0 \end{aligned}$$

schreiben.

Setzen wir den Ausdruck für A ein, so erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c'' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + b'' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c' + c'') \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (b' + b'') \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \varrho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \dots &= 0, \\ c'' \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + a'' \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + (c' + c'') \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (a' + a'') \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \varrho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots &= 0, \\ b'' \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + a'' \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + c \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (b' + b'') \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (a' + a'') \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} - \varrho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Führen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Bezeichnungen

$$p_0 = \frac{\partial \omega_1}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (32)$$

ein, so können wir die Koeffizienten ω_{ij} in der Gestalt

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= ap_1^2 + c''p_2^2 + b''p_3^2 - \varrho p_0^2, & \omega_{12} &= (c' + c'') p_1 p_2, & \omega_{13} &= (b' + b'') p_1 p_3, \\ \omega_{21} &= (c' + c'') p_1 p_2, & \omega_{22} &= c''p_1^2 + bp_2^2 + a''p_3^2 - \varrho p_0^2, & \omega_{23} &= (a' + a'') p_2 p_3, \\ \omega_{31} &= (b' + b'') p_3 p_1, & \omega_{32} &= (a' + a'') p_2 p_3, & \omega_{33} &= b''p_1^2 + a''p_2^2 + cp_3^2 - \varrho p_0^2 \end{aligned}$$

schreiben.

Die Differentialgleichung erster Ordnung (9), welche die charakteristischen Flächen bestimmt, ist, wie man leicht erkennt, mit der Säkulargleichung (charakteristischen

Gleichung) für $\lambda = \varrho p_0^2$ identisch, die zur Transformation des Ellipsoids

$$(ap_1^2 + c''p_2^2 + b''p_3^2) \xi_1^2 + (c''p_1^2 + bp_2^2 + a''p_3^2) \xi_2^2 + (b''p_1^2 + a''p_2^2 + cp_3^2) \xi_3^2 + 2(a' + a'') p_2 p_3 \xi_2 \xi_3 + 2(b' + b'') p_3 p_1 \xi_3 \xi_1 + 2(c' + c'') p_1 p_2 \xi_1 \xi_2 = 1 \quad (33)$$

auf seine Symmetrieachsen dient [III/1, 32, 33]. Den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung kann man aus dem Ausdruck für $2A$ erhalten, wenn man dort $\epsilon_k = p_k \xi_k$, $\gamma_1 = p_2 \xi_3 + p_3 \xi_2$, $\gamma_2 = p_3 \xi_1 + p_1 \xi_3$ und $\gamma_3 = p_1 \xi_2 + p_2 \xi_1$ setzt; wegen $A > 0$ stellt er deshalb eine positiv definite quadratische Form in den ξ_k dar; folglich entspricht der Gleichung (33) tatsächlich ein Ellipsoid. Lösen wir die Säkulargleichung für λ auf, so erhalten wir in jedem Punkt des Körpers drei positive Wurzeln für p_0^2 , wobei p_0^2 eine positive homogene Funktion zweiten Grades von p_1 , p_2 und p_3 ist. Dividieren wir beide Seiten der Gleichung (33) durch g^2 , so gehen die p_k über in die $\cos \alpha_k$, die Richtungskosinus der Normalen zur Wellenfläche, während die Wurzel p_0^2 in P^2 übergeht. Somit erhalten wir in jedem Punkt für eine beliebige feste Richtung drei mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Welle.

Die Komponenten h_1, h_2, h_3 des Unstetigkeitsvektors erhalten wir aus dem homogenen Gleichungssystem, aus dem die Richtungen der Symmetrieachsen des Ellipsoids (33) bestimmt werden. Wir erhalten somit in jedem Punkt für jede vorgegebene bestimmte Richtung drei aufeinander senkrechte Unstetigkeitsvektoren, zu denen drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten gehören. Wir erhalten genau dann Longitudinal- und Transversalwellen, wenn eine der Achsen des Ellipsoids die Richtung der Normalen der zugehörigen Wellenfront besitzt. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so erhalten wir eine Longitudinalwelle und zwei Transversalwellen, wobei wir annehmen, daß die kubische Gleichung für die feste Richtung verschiedene Wurzeln besitzt. Wie wir gesehen haben, ist im Fall eines homogenen isotropen Mediums eine der Wurzeln eine Doppelwurzel. Die Richtungskosinus der Normalen zur Wellenfront sind zu p_1, p_2, p_3 proportional; folglich bedeutet die angegebene Bedingung, daß die Größen h_1, h_2, h_3 für eine bestimmte Wurzel $\lambda = \varrho p_0^2$ den Größen p_1, p_2, p_3 für beliebige p_k , d. h. für jede beliebige Richtung proportional sein müssen. Ersetzen wir in dem homogenen Gleichungssystem für die h_k diese Größen durch die ihnen proportionalen Größen p_k , so erhalten wir

$$\begin{aligned} (ap_1^2 + c''p_2^2 + b''p_3^2 - \varrho p_0^2) p_1 + (c' + c'') p_1 p_2^2 + (b' + b'') p_1 p_3^2 &= 0, \\ (c' + c'') p_1^2 p_2 + (c''p_1^2 + bp_2^2 + a''p_3^2 - \varrho p_0^2) p_2 + (a' + a'') p_2 p_3^2 &= 0, \\ (b' + b'') p_1^2 p_3 + (a' + a'') p_2^2 p_3 + (b''p_1^2 + a''p_2^2 + cp_3^2 - \varrho p_0^2) p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Berücksichtigen wir, daß wir bei einer beliebigen Wahl von p_1, p_2, p_3 aus den drei Gleichungen (34) ein und denselben Wert für ϱp_0^2 erhalten müssen, so gelangen wir zu den Bedingungen

$$a = b = c = a' + 2a'' = b' + 2b'' = c' + 2c'' \quad (35)$$

für die Koeffizienten des elastischen Potentials A , und die drei Gleichungen (34) ergeben $\varrho p_0^2 = ag^2$, d. h., wir erhalten für die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$P = \sqrt{\frac{a}{\varrho}}.$$

Die übrigen beiden Wurzeln, die zu den Transversalwellen gehören, sind im allgemeinen voneinander verschieden und hängen von der Wahl der Wellenrichtung, d. h. von der Wahl der p_k ab. Die Relationen (35) liefern uns für die neun Koeffizienten, die im Ausdruck des elastischen Potentials A vorkommen, fünf Bedingungen.

69. Elektromagnetische Wellen. Jetzt betrachten wir die ersten beiden Maxwellschen Gleichungen für ein isotropes Medium,

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \lambda \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E}_t, \quad c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{H}_t, \quad (36)$$

in denen $\mathbf{E}$ die elektrische und $\mathbf{H}$ die magnetische Feldstärke, c die Lichtgeschwindigkeit, λ die spezifische Leitfähigkeit des Mediums, ϵ die Dielektrizitätskonstante und μ die

magnetische Permeabilität darstellt. Die Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ sind Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und t . Bezeichnen wir die Komponenten dieser Vektoren mit e_1, e_2, e_3 bzw. h_1, h_2, h_3 , so lassen sich die Gleichungen (36) auch in der Form

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_2} + \dots &= 0, \\
 \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial h_3}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \dots &= 0, \\
 \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_3}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \dots &= 0, \\
 \frac{\mu}{c} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial e_3}{\partial x_2} - \frac{\partial e_2}{\partial x_3} &= 0, \\
 \frac{\mu}{c} \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial e_1}{\partial x_3} - \frac{\partial e_3}{\partial x_1} &= 0, \\
 \frac{\mu}{c} \frac{\partial h_3}{\partial t} + \frac{\partial e_2}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1}{\partial x_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

schreiben; die nicht aufgeschriebenen Glieder enthalten dabei keine Ableitungen der Funktionen e_k und h_k . Damit haben wir ein System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung für sechs Funktionen. Wir numerieren diese Funktionen in folgender Reihenfolge:

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_2, \quad u_3 = e_3, \quad u_4 = h_1, \quad u_5 = h_2, \quad u_6 = h_3.$$

Bilden wir die Ausdrücke (5) sowie die Differentialgleichung (6), so erhalten wir für die charakteristischen Flächen die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\varepsilon}{c} p_0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 \\
 0 & \frac{\varepsilon}{c} p_0 & 0 & -p_3 & 0 & p_1 \\
 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{c} p_0 & p_2 & -p_1 & 0 \\
 0 & -p_3 & p_2 & \frac{\mu}{c} p_0 & 0 & 0 \\
 p_3 & 0 & -p_1 & 0 & \frac{\mu}{c} p_0 & 0 \\
 -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{c} p_0
 \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Die ersten drei Spalten dieser Determinante multiplizieren wir mit $\frac{\mu}{c} p_0$. Danach addieren wir zu den Elementen der ersten Spalte die mit $-p_3$ multiplizierten Elemente der fünften Spalte und die mit p_2 multiplizierten Elemente der sechsten Spalte; zu den Elementen der zweiten Spalte addieren wir die mit p_3 multiplizierten Elemente der vierten Spalte und die mit $-p_1$ multiplizierten Elemente der sechsten Spalte; zu den Elementen der dritten Spalte addieren wir schließlich die mit $-p_2$ multiplizierten Elemente der vierten Spalte und die mit p_1 multiplizierten Elemente der fünften Spalte. Entwickeln wir danach nach den Elementen der sechsten, fünften und vierten Zeile, so gelangen wir zu der Gleichung

$$\begin{vmatrix}
 q + p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\
 p_2 p_1 & q + p_2^2 & p_2 p_3 \\
 p_3 p_1 & p_3 p_2 & q + p_3^2
 \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

mit

$$q = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} p_0^2 - g^2. \quad (40)$$

Durch Ausrechnen der Determinante (39) erhalten wir die Gleichung

$$q^2(q + g^2) = 0 \quad (g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad (41)$$

die in zwei Gleichungen zerfällt. Setzen wir die in der Klammer stehende Summe gleich 0, so erhalten wir $p_0 = 0$ und damit eine stationäre Welle [43]. Im folgenden gehen wir auf den zweiten Fall näher ein, in dem $q = 0$, d. h.

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} p_0^2 - g^2 = 0 \quad (42)$$

gilt. Hieraus ergibt sich der bekannte Ausdruck

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (43)$$

für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle.

Jetzt wollen wir den Charakter der Unstetigkeit untersuchen. Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Unstetigkeitskoeffizienten für die Ableitungen der Komponenten des Vektors $\mathbf{E}$ und mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die entsprechenden Größen für die Komponenten des Vektors $\mathbf{H}$. Weiterhin führen wir die Unstetigkeitsvektoren $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ein. Dann gilt

$$[\mathbf{E}_{x_k}] = p_k \alpha, \quad [\mathbf{H}_{x_k}] = p_k \beta \quad (k = 0, 1, 2, 3; x_0 = t). \quad (44)$$

Die ersten drei Gleichungen (18) lauten jetzt

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} p_0 \alpha_1 + p_3 \beta_2 - p_2 \beta_3 &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{c} p_0 \alpha_2 + p_1 \beta_3 - p_3 \beta_1 &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{c} p_0 \alpha_3 + p_2 \beta_1 - p_1 \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Bezeichnen wir mit $\mathbf{n}$ den Einheitsvektor der Normalen an die Wellenfront $\omega_1 = 0$, welcher nach derjenigen Seite gerichtet sei, auf der $\omega_1 > 0$ ist, so können wir die Gleichungen (45) auch in der Gestalt

$$\frac{\varepsilon V}{c} \alpha = \beta \times \mathbf{n} \quad (46)$$

schreiben, wobei rechts das Vektorprodukt der Vektoren β und $\mathbf{n}$ steht. Ebenso lassen sich die letzten drei Gleichungen (18) in der Form

$$\frac{\mu V}{c} \beta = -\alpha \times \mathbf{n} \quad (47)$$

schreiben. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß die Vektoren α und β in der Tangentialebene der Wellenfront liegen und senkrecht zueinander sind.

Wir setzen nun voraus, daß vor der Wellenfront, d. h. dort, wo $\omega_1 > 0$ ist, Ruhe herrscht, also $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ gleich 0 sind. Die Beziehungen (44) liefern uns dann die Werte der Ableitungen der Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ auf der Wellenfront selbst:

$$\mathbf{E}_{x_k} = -p_k \alpha, \quad \mathbf{H}_{x_k} = -p_k \beta. \quad (48)$$

Wir entwickeln $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ in der Nähe der Wellenfront in eine Taylorsche Reihe und brechen die Entwicklung bei den Gliedern erster Ordnung ab. Da $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ auf der

Wellenfront verschwinden, erhalten wir unter Benutzung von (48) die Näherungsgleichungen

$$E \sim -\alpha \sum_{k=0}^3 p_k(x_k - x_k^{(0)}), \quad H \sim -\beta \sum_{k=0}^3 p_k(x_k - x_k^{(0)}),$$

in denen $(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ein beliebiger Punkt der Wellenfront ist. Durch Anwendung der Taylorschen Formel auf die Funktion ω_1 erhalten wir wegen $\omega_1(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = 0$ die Näherungsgleichung

$$\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3) \sim \sum_{k=0}^3 p_k(x_k - x_k^{(0)}),$$

und die vorigen Beziehungen lassen sich in der Gestalt

$$E \sim -\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3) \alpha, \quad H \sim -\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3) \beta \quad (49)$$

darstellen [66]. Diese Näherungsgleichungen gelten in der Nähe der Wellenfront auf derjenigen Seite, auf welcher der elektromagnetische Vorgang stattfindet.

Im Fall eines homogenen anisotropen Mediums ist die Größe ε keine Zahl mehr, sondern eine symmetrische Matrix von neun Elementen. Diese Größe kommt in der Beziehung vor, die den Vektor der elektrischen Verschiebung mit dem Vektor E verknüpft [II, 130]. Die Größe μ nehmen wir wie früher als Zahl an. Wir wählen die Koordinatenachsen so, daß die Matrix ε in die Diagonalform übergeht, und es mögen $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ ihre Eigenwerte sein [III/1, 32, 33]. Dann lauten die ersten drei Differentialgleichungen (37)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_2} + \dots &= 0, \\ \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial h_3}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \dots &= 0, \\ \frac{\varepsilon_3}{c} \frac{\partial e_3}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \dots &= 0, \end{aligned}$$

und an Stelle der Gleichung (39) erhalten wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} q_1 + p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_1 p_2 & q_2 + p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_1 p_3 & p_2 p_3 & q_3 + p_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (50)$$

mit

$$q_i = \frac{\varepsilon_i \mu}{c^2} p_0^2 - g^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$V_i^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_i \mu}$$

ein, so erhalten wir

$$q_i = \frac{p_0^2}{V_i^2} - g^2. \quad (51)$$

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung (50) durch g^2 , so können wir sie auch in der Gestalt

$$q_2 q_3 \cos^2 \alpha_1 + q_3 q_1 \cos^2 \alpha_2 + q_1 q_2 \cos^2 \alpha_3 + \frac{1}{g^2} q_1 q_2 q_3 = 0 \quad (52)$$

schreiben.

Eine triviale Lösung dieser Gleichung ist $q_1 = 0$, $\cos \alpha_1 = 0$. Unter Berücksichtigung von (51) sehen wir, daß V_1 die mögliche Relativgeschwindigkeit der Welle in einer be-

liegenden zur Ebene $x_1 = 0$ parallel laufenden Richtung ist. Entsprechend sind V_2 und V_3 die möglichen Relativgeschwindigkeiten der Welle in zu den Ebenen $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ parallelen Richtungen. Im allgemeinen Fall können wir die Gleichung (52), wenn wir beide Seiten mit g^2 multiplizieren und $q_1 q_2 q_3 = q_1 q_2 q_3 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3)$ setzen, in der Gestalt

$$V^2 q_1 q_2 q_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\cos^2 \alpha_i}{V^2 - V_i^2} = 0 \quad (53)$$

schreiben [43]. Lassen wir die Lösung $V = 0$, der eine stationäre Welle entspricht, fort, so erhalten wir zur Bestimmung von V bei vorgegebener Wellenrichtung, die durch die Größen $\cos \alpha_k$ charakterisiert wird, die Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\cos^2 \alpha_i}{V^2 - V_i^2} = 0 \quad (54)$$

für V^2 . Wie in [II, 149] kann man zeigen, daß diese Gleichung zwei verschiedene positive Wurzeln für V^2 besitzt.

Lösen wir die Gleichung (50) oder (52) nach p_0 auf, so erhalten wir eine Gleichung der Gestalt

$$p_0 + F(p_1, p_2, p_3) = 0, \quad (55)$$

in der F eine positive homogene Funktion ersten Grades bezeichnet. Da die Gleichung (55) die Größen x_k nicht enthält, führt das Cauchysche System für diese Gleichung zu konstanten Werten für die p_k , so daß die Bicharakteristiken Geraden sind. Ihre Gleichungen lauten

$$\frac{dx_k}{dt} = F_{p_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Wir führen das charakteristische Konoid mit der Spitze im Koordinatenursprung ein. Es stellt die Front einer von einer punktförmigen Quelle im Koordinatenursprung ausgehenden Welle zu verschiedenen Zeitpunkten dar. Seine Gleichung lautet $x_k = F_{p_k} t$ oder für $t = 1$

$$x_k = F_{p_k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (56)$$

Da die F_{p_k} homogene Funktionen nullten Grades sind, enthalten die rechten Seiten der Gleichungen (56) zwei Parameter, und zwar die Quotienten von zwei der Größen p_1, p_2, p_3 durch die dritte. Es sei S die Fläche (56), $P(x_1, x_2, x_3)$ ein Punkt auf S und δ die Entfernung vom Koordinatenursprung bis zur Tangentialebene von S im Punkt P . Sind $\cos \alpha_i$ die Richtungskosinus der Normalen von S im Punkt P , so erhalten wir unter Anwendung der Eulerschen Formel für homogene Funktionen

$$\delta = \sum_{i=1}^3 x_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^3 F_{p_i} \cos \alpha_i = \pm \frac{1}{g} \sum_{i=1}^3 p_i F_{p_i} = \pm \frac{F}{g} = \pm \frac{p_0}{g} = \pm V.$$

Wählen wir beispielsweise, was im folgenden unwesentlich ist, das positive Zeichen, so können wir die Gleichung der Tangentialebene von S in der Form

$$\sum_{i=1}^3 x_i \cos \alpha_i - V = 0 \quad (57)$$

schreiben.

In dieser Gleichung kommen die vier Parameter $\cos \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3$) und V vor, die durch die beiden Beziehungen

$$\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\cos^2 \alpha_i}{V^2 - V_i^2} = 0$$

miteinander verknüpft sind, so daß die Gleichung (57), wie es notwendig ist, zwei unabhängige Parameter enthält. Die Fläche S ist die Envelope der zweiparametrischen

Ebenenschar (57). Führt man alle Rechnungen durch, auf die wir hier nicht eingehen wollen, so erhält man für die Fläche die Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{V_i^2 x_i^2}{V_i^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = 0.$$

Ist beispielsweise $V_1 = V_2$, so zerfällt diese Fläche vierter Ordnung in eine Kugel und ein Ellipsoid.

70. Starke Unstetigkeiten in der Elastizitätstheorie. In [44] haben wir die starke Unstetigkeit von Lösungen einer einzigen Differentialgleichung betrachtet. Jetzt wollen wir vom Standpunkt der Theorie der starken Unstetigkeiten aus die Gleichungen der Elastizitätstheorie untersuchen.

Wir beschränken uns dabei auf die Behandlung des ebenen Falles. Es seien u, v die Komponenten des Verschiebungsvektors in der x, y -Ebene und X, Y die Komponenten der Volumenkraft. Wir bezeichnen mit $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ die Komponenten des Spannungstensors, so daß die beiden Grundgleichungen der Elastizitätstheorie wie folgt lauten:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X, \quad \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y. \quad (58)$$

Zu diesen Gleichungen müssen wir noch die Beziehungen zwischen dem Spannungstensor und dem Deformationstensor (das Hookesche Gesetz)

$$\sigma_x = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x, \quad \sigma_y = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu v_y, \quad \tau_{xy} = \mu(u_y + v_x) \quad (58_1)$$

hinzufügen. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (58) ein, so erhalten wir die Gleichung der Elastizitätstheorie für den Verschiebungsvektor ω :

$$\varrho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega + \mu \Delta \omega + F.$$

Im folgenden wollen wir unter u und v zwei beliebige Funktionen von x, y, t verstehen, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Dann liefern die Gleichungen (58) die Größen X und Y in Abhängigkeit von den Funktionen u und v . Außerdem führen wir noch zwei lineare Operatoren ein, welche Ableitungen erster Ordnung der Funktionen u und v enthalten:

$$P_x(u, v) = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) - \varrho u_t \cos(n, t), \\ P_y(u, v) = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) - \varrho v_t \cos(n, t), \quad (59)$$

Jetzt betrachten wir zwei Funktionenpaare (u, v) und (u', v') ; es seien $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, X', Y'$ die Werte der Größen (58₁) bzw. der Größen X und Y , die zu dem Funktionenpaar (u', v') gehören. Somit gilt

$$\sigma'_x = \lambda(u'_x + v'_y) + 2\mu u'_x, \quad \sigma'_y = \lambda(u'_x + v'_y) + 2\mu v'_y, \quad \tau'_{xy} = \mu(u'_y + v'_x).$$

Unter Benutzung dieser Ausdrücke und unter Anwendung der üblichen Gauss-Ostrogradskischen Formel erhalten wir folgendes Analogon zur Greenschen Formel:

$$-\iiint_D (uX' + vY' - u'X - v'Y) \, dt \\ = \iint_S [uP_x(u', v') + vP_y(u', v') - u'P_x(u, v) - v'P_y(u, v)] \, dS. \quad (60)$$

Hierbei bezeichnet D wie oben einen gewissen Bereich des x, y, t -Raumes, S die diesen Bereich begrenzende Fläche und n die Richtung der äußeren Normalen von S . Die Formel (60) wurde zuerst von VOLTERRA aufgestellt. Unter X, Y verstehen wir einfach die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (58), unter X', Y' die entsprechenden Ausdrücke. Bei der Herleitung von (60) setzen wir natürlich voraus, daß die Funktionen u, v und u', v' im Bereich D stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen.

Wir nehmen nun an, daß die Ableitungen erster Ordnung der Funktionen u , v unstetig sind. Es möge der Bereich D durch eine Fläche σ in die beiden Teilbereiche D_1 und D_2 geteilt werden; wir setzen voraus, daß die ersten Ableitungen der Funktionen u , v auf der Fläche σ Unstetigkeiten haben, welche die in [44] angegebenen kinematischen Kompatibilitätsbedingungen erfüllen. Außerdem setzen wir voraus, daß (u, v) und die Ausdrücke (59) beim Durchgang durch σ stetig bleiben. Auf die mechanische Bedeutung dieser dynamischen Kompatibilitätsbedingungen gehen wir noch ein. Wie in [44] können wir zeigen, daß die Formel (60) in dem ganzen Bereich D gilt, wenn die Funktionen u , v die angegebenen Unstetigkeitsbedingungen erfüllen und u' , v' beliebige Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung sind.

Aus den angegebenen Bedingungen wollen wir jetzt einige Schlußfolgerungen ziehen. Wie in [44] können wir zeigen, daß die Vektoren $\text{grad } u \times \mathbf{n}$ und $\text{grad } v \times \mathbf{n}$ beim Durchgang durch σ stetig bleiben müssen. Fügen wir noch die Ausdrücke (59) hinzu, in die wir für die Komponenten des Spannungstensors die durch (58₁) gegebenen Ausdrücke einsetzen, so erhalten wir die folgenden acht Ausdrücke, die beim Durchgang durch σ stetig sein müssen:

$$u_x \cos(n, y) - u_y \cos(n, x) = M_1,$$

$$u_y \cos(n, t) - u_t \cos(n, y) = M_2,$$

$$u_t \cos(n, x) - u_x \cos(n, t) = M_3,$$

$$v_x \cos(n, y) - v_y \cos(n, x) = M_4,$$

$$v_y \cos(n, t) - v_t \cos(n, y) = M_5,$$

$$v_t \cos(n, x) - v_x \cos(n, t) = M_6,$$

$$(\lambda + 2\mu) u_x \cos(n, x) + \mu u_y \cos(n, y) - \rho u_t \cos(n, t) + \mu v_x \cos(n, y) + \lambda v_y \cos(n, x) = M_7,$$

$$\lambda u_x \cos(n, y) + \mu u_y \cos(n, y) + \mu v_x \cos(n, x) + (\lambda + 2\mu) v_y \cos(n, y) - \rho v_t \cos(n, t) = M_8.$$

Diese Gleichungen fassen wir als acht Gleichungen für die sechs Ableitungen erster Ordnung der Funktionen u und v auf. Würde die Koeffizientenmatrix dieser Gleichungen wenigstens eine von 0 verschiedene Determinante sechster Ordnung enthalten, so könnten wir alle sechs Ableitungen erster Ordnung der Funktionen u und v durch die stetigen Funktionen M_k ausdrücken, und diese Ableitungen könnten auf σ nicht unstetig sein. Somit sind alle Determinanten sechster Ordnung der Koeffizientenmatrix gleich 0. Streichen wir die letzten beiden Zeilen der Matrix und setzen die Determinante der Restmatrix gleich 0, so erhalten wir eine Identität. Betrachten wir auch noch die übrigen Fälle, so gelangen wir zu der einzigen Gleichung

$$\{\rho \cos^2(n, t) - (\lambda + 2\mu) [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} \{\rho \cos^2(n, t) - \mu [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} = 0, \quad (61)$$

die ausdrückt, daß unsere Matrix einen Rang besitzt, der kleiner als 6 ist. Die Gleichung von σ möge die Gestalt $\varphi(x, y, t) = 0$ haben. Die gefundene Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\rho \psi_t^2 - (\lambda + 2\mu) (\psi_x^2 + \psi_y^2) = 0 \quad \text{und} \quad \rho \psi_t^2 - \mu (\psi_x^2 + \psi_y^2) = 0,$$

und wir sehen somit, daß die Fläche σ eine charakteristische Fläche der Gleichungen der Elastizitätstheorie sein muß [66].

Es tritt hier ein wesentlicher Unterschied gegenüber einer einzigen Wellengleichung auf. Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen, die auf die Stetigkeit von $M_1, M_2, \dots, M_6$ führen, nebst der Tatsache, daß σ eine charakteristische Fläche ist, was auf die Gleichung (61) führt, garantieren noch nicht die Stetigkeit von M_7 und M_8 , d. h., sie garantieren nicht die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen. Nun wollen wir diejenigen Nebenbedingungen aufstellen, unter denen M_7 und M_8 stetig sind.

Wir wählen auf σ einen Punkt N , und es sei l die Schnittgerade der Tangentialebene von σ im Punkt N mit der Ebene $t = \text{const}$, die durch den Punkt N hindurchgeht. Diese Gerade wählen wir als y -Achse. Die t -Achse hat im Punkt N eine feste Richtung, die senkrecht zur Richtung der Geraden l verläuft. Damit ist auch die x -Achse festgelegt.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß der erste Faktor auf der linken Seite der Gleichung (61) gleich 0 ist,

$$\varrho \cos^2(n, t) - (\lambda + 2\mu) [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)] = 0; \quad (62)$$

hierzu gehört die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen. Wegen der getroffenen Wahl der y -Achse gilt im Punkt N die Beziehung $\cos(n, y) = 0$, außerdem bleiben die Ableitungen u_y und v_y beim Durchgang durch σ im Punkt N stetig. Wir bilden den Ausdruck

$$(\lambda + 2\mu) u_x \cos(n, x) - \varrho u_t \cos(n, t) = r. \quad (63)$$

Unter Benutzung von (62) erhalten wir

$$r \cos(n, x) = -\varrho \cos(n, t) M_3,$$

daraus folgt, daß wegen der kinematischen Kompatibilitätsbedingungen und der Gleichung (62) der Ausdruck (63) im Punkt N stetig ist. Dann ist auch M_7 im Punkt N stetig, und für die Stetigkeit von M_8 ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

$$\mu v_x \cos(n, x) - \varrho v_t \cos(n, t) = M \quad (64)$$

stetig ist. Außerdem ist der Ausdruck

$$v_x \cos(n, t) - v_t \cos(n, x) = -M_6 \quad (65)$$

stetig. Die Determinante des Systems der Gleichungen (64), (65) ist $\varrho \cos^2(n, t) - \mu \cos^2(n, x)$. Wegen (62) und $\cos(n, y) = 0$ ist sie von 0 verschieden; folglich ist die Stetigkeit des Ausdrucks (64) der Stetigkeit der partiellen Ableitungen v_x und v_t gleichwertig. Außerdem ist auch die partielle Ableitung v_y im Punkt N stetig. Die Schnittkurve der Fläche σ mit der Ebene $t = \text{const}$ ist eine Unstetigkeitslinie in der x, y -Ebene im vorgegebenen Zeitpunkt, und die Gerade l ist die Tangente dieser Kurve im Punkt N . Die Größe v ist die Projektion des Verschiebungsvektors auf die Richtung der Geraden l , die zur Unstetigkeitslinie tangential verläuft. Wir haben gezeigt, daß alle Ableitungen erster Ordnung von v im Punkt N stetig sein müssen, d. h., nur die Komponente u des Verschiebungsvektors in der zur Unstetigkeitslinie senkrechten Richtung kann eine starke Unstetigkeit erleiden (Longitudinalunstetigkeit). Sind somit die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen und die Gleichung (62) erfüllt, so sind die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen genau dann erfüllt, wenn die Komponente des Verschiebungsvektors, die zu der sich in der x, y -Ebene bewegenden Unstetigkeitslinie normal gerichtet ist, eine starke Unstetigkeit besitzt. Ebenso kann man auch bei der Gleichung

$$\varrho \cos^2(n, t) - \mu [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)] = 0$$

vorgehen. Dabei zeigt sich, daß nur die Komponente des Verschiebungsvektors in Richtung der Tangente der Unstetigkeitslinie eine starke Unstetigkeit erleiden kann.

Nun setzen wir voraus, das Verschiebungsfeld besitze ein Potential $(u, v) = \text{grad } \varphi$; hieraus folgt $u_y = v_x$. Wählen wir die Koordinatenachsen wie vorhin, so sind im Punkt N die Ableitungen u_y , v_y und v_x stetig. Aus der Stetigkeit von M_8 folgt dann, daß auch v_t stetig ist; daher kann im Fall eines Potentialfeldes nur die Komponente des Verschiebungsvektors in Richtung der Normalen der Unstetigkeitskurve eine Unstetigkeit erleiden.

Jetzt setzen wir voraus, daß das Verschiebungsfeld quellenfrei ist, d. h., daß $u_x + v_y = 0$ gilt. In diesem Fall sind die Ableitungen u_y , v_y und u_x stetig, wegen der Stetigkeit von M_3 ist folglich auch die Ableitung u_t stetig, d. h., bei einem quellenfreien Feld ist nur eine Unstetigkeit der Komponente des Verschiebungsvektors in Richtung der Tangente an die Unstetigkeitslinie möglich.

Wir untersuchen die mechanische Bedeutung der dargelegten Theorie und zeigen dabei: Aus der Formel (60) folgt in den einfachsten Spezialfällen, daß der Impulssatz auch für einen Bereich richtig bleibt, der im Innern eine Unstetigkeitsfläche enthält. Wir setzen in dieser Formel $u' = 1$ und $v' = 0$. Wegen (58₁) sind dann die Komponenten

des Spannungsvektors für u' und v' gleich 0, und die Formel (60) nimmt die Gestalt

$$\iiint_D X \, d\tau = - \iint_S P_x(u, v) \, dS \quad (66)$$

an. Entsprechend erhalten wir für $u' = 0$ und $v' = 1$

$$\iiint_D Y \, d\tau = - \iint_S P_y(u, v) \, dS. \quad (67)$$

Als Bereich D nehmen wir einen Zylinder, dessen Erzeugende parallel zur t -Achse verlaufen und dessen Grundflächen S_1 und S_2 in den Ebenen $t = t_1$ bzw. $t = t_2$ liegen. Wir nehmen an, daß sich im Innern dieses Zylinders eine Unstetigkeitsfläche σ befindet. Auf der unteren Grundfläche S_1 und der oberen Grundfläche S_2 gilt $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$. Auf der unteren Grundfläche ist $\cos(n, t) = -1$ und auf der oberen Grundfläche $\cos(n, t) = 1$. Auf der Mantelfläche ist $\cos(n, t) = 0$. Bezeichnen wir mit S_t den veränderlichen Schnitt des Zylinders mit einer Ebene, die senkrecht zu seinen Erzeugenden verläuft, und mit l_t die Schnittlinie dieser Ebene mit der Mantelfläche des Zylinders, so können wir die Formel (66) in der Gestalt

$$\int_{t_1}^{t_2} [\iint_{S_t} X \, dx \, dy] \, dt = \iint_{S_t} \varrho u_t \, dx \, dy|_{t=t_2} - \iint_{S_t} \varrho u_t \, dx \, dy|_{t=t_1} - \int_{t_1}^{t_2} [\int_{l_t} \sigma_n \, ds] \, dt$$

mit

$$\sigma_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y)$$

oder in der Gestalt

$$\int_{t_1}^{t_2} [\iint_{S_t} X \, dx \, dy] \, dt + \int_{t_1}^{t_2} [\int_{l_t} \sigma_n \, ds] \, dt = \iint_{S_t} \varrho u_t \, dx \, dy|_{t=t_2} - \iint_{S_t} \varrho u_t \, dx \, dy|_{t=t_1}$$

schreiben. Der erste Summand auf der linken Seite liefert den Impuls der Volumenkraft, die an der Fläche S_t der x, y -Ebene im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ angreifen. Der zweite Summand liefert den Impuls der Spannkraft, die an der Randkurve dieser Fläche angreifen, und die auf der rechten Seite stehende Differenz stellt den Zuwachs der auf dieselbe Fläche bezogenen Bewegungsgröße dar, wobei sowohl der Impuls der Kraft als auch der Zuwachs der Bewegungsgröße auf die x -Achse projiziert sind. In derselben Weise liefert uns die Formel (67) eine analoge Beziehung für die Projektionen des Impulses der Kraft und des Zuwachses der Bewegungsgröße auf die y -Achse. Somit gilt auch für jeden Bereich D , der eine Unstetigkeitsfläche enthält, tatsächlich der Impulssatz.

71. Charakteristiken und große Frequenzen. Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Beziehungen, die wir bei der Darlegung der Charakteristikentheorie für Gleichungssysteme erhalten haben, und den Beziehungen, die man erhält, wenn man versucht, das Differentialgleichungssystem näherungsweise durch Funktionen von spezieller Gestalt zu erfüllen. Es sei ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (68)$$

gegeben. Wir versuchen, dieses Differentialgleichungssystem zu erfüllen, indem wir für die Funktionen u_j den Ansatz

$$u_j = X_j e^{i\omega \Phi} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (69)$$

machen, wobei X_i und Φ gesuchte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen bezeichnen und ω eine Zahl ist. Setzen wir die Ausdrücke (69) in die Differentialgleichung (68) ein und berücksichtigen nur die Glieder, welche die Zahl ω im Quadrat enthalten, so gelangen wir zu dem Differentialgleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} X_j \Phi_{x_k} \Phi_{x_l} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (70)$$

Dieses System fassen wir als ein System homogener Differentialgleichungen für die X_j auf. Damit wir eine nicht identisch verschwindende Lösung erhalten, müssen wir die Determinante des Systems gleich 0 setzen. Somit gelangen wir für die gesuchte Funktion Φ zu der Differentialgleichung erster Ordnung

$$|\omega'_{ij}| = 0 \quad \left(\omega'_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \Phi_{x_k} \Phi_{x_l} \right),$$

die mit der Gleichung für die charakteristischen Flächen übereinstimmt. Nehmen wir eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung, so können wir die X_j aus dem Differentialgleichungssystem (70) im allgemeinen bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmen. Dieses System stimmt mit dem System (21) überein, aus dem die Unstetigkeitskoeffizienten h_j bestimmt werden. Während die Gleichungen jenes Systems nur auf der Wellenfront erfüllt zu sein brauchen, müssen die Gleichungen (70) dagegen überall erfüllt sein. Das System (68) ist dabei durch Funktionen der Gestalt (69) nur näherungsweise erfüllt. Die Flächen $\Phi = \text{const}$ sind hier Flächen konstanter Phase.

Wir betrachten nun ausführlicher den Fall einer einzigen Wellengleichung

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (71)$$

und suchen eine Lösung in Gestalt einer harmonischen Schwingung mit einer Frequenz ω in bezug auf die Zeit t ,

$$u = A e^{i\omega(t+\Phi)},$$

wobei die gesuchten Funktionen A und Φ nur von den Koordinaten x, y, z abhängen sollen. Dieser Ansatz läuft daraus hinaus, daß der Ausdruck

$$v = A e^{i\omega\Phi} \quad (72)$$

die Differentialgleichung

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \right) \quad (73)$$

befriedigen muß. Es gilt

$$\begin{aligned} v_x &= (A_x + i\omega A \Phi_x) e^{i\omega\Phi}, \\ v_{xx} &= (A_{xx} + i\omega A \Phi_{xx} + 2i\omega A_x \Phi_x - \omega^2 A \Phi_x^2) e^{i\omega\Phi}. \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen kann man auch für die Ableitungen nach y und z aufstellen. Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (73) ein und setzen den Koeffizienten von ω^2 gleich 0, so erhalten wir für Φ die Differentialgleichung

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 = \frac{1}{a^2}. \quad (74)$$

Setzen wir noch den Koeffizienten von ω gleich 0, so erhalten wir eine Differentialgleichung, in der die Amplitude $A(x, y, z)$ der Lösung (72) vorkommt:

$$A \Delta \Phi + 2(A_x \Phi_x + A_y \Phi_y + A_z \Phi_z) = 0$$

oder

$$\text{grad } \log A \cdot \text{grad } \Phi = -\frac{1}{2} \Delta \Phi. \quad (75)$$

Zwischen der Differentialgleichung (74) und der Differentialgleichung der charakteristischen Flächen läßt sich leicht ein Zusammenhang herstellen. Die Differentialgleichung für die charakteristischen Flächen von (71) lautet

$$a^2 \left[\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right)^2 \right] = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2;$$

setzen wir $\omega_1 = t + \Phi$, so erhalten wir gerade die Differentialgleichung (74). Bezeichnen wir mit $\mathbf{n}$ den Einheitsvektor der Normalen in einem Punkt M der Fläche konstanter

Phase $\Phi = \text{const}$, die durch diesen Punkt hindurchgeht, so finden wir

$$\text{grad } \Phi = \varphi(x, y, z) \mathbf{n},$$

wobei $\varphi(x, y, z)$ die Länge des Vektors $\text{grad } \Phi$ im Punkt (x, y, z) angibt. Die Differentialgleichung (75) läßt sich dann in der Gestalt

$$\text{grad}_n \log A = -\frac{1}{2\varphi} \text{div}(\varphi \mathbf{n}) \quad (76)$$

schreiben, in der $\text{grad}_n \log A$ die Projektion von $\text{grad} \log A$ auf die Richtung $\mathbf{n}$ bedeutet. Die Differentialgleichungen (74) und (76) müssen im ganzen Raum erfüllt sein. Die Differentialgleichung (71) wird aber nur näherungsweise erfüllt.

Setzen wir in den Maxwell'schen Gleichungen (36)

$$\mathbf{E} = e e^{i\omega\Phi}, \quad \mathbf{H} = h e^{i\omega\Phi} \quad (77)$$

ein, wobei Φ eine skalare Funktion ist, $\mathbf{e}$ und $\mathbf{h}$ Vektoren sind, diese drei Größen von x_1, x_2, x_3 und t abhängen und ω eine Zahl bedeutet, so erhalten wir in derselben Weise durch Zusammenfassung der Glieder, die den Faktor ω enthalten, die Differentialgleichung

$$\Phi_t \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{e} = \text{grad } \Phi \times \mathbf{h}. \quad (78)$$

Sie ist im wesentlichen mit der Gleichung (46) aus [69] identisch. Genauso kann man auch eine der Gleichung (47) entsprechende Differentialgleichung aufstellen. Die Differentialgleichung (47) muß nicht nur auf der Fläche $\Phi = \text{const}$ erfüllt sein, und diese Fläche ist keine Unstetigkeitsfläche, sondern eine Fläche gleicher Phase der Lösungen (77).

72. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Wir betrachten nun ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen und setzen voraus, daß es sich nach den partiellen Ableitungen in bezug auf x_2 auflösen läßt. Somit haben wir ein Differentialgleichungssystem der Gestalt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \Phi_j(x_1, x_2, u_j) \quad (i=1, \dots, m), \quad (79)$$

wobei die a_{ij} von x_1, x_2 abhängen können.

Führen wir die Vektoren $\mathbf{u}$ und Φ mit den Komponenten u_i und Φ_i und die Matrix A mit den Elementen a_{ij} ein, so können wir das Differentialgleichungssystem (79) in einer einzigen vektoriellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \Phi(x_1, x_2, \mathbf{u}) \quad (80)$$

zusammenfassen. Wir führen nun an Stelle von $\mathbf{u}$ durch

$$\mathbf{u} = B\mathbf{v} \quad (81)$$

einen neuen Vektor $\mathbf{v}$ ein; dabei sei B eine Matrix mit den Elementen b_{ik} und einer von 0 verschiedenen Determinante. Die Elemente b_{ik} sollen von x_1, x_2 abhängen und in einem Bereich D der x_1, x_2 -Ebene stetige Ableitungen besitzen. Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = B \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial x_i} \mathbf{v} \quad (i=1, 2), \quad (82)$$

wobei die Ableitung der Matrix B gleich der Matrix aus den Ableitungen ihrer Elemente ist. Setzen wir (81) und (82) in (80) ein, so erhalten wir für $\mathbf{v}$ die Diffe-

rentialgleichung

$$B \frac{\partial v}{\partial x_2} = AB \frac{\partial v}{\partial x_1} + \Psi,$$

in der Ψ einen Vektor bezeichnet, dessen Komponenten von x_1 , x_2 und v_j abhängen. Multiplizieren wir beide Seiten mit B^{-1} , so erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = B^{-1}AB \frac{\partial v}{\partial x_1} + \Psi_1. \quad (83)$$

Jetzt wählen wir, wenn dies möglich ist, die Matrix B so, daß die Matrix $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist. Dies hängt bekanntlich mit der Lösung der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda| = 0 \quad (84)$$

für die Matrix A zusammen [III/1, 27], wobei auf der linken Seite von (84) die Determinante der Matrix $A - \lambda$ steht. Ausführlich geschrieben lautet die Gleichung (84)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (85)$$

Wir setzen voraus, daß in der Umgebung eines Punktes $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ die Koeffizienten a_{ik} stetige Ableitungen besitzen und die Gleichung (85) voneinander verschiedene Wurzeln $\lambda_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, \dots, m$) hat, was im folgenden wesentlich ist. Dann können wir in dieser Umgebung unter Benutzung der in [III/1, 27] behandelten Methode eine Matrix B mit den angegebenen Eigenschaften konstruieren derart, daß die Matrix $B^{-1}AB$ eine reine Diagonalmatrix ist. Die Differentialgleichung (83) lautet nun in Komponentenschreibweise

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2) \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \psi_i(x_1, x_2, v_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (86)$$

Sind alle $\lambda_i(x_1, x_2)$ in der angegebenen Umgebung reell, so heißt das Differentialgleichungssystem (86) in dieser Umgebung *hyperbolisch*.

Unter Benutzung der Bezeichnungen aus [63] gilt für unser Differentialgleichungssystem

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad a_{ii}^{(2)} = 1, \quad a_{ii}^{(1)} = -\lambda_i(x_1, x_2). \quad (87)$$

Für die Größen ω_{ij} , die durch die Gleichungen (5) definiert waren, erhalten wir

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad \omega_{ii} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}.$$

Die Differentialgleichung (6) nimmt die Gestalt

$$\left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_1(x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right] \dots \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_m(x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right] = 0$$

an; sie zerfällt in die m linearen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (88)$$

Ist $\omega_i(x_1, x_2)$ die Lösung einer dieser Differentialgleichungen, so ist die Schar $\omega_1(x_1, x_2) = C$ eine Schar charakteristischer Kurven oder Charakteristiken des Differentialgleichungssystems (86). Die Differentialgleichung (88) ist der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$dx_1 + \lambda_i(x_1, x_2) dx_2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\lambda_i(x_1, x_2) \quad (89)$$

gleichwertig, und durch jeden Punkt des ebenen Bereiches, in dem die Funktionen $\lambda_i(x_1, x_2)$ stetige Ableitungen erster Ordnung haben, gehen m Charakteristiken hindurch.

Jetzt betrachten wir einen genügend nahe bei der Achse $x_2 = 0$ liegenden Punkt. Es sei l_i derjenige Teil der Integralkurve der Differentialgleichung (89), die durch einen Punkt (x_1, x_2) hindurchgeht, der zwischen diesem Punkt und dem Schnittpunkt $(x_1^{(i)}, 0)$ der Integralkurve mit der Achse $x_2 = 0$ liegt. Auf der Kurve l_i können wir jede beliebige Funktion $\psi(x_1, x_2)$ als Funktion von x_2 auffassen, und wegen (89) gilt

$$\frac{d\psi}{dx_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \text{auf } l_i.$$

Somit ist das Differentialgleichungssystem (86) dem Integralgleichungssystem

$$v_i(x_1, x_2) = v_i(x_1^{(i)}, 0) - \int_{l_i} \psi_i(x_1, x_2, v_j) dx_2 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (90)$$

gleichwertig. Nehmen wir an, daß auf der Achse $x_2 = 0$ die Werte der Funktionen $v_i(x_1, x_2)$ vorgegeben sind, so können wir die $v_i(x_1^{(i)}, 0)$ als bekannt voraussetzen und auf das Integralgleichungssystem (90) die Methode der sukzessiven Approximation anwenden. Auf diese Weise beweist man im Kleinen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems sowie ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten. Eine ausführliche Behandlung dieser Frage und auch eine Untersuchung des Falles, daß die Gleichung (85) mehrfache Wurzeln hat, ist in dem bereits zitierten Buch von I. G. PETROWSKI zu finden.

73. Beispiele. 1. Zunächst betrachten wir das Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad (91)$$

das den Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion bestimmt [III/2]. In diesem Fall ist

$$a_{11}^{(1)} = a_{21}^{(2)} = a_{22}^{(1)} = 1, \quad a_{12}^{(2)} = -1.$$

und die übrigen $a_{ij}^{(k)}$ sind gleich 0. Die linke Seite der Differentialgleichung (6) hat, wenn man $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ durch α_k ersetzt, die Gestalt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$; folglich ist das Differentialgleichungssystem (91) elliptisch. Berücksichtigen wir den Zusammenhang zwischen diesem Differentialgleichungssystem und den analytischen Funktionen, so finden wir, daß jede Lösung des Differentialgleichungssystems (91) mit stetigen Ableitungen erster Ordnung eine analytische Funktion von x_1 und x_2 ist.

2. Nun betrachten wir das System der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - a \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + F(x_2) = 0, \quad (92)$$

in dem a eine Konstante bezeichnet (O. PERRON, Math. Z. 27 (1928)).

Die linke Seite der Differentialgleichung (6) hat, wenn man $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ durch α_k ersetzt, die Gestalt $\alpha_1^2 - a\alpha_2^2$, und folglich gehört das Differentialgleichungssystem für $a < 0$ zum elliptischen und für $a = 0$ zum parabolischen Typus. Lösen wir es nach den partiellen Ableitungen bezüglich x_1 auf, so erhalten wir als Gleichung (85)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - a = 0,$$

die für $a > 0$ voneinander verschiedene reelle Wurzeln hat; das Differentialgleichungssystem ist also für $a > 0$ hyperbolisch.

Zunächst setzen wir $a > 0$ voraus. Indem wir wie in [72] vorgehen, führen wir an Stelle von u_1, u_2 die neuen Funktionen

$$v_1 = \sqrt{a} u_1 + u_2, \quad v_2 = \sqrt{a} u_1 - u_2 \quad (93)$$

ein und erhalten für v_1 und v_2 die beiden einzelnen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \sqrt{a} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + F(x_2) = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \sqrt{a} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - F(x_2) = 0. \quad (94)$$

Nach Einführung der neuen unabhängigen Veränderlichen

$$2\xi = \sqrt{a} x_1 + x_2, \quad 2\eta = -\sqrt{a} x_1 + x_2$$

läßt sich das Differentialgleichungssystem in der Gestalt

$$-\sqrt{a} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + F(\xi + \eta) = 0, \quad \sqrt{a} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - F(\xi + \eta) = 0, \quad (95)$$

schreiben. Gesucht ist diejenige Lösung des Differentialgleichungssystems (95), die der Anfangsbedingung

$$v_1|_{x_1=0} = v_2|_{x_1=0} = 0, \quad \text{d. h.} \quad v_1|_{\eta=\xi} = 0, \quad v_2|_{\eta=-\xi} = 0$$

genügt. Aus (95) erhalten wir

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\xi}^{\xi+\eta} F(t) dt, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\eta}^{\xi+\eta} F(t) dt$$

oder in den ursprünglichen unabhängigen Veränderlichen

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\sqrt{a}x_1+x_2}^{x_2} F(t) dt, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\sqrt{a}x_1+x_2}^{x_2} F(t) dt.$$

Aus (93) können wir jetzt die Funktionen u_1 und u_2 bestimmen, die das Differentialgleichungssystem (92) lösen und den Anfangsbedingungen

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = 0 \quad (96)$$

genügen. Diese Lösung ist offenbar eindeutig bestimmt.

Für $a = 0$ nimmt das Differentialgleichungssystem (92) die Gestalt

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + F(x_2) = 0$$

an, und die einzige Lösung, die den Bedingungen (96) genügt, ist

$$u_1 = -\frac{x}{2} F'(x_2), \quad u_2 = -x_1 F'(x_2);$$

dabei müssen wir voraussetzen, daß $F(x_2)$ eine stetige Ableitung zweiter Ordnung besitzt.

Zum Schluß betrachten wir den Fall $a = -b^2 < 0$. Setzen wir

$$bx_1 = x, \quad x_2 = y, \quad v_1 = bu_1 + \frac{1}{b} \int_c^y F(t) dt, \quad v_2 = u_2, \quad (97)$$

so nimmt das Differentialgleichungssystem (92) die Gestalt

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

an. Hieraus ist ersichtlich, daß $v_1 + v_2i$ eine reguläre Funktion von $z = x + yi$ sein muß, und wegen (96) und (97) muß diese Funktion für $x \rightarrow 0$ gegen die reellwertige Funktion

$$\frac{1}{b} \int_c^y F(t) dt \quad (98)$$

streben. Wir können zeigen, daß die angegebene reguläre Funktion über die Gerade $x=0$ hinaus analytisch fortsetzbar ist, folglich muß sie auf dieser Geraden eine analytische Funktion sein [III/2, 24]. Deshalb muß die Funktion (98) und somit auch die Funktion $F(y)$ für reelle y analytisch sein. Entwickeln wir die Funktion (98) nach Potenzen von $y - y_0$,

$$-\frac{1}{b} \int_c^y F(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - y_0)^k,$$

wobei y_0 eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, so erhalten wir die Darstellung

$$v_1 + v_2i = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k a_k (z - iy_0)^k \quad (z = x + yi)$$

für Werte von z , die nahe bei iy_0 liegen. Kennen wir v_1 und v_2 , so finden wir u_1 und u_2 aus (97).

II. Randwertprobleme

§1. Randwertprobleme bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung

74. Die Greensche Funktion einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das vorliegende Kapitel ist der Untersuchung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gewidmet. Einzelne Probleme dieser Art haben wir bereits des öfteren behandelt. Es soll nun die Theorie der Randwertprobleme systematisch entwickelt werden.

Bei der Anwendung der Fourierrmethode auf Randwertprobleme der mathematischen Physik gelangten wir mehrmals zu dem folgenden Randwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die einen Parameter enthält: Gesucht sind diejenigen Werte des Parameters λ , für die in einem endlichen Intervall $[a, b]$ eine von 0 verschiedene Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0 \quad (1)$$

existiert, die in den Endpunkten dieses Intervalls den homogenen Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (2)$$

genügt; dabei sind α_k und β_k vorgegebene Zahlen. Wir nehmen natürlich an, daß wenigstens eine der Zahlen α_1 und α_2 sowie eine der Zahlen β_1 und β_2 von 0 verschieden ist. Wir setzen voraus, daß die Funktionen $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig sind; außerdem soll die Funktion $p(x)$ in diesem Intervall nicht verschwinden und eine stetige Ableitung besitzen. Wir setzen außerdem voraus, daß $p(x)$ und $r(x)$ im Intervall $[a, b]$ positiv sind. Für die Ausdrücke auf der linken Seite der Differentialgleichung (1), die den Parameter λ nicht enthalten, führen wir die Bezeichnung

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y$$

ein. Wie bisher nennen wir diejenigen Werte des Parameters λ , für die das gestellte homogene Problem nicht nur die Nulllösung besitzt, *Eigenwerte* und die zugehörigen nicht identisch verschwindenden Lösungen *Eigenfunktionen*. Sie sind offenbar bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Es ist leicht zu sehen, daß zu jedem Eigenwert nur eine Eigenfunktion gehören kann. Denn angenommen, zu einem Wert von λ würden zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (1) existieren, die den Randbedingungen (2) genügen. Dann würde auch das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) den Randbedingungen (2) genügen. Dies ist aber nicht möglich, da man eine Lösung der Differentialgleichung (1) durch Anfangswerte $y(a)$ und $y'(a)$ bestimmen kann, die der ersten Randbedingung (2) nicht genügen. Mit Hilfe von elementaren Umformungen, wie wir sie in [III/2, 105, 146, 158] mehrfach angewandt haben, läßt sich zeigen, daß zwei Eigenfunktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, zueinander ortho-

gonal mit dem Gewicht $r(x)$ sind, d. h. der Beziehung

$$\int_a^b r(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0$$

genügen.

Wir führen jetzt eine zu dem Operator L gehörige Funktion ein, die der in [IV/1, 1] betrachteten statischen Ausbiegung einer Saite unter der Einwirkung einer Einzelkraft entspricht. Dort spielte der Operator y'' die Rolle des Operators L . Um auf naturgemäße Weise die Eigenschaften der fraglichen Funktion festzulegen, betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y = -f(x) \quad (3)$$

mit einer Funktion $f(x)$, die im ganzen Intervall $[a, b]$ außer in einem kleinen Intervall $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ gleich 0 sei, wobei ξ ein im Innern von $[a, b]$ liegender fester Punkt ist; ferner sei die Bedingung

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x) dx = 1 \quad (4)$$

erfüllt. Strebt ε gegen 0, so erhalten wir das Analogon zu einer im Punkt $x = \xi$ angreifenden Einzelkraft. Unter diesen Annahmen über $f(x)$ betrachten wir eine Lösung $y_\varepsilon(x)$ der Differentialgleichung (1), welche den Randbedingungen (2) genügt; dabei nehmen wir an, daß eine solche Lösung existiert. Integrieren wir beide Seiten der Differentialgleichung (3) über x und berücksichtigen wir (4), so erhalten wir

$$p(x) y'_\varepsilon(x) \Big|_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x) y_\varepsilon(x) dx = -1,$$

und unter der Voraussetzung, daß das Integral für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet, ergibt sich für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$y'(\xi+0) - y'(\xi-0) = \frac{1}{p(\xi)},$$

d. h., die Ableitung $y'(x)$ unserer Lösung muß im Punkt $x = \xi$ eine Unstetigkeitsstelle erster Art haben und dabei einen Sprung der Größe $-\frac{1}{p(\xi)}$ machen. Diese Lösung

hängt natürlich auch davon ab, welchen Punkt des Intervalls $[a, b]$ wir als Punkt ξ wählen, so daß sie eine Funktion der beiden Veränderlichen x und ξ ist. Wir bezeichnen sie im folgenden mit $G(x, \xi)$ und nennen sie die Greensche Funktion des Operators L mit den Randbedingungen (2). Diese Überlegungen führen zu einer strengen Definition der Greenschen Funktion: *Unter einer Greenschen Funktion des Operators L mit den Randbedingungen (2) wird eine Funktion $G(x, \xi)$ verstanden, welche folgenden Bedingungen genügt: 1. Sie ist in dem Quadrat k_0 , das durch die Ungleichungen $a \leq x, \xi \leq b$ definiert ist, definiert und stetig; 2. als Funktion der Veränderlichen x besitzt sie für $a \leq x < \xi$ und $\xi < x \leq b$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und erfüllt die homogene Differentialgleichung $L(y) = 0$; 3. als Funktion von x erfüllt sie die Randbedingungen (2); 4. auf der Diagonalen des Quadrates k_0 , d. h. für $x = \xi$, hat ihre Ableitung nach dem Argument x , die wir mit $G'(x, \xi)$ bezeichnen, eine Unstetigkeit erster Art, wobei die beiden Bedingungen*

$$\begin{aligned} G'(\xi+0, \xi) - G'(\xi-0, \xi) &= -\frac{1}{p(\xi)}, \\ G'(\xi, \xi+0) - G'(\xi, \xi-0) &= \frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (5)$$

erfüllt sind. Die Bedingungen (5) bedeuten folgendes: Bei Annäherung an einen beliebigen Punkt $x = \xi$ der angegebenen Diagonalen soll sowohl von oben, d. h. von dem Gebiet $\xi > x$ her, als auch von unten, d. h. von dem Gebiet $\xi < x$ her, die Ableitung $G'(x, \xi)$ bestimmte Grenzwerte annehmen, und die Differenz dieser Werte soll gleich $\frac{1}{p(\xi)}$ sein. In jedem dieser beiden Gebiete läßt sich die zweite Ableitung nach dem ersten Argument wegen $L(G) = 0$ durch

$$p(x) G''(x, \xi) = -p'(x) G'(x, \xi) + q(x) G(x, \xi)$$

ausdrücken; folglich besitzt auch diese zweite Ableitung bei Annäherung an einen Punkt der Diagonalen von der einen oder der anderen Seite her bestimmte Grenzwerte.

Jetzt beweisen wir, daß genau eine Greensche Funktion existiert, die allen angegebenen Bedingungen genügt. Wir setzen hierbei voraus, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, d. h. daß die Gleichung $L(y) = 0$ keine von der Nulllösung verschiedene Lösung besitzt, die den Bedingungen (2) genügt. Später werden wir sehen, wie man die Definition der Greenschen Funktion abändern muß, wenn $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist. Zunächst ermitteln wir eine Lösung $y_1(x)$ der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ indem wir als Anfangswerte $y_1(a)$ und $y_1'(a)$ beliebige Zahlen wählen, die lediglich der ersten Bedingung (2) genügen. Diese Lösung $y_1(x)$ und allgemein jede Lösung $c_1 y_1(x)$ mit einer willkürlichen Konstanten c_1 erfüllt die erste Randbedingung. Es ist leicht zu sehen, daß dies auch alle Lösungen sind, die dieser Bedingung genügen. Denn erfüllt eine Lösung $y(x)$ diese Bedingung, so haben wir für α_1 und α_2 die beiden homogenen Gleichungen

$$\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0, \quad \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0,$$

und da wir natürlich annehmen, daß wenigstens eine dieser Zahlen von 0 verschieden ist, muß die Determinante des Gleichungssystems gleich 0 sein. Demnach verschwindet die Wronskische Determinante der Lösungen $y(x)$ und $y_1(x)$ für $x = a$, die beiden Lösungen $y(x)$ und $y_1(x)$ sind also linear abhängig, d. h., es gilt tatsächlich $y(x) = c y_1(x)$ [II, 25].

Ebenso mögen $c_2 y_2(x)$ die Lösungen der Differentialgleichung $L(y) = 0$ sein, die der zweiten Bedingung (2) genügen, wobei c_2 eine willkürliche Konstante ist. Auf Grund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind die beiden Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ erklärt und linear unabhängig. Denn wären sie linear abhängig, so würde $y_1(x)$ die beiden Randbedingungen (2) erfüllen, und $\lambda = 0$ wäre ein Eigenwert, was unserer Voraussetzung widerspricht. Für $x \leq \xi$ muß die Funktion $G(x, \xi)$ die Gestalt $c_1 y_1(x)$ und für $x \geq \xi$ die Gestalt $c_2 y_2(x)$ besitzen. Wir haben noch die Konstanten c_1 und c_2 so zu wählen, daß die Funktion für $x = \xi$ stetig ist und ihre Ableitung den angegebenen Sprung besitzt. Dies führt auf die beiden Gleichungen

$$c_1 y_1(\xi) - c_2 y_2(\xi) = 0, \quad c_1 y_1'(\xi) - c_2 y_2'(\xi) = \frac{c}{p(\xi)} \quad (6)$$

zur Bestimmung von c_1 und c_2 . Die Determinante $y_2(\xi) y_1'(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)$ dieses Systems ist von 0 verschieden, da unsere Lösungen linear unabhängig sind; folglich erhalten wir für die Konstanten c_1 und c_2 wohlbestimmte Werte. Die Wronskische Determinante unserer beiden Lösungen lautet, wie man leicht sieht (vgl. [II, 25]),

$$y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = \frac{c}{p(x)},$$

wobei c eine bestimmte, von 0 verschiedene Konstante ist. Fügen wir etwa zur Lösung $y_1(x)$ einen konstanten Faktor hinzu, so können wir erreichen, daß unsere Lösungen die Beziehung

$$p(x) [y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)] = 1$$

erfüllen.

Aus dieser Beziehung geht unmittelbar hervor, daß das System (6) die Lösung $c_1 = y_2(\xi)$ und $c_2 = y_1(\xi)$ besitzt; somit lautet die Greensche Funktion

$$G(x, \xi) = \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) & (x \leq \xi) , \\ y_2(x) y_1(\xi) & (x \geq \xi) . \end{cases} \quad (7)$$

Man kann leicht verifizieren, daß sie allen vier Bedingungen genügt. Ihre Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus den angestellten Überlegungen.

75. Überführung in eine Integralgleichung. Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y = -f(x) , \quad (8)$$

in der $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ vorgegebene stetige Funktion ist. Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (8), die den Randbedingungen (2) genügt. Es gibt nur eine solche Lösung; denn wenn es zwei gäbe, so würde ihre Differenz die homogene Differentialgleichung $L(y) = 0$ und die Randbedingungen (2) erfüllen, d. h., $\lambda = 0$ wäre ein Eigenwert. Wir werden zeigen, daß die eindeutige Lösung der Differentialgleichung (8), die den Randbedingungen (2) genügt, durch

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (9)$$

dargestellt wird. Das Analogon zu dieser Formel in [IV/1, 1] hatte eine einfache mechanische Bedeutung: Wenn wir die statische Ausbiegung für eine Einzelkraft kennen, können wir durch Integration auch die statische Ausbiegung für eine stetig verteilte Kraft berechnen.

Wir kommen nun zum Beweis, daß die durch (9) definierte Funktion im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung hat und die Differentialgleichung (8) und die Randbedingungen (2) erfüllt. Im Hinblick auf die Unstetigkeit der Ableitung der Greenschen Funktion zerlegen wir das Integrationsintervall in zwei Teilintervalle:

$$y = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi .$$

Durch Differentiation nach x erhalten wir

$$y' = \int_a^x G'(x, \xi) f(\xi) d\xi + G(x, x-0) f(x) + \int_x^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi - G(x, x+0) f(x)$$

oder wegen der Stetigkeit der Greenschen Funktion, d. h. wegen der Bedingung $G(x, x+0) = G(x, x-0)$,

$$y' = \int_a^x G'(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi . \quad (10)$$

Da $G(x, \xi)$ den Randbedingungen (2) genügt, folgt aus (9) und (10) unmittelbar, daß auch die Funktion (9) diesen Randbedingungen genügt. Um nachzuweisen,

daß die Differentialgleichung (8) erfüllt ist, differenzieren wir y' noch einmal nach x . Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir

$$y'' = \int_a^b G''(x, \xi) f(\xi) d\xi + [G'(x, x-0) - G'(x, x+0)] f(x),$$

und aus (5) folgt

$$y'' = \int_a^b G''(x, \xi) f(\xi) d\xi - \frac{f(x)}{p(x)}. \quad (11)$$

Setzen wir in die linke Seite der Differentialgleichung (8) für y , y' und y'' die Ausdrücke (9), (10) bzw. (11) ein, so erhalten wir

$$\int_a^b L(G) f(\xi) d\xi - f(x) = -f(x),$$

die Differentialgleichung (8) ist demnach erfüllt; denn die Funktion $G(x, \xi)$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$. Wir erwähnen noch: Aus den angegebenen Formeln folgt unmittelbar, daß die durch (9) definierte Funktion y im ganzen Intervall stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Wir gelangen somit zu dem folgenden Ergebnis. *Ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert der Differentialgleichung (8), so hat diese Gleichung für jede vorgegebene, in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ eine eindeutige Lösung, die den Randbedingungen (2) genügt, und diese Lösung wird durch (9) dargestellt. Man kann dies auch anders formulieren: Für jede vorgegebene stetige Funktion $f(x)$ hat die Funktion (9) stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und erfüllt die Differentialgleichung (8) sowie die Randbedingungen (2).*

Bemerkung. Ist $y(x)$ eine beliebige Funktion, die im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und den Randbedingungen (2) genügt, so können wir, wenn wir diese Funktion in die linke Seite der Differentialgleichung (8) einsetzen, die zugehörige stetige Funktion $f(x)$ konstruieren, und dann drückt umgekehrt die Formel (9), wie oben gezeigt, die Funktion $y(x)$ durch die Funktion $f(x)$ aus.

Die Formeln (8) und (9) drücken damit eine eindeutige Zuordnung zwischen den Funktionen zweier Klassen aus. Zur ersten Klasse gehören die Funktionen $y(x)$, die im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen und den Bedingungen (2) genügen, zur zweiten Klasse gehören die Funktionen $f(x)$, die im Intervall $[a, b]$ stetig sind. Der Übergang von $y(x)$ zu $f(x)$ geht nach Formel (8), der Übergang von $f(x)$ zu $y(x)$ nach Formel (9) vor sich.

Aus unseren Ausführungen geht unmittelbar hervor, daß es möglich ist, das zu Anfang des vorhergehenden Abschnittes formulierte Randwertproblem in eine Integralgleichung überzuführen. Denn schreiben wir die Differentialgleichung (1) in der Form

$$L(y) = -\lambda r(x) y,$$

so erhalten wir aus unseren Resultaten, daß diese Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (2) der Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi \quad (12)$$

gleichwertig ist. Ebenso ist die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda r(x) - q(x)] y = F(x) \quad (12_1)$$

mit den Randbedingungen (2) der Integralgleichung

$$y(x) = F_1(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi \quad (12_2)$$

mit

$$F_1(x) = - \int_a^b G(x, \xi) F(\xi) d\xi$$

gleichwertig, wobei wir in beiden Integralgleichungen eine stetige Lösung $y(x)$ zu suchen haben.

76. Die Symmetrie der Greenschen Funktion. Durch (7) ist die Greensche Funktion nicht nur für $a < x < b$ bestimmt, sondern auch in den Endpunkten $x=a$ und $x=b$, d. h. im ganzen abgeschlossenen Quadrat k_0 ($a \leq x, \xi \leq b$). Aus der Darstellung (7) folgt weiterhin, daß die Greensche Funktion im ganzen Quadrat k_0 symmetrisch ist:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (13)$$

Für die Symmetrie der Greenschen Funktion wollen wir noch einen anderen Beweis angeben, der sich auch auf allgemeinere Fälle übertragen läßt. Offenbar gilt die Identität

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} [p(x) (uv' - vu')] . \quad (14)$$

In ihr sind $u(x)$ und $v(x)$ zwei beliebige Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Nun setzen wir in (14) $u=G(x, \xi_1)$ und $v=G(x, \xi_2)$ ein, wobei wir beispielsweise $\xi_1 < \xi_2$ annehmen. Integrieren wir über die Intervalle $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ und $[\xi_2, b]$ und beachten, daß die Greensche Funktion der homogenen Differentialgleichung $L(y)=0$ genügt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} [p(x) (G(x, \xi_1) G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2) G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=\xi_1} &= 0, \\ [p(x) (G(x, \xi_1) G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2) G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} &= 0, \\ [p(x) (G(x, \xi_1) G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2) G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_2}^{x=b} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Beziehungen ergibt sich wegen der Stetigkeit der Greenschen Funktion und der Unstetigkeit ihrer ersten Ableitung

$$G(\xi_1, \xi_2) - G(\xi_2, \xi_1) = [p(x) (G(x, \xi_1) G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2) G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=b}. \quad (15)$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die auf der rechten Seite stehende Differenz für $x=a$ und $x=b$ verschwindet. Denn die Greensche Funktion erfüllt die erste Randbedingung (2), d. h., es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_1 G(a, \xi_1) + \alpha_2 G'(a, \xi_1) &= 0, \\ \alpha_1 G(a, \xi_2) + \alpha_2 G'(a, \xi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Da wir natürlich annehmen, daß die vorgegebenen Konstanten α_1 und α_2 nicht beide zugleich verschwinden, muß die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems gleich 0 sein, d. h., die obige Differenz verschwindet tatsächlich für $x=a$. Entsprechend läßt sich beweisen, daß sie auch für $x=b$ verschwindet. Damit folgt aus der Gleichung (15) gerade die Symmetrie der Greenschen Funktion.

Man kann auch an Stelle von (2) allgemeinere Randbedingungen zugrunde legen, bei denen die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen im Anfangs- und Endpunkt

des Intervalls gleichzeitig in beiden Bedingungen vorkommen:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0,$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Alle unsere Überlegungen mit Ausnahme des Beweises für die Symmetrie der Greenschen Funktionen bleiben richtig. Dafür, daß der Beweis für die Symmetrie der Greenschen Funktion ebenfalls seine Gültigkeit behält, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung

$$p(b) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = p(a) \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}$$

erfüllt ist. Auf den Beweis dieser Aussage wollen wir nicht eingehen. Ferner läßt sich leicht unmittelbar nachprüfen, daß die Greensche Funktion bei periodischen Randbedingungen $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ symmetrisch bleibt, wenn $p(a) = p(b)$ gilt, d. h., wenn auch die Funktion $p(x)$ periodisch ist. Wir bemerken: Sind auch die übrigen Koeffizienten $q(x)$ und $r(x)$ periodisch, so führt das Randwertproblem mit den angegebenen periodischen Randbedingungen zur Ermittlung derjenigen Werte des Parameters λ , für welche die Differentialgleichung (1) eine periodische Lösung besitzt.

77. Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems. Da wir unser Randwertproblem in eine Integralgleichung übergeführt haben, können wir die Resultate der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen anwenden und dadurch eine Reihe von Sätzen über die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems gewinnen. Wir betrachten zunächst den Fall $r(x) \equiv 1$, in dem die Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + (\lambda - q(x)) y = 0 \quad (16)$$

hat, wobei wir die Randbedingungen so annehmen, daß die Greensche Funktion symmetrisch ist. Die Integralgleichung (12) hat einen symmetrischen Kern. Sie besitzt reelle Eigenwerte, und ihre Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind zueinander orthogonal. Im vorliegenden Fall gehört, wie wir in [74] gesehen haben, zu jedem Eigenwert nur eine Eigenfunktion. Dies haben wir für Randbedingungen der Gestalt (2) bewiesen. Im Fall periodischer Randbedingungen können zu einem Eigenwert zwei Eigenfunktionen gehören, aber nicht mehr, da die Differentialgleichung (16) nur zwei linear unabhängige Lösungen besitzt. Wir beweisen noch, daß der Kern $G(x, \xi)$ von (16) abgeschlossen ist, d. h., daß keine stetige Funktion $f(x)$ existiert, die nicht identisch verschwindet und zum Kern orthogonal ist. Zum Beweis nehmen wir an, es gäbe eine solche Funktion $f(x)$, es sei also

$$\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0.$$

Dann muß die Funktion (9) einerseits identisch verschwinden und andererseits, wie oben bewiesen, der inhomogenen Differentialgleichung (8) genügen, was aber unmöglich ist. Aus der Abgeschlossenheit des Kerns folgt bekanntlich [IV/1, 42] die Existenz unendlich vieler Eigenwerte. Es seien λ_n ($n = 1, 2, \dots$) die Eigenwerte der Differentialgleichung (16), d. h. unseres Randwertproblems, und $\varphi_n(x)$ die zugehörigen Eigenfunktionen, die ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Wir setzen

voraus, daß die Funktion $f(x)$ den Randbedingungen genügt und stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Setzen wir $L(f) = -h(x)$, so erhalten wir eine quellenmäßige Darstellung der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Folglich läßt sich jede Funktion, die den Randbedingungen genügt und im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, in diesem Intervall in eine regulär konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ entwickeln [IV/1, 36]. Auch der folgende Satz läßt sich leicht beweisen.

Satz. Konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad (17)$$

einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig, so ist ihre Summe gleich $f(x)$.

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, die Summe $f_1(x)$ der Reihe (17) wäre in $[a, b]$ nicht mit $f(x)$ identisch. Dann wäre die Differenz $f_1(x) - f(x)$, die nicht identisch gleich 0 ist, zu allen Funktionen $\varphi_n(x)$ und damit auch zum Kern orthogonal, was der bewiesenen Abgeschlossenheit des Kernes widerspricht. Diesen Satz werden wir im folgenden benutzen.

Man kann zeigen, daß nicht nur der Kern $G(x, \xi)$ abgeschlossen ist, sondern daß auch die Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ ein vollständiges System bilden. Hieraus folgt ebenfalls der bewiesene Satz.

Später, bei der Untersuchung des mehrdimensionalen Falles, werden wir beweisen, daß für eine beliebige stetige Funktion die Vollständigkeitsrelation gilt. Dieser Beweis ist auch für den eindimensionalen Fall gültig.

Jetzt betrachten wir den Fall, daß $r(x)$ von 1 verschieden ist, und nehmen diese Funktion als positiv an. Unter Benutzung der Resultate aus [IV/1, 44] sehen wir, daß in diesem Fall das Randwertproblem für die Differentialgleichung (1) zu einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern führt. Insbesondere läßt sich jede Funktion, die den Randbedingungen genügt und im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, in eine regulär konvergierende Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (18)$$

nach den Eigenfunktionen des Problems entwickeln, deren Koeffizienten durch

$$c_n = \int_a^b r(x) f(x) \varphi_n(x) dx \quad (19)$$

bestimmt sind. Zum Beweis dieser Behauptung bemerken wir, daß nach [75]

$$f(x) = - \int_a^b G(x, \xi) L[f(\xi)] d\xi$$

gilt.

Offenbar können wir $L[f(\xi)] = -\sqrt{r(\xi)} h(\xi)$ setzen, wobei wegen $r(\xi) > 0$ die Funktion $h(\xi)$ im Intervall $[a, b]$ stetig ist. Somit läßt sich die Funktion $\sqrt{r(x)} f(x)$

durch den Kern einer symmetrischen Integralgleichung quellenmäßig darstellen,

$$\sqrt{r(x)} f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \sqrt{r(\xi)} h(\xi) d\xi, \quad (20)$$

und die Überlegungen aus [IV/1, 44] liefern sofort den soeben formulierten Entwicklungssatz. Genau wie oben können wir die Abgeschlossenheit des Kerns und damit auch die Existenz unendlich vieler Eigenwerte beweisen. Wiederholen wir die Überlegungen aus [74] für den Fall, daß $f(x)$ eine stetige erste Ableitung und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, und beachten wir, daß der Satz 2 aus [IV/1, 31] auch bei der quellenmäßigen Darstellung einer Funktion mit Hilfe einer stückweise stetigen Funktion $f(x)$ richtig ist, so können wir uns davon überzeugen, daß der aufgestellte Entwicklungssatz auch richtig ist, wenn die Funktion $f(x)$, die den Randbedingungen genügt, eine stetige erste Ableitung und eine stückweise stetige zweite Ableitung (mit Unstetigkeitspunkten erster Art) besitzt. Im folgenden gehen wir auf die Fälle ein, in denen man bei der Formulierung des Entwicklungssatzes auch eine stückweise stetige erste Ableitung zulassen kann.

78. Über das Vorzeichen der Eigenwerte. Wir untersuchen jetzt die Vorzeichen der Eigenwerte und setzen daher zur Vereinfachung der folgenden Formeln $r(x) \equiv 1$ voraus. Alle Überlegungen lassen sich auch leicht auf den allgemeinen Fall übertragen. Zunächst stellen wir eine Beziehung auf, welche die Eigenwerte durch die zugehörigen Eigenfunktionen ausdrückt. Wie oben seien λ_n die Eigenwerte und $\varphi_n(x)$ die Eigenfunktionen, die ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Dann gilt

$$L(\varphi_n) = -\lambda_n \varphi_n(x).$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Identität mit $\varphi_n(x)$, integrieren und berücksichtigen, daß die Eigenfunktionen normiert sind, so erhalten wir

$$\lambda_n = - \int_a^b L(\varphi_n) \varphi_n(x) dx = - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} (p(x) \varphi_n'(x)) - q(x) \varphi_n(x) \right] \varphi_n(x) dx,$$

woraus durch partielle Integration des ersten Summanden die Beziehung

$$\lambda_n = \int_a^b [p(x) \varphi_n'^2(x) + q(x) \varphi_n^2(x)] dx - [p(x) \varphi_n(x) \varphi_n'(x)]_{x=a}^{x=b} \quad (21)$$

hervorgeht. Wir setzen voraus, daß der integralfreie Ausdruck der rechten Seite verschwindet. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn die Randbedingungen die Gestalt $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$ haben. Dann läßt sich die Beziehung (21) in der Form

$$\lambda_n = \int_a^b [p(x) \varphi_n'^2(x) + q(x) \varphi_n^2(x)] dx \quad (22)$$

schreiben.

Nun nehmen wir $p(x) > 0$ an. Setzen wir außerdem $q(x) \geq 0$ im Intervall $[a, b]$ voraus, so folgt aus (22) unmittelbar, daß alle Eigenwerte positiv sind. Jetzt setzen wir voraus, daß $q(x)$ eine beliebige stetige Funktion darstellt und m ihr kleinster Wert im Intervall ist, d. h., daß $q(x) \geq m$ in $[a, b]$ gilt. Dann erhalten wir aus (22)

$$\lambda_n \geq \int_a^b p(x) \varphi_n'^2(x) dx + m \geq m.$$

Somit kann es im vorliegenden Fall nur endlich viele negative Eigenwerte geben. Wir setzen schließlich voraus, daß die Randbedingungen die Gestalt

$$y'(a) - h_1 y(a) = 0, \quad y'(b) + h_2 y(b) = 0 \quad (23)$$

haben, wobei h_1 und h_2 positive Konstanten sind. Der integralfreie Ausdruck von (21) ist dann positiv, und wir können uns wie oben davon überzeugen, daß für $q(x) \equiv 0$ alle Eigenwerte positiv sind.

Sind alle Eigenwerte positiv oder gibt es nur endlich viele negative Eigenwerte, so kann man den Kern nach dem Mercerschen Satz in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\lambda_n} \quad (24)$$

entwickeln. Diese Beziehung gibt uns eine einfache Möglichkeit, den Entwicklungssatz aus [77] auf eine allgemeinere Klasse von Funktionen zu erweitern. Wir setzen dazu voraus, daß $f(x)$ im ganzen Intervall stetig ist und eine stetige erste Ableitung besitzt, außer im Punkt $x=c$, wo eine Unstetigkeit erster Art vorliegen möge,

$$f'(c+0) - f'(c-0) = k.$$

Ferner habe $f(x)$ eine stückweise stetige zweite Ableitung. Schließlich setzen wir wie immer voraus, daß $f(x)$ die Randbedingungen erfüllt. Wir bilden die Summe

$$f(x) + kp(c) G(x, c),$$

die im ganzen Intervall ohne Ausnahme eine stetige Ableitung besitzt. Diese Summe läßt sich auf Grund des Entwicklungssatzes nach den Eigenfunktionen entwickeln. Da sich wegen (24) der Summand $G(x, c)$ ebenfalls nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt, kann man folglich auch die Funktion $f(x)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen entwickeln. Diese Überlegungen lassen sich natürlich auch anwenden, wenn die Ableitung $f'(x)$ im Intervall $[a, b]$ endlich viele Unstetigkeiten erster Art besitzt. Sie sind den Überlegungen ähnlich, die wir früher bei der Verbesserung der Konvergenz von Fourierreihen durchgeführt haben [II, 171].

79. Beispiele. 1. Zunächst betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. In diesem Fall ist $L(y) = y''$, und die Greensche Funktion lautet

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & (x \leq \xi), \\ (1-x)\xi & (\xi \leq x). \end{cases}$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen lassen sich geschlossen darstellen,

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

und es gilt der Entwicklungssatz nach diesen Eigenfunktionen für alle Funktionen, die den im vorigen Abschnitt angegebenen Bedingungen genügen. Man kann die Voraussetzungen, unter denen dieser Entwicklungssatz gilt, noch wesentlich abschwächen, worauf wir aber nicht eingehen wollen.

2. Lösen wir dieselbe Differentialgleichung für die Randbedingungen $y(0) = y'(1) = 0$, so erhalten wir

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x & (x \leq \xi), \\ \xi & (\xi \leq x), \end{cases}$$

und die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind

$$\lambda_n = (2n+1) \frac{\pi^2}{4}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} x.$$

3. Wir untersuchen schließlich dieselbe Differentialgleichung mit den Randbedingungen $y(0)=0$, $y(1)+hy'(1)=0$.

Wir wollen die zugehörige Greensche Funktion konstruieren. Zu diesem Zweck bilden wir zwei Lösungen der Differentialgleichung $y''=0$, von denen die eine der ersten Randbedingung und die andere der zweiten Randbedingung genügt: $y_1(x)=x$, $y_2(x)=(1+h)-x$. Gehen wir wie in [74] vor, so erhalten wir für die Greensche Funktion den Ausdruck

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1+h-\xi}{1+h} x & (x \leq \xi), \\ \frac{1+h-x}{1+h} \xi & (\xi \leq x). \end{cases}$$

Alle Eigenwerte sind positiv; setzen wir $\lambda = \mu^2$, so können wir uns ohne Mühe davon überzeugen, daß sich die zu den Eigenwerten gehörigen Werte von μ aus der Gleichung $\tan \mu + h\mu = 0$ bestimmen lassen. Die Eigenfunktionen sind $c_n \sin \mu_n x$, wobei die Konstanten c_n so bestimmt werden müssen, daß diese Funktionen normiert sind.

4. Bei der Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Membran, die am Rand eingespannt ist, wurden wir auf das folgende Randwertproblem geführt. Gesucht sind diejenigen Werte des Parameters λ , für welche die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (25)$$

eine Lösung hat, die im Endpunkt $x=0$ endlich und für $x=l$ gleich 0 ist. Der Buchstabe n bezeichnet eine natürliche Zahl oder die 0. Dieses Randwertproblem unterscheidet sich von den bis jetzt betrachteten dadurch, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung im Endpunkt $x=0$ einen Pol haben. An Stelle einer bestimmten Randbedingung in diesem Punkt wird dann nur gefordert, daß die Lösung in der Umgebung von $x=0$ beschränkt ist. Diese Forderung führt zu einem bestimmten endlichen Wert der Lösung von (25) im Punkt $x=0$.

Wir sind schon des öfteren Randwertproblemen dieser Art begegnet. Multiplizieren wir beide Seiten der Differentialgleichung (25) mit x , so können wir die Differentialgleichung in der üblichen Form

$$\frac{d}{dx} (xy') + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0 \quad (26)$$

schreiben; die vorgegebene Zahl n setzen wir als positiv voraus.

Die Definition der Greenschen Funktion bleibt die gleiche wie früher, nur daß wir an Stelle einer Randbedingung im Endpunkt $x=0$ die Endlichkeit der Greenschen Funktion für $x=0$ fordern. Die Differentialgleichung $L(y)=0$ ist eine Eulersche Differentialgleichung [II, 42] und hat die linear unabhängigen Lösungen x^n und x^{-n} .

Unter Berücksichtigung der Endlichkeitsbedingung für den Endpunkt $x=0$ müssen wir im Intervall $0 \leq x \leq \xi$ für die Greensche Funktion den Ausdruck $c_1 x^n$ nehmen, und im Intervall $\xi \leq x \leq 1$ müssen wir eine Linearkombination der angegebenen Lösungen, d. h. einen Ausdruck der Form $c_2 (x^n - x^{-n})$ bilden, der für $x=1$ verschwindet. Die Konstanten c_1 und c_2 lassen sich wie bisher aus der Stetigkeit der Greenschen Funktion und dem Sprung ihrer ersten Ableitung für $x=\xi$ bestimmen. Auf diese Weise ergibt sich

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^n - (x\xi)^n \right] & (x \leq \xi), \\ \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^n - (x\xi)^n \right] & (\xi \leq x). \end{cases}$$

Genau wie früher hat die inhomogene Differentialgleichung $L(y) = -f(x)$ eine eindeutige Lösung, welche die Randbedingungen erfüllt; diese Lösung läßt sich durch

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

bestimmen. Analoge Überlegungen wie in [78] zeigen uns, daß alle Eigenwerte positiv sind. Setzen wir $\lambda = \mu^2$, so erhalten wir zur Bestimmung der Eigenwerte die transzendente Gleichung $J_n(\mu) = 0$, und die Eigenfunktionen sind $\varphi_n(x) = c_n J_n(\mu_n x)$. Im Fall $n=0$ hat die Differentialgleichung $L(y) = 0$ die linear unabhängigen Lösungen $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = \lg x$, und die Greensche Funktion ist

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\lg \xi & (x \leq \xi), \\ -\lg x & (\xi \leq x). \end{cases} \quad (27)$$

Wir bemerken, daß dann die Gleichung (9)

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi = -\lg x \int_0^x f(\xi) d\xi - \int_x^1 f(\xi) \lg \xi d\xi$$

ergibt, und es läßt sich unmittelbar nachprüfen, daß diese Funktion der Differentialgleichung $L(y) = -f(x)$ und den Randbedingungen genügt. Die Differentialgleichung (26) zeigt, daß im vorliegenden Fall $r(x) = x$ ist. Bei der Überführung unseres Randwertproblems in eine Integralgleichung erhalten wir so den Kern $G(x, \xi) \sqrt{\xi x}$, der im ganzen Quadrat einschließlich des Eckpunktes $x = \xi = 0$ stetig ist.

Die Eigenfunktionen dieser Integralgleichung sind die Funktionen $\varphi_n(x) = c_n \sqrt{x} J_0(\mu_n x)$, und wir erhalten die absolut und gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung

$$G(x, \xi) \sqrt{\xi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Nach Division durch $\sqrt{\xi x}$ folgt hieraus

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 J_0(\mu_n x) J_0(\mu_n \xi)}{\lambda_n}.$$

Von dieser Reihe können wir nur aussagen, daß sie im Intervall $[\varepsilon, 1]$ gleichmäßig konvergiert, wobei ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl bezeichnet. Die Konstanten c_n lassen sich auf Grund der Normierungsbedingung durch

$$c_n^2 = \frac{2}{J_1(\mu_n)}$$

ausdrücken [III/2, 145]. Wir bemerken hierzu, daß die Funktion $G(x, \xi)$, die durch (27) bestimmt ist, gegen ∞ strebt, wenn der Punkt (x, ξ) gegen die Ecke $(0, 0)$ des Quadrates strebt. Außerdem haben wir hier noch die weitere Besonderheit, daß die Funktion $r(x) = x$ im Endpunkt $x = 0$ verschwindet.

In Teil V werden wir uns ausführlich mit Randwertproblemen von Gleichungen beschäftigen, bei denen die Endpunkte des Intervalls singuläre Punkte der Differentialgleichung sind oder bei denen unendliche Intervalle zugrunde liegen.

80. Die verallgemeinerte Greensche Funktion. Jetzt wollen wir uns mit dem Fall beschäftigen, daß die Differentialgleichung (1) mit den Randbedingungen (2) den Eigenwert $\lambda = 0$ hat. Die homogene Differentialgleichung $L(y) = 0$ besitzt also eine Lösung $y = \varphi_0(x)$, die den Randbedingungen (2) genügt. Diese Lösung können wir als normiert annehmen, was wir im folgenden tun wollen. Es gelingt uns jetzt nicht, eine Greensche Funktion zu konstruieren, die alle vier in [73] angegebenen Bedingungen erfüllt, weshalb wir die Definition der Greenschen Funktion ein wenig abändern. Wir behalten diejenigen Bedingungen bei, welche die Stetigkeit der

Funktion, die Unstetigkeit ihrer ersten Ableitung für $x=\xi$ sowie das Erfülltsein der Randbedingungen betreffen, fordern aber, daß die Funktion $G(x, \xi)$ in jedem Intervall $[a, \xi]$ und $[\xi, b]$ nicht die homogene Differentialgleichung $L(y)=0$, sondern die inhomogene Differentialgleichung

$$L[G(x, \xi)] = \varphi_0(\xi) \varphi_0(x) \quad (28)$$

erfüllt. Ist $y(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, die den Randbedingungen genügt, so erfüllt, da $\varphi_0(x)$ der homogenen Differentialgleichung und den Randbedingungen genügt, die Summe $y(x) + c\varphi_0(x)$ mit einer willkürlichen Konstanten c ebenfalls die Differentialgleichung (28) und die Randbedingungen. Zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten c führen wir noch eine neue zusätzliche Bedingung ein: Die Funktion $G(x, \xi)$ soll zur Funktion $\varphi_0(x)$ orthogonal sein,

$$\int_a^b [G(x, \xi)] \varphi_0(x) dx = 0. \quad (29)$$

Das Auftreten einer von 0 verschiedenen rechten Seite in der Differentialgleichung (28) hat eine einfache physikalische Bedeutung. Ist $\lambda=0$ ein Eigenwert des Problems, so liegt bei der Frequenz 0 Resonanz vor, und es gelingt uns nicht, eine endliche statische Auslenkung unter der Einwirkung einer Einzelkraft zu erhalten. Um eine solche Auslenkung zu erhalten, müssen wir außer der Einzelkraft noch eine stetig verteilte Kraft hinzufügen, die durch die hinzugefügte rechte Seite in der Differentialgleichung (28) charakterisiert wird.

Die verallgemeinerte Greensche Funktion konstruieren wir analog wie in [74]. Es sei $\omega(x)$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(\omega) = \varphi_0(\xi) \varphi_0(x) \quad (30)$$

und $\varphi_1(x)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, die von $\varphi_0(x)$ linear unabhängig ist und die Bedingung

$$p(x) [\varphi_0(x) \varphi_1'(x) - \varphi_1(x) \varphi_0'(x)] = 1 \quad (31)$$

erfüllt.

Da das allgemeine Integral der inhomogenen Differentialgleichung die Summe aus der Lösung $\omega(x)$ und dem allgemeinen Integral der homogenen Differentialgleichung ist, müssen wir

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \omega(x) + c_1 \varphi_0(x) + c_2 \varphi_1(x) & (x \leq \xi), \\ G(x, \xi) &= \omega(x) + c_3 \varphi_1(x) + c_4 \varphi_0(x) & (x \geq \xi) \end{aligned} \quad (32)$$

setzen. Die Funktion $G(x, \xi)$ muß die Randbedingungen (2) erfüllen. Da $\varphi_0(x)$ diesen Bedingungen genügt, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \omega(a) + \alpha_2 \omega'(a) + c_2 [\alpha_1 \varphi_1(a) + \alpha_2 \varphi_1'(a)] &= 0, \\ \beta_1 \omega(b) + \beta_2 \omega'(b) + c_4 [\beta_1 \varphi_1(b) + \beta_2 \varphi_1'(b)] &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

aus denen sich c_2 und c_4 bestimmen lassen. Die Koeffizienten von c_2 und c_4 sind von 0 verschieden, da die Funktion $\varphi_1(x)$, die von $\varphi_0(x)$ linear unabhängig ist, keine der Bedingungen (2) erfüllen kann [74]. Die Forderungen der Stetigkeit im Punkt $x=\xi$ und der Unstetigkeit der Ableitung in diesem Punkt führen auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (c_1 - c_3) \varphi_0(\xi) + (c_2 - c_4) \varphi_1(\xi) &= 0, \\ (c_1 - c_3) \varphi_0'(\xi) + (c_2 - c_4) \varphi_1'(\xi) &= \frac{1}{p(\xi)}, \end{aligned}$$

die sich wegen (31) in

$$c_1 - c_3 = -\varphi_1(\xi), \quad c_2 - c_4 = \varphi_0(\xi) \quad (34)$$

überführen lassen.

Es bleibt noch die Bedingung (29) zu erfüllen. Die Konstanten c_2 und c_4 sind bereits durch (33) bestimmt. Die erste der Gleichungen (34) liefert $c_1 = c_3 - \varphi_1(\xi)$. Setzen wir diesen Ausdruck in die erste Gleichung (32) ein, so können wir c_3 aus der Bedingung (29) bestimmen, und c_1 ergibt sich aus der eben aufgeschriebenen Beziehung. Alle Konstanten sind damit bestimmt, aber wir haben noch nicht die zweite Bedingung (34) berücksichtigt. Wir werden sogleich nachprüfen, daß die durch (33) bestimmten Konstanten c_2 und c_4 die zweite Gleichung (34) erfüllen.

Zu diesem Zweck gehen wir von der Identität (14) aus:

$$\varphi_0(x) L(\omega) - \omega(x) L(\varphi_0) = \frac{d}{dx} [p(x) (\varphi_0 \omega' - \omega \varphi_0')] .$$

Wir integrieren beide Seiten dieser Identität über das Grundintervall $[a, b]$. Unter Berücksichtigung der Relation $L(\varphi_0) = 0$ und der Differentialgleichung (30) erhalten wir, da die Funktion $\varphi_0(x)$ normiert ist, die Beziehung

$$\varphi_0(\xi) = [p(x) (\varphi_0 \omega' - \omega \varphi_0')]_{x=a}^{x=b} . \quad (35)$$

Die zweite Gleichung (34), die wir verifizieren wollen, läßt sich wegen (33) in der Form

$$\frac{\beta_1 \omega(b) + \beta_2 \omega'(b)}{\beta_1 \varphi_1(b) + \beta_2 \varphi_1'(b)} - \frac{\alpha_1 \omega(a) + \alpha_2 \omega'(a)}{\alpha_1 \varphi_1(a) + \alpha_2 \varphi_1'(a)} = \varphi_0(\xi) \quad (36)$$

schreiben.

Die Funktion $\varphi_0(x)$ erfüllt die Randbedingungen

$$\alpha_1 \varphi_0(a) + \alpha_2 \varphi_0'(a) = 0, \quad \beta_1 \varphi_0(b) + \beta_2 \varphi_0'(b) = 0 . \quad (37)$$

Schreiben wir die Beziehung (31) für $x=a$ und $x=b$ auf, so können wir aus den erhaltenen Relationen und aus den Gleichungen (37) die Größen $\varphi_0(a)$, $\varphi_0'(a)$, $\varphi_0(b)$ und $\varphi_0'(b)$ bestimmen. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in die (bewiesene) Gleichung (35) ein, so gelangen wir zu der Gleichung (36). Wir führen die Rechnungen für die Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$, d. h. für $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ durch. In diesem Fall lautet die Gleichung (35)

$$\varphi_0(\xi) = p(a) \omega(a) \varphi_0'(a) - p(b) \omega(b) \varphi_0'(b) .$$

Die Beziehung (31) liefert für $x=a$ und $x=b$

$$p(a) \varphi_1(a) \varphi_0'(a) = p(b) \varphi_1(b) \varphi_0'(b) = -1 ,$$

d. h.

$$p(a) \varphi_0'(a) = -\frac{1}{\varphi_1(a)}, \quad p(b) \varphi_0'(b) = -\frac{1}{\varphi_1(b)} .$$

Setzen wir diese Werte in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\omega(b)}{\varphi_1(b)} - \frac{\omega(a)}{\varphi_1(a)} = \varphi_0(\xi) ,$$

die gerade mit der Gleichung (36) für $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ übereinstimmt.

Um die Symmetrie der verallgemeinerten Greenschen Funktion zu beweisen, bilden wir die beiden Gleichungen

$$L[G(x, \xi_1)] = \varphi_0(\xi_1) \varphi_0(x), \quad L[G(x, \xi_2)] = \varphi_0(\xi_2) \varphi_0(x) .$$

Wir multiplizieren die erste mit $G(x, \xi_2)$, die zweite mit $G(x, \xi_1)$, subtrahieren sie voneinander und integrieren über das Grundintervall. Unter Benutzung der Greenschen Formel, der Randbedingungen und der Bedingung (29) gelangen wir zu der Relation

$$[p(x) (G(x, \xi_2) G'(x, \xi_1) - G(x, \xi_1) G'(x, \xi_2))]_{x=\xi_1+0}^{x=\xi_2-0} + [\quad]_{x=\xi_2+0}^{x=\xi_1-0} = 0,$$

aus der sich wie früher gerade $G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)$ ergibt. Bei der Integration über das Grundintervall müssen wir dieses wie in [76] in drei Teilintervalle zerlegen.

Wir gehen nun zur Betrachtung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(y) = -f(x) \quad (38)$$

über, in der $f(x)$ eine vorgegebene stetige und zu $\varphi_0(x)$ orthogonale Funktion bezeichnet. Die Differentialgleichung (38) kann nur eine einzige Lösung haben, die den Randbedingungen genügt und zu $\varphi_0(x)$ orthogonal ist. Denn gäbe es zwei Lösungen, so müßte ihre Differenz die homogene Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllen, d. h., sie müßte die Form $c\varphi_0(x)$ haben und könnte nicht zu $\varphi_0(x)$ orthogonal sein. Jetzt zeigen wir, daß diese eindeutige zu $\varphi_0(x)$ orthogonale Lösung der Differentialgleichung (38) durch

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (39)$$

dargestellt wird. Zerlegen wir das Integrationsintervall in die Teilintervalle $[a, x]$ und $[x, b]$, so können wir wie in [75] zeigen, daß

$$L(y) = \int_a^b L[G(x, \xi)] f(\xi) d\xi - f(x)$$

gilt. Mit Hilfe der Beziehung (28) läßt sich dafür

$$L(y) = \varphi_0(x) \int_a^b \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - f(x)$$

schreiben. Hieraus geht aber unmittelbar die Differentialgleichung (38) hervor, da nach Voraussetzung $f(x)$ zu $\varphi_0(x)$ orthogonal ist. Ist somit $f(x)$ zu $\varphi_0(x)$ orthogonal, so besitzt die Differentialgleichung (38) eine eindeutige Lösung, welche die Randbedingungen (2) erfüllt und zu $\varphi_0(x)$ orthogonal ist; diese Lösung wird durch (39) dargestellt.

Ist $F(x)$ eine beliebige zu $\varphi_0(x)$ orthogonale Funktion, die den Randbedingungen genügt und stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, so können wir, wenn wir $f(x) = -L(F)$ setzen, $F(x)$ durch (39) ausdrücken. Für den Beweis dieser Behauptung genügt es, sich davon zu überzeugen, daß die konstruierte Funktion $f(x)$ zu $\varphi_0(x)$ orthogonal ist. Hierzu benutzen wir die Greensche Formel (14) für $u = \varphi_0(x)$ und $v = F(x)$. Berücksichtigen wir $L(\varphi_0) = 0$ und die Randbedingungen für $\varphi_0(x)$ und $f(x)$, so erhalten wir durch Integration der Greenschen Formel über das Grundintervall die Orthogonalität der Funktionen $\varphi_0(x)$ und $f(x)$. Wir bemerken noch, daß die Formel (39) mit einer beliebigen stetigen Funktion $f(x)$ eine zu $\varphi_0(x)$ orthogonale Funktion liefert, da der Kern $G(x, \xi)$ diese Eigenschaft besitzt.

Jetzt kehren wir zum Randwertproblem der Differentialgleichung

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y = -\lambda y \quad (40)$$

mit den Randbedingungen (2) zurück. Jede Eigenfunktion dieses Problems, die von $\varphi_0(x)$ verschieden ist, d. h., die zu einem von 0 verschiedenen Eigenwert gehört, muß zu $\varphi_0(x)$ orthogonal sein. Nach den vorhergehenden Ausführungen sehen wir, daß das aufgestellte Randwertproblem (mit Ausnahme der Funktion $\varphi_0(x)$) der Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_x^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (41)$$

gleichwertig ist.

Jetzt wenden wir uns dem Satz über die Entwicklung nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung zu. Dabei müssen wir zunächst die quellenmäßige Darstellbarkeit einer Funktion klären. Wir haben gesehen, daß sich jede Funktion, welche stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, die Randbedingungen erfüllt und zu $\varphi_0(x)$ orthogonal ist, quellenmäßig darstellen läßt. Folglich läßt sich jede solche Funktion in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung (41) entwickeln. Die zusätzliche Bedingung, daß die zu entwickelnde Funktion zu $\varphi_0(x)$ orthogonal sein soll, ist notwendig, da alle Eigenfunktionen der Differentialgleichung (41) zu $\varphi_0(x)$ orthogonal sind. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Kern der Differentialgleichung (41) nicht abgeschlossen ist.

Wir geben noch eine andere, elementarere Methode an, mit deren Hilfe man ebenfalls den Fall behandeln kann, daß $\lambda=0$ ein Eigenwert ist. Die Integralgleichung (41) hat einen dem absoluten Betrag nach kleinsten Eigenwert, es sei m sein absoluter Betrag. Im Innern des Intervalls $[-m, m]$ ist der einzige Eigenwert unseres Randwertproblems $\lambda=0$. Wir wählen im Innern dieses Intervalls einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert λ' und führen in die Differentialgleichung (40) an Stelle von λ einen neuen Parameter μ ein, indem wir $\lambda = \lambda' + \mu$ setzen. Mit dem neuen Parameter lautet die Differentialgleichung (16)

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda' - q(x)] y = -\mu y,$$

wobei auf Grund unserer Ausführungen der Wert $\mu=0$ kein Eigenwert ist. Folglich lassen sich alle mit Hilfe der gewöhnlichen Greenschen Funktion gefundenen Resultate anwenden. Insbesondere bilden die Eigenfunktionen des Problems ein vollständiges Funktionensystem. Hieraus folgt unter anderem unmittelbar, daß wir ein vollständiges Funktionensystem erhalten, wenn wir zu den Eigenfunktionen der Integralgleichung (41) die Funktion $\varphi_0(x)$ hinzufügen. Wie wir an dem folgenden Beispiel sehen werden, kann die Einführung eines neuen Parameters die Integration der Differentialgleichung, die zur Bestimmung der gewöhnlichen Greenschen Funktion dient, erschweren. Im nächsten Abschnitt benutzen wir die verallgemeinerte Greensche Funktion bei der Behandlung des Randwertproblems, das auf die Legendreschen Polynome führt. In diesem Fall verschwindet die Funktion $p(x)$ in beiden Endpunkten des Intervalls, und an Stelle der Randbedingungen ist zu fordern, daß die Lösung in den Endpunkten des Intervalls endlich ist. Alle obigen Ausführungen bleiben auch in diesem Fall richtig.

Für die Differentialgleichung (1) mit den Randbedingungen (2) kann, wie wir gesehen haben, zu dem Eigenwert $\lambda=0$ nur eine einzige Eigenfunktion gehören. Für Randbedingungen vom periodischen Typus, beispielsweise für $y(a)=y(b)$ und $y'(a)=y'(b)$, kann es auch zwei Eigenfunktionen geben. Für Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung, auf die wir noch eingehen werden,

kann es ebenfalls mehr als eine geben. Auch in diesen Fällen kann man eine Greensche Funktion konstruieren. Man hat nur auf der rechten Seite der Differentialgleichung (28) eine Summe zu schreiben, die sich auf alle Eigenfunktionen erstreckt, welche zum Eigenwert $\lambda=0$ gehören; dabei sind diese Funktionen als zueinander orthogonal und normiert zu wählen.

81. Die Legendreschen Polynome. Gesucht sind diejenigen Werte des Parameters λ , für welche die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) y'] + \lambda y = 0 \quad (42)$$

eine Lösung besitzt, die in den beiden Endpunkten des Intervalls $[-1, 1]$ beschränkt ist. Wir wissen bereits, daß die Eigenwerte dieses Problems die Zahlen $\lambda_n = n(n+1)$ sind [III/2, 105], während die orthogonalen und normierten Eigenfunktionen durch

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \quad (n=0, 1, \dots) \quad (43)$$

gegeben werden, wobei mit $P_n(x)$ die Legendreschen Polynome bezeichnet sind. Es ist leicht zu sehen, daß es keine weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen geben kann. Denn würden noch weitere Eigenfunktionen existieren, so gäbe es eine Eigenfunktion, die zu allen Funktionen (43) orthogonal ist. Um zu zeigen, daß es eine solche Funktion nicht geben kann, genügt es, zu beweisen, daß die Funktionen (43) ein vollständiges System bilden. Dies wollen wir jetzt tun. Es sei $f(x)$ eine beliebige im Intervall $[-1, 1]$ vorgegebene stetige Funktion. Nach dem Satz von WEIERSTRASS [II, 168] können wir bei beliebig vorgegebenem positivem ε ein Polynom $Q(x)$ ermitteln derart, daß im ganzen Intervall $[-1, 1]$ die Ungleichung $|f(x) - Q(x)| < \varepsilon$ gilt, aus der unmittelbar

$$\int_{-1}^1 [f(x) - Q(x)]^2 dx < 2\varepsilon^2$$

folgt. Es sei m der Grad des Polynoms $Q(x)$. Da die Funktion $\varphi_n(x)$ ein Polynom ist, dessen Grad genau gleich n ist, können wir $Q(x)$ als eine Linearkombination der Polynome $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ darstellen, und die letzte Ungleichung läßt sich in der Gestalt

$$\int_{-1}^1 \left[f(x) - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx < 2\varepsilon^2$$

schreiben. Setzen wir in ihr an Stelle der Koeffizienten a_k die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ in bezug auf das System der Funktionen (43) ein, so ist diese Ungleichung erst recht erfüllt.

Wenn wir beachten, daß die Zahl ε beliebig klein sein kann, können wir behaupten, daß das mittlere Fehlerquadrat bei der Darstellung der Funktion $f(x)$ durch einen Abschnitt ihrer Fourierentwicklung nach den Funktionen (43) gegen 0, strebt, d. h., die Funktionen (43) bilden tatsächlich ein vollständiges System.

Wir kehren zur Differentialgleichung (42) zurück. Für sie ist

$$L(y) = \frac{d}{dx} [(1-x^2) y'],$$

und es ist unmittelbar zu sehen, daß die erste der Funktionen (43), d. h. die Konstante

$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ und den Randbedingungen

genügt, d. h. in den Endpunkten des Intervalls beschränkt ist. Anders ausgedrückt, $\lambda=0$ ist ein Eigenwert, der sich auch aus der Gleichung $\lambda_n = n(n+1)$ für $n=0$ ergibt. Zur Konstruktion der Greenschen Funktion benutzen wir die inhomogene Differentialgleichung (28), die im vorliegenden Fall

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) y'] = \frac{1}{2}$$

lautet. Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist $y = -\frac{1}{4} \lg(1-x^2)$, während das allgemeine Integral der zugehörigen homogenen Differentialgleichung die Gestalt $c_1 + c_2 \lg \frac{1+x}{1-x}$ hat. Die Lösungen, die in einem der Endpunkte $x = \pm 1$ endlich bleiben, haben die Gestalt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{1}{4} \lg(1-x^2) + \frac{1}{4} \lg \frac{1+x}{1-x} + \alpha = -\frac{1}{2} \lg(1-x) + \alpha, \\ y_2(x) &= -\frac{1}{4} \lg(1-x^2) - \frac{1}{4} \lg \frac{1+x}{1-x} + \beta = -\frac{1}{2} \lg(1+x) + \beta, \end{aligned}$$

wobei α und β zwei Konstanten sind. Wir wählen diese Konstanten so, daß die in der üblichen Weise aus $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zusammengesetzte Lösung für $x = \xi$ stetig und zu $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ orthogonal ist. Die erste Bedingung liefert

$$-\frac{1}{2} \lg(1-\xi) + \alpha = -\frac{1}{2} \lg(1+\xi) + \beta,$$

so daß wir

$$\alpha = -\frac{1}{2} \lg(1+\xi) + \gamma, \quad \beta = -\frac{1}{2} \lg(1-\xi) + \gamma$$

setzen können, wobei γ eine Konstante bezeichnet, die aus der Orthogonalitätsbedingung für die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ und $\varphi_0(x)$ bestimmt werden muß. Es gilt

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \lg[(1-x)(1+\xi)] + \gamma & (x \leq \xi), \\ -\frac{1}{2} \lg[(1+x)(1-\xi)] + \gamma & (\xi \leq x). \end{cases}$$

Die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 G(x, \xi) \varphi_0(x) dx = 0 \quad \text{oder einfach} \quad \int_{-1}^1 G(x, \xi) dx = 0$$

liefert uns für die Konstante γ den Wert $\gamma = \frac{1}{2} - \lg 2$, so daß schließlich die verallgemeinerte Greensche Funktion durch die Gleichungen

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \lg[(1-x)(1+\xi)] - \lg 2 + \frac{1}{2} & (x \leq \xi), \\ -\frac{1}{2} \lg[(1+x)(1-\xi)] - \lg 2 + \frac{1}{2} & (x \geq \xi) \end{cases} \quad (44)$$

bestimmt ist. Der Kern (44) ist in der Umgebung der Ecke $x = \xi = -1$ sowie der Ecke $x = \xi = 1$ des Grundquadrates nicht mehr beschränkt. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß jede quellenmäßig darstellbare Funktion

$$\int_{-1}^1 G(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (45)$$

bereits stetig ist, wenn $g(x)$ stetig ist, und es lassen sich wie in [76] diese Funktionen in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) entwickeln. Jede Funktion $f(x)$, die im Intervall $[-1, 1]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Bedingung

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad (46)$$

genügt, welche die Orthogonalität der Funktionen $f(x)$ und $\varphi_0(x)$ ausdrückt, läßt sich quellenmäßig darstellen und demnach in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$), d. h. nach den Legendreschen Polynomen $P_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) entwickeln. Erfüllt $f(x)$ die Bedingung (46) nicht, so braucht man nur den allgemeinen Entwicklungssatz auf die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$$

anzuwenden, die bereits die Bedingung (46) erfüllt. Für die ursprüngliche Funktion $f(x)$ erhalten wir eine Entwicklung nach allen Legendreschen Polynomen einschließlich $P_0(x) = \text{const.}$

Die Fourierreihe des Kerns lautet jetzt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2n(n+1)}. \quad (47)$$

Sie kann nicht im ganzen Quadrat k_0 gleichmäßig konvergieren, da der Kern nicht beschränkt ist. Wir benutzen die asymptotische Darstellung der Legendreschen Polynome für große Werte von n [vgl. III/2, 164]:

$$P_n(\cos t) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin t}} \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right] + \delta_n \right\},$$

in der für die Reste δ_n gleichmäßig in bezug auf t die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ gilt, falls t einem Intervall $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ angehört. Dabei bezeichnet ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl. Wir halten einen Wert ξ im Innern des Intervalls $[-1, 1]$ fest. Für $P_n(\xi)$

gilt die asymptotische Abschätzung $|P_n(\xi)| \cong \frac{m_n}{\sqrt{n}}$, wobei m_n bei wachsendem n be-

schränkt bleibt. Für alle Werte von x , die der Bedingung $-1 \leq x \leq 1$ genügen, gilt (vgl. [III/2, 133]) die Ungleichung $|P_n(x)| \leq 1$. Hieraus ist ersichtlich, daß die Reihe (47) bei festem ξ im Intervall $[-1, 1]$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Funktion (44) ist zu $\varphi_0(x)$ orthogonal, folglich ist die Reihe (47) ihre Fourierreihe in bezug auf das vollständige Funktionensystem (43). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe ergibt sich, daß ihre Summe gleich dem Kern (44) ist [IV/1, 3]. Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt ebenfalls unmittelbar, daß die Reihe (47) im Quadrat k_0 absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn man von diesem Quadrat die Ecken $(-1, -1)$ und $(1, 1)$ durch Kreise um diese Punkte mit beliebig kleinem positivem Radius ausschließt.

Wir untersuchen noch das Randwertproblem der Differentialgleichung (42) mit der zweiten im letzten Abschnitt entwickelten Methode. An Stelle von λ führen wir durch $\lambda = \mu + p(p+1)$ einen neuen Parameter μ ein, wobei p eine feste, nicht ganze Zahl bedeutet. Die Differentialgleichung (42) lautet dann

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) y'] + p(p+1) y + \mu y = 0.$$

Der Wert $\mu = 0$ ist kein Eigenwert, und es gilt jetzt

$$L(y) = \frac{d}{dx} [(1-x^2) y'] + p(p+1) y.$$

Führen wir an Stelle von x die neue Veränderliche $t = \frac{1+x}{2}$ ein, so geht die Differentialgleichung $L(y) = 0$ in die Gaußsche Differentialgleichung [III/2, 103, 104] mit den Parametern $\alpha = -p$, $\beta = p+1$, $\gamma = 1$ über. Wir erhalten somit die beiden Lösungen

$$y_1(x) = F \left(-p, p+1, 1; \frac{1+x}{2} \right), \quad y_2(x) = c F \left(-p, p+1, 1; \frac{1-x}{2} \right)$$

unserer Differentialgleichung, von denen die erste für $x = -1$ und die zweite für $x = 1$ regulär ist. Man kann die Konstante c so wählen, daß die Beziehung

$$y_1'(x) y_2(x) - y_2'(x) y_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

erfüllt ist. Es läßt sich zeigen, daß dazu $c = \frac{\pi}{4 \sin p\pi}$ sein muß; folglich ist die gewöhnliche Greensche Funktion durch den Ausdruck

$$G_1(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-p, p+1, 1; \frac{1+x}{2}\right) F\left(-p, p+1, 1; \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin p\pi} \quad (x \leq \xi) \quad (48)$$

bestimmt. Für $\xi \leq x$ hat man die Buchstaben ξ und x zu vertauschen. Wegen der Parametertransformation sind $\mu_n = n(n+1) - p(p+1)$ die Eigenwerte; die zugehörigen Eigenfunktionen sind wie vorher die Funktionen $\varphi_n(x)$. Die Fourierreihe des Kerns (48) lautet jetzt

$$G_1(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1) - p(p+1)]},$$

und wie vorhin liefert sie die Greensche Funktion (48) bei beliebigem festem ξ im Innern des Intervalls $[-1, 1]$ für alle Werte von x aus diesem Intervall. Wir bemerken, daß auch jetzt der Kern (48) nicht beschränkt ist.

82. Die Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. Man kann die Greensche Funktion auch für die Randwertprobleme aufstellen, die zu den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen führen.

Die Hermiteschen Funktionen $\psi_n(x)$ [III/2, 157] sind die Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - x^2) y = 0$$

für das Grundintervall $(-\infty, \infty)$ unter den Bedingungen $y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$. Die Eigenwerte sind $\lambda_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots$). Ersetzen wir λ durch $\lambda - 1$, so können wir die Differentialgleichung in der Gestalt

$$L(y) + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad L(y) = y'' - (1 + x^2) y$$

schreiben, wobei die Eigenwerte jetzt durch $\lambda_n = 2n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$) gegeben sind. Die Differentialgleichung

$$L(y) = y'' - (1 + x^2) y = 0$$

hat die Lösung $y = e^{x^2/2}$; führen wir an Stelle von y durch $y = we^{x^2/2}$ eine neue gesuchte Funktion w ein, so finden wir unmittelbar das allgemeine Integral

$$y = C_1 e^{x^2/2} \int_{C_2}^x e^{-v^2} dv,$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstante sind. Für $x \leq \xi$ haben wir die Lösung

$$y_1 = a e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x e^{-v^2} dv$$

zu wählen, die für $x = -\infty$ verschwindet ($y_1 \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$); dabei ist a ebenfalls eine Konstante. Für $x \geq \xi$ nehmen wir entsprechend die Lösung

$$y_2 = b e^{x^2/2} \int_x^{\infty} e^{-v^2} dv$$

mit einer neuen Konstante b . Die Konstanten werden durch die Stetigkeit von $G(x, \xi)$ für $x = \xi$ und durch den Sprung der Ableitung $G'(x, \xi)$ an dieser Stelle bestimmt. Wir

erhalten schließlich

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(x^2+\xi^2)/2} \int_{-\infty}^x e^{-v^2} dv \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt & (x \leq \xi), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(x^2+\xi^2)/2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-v^2} dv \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt & (x \geq \xi). \end{cases}$$

Die Laguerreschen Funktionen $\omega_n(x)$ (vgl. [III/2, 161] für $s=0$) sind die Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$xy'' + y' + \left(\lambda - \frac{x}{4}\right)y = 0$$

in dem Grundintervall $(0, \infty)$, die in der Umgebung von $x=0$ beschränkt sind und für $x=\infty$ verschwinden. Die Eigenwerte sind $\lambda_n = \frac{1}{2} + n$. Ersetzen wir λ durch $\lambda - \frac{1}{2}$, so können wir die Differentialgleichung in der Gestalt

$$L(y) + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad L(y) = xy'' + y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)y$$

schreiben. Die Eigenwerte sind dann $\lambda_n = n + 1$ ($n=0, 1, \dots$). Die Differentialgleichung

$$L(y) = xy'' + y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)y = 0$$

hat die Lösung $y = e^{x/2}$; transformieren wir die gesuchte Funktion vermöge $y = we^{x/2}$, so erhalten wir als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{x/2} \left(\int_{-\infty}^x \frac{e^{-v}}{v} dv + C_2 \right).$$

Für $x \leq \xi$ müssen wir die für $x=0$ reguläre Lösung

$$y_1 = a e^{x/2}$$

und für $x \geq \xi$ die Lösung

$$y_2 = b e^{x/2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

nehmen, die für $x=\infty$ verschwindet. Bestimmen wir a und b im Fall der Hermiteischen Funktionen, so erhalten wir schließlich

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{(x+\xi)/2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv & (x \leq \xi), \\ e^{(x+\xi)/2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv & (x \geq \xi). \end{cases}$$

83. Differentialgleichungen vierter Ordnung. Auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung läßt sich eine Greensche Funktion konstruieren und das Randwertproblem auf eine Integralgleichung zurückführen. Die Berechnung der Schwingungen eines Stabes führt auf das folgende Randwertproblem: Gesucht sind die-

jenigen Werte des Parameters λ , für welche die Differentialgleichung

$$y^{(IV)} - \lambda y = 0 \quad (49)$$

eine von 0 verschiedene Lösung besitzt, welche vier homogene Randbedingungen erfüllt. Ist beispielsweise der Stab im Endpunkt $x=0$ eingespannt und im Endpunkt $x=l$ frei, so lauten die Randbedingungen

$$y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=l} = y'''|_{x=l} = 0. \quad (50)$$

Für einen inhomogenen Stab erhalten wir die Differentialgleichung

$$y^{(IV)} - \lambda r(x) y = 0. \quad (51)$$

Die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ entspricht der statischen Ausbiegung des Stabes unter dem Einfluß einer Einzelkraft. Sie wird durch folgende Bedingungen definiert: 1. Sie ist nebst ihren ersten beiden Ableitungen nach x im Quadrat k_0 stetig; 2. sie besitzt für $0 < x < \xi$ und $\xi < x < l$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung und erfüllt die homogene Differentialgleichung $G^{(IV)}(x, \xi) = 0$; 3. sie genügt für beliebige Werte von ξ aus dem Intervall $[0, l]$ den Randbedingungen; 4. auf der Diagonalen des Rechtecks macht ihre dritte Ableitung einen Sprung, der durch die Bedingung

$$G'''(\xi + 0, \xi) - G'''(\xi - 0, \xi) = -1 \quad (52)$$

bestimmt ist. Ist $y(x)$ eine Funktion mit stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung und erfüllt diese Funktion die Randbedingungen (50), so folgt aus der Beziehung $y^{(IV)} = -f(x)$

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi; \quad (53)$$

umgekehrt hat die durch (53) definierte Funktion stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung und erfüllt die Randbedingungen sowie die Differentialgleichung $y^{(IV)} = -f(x)$. Somit führt das Randwertproblem für die Differentialgleichung (49) auf die Integralgleichung

$$y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

das Randwertproblem für die Differentialgleichung (51) auf die Integralgleichung

$$y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi.$$

Die Eigenfunktionen bilden wie früher ein vollständiges System, und jede Funktion, die den Randbedingungen genügt und stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt, läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen entwickeln. Genau wie in [78] kann man zeigen, daß alle Eigenwerte positiv sind. Folglich erhalten wir nach dem Mercerschen Satz die Entwicklung des Kernes nach den Eigenfunktionen.

Für den Fall des Stabes, der in beiden Endpunkten eingespannt ist, wollen wir die Greensche Funktion explizit berechnen. Wir legen also die Randbedingungen $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$ zugrunde und nehmen $r(x) \equiv 1$ und $l = 1$ an. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung $y^{(IV)} = 0$ ist ein Polynom dritten Grades mit willkürlichen Koeffizienten. Wir können unmittelbar eine Lösung angeben, die den Randbedingungen nur im linken oder nur im rechten Endpunkt genügt. Für die beiden Fälle gilt

$$y_1(x) = x^2 (a_1 + a_2 x), \quad y_2(x) = (x - 1)^2 (b_1 + b_2 x).$$

Die willkürlichen Konstanten werden durch die vier Bedingungen bestimmt, daß die Funktion und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung für $x = \xi$ stetig sind und die Ableitung dritter Ordnung dort einen Sprung der Größe (52) macht. Durch elementare Rechnungen gelangen wir in unserem Fall schließlich zu dem Ausdruck

$$G(x, \xi) = \frac{x^2(\xi - 1)^2}{6} (2x\xi + x - 3\xi) \quad (x \leq \xi)$$

für die Greensche Funktion. Für $\xi \leq x$ hat man x und ξ miteinander zu vertauschen.

84. Erweiterung des Entwicklungssatzes durch W. A. Steklow. In [77] hatten wir einen Satz über die Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ der Differentialgleichung (16) erhalten. Die Randbedingungen wählen wir in der Gestalt

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (54)$$

Sätze über die Entwicklung nach den Funktionen $\varphi_n(x)$ wurden unter sehr allgemeinen Voraussetzungen unabhängig von der Theorie der Integralgleichungen in den Arbeiten von W. A. Steklow bewiesen. Die Resultate sind in seinem Buch „Grundlegende Probleme der mathematischen Physik“, Bd. 1 (russ.), 1922, zusammengestellt. Hier sollen einige dieser Resultate angegeben werden.

Ausschließlich zur Vereinfachung der Überlegungen setzen wir $q(x) \geq 0$ voraus. Diese Einschränkung kann in [84] bis [91] weggelassen werden. Es sei weiterhin $f(x)$ eine stetige Funktion, die im Intervall $[a, b]$ eine stetige Ableitung besitzt und die Randbedingungen (54) erfüllt. Die Existenz der Ableitung zweiter Ordnung wird nicht vorausgesetzt. Zunächst beweisen wir die Beziehung

$$\int_a^b [p(x) \varphi'_k(x) \varphi'_l(x) + q(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x)] dx = 0 \quad \text{für } k \neq l. \quad (55)$$

Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir, da die Eigenfunktionen die Differentialgleichung

$$q(x) \varphi_k(x) - \frac{d}{dx} [p(x) \varphi'_k(x)] = \lambda_k \varphi_k(x) \quad (56)$$

erfüllen, die Beziehung

$$\int_a^b [p(x) \varphi'_k(x) \varphi'_l(x) + q(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x)] dx = p(x) \varphi'_k(x) \varphi_l(x) \Big|_{x=a}^{x=b} + \lambda_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx.$$

Der integralfreie Bestandteil verschwindet aber wegen $\varphi_l(a) = \varphi_l(b) = 0$, und das Integral auf der rechten Seite ist wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen gleich 0. Wir betrachten jetzt das Funktional

$$J(y) = \int_a^b [p(x) y'^2 + q(x) y^2] dx \quad (57)$$

und setzen darin

$$y = r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \quad (58)$$

ein, wobei die c_k die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ darstellen,

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx. \quad (59)$$

Lösen wir die Klammern auf und berücksichtigen (22) und (55), so erhalten wir

$$J \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right] = \int_a^b [p(x) f'^2(x) + q(x) f^2(x)] dx + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k^2 \\ - 2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k \int_a^b [p(x) f'(x) \varphi'_k(x) + q(x) f(x) \varphi_k(x)] dx.$$

Durch partielle Integration im letzten Integral ergibt sich auf Grund der Voraussetzung $f(a) = f(b) = 0$ und der Differentialgleichung (56) die Beziehung

$$J \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right] = \int_a^b [p(x) f'^2(x) + q(x) f^2(x)] dx - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k^2. \quad (60)$$

Setzen wir nicht nur $p(x) > 0$, sondern noch $q(x) \geq 0$ voraus, so folgt aus dieser Beziehung unmittelbar die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leq \int_a^b [p(x) f'^2(x) + q(x) f^2(x)] dx, \quad (61)$$

die der Besselschen Ungleichung entspricht. Damit ist die Konvergenz der Reihe auf der linken Seite bewiesen; denn alle Glieder dieser Reihe sind wegen $\lambda_k > 0$ für $q(x) \geq 0$ positiv.

Der Beweis der Ungleichung (61) bleibt auch richtig, wenn wir voraussetzen, daß die stetige Funktion $f(x)$ überall in $[a, b]$ außer in endlich vielen Punkten $a_1, a_2, \dots, a_m$ eine stetige Ableitung $f'(x)$ besitzt, die in diesen Punkten endliche links- und rechtsseitige Grenzwerte besitzt (Unstetigkeiten erster Art). Bei der partiellen Integration hat man zunächst über die Stetigkeitsintervalle von $f'(x)$ zu integrieren und danach alle diese Integrale zu addieren.

Jetzt beweisen wir, daß unter unseren Voraussetzungen über $f(x)$ die Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (62)$$

dieser Funktion im Intervall $[a, b]$ regulär konvergiert, d. h., daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k \varphi_k(x)| \quad (63)$$

in diesem Intervall gleichmäßig konvergiert. Unter Benutzung der Integralgleichung

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int_a^b G(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi \quad (64)$$

läßt sich die Reihe (63) in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \quad (65)$$

darstellen, wobei man die Ausdrücke

$$\psi_k(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi \quad (66)$$

als Fourierkoeffizienten der Funktion $G(x, \xi)$ bezüglich des Argumentes ξ auffassen kann. Wenn wir die Ungleichung (61) anwenden, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leq \int_a^b [p(\xi) G_\xi^2(x, \xi) + q(\xi) G^2(x, \xi)]^2 d\xi, \quad (67)$$

wobei $G_{\xi}(x, \xi)$ die Ableitung von $G(x, \xi)$ nach ξ bedeutet. Da alle unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen beschränkt sind, folgt aus (67) die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leq M, \quad (68)$$

in der M eine Konstante ist. Jetzt ersetzen wir λ_k durch $\sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_k}$ und wenden auf einen Abschnitt der Reihe (65) die Cauchysche Ungleichung

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k \psi_k^2(x)}$$

oder

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{M}$$

an. Aus dieser Ungleichung und der Konvergenz der Reihe mit den Gliedern $\lambda_k c_k^2$ folgt unmittelbar, daß die Reihe (65) im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, d. h., die Reihe (62) konvergiert regulär. Daraus folgt aber, daß ihre Summe gleich $f(x)$ ist [IV/1, 3].

Nun wollen wir noch den Entwicklungssatz unter den zu Anfang dieses Abschnittes gemachten Voraussetzungen über $f(x)$, aber ohne die Voraussetzung $q(x) \geq 0$ beweisen. Auch dieser Beweis stammt von W. A. STEKLOW. Wir benutzen wieder die Bezeichnung (58) und zeigen zunächst, daß eine von n unabhängige Konstante C existiert, mit der die Ungleichung

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) r_n'^2(x) dx \leq C \quad (69)$$

gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \int_a^b p(x) \left[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k'(x) \right]^2 dx = \int_a^b p(x) \left[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k'(x) \right] r_n'(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x) dx - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \int_a^b p(x) \varphi_k'(x) r_n'(x) dx. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration des letzten Integrals erhalten wir unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (56) und der Orthogonalität von $r_n(x)$ zu den Funktionen $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) die Beziehung

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x) dx + \int_a^b q(x) r_n(x) f(x) dx - \int_a^b q(x) r_n^2(x) dx.$$

Bezeichnen wir mit q_0 den größten Wert von $|q(x)|$ in $[a, b]$ und wenden wir die Bunjakowskische Ungleichung an, wobei wir im ersten Integral $p(x) = \sqrt{p(x)} \sqrt{p(x)}$ setzen, so erhalten wir

$$\sigma_n \leq \sqrt{\int_a^b p(x) f'^2(x) dx} \sqrt{\sigma_n} + q_0 \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b r_n^2(x) dx} + q_0 \int_a^b r_n^2(x) dx.$$

Da wegen der Vollständigkeitsrelation $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n^2(x) dx = 0$ gilt, ergibt sich für σ_n die Ungleichung

$$\sigma_n \leq a_1 \sqrt{\sigma_n} + a_2,$$

wobei a_1 und a_2 positive Konstante bezeichnen. Aus dieser Ungleichung ist ersichtlich, daß σ_n bei wachsendem n beschränkt bleibt, und wir erhalten die Ungleichung (69).

Weiterhin ergibt sich aus

$$\int_{\xi}^x \frac{d}{dt} r_n^2(t) dt = r_n^2(x) - r_n^2(\xi)$$

die Gleichung

$$r_n^2(x) = r_n^2(\xi) + 2 \int_{\xi}^x r_n(t) r_n'(t) dt,$$

woraus wir mit Hilfe der Bunjakowskischen Ungleichung für $\xi < x$ die Abschätzung

$$r_n^2(x) \leq r_n^2(\xi) + 2 \sqrt{\int_{\xi}^x r_n^2(t) dt} \sqrt{\int_{\xi}^x r_n'^2(t) dt} \leq r_n^2(\xi) + 2 \sqrt{\int_a^b r_n^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b r_n'^2(t) dt}$$

erhalten. Für $x < \xi$ müssen wir die Integrationsgrenzen ξ und x vertauschen. Integrieren wir beide Seiten über ξ im Intervall $[a, b]$, so finden wir

$$(b-a) r_n^2(x) \leq \int_a^b r_n^2(\xi) d\xi + 2(b-a) \sqrt{\int_a^b r_n^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b r_n'^2(t) dt}.$$

Bezeichnen wir mit p_0 den kleinsten Wert der positiven Funktion $p(x)$ im Intervall $[a, b]$, so gilt wegen (69)

$$\int_a^b r_n'^2(t) dt \leq \frac{1}{p_0} \int_a^b p(t) r_n'^2(t) dt \leq \frac{C}{p_0},$$

und die vorhergehende Ungleichung liefert

$$r_n^2(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b r_n^2(t) dt + 2 \sqrt{\frac{C}{p_0}} \sqrt{\int_a^b r_n^2(t) dt}.$$

Die rechte Seite hängt nicht von x ab und strebt bei unbeschränkt wachsendem n gegen 0, woraus folgt, daß im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig $r_n(x) \rightarrow 0$ gilt, d. h., die Reihe (62) konvergiert in diesem Intervall gleichmäßig, und ihre Summe ist gleich $f(x)$. Man kann ebenfalls ohne die Voraussetzung $q(x) \equiv 0$ beweisen, daß die Reihe (62) sogar regulär konvergiert.

85. Rechtfertigung der Fourierrmethode für die Wärmeleitungsgleichung. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u, \quad (70)$$

welche die Wärmeausbreitung in einem inhomogenen Stab bei Berücksichtigung der Ausstrahlung durch die Staboberfläche beschreibt. Wir nehmen $a \leq x \leq b$ an und suchen eine Lösung der Differentialgleichung (70), die der Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (71)$$

und den Randbedingungen

$$u|_{x=a} = 0, \quad u|_{x=b} = 0 \quad (72)$$

genügt. Durch Anwendung der Fourierrmethode erhalten wir die Lösung des Problems in der Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x), \quad (73)$$

wobei λ_k die Eigenwerte und $\varphi_k(x)$ die Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda - q(x)] y = 0 \quad (74)$$

bei den Randbedingungen

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (75)$$

sind und die c_k die Fourierkoeffizienten (59) der Funktion $f(x)$ darstellen. Wir setzen voraus, daß $q(x) \geq 0$ gilt und daß $f(x)$ in $[a, b]$ eine stetige Ableitung besitzt und den Randbedingungen (72) genügt. Wegen $q(x) \geq 0$ sind alle λ_k positiv. Wir zeigen, daß die Funktion (73) den Bedingungen (71), (72) und der Differentialgleichung (70) für $t > 0$ genügt und damit eine Lösung des Problems ist.

Wie wir bewiesen haben, konvergiert die Reihe (62) im Intervall $[a, b]$ regulär. Wegen $\lambda_k > 0$ können wir verifizieren, daß die Reihe (73) für $t \geq 0$ und $a \leq x \leq b$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Deshalb ist ihre Summe für die angegebenen Werte der Argumente eine stetige Funktion, d. h., es gilt

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Hiermit ist bewiesen, daß die Anfangsbedingungen (71) erfüllt ist. Die Randbedingungen (72) sind ebenfalls erfüllt, da alle Funktionen $\varphi_k(x)$ den Bedingungen (72) genügen. Es bleibt nur noch die Differentialgleichung (70) für $t > 0$ nachzuweisen. Jedes Glied der Reihe (73) erfüllt die Gleichung (70) auf Grund seiner Konstruktion, es genügt also zu zeigen, daß die Reihe (73) gliedweise einmal nach t und zweimal nach x differenzierbar ist. Hierzu braucht man aber nur zu zeigen, daß die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x), \quad (76_1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi'_k(x), \quad (76_2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi''_k(x) \quad (76_3)$$

für $t \geq \alpha$, wobei α eine beliebige positive Zahl ist, und für $a \leq x \leq b$ gleichmäßig konvergieren. Wegen $\lambda_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ gilt $\lambda_k e^{-\lambda_k \alpha} \rightarrow 0$. Wegen $\lambda_k e^{-\lambda_k t} \leq \lambda_k e^{-\lambda_k \alpha}$ für $t \geq \alpha$ existiert also eine nicht von t abhängige Zahl N derart, daß $\lambda_k e^{-\lambda_k t} < 1$ gilt für $t \geq \alpha$ und $k \geq N$. Hieraus folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (63) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (76₁) für $t \geq \alpha$ und $a \leq x \leq b$.

Ebenso läßt sich beweisen, daß die Reihe (73) für $t > 0$ beliebig oft gliedweise nach t differenzierbar ist. Zur Untersuchung der folgenden Reihen schreiben wir die Integralgleichung (64) für $\varphi_k(x)$ mit Hilfe von (7) in der Gestalt

$$\varphi_k(x) = \lambda_k y_1(x) \int_a^x y_2(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi + \lambda_k y_2(x) \int_x^b y_1(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi,$$

woraus

$$\varphi'_k(x) = \lambda_k y'_1(x) \int_a^x y_2(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi + \lambda_k y'_2(x) \int_x^b y_1(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi$$

und

$$c_k e^{-\lambda_k t} \varphi'_k(x) = y'_1(x) \int_a^x y_2(\xi) c_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\xi) d\xi + y'_2(x) \int_x^b y_1(\xi) c_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\xi) d\xi \quad (77)$$

folgt. Wenn wir berücksichtigen, daß die Reihe (76₁) im Intervall $[a, b]$ für $t > 0$ in bezug auf x gleichmäßig konvergiert, finden wir, daß die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_2(\xi) \lambda_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\xi) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_1(\xi) \lambda_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\xi)$$

im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergieren. Hieraus ergibt sich wegen (77) gerade die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (76₂).

Es bleibt noch die Reihe (76₃) zu untersuchen. Hierzu benutzen wir die Differentialgleichung (56) für die Eigenfunktionen. Aus dieser folgt

$$c_k e^{-\lambda_k t} \varphi''_k(x) = \frac{1}{p(x)} [-p'(x) c_k e^{-\lambda_k t} \varphi'_k(x) + q(x) c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) - \lambda_k c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)] \quad (78)$$

und daraus, wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen (73), (76₁) und (76₂) im Intervall $[a, b]$ bei beliebigem $t > 0$, schließlich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (76₃). Damit ist bewiesen, daß die durch die Reihe (73) definierte Funktion $u(x, t)$ die geforderten partiellen Ableitungen besitzt und die Differentialgleichung (70) für $t > 0$ erfüllt. Wir erhalten somit den folgenden Satz.

Satz. Hat die in der Anfangsbedingung vorkommende Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ eine stetige Ableitung und erfüllt sie die Randbedingungen (72), so genügt die durch die Reihe (73) definierte Funktion $u(x, t)$ der Anfangsbedingung (71), den Randbedingungen (72) sowie der Differentialgleichung (70) für $t > 0$. Die Reihe (73) läßt sich beliebig oft nach t und für $t > 0$ zweimal gliedweise nach x differenzieren.

86. Rechtfertigung der Fourierrmethode für die Schwingungsgleichung. Jetzt betrachten wir an Stelle von (70) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u. \quad (79)$$

Außerden Randbedingungen (72) müssen jetzt noch die beiden Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_1(x) \quad (80)$$

erfüllt sein. Durch Anwendung der Fourierrmethode erhalten wir die Lösung des Problems in der Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) \varphi_k(x), \quad (81)$$

wobei die Größen λ_k und $\varphi_k(x)$ die bisherige Bedeutung haben und

$$a_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b f_1(x) \varphi_k(x) dx \quad (82)$$

ist. Wie in [85] genügt es, zu zeigen, daß die Reihe (81) und die Reihen, die wir daraus durch zweimalige Differentiation nach t und x erhalten, im Intervall $[a, b]$ bei beliebigem t gleichmäßig konvergieren.

Wir zerlegen die Reihe (81) in zwei Reihen und untersuchen zunächst die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t \varphi_k(x). \quad (83)$$

Da $\lambda_k > 1$ gilt für hinreichend große k , ist für diese k die Ungleichung $\sqrt{\lambda_k} < \lambda_k$ erfüllt.

Läßt sich unter gewissen Bedingungen für $p(x)$, $q(x)$ und $f(x)$ zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k \varphi_k(x)| \quad (84)$$

im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, so können wir durch eine wörtliche Übertragung der Überlegungen aus [85] alle unsere Behauptungen über die gliedweise Differentiation der Reihe (81) beweisen.

Für die Reihe (83) ist dies offenbar richtig; denn es gilt $\lambda_k \rightarrow \infty$; dasselbe gilt für die Reihen, die wir bei der Differentiation nach t erhalten, da für alle hinreichend großen k die Ungleichung $\sqrt{\lambda_k} < \lambda_k$ erfüllt ist. Bei einmaliger Differentiation nach x genügt es, die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \varphi'_k(x)|$ zu beweisen. Sie folgt unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (84) auf Grund der Beziehung

$$a_k \varphi'_k(x) = y'_1(x) \int_a^x y_2(\xi) \lambda_k a_k \varphi_k(\xi) d\xi + y'_2(x) \int_x^b y_1(\xi) \lambda_k a_k \varphi_k(\xi) d\xi,$$

die der Relation (77) entspricht. Für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \varphi''_k(x)|$ genügt es, die zu (78) analoge Beziehung zu benutzen, in der wie vorhin der Faktor $e^{-\lambda_k t}$ weggelassen ist. Somit braucht nur noch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (84) bewiesen zu werden.

Unter Benutzung der Differentialgleichung (56) erhalten wir

$$\lambda_k a_k = \lambda_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \left\{ q(x) \varphi_k(x) - \frac{d}{dx} [p(x) \varphi'_k(x)] \right\} dx.$$

Nehmen wir an, daß die Funktion $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und den Bedingungen (72) genügt, so finden wir durch partielle Integration

$$\lambda_k a_k = \int_a^b \left\{ q(x) f(x) - \frac{d}{dx} [p(x) f'(x)] \right\} \varphi_k(x) dx.$$

Wir setzen voraus, daß der unter dem Integralzeichen in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck eine stetige Ableitung besitzt und den Randbedingungen (72) genügt. Daraus folgt, daß die Reihe (84) in $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert. Die letzte Voraussetzung führt auf die folgenden Voraussetzungen: Die Funktion $f(x)$ habe stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung, die Funktion $p(x)$ habe stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, die Funktion $q(x)$ habe eine stetige Ableitung, und es gelte die Bedingung

$$\frac{d}{dx} [p(x) f'(x)] - q(x) f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = a \quad \text{und} \quad x = b. \quad (85)$$

Da $f(x)$ noch den Bedingungen (72) genügen muß, können wir (85) auch in der Gestalt

$$\frac{d}{dx} [p(x) f'(x)] = 0 \quad \text{für} \quad x=a \quad \text{und} \quad x=b \quad (86)$$

schreiben.

Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \varphi_k(x), \quad (87)$$

wobei die b_k durch den zweiten Ausdruck (82) bestimmt sind. Wie oben genügt es, die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k \varphi_k(x)|$, d. h. der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} |b'_k \varphi_k(x)|, \quad (88)$$

mit

$$b'_k = \int_a^b f_1(x) \varphi_k(x) dx$$

zu beweisen. Nehmen wir an, daß die Funktion $f_1(x)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und die Bedingungen (72) erfüllt, so erhalten wir wie vorhin

$$\lambda_k b'_k = \int_a^b \left\{ q(x) f_1(x) - \frac{d}{dx} [p(x) f'_1(x)] \right\} \varphi_k(x) dx = b''_k,$$

wobei b''_k die Fourierkoeffizienten der stetigen Funktion sind, die in den geschweiften Klammern steht. Setzen wir noch $\varphi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x)$, so erhalten wir

$$\sqrt{\lambda_k} |b'_k \varphi_k(x)| = \sqrt{\lambda_k} |b''_k \psi_k(x)|,$$

woraus nach der Cauchyschen Ungleichung

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k} |b'_k \varphi_k(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b''_k{}^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k \psi_k^2(x)}$$

oder wegen (68)

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k} |b'_k \varphi_k(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b''_k{}^2} \sqrt{M}$$

folgt. Die aus den Gliedern b''_k bestehende Reihe ist aber konvergent, und aus der letzten Ungleichung folgt unmittelbar, daß die Reihe (88) gleichmäßig konvergiert. Somit gelangen wir zu dem folgenden Satz.

Satz. Hat die Funktion $p(x)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, ist die Funktion $q(x)$ nichtnegativ und hat sie eine stetige Ableitung, besitzt die Funktion $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung und genügt sie den Bedingungen (72) sowie der Bedingung (85) und besitzt schließlich die Funktion $f_1(x)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und genügt sie den Bedingungen (72), so erfüllt die durch (81) definierte Funktion $u(x, t)$ die Anfangsbedingungen (80), die Randbedingungen (72) und die Differentialgleichung (79). Hierbei ist die Reihe (81) zweimal gliedweise nach t und x differenzierbar, und die erhaltenen Reihen konvergieren gleichmäßig im Intervall $[a, b]$ für alle t .

87. Die Eindeutigkeitssätze. Wir haben bewiesen, daß Lösungen der Differentialgleichungen (70) und (79) für die zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen existieren. Jetzt beweisen wir die eindeutige Bestimmtheit dieser Lösungen.

Wir beginnen mit der Differentialgleichung (70) für $q(x) \geq 0$ und setzen voraus, daß die Lösungen für $t \geq 0$ und $a \leq x \leq b$ stetig sind und für alle $t > 0$ eine stetige Ableitung nach t und Ableitungen nach x bis zur zweiten Ordnung besitzen, die im Intervall $[a, b]$ stetig sind. Lösungen mit eben diesen Eigenschaften haben wir in [85] konstruiert.

Die Eindeutigkeit dieser Lösung ist mit der Aussage gleichwertig, daß jede Lösung $u_0(x, t)$ der Differentialgleichung (70) mit den angegebenen Eigenschaften, die der homogenen Anfangsbedingung

$$u_0|_{t=0} = 0 \quad (a \leq x \leq b) \quad (89)$$

und den Randbedingungen (72) genügt, für $t > 0$ identisch verschwindet.

Wir setzen $u_0(x, t)$ in die Differentialgleichung (70) ein, multiplizieren beide Seiten mit $u_0(x, t)$ und integrieren über x . Hierbei nehmen wir $t > 0$ an. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b u_0^2 dx = \int_a^b u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] dx - \int_a^b q(x) u_0^2 dx.$$

Alle vorgenommenen Operationen sind auf Grund der Eigenschaften von $u_0(x, t)$ ausführbar. Führen wir im ersten Integral der rechten Seite eine partielle Integration durch und berücksichtigen dabei die Randbedingungen, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b u_0^2 dx = - \int_a^b p(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx - \int_a^b q(x) u_0^2 dx \leq 0.$$

Somit hat die nichtnegative Funktion von t

$$\int_a^b u_0^2 dx, \quad (90)$$

die für $t \geq 0$ stetig ist und wegen (89) für $t = 0$ verschwindet, eine nicht positive Ableitung für $t > 0$. Hieraus folgt, daß die Funktion (90) für $t > 0$ identisch gleich 0 ist. Dann ist aber auch $u(x, t) \equiv 0$ für $t > 0$, was wir beweisen wollten.

Jetzt gehen wir zum Beweis des analogen Eindeutigkeitssatzes für die Differentialgleichung (79) über; dabei sei $q(x) \geq 0$. Wir setzen voraus, daß die Lösungen u nebst ihren Ableitungen u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} im Intervall $a \leq x \leq b$ für beliebiges t stetig sind. Lösungen mit diesen Eigenschaften haben wir in [86] konstruiert. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen ist mit der Aussage gleichwertig, daß jede Lösung $u_0(x, t)$ der Differentialgleichung (79) mit den angegebenen Eigenschaften, die den homogenen Anfangsbedingungen

$$u_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (91)$$

und den Randbedingungen (72) genügt, identisch verschwindet.

Wir führen die Funktion

$$v(x, t) = \int_0^t u_0(x, \tau) d\tau \quad (92)$$

ein. Sie besitzt für die angegebenen Werte der Veränderlichen die stetigen Ableitungen v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt} und v_{tt} . Setzen wir $u_0(x, t)$ in die Differentialgleichung (79)

ein und integrieren über τ von $\tau=0$ bis $\tau=t$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (91) und (92) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] - q(x) v(x, t).$$

Wir ersetzen hierin die Größe t durch τ , multiplizieren beide Seiten mit $v_\tau(x, \tau)$ und integrieren über τ von $\tau=0$ bis $\tau=t$. Wegen (91) und (92) ergibt sich

$$\frac{1}{2} v_t^2(x, t) = \int_0^t v_\tau(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} [p(x) v_x(x, \tau)] d\tau - \frac{1}{2} q(x) v^2(x, t).$$

Integrieren wir beide Seiten dieser Gleichung über x im Intervall $[a, b]$ und ändern in dem iterierten Integral die Integrationsfolge, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \int_a^b v_t^2(x, t) dx = \int_0^t \left\{ \int_a^b v_\tau(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} [p(x) v_x(x, \tau)] dx \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_a^b q(x) v^2(x, t) dx.$$

Führen wir in dem inneren Integral eine partielle Integration durch und beachten, daß wegen (72) und (92) der integralfreie Bestandteil verschwindet, so finden wir

$$\frac{1}{2} \int_a^b v_t^2(x, t) dx = - \int_0^t \left\{ \int_a^b p(x) v_{\tau x}(x, \tau) v_x(x, \tau) dx \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_a^b q(x) v^2(x, t) dx.$$

Ändern wir wiederum die Integrationsfolge, führen die Integration über τ aus und berücksichtigen die Gleichung $v_x(x, 0)=0$, so erhalten wir schließlich die Beziehung

$$\frac{1}{2} \int_a^b v_t^2(x, t) dx = - \frac{1}{2} \int_a^b p(x) v_x^2(x, \tau) dx - \frac{1}{2} \int_a^b q(x) v^2(x, t) dx,$$

aus der sich

$$\int_a^b v_t^2(x, t) dx \leq 0$$

ergibt. Folglich ist $v_t(x, t) \equiv 0$ für $a \leq x \leq b$ und $-\infty < t < \infty$. Wegen (92) erhalten wir $u_0(x, t) \equiv 0$, was wir beweisen wollten.

88. Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Wir kehren nun zum Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda - q(x)] y = 0 \quad (93)$$

oder

$$L(y) = -\lambda y$$

mit

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y$$

zurück. Die allgemeine Differentialgleichung (1) können wir auf die Form (93) bringen, indem wir an Stelle von x die neue unabhängige Veränderliche

$$t = \int_a^x r(x) dx \quad (94)$$

einführen. Die Differentialgleichung (1) nimmt dann die Gestalt

$$r(x) \frac{d}{dt} \left[r(x) p(x) \frac{dy}{dt} \right] + (\lambda r(x) - q(x)) y = 0$$

an. Dividieren wir beide Seiten durch $r(x)$, so erhalten wir eine Differentialgleichung der Gestalt (93). Bei dieser Transformation ist die Voraussetzung wesentlich, daß $r(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und positiv ist. Die Randbedingungen seien

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (95)$$

Dann lassen sich, wie wir in [78] gesehen haben, die Eigenwerte durch die zugehörigen Eigenfunktionen ausdrücken:

$$\lambda_n = \int_a^b [p(x) \varphi_n'^2(x) + q(x) \varphi_n^2(x)] dx. \quad (96)$$

Es kann nur endlich viele negative Eigenwerte geben, man kann also annehmen, daß die Eigenwerte nach wachsender Größe angeordnet sind, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$

Das gestellte Randwertproblem ist der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

gleichwertig, in der $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Operators L bei den Randbedingungen (95) bezeichnet. Wir wissen [IV/1, 42], daß der erste Eigenwert λ_1 gleich dem kleinsten Wert des Integrals

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) \omega(x) \omega(\xi) dx d\xi \quad (97)$$

für die Klasse der stetigen Funktionen $\omega(x)$ ist, welche der Bedingung

$$\int_a^b \left[\int_a^b G(x, \xi) \omega(\xi) d\xi \right]^2 dx = 1 \quad (98)$$

genügen. Das Integral

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \omega(\xi) d\xi \quad (99)$$

stellt für jede stetige Funktion $\omega(\xi)$ eine Funktion $y(x)$ mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung dar, die den Randbedingungen (95) genügt. Umgekehrt läßt sich jede solche Funktion $y(x)$ durch das Integral (99) ausdrücken, wenn man für ω die stetige Funktion $\omega(x) = -L(y)$ wählt.

Somit findet man auf Grund von (97), (98) und (99), daß λ_1 der kleinste Wert des Integrals

$$-\int_a^b L(y) y dx \quad (100)$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_a^b y^2(x) dx = 1 \quad (101)$$

für die Klasse der Funktionen $y(x)$ ist, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen und den Randbedingungen (95) genügen.

Durch partielle Integration im Integral (100) sehen wir, daß λ_1 der kleinste Wert des Integrals

$$\int_a^b [p(x) y'^2 + q(x) y^2] dx \quad (102)$$

unter der Nebenbedingung (101) für die soeben angegebene Klasse von Funktionen $y(x)$ ist. Die erste Eigenfunktion $y = \varphi_1(x)$ erteilt hierbei wegen (96) dem Integral (102) diesen kleinsten Wert λ_1 . Jetzt gehen wir zum zweiten Eigenwert λ_2 über. Wir wissen, daß er der kleinste Wert des Integrals (97) ist, wenn wir zu der Bedingung (98) noch die Bedingung

$$\int_a^b \omega(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = 0 \quad (103)$$

hinzufügen. Definieren wir wieder $y(x)$ durch (99), so gilt [IV/1, 31]

$$\int_a^b y(x) \varphi_1(x) dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b \omega(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi;$$

folglich ist die Bedingung (103) der Bedingung

$$\int_a^b y(x) \varphi_1(x) dx = 0 \quad (104)$$

gleichwertig. Somit ist λ_2 unter den Nebenbedingungen (101) und (104) der kleinste Wert des Integrals (102) für die Klasse der Funktionen $y(x)$, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen und die Bedingungen (95) erfüllen.

Allgemein ist der Eigenwert λ_n der kleinste Wert des Integrals (102) für die Klasse der Funktionen $y(x)$, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen und den Randbedingungen (95) sowie den Nebenbedingungen

$$\int_a^b y^2 dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_k(x) y(x) dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (105)$$

genügen.

Wir zeigen nun, daß die Differentialgleichungen (93) die Eulersche Gleichung ist, die eine notwendige Bedingung für einen Extremwert des Integrals (102) unter der Nebenbedingung (101) darstellt. Nach [IV/1, 77] haben wir die Funktion

$$F = p(x) y'^2 + q(x) y^2 - \lambda y^2$$

zu bilden und für diese die Eulersche Gleichung

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$$

aufzustellen, die in der Tat mit der Differentialgleichung (93) identisch ist. Wir betrachten jetzt das Extremum des Integrals (102) unter zwei Nebenbedingungen, und zwar unter den Bedingungen (101) und (104). In diesem Fall haben wir die Hilfsfunktion

$$F = p(x) y'^2 + q(x) y^2 - \lambda y^2 - \mu \varphi_1(x) y$$

zu bilden, deren Eulersche Gleichung die Gestalt

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + (\lambda - q(x)) y + \frac{\mu}{2} \varphi_1(x) = 0 \quad (106)$$

besitzt. Wir zeigen, daß die Konstante μ gleich 0 sein muß, d. h., daß wir wiederum die Differentialgleichung (93) erhalten. Zu diesem Zweck setzen wir in die Differentialgleichung (93) die erste Eigenfunktion ein und erhalten

$$\frac{d}{dx} [p(x) \varphi_1'(x)] + (\lambda_1 - q(x)) \varphi_1(x) = 0.$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit y , die Differentialgleichung (106) mit $\varphi_1(x)$, subtrahieren die entstehenden Gleichungen voneinander und integrieren über das Grundintervall. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung (104) und der Normierung der ersten Eigenfunktion gelangen wir zu der Beziehung

$$\frac{\mu}{2} = \int_a^b \left\{ y \frac{d}{dx} [p(x) \varphi_1'(x)] - \varphi_1(x) \frac{d}{dx} [p(x) y'] \right\} dx.$$

Durch partielle Integration können wir uns mit Hilfe der Randbedingungen ohne Mühe davon überzeugen, daß das letzte Integral gleich 0 ist. Damit ist $\mu = 0$, was wir beweisen wollten. Bilden wir allgemein die Eulersche Gleichung als eine notwendige Bedingung für einen Extremwert des Integrals (102) unter den Nebenbedingungen (105), so gelangen wir wie oben zur Differentialgleichung (93).

Bis jetzt haben wir nur den Fall $r(x) \equiv 1$ untersucht. Völlig analoge Ergebnisse gelten auch im allgemeinen Fall, wenn $r(x)$ stetig differenzierbar und positiv ist. Dann müssen wir die Nebenbedingungen (105) in der Gestalt

$$\int_a^b r(x) y^2(x) dx = 1, \quad \int_a^b r(x) \varphi_k(x) y(x) dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (107)$$

schreiben. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur in der allgemeinen Differentialgleichung (1) die Transformation (94) der unabhängigen Veränderlichen durchzuführen. Dann ergibt sich eine Differentialgleichung der Gestalt (93), für welche unsere Ergebnisse bereits bewiesen sind. Kehren wir zu der ursprünglichen unabhängigen Veränderlichen zurück, so erhalten wir das Integral (102) und die Nebenbedingungen (107).

Wir bemerken noch, daß unsere Ergebnisse ebenfalls richtig bleiben, wenn Randbedingungen der Gestalt (2) vorliegen.

Bei der Ermittlung der aufeinanderfolgenden Minima des Integrals (102) kann man das Problem für eine Klasse von Funktionen formulieren, die nicht zwei, sondern nur eine im Intervall $[a, b]$ stetige Ableitung besitzen. Es läßt sich aber zeigen, daß auch bei dieser allgemeineren Formulierung die aufeinanderfolgenden Minima des Integrals (102) von den bisherigen Funktionen $\varphi_n(x)$ geliefert werden.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}} \right),$$

in der ϱ die Liniendichte der Saite und T_0 ihre Spannung bezeichnet. Für die kinetische und die potentielle Energie haben wir die Ausdrücke

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho u_t^2 dx, \quad -U = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 u_x^2 dx.$$

Im Fall eines sinusförmigen Schwingungszustandes $u = \sin \omega t \cdot y(x)$ erhalten wir für $y(x)$ die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \left(\lambda = \frac{\omega^2}{a^2} \right)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y(l) = 0$, falls die Saite in den Endpunkten eingespannt ist. Die kinetische und die potentielle Energie lassen sich dann durch

$$T = \frac{\rho \omega^2}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l y^2 dx, \quad -U = \frac{T_0}{2} \sin^2 \omega t \int_0^l y'^2 dx$$

ausdrücken. Der erste Eigenwert dieses Problems ist gleich dem kleinsten Wert des Integrals $\int_0^l y'^2 dx$ unter der Bedingung $\int_0^l y^2 dx = 1$.

89. Ein Satz von Courant. Aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes folgt, daß der kleinste Wert des Integrals (102) unter den Bedingungen (105) von der Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ geliefert wird und gleich λ_n ist. Bei dieser Bestimmung von λ_n und $\varphi_n(x)$ muß man alle früheren Eigenfunktionen kennen. Dieser Umstand erschwert die Anwendung des Extremalprinzips. Wir wollen nun einen Satz beweisen, nach dem die Größen λ_n und $\varphi_n(x)$ ohne Benutzung der früheren Eigenfunktionen bestimmt werden können. Es seien $z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)$ im Intervall $[a, b]$ beliebig vorgegebene stetige Funktionen. Wir stellen das folgende Problem: Der kleinste Wert des Integrals

$$\int_a^b [p(x) y'^2 + q(x) y^2] dx \quad (108)$$

ist unter den Nebenbedingungen

$$\int_a^b r(x) y^2 dx = 1, \quad \int_a^b r(x) z_k(x) y dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (109)$$

für die Klasse der Funktionen $y(x)$ zu ermitteln, die den Randbedingungen genügen und stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Wir wissen zwar nicht im voraus, ob das Integral (108) unter unseren Bedingungen einen kleinsten Wert annimmt, wir können aber auf jeden Fall von der unteren Grenze der Werte dieses Integrals sprechen. Diese untere Grenze hängt natürlich von der Wahl der Funktionen $z_k(x)$ ab. Wir bezeichnen sie mit $m(z_1, \dots, z_{n-1})$. Nunmehr beweisen wir den folgenden Satz von COURANT: *Bei beliebiger Wahl der stetigen Funktionen $z_k(x)$ ist die Zahl $m(z_1, \dots, z_{n-1})$ nicht größer als der Eigenwert λ_n .* Können wir bei einer beliebigen Wahl der Funktionen z_k eine Funktion $y(x)$ konstruieren, die den Bedingungen (109) und allen übrigen Voraussetzungen genügt und für die der zugehörige Wert des Integrals (108) nicht größer als λ_n ist, so ist die Zahl $m(z_1, \dots, z_{n-1})$ erst recht nicht größer als λ_n , und der Satz ist bewiesen. Wir machen für die Funktion $y(x)$ den Ansatz

$$y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x), \quad (110)$$

wobei mit $\varphi_k(x)$ die Eigenfunktionen des Randwertproblems bezeichnet werden und die c_k Konstante sind, die wir sogleich bestimmen werden. Die erste Bedingung (109) führt auf die Beziehung

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1, \quad (111)$$

da die Funktionen $\varphi_k(x)$ normiert sind. Die übrigen $n-1$ Bedingungen liefern ein System von $n-1$ homogenen Gleichungen für die n Unbekannten $c_1, \dots, c_n$. Ein solches System besitzt bekanntlich [III/1, 10] von der Nulllösung verschiedene Lösungen. Jede dieser Lösungen kann man mit einem willkürlichen konstanten Faktor multiplizieren, den man so wählen kann, daß die Beziehung (111) erfüllt

ist. Somit haben wir eine Funktion (110) konstruiert, welche stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und die Randbedingungen sowie alle Nebenbedingungen (109) erfüllt. Wir müssen jetzt nur noch den Ausdruck (110) in das Integral (108) einsetzen und uns davon überzeugen, daß der Wert dieses Integrals nicht größer als λ_n ist. Nach dem Einsetzen in den Integranden erhalten wir Glieder, welche die Quadrate $\varphi_k^2(x)$ und $\varphi_k'^2(x)$, sowie Glieder, die $\varphi_k(x) \varphi_l(x)$ und $\varphi_k'(x) \varphi_l'(x)$ enthalten. Genau wie in [84] läßt sich auch für Funktionen $r(x) \neq 1$ die Beziehung

$$\int_a^b [p(x) \varphi_k'(x) \varphi_l'(x) + q(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x)] dx = 0 \quad (k \neq l)$$

beweisen. Berücksichtigen wir noch (22), so können wir verifizieren, daß das Einsetzen der Funktion (110) in das Integral (108) auf den Ausdruck $c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_n^2 \lambda_n$ führt. Wegen $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ und (111) erhalten wir schließlich die Ungleichung

$$c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_n^2 \lambda_n \leq \lambda_n,$$

womit der Satz von COURANT bewiesen ist.

Folgerung. Wie wir gesehen haben, ist der kleinste Wert des Integrals (108) unter den Bedingungen (109), wenn wir $z_1 = \varphi_1(x)$, ..., $z_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$ wählen, genau gleich λ_n und wird für $y = \varphi_n(x)$ angenommen. Somit können wir sagen, daß λ_n der größte Wert aller nur möglichen unteren Grenzen $m_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ für die Werte des Integrals (108) unter den Nebenbedingungen (109) ist, wenn man die Klasse der Funktionen $y(x)$ zugrunde legt, die den Randbedingungen genügen und stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Dieser größte Wert der unteren Grenzen wird für $z_k = \varphi_k(x)$ und $y = \varphi_n(x)$ angenommen.¹⁾ Diese Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte λ_n bleibt auch für eine große Klasse von partiellen Differentialgleichungen richtig und hat für die Untersuchung der Eigenwerte grundlegende Bedeutung.

90. Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte. Wir ersetzen in der Differentialgleichung (1) die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ durch neue Funktionen $p_1(x)$ und $q_1(x)$, die im ganzen Intervall nicht kleiner sind als die früheren:

$$p_1(x) \geq p(x), \quad q_1(x) \geq q(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (p(x) > 0, r(x) > 0). \quad (112)$$

Die Funktion $r(x)$ wird nicht ersetzt. Wir bezeichnen die Eigenwerte der geänderten Differentialgleichung mit λ'_n und beweisen die Ungleichung $\lambda'_n \geq \lambda_n$. Hierzu benutzen wir die soeben bewiesene Eigenschaft der Eigenwerte.

Bei der Ersetzung von $p(x)$ und $q(x)$ bleiben die Nebenbedingungen (109) erhalten. Für eine feste Funktion y kann das Integral (108) bei der Ersetzung höchstens größer werden. Da die Gesamtheit der Funktionen y bei unserer Änderung der Koeffizienten die frühere bleibt und da die untere Grenze $m(z_1, \dots, z_{n-1})$ der Werte des Integrals (108) sicher nicht kleiner wird, wird folglich auch die größte der Zahlen $m(z_1, \dots, z_{n-1})$, d. h. λ_n , nicht kleiner, was zu beweisen war.

Wir lassen jetzt die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ ungeändert und ersetzen $r(x)$ durch $r_1(x)$, wobei $r_1(x) \geq r(x)$ sei für $a \leq x \leq b$. In diesem Fall läßt sich nicht zeigen, daß die Klasse der zulässigen Funktionen y erhalten bleibt; denn erfüllt y die erste Bedingung (109), so gilt nach Ersetzung von $r(x)$ durch die Funktion $r_1(x)$

$$\int_a^b r_1(x) y^2 dx \geq 1.$$

¹⁾ COURANTS Maximum-Minimum-Prinzip. (Anm. d. Red.)

Aus der Funktion y erhält man aber unmittelbar eine zulässige Funktion des neuen Problems. Man braucht nur eine Zahl θ , die der Bedingung $0 < \theta \leq 1$ genügt, so zu wählen, daß

$$\int_a^b r_1(x) \theta^2 y^2 dx = 1$$

gilt. Man erkennt leicht, daß die Funktion θy auch die übrigen Bedingungen (109) erfüllt, allerdings für andere Funktionen $z_k(x)$. Da nämlich θ eine Konstante ist, folgt aus (109)

$$\int_a^b r_1(x) \frac{z_k(x) r(x)}{r_1(x)} \theta y dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Dies sind aber wiederum Bedingungen der Gestalt (109) für die geänderte Differentialgleichung, in denen an Stelle der Funktionen $z_k(x)$ die Funktionen

$$\tilde{z}_k(x) = \frac{z_k(x) r(x)}{r_1(x)}$$

auftreten. Jedem System von Funktionen $z_k(x)$ entspricht ein System von Funktionen $\tilde{z}_k(x)$ und umgekehrt. Der umgekehrte Übergang von den zulässigen Funktionen θy für die geänderte Differentialgleichung zu den entsprechenden Funktionen für die ursprüngliche Differentialgleichung kommt durch Division von θy durch θ zustande. Bei der Ersetzung von y durch θy kann sich der Wert des Integrals (108) nicht vergrößern. Folglich kann sich auch die untere Grenze dieser Werte nicht vergrößern, und deshalb kann sich auch die Zahl λ_n nicht vergrößern, welche die größte dieser unteren Grenzen ist. Wir gelangen somit zu dem folgenden allgemeinen

Satz. Erfüllen die geänderten Koeffizienten $p_1(x)$ und $q_1(x)$ die Bedingung (112), so kann sich der Eigenwert λ_n nicht verkleinern; erfüllt dagegen der geänderte Koeffizient $r_1(x)$ die Bedingung $r_1(x) \geq r(x)$, so kann sich λ_n nicht vergrößern.

Wir wenden nun den bewiesenen Satz auf die asymptotische Abschätzung der Eigenwerte λ_n für große Werte von n an. Es seien (p, P) , (q, Q) und (r, R) die kleinsten bzw. größten Werte der Funktionen $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ im Intervall $[a, b]$. Wir ersetzen in der zugrunde liegenden Differentialgleichung (1) die Funktion $p(x)$ durch P , die Funktion $q(x)$ durch Q und die Funktion $r(x)$ durch r . Die erhaltene neue Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$Py'' + (\lambda r - Q)y = 0 \quad (113)$$

hat die Eigenwerte λ'_n , die gewiß nicht kleiner sind als die entsprechenden Eigenwerte λ_n der ursprünglichen Differentialgleichung. Wir können die λ'_n leicht ermitteln. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die Differentialgleichung (113) nur im Fall $\frac{\lambda r - Q}{P} > 0$ eine Lösung besitzt, welche die Randbedingungen (95) erfüllt.

Ist diese Ungleichung erfüllt, so können wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (113) in der Gestalt

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} x$$

schreiben. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen benutzen wir als Grundintervall $[a, b]$ das Intervall $[0, l]$. Aus der Randbedingung $y(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$,

und die zweite Randbedingung $y(l) = 0$ liefert zur Bestimmung von λ die Gleichung

$$\sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} l = n\pi,$$

aus der

$$\lambda'_n = \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}$$

und damit

$$\lambda_n \leq \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}$$

folgt. Ersetzen wir $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ durch p , q bzw. R , so können wir ebenso die Ungleichung

$$\lambda_n \geq \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} p + q}{R}$$

beweisen. Somit erhalten wir für die Eigenwerte die Abschätzung

$$\frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r} \geq \lambda_n \geq \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} p + q}{R}.$$

Hieraus folgt, daß λ_n für große n eine Größe der Ordnung n^2 ist, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ konvergiert. Benutzen wir die Maximum-Minimum-Eigenschaft von λ_n , so können wir eine genauere Abschätzung herleiten, wenn wir die Ausgangsgleichung zunächst etwas umformen. Wir setzen voraus, daß die Funktionen $p(x)$ und $r(x)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen, und transformieren die Differentialgleichung (1), indem wir an Stelle von x durch

$$t = \int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx \quad (114)$$

eine neue unabhängige Veränderliche t und an Stelle von y durch

$$u = \sqrt[4]{p(x) r(x)} y \quad (115)$$

eine neue gesuchte Funktion u einführen. Das Definitionsintervall $[a, b]$ der Veränderlichen x geht in das Intervall $[0, l]$ für die Veränderliche t über mit

$$l = \int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx.$$

Die Differentialgleichung für $u(t)$ hat die Gestalt

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\lambda - s(t)) u = 0; \quad (116)$$

dabei ist $s(t)$ eine stetige Funktion, die sich leicht aus den gegebenen Koeffizienten der Differentialgleichung (1) bestimmen läßt. Aus $y(a) = y(b) = 0$ folgt $u(0) = u(l) = 0$

und umgekehrt. Daher lassen sich die Eigenfunktionen der ursprünglichen Differentialgleichung mit Hilfe von (115) bestimmen, und umgekehrt. Die Eigenwerte bleiben dabei die gleichen. Zur Bestimmung der Eigenwerte der Differentialgleichung (116) gehen wir von dem Minimalproblem für das Integral

$$\int_0^l [u'^2 + s(t) u^2] dt \quad (117)$$

aus. Es sei σ der größte Wert von $|s(t)|$ im Intervall $[0, l]$, so daß

$$-\sigma \leq s(t) \leq \sigma \quad (0 \leq t \leq l)$$

gilt. Stellen wir das Minimalproblem anstatt für (117) für die Integrale

$$\int_a^b (u'^2 + \sigma u^2) dt \quad (118_1)$$

und

$$\int_a^b (u'^2 - \sigma u^2) dt \quad (118_2)$$

auf und bezeichnen wir mit λ'_n und λ''_n die zugehörigen Eigenwerte, so erhalten wir

$$\lambda'_n \equiv \lambda_n \equiv \lambda''_n. \quad (119)$$

Die Zahlen λ'_n und λ''_n lassen sich in elementarer Weise aus den Lösungen der Differentialgleichungen

$$u'' + (\lambda - \sigma) u = 0 \quad \text{und} \quad u'' + (\lambda + \sigma) u = 0$$

unter den Randbedingungen $u(0) = u(l) = 0$ berechnen. Wir erhalten

$$\lambda'_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \sigma, \quad \lambda''_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \sigma.$$

Wegen (119) folgt

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + A_n \quad (|A_n| \leq \sigma) \quad (120)$$

oder

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + O(1), \quad (121)$$

wobei wir wie immer mit $O(1)$ eine Größe bezeichnen, die dem absoluten Betrag nach für alle Werte von n beschränkt bleibt. Kehren wir zu der ursprünglichen Veränderlichen zurück, so erhalten wir

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \left[\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx \right]^{-2} + O(1) \quad (122)$$

und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx \right]^2. \quad (123)$$

Dieselben asymptotischen Ausdrücke für die Eigenwerte ergeben sich auch für andere Randbedingungen. Dies erkennt man unmittelbar, wenn man die Differentialgleichung $u'' + \mu u = 0$ für die verschiedenen Randbedingungen betrachtet.

91. Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenfunktionen. Da wir einen asymptotischen Ausdruck für die Eigenwerte kennen, können wir auch asymptotische Ausdrücke für die Eigenfunktionen aufstellen, wenn wir dieselbe Methode anwenden, die wir früher bei der Herleitung der asymptotischen Ausdrücke für die Hermite-schen und Legendreschen Polynome benutzt haben [III/2, 163, 164].

Mit Hilfe der angegebenen Transformation der Veränderlichen können wir unsere Differentialgleichung in die Gestalt (116)

$$u''(t) + (\lambda - s(t)) u(t) = 0$$

überführen.

Die Eigenwerte λ_n sind, wie wir wissen [78], für große Werte von n positiv; im folgenden nehmen wir an, n sei so groß, daß $\lambda_n > 0$ gilt. Es seien $u_n(t)$ die Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n gehören. Dann können wir

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = s(t) u_n(t)$$

schreiben und erhalten

$$u_n(t) = a_n \sin \sqrt{\lambda_n} t + b_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau. \quad (124)$$

Auf das rechts stehende Integral wenden wir die Bunjakowskische Ungleichung an:

$$\left[\int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau \right]^2 \leq \int_0^t u_n^2(\tau) d\tau \int_0^t s^2(\tau) \sin^2 \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau.$$

Hieraus ergibt sich für alle t aus dem Intervall $[0, l]$ die Abschätzung

$$\left[\int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau \right]^2 \leq \int_0^l s^2(\tau) d\tau, \quad (125)$$

wobei wir benutzt haben, daß die Funktionen $u_n(t)$ normiert sind.

Es sei $\varphi_n(x)$ eine Eigenfunktion der ursprünglichen Differentialgleichung (1), die wir aus $u_n(t)$ mit Hilfe der Transformationen (114) und (115) erhalten. Aus diesen Transformationen folgt unmittelbar

$$\int_a^b r(x) \varphi_n^2(x) dx = \int_0^l u_n^2(t) dt = 1, \quad (126)$$

d. h., die übliche Normierung von $u_n(t)$ entspricht der Normierung von $\varphi_n(x)$ mit dem Gewicht $r(x)$. Die Randbedingung $u(0) = 0$ liefert uns $b_n = 0$, und wir können den Ausdruck (124) in der Gestalt

$$u_n(t) = a_n \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{m_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (127)$$

schreiben, wobei die Funktion $m_n(t)$ wegen der Ungleichung (125) für alle ganzen positiven n und alle t aus dem Intervall $[0, l]$ beschränkt bleibt; es existiert also eine positive Zahl A derart, daß

$$|m_n(t)| \leq A \quad (128)$$

gilt. Erheben wir beide Seiten von (127) ins Quadrat, integrieren über das Grundintervall und berücksichtigen, daß die Funktionen $u_n(t)$ normiert sind, so erhalten wir

$$1 = a_n^2 \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} t dt + \frac{2a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l m_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^l m_n^2(t) dt.$$

Das erste der Integrale auf der rechten Seite läßt sich geschlossen berechnen, die anderen beiden bleiben wegen der Bedingung (128) dem absoluten Betrag nach für alle Werte von n beschränkt. Somit ergibt sich

$$1 = \frac{l}{2} a_n^2 - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} l}{4\sqrt{\lambda_n}} a_n^2 + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{\lambda_n} q_n, \quad (129)$$

wobei die Größen p_n und q_n dem absoluten Betrag nach bei wachsendem n beschränkt bleiben. Aus dieser Formel folgt unmittelbar, daß $|a_n|$ für genügend große n größer als eine positive Zahl bleibt. Durch Ausklammern von a_n^2 auf der rechten Seite folgt

$$1 = a_n^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} l}{4\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{a_n \sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{a_n^2 \lambda_n} q_n \right).$$

Bei wachsendem n kann der Faktor a_n^2 nicht beliebig groß werden, da der Klammerausdruck für große n gegen den von 0 verschiedenen Grenzwert $\frac{l}{2}$ strebt und das Produkt dieser beiden Ausdrücke nach der letzten Gleichung gleich 1 ist. Da also a_n bei wachsendem n beschränkt bleibt, können wir die Beziehung (129) in der Gestalt

$$1 = \frac{l}{2} a_n^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \quad (130)$$

schreiben, wobei wir wie immer mit $O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Größe bezeichnen, für die das Produkt $x_n \cdot O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ bei unbeschränkt wachsendem n beschränkt bleibt. Die letzte Beziehung läßt sich auch in der Gestalt

$$a_n^2 = \frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

schreiben, aus der

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

folgt. Setzen wir diese Beziehung in (127) ein, so erhalten wir schließlich

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \quad (131)$$

mit

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = \frac{p_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

wobei die Funktion $p_n(t)$ dem absoluten Betrag nach für alle n und alle t aus dem Intervall $0 \leq t \leq l$ beschränkt ist.

Aus (121) folgt

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \quad \text{oder} \quad \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

und damit

$$\sin \sqrt{\lambda_n} t = \sin \frac{n\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hierbei ist $O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{q_n(t)}{n}$, und $q_n(t)$ ist eine dem absoluten Betrag nach für alle n und alle t aus $[0, l]$ beschränkte Funktion. Setzen wir den letzten Ausdruck in (131) ein, so finden wir für die normierten Funktionen $u_n(t)$ den asymptotischen Ausdruck

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (132)$$

Kehren wir mit Hilfe von (114) und (115) zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, so erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l} \sqrt{p(x) r(x)}} \sin \left[\frac{n\pi}{l} \int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx \right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (133)$$

Dabei sind die Eigenfunktionen durch die Beziehung (126) normiert; ferner ist hier $O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{r_n(x)}{n}$, wobei die Funktionen $r_n(x)$ dem absoluten Betrag nach für alle n und alle x aus $[a, b]$ beschränkt sind.

92. Das Ritzsche Verfahren. Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'] + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0 \quad (134)$$

ist die Eulersche Gleichung des Integrals

$$\int_a^b [p(x) y'^2 + q(x) y^2] dx \quad (135)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_a^b r(x) y^2(x) dx = 1.$$

Wie wir gesehen haben, führt die Ermittlung der aufeinanderfolgenden Eigenwerte und Eigenfunktionen zum Extremalproblem für das Integral (135). Hieraus ergibt sich ein für die Praxis geeignetes Verfahren zur näherungsweise Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Dieses Verfahren (das Ritzsche Verfahren) haben wir bereits bei der Ermittlung des absoluten Extremums eines Integrals beschrieben.

Wir benutzen eine Folge linear unabhängiger Funktionen $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., die den Randbedingungen genügen, bilden eine Linearkombination

$$y = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} v_k(x) \quad (136)$$

und setzen sie in das Integral

$$J(y) = \int_a^b \{p(x) y'^2 + [q(x) - \lambda r(x)] y^2\} dx$$

ein. Durch Ausführung der Quadraturen erhalten wir eine quadratische Form in den Größen $a_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Setzen wir ihre partiellen Ableitungen nach den $a_k^{(n)}$ gleich 0, so gelangen wir zu einem System von n homogenen Gleichungen mit den n Unbekannten $a_k^{(n)}$. Setzen wir die Determinante dieses Systems gleich 0, so erhalten wir eine Gleichung n -ten Grades für λ . Die Wurzeln $\lambda_1^{(n)}$, ..., $\lambda_n^{(n)}$ dieser Gleichung können als Näherungswerte für die ersten n Eigenwerte des Problems dienen. Für jeden derartigen Näherungswert kann man aus unserem homogenen Gleichungssystem ein System von Zahlen $a_k^{(n)}$ finden

und nach (136) die zugehörige Funktion y konstruieren, die man näherungsweise als zugehörige Eigenfunktion auffassen kann. Die Konvergenz dieses Verfahrens hängt wesentlich von der Auswahl der „Koordinatenfunktionen“ $v_k(x)$ ab. Wir geben hierzu lediglich einige Resultate aus einer Arbeit von N. KRYLOFF aus den *Mémoires des Sciences Math.* **49** (1931) an.

Wir nehmen an, unsere Differentialgleichung besitze die Gestalt

$$y'' + \lambda r(x) y = 0 \quad (r(x) > 0). \quad (137)$$

Die Randbedingungen wählen wir in der einfachsten Form $y(0) = y(1) = 0$. Setzen wir $r_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$, so kann die Differenz zwischen dem exakten Wert von λ_m und der n -ten Näherung durch

$$|\lambda_m - \lambda_m^{(n)}| \leq \frac{2\lambda_m^2 \max r^{3/2}(x)}{(n+1)^2 \pi^2 \min \sqrt{r(x)} - 2\lambda_m \max r^{3/2}(x)}$$

oder

$$\left| \frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m} \right| \leq \frac{\lambda_m A}{(n+1)^2 \pi^2 - \lambda_m B} \quad (138)$$

abgeschätzt werden; dabei ist

$$A = [\max r(x) - \min r(x)] \sqrt{\frac{\max r(x)}{\min r(x)}}, \quad B = 2 \max r(x).$$

In den praktischen Rechnungen benutzt man oft an Stelle trigonometrischer Funktionen Polynome. Wir legen wie soeben die Differentialgleichung (137) mit den Randbedingungen $y(-1) = y(1) = 0$ zugrunde und wählen $v_n(x) = (1-x^2)x^{n-1}$ (der Faktor $1-x^2$ gewährleistet, daß die Randbedingungen erfüllt sind). Bei dieser Wahl der Funktionen $v_n(x)$ gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m} \right| < \frac{\lambda_m^{(n)} \max r(x)}{(n+1)(n+2)}. \quad (139)$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, falls nur vorausgesetzt wird, daß die Funktion $r(x)$ stetig ist. Hat die Funktion $r(x)$ noch eine stetige Ableitung, so gilt die genauere Abschätzung

$$\left| \frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m} \right| < \frac{N \lambda_m^{(n)}}{(n+1)^2 (n+2)}$$

mit

$$N = \left\{ \max \left| \frac{r'(x)}{\sqrt{r(x)}} \right| + \sqrt{\lambda_m^{(n)}} \sqrt[4]{\frac{\max r^5(x)}{\min r(x)}} \right\}^2.$$

Eine noch genauere Abschätzung kann man unter der Voraussetzung herleiten, daß die Funktion $r(x)$ eine zweite stetige Ableitung besitzt. Zu dieser Frage vgl. auch das Buch von S. G. MICHLIN, *Variationsmethoden der mathematischen Physik*.

93. Ein Beispiel von Ritz. Wir bringen jetzt ein Beispiel für die näherungsweise Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Bei diesem Beispiel können die Eigenwerte und Eigenfunktionen auch exakt in geschlossener Form bestimmt werden; dadurch haben wir die Möglichkeit, die Güte der Konvergenz des Verfahrens zu beurteilen. Das Beispiel findet man in einer Arbeit von RITZ (*J. reine angew. Math.* **135** (1909)). Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y'' + k^2 y = 0$$

mit den Randbedingungen $y(-1) = y(1) = 0$, wobei k^2 an Stelle des Parameters λ steht. Die Berechnung der Schwingungen einer an den Endpunkten eingespannten Saite

führt auf diese Randwertaufgabe. Der Grundton der Saite wird durch die Lösung

$$y_1 = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad k_1 = \frac{\pi}{2},$$

der erste Oberton durch

$$y_2 = \sin \pi x, \quad k_2 = \pi,$$

der zweite Oberton durch

$$y_3 = \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad k_3 = \frac{3\pi}{2}$$

dargestellt, usw. Wir suchen Näherungsausdrücke für die geraden Lösungen in Gestalt eines Polynoms mit geradzahligem Potenzen von x . Ein solches Polynom, das den Randbedingungen genügt, hat allgemein die Gestalt

$$y = (1 - x^2) (a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^{2n}).$$

Beschränken wir uns nun auf zwei Glieder,

$$y = (1 - x^2) (a_0 + a_1 x^2),$$

und setzen diesen Ausdruck in das Integral

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - k^2 y^2) dx$$

ein, so erhalten wir

$$J(y) = \frac{8}{315} [(105 - 42k^2) a_0^2 + (42 - 12k^2) a_0 a_1 + (33 - 2k^2) a_1^2].$$

Setzen wir die partiellen Ableitungen nach a_0 und a_1 gleich 0, so gelangen wir zu dem Gleichungssystem

$$(35 - 14k^2) a_0 + (7 - 2k^2) a_1 = 0,$$

$$(21 - 6k^2) a_0 + (33 - 2k^2) a_1 = 0,$$

und durch Nullsetzen der Determinante ergibt sich die Gleichung

$$k^4 - 28k^2 + 63 = 0$$

mit den Wurzeln

$$k_1^2 = 2,46744, \quad k_3^2 = 25,6.$$

Aus den angegebenen exakten Lösungen folgt

$$k_1^2 = \frac{\pi^2}{4} = 2,467401100 \dots, \quad k_3^2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,207.$$

Zur Berechnung der nächsten Näherung machen wir den Ansatz

$$y = (1 - x^2) (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4).$$

Für k^2 ergibt sich die Gleichung

$$4k^6 - 450k^4 + 8910k^2 - 19305 = 0,$$

aus der sich

$$k_1^2 = 2,467401108 \dots, \quad k_3^2 = 23,301 \dots$$

ergibt. Setzen wir den erhaltenen Näherungswert für k_1^2 in die Koeffizienten des Gleichungssystems für a_0, a_1, a_2 ein, so finden wir diese Koeffizienten bis auf einen konstanten Faktor, den wir so wählen können, daß die erhaltene Lösung die Bedingung

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = 1$$

erfüllt, der die exakte Lösung $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ ebenfalls genügt. Auf diese Weise gelangen wir zu der Näherungsgleichung

$$y = (1 - x^2) (1 - 0,233\,430x^2 + 0,018\,962x^4) .$$

Um wieviel sich y von $\cos \frac{\pi x}{2}$ unterscheidet, zeigt die folgende Tabelle, in der die Mantissen der dekadischen Logarithmen dieser Funktionen angegeben sind:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lg \cos \frac{\pi x}{2}$	994 620	978 206	949 881	907 958	849 485	769 219	657 047	489 982	194 332
$\lg y$	994 621	978 212	949 889	907 952	849 493	769 221	657 043	489 978	194 345

Die ungeraden Eigenfunktionen und die zugehörigen Eigenwerte kann man näherungsweise durch den Ansatz

$$y = (1 - x^2) (a_0x + a_1x^3 + \dots + a_nx^{2n+1})$$

gewinnen.

§ 2. Elliptische Differentialgleichungen

94. Das Newtonsche Potential. Wir gehen nun zur Untersuchung von Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen über und beginnen mit der Laplaceschen Differentialgleichung. Das Dirichletsche Problem haben wir für diese Differentialgleichung im Fall eines Kreises und einer Kugel bereits gelöst. Außer der Laplaceschen Differentialgleichung behandeln wir im vorliegenden Paragraphen auch andere elliptische Differentialgleichungen. Hierfür kann man Probleme aufstellen, die den Problemen von DIRICHLET und NEUMANN für die Laplacesche Differentialgleichung entsprechen. In der Physik treten diese Differentialgleichungen gewöhnlich bei der Untersuchung statischer Probleme oder stationärer Vorgänge auf. Wir erinnern daran, daß man auf die Laplacesche Differentialgleichung beispielsweise bei der Untersuchung elektrostatischer Felder und stationärer Wärmeströmungen geführt wird.

Bei der Untersuchung von Randwertproblemen der Laplaceschen Differentialgleichung hat das Newtonsche Potential eine große Bedeutung. Zunächst wiederholen wir die wichtigsten Definitionen, die das Newtonsche Potential betreffen, und führen einige neue Begriffe ein.

Es sei D ein beschränkter abgeschlossener Bereich des dreidimensionalen Raumes, $\mu(N)$ eine stetige Funktion der Punkte dieses Bereiches und r die Entfernung von einem Punkt M bis zu einem veränderlichen Punkt N aus D . Das *Potential einer räumlichen Massebelegung* wird bekanntlich durch den Ausdruck

$$v(M) = \iiint_D \frac{\mu(N)}{r} dv \quad (1)$$

definiert. Entsprechend wird das *Potential einer einfachen Schicht*, die auf einer Fläche S mit der Dichte $\mu(N)$ ausgebreitet ist, durch den Ausdruck

$$u(M) = \iint_S \frac{\mu(N)}{r} ds \quad (2)$$

erklärt. Bekanntlich [II, 90, 210] haben die Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ außerhalb der Massen Ableitungen jeder Ordnung und erfüllen die Laplacesche Differentialgleichung. Für die weitere Darlegung ist vor allem wichtig, die Eigenschaften der Fläche S zu formulieren, die wir im folgenden als erfüllt annehmen wollen. Die ersten genauen Formulierungen findet man in der Arbeit von A. M. LIAPOUNOFF: Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (J. de Math. 1898, S. 241). Diese Arbeit hat für die Entwicklung der Potentialtheorie und für die Untersuchung von Randwertproblemen der Laplaceschen Differentialgleichung eine große Bedeutung. In diesem und in den nächsten Abschnitten folgen wir der Darstellung von LIAPOUNOFF.

Die Fläche S möge geschlossen sein und folgende Forderungen erfüllen:

1. In jedem Punkt von S soll eine Tangentialebene existieren.
2. Es soll eine Zahl $d > 0$ existieren derart, daß jede Kugel mit dem Radius d oder mit einem kleineren Radius um einen beliebigen Punkt N_0 von S die Fläche S in zwei Teilflächen zerlegt, von denen die eine im Innern und die andere im Äußeren der Kugel liegt, und daß die Geraden, die parallel zur Normalen von S im Punkt N_0 verlaufen, die Teilfläche von S , die im Innern der Kugel liegt, in nicht mehr als in einem Punkt schneiden.
3. Ist ϑ der spitze Winkel, der von den Normalen der Fläche S in zwei ihrer Punkte N_1 und N_2 gebildet wird, und $r_{1,2}$ die Entfernung zwischen diesen beiden Punkten, so sollen zwei positive Zahlen a und α existieren, die nicht von der Wahl der Punkte N_1 und N_2 abhängen, so daß die Ungleichung

$$\vartheta \leq a r_{1,2}^\alpha \quad (\alpha \leq 1) \quad (3)$$

für beliebige N_1 und N_2 auf S erfüllt ist.

Geschlossene Flächen, die diesen Bedingungen genügen, nennt man gewöhnlich *Liapounoffsche Flächen*. Weiterhin führen wir noch einige Voraussetzungen in bezug auf S ein und ziehen hieraus Schlußfolgerungen.

Aus (3) folgt unmittelbar, daß sich die Tangentialebene bei einer Verschiebung des Berührungspunktes längs der Fläche stetig ändert. Jetzt ziehen wir eine wichtige Folgerung aus der dritten Bedingung. Es sei N_0 ein Punkt der Fläche S . Wir benutzen ihn als Koordinatenursprung, legen die Z -Achse in Richtung der äußeren Normalen von S in N_0 und die X - und Y -Achse irgendwie in die Tangentialebene. Dann kann man die Gleichung der im Innern der Kugel C_0 mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius d liegenden Teilfläche von S in expliziter Form angeben:

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta). \quad (4)$$

Mit ξ, η, ζ bezeichnen wir stets die Koordinaten eines veränderlichen Punktes N der Fläche S , mit x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes M . Das angegebene Koordinatensystem heißt *lokales Koordinatensystem im Punkt N_0* .

Aus der Existenz einer Tangentialebene und ihrer stetigen Änderung folgt, daß die Ableitungen erster Ordnung $\zeta_\xi(\xi, \eta)$ und $\zeta_\eta(\xi, \eta)$ existieren und stetig sind. Wir nehmen an, daß d hinreichend klein ist. Beispielsweise kann man die Bedingung

$$a d^\alpha \leq 1 \quad (5)$$

voraussetzen, so daß der Winkel ϑ_0 zwischen den Normalen in N_0 und der Normalen in einem beliebigen Punkt N der Teilfläche von S , die im Innern der Kugel C_0 liegt, den Wert $\frac{\pi}{2}$ nicht erreicht. Bezeichnen wir mit r_0 ($r_0 < d$) die Entfernung $N_0 N$, so

erhalten wir

$$\cos \vartheta_0 \geq 1 - \frac{1}{2} \vartheta_0^2 \geq 1 - \frac{1}{2} a^2 r_0^{2\alpha}, \quad (6)$$

woraus

$$\frac{1}{\cos \vartheta_0} = \sqrt{1 + \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2} \leq 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \leq 2 \quad (7)$$

und damit wegen (5)

$$\zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2 \leq 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} \leq 3a^2 r_0^{2\alpha} \quad (8)$$

folgt. Führen wir die Polarkoordinaten $\xi = \varrho_0 \cos \theta$, $\eta = \varrho_0 \sin \theta$ ein, so gilt

$$\zeta_{\varrho_0}^2 = (\zeta_\xi \cos \theta + \zeta_\eta \sin \theta)^2 \leq \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2,$$

woraus wegen (8)

$$|\zeta_{\varrho_0}| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha \quad (9)$$

und

$$|\zeta| \leq \sqrt{3} a d^\alpha \varrho_0 \leq \sqrt{3} \varrho_0 \quad (10)$$

hervorgeht; daher gilt

$$r_0 = \sqrt{\varrho_0^2 + \zeta^2} \leq 2\varrho_0. \quad (11)$$

Die Ungleichung (9) liefert

$$|\zeta_{\varrho_0}| \leq \sqrt{3} a 2^\alpha \varrho_0^\alpha, \quad (12)$$

woraus sich $|\zeta| \leq \frac{\sqrt{3} 2^\alpha}{\alpha + 1} a \varrho_0^{\alpha+1}$ und damit erst recht

$$|\zeta| \leq 2a \varrho_0^{\alpha+1} \quad (13)$$

ergibt; denn es ist $2^\alpha \leq \alpha + 1$ für $\alpha \leq 1$. Schließlich folgt aus (6)

$$1 - \cos \vartheta_0 \leq 2^{2\alpha-1} a^2 \varrho_0^{2\alpha}. \quad (14)$$

Wir leiten noch eine Abschätzung für $\cos(\mathbf{n}, X)$ und $\cos(\mathbf{n}, Y)$ her, wobei $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor der äußeren Normalen von S im Punkt N ist. Auf Grund von (8) gilt

$$|\cos(\mathbf{n}, X)| = \frac{|\zeta_\xi|}{\sqrt{1 + \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2}} \leq |\zeta_\xi| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha$$

und ganz analog

$$|\cos(\mathbf{n}, Y)| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha.$$

Weiterhin ist

$$\cos(\mathbf{n}, Z) = \cos \vartheta_0.$$

Nun fassen wir alle Abschätzungen zusammen, die wir soeben hergeleitet haben:

$$\begin{aligned} |\zeta| &\leq c \varrho_0^{1+\alpha}, & |\cos(\mathbf{n}, X)| &\leq c \varrho_0^\alpha, & |\cos(\mathbf{n}, Y)| &\leq c \varrho_0^\alpha, \\ 1 - \cos(\mathbf{n}, Z) &\leq c \varrho_0^{2\alpha}, & |\cos(\mathbf{n}, Z)| &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dabei haben wir zur Vereinfachung der folgenden Formeln mit c eine Konstante bezeichnet, die gleich der größten in den entsprechenden Abschätzungen vorkommenden Konstante ist. In den Ungleichungen (15) kann man offenbar auf den

rechten Seiten ϱ_0 durch r_0 ersetzen. In den Punkten der Schnittkurve von S mit C_0 gilt $r_0 = d$, und aus (11) folgt $\varrho_0 \cong \frac{1}{2}d$. Somit sehen wir, daß diejenige Teilfläche von S , die durch den Zylinder ausgeschnitten wird, dessen Achse mit der Z -Achse (der Normalen im Punkt N_0) identisch ist und dessen Radius gleich $\frac{1}{3}d$ ist, im Innern von C_0 liegt. Diese Teilfläche von S bezeichnen wir im folgenden mit σ_0 . Ihre Projektion σ'_0 auf die X, Y -Ebene (die Tangentialebene im Punkte N_0) ist die Kreisfläche

$$\xi^2 + \eta^2 \cong \frac{d^2}{9}. \quad (16)$$

Die Formeln (15) gelten für alle Punkte N , die auf σ_0 liegen. Wir führen noch die Teilfläche σ_1 von S ein, die aus S durch einen Kreiszylinder ausgeschnitten wird, dessen Achse mit der Z -Achse identisch ist und dessen Grundfläche einen Radius $d_1 < \frac{d}{2}$ besitzt. Wir werden benutzen, daß d_1 noch willkürlich gewählt werden kann.

Auf σ_1 gelten ebenfalls die Abschätzungen (15). Die Projektion σ'_1 der Teilfläche σ_1 auf die Tangentialebene im Punkt N_0 ist die Kreisfläche

$$\xi^2 + \eta^2 \cong d_1^2 \quad \left(d_1 < \frac{d}{2} \right). \quad (17)$$

Wir untersuchen nun die Eigenschaften des Potentials einer einfachen Schicht und eines anderen Potentials – des Potentials einer Doppelschicht, das sich ebenfalls, wie das Potential einer einfachen Schicht, als Integral über die Fläche S darstellen läßt.

95. Das Potential einer Doppelschicht. Bei der Konstruktion der Funktionen (1) und (2) spielt die singuläre Lösung $\frac{1}{r}$ der Laplaceschen Differentialgleichung eine grundlegende Rolle. Jetzt führen wir eine andere singuläre Lösung dieser Differentialgleichung ein. Es sei N ein Raumpunkt und l eine feste Richtung im Punkt N . In dieser Richtung tragen wir eine Strecke NN' der Länge ε ab und bringen im Punkt N eine Ladung $\frac{1}{\varepsilon}$ und im Punkt N' eine Ladung $-\frac{1}{\varepsilon}$ an. Bezeichnen wir mit r und r' die Entfernung von einem veränderlichen Punkt M zu den Punkten N bzw. N' , so ist das Potential der beiden Ladungen gleich

$$u_0(M) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{r' - r}{rr'} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{r'^2 - r^2}{(r' + r) rr'}.$$

Wir führen den Winkel $\varphi = (r, l)$ ein, wobei wir uns r vom Punkt M zum Punkt N gerichtet denken.

Unter Berücksichtigung der Beziehung $r'^2 = r^2 + \varepsilon^2 + 2r\varepsilon \cos \varphi$ können wir

$$u_0(M) = \frac{\varepsilon + 2r \cos \varphi}{(r' + r) rr'}$$

schreiben, und beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir das Potential eines Dipols mit dem Moment 1 in der Richtung l :

$$u_0(M) = \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß man dieses Potential als Ableitung von $\frac{1}{r}$ nach der Richtung l schreiben kann, wobei nach dem Punkt M differenziert werden muß:

$$\frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (18)$$

Denn bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes N und mit x, y, z die Koordinaten des Punktes M , so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{(\xi - x) \cos(l, x) + (\eta - y) \cos(l, y) + (\zeta - z) \cos(l, z)}{r^3},$$

aus der wegen

$$\cos \varphi = \frac{\xi - x}{r} \cos(l, x) + \frac{\eta - y}{r} \cos(l, y) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(l, z)$$

gerade die Beziehung (18) folgt. Die Funktion (18) erfüllt offenbar die Laplacesche Differentialgleichung und hat im Punkt N eine Singularität. Nun bedecken wir die Fläche S derart mit Dipolen, daß in jedem Punkt der Fläche die Richtung des Dipols mit der Richtung n der äußeren Flächennormalen, d. h. der Richtung von n , identisch ist; ferner sei $\mu(N)$ das Moment des Dipols, der sich im Punkt N der Fläche befindet. Wir gelangen auf diese Weise zum Begriff des Potentials einer Doppelschicht, das durch den Ausdruck

$$w(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} dS \quad (\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{n})) \quad (19)$$

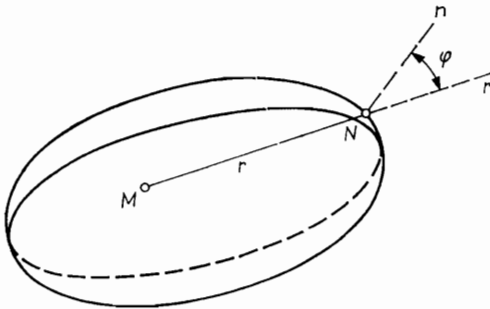


Abb. 5

definiert wird (Abb. 5). Im Äußeren von S hat die Funktion (19) überall Ableitungen jeder Ordnung und erfüllt die Laplacesche Differentialgleichung. Sie läßt sich dort nach den Koordinaten des Punktes M unter dem Integralzeichen differenzieren. Ist der Punkt M mit einem auf der Fläche liegenden Punkt N_0 identisch, so verschwindet r für $N = N_0$, und das Integral (19) ist in diesem Fall ein uneigentliches. Wir zeigen jetzt, daß dieses uneigentliche Integral konvergiert.

Es genügt, den Integranden auf der Teilfläche σ_0 in der Nähe des Punktes N_0 zu untersuchen. Dann können wir die Gleichung der Fläche (4) im lokalen Koordinatensystem des Punktes N_0 zugrunde legen.

Es gilt für $\cos \varphi_0 = \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$, wobei $\mathbf{r}_0$ den Einheitsvektor in Richtung N_0N bezeichnet,

$$\cos \varphi_0 = \frac{\xi}{r_0} \cos(\mathbf{n}, X) + \frac{\eta}{r_0} \cos(\mathbf{n}, Y) + \frac{\zeta}{r_0} \cos(\mathbf{n}, Z) \quad ((\mathbf{n}, Z) = \vartheta_0). \quad (20)$$

Hierbei bezeichnen ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes N , und es ist

$$r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Unter Berücksichtigung der Abschätzungen (15) und der Ungleichungen $|\xi| \leq \varrho_0$, $|\eta| \leq \varrho_0$, $\varrho_0 \leq r_0$ erhalten wir

$$\left| \frac{\cos \varphi_0}{r^2} \right| \leq \frac{3c\varrho_0^2}{\varrho_0^2} \quad (\varrho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}),$$

d. h.

$$\left| \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} \right| \leq \frac{b}{\varrho_0^{2-\alpha}}, \quad (21)$$

wobei b eine Konstante bezeichnet. Außerdem gilt für die stetige Funktion $\mu(N)$ die Abschätzung

$$|\mu(N)| \leq A \quad (N \text{ auf } S) \quad (22)$$

mit $A = \max |\mu(N)|$ für alle N auf S . Ersetzen wir nun das Integral über σ_0 durch ein Integral über die Projektion σ'_0 der Fläche σ_0 auf die X, Y -Ebene (den Kreis mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius $\frac{d}{3}$), so erhalten wir das Integral

$$\iint_{\sigma'_0} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos \varphi_0}{r} \cdot \frac{d\xi d\eta}{\cos \theta_0},$$

wobei wegen (21), (22) und (15) der Integrand die Abschätzung

$$\left| \mu(\xi, \eta) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2 \cos \theta_0} \right| \leq \frac{2Ab}{\varrho_0^{2-\alpha}}$$

zuläßt, aus der gerade die Konvergenz des Integrals (19) folgt, wenn der Punkt M auf der Fläche S liegt. Somit ist die Funktion (19) im ganzen Raume erklärt.

Nun betrachten wir das Integral (19) für $\mu(N) \equiv 1$. Wegen (18) gilt die Gleichung

$$w_1(M) = \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} dS = - \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS, \quad (23)$$

wobei wir annehmen, daß die Differentiation nach der Richtung n im Punkt N , der Integrationsveränderlichen, durchgeführt wird. Deshalb haben wir vor das Integral ein Minuszeichen gesetzt.

Zunächst setzen wir voraus, daß sich der Punkt im Äußeren der geschlossenen Fläche S befindet. Dann ist $\frac{1}{r}$ im Innern von S eine harmonische Funktion mit stetigen Ableitungen jeder Ordnung bis zur Fläche S , und auf Grund einer der Grundeigenschaften der harmonischen Funktionen gilt [II, 204]

$$w_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS = 0 \quad (M \text{ außerhalb von } S).$$

Der Punkt M möge sich jetzt im Innern von S befinden. Wir schließen ihn in eine kleine Kugel C mit dem Radius ϱ um M ein. In dem räumlichen Bereich D' zwischen C und S ist die Funktion $\frac{1}{r}$ harmonisch, und es gilt

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS + \iint_C \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS = 0.$$

Die in bezug auf den Bereich D' äußere Normale ist zum Mittelpunkt der Kugel gerichtet; folglich gilt

$$\left. \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right|_C = \frac{1}{\varrho^2},$$

so daß sich die vorhergehende Beziehung in der Gestalt

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \frac{1}{\varrho^2} \iint_C dS = 0 \quad \text{oder} \quad \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + 4\pi = 0$$

schreiben läßt, woraus

$$w_1(M) = - \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 4\pi \quad (M \text{ innerhalb von } S)$$

folgt.

Schließlich setzen wir voraus, daß der Punkt M mit einem auf der Fläche liegenden Punkt N_0 identisch ist. Wir führen eine Kugel C mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius $d_1 < \frac{d}{2}$ ein und ersetzen die Teilfläche σ_1 von S , die im Innern von C liegt, durch eine Teilfläche C' der Kugel C derart, daß der Punkt N_0 im Äußeren der erhaltenen Fläche liegt, die aus $S - \sigma_1$ und der Teilfläche C' der Kugel C besteht. Dann gilt

$$\iint_{S-\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0. \quad (24)$$

Der zweite Summand läßt sich wie vorhin berechnen; er ist gleich dem räumlichen Winkel, unter dem die Teilfläche C' der Kugel C vom Mittelpunkt N_0 dieser Kugel aus erscheint:

$$\iint_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \frac{1}{d_1^2} \iint_{C'} dS. \quad (25)$$

Die Schnittkurve l der Kugel C mit der Fläche S besitzt die Eigenschaft, daß für die Koordinaten ζ der Punkte dieser Kurve wegen (15) die Ungleichung $|\zeta| \leq \alpha d_1^{1+\alpha}$ gilt und die Punkte von l für $d_1 \rightarrow 0$ der X, Y -Ebene beliebig nahekommen.

Hieraus folgt, daß der räumliche Winkel (25) gegen 2π strebt, wenn d_1 gegen 0 strebt, und die Formel (24) liefert beim Grenzübergang

$$w_1(M) = - \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 2\pi \quad (M \text{ auf } S).$$

Wir erhalten damit

$$\iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi & (M \text{ innerhalb von } S), \\ 0 & (M \text{ außerhalb von } S), \\ 2\pi & (M \text{ auf } S). \end{cases} \quad (26)$$

Nun betrachten wir noch eine nicht geschlossene Fläche S_1 und das Integral

$$w_2(M) = \int_{S_1} \frac{\cos \varphi}{r^2} dS; \quad (27)$$

dabei nehmen wir an, daß der Punkt M nicht auf S_1 liegt. Wir führen den Kegel mit der Spitze M und der Grundfläche S_1 ein; ferner sei σ_1 derjenige Teil der Kugel- fläche mit dem Mittelpunkt M und hinreichend kleinem Radius ϱ , der im Innern dieses Kegels liegt.

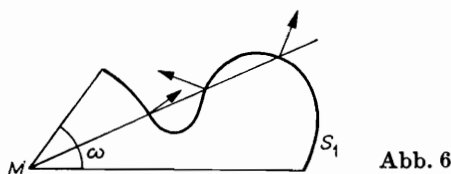


Abb. 6

Wir betrachten das Raumgebiet D , das von S_1 , σ_1 und der Mantelfläche Γ des Kegels begrenzt wird (Abb. 6). (Wir nehmen dabei an, daß diese Flächen wirklich einen Bereich D begrenzen.)

Da die Funktion $\frac{1}{r}$ im Innern von D harmonisch ist, gilt

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{\Gamma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0.$$

Auf Γ ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\cos \varphi}{r^2} = 0.$$

Auf σ_1 ist die Richtung n der Richtung von r entgegengesetzt; damit gilt $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{\varrho^2}$.

Bezeichnen wir mit ω den räumlichen Winkel, unter dem die Fläche S_1 vom Punkt M aus erscheint, so erhalten wir aus der letzten Beziehung

$$\omega = -\iint_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \iint_{S_1} \frac{\cos \varphi}{r^2} dS,$$

d. h., das Integral (27) liefert den räumlichen Winkel, unter dem S_1 vom Punkt M aus erscheint. Hierbei zeigt die Richtung n auf S_1 ins Äußere von D . Der Radiusvektor von M kann die Fläche S_1 in mehreren Punkten schneiden. Haben wir beispielsweise drei Schnittpunkte, so ist in zwei von ihnen $\cos \varphi > 0$ und im dritten $\cos \varphi < 0$

(Abb. 6). Das Element des betrachteten Integrals, d. h. $\frac{\cos \varphi}{r^2} dS$, stellt den elementaren räumlichen Winkel $d\omega$ dar, unter dem das Flächenelement der Fläche vom Punkt M aus erscheint, wobei dieser Winkel für $\cos \varphi > 0$ positiv und für $\cos \varphi < 0$ negativ ist. Liegt M auf S_1 , so muß man das Integral (27) als uneigentliches Integral

auffassen, wie wir dies früher für eine geschlossene Fläche getan haben. Aus diesen Überlegungen kann man ebenfalls die Beziehungen (26) herleiten.

Im folgenden fordern wir von der Fläche S , daß bei einer beliebigen Lage des Punktes M eine Ungleichung

$$\iint_S \frac{|\cos \varphi|}{r^2} dS \leq c \quad (28)$$

erfüllt ist, wobei c eine feste positive Zahl bezeichnet. Wir setzen beispielsweise voraus, daß eine ganze positive Zahl k existiert, so daß man bei jeder beliebigen Lage von M die Fläche S in k Teilflächen zerlegen kann derart, daß jede durch M hindurchgehende Gerade jede Teilfläche nur in einem Punkt schneidet, wobei die Funktion $\cos \varphi$ auf jeder dieser Teilflächen ihr Vorzeichen beibehält. Dann ist die Bedingung (28) mit $c = 4\pi k$ erfüllt.

Die Formeln (26) zeigen, daß das Potential der Doppelschicht (19) für $\mu(N) \equiv 1$ eine sprunghafte Unstetigkeit hat, wenn M durch die Fläche S hindurchgeht. Wir untersuchen nun diese Frage im Fall einer beliebigen stetigen Dichte.

Es sei N_0 ein fester Punkt der Fläche S . Wir bilden das Doppelschichtpotential

$$w_0(M) = \iint_S [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} dS \quad (29)$$

und beweisen, daß es stetig bleibt, wenn M im Punkt N_0 durch die Fläche hindurchgeht. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wir schneiden die Teilfläche σ von S aus, die den Punkt N_0 enthält und auf der die Ungleichung

$$|\mu(N) - \mu(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4c} \quad (N \text{ auf } \sigma) \quad (30)$$

erfüllt ist, wobei c diejenige Konstante bezeichnet, die in der Bedingung (28) vorkommt. Zerlegen wir S in die beiden Teilflächen σ und $S - \sigma$, so können wir

$$w_0(M) = w_0^{(1)}(M) + w_0^{(2)}(M) \quad (31)$$

schreiben mit

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(M) &= \iint_{\sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} dS, \\ w_0^{(2)}(M) &= \iint_{S-\sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} dS. \end{aligned} \quad (32)$$

Bei beliebiger Lage des Punktes M gilt

$$|w_0^{(1)}(M)| \leq \iint_{\sigma} |\mu(N) - \mu(N_0)| \frac{|\cos \varphi|}{r^2} dS,$$

woraus wegen (28) und (30)

$$|w_0^{(1)}(M)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (33)$$

folgt. Aus (31) ergibt sich

$$w_0(M) - w_0(N_0) = w_0^{(1)}(M) - w_0^{(1)}(N_0) + [w_0^{(2)}(M) - w_0^{(2)}(N_0)]$$

und daraus

$$|w_0(M) - w_0(N_0)| \leq |w_0^{(1)}(M)| + |w_0^{(1)}(N_0)| + |w_0^{(2)}(M) - w_0^{(2)}(N_0)|$$

oder wegen (33)

$$|w_0(M) - w_0(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |w_0^{(2)}(M) - w_0^{(2)}(N_0)|. \quad (34)$$

Im Doppelschichtpotential $w_0^{(2)}(M)$ ist die Integration über $S - \sigma$ zu erstrecken. Da aber der Punkt N_0 auf σ liegt, ist die Funktion $w_0^{(2)}(M)$ im Punkt N_0 und in einer gewissen Umgebung von N_0 stetig (und besitzt Ableitungen jeder Ordnung).

Somit gilt für alle M , die hinreichend nahe bei N_0 liegen, $|w_0^{(2)}(M) - w_0^{(2)}(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Wegen (34) ist dann die Ungleichung $|w_0(M) - w_0(N_0)| \leq \varepsilon$ erfüllt, und da ε willkürlich ist, folgt hieraus die Stetigkeit der durch (29) definierten Funktion $w_0(M)$ im Punkt N_0 . Weiterhin gilt

$$w_0(M) = w(M) - \mu(N_0) \int_S \int \frac{\cos \varphi}{r^2} dS, \quad (35)$$

wobei $w(M)$ das Doppelschichtpotential (19) ist. Zunächst setzen wir voraus, daß sich der Punkt M auf S befindet; wir bezeichnen ihn in diesem Fall speziell mit N . Dann gilt wegen (26)

$$w_0(N) = w(N) - 2\pi\mu(N_0) \quad (36)$$

und

$$w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \quad (37)$$

wobei $w(N_0)$ der Wert des Integrals (19) im Punkt N_0 ist. Jetzt lassen wir den auf S liegenden Punkt N gegen N_0 streben. Da $w_0(M)$ stetig ist, ergibt sich

$$w_0(N) \rightarrow w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0).$$

Was die rechte Seite der Beziehung (36) betrifft, so sehen wir, daß $w(N)$ hierbei den Grenzwert $w(N_0)$ annimmt, d. h., *die durch (19) definierte Funktion $w(M)$ ist auf der Fläche S stetig.*

Nun setzen wir voraus, daß sich der Punkt M im Innern von S befindet.

Dann gilt wegen (26)

$$w_0(M) = w(M) - 4\pi\mu(N_0). \quad (38)$$

Jetzt lassen wir den Punkt M , der sich im Innern von S befindet, gegen N_0 streben. Da $w_0(M)$ stetig ist, gilt

$$w_0(M) \rightarrow w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \quad (39)$$

In bezug auf die rechte Seite von (38) erkennen wir, daß auch $w(M)$ einen Grenzwert besitzt. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $w_t(N_0)$. Aus (38) und (39) folgt

$$w_t(N_0) - 4\pi\mu(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0)$$

oder

$$w_t(N_0) = w(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \quad (40)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Grenzwert $w_t(N_0)$ und der Wert $w(N_0)$ der Funktion $w(M)$ im Punkt N_0 voneinander verschieden sind, wenn $\mu(N_0) \neq 0$ ist. Befindet sich der Punkt M im Äußeren von S , so gilt an Stelle von (38)

$$w_0(M) = w(M).$$

Aus entsprechenden Überlegungen wie vorhin sehen wir, daß der Grenzwert $w(M)$ existiert, wenn M von außen her gegen den Punkt N_0 strebt. Bezeichnen wir diesen

Grenzwert mit $w_a(N_0)$, so erhalten wir unter Benutzung von (39)

$$w_a(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0) . \quad (41)$$

Bezeichnen wir mit r_0 und φ_0 die Größen r bzw. φ , wenn M mit N_0 identisch ist, so lauten die Relationen (40) und (41)

$$\begin{aligned} w_i(N_0) &= w(N_0) + 2\pi\mu(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) , \\ w_a(N_0) &= w(N_0) - 2\pi\mu(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0) . \end{aligned} \quad (42)$$

Hier ist φ_0 der Winkel, der von der Richtung $\overrightarrow{N_0 N}$ mit dem Einheitsvektor $\mathbf{n}$ auf der äußeren Normalen im veränderlichen Punkt N gebildet wird, $\varphi_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen und der Stetigkeit der Funktion $w(N_0)$ bei einer Änderung von N_0 auf S folgt, daß die durch (19) definierte Funktion $w(M)$ im Innern von S bis an S heran stetig ist. Ebenso ist sie im Äußeren von S bis an S heran stetig. Wir erinnern daran, daß diese Funktion im Innern und im Äußeren von S Ableitungen jeder Ordnung besitzt. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion $w(M)$ gegen 0 strebt, wenn M ins Unendliche rückt. Denn bezeichnen wir mit D die kürzeste Entfernung des im Äußeren von S liegenden Punktes M von der Fläche S [II, 92], so erhalten wir

$$|w(M)| \leq \iint_S \left| \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} \right| dS \leq \frac{A}{D^2} \cdot \text{Flächeninhalt von } S . \quad (43)$$

Hieraus folgt gerade $w(M) \rightarrow 0$, wenn M gegen ∞ strebt. Genauer gesagt: Ist O ein beliebiger fester Punkt, so existiert bei beliebig vorgegebenem positivem ε eine positive Zahl B derart, daß $|w(M)| \leq \varepsilon$ ist, wenn sich nur M im Äußeren der Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius B befindet.

96. Eigenschaften des Potentials einer einfachen Schicht. Das Potential einer einfachen Schicht

$$u(M) = \iint_S \frac{\mu(N)}{r} dS \quad (44)$$

ist ein uneigentliches Integral, wenn M auf S liegt. Es möge M mit dem auf S liegenden Punkt N_0 identisch sein. Wir wollen zeigen, daß das uneigentliche Integral (44) konvergiert. Wie in [95] genügt es, die Teilfläche σ_0 von S zu betrachten, die den Punkt N_0 im Innern enthält. Für σ_0 benutzen wir die Gleichung (4) in lokalen Koordinaten. Dann gilt

$$\iint_{\sigma_0} \frac{\mu(N)}{r_0} dS = \iint_{\sigma'_0} \frac{\mu(\xi, \eta)}{r_0 \cos \vartheta_0} d\xi d\eta .$$

Wegen (15), (22) und $r_0 \leq \varrho_0$ erhalten wir für den Integranden die Abschätzung

$$\left| \frac{\mu(\xi, \eta)}{r_0 \cos \vartheta_0} \right| \leq \frac{2A}{\varrho_0} ,$$

woraus unmittelbar die Konvergenz des Integrals (44) hervorgeht, wenn M auf S liegt. Somit definiert das Integral in (44) eine Größe $u(M)$ bei beliebiger Lage des

Punktes M . Die Funktion $u(M)$ ist in den Punkten M stetig, die nicht auf S liegen. Wir zeigen, daß $u(M)$ auch in jedem auf S liegenden Punkt N_0 stetig ist. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl und σ_1 der durch die Ungleichung (17) bestimmte Teil von S . Wir zeigen, daß man d_1 so klein wählen kann, daß in einer Umgebung von N_0 bei beliebiger Lage des Punktes M die Ungleichung

$$\left| \int \int_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (45)$$

erfüllt ist. Es gilt

$$\left| \int \int_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| \leq \int \int_{\sigma'_1} \frac{A}{\varrho_1} d\xi d\eta, \quad (46)$$

wobei σ'_1 einen Kreis mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius d_1 bezeichnet und ϱ_1 die Länge der Projektion M_1N_1 der Strecke MN auf die Tangentialebene angibt. Wir setzen voraus, daß sich M im Innern der Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius d_1 befindet. Dann gehört M_1 dem Kreisbereich σ'_1 an. Bilden wir in der ξ, η -Ebene den Kreis σ'_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $2d_1$, so enthält dieser den ganzen Kreis σ'_1 , so daß wir wegen (46)

$$\left| \int \int_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| \leq A \int \int_{\sigma'_1} \frac{d\xi d\eta}{\varrho_1} = A \int_0^{2\pi} \int_0^{2d_1} \frac{\varrho_1 d\varrho_1 d\theta}{\varrho_1} = 4\pi d_1 A$$

erhalten. Nun brauchen wir nur noch d_1 so festzulegen, daß die Ungleichung $4\pi d_1 A \leq \frac{\varepsilon}{4}$ erfüllt ist, und wir erhalten die Abschätzung (45) bei beliebiger Lage des Punktes M in der Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius d_1 . Weiterhin stellen wir die Funktion (44) in der Gestalt

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M)$$

mit

$$u_1(M) = \int \int_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS, \quad u_2(M) = \int \int_{S-\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS$$

dar, wobei $u_2(M)$ im Punkt N_0 stetig ist, und der Beweis der Stetigkeit von $u(M)$ im Punkt N_0 läßt sich in derselben Weise wie in [95] für die Funktion (29) durchführen. Wir erhalten somit das folgende Ergebnis: *Das Potential einer einfachen Schicht (44) ist im ganzen Raum erklärt und stellt eine im ganzen Raum stetige Funktion dar.* Ebenso wie in [95] kann man zeigen, daß $u(M) \rightarrow 0$ gilt, wenn der Punkt M ins Unendliche rückt.

97. Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht. Es sei n_0 die Richtung der äußeren Normalen in einem Punkt N_0 der Fläche S . Wir nehmen an, daß M nicht auf S liegt, und bilden die Ableitung der Funktion (44) nach der Richtung n_0 . Da nur der Faktor $\frac{1}{r}$ von M abhängt und wir unter dem Integralzeichen differenzieren dürfen, gilt

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \int \int_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{r} dS = \int \int_S \mu(N) \frac{\cos \psi}{r^2} dS. \quad (47)$$

Der Unterschied zwischen dem letzten Integral und dem Integral (19), welches das Potential einer Doppelschicht darstellt, besteht darin, daß im Integral (19) $\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ ist, wobei $\mathbf{n}$ den Einheitsvektor der äußeren Normalen im Punkt N , dem veränderlichen Integrationspunkt, bezeichnet, während im Integral (47) $\psi = (\mathbf{r}, \mathbf{n}_0)$ ist, wobei $\mathbf{n}_0$ der Einheitsvektor der äußeren Normalen in dem festen Punkt N_0 ist. In beiden Fällen ist $\mathbf{r}$ der Vektor von M nach N (Abb. 7). Wir zeigen jetzt, daß das Integral (47) auch dann existiert, wenn M mit dem Punkt N_0 identisch ist. In diesem Fall schreiben wir das Integral (47) in der Gestalt

$$\iint_S \mu(N) \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} dS = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS, \quad (48)$$

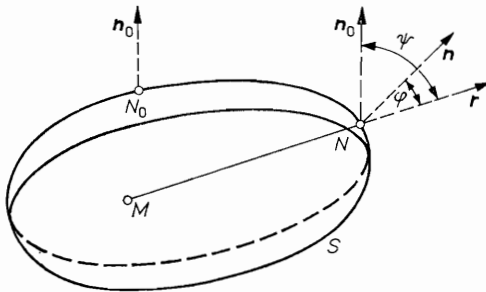


Abb. 7

wobei r_0 die Entfernung $|N_0 N|$ und der Winkel $\psi_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)$ den Winkel zwischen den Richtungen $\overrightarrow{N_0 N}$ und $\mathbf{n}_0$ bezeichnet. Weiterhin zeigen wir, daß die Ableitung (47) bei Annäherung von M an N_0 auf der Normalen vom Innern der Fläche oder vom Äußeren her bestimmte Grenzwerte annimmt. Für diese Grenzwerte gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_i &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_a &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0), \end{aligned} \quad (49)$$

wobei wie in [95] die Indizes i bzw. a bedeuten, daß man den Grenzwert von $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ bei Annäherung von M gegen N_0 von innen bzw. außen zu nehmen hat; die linken Seiten der Relationen bezeichnen also lediglich diese Grenzwerte.

In dem lokalen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in N_0 ist die Richtung $\mathbf{n}_0$ mit der Richtung der Z -Achse identisch. Wir bezeichnen wie früher mit x, y, z die Koordinaten von M und mit ξ, η, ζ die Koordinaten von N in diesem Koordinatensystem. Betrachten wir wie immer nur die Teilfläche σ_0 von S , so läßt sich das Integral (47) in der Gestalt

$$\iint_{\sigma_0} \mu(N) \frac{\zeta - z}{r^3} dS \quad (50)$$

darstellen. Ist M mit N_0 identisch, so ist $z = 0$, und das Integral nimmt die Gestalt

$$\iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\zeta}{r_0^3} dS = \iint_{\sigma_1} \mu(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(n, Z)} d\xi d\eta \quad (*)$$

an, wobei ζ durch die Funktion in (4) zu ersetzen ist. Unter Berücksichtigung der Abschätzungen (15) und der Ungleichung $r_0 \geq \varrho_0$ können wir uns unmittelbar davon überzeugen, daß dieses Integral konvergiert. Damit ist die Existenz des Integrals (*) bewiesen. Wir gehen nun zum Beweis der Relationen (49) über.

Wir bilden die Differenz aus dem Integral (47) und dem Potential der Doppelschicht mit derselben Dichte $\mu(N)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} - w(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} dS. \quad (51)$$

Dieses Integral konvergiert, wenn sich M nicht auf S befindet oder wenn M mit N_0 identisch ist.

Wir wollen beweisen, daß die Differenz stetig bleibt, wenn M im Punkt N_0 durch die Fläche S hindurchgeht. Wie in den vorhergehenden Abschnitten genügt es, zu zeigen, daß sich das Integral, welches über die durch (17) festgelegte kleine Teilfläche σ_1 der Fläche S erstreckt wird, dem absoluten Betrag nach beliebig klein machen läßt. Bei den folgenden Abschätzungen setzen wir voraus, daß sich M auf der Normalen von S durch N_0 befindet, d. h., daß in dem lokalen Koordinatensystem $x=y=0$ ist. Dann gilt

$$\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} = -\frac{\xi}{r^3} \cos(n, X) - \frac{\eta}{r^3} \cos(n, Y) - \frac{\zeta - z}{r^3} (\cos \vartheta_0 - 1). \quad (52)$$

Unter Berücksichtigung der Abschätzungen (15) und

$$|\xi| \leq \varrho_0, \quad |\eta| \leq \varrho_0, \quad r \geq \varrho_0 \geq \frac{1}{2} r, \quad |\zeta - z| \leq r \leq 2\varrho_0,$$

wobei $\varrho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ die Länge der Projektion von $\overline{MN}$ auf die X, Y -Ebene bezeichnet, erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{|\cos \psi - \cos \varphi|}{r^2} \leq \frac{b_1}{\varrho_0^{2-\alpha}},$$

in der b_1 eine Konstante bezeichnet. Mit Hilfe der Abschätzung (22) erhalten wir hieraus

$$\left| \iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} dS \right| \leq \iint_{\sigma_0 \leq d_1} \frac{2Ab_1}{\varrho_0^{2-\alpha}} d\xi d\eta = 2Ab_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{d_1} \frac{d\varrho_0 d\varphi}{\varrho_0^{1-\alpha}} = b_2 d_1^\alpha, \quad (53)$$

wobei b_2 konstant ist. Diese Abschätzung gilt bei beliebiger Lage des Punktes M auf der Normalen von S im Punkt N_0 , wobei M auch mit N_0 identisch sein kann. Hieraus folgt, daß für hinreichend kleines d_1 das auf der rechten Seite von (51) stehende Integral über σ_1 dem absoluten Betrag nach kleiner ist als eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Damit ist bewiesen, daß die Differenz (51) im Punkt N_0 stetig ist. Wenn M vom Innern oder vom Äußeren der Fläche S her gegen N_0 strebt, hat $w(M)$ einen Grenzwert. Hieraus folgt, daß auch die Größe (47) in beiden Fällen einen Grenzwert besitzt. Wegen der Stetigkeit der Differenz (51) erhalten wir

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_t - w_t(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} dS - w(N_0),$$

und wegen der ersten Beziehung (42) erhalten wir die erste der beiden Relationen (49). Entsprechend ergibt sich auch die zweite Relation (49). Aus diesen Relationen

folgt unmittelbar die Größe des Sprunges der Normalableitung beim Potential einer einfachen Schicht:

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_a = 4\pi\mu(N_0). \quad (54)$$

98. Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht (Fortsetzung). Für die weitere Darlegung ist es wichtig zu zeigen, daß die Normalableitung auf der ganzen Fläche gleichmäßig gegen die Grenzwerte $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i$ und $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_a$ konvergiert, wenn M in Richtung der Normalen gegen N_0 strebt. Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst die gleichmäßige Konvergenz des in (51) vorkommenden Integrals. Wir bezeichnen dieses Integral mit $\omega(M)$. Wie wir bereits gezeigt haben, hat die Funktion $\omega(M)$ einen Sinn, wenn M mit N_0 identisch ist. Wir müssen beweisen, daß bei beliebig vorgegebenem positivem ε eine positive Zahl η existiert, die nicht von der Lage des Punktes N_0 auf S abhängt, so daß $|\omega(M) - \omega(N_0)| \leq \varepsilon$ gilt, wenn $|MN_0| \leq \eta$ ist, wobei sich M auf der Normalen von S durch N_0 befindet.

Wir legen d_1 so fest, daß $b_2 d_1^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ gilt, und stellen $\omega(M)$ in der Gestalt

$$\omega(M) = \omega_1(M) + \omega_2(M)$$

mit

$$\omega_1(M) = \iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} dS, \quad \omega_2(M) = \iint_{S-\sigma_1} \mu(N) \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} dS$$

dar. Hierbei gilt wegen (53) $|\omega_1(M)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ bei beliebiger Lage von M auf der Normalen von S im Punkt N_0 . Weiterhin gilt

$$\omega(M) - \omega(N_0) = \omega_1(M) - \omega_1(N_0) + [\omega_2(M) - \omega_2(N_0)],$$

woraus

$$\begin{aligned} |\omega(M) - \omega(N_0)| &\leq |\omega_1(M)| + |\omega_1(N_0)| + |\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \end{aligned} \quad (55)$$

folgt. Wegen (52) erhalten wir mit $\vartheta_0 = (\mathbf{n}, \mathbf{Z})$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} \right]_M - \left[\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} \right]_{N_0} \\ &= \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) [\xi \cos(\mathbf{n}, \mathbf{X}) + \eta \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Y}) + \zeta (\cos \vartheta_0 - 1)] + \frac{z}{r^3} (\cos \vartheta_0 - 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Bei der Integration über $S - \sigma_1$ ist $r \geq d_1$ und $r_0 \geq d_1$. Außerdem sind bei beliebiger Lage der Punkte N und N_0 auf S die Werte ξ, η, ζ dem absoluten Betrag nach nicht größer als der Durchmesser D der Fläche S , d. h. als die obere Grenze der Entfernungen zweier Punkte von S . Ferner gilt $|r - r_0| \leq |z|$ sowie

$$\left| \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right| = |r - r_0| \left(\frac{1}{r_0^3 r} + \frac{1}{r_0^2 r^2} + \frac{1}{r_0 r^3} \right) \leq \frac{3|z|}{d_1^4}, \quad \frac{|z|}{r^3} \leq \frac{|z|}{d_1^3},$$

und auf Grund der Beziehung (56) erhalten wir

$$\left| \left[\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} \right]_M - \left[\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{r^2} \right]_{N_0} \right| \leq c_1 |z|,$$

wobei c_1 eine Konstante bezeichnet, die nicht von der Lage des Punktes N_0 , aber natürlich von der Wahl von d_1 abhängt. Unter Berücksichtigung des Ausdrucks $\omega_2(M)$ ergibt sich

$$|\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \leq \iint_{S-\sigma_1} |\mu(N)| c_1 |z| dS \leq A c_1 |z| \cdot \text{Flächeninhalt von } S.$$

Wählen wir

$$|z| \leq \frac{\varepsilon}{2 A c_1 \cdot \text{Flächeninhalt von } S}, \quad (57)$$

so erhalten wir $|\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und wegen (55) schließlich $|\omega(M) - \omega(N_0)| \leq \varepsilon$.

Für die gesuchte Zahl η kann man somit die rechte Seite der Ungleichung (57) nehmen.

Damit haben wir bewiesen, daß die Differenz $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} - w(M)$ gleichmäßig gegen ihren jeweiligen Grenzwert konvergiert, wenn M auf der Normalen gegen N_0 strebt. Andererseits ist das Potential $w(M)$ der Doppelschicht eine bis einschließlich S stetige Funktion, so daß die Funktion $w(M)$ ebenfalls gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte auf S strebt. Hieraus folgt, daß auch die Normalableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte (49) auf S strebt. Nach A. M. LIAPOUNOFF sagt man, daß eine im Innen- oder Außenbereich von S harmonische Funktion $v(M)$ eine *reguläre Normalableitung* besitzt, wenn ihre Normalableitung $\frac{\partial v(M)}{\partial n_0}$ für $M \rightarrow N_0$ auf der Normalen von S gleichmäßig gegen ihre zugehörigen Grenzwerte strebt. Wir können somit folgendes aussagen.

Satz. *Das Potential einer einfachen Schicht mit stetiger Dichte hat sowohl im Innen- als auch im Außenbereich von S reguläre Normalableitungen.*

Halten wir den positiven Wert $|z|$ fest, wobei sich M entweder im Innen- oder im Außenbereich von S befindet, so können wir annehmen, daß die Werte der Normalableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ eine Funktion von N_0 darstellen, die noch von dem Parameter $|z|$ abhängt. Dabei ist diese Funktion stetig in N_0 , denn $u(M)$ besitzt im Innen- und Außenbereich von S stetige Ableitungen, und die Richtung n auf S ändert sich stetig.

Da die Konvergenz für $|z| \rightarrow 0$ gleichmäßig vor sich geht, folgt, daß auch die Randwerte (49) stetige Funktionen von N_0 sind, und hieraus ergibt sich, daß das auf den rechten Seiten der Relationen (49) vorkommende Integral eine stetige Funktion von N auf S darstellt. Dieses Integral bezeichnen wir als den *direkten Wert der Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht auf S* .

99. Der direkte Wert der Normalableitung auf S . Wir bezeichnen mit $F(N)$ den Wert der Normalableitung auf S :

$$F(N_0) = \int_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS. \quad (58)$$

Wie wir gesehen haben, ist $F(N_0)$ eine stetige Funktion des Punktes N_0 auf S . Jetzt beweisen wir einen Satz, der diese Eigenschaft von $F(N_0)$ genauer festlegt. Dieser Satz wurde zuerst von A. M. LIAPOUNOFF aufgestellt.

Satz. Bei stetiger Dichte $\mu(N)$ erfüllt die Funktion $F(N_0)$ die Bedingung

$$|F(N_1) - F(N_0)| \leq B r_{0,1}^\beta, \quad (59)$$

wobei B und β positive Konstante bezeichnen und $r_{0,1} = |N_0 N_1|$ ist.

Die Bedingung (59) nennen wir im folgenden eine *Lipschitzbedingung*¹⁾. Ist $r_{0,1}$ größer als ein gewisser positiver Wert, so können wir bei beliebig vorgegebenem positivem ε diese Ungleichung erfüllen, wenn wir die Konstante B entsprechend wählen. Denn die Funktion $F(N)$ ist, wie wir wissen, auf S stetig und deshalb beschränkt, $|F(N)| \leq A_1$.

Ist $r_{0,1} \geq h > 0$, so ist offenbar die Ungleichung (59) für $r_{0,1} \geq h$ erfüllt, wenn wir $B = \frac{2A_1}{h^\beta}$ setzen. Erhalten wir für $r_{0,1} < h$ in der Ungleichung (59) einen anderen Wert für B , so ist die Ungleichung (59) für alle Werte von $r_{0,1}$ erfüllt, wenn wir den größeren der beiden Werte B nehmen. Somit können wir beispielsweise $r_{0,1} < \frac{d}{10}$ annehmen. Es gilt

$$F(N_1) - F(N_0) = \iint_S \mu(N) \left[\frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right] dS,$$

wobei $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{r}_1$ die Vektoren $\overrightarrow{N_0 N}$ bzw. $\overrightarrow{N_1 N}$ und r_0 und r_1 ihre absoluten Beträge bezeichnen. Folglich erhalten wir wegen (22) die Ungleichung

$$|F(N_1) - F(N_0)| \leq A \iint_S \left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| dS. \quad (60)$$

Wir schneiden eine Teilfläche σ_1 aus S mit Hilfe des Kreiszylinders heraus, dessen Achse die Normale von S im Punkt N_0 und dessen Grundflächenradius $2r_{0,1}$ ist, und zerlegen das Integral über S in ein Integral über σ_1 und in ein Integral über $S - \sigma_1$:

$$J_1 = \iint_{\sigma_1} \left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| dS, \quad J_2 = \iint_{S - \sigma_1} \left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| dS. \quad (61)$$

Mit Hilfe des skalaren Produktes zweier Vektoren können wir

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} &= \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0}{r_0^3} \\ &= \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0}{r_1^3} + \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \end{aligned}$$

schreiben, wobei $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$ wiederum die Einheitsvektoren der äußeren Normalen in den Punkten N_0 bzw. N_1 bezeichnen.

Aus dieser Identität folgt

$$\left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| \leq \frac{|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0|}{r_1^3} + \frac{|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0|}{r_1^3} + |\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0| \left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right|. \quad (62)$$

Jetzt schätzen wir die einzelnen Summanden ab. Zunächst ist

$$|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0| = |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)| \leq r_1 |\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0|.$$

Bilden wir ein Dreieck mit den Seiten $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$, so erhalten wir $|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0| \leq \vartheta$, wobei ϑ der Winkel ist, der von den Vektoren $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$ gebildet wird. Auf Grund der Bedingung (3) gilt also

$$|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0| \leq \alpha r_1 r_{0,1}^\alpha,$$

¹⁾ Für $\alpha \in (0, 1)$ wird diese Bedingung in der mathematischen Literatur oft Hölderbedingung genannt, während man für $\alpha = 1$ von der Lipschitzbedingung spricht.

wobei a eine Konstante bezeichnet. Weiterhin ist

$$|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0| = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0| = |\mathbf{r}_{0,1} \cdot \mathbf{n}_0| = |\zeta_1|,$$

wobei ζ_1 die Koordinate des Punktes N_1 im lokalen Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkt N_0 bezeichnet. Bei Berücksichtigung von (15) erhalten wir

$$|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0| \leq c r_{0,1}^{1+a}.$$

Liegt der Integrationspunkt N hinreichend nahe bei N_0 , so erhalten wir schließlich wegen (15) die Ungleichung $|\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0| = |\varepsilon_1| \leq c r_0^{1+a}$. Wir können aber wie bei (59) annehmen, daß diese Ungleichung für alle Werte r_0 richtig ist. Setzen wir alle diese Abschätzungen in (62) ein, so erhalten wir

$$\left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| \leq \frac{c_1 r_1 r_{0,1}^a}{r_1^3} + \frac{c_1 r_{0,1}^{1+a}}{r_1^3} + c_1 r_0^{1+a} |r_1 - r_0| \left(\frac{1}{r_0^3 r_1} + \frac{1}{r_0^2 r_1^2} + \frac{1}{r_0 r_1^3} \right), \quad (63)$$

wobei c_1 die größere der Konstanten a und c ist. Aus dem Dreieck $N_0 N_1 N$ folgt $r_1 + r_{0,1} \geq r_0$.

Bei der Integration über $S - \sigma_1$ gilt aber $r_{0,1} \leq \frac{r_0}{2}$; folglich ist $r_1 \geq \frac{r_0}{2}$. Mit Hilfe dieser

Ungleichungen und der Ungleichung $|r_1 - r_0| \leq r_{0,1}$ ergibt sich an Stelle von (63) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \right| &\leq c_1 r_{0,1}^a \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_{0,1}}{r_1^3} + \frac{r_0^{1+a} r_{0,1}^{1-a}}{r_0^3 r_1} + \frac{r_0^{1+a} r_{0,1}^{1-a}}{r_0^2 r_1^2} + \frac{r_0^{1+a} r_{0,1}^{1-a}}{r_0 r_1^3} \right) \\ &\leq c_1 r_{0,1}^a \left(\frac{4}{r_0^2} + \frac{4}{r_0^2} + \frac{3}{r_0^2} + \frac{4}{r_0^2} + \frac{8}{r_0^2} \right) = \frac{22 c_1 r_{0,1}^a}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Ausdruck (61) erhalten wir daher

$$J_2 \leq c_0 r_{0,1}^a \iint_{S-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} \quad (64)$$

mit $c_0 = 22 c_1$. Der Radius des Zylinders, durch den die Teilfläche σ_1 aus S ausgeschnitten wurde, war gleich $2r_{0,1}$. Jetzt wählen wir noch einen Zylinder mit derselben Achse

und mit dem festen Radius $\frac{d}{3}$. Er schneidet aus S die Teilfläche σ_0 aus, wobei σ_0 die Teilfläche σ_1 im Innern enthält. Es gilt

$$\iint_{S-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} = \iint_{\sigma_0-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} + \iint_{S-\sigma_0} \frac{dS}{r_0^2}.$$

Im zweiten Integral ist $r_0 \geq \frac{d}{3}$, folglich gilt

$$\iint_{S-\sigma_0} \frac{dS}{r_0^2} \leq \frac{9}{d^2} \cdot \text{Flächeninhalt von } S.$$

Die Integration über $\sigma_0 - \sigma_1$ können wir in der Tangentialebene des Punktes N_0 durchführen und erhalten mit Hilfe der üblichen Abschätzungen (es ist $r_0 \geq \varrho_0$ und $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z}) \geq \frac{1}{2}$) die Abschätzung

$$\iint_{\sigma_0-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} \leq \int_0^{2\pi} \int_{2r_{0,1}}^{d/3} \frac{2\varrho_0 d\varrho_0 d\theta}{\varrho_0^2} = 4\pi \left(\lg \frac{d}{3} - \lg 2r_{0,1} \right).$$

Setzen wir dies in (64) ein, so erhalten wir eine Abschätzung der Gestalt

$$J_2 \leq A_1 r_{0,1}^a \lg r_{0,1} + B_1 r_{0,1}^a,$$

wobei A_1 und B_1 Konstante bezeichnen. Diese Abschätzung läßt sich durch eine Abschätzung der Gestalt

$$J_2 \leq A_2 r_{0,1}^\beta$$

ersetzen, wenn man die positive Zahl β kleiner als α wählt.

Nun gehen wir zur Abschätzung von J_1 über. Es gilt

$$J_1 \leq \iint_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_0^2} dS + \iint_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)|}{r_0^2} dS. \quad (65)$$

Mit Hilfe der üblichen Abschätzungen ergibt sich

$$\iint_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)|}{r_0^2} dS = \iint_{\sigma_1} \frac{|\zeta|}{r_0^3} dS \leq c \int_0^{2\pi} \int_0^{2r_{0,1}} \frac{\varrho_0^{1+\alpha} d\varrho_0 d\theta}{\varrho_0^3} = A_3 r_{0,1}^\alpha,$$

wobei A_3 konstant ist. Zur Abschätzung des ersten Integrals in (65) führen wir die Kugel mit dem Mittelpunkt N_1 und dem Radius $4r_{0,1}$ ein, wobei $4r_{0,1} < \frac{2d}{5}$ ist. Sie schneidet aus S eine Teilfläche σ_2 aus, welche die Teilfläche σ_1 enthält. Diese Teilfläche σ_2 hat eine explizite Gleichung in den lokalen Koordinaten mit dem Koordinatenursprung N_1 , und wir können auf dieser Teilfläche die üblichen Abschätzungen vornehmen, indem wir die Integration auf der Tangentialebene im Punkt N_1 durchführen. Der Integrationsbereich besteht aus einem Teil des Kreisbereiches mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius $4r_{0,1}$. Durch Integration über den ganzen Kreis erhalten wir die Abschätzung

$$\iint_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_1^2} dS \leq \iint_{\sigma_2} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_1^2} dS \leq A_4 r_{0,1}^\alpha.$$

Setzen wir alle erhaltenen Abschätzungen in (60) ein, so ergibt sich

$$|F(N_1) - F(N_0)| \leq A(A_2 r_{0,1}^\beta + A_5 r_{0,1}^\alpha)$$

und schließlich die Ungleichung (59), wobei β eine beliebige positive Zahl bezeichnet, die kleiner ist als α .

100. Die Ableitung des Potentials einer einfachen Schicht nach einer beliebigen Richtung.

In [97] haben wir die Randwerte der Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht untersucht, wobei M auf der Normalen gegen N_0 strebt. Werden für die Dichte $\mu(N)$ weitergehende Voraussetzungen als die der Stetigkeit gemacht, so läßt sich beweisen, daß die Grenzwerte für die Ableitungen nach jeder festen Richtung existieren und unabhängig davon sind, wie M gegen N_0 strebt. Wir setzen voraus, daß die Dichte der Lipschitzbedingung

$$|\mu(N_2) - \mu(N_1)| \leq B r_{1,2}^\delta \quad (66)$$

genügt, wobei $r_{1,2} = |N_1 N_2|$ ist und B sowie δ positive Konstante bezeichnen ($\delta \leq 1$). Es seien X, Y, Z die lokalen Koordinaten im Punkt N_0 der Fläche S . Wir bilden die Ableitung von $u(M)$ nach der Richtung x , die in der Tangentialebene von S im Punkt N_0 liegt. Wir nehmen einstweilen an, daß sich M auf der Normalen von S im Punkt N_0 befindet. Weiterhin setzen wir voraus, daß M beispielsweise im Innern von S liegt. Dann gilt

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \int_S \mu(N) \frac{\xi}{r^3} dS \quad (r = |MN|). \quad (67)$$

Wir führen die Größe $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}$ ein und betrachten das Integral

$$\int_{\sigma_0} \int \mu(N_0) \frac{\xi}{r'^3} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z}) dS = \mu(N_0) \int_{\sigma_0} \int \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} d\xi d\eta \quad (z \neq 0), \quad (68)$$

in dem σ'_0 den Kreis $\xi^2 + \eta^2 \leq \frac{d^2}{9}$ bezeichnet. Offenbar gilt

$$\int_{\sigma'_0} \int \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} d\xi d\eta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{d/3} \frac{\varrho_0^2}{\sqrt{\varrho_0^2 + z^2}} d\varrho_0 = 0.$$

Statt (67) können wir

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \int_{\sigma_0} \int \mu(N) \frac{\xi}{r^3} dS + \int_{S-\sigma_0} \int \mu(N) \frac{\xi}{r^3} dS = v_1(M) + v_2(M) \quad (69)$$

schreiben. Da das Integral (68) gleich 0 ist, gilt

$$v_1(M) = \int_{\sigma_0} \int \xi \left[\frac{\mu(N)}{r^3} - \frac{\mu(N_0) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z})}{r'^3} \right] dS. \quad (70)$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Differenz läßt sich in der Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\mu(N)}{r^3} - \frac{\mu(N_0) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z})}{r'^3} &= \frac{\mu(N) - \mu(N_0)}{r^3} + \frac{\mu(N_0) [1 - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z})]}{r^3} \\ &\quad + \mu(N_0) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

darstellen. Nunmehr schätzen wir jeden Summanden der rechten Seite ab. Wegen (66) erhalten wir

$$\frac{|\mu(N) - \mu(N_0)|}{r^3} \leq \frac{br_0^\beta}{r^3},$$

woraus mit Rücksicht auf $r_0 \leq 2\varrho_0$ und $r \geq \varrho_0$ die Abschätzung

$$\frac{|\mu(N) - \mu(N_0)|}{r^3} \leq \frac{2\beta b}{\varrho_0^{3-\beta}} \quad (72)$$

hervorgeht. Weiterhin ergibt sich aus (15) und (22) die Abschätzung

$$\frac{|\mu(N_0) [1 - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z})]|}{r^3} \leq \frac{cA}{\varrho_0^{3-2\alpha}}. \quad (73)$$

Jetzt schätzen wir den dritten Summanden der rechten Seite von (71) ab. Die Größe r' ist die Länge des Vektors, der vom Punkt M zum Punkt N' , der Projektion von N auf die X, Y -Ebene, führt. Aus dem Dreieck MNN' folgt $|r - r'| \leq |\zeta| \leq 2a\varrho_0^{1+\alpha}$, woraus sich wegen $r \geq \varrho_0$ und $r' \geq \varrho_0$ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right| \leq 2a\varrho_0^{1+\alpha} \left(\frac{1}{r^3 r'} + \frac{1}{r^2 r'^2} + \frac{1}{r r'^3} \right) \leq \frac{6a}{\varrho_0^{3-\alpha}}$$

ergibt. Damit gilt

$$\left| \mu(N_0) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Z}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \right| \leq \frac{6aA}{\varrho_0^{3-\alpha}}. \quad (74)$$

Bei der Herleitung dieser Abschätzung könnten wir auch annehmen, daß der Punkt M mit N_0 identisch ist. Dann ist $z=0$ und $r=r_0$.

Setzen wir den Ausdruck (71) in das Integral (70) ein, so können wir $v_1(M)$ in drei Integrale über σ_0 zerlegen,

$$v_1(M) = v_{1,1}(M) + v_{1,2}(M) + v_{1,3}(M), \quad (75)$$

von denen jedes bei beliebiger Lage des Punktes M auf der Normalen in N_0 , insbesondere wenn M und N_0 identisch sind, konvergiert. Für die Integranden dieser Integrale erhalten wir mit Hilfe der Abschätzungen (72), (73) und (74) Schranken der Gestalt

$$|\xi| \frac{C_1}{\varrho_0^{3-\beta}}, \quad |\xi| \frac{C_2}{\varrho_0^{3-2\alpha}}, \quad |\xi| \frac{C_3}{\varrho_0^{3-\alpha}}, \quad (76)$$

wobei die Konstanten C_1 , C_2 und C_3 von der Lage des Punktes N_0 auf S und des Punktes M auf der Normalen unabhängig sind. Hieraus folgt, daß die Funktionen $v_{1,k}(M)$ ($k=1, 2, 3$) bei Annäherung von M auf N_0 gleichmäßig in bezug auf die Lage des Punktes N_0 auf S gegen Grenzwerte streben, die gleich $v_{1,k}(N_0)$ sind. Wir führen den Beweis für $v_{1,1}(M)$ durch. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wir schneiden die Teilfläche σ_1 , die durch die Ungleichung $\xi^2 + \eta^2 \leq d_1$ bestimmt ist, von σ_0 aus und wählen d_1 so klein, daß das Integral

$$\int_{\sigma_1} |\xi| \frac{|\mu(N) - \mu(N_0)|}{r^3} dS$$

bei beliebiger Lage des Punktes M auf der Normalen dem absoluten Betrag nach nicht größer als $\frac{\varepsilon}{4}$ ist. Dies ist wegen (72) möglich. Weiterhin stellen wir $v_{1,1}(M)$ in der Gestalt

$$v_{1,1}(M) = \int_{\sigma_1} \xi \frac{\mu(N) - \mu(N_0)}{r^3} dS + \int_{\sigma_0 - \sigma_1} \xi \frac{\mu(N) - \mu(N_0)}{r^3} dS = v_{1,1}^{(1)}(M) + v_{1,1}^{(2)}(M)$$

dar und erhalten

$$v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0) = v_{1,1}^{(1)}(M) - v_{1,1}^{(1)}(N_0) + [v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)],$$

woraus

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)| \quad (77)$$

folgt. Das Integral $v_{1,1}^{(2)}(M)$ wird über eine Fläche erstreckt, deren Punkte allesamt von N_0 und M mindestens den Abstand d_1 haben, und in derselben Weise wie in [98] erhalten wir

$$|v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)| \leq C_4 |z|,$$

wobei C_4 von der Lage des Punktes N_0 auf S unabhängig ist. Hierbei ergibt (77)

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_4 |z|,$$

und für $|z| \leq \frac{\varepsilon}{2C_4}$ erhalten wir

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leq \varepsilon,$$

woraus schließlich folgt, daß $v_{1,1}(M)$ gleichmäßig bezüglich N_0 gegen $v_{1,1}(N_0)$ konvergiert.

Kehren wir zu der Zerlegung (75) zurück, so sehen wir, daß $v_1(M)$ für $M \rightarrow N_0$ gleichmäßig gegen den Grenzwert $v_1(N_0)$ konvergiert. Wir bemerken, daß dieser Grenzwert nicht davon abhängt, von welcher Seite sich M dem Punkt N_0 auf S nähert. Einfacher

ausgedrückt, die Funktion $v_1(M)$ ist stetig, wenn sich M auf der Normalen des Punktes N_0 bewegt.

Das Integral $v_2(M)$ wird über die Teilfläche $S - \sigma_0$ von S erstreckt, deren sämtliche Punkte von den Punkten M und N_0 um wenigstens $\frac{d}{3}$ entfernt sind. Hieraus folgt wie vorhin

$$|v_2(M) - v_2(N)| \leq C_5 |z|,$$

wobei die Konstante C_5 von der Lage des Punktes N_0 auf S unabhängig ist; folglich konvergiert $v_2(M)$ gleichmäßig in bezug auf N_0 gegen $v_2(N)$. Schließlich folgt, daß die Ableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial x}$ bei Annäherung von M an N_0 auf der Normalen gleichmäßig gegen einen Grenzwert konvergiert; dieser Grenzwert ist davon unabhängig, ob M von innen oder von außen her gegen N_0 auf S strebt. Entsprechendes gilt offenbar auch für $\frac{\partial u(M)}{\partial y}$. In [98] haben wir bewiesen, daß auch die Ableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial z}$ gleichmäßig gegen einen Grenzwert konvergiert. Dort haben wir aber von innen und von außen verschiedene Grenzwerte erhalten. Ist l eine beliebige Richtung, die mit den Achsen X, Y, Z die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bildet, so folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß auch die Ableitung

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \alpha_2 + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \alpha_3 \quad (78)$$

gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte konvergiert, wenn M von innen oder von außen her gegen N_0 auf S strebt.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitung (78) gegen ihre Grenzwerte von innen und außen folgt, daß diese Grenzwerte stetige Funktionen des Punktes N_0 auf der Fläche S sind.

Schließlich zeigen wir, daß die Ableitung (78) bei beliebiger Annäherung von M gegen N_0 gegen den obigen Grenzwert strebt und nicht nur bei Annäherung auf der Normalen. Wir nehmen beispielsweise an, daß M von innen her gegen N_0 strebt, und bezeichnen mit $\omega(N)$ die Grenzwerte der Ableitung (78) auf der Fläche. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wir müssen zeigen, daß eine positive Zahl η existiert derart, daß

$$\left| \frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0) \right| \leq \varepsilon \quad (79)$$

gilt, wenn nur $|MN_0| \leq \eta$ ist und sich M im Innern von S befindet. Wir führen eine Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 ein und wählen ihren Radius δ so klein, daß auf der Teilfläche σ' von S , die im Innern dieser Kugel liegt, die Ungleichung $|\omega(N) - \omega(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist. Weiterhin nehmen wir an, daß sich M im Innern einer Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 und einem Radius η befindet, wobei wir η so wählen, daß

$$\left| \frac{\partial u(M)}{\partial n} - \omega(N) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt, wenn nur M auf der Normalen von S im Punkt N liegt und $|MN| \leq \eta$ ist. Dies ist wegen der bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ gegen $\omega(N)$ möglich. Außerdem nehmen wir noch $\eta \leq \frac{\delta}{3}$ an. Ist der Abstand des Punktes M vom Punkt

N_0 nicht größer als η , so ist sein Abstand vom Schnittpunkt N der Normalen, auf der er sich befindet, erst recht nicht größer als η , und dieser Punkt N befindet sich auf σ' . Wir haben dabei den folgenden elementaren Satz benutzt: Die kürzeste Entfernung des Punktes M von der Fläche S ist die Länge der durch den Punkt M hindurch-

gehenden Normalen MN der Fläche S . Es gilt

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0) = \frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N) + \omega(N) - \omega(N_0)$$

und

$$\left| \frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0) \right| \leq \left| \frac{\partial u(M)}{\partial n} - \omega(N) \right| + |\omega(N) - \omega(N_0)|.$$

Nach dem Vorigen sind die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Ungleichung nicht größer als $\frac{\varepsilon}{2}$, folglich gilt

$$\left| \frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |MN_0| \leq \eta. \quad (80)$$

Wir bemerken noch, daß die Integrale (67) und (68) für $z=0$, d. h. für $M=N_0$, nicht konvergieren. Wie wir aber gesehen haben, konvergiert ihre Differenz.

Die angestellten Überlegungen führen zu dem folgenden Satz, der zuerst von A. M. LIAPOUNOFF bewiesen wurde.

Satz. *Erfüllt die Dichte $\mu(N)$ die Lipschitzbedingung (66), so ist die Ableitung des Potentials der einfachen Schicht nach einer beliebigen festen Richtung sowohl im Innern als auch im Äußeren von S bis an S heran stetig. Die Ableitung nach einer beliebigen Tangentialrichtung im Punkt N_0 der Fläche S ändert sich beim Durchgang von M durch die Fläche im Punkt N_0 stetig.*

Die Untersuchung, wie sich die Ableitungen des Potentials einer Doppelschicht bei Annäherung an die Fläche S verhalten, ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. Hier hat A. M. LIAPOUNOFF in seiner bereits zitierten Arbeit „Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet“ (J. de Math. 1898) ebenfalls grundlegende Resultate erzielt.¹⁾

101. Das logarithmische Potential. In der Ebene tritt an die Stelle der singulären Grundlösung $\frac{1}{r}$ die Lösung $\lg \frac{1}{r}$ [II, 203].²⁾ Es sei l eine geschlossene Kurve in der X, Y -Ebene und l_0 ihre Länge. Das Potential einer einfachen Schicht wird durch die Formel

$$u(M) = \int_l \mu(N) \lg \frac{1}{r} ds = \int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r} ds \quad (81)$$

definiert. Die zweite singuläre Lösung, die einem Dipol im dreidimensionalen Fall entspricht, lautet

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\lg \frac{1}{r} \right),$$

und das Potential einer Doppelschicht wird durch die Formel

$$w(M) = \int_l \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r} ds \quad (82)$$

mit $\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ definiert. Der Ausdruck $\frac{\cos \varphi ds}{r}$ stellt den Winkel dar, unter dem das Kurvenelement ds von dem Punkt M aus erscheint, wobei dieser Winkel für $\cos \varphi > 0$

¹⁾ Der Leser vergleiche auch die einschlägigen Arbeiten von L. LICHTENSTEIN und J. SCHAUDER. (Anm. d. Red.)

²⁾ Wir erinnern daran, daß in allen Bänden $\lg$ den Logarithmus zur Basis e bezeichnet.

positiv und für $\cos \varphi < 0$ negativ ist. Das Analogon zur Formel (26) ist die Formel

$$\int_l \frac{\cos \varphi}{r} ds = \begin{cases} 2\pi & (M \text{ innerhalb von } l), \\ 0 & (M \text{ außerhalb von } l), \\ \pi & (M \text{ auf } l). \end{cases} \quad (83)$$

Über die Kurve l kann man analoge Voraussetzungen treffen wie über die Fläche S .

Wir setzen voraus, daß die Funktionen $x(s)$, $y(s)$, welche in der Parameterdarstellung der Kurve l auftreten und die Periode l_0 haben, stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Die Funktion $\mu(N) = \mu(s)$ nehmen wir als stetig an. Zunächst untersuchen wir den Kern des Potentials der Doppelschicht, wobei wir annehmen, daß der Punkt M mit einem Punkt N_0 der Kurve l identisch ist. Da sich die Richtungskosinus der Richtung n durch die Ableitungen $y'(s)$ und $-x'(s)$ ausdrücken lassen, gilt

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{\cos(r, n)}{r} = \frac{[x(s) - x(s_0)] y'(s) - [y(s) - y(s_0)] x'(s)}{[x(s) - x(s_0)]^2 + [y(s) - y(s_0)]^2}. \quad (84)$$

Sind s und s_0 voneinander verschieden, so ist dieser Ausdruck eine stetige Funktion von s und s_0 . Jetzt setzen wir voraus, daß s und s_0 gegen einen gemeinsamen Grenzwert s_1 konvergieren. Auf Grund der Taylorschen Formel gilt

$$x(s) - x(s_0) = x'(s_0) (s - s_0) + \frac{1}{2} x''(s'_0) (s - s_0)^2,$$

$$x'(s) = x'(s_0) + x''(s'_0) (s - s_0),$$

$$y(s) - y(s_0) = y'(s_0) (s - s_0) + \frac{1}{2} y''(s''_0) (s - s_0),$$

$$y'(s) = y'(s_0) + y''(s''_0) (s - s_0)$$

mit passenden Zwischenwerten $s'_0, s''_0, s'''_0, s''''_0$. Setzen wir diese Ausdrücke in (84) ein und kürzen durch $(s - s_0)^2$, so erhalten wir nach dem Grenzübergang den Ausdruck

$$\frac{x'(s_1) y''(s_1) - y'(s_1) x''(s_1)}{2[x'^2(s_1) + y'^2(s_1)]} = \frac{x'(s_1) y''(s_1) - y'(s_1) x''(s_1)}{2},$$

der gleich der halben Krümmung der Kurve im Punkt $s = s_1$ ist. Somit ist die Funktion (84) längs l eine stetige Funktion von s und s_0 . Bezeichnen wir sie mit $L(s_0, s)$, so stellt das Doppelschichtpotential

$$w(N_0) = w(s_0) = \int_l \mu(s) L(s_0, s) ds$$

eine stetige Funktion von N_0 dar, wenn sich N_0 auf l befindet.

Somit ist die Funktion (84) unter unseren Voraussetzungen in bezug auf $x(s)$ und $y(s)$ eine stetige Funktion von s und s_0 auf l . Im dreidimensionalen Fall hat die Funktion $\frac{\cos \varphi}{r^2}$ im allgemeinen für übereinstimmende Punkte N und N_0 eine polare Unstetigkeit. Für das Doppelschichtpotential (82) kann man die zu (42) analogen Relationen

$$\begin{aligned} w_i(N_0) &= w(N_0) + \pi \mu(N_0) = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0} ds + \pi \mu(N_0), \\ w_a(N_0) &= w(N_0) - \pi \mu(N_0) = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0} ds - \pi \mu(N_0) \end{aligned} \quad (85)$$

beweisen, wobei $r_0 = |N_0 N|$ ist und $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ den Winkel bezeichnet, der von der Richtung $\overrightarrow{N_0 N}$ mit der Richtung $\mathbf{n}$ der äußeren Normalen von l im Punkt N gebildet wird. Aus (85) folgt

$$w_i(N_0) - w_a(N_0) = 2\pi\mu(N_0). \quad (86)$$

Das Potential der einfachen Schicht (81) ist in allen Punkten der Ebene erklärt und stetig.

Es sei N_0 ein Punkt auf l und $\mathbf{n}_0$ der Einheitsvektor der Normalen in diesem Punkt. Liegt M nicht auf l , so gilt

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \int_i \mu(N) \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial n_0} ds = \int_i \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_0)}{r} ds. \quad (87)$$

Bei Annäherung von M an N_0 längs der inneren bzw. äußeren Normalen hat die Ableitung (87) die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_i &= \int_i \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds + \pi\mu(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_a &= \int_i \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds - \pi\mu(N_0), \end{aligned} \quad (88)$$

aus denen die Beziehung

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0} \right)_a = 2\pi\mu(N_0) \quad (89)$$

folgt. Statt (84) gilt

$$\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} = \frac{[x(s) - x(s_0)] y'(s_0) - [y(s) - y(s_0)] x'(s_0)}{[x(s) - x(s_0)]^2 + [y(s) - y(s_0)]^2},$$

und wie vorhin läßt sich zeigen, daß dieser Ausdruck stetig bleibt, wenn s und s_0 übereinstimmen.

Bemerkung. Das Potential der einfachen Schicht (81) verschwindet im allgemeinen im Unendlichen nicht.

102. Integralformeln und Parallellflächen. In unserer Darstellung werden wir folgende Integralformeln benötigen, mit deren Hilfe sich Integrale über ein dreidimensionales Volumen in Flächenintegrale transformieren lassen [II, 203]:

$$\iiint_{D_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{D_i} u \Delta v d\tau, \quad (90)$$

$$\iiint_{D_i} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (91)$$

Dabei ist D_i der Teil des Raumes, der von der Fläche S eingeschlossen wird, und $\mathbf{n}$ die Richtung der äußeren Normalen von S . Diese Formeln sind Folgerungen der Gleichung (107) aus [48] und werden unter folgenden Voraussetzungen hergeleitet: Die Funktionen u, v und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind in D_i einschließlich S stetig, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind im Innern

von D_i stetig, und die Integrale, welche Δu und Δv enthalten, konvergieren. Sind Δu und Δv nicht bis an S heran stetig, so haben wir es mit uneigentlichen Integralen zu tun, die wir als Grenzwerte für eine beliebige Folge von Bereichen $D_i^{(n)}$ erhalten, die im Innern von D_i liegen und gegen D_i streben derart, daß jeder im Innern von D_i liegende Punkt von einer gewissen Nummer n ab zu den Bereichen $D_i^{(n)}$ gehört. Im folgenden sind u und v harmonische Funktionen, so daß $\Delta u = \Delta v = 0$ gilt, und in (90) nehmen wir $u = v$ an. Dann lauten die angegebenen Formeln

$$\iint\limits_{D_i} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \int_S u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i dS, \quad (92)$$

$$\int_S \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i - v \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \right] dS = 0. \quad (93)$$

Diese Formeln sind auch für den unendlichen Bereich D_a richtig, der das Äußere von S darstellt,

$$\iiint\limits_{D_a} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \int_S u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a dS, \quad (94)$$

$$\int_S \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_a - v \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a \right] dS = 0, \quad (95)$$

wenn nur die im Äußeren von S harmonischen Funktionen u und v mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung bis einschließlich S stetig sind und für $M \rightarrow \infty$ derart gegen 0 streben, daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} R|u(M)| &\leq A, & R^2 \left| \frac{\partial u(M)}{\partial l} \right| &\leq A, \\ R|v(M)| &\leq A, & R^2 \left| \frac{\partial v(M)}{\partial l} \right| &\leq A \end{aligned} \quad (96)$$

erfüllt sind, wobei R die Entfernung von M bis zu einem beliebigen festen Punkt O des Raumes, A eine konstante Zahl und l eine beliebige feste Richtung bedeuten. In den Formeln (94) und (95) gibt n die Richtung der in bezug auf D_a äußeren Normalen an, d. h., n ist in das Innere von S gerichtet.

Beim Beweis der Formeln (94) und (95) muß man (92), (93) auf einen endlichen Bereich anwenden, der durch die Fläche S und eine Kugel mit dem Mittelpunkt O und hinreichend großem Radius begrenzt wird. Strebt der Radius gegen ∞ , so strebt das Integral über die Kugeloberfläche gegen 0, da die Produkte $u \frac{\partial v}{\partial n}$ und $u \frac{\partial u}{\partial n}$ von der Ordnung $\frac{1}{R^3}$ sind und der Flächeninhalt der Oberfläche gleich $4\pi R^2$ ist. Somit erhalten wir die Formeln (94) und (95) [vgl. II, 204].

Wie wir in einem der folgenden Abschnitte sehen werden, sind die Bedingungen (96) unter der einzigen Voraussetzung erfüllt, daß die harmonischen Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ für $M \rightarrow \infty$ gegen 0 streben. Als Folgerung aus den Formeln (93) und (95) erhalten wir die Formel [II, 204]

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS, \quad (97)$$

wobei n die Richtung der äußeren Normalen in bezug auf D_i oder D_a ist, je nachdem, auf welchen Fall die Formel (97) angewandt wird.

Wir geben jetzt allgemeinere Bedingungen für die Anwendbarkeit dieser Formeln an. Wir tragen auf den Normalen von S in jedem Punkt dieser Fläche eine Strecke von ein und derselben Länge δ ab, wobei diese Strecke ins Innengebiet von S gerichtet ist. Dabei setzen wir voraus, daß der geometrische Ort der Endpunkte P dieser Strecken für alle hinreichend kleinen δ eine geschlossene Fläche ist, die doppelpunktfrei ist, im Innern von S liegt und eine sich stetig ändernde Tangentialebene besitzt. Wir bezeichnen diese Fläche mit S_δ . Jedem Punkt N auf S entspricht ein bestimmter Punkt P auf S_δ , der auf der Normalen von S im Punkt N liegt, und umgekehrt entspricht jedem Punkt auf S_δ ein bestimmter Punkt N auf S . Zunächst zeigen wir, daß die Normale von S im Punkt N_0 auch die Normale von S_δ im Punkt P ist. Wir bezeichnen mit x, y, z die Koordinaten des Punktes N und mit x', y', z' die Koordinaten des entsprechenden Punktes P in einem X, Y, Z -Koordinatensystem.

Es gilt

$$x' = x - \delta \cos(n, X), \quad y' = y - \delta \cos(n, Y), \quad z' = z - \delta \cos(n, Z), \quad (98)$$

wobei n die Richtung der äußeren Normalen von S ist. Wir nehmen an, daß ein gewisses Flächenstück von S eine explizite Gleichung $z = z(x, y)$ besitzt, wobei die Funktion $z(x, y)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung hat. Dann sind die Richtungskosinus der Normalen stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten.

Wir setzen voraus, daß N auf dem Flächenstück von S eine Kurve l beschreibt und x, y, z stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t sind. Dann sind auch x', y', z' stetig differenzierbare Funktionen von t . Durch Differentiation der Identität

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \delta^2$$

nach t erhalten wir

$$[(x' - x) x'_t + (y' - y) y'_t + (z' - z) z'_t] - [(x' - x) x_t + (y' - y) y_t + (z' - z) z_t] = 0.$$

Die zweite eckige Klammer ist gleich 0, da PN die Normale von S ist. Hieraus folgt, daß auch die erste eckige Klammer gleich 0 ist. Dies bedeutet, daß die Tangente von l' senkrecht zu PN verläuft. Daraus folgt aber unmittelbar, daß PN auch die Normale von S_δ ist. Wir nehmen an, daß sich um jeden Punkt von S ein Flächenstück mit den angegebenen Eigenschaften finden läßt. Die Fläche S_δ heißt zur Fläche S parallel.

Wir setzen nunmehr voraus, daß die im Innern von S harmonischen Funktionen u und v , wenn M längs der Normalen gegen N strebt, reguläre Normalableitungen besitzen, wobei u und v im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_i$ stetig sind. Wir können alle unsere Formeln auf den Bereich anwenden, der durch die Fläche S_δ begrenzt wird. Da die Funktionen u, v und ihre Normalableitungen gleichmäßig gegen einen Grenzwert konvergieren und ferner die Normalen von S_δ und S identisch sind, erhalten wir beim Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ alle diese Formeln auch für D_i . Das dreifache Integral über D_i ist hierbei ein uneigentliches Integral, und zwar der Grenzwert der Integrale über die inneren Bereiche, welche gegen D_i konvergieren. Da der Integrand positiv ist, ist es unwesentlich, auf welche Weise diese inneren Bereiche gegen D_i konvergieren. Insbesondere kann man diejenigen Bereiche benutzen, welche durch die Flächen S_δ begrenzt werden. Beim Grenzübergang muß man die Änderung

des Flächeninhalts der Fläche beachten. Das Element dieses Flächeninhalts läßt sich durch die Koeffizienten der ersten Gaußschen Fundamentalform in der Gestalt

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, dx \, dy$$

ausdrücken [II, 142], wenn wir beispielsweise x und y als Parameter wählen. Aus (98) folgt, daß E, G und F Polynome zweiten Grades von δ sind. Die durchgeführten Überlegungen lassen sich auch auf D_α anwenden. Hierbei muß man in den Relationen (98) das Minuszeichen durch das Pluszeichen ersetzen. Lassen sich die harmonischen Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ durch Potentiale einer einfachen Schicht mit stetiger Dichte darstellen, so sind sie bis an S heran stetig und besitzen reguläre Normalableitungen.

Somit gilt der

Satz. Ist die Konstruktion von Parallelfächen im Innern und im Äußeren von S mit den angegebenen Eigenschaften möglich, so lassen sich für die Potentiale der einfachen Schicht $u(M)$ und $v(M)$ mit stetiger Dichte unsere Formeln anwenden.

Wir wollen jetzt hinreichende Bedingungen für die Existenz von Parallelfächen S_δ zu S angeben. Wir setzen voraus, daß die Fläche S eine Liapounoffsche Fläche ist, wobei in der Bedingung (3) $\alpha = 1$ ist. Wir zeigen, daß dann die Fläche S_δ bei hinreichend kleinem δ eine geschlossene Fläche ohne mehrfache Punkte ist, daß also verschiedenen Punkten N auf S auch verschiedene Punkte P entsprechen.

Zum Beweis setzen wir einstweilen $\delta < \frac{d}{3}$ voraus und nehmen umgekehrt an, daß wir für die voneinander verschiedenen Punkte $N_1(x_1, y_1, z_1)$ und $N_2(x_2, y_2, z_2)$ ein und denselben Punkt P erhalten, d. h., daß die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, X) &= x_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, X), \\ y_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, Y) &= y_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, Y), \\ z_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, Z) &= z_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, Z) \end{aligned} \quad (99)$$

erfüllt sind, in denen $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ die Einheitsvektoren in Richtung der äußeren Normalen von S in den Punkten N_1 bzw. N_2 sind. Der Punkt N_2 liegt im Innern der Kugel mit dem Mittelpunkt N_1 und dem Radius d . Bezeichnen wir mit $r_{1,2}$ die Entfernung $|N_1 N_2|$, so erhalten wir wegen (99)

$$r_{1,2} = \delta \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)},$$

wobei ϑ den Winkel zwischen $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ bezeichnet. Wegen (6) gilt für $\alpha = 1$ die Abschätzung $1 - \cos \vartheta \leq \frac{1}{2} a^2 r_{1,2}^2$, und aus der letzten Beziehung folgt $r_{1,2} \leq a \delta r_{1,2}$.

Setzen wir $\delta < \frac{1}{a}$, so gelangen wir zu einem Widerspruch. Somit hat die Fläche S_δ im Fall einer Liapounoffschen Fläche mit $\alpha = 1$ keine mehrfachen Punkte, wenn $\delta < \frac{d}{3}$ und $\delta < \frac{1}{a}$ ist. Außerdem folgt aus den Bedingungen für S unmittelbar [94], daß sich alle Punkte P für $\delta < d$ im Innern (oder im Äußeren) von S befinden. Setzen wir außerdem voraus, daß die Gleichung des Flächenstückes $z = z(x, y)$ in lokalen Koordinaten so beschaffen ist, daß $z(x, y)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, so hat die Fläche S_δ eine Tangentialebene, die sich bei einer Verschiebung des Berührungspunktes auf S_δ stetig ändert. Daß S_δ geschlossen ist, folgt unmittelbar daraus, daß bei stetiger Annäherung des Punktes M , der sich im Innern von D_i befindet, gegen die Fläche S die kürzeste Entfernung von M bis S bei einer bestimmten Lage von M gleich δ ist.

Bemerkung. Wir setzen voraus, daß die Funktion $u(M)$ im Innern von S stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung sowie eine reguläre Normalableitung besitzt. Dann bilden die Randwerte $\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i$ eine auf S stetige Funktion [98], und es existiert eine Zahl B , mit der die Abschätzung

$$\left|\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i\right| \leq B \quad (N \text{ auf } S)$$

gilt. Andererseits existiert (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Normalableitung gegen ihren Grenzwert) bei beliebig vorgegebenem positivem ε eine Zahl $\eta > 0$ derart, daß

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n} - \left(\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right)_i\right| \leq \varepsilon \quad \text{für } |MN| \leq \eta$$

gilt, wobei sich der Punkt M im Innern von S auf der Normalen des Punktes N von S befindet. Legen wir ε fest, so erhalten wir $\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right| \leq B + \varepsilon$ für $|MN| \leq \eta$, woraus sich $|u(M_2) - u(M_1)| \leq (B + \varepsilon) \delta_{1,2}$ mit $\delta_{1,2} = |M_1 M_2|$ ergibt. Hieraus folgt, daß $u(M)$ den wohlbestimmten Grenzwert $u(N)$ besitzt, falls $M \rightarrow N$ längs der Normalen gilt. Weiterhin ist

$$u(M) - u(N) = \int_0^\delta \frac{\partial u(M_1)}{\partial n} d\delta_1,$$

wobei M_1 ein veränderlicher Punkt auf der Normalen, $\delta_1 = |NM_1|$ und $\delta = |NM|$ mit $\delta_1 \leq \delta \leq \eta$ ist. Aus der Abschätzung für die Normalableitung folgt

$$|u(M) - u(N)| \leq (B + \varepsilon) \delta;$$

daraus erkennt man, daß $u(M)$ gleichmäßig gegen $u(N)$ strebt. Beachtet man dies, so läßt sich leicht zeigen (vgl. [100]), daß $u(M)$ bei beliebiger Annäherung von M an N gegen $u(N)$ strebt und daß $u(M)$ bis einschließlich S stetig ist. Entsprechende Überlegungen sind auch für D_a möglich. *Somit ist, falls eine reguläre Normalableitung existiert, die Funktion $u(M)$ bis einschließlich S stetig.*

Folglich hängt die Anwendbarkeit der angegebenen Integralformeln nur vom Vorhandensein einer regulären Normalableitung von $u(M)$ und $v(M)$ ab.

Alles oben für D_i Gesagte läßt sich auch auf den ebenen Fall übertragen. Im Fall eines unendlichen Bereiches liegen in der Ebene jedoch andere Verhältnisse vor. Hierauf werden wir noch zu sprechen kommen.

103. Folgen harmonischer Funktionen. Bevor wir zur Lösung von Randwertproblemen der Laplaceschen Differentialgleichung mit Hilfe der Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht übergehen, geben wir zu den bereits hergeleiteten Eigenschaften der harmonischen Funktionen einige weitere an. Wir betrachten Folgen von harmonischen Funktionen oder, was dasselbe ist, Reihen, deren Glieder harmonische Funktionen sind. Alle Beweise führen wir nur für den ebenen Fall durch; sie lassen sich aber Wort für Wort auf den Fall des dreidimensionalen Raumes übertragen. Man braucht nur die Poissonsche Formel durch die entsprechende Formel für die Kugel zu ersetzen.

Der Fundamentalsatz über die gleichmäßige Konvergenz von Reihen harmonischer Funktionen ist dem entsprechenden Satz aus der Theorie der regulären Funktionen einer komplexen Veränderlichen sehr ähnlich [III/2, 12]. Er lautet:

Sind die Glieder einer Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) \quad (100)$$

im Innern eines beschränkten Bereiches B harmonische Funktionen sowie im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetig und konvergiert die Reihe auf der Randkurve l dieses Bereiches gleichmäßig, so konvergiert sie auch im ganzen abgeschlossenen Bereich gleichmäßig, und ihre Summe ist im Innern von B eine harmonische Funktion.

Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf der Kurve l existiert eine solche Zahl N , daß für alle $n \geq N$ und für ein beliebiges positives p die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x, y) \right| \leq \varepsilon \quad ((x, y) \text{ auf } l)$$

erfüllt ist. Die endliche Summe harmonischer Funktionen auf der linken Seite ist im Innern von B eine harmonische Funktion und im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetig. Wegen der Grundeigenschaft der harmonischen Funktionen, nach der die Extremwerte auf der Randkurve angenommen werden [II, 204], gilt: Ist die obige Ungleichung auf der Randkurve erfüllt, so ist sie erst recht in allen inneren Punkten erfüllt; mit anderen Worten, sie ist dann auch in dem ganzen abgeschlossenen Bereich erfüllt, woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (100) in dem ganzen abgeschlossenen Bereich folgt. Somit ist die Summe $S(x, y)$ der Reihe (100) in dem abgeschlossenen Bereich eine stetige Funktion. Wir beweisen, daß sie im Innern des Bereiches harmonisch ist. Es sei M_0 ein beliebiger Punkt im Innern von B . Wir nehmen einen Kreis Σ_0 mit dem Mittelpunkt M_0 und einem Radius R derart, daß dieser Kreis ganz im Innern von B liegt. Mit $S_n(x, y)$ bezeichnen wir die Summe der ersten n Glieder der Reihe (100). Da diese endliche Summe eine harmonische Funktion ist, lassen sich ihre Werte im Innern des Kreises Σ_0 durch ihre Werte auf der Peripherie dieses Kreises nach der Poissonschen Formel

$$S_n(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(R, \psi) \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} d\psi$$

ausdrücken, wobei ϱ und φ die Polarkoordinaten des Punktes $M(x, y)$ sind, wenn der Punkt M_0 als Koordinatenursprung gewählt wird. Auf dem Rand des Kreisbereiches gilt $S_n(R, \psi) \rightarrow S(R, \psi)$ gleichmäßig in bezug auf ψ , und durch Grenzübergang ergibt sich

$$S(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(R, \psi) \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} d\psi,$$

d. h., im Innern des Kreisbereiches läßt sich die Summe der Reihe (100) durch das Poissonsche Integral ausdrücken; folglich ist sie dort eine harmonische Funktion. Wir erinnern daran, daß der Punkt M_0 ein beliebiger Punkt im Innern von B ist. Entsprechend läßt sich beweisen, daß die Reihe (100) im Innern von B beliebig oft nach den Veränderlichen ϱ und φ differenzierbar ist. Denn aus der Poissonschen Formel folgt unmittelbar

$$\frac{\partial u_k(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(R, \psi) \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} d\psi.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Reihe (100) mit

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2}$$

und integrieren über den Rand des Kreisbereiches, so erhalten wir

$$\frac{\partial S(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}.$$

Der soeben bewiesene Satz läßt sich natürlich auch für Folgen von harmonischen Funktionen formulieren, und zwar: *Konvergiert die Folge von Funktionen $S_n(x, y)$, die im Innern von B harmonisch und im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetig sind, auf der Randkurve l gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $S(x, y)$, so konvergiert sie auch im ganzen abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ gleichmäßig gegen diese Grenzfunktion. Die Grenzfunktion ist im Innern von B harmonisch, und die Folge läßt sich im Innern von B beliebig oft differenzieren.*

Wir beweisen noch einen Satz, der sich auf den Spezialfall bezieht, daß die Glieder der Reihe (100) positive Funktionen sind. Zunächst ziehen wir aber eine Schlußfolgerung aus der Poissonschen Formel. Eine Funktion $u(\varrho, \varphi)$, die im Innern eines Kreises ($\varrho < R$) mit dem Mittelpunkt M_0 harmonisch und im abgeschlossenen Kreisbereich stetig ist, läßt sich in diesem Bereich durch die Poissonsche Formel

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} d\psi$$

ausdrücken.

Wir setzen voraus, daß diese Funktion positiv ist. Wegen $|\cos(\psi - \varphi)| \leq 1$ gilt die Ungleichung

$$(R - \varrho)^2 \leq R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2 \leq (R + \varrho)^2,$$

und aus der Poissonschen Formel folgt unmittelbar

$$\frac{R - \varrho}{R + \varrho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) d\psi \leq u(\varrho, \varphi) \leq \frac{R + \varrho}{R - \varrho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) d\psi$$

oder, unter Berücksichtigung des Mittelwertsatzes [II, 204],

$$\frac{R - \varrho}{R + \varrho} u(M_0) \leq u(\varrho, \varphi) \leq \frac{R + \varrho}{R - \varrho} u(M_0). \quad (101)$$

Diese Abschätzung der Werte einer positiven harmonischen Funktion in einem beliebigen Punkt im Innern des Kreises durch ihre Werte im Kreismittelpunkt nennt man gewöhnlich *Harnacksche Ungleichung*. Mit Hilfe dieser Ungleichung können wir den folgenden Satz beweisen:

Eine monoton wachsende Folge von Funktionen $S_n(M)$, die im Innern von B harmonisch sind und in irgendeinem im Innern von B liegenden Punkt M_0 einen endlichen Grenzwert besitzt, konvergiert überall im Innern von B , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich B_1 , der im Innern von B liegt.

Nach den Voraussetzungen dieses Satzes ist im Innern von B die Ungleichung $S_{n+1}(M) \geq S_n(M)$ erfüllt. Wegen der Konvergenz der Folge im Punkt M_0 existiert bei beliebig vorgegebenem positivem ε eine solche Zahl N , daß die Ungleichung $S_{n+p}(M_0) - S_n(M_0) \leq \varepsilon$ für $n \geq N$ bei beliebigem positivem p erfüllt ist. Es sei Σ_0

ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_0 und dem Radius R , der im Innern von B liegt. Da die in eckigen Klammern stehende Differenz eine positive harmonische Funktion darstellt, gilt

$$0 \leq S_{n+p}(M) - S_n(M) \leq \frac{R+\varrho}{R-\varrho} \varepsilon,$$

wobei M ein willkürlicher Punkt im Innern des Kreises ist und ϱ den Abstand zwischen M und M_0 bedeutet. Betrachten wir den Kreis Σ'_0 mit dem Mittelpunkt M_0 und dem Radius $R-a$, wobei a eine hinreichend kleine vorgegebene positive Zahl ist, so erhalten wir im Kreis Σ'_0 die Abschätzung

$$0 \leq S_{n+p}(M) - S_n(M) \leq \frac{2R}{a} \varepsilon,$$

aus der die gleichmäßige Konvergenz der $S_n(M)$ in Σ'_0 folgt. Nehmen wir einen Punkt M_1 im Innern des Kreises Σ_0 , in dem die Folge konvergiert, so erhalten wir mit Hilfe der durchgeführten Überlegungen die gleichmäßige Konvergenz im Innern eines jeden im Innern von B liegenden Kreises mit dem Mittelpunkt in diesem Punkt. Setzen wir dieses Verfahren fort, so können wir genau wie bei der analytischen Fortsetzung die gleichmäßige Konvergenz der Folge in jedem abgeschlossenen Kreisbereich beweisen, der im Innern von B liegt. Jeden abgeschlossenen Bereich B_1 , der mit seiner Randkurve im Innern von B liegt, können wir mit endlich vielen Kreisen überdecken, die im Innern von B liegen. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge in dem Bereich B_1 . Wir bemerken noch, daß *aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge auf Grund des vorhergehenden Satzes folgt, daß die Grenzfunktion der Folge im Innern von B harmonisch ist.*

Der soeben bewiesene Satz läßt sich auch in der Terminologie der Reihen formulieren. Er lautet dann: *Die Glieder der Reihe (100) seien im Innern von B harmonische und außerdem von einer gewissen Nummer n an positive Funktionen. Konvergiert die Reihe in einem Punkt im Innern von B , so konvergiert sie in allen Punkten im Innern von B , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich B_1 , der im Innern von B liegt.* Natürlich könnte man an die Stelle der monoton wachsenden Folge auch eine monoton abnehmende Folge und an die Stelle der positiven Funktionen negative Funktionen setzen.

104. Formulierung der inneren Randwertprobleme für die Laplacesche Gleichung.

Es sei D_i ein endlicher Bereich des dreidimensionalen Raumes, der durch eine Fläche S begrenzt wird. Das Dirichletsche Problem für das Innengebiet besteht bekanntlich darin, diejenige Funktion $u(M)$ zu ermitteln, die im Innern von D_i harmonisch und in dem abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_i$ stetig ist und auf S vorgegebene Randwerte annimmt, die eine auf S stetige Funktion bilden. Es kann nur eine einzige Lösung des Problems geben [II, 204]. Im folgenden werden wir die Existenz der Lösung unter gewissen Voraussetzungen über die Randfläche S beweisen. Im ebenen Fall verhält sich alles ganz analog.

Beim Neumannschen Problem ist auf der Randfläche nicht die Funktion selbst, sondern es sind die Randwerte $f(N)$ der Normalableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ vorgegeben, wobei angenommen wird, daß M auf der Normalen gegen N strebt. Wird außerdem vorausgesetzt, daß die Funktion $u(M)$ eine reguläre Normalableitung besitzt, so können wir die Formel (93) auf $u(M)$ und $v(M) \equiv 1$ anwenden und erhalten

$$\iint_S f(N) \, dS = 0. \quad (102)$$

Somit ist diese Relation eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Neumannschen Problems für das Innengebiet, wenn eine reguläre Normalableitung existiert. Stellt eine Funktion $u(M)$ eine Lösung des Neumannschen Problems für das Innengebiet dar, so ist die Funktion $u(M) + C$ mit einer willkürlichen Konstante C ebenfalls eine Lösung des Problems mit denselben Randwerten $f(N)$. Der Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Neumannschen Problems für das Innengebiet besagt, daß hiermit alle Lösungen des Problems erschöpft sind, d. h., sind $u_1(M)$ und $u_2(M)$ zwei Lösungen des Neumannschen Problems mit denselben Randwerten $f(N)$, so muß die Differenz $u_2(M) - u_1(M)$ in D konstant sein.

Dieser Satz läßt sich leicht beweisen, wenn vorausgesetzt wird, daß $u_1(M)$ und $u_2(M)$ reguläre Normalableitungen besitzen. Dann hat die Differenz

$$v(M) = u_2(M) - u_1(M)$$

ebenfalls eine reguläre Normalableitung, die auf dem Rand gleich 0 ist, und deshalb ist $v(M)$ bis einschließlich S stetig, so daß wir unter Anwendung der Formel (92) auf $v(M)$ die Beziehung

$$\iint\limits_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0$$

erhalten, aus der hervorgeht, daß $v(M)$ im Innern von D_i konstant ist. In einem der folgenden Abschnitte führen wir den allgemeinen Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems.

Wir bemerken, daß wir bei der Formulierung des inneren Problems von DIRICHLET bzw. von NEUMANN hätten annehmen können, daß die Randfläche S aus mehreren geschlossenen Flächen besteht.

Das dritte fundamentale Randwertproblem für die Laplacesche Differentialgleichung besteht in der Ermittlung einer im Innern von S harmonischen Funktion, bei der auf der Randfläche des Bereiches eine Linearkombination der Normalableitung und der Funktion selbst vorgegeben ist. Die Randbedingung lautet also

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right)_i + p(N) u = f(N) \quad (N \text{ auf } S), \quad (103)$$

wobei $p(N)$ und $f(N)$ auf S vorgegebene stetige Funktionen sind, mit $p(N) > 0$.

Wir beweisen den Eindeutigkeitssatz unter der Annahme, daß $u(M)$ eine reguläre Normalableitung besitzt. Gäbe es zwei Lösungen des Problems, so müßte ihre Differenz $v(N)$ der homogenen Randbedingung

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n} \right)_i + p(N) v(N) = 0 \quad (104)$$

genügen. Wenden wir auf $v(M)$ die Formel (92) an und benutzen (104), so erhalten wir

$$\iint\limits_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = - \int\limits_S p(N) v^2(N) dS.$$

Das rechts stehende Integral kann nicht positiv und das links stehende Integral nicht negativ sein, beide Integrale müssen also gleich 0 sein, woraus sich unmittelbar $v(M) = 0$ ergibt.

Alle vorhergehenden Resultate gelten auch für den ebenen Fall.

Bis jetzt haben wir ausschließlich sogenannte innere Probleme betrachtet, bei denen man eine harmonische Funktion, die eine gewisse Randbedingung erfüllt,

in einem beschränkten Bereich bestimmen muß. Jetzt gehen wir zur Betrachtung von äußeren Problemen über, bei denen eine harmonische Funktion in einem unendlichen Teilbereich des Raumes gesucht ist, der sich im Äußeren einer geschlossenen Fläche (oder im Äußeren mehrerer geschlossener Flächen) befindet. Entsprechend läßt sich das Problem auch für die Ebene stellen. Eine wesentliche Rolle spielt hierbei die Bedingung, die wir der gesuchten Funktion in der Umgebung des unendlich fernen Punktes auferlegen. Für die Ebene hat diese Bedingung eine andere Form als für den Raum. Zunächst beschäftigen wir uns mit dieser Bedingung im Unendlichen und beginnen mit dem ebenen Fall.

105. Äußere Probleme im ebenen Fall. Eine Funktion $u(M)$, die in der Umgebung des unendlich fernen Punktes harmonisch ist, nennen wir *im unendlich fernen Punkt regulär*, wenn die Funktion $u(M)$ einen endlichen Grenzwert besitzt, falls M gegen ∞ strebt. Zunächst erläutern wir den Sinn dieser Definition. Wir konstruieren in der Umgebung des unendlich fernen Punktes eine Funktion $v(M)$, die zu $u(M)$ konjugiert harmonisch ist [III/2, 2]. Beim Umlaufen des unendlich fernen Punktes gegen den Uhrzeigersinn kann die Funktion $v(M)$ um einen konstanten Summanden zunehmen, den wir mit γ bezeichnen. Die Funktion einer komplexen Veränderlichen

$$f(z) = u(z) + v(z) i - \frac{\gamma}{2\pi} \lg z$$

ist in der Umgebung des unendlich fernen Punktes eindeutig und regulär und muß sich folglich in dieser Umgebung in eine Laurentsche Reihe nach ganzen Potenzen von z entwickeln lassen. Wir zeigen, daß es in dieser Reihenentwicklung keine Glieder mit positiven Potenzen von z gibt. Gäbe es unendlich viele solcher Glieder, so müßte die Funktion $f(z)$ für $|z| \rightarrow \infty$ Werte annehmen, die jeder beliebig vorgegebenen Zahl beliebig nahekommen [III/2, 17], aber in Wirklichkeit strebt der Realteil der Funktion, d. h. $u(z) - \frac{\gamma}{2\pi} \lg |z|$, entweder gegen ∞ , und zwar für $\gamma \neq 0$, da nach Voraussetzung $u(z)$ einen endlichen Grenzwert hat, oder er hat für $|z| \rightarrow \infty$ einen endlichen Grenzwert (für $\gamma = 0$).

Gäbe es endlich viele Glieder mit positiven Potenzen, d. h., wäre

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots \quad (a_m \neq 0),$$

so würde

$$u(z) - \frac{\gamma}{2\pi} \lg \varrho = r \varrho^m \cos(m\varphi + \psi) + \operatorname{Re} \left[a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots \right]$$

$$(z = \varrho e^{i\varphi}, a_m = r e^{i\psi})$$

gelten; dabei bedeutet Re den Realteil. Dividieren wir beide Seiten dieser Beziehung durch ϱ^m und lassen ϱ bei festem φ gegen ∞ streben, so strebt die linke Seite offenbar gegen 0, und die rechte Seite hat den Grenzwert $r \cos(m\varphi + \psi)$, der von φ abhängt und im allgemeinen nicht gleich 0 ist. Wir gelangen somit zu einem Widerspruch; folglich gibt es in der Reihenentwicklung von $f(z)$ nur ein Absolutglied und Glieder mit negativen Potenzen:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad (105)$$

Die Funktion $f(z)$ hat für $|z| \rightarrow \infty$ einen wohlbestimmten endlichen Grenzwert a_0 ; hieraus folgt unmittelbar, daß die Konstante γ gleich 0 sein muß. Ist also die Funktion $u(M)$ im unendlichen fernen Punkt regulär und $v(M)$ die konjugierte Funktion, so hat $f(z) = u(z) + iv(z)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Entwicklung (105). Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt unmittelbar, daß man zur Herleitung dieses Ergebnisses lediglich voraussetzen braucht, $u(M)$ sei in der Umgebung des unendlich fernen Punktes dem Betrag nach beschränkt. Hieraus folgt bereits die Entwicklung (105) und damit die Existenz eines endlichen Grenzwertes von $u(M)$, wenn der Punkt M gegen ∞ strebt.

Das Dirichletsche Problem für das Außengebiet besteht in der Ermittlung einer Funktion $u(M)$, die außerhalb einer geschlossenen Kurve l harmonisch, im Unendlichen regulär ist und auf der Randkurve l vorgegebene Werte $f(N)$ annimmt. Es sei z_0 ein Punkt, der sich innerhalb von l befindet. Wir führen die konforme Abbildung $w = \frac{1}{z - z_0}$ der Ebene durch. Dann gilt: Der im Äußeren von l liegende Teil der Ebene wird in einen beschränkten Bereich B transformiert, harmonische Funktionen gehen wieder in harmonische Funktionen über [III/2, 31], der Punkt $z = \infty$ wird auf $w = 0$ abgebildet, und $f(z)$ ist für $w = 0$ eine reguläre Funktion von w . Das oben formulierte äußere Dirichletsche Problem geht bei der Transformation in ein inneres Problem über; es kann offenbar nur eine Lösung des gestellten Problems geben.

Differenzieren wir die Reihenentwicklung (105) nach z und berücksichtigen wir

$$z^2 f'(z) \rightarrow -a_{-1} \quad \text{für} \quad |z| \rightarrow \infty,$$

so finden wir, daß die Produkte $\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ mit $\varrho = |z|$ für $M \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, falls die harmonische Funktion $u(M)$ im unendlich fernen Punkt regulär ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß das Produkt $\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial m}$, wobei m eine beliebige Richtung bezeichnet, die sich bei einer Verschiebung des Punktes M ändern kann, für $M \rightarrow \infty$ ebenfalls beschränkt bleibt. Ist B der Teil der Ebene, der sich im Äußeren der geschlossenen Kurve l befindet, und sind $u(M)$ und $v(M)$ Funktionen, die in B harmonisch, im unendlich fernen Punkt regulär und nebst ihren Ableitungen erster Ordnung in $B \cup l$ stetig sind, so gelten die Beziehungen

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dS = \int_l u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a dS, \quad (106)$$

$$\int_l \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_a - v \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a \right] ds = 0, \quad (107)$$

wobei n die Richtung der (in bezug auf B) äußeren Normalen von l bezeichnet. Diese Beziehungen lassen sich ebenso beweisen wie in [102] für den räumlichen Fall. Man braucht nur zu beachten, daß auf dem Kreis C mit dem festen Mittelpunkt O und dem Radius R die Produkte $u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a$ und $u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_a$ eine Schranke der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ besitzen und $2\pi R$ die Länge der Kreislinie ist. Wie in [102] bleiben die Beziehungen (106) und (107) richtig, wenn an Stelle der Stetigkeit der Ableitungen erster Ordnung bis einschließlich l nur die Existenz der regulären Normalableitung der Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ gefordert wird.

Jetzt gehen wir zum Neumannschen Problem für das Außengebiet über, bei dem auf l die Randbedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = f(N) \quad (N \text{ auf } l) \quad (108)$$

erfüllt ist, wenn M längs der Normalen gegen N strebt. Die Forderung, daß $u(M)$ im Unendlichen regulär ist, wird beibehalten. Es möge eine Lösung $u(M)$ des Problems existieren; wir setzen voraus, daß $u(M)$ auf l eine reguläre Normalableitung besitzt. Durch Anwendung der Beziehung (107) auf $u(M)$ mit $v(M) \equiv 1$ für einen Bereich, der durch die Kurve l und eine Kreislinie C mit hinreichend großem Radius begrenzt wird, erhalten wir

$$\int_l \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a ds + \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \quad (109)$$

Da die Ableitung $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a$ auf C die Ordnung $\frac{1}{R^2}$ hat, strebt das Integral über C für $R \rightarrow \infty$ gegen 0, und wir erhalten beim Grenzübergang wegen (108)

$$\int_l f(N) ds = 0. \quad (110)$$

Diese notwendige Bedingung haben wir auch für das innere Neumannsche Problem erhalten. Mit Hilfe der Beziehung (106) läßt sich die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren Neumannschen Problems unter der Bedingung beweisen, daß die Normalableitung regulär ist (vgl. [104]). Im dreidimensionalen Raum werden wir für die Lösbarkeit des äußeren Neumannschen Problems keine zu (110) analoge Bedingung haben.

Es sei erwähnt, daß die singuläre Grundlösung $\lg \frac{1}{r}$ im unendlich fernen Punkt nicht regulär ist. Sie strebt für $r \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Die zweite singuläre Lösung $\frac{\cos \varphi}{r}$, die einem Dipol entspricht, ist dagegen im unendlich fernen Punkt regulär und verschwindet in diesem Punkt. Im dreidimensionalen Raum verschwindet nicht nur das Potential des Dipols, sondern auch die singuläre Grundlösung $\frac{1}{r}$ im unendlich fernen Punkt. Das Potential der einfachen Schicht (81), das eine im Äußeren von l harmonische Form darstellt, ist im allgemeinen im unendlich fernen Punkt nicht regulär. Ist aber die Gesamtladung gleich 0, d. h., gilt

$$\int_l \mu(N) ds = 0, \quad (111)$$

so ist das Potential (81) doch regulär. Denn ist R die Entfernung des Punktes M vom Koordinatenursprung und führen wir in das Integral (111) den Faktor $\lg R$ ein, der nicht von dem veränderlichen Integrationspunkt N abhängt, so können wir das Potential (81) in der Gestalt

$$u(M) = \int_l \mu(N) \lg \frac{R}{r} ds$$

schreiben; für $M \rightarrow \infty$ strebt der Ausdruck $\lg \frac{R}{r}$ gleichmäßig für die auf l liegenden Punkte N gegen 0. Somit sehen wir, daß das Potential im unendlich fernen Punkt tatsächlich regulär und gleich 0 ist.

Jetzt wollen wir noch eine Eigenschaft harmonischer Funktionen beweisen. Wir setzen voraus, daß die Funktion $u(M)$ in einem Kreis, dessen Mittelpunkt wir als Koordinatenursprung N_0 wählen, dem absoluten Betrag nach beschränkt und, außer höchstens im Koordinatenursprung selbst, harmonisch ist. Wir zeigen, daß für $M \rightarrow N_0$ ein Grenzwert von $u(M)$ existiert und $u(M)$ im ganzen Kreis einschließlich des Koordinatenursprungs harmonisch ist, wenn wir diesen Grenzwert als Wert für $u(N_0)$ nehmen. Um uns davon zu überzeugen, brauchen wir nur dieselben Überlegungen durchzuführen, die uns zur Reihenentwicklung (105) führten, und den unendlich fernen Punkt durch den Koordinatenursprung zu ersetzen. An Stelle von (105) ergibt sich

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

woraus gerade unsere Behauptung folgt.

106. Die Kelvintransformation. Bei der Betrachtung harmonischer Funktionen im dreidimensionalen Raum haben wir nicht ein so wichtiges Hilfsmittel zur Verfügung, wie es im ebenen Fall die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und speziell die konforme Abbildung, die jede harmonische Funktion wieder in eine harmonische Funktion überführt, darstellt. Im dreidimensionalen Raum gibt es aber eine Punkttransformation von spezieller Gestalt, welche dieselbe Eigenschaft besitzt. Ist $u(x, y, z)$ eine in einem Bereich D harmonische Funktion, so ist die Funktion

$$v(x', y', z') = \frac{1}{r'} u\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right) \quad (r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (112)$$

im Bereich D' harmonisch, der aus D durch die Transformation

$$x' = \frac{x}{r^2}, \quad y' = \frac{y}{r^2}, \quad z' = \frac{z}{r^2} \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \quad (113)$$

hervorgeht. Zunächst bemerken wir, daß $r' = \frac{1}{r}$ ist und daß die zu (113) reziproke Transformation dieselbe Gestalt

$$x = \frac{x'}{r'^2}, \quad y = \frac{y'}{r'^2}, \quad z = \frac{z'}{r'^2} \quad (113_1)$$

besitzt.

Mit Hilfe von Kugelkoordinaten läßt sich die Beziehung (112) in der Form

$$v(r', \theta, \varphi) = \frac{1}{r'} u\left(\frac{1}{r'}, \theta, \varphi\right)$$

schreiben. Da $u(r, \theta, \varphi)$ die Laplacesche Differentialgleichung

$$r^2 u_{rr} + 2r u_r + \frac{1}{\sin \theta} (u_\theta \sin \theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0$$

erfüllt und die Identität

$$r'^5 \left(v_{r'r'} + \frac{2}{r'} v_{r'} \right) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$$

besteht, können wir uns ohne Mühe davon überzeugen, daß auch die Funktion $v(r', \theta, \varphi)$ die Laplacesche Differentialgleichung erfüllt. Die Transformation (113) stellt eine Spiegelung an der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung dar (vgl. [II, 207]). Wir könnten natürlich den Mittelpunkt der Kugel in

einem beliebigen Punkt (a, b, c) und ebenso den Radius R beliebig wählen. Dann lauten die Formeln (112) und (113)

$$\begin{aligned} x' - a &= \frac{R^2}{r^2} (x - a), & y' - b &= \frac{R^2}{r^2} (y - b), & z' - c &= \frac{R^2}{r^2} (z - c), \\ v(x', y', z') &= \frac{R}{r'} u \left[a + \frac{R^2}{r'^2} (x' - a), \dots \right], \\ r^2 &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}, \\ r'^2 &= \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2}. \end{aligned} \quad (114)$$

Die Transformation (114) heißt die *Kelvintransformation*¹⁾. Bevor wir den Begriff der Regularität einer harmonischen Funktion im unendlich fernen Punkt des dreidimensionalen Raumes einführen, beweisen wir eine Eigenschaft der harmonischen Funktionen, die wir für den ebenen Fall am Schluß des vorigen Abschnittes bewiesen haben. Die Funktion $u(M)$ sei in einer Kugel S_0 mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung dem absoluten Betrag nach beschränkt und dort mit Ausnahme eventuell des Koordinatenursprungs harmonisch. Wir zeigen, daß ein Grenzwert von $u(M)$ existiert, wenn M gegen den Koordinatenursprung strebt, und daß $u(M)$ auch im Koordinatenursprung harmonisch ist, wenn wir diesen Grenzwert dort als Funktionswert von $u(M)$ benutzen.

Unter Benutzung des in [II, 207] angegebenen Integrals können wir eine Funktion $u_1(M)$ konstruieren, die im Innern der Kugel S_0 ohne jede Ausnahme harmonisch ist und auf der Kugeloberfläche dieselben Randwerte annimmt wie die Funktion $u(M)$.

Wir wenden auf die Differenz $u_1(M) - u(M)$ die Kelvintransformation bezüglich der Kugel S_0 an. Die transformierte Funktion ist im Äußeren der Kugel S_0 harmonisch, auf der Kugel gleich 0 und strebt gegen 0, wenn der Punkt M' gegen ∞ strebt. Die letzte Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Gestalt der Formeln (114) und daraus, daß $u(M)$ nach Voraussetzung in der Umgebung des Koordinatenursprungs beschränkt ist. Da sich die Extremwerte einer harmonischen Funktion auf dem Rand des Bereiches befinden, muß die Funktion $u_1(M) - u(M)$ identisch gleich 0 sein, d. h., die Funktion $u_1(M)$ ist mit der Funktion $u(M)$ identisch; daher ist die Funktion $u(M)$ auch im Koordinatenursprung harmonisch.

Es sei $u(M)$ eine Funktion, die in der Umgebung eines Punktes O , den wir als Koordinatenursprung nehmen, und in O selbst harmonisch ist. Führen wir die Kelvintransformation bezüglich der Einheitskugel um O durch, so erhalten wir die transformierte Funktion $v(M')$, die in der Umgebung des unendlich fernen Punktes eine harmonische Funktion ist. Diese Funktion strebt für $r' \rightarrow \infty$ gegen 0; darüber hinaus folgt aus der Formel (112) unmittelbar, daß $r'v(M')$ für $r' \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt; dasselbe gilt auch von den Produkten $r'^2 \frac{\partial v}{\partial x'}$, $r'^2 \frac{\partial v}{\partial y'}$, und $r'^2 \frac{\partial v}{\partial z'}$. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Ableitungen von $u(M)$ in der Umgebung von O beschränkt sind. Ist umgekehrt die Funktion $u(M)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes harmonisch und bleibt das Produkt $ru(M)$ für $r \rightarrow \infty$ beschränkt, so können wir uns mit Hilfe der Kelvintransformation davon überzeugen, daß die transformierte Funktion $v(M') = \frac{1}{r'} u(M)$ in der Umgebung des Koordinatenursprungs harmonisch und beschränkt und damit auch im Koordinaten-

¹⁾ In der Form (113), (113₁) wird die Transformation gewöhnlich Transformation mittels reziproker Radien genannt. (Anm. d. Red.)

ursprung selbst harmonisch ist. Somit folgt aus unseren Überlegungen unmittelbar, daß die Produkte $r^2 \frac{\partial u}{\partial x}$, $r^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ und $r^2 \frac{\partial u}{\partial z}$ für $r \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. Wir setzen schließlich voraus, daß von der Funktion $u(M)$, die in der Umgebung des unendlich fernen Punktes harmonisch ist, nur bekannt ist, daß $u(M) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt, d. h., bei beliebig vorgegebenem positivem ε existiere eine positive Zahl A derart, daß $|u(M)| \leq \varepsilon$ gilt, wenn nur $r \geq A$ ist. Wir bilden eine Kugel S_0 mit dem Mittelpunkt im Ursprung und so großem Radius, daß $u(M)$ im Äußeren von S_0 und auch noch auf S_0 harmonisch ist. Dann können wir eine Funktion $v_1(M')$ konstruieren, die im Innern von S_0 harmonisch ist und auf S_0 dieselben Randwerte besitzt wie $u(M)$.

Es sei $u_1(M)$ diejenige Funktion, die aus der Funktion $v_1(M')$ durch Kelvintransformation bezüglich der Kugel S_0 entsteht. Die Differenz $u(M) - u_1(M)$ ist im Äußeren von S_0 eine harmonische Funktion, die auf S_0 gleich 0 ist und für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Diese Funktion muß, wie wir oben gesehen haben, identisch verschwinden. Folglich ist unsere ursprüngliche Funktion $u(M)$ mit der Funktion $u_1(M)$ identisch, die wir durch eine Kelvintransformation aus der (innerhalb von S_0 harmonischen) Funktion $v_1(M')$ erhalten haben. Für diese Funktion sind, wie wir gesehen haben, die Produkte

$$ru_1(M), \quad r^2 \frac{\partial u_1(M)}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial u_1(M)}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial u_1(M)}{\partial z} \quad (115)$$

für $r \rightarrow \infty$ beschränkt. Somit folgt aus $u(M) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, daß die Produkte (115) für $u(M)$ bei $r \rightarrow \infty$ beschränkt sind.

Wir nennen eine in der Umgebung des unendlich fernen Punktes harmonische Funktion $u(M)$ im Unendlichen regulär, wenn $u(M) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt. Ist nur bekannt, daß $u(M)$ gegen einen endlichen Grenzwert b strebt, so kann man sagen, daß diese Funktion gleich der Summe aus der Konstanten b und einer harmonischen Funktion ist, die im unendlich fernen Punkt regulär ist. Bleiben für zwei im Äußeren von S harmonische Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ die Produkte (115) beschränkt und haben diese Funktionen auf S reguläre Normalableitungen bezüglich der äußeren Normalen, so gelten für diese Funktionen, wie wir in [102] gesehen haben, die Formeln (94), (95), in denen die Integration über den Teil des Raumes erstreckt wird, der sich im Äußeren von S befindet.

Das Dirichletsche Problem für das Außengebiet besteht in der Ermittlung einer Funktion $u(M)$, die im Äußeren von S harmonisch, im unendlich fernen Punkt regulär sowie bis einschließlich S stetig ist und die auf der Fläche S vorgegebene Werte $f(N)$ annimmt. Wählen wir einen Punkt M_0 , der sich im Innern von S befindet, als Koordinatenursprung und führen die Kelvintransformation durch, so führen wir das äußere Dirichletsche Problem in das innere Problem für das transformierte Gebiet über. Mit Hilfe üblicher Schlußweisen läßt sich die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren Dirichletschen Problems beweisen. Der Nachweis der Existenz einer Lösung dieses Problems, reduziert sich auf den der Existenz einer Lösung des inneren Dirichletschen Problems, der sich unter recht allgemeinen Voraussetzungen über die Fläche für stetige Randwerte erbringen läßt.

Wir weisen auf einen Unterschied bei der Formulierung des äußeren Dirichletschen Problems im Fall der Ebene und des Raumes hin. Im ebenen Fall haben wir die Randwerte auf der Randkurve vorgegeben und nur gefordert, daß die Funktion für $r \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Im dreidimensionalen Fall geben wir auch diesen Grenzwert vor, und zwar nehmen wir ihn gleich 0 an. Wir könnten auch annehmen, daß unsere Funktion für $r \rightarrow \infty$ gegen eine vorgegebene

Zahl b strebt. Betrachten wir die Differenz $u(M) - b$, so gelangen wir zu der früheren Formulierung des Problems. Man erkennt leicht, daß es im Fall des dreidimensionalen Raumes zur eindeutigen Bestimmung der Lösung des äußeren Dirichletschen Problems nicht genügt, zu fordern, $u(M)$ besitze für $r \rightarrow \infty$ einen endlichen Grenzwert. Zum Beweis nehmen wir an, daß sich eine Elektrizitätsmenge auf einer leitenden Fläche S im Gleichgewicht befindet. Das elektrostatische Potential der einfachen Schicht hat auf der Fläche S einen konstanten Wert c , wobei man leicht zeigen kann, daß $u(M)$ im Äußeren von S eine harmonische Funktion ist und für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Die Konstante c selbst ist ebenfalls im Äußeren von S eine harmonische Funktion und hat auf S dieselben Randwerte, aber sie ist auf Grund unserer Definition im unendlich fernen Punkt nicht regulär. Für den ebenen Fall kann man diese Überlegung nicht anwenden; denn das elektrostatische Potential einer einfachen Schicht auf der Kurve l wird im unendlich fernen Punkt unendlich groß. Wir bemerken noch, daß eine Funktion $u(M)$ manchmal nur dann im Äußeren der Fläche S harmonisch genannt wird, wenn sie im unendlich fernen Punkt regulär ist; einige Autoren schließen nämlich in die Definition einer Funktion, die im Äußeren einer Fläche S harmonisch ist, die Regularität im unendlich fernen Punkt mit ein.

Das Neumannsche Problem für das Außengebiet besteht in der Ermittlung einer Funktion, die im Äußeren von S harmonisch und im Unendlichen regulär ist und von der die Randwerte ihrer Normalableitung auf S vorgegeben sind. Im vorliegenden Fall brauchen die Randwerte der Normalableitung nicht mehr die Bedingung (110) zu erfüllen. Denn der Beweis dieser Bedingung, den wir für den ebenen Fall durchgeführt haben, läßt sich nicht auf den räumlichen Fall übertragen, da der Flächeninhalt der Kugelfläche mit dem Radius R die Ordnung R^2 besitzt und somit der Wert des Integrals von $\frac{\partial u}{\partial n}$ über eine Kugel mit hinreichend großem

Radius für $R \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 zu streben braucht. Setzen wir voraus, daß die Lösung des äußeren Neumannschen Problems eine reguläre Normalableitung besitzt, so folgt die Eindeutigkeit der Lösung unmittelbar aus der Formel (94). Eine entsprechende Überlegung haben wir für das innere Neumannsche Problem durchgeführt.

Zum Schluß dieses Abschnittes bemerken wir noch, daß man die angegebenen Eigenschaften einer harmonischen Funktion in der Umgebung des unendlich fernen Punktes auch unmittelbar erhalten kann, wenn man diese Funktion in der Umgebung des unendlich fernen Punktes nach Kugelfunktionen entwickelt.

107. Die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems. In diesem Abschnitt beweisen wir die Eindeutigkeit der Lösung des inneren Neumannschen Problems, ohne die Regularität der Normalableitung vorauszusetzen. Zunächst betrachten wir einen bestimmten räumlichen Bereich und konstruieren in ihm eine spezielle harmonische Funktion. Es sei $T(\alpha, k, h)$ derjenige Bereich, der von der Fläche

$$z = k(x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (116)$$

und von der Ebene $z=h$ begrenzt wird, wobei k , α und h positive Konstante bezeichnen. Der Punkt $(0, 0, 0)$ heißt Spitze dieses Bereiches; wir bezeichnen ihn mit N_0 . Es sei σ' derjenige Teil der Oberfläche unseres Bereiches, der in der Ebene $z=h$ liegt, und σ'' der übrige Teil der Oberfläche. Weiterhin seien u_0 und u_1 zwei reelle Konstante mit $u_0 < u_1$. Wir bilden eine Funktion $w(M)$, die im Innern des

Bereiches $T(\alpha, k, h)$ harmonisch und bis an seine Oberfläche heran stetig ist und dabei die Bedingungen $w(M) < u_1$ auf σ' , $w(M) \leq u_0$ auf σ'' und $w(N_0) = u_0$ erfüllt. Ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, bezeichnet θ den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der z -Achse und sind $P_n(x)$ die Legendreschen Funktionen [III/2, 142], so ist die Funktion $r^n P_n(\cos \theta)$ bekanntlich [III/2, 136] bei beliebigem n im Innern des Bereiches $T(\alpha, k, h)$ harmonisch. Wir machen für $w(M)$ den Ansatz

$$w(M) = \gamma [r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta)] + u_0, \quad (117)$$

wobei γ und β positive Konstante sind, die noch festgelegt werden. Offenbar gilt $w(N_0) = u_0$. Wir zeigen zunächst, daß für alle hinreichend kleinen β

$$P_{1+\beta}(0) < 0 \quad (118)$$

gilt. Die Funktion $P_n(x)$ ist die Summe der hypergeometrischen Reihe

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (|x| < 1),$$

folglich gilt

$$P_n(0) = 1 - \frac{(n+1)n}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+k)(n+k-1) \dots (n-k+1)}{(k!)^2 2^k}$$

oder

$$P_n(0) = -\frac{(n-1)(n+2)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left[\prod_{s=1}^k \frac{(n+s)(n-s+1)}{2s^2} \right].$$

Wir nehmen $1 < n < 2$ an, so daß die Faktoren, die zu $s=1$ und $s=2$ gehören, positiv und die übrigen $k-2$ Faktoren negativ sind. Fügen wir zu diesen letzten Faktoren $(-1)^{k-2}$ hinzu, so können wir sie in der Gestalt

$$0 < \frac{(n+s)(s-n-1)}{2s^2} = \frac{s^2 - n^2 - s - n}{2s^2} < \frac{1}{2} \quad (s=3, 4, \dots)$$

schreiben. Trennen wir die ersten beiden Faktoren ab, so erhalten wir die Ungleichung

$$P_n(0) < -\frac{(n-1)(n+2)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{16} \cdot \frac{1}{2^{k-2}}$$

oder

$$P_n(0) < \frac{(n-1)(n+2)}{2} \left[\frac{(n+1)n}{8} - 1 \right],$$

woraus gerade $P_n(0) < 0$ für $n^2 + n < 8$ folgt. Somit ist die Ungleichung (118) für alle positiven Werte von β , die hinreichend klein sind, bewiesen. Wir legen β derart fest, daß es dieser Bedingung sowie der Bedingung $\beta < \alpha$ genügt, wobei α die Konstante aus Gleichung (116) ist. Wegen $z = r \cos \theta$ erhalten wir auf der Fläche (116)

$$r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta) = k \varrho^{1+\alpha} + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta)$$

mit $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$; damit ergibt sich schließlich auf der Fläche (116)

$$r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta) = r^{1+\beta} [k r^{\alpha-\beta} \sin^{1+\alpha} \theta + P_{1+\beta}(\cos \theta)].$$

Für $r \rightarrow 0$ gilt $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, und wegen (118) und $\beta < \alpha$ hat der Ausdruck in eckigen Klammern einen negativen Grenzwert. Somit können wir die positive Zahl h so klein festlegen, daß auf dem ganzen Teil σ'' der Oberfläche unseres Bereiches $T(\alpha, k, h)$ die Ungleichung

$$r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta) \leq 0 \quad (119)$$

gilt. Schließlich wählen wir die positive Zahl γ so klein, daß sich aus (117) die Ungleichung $w(M) < u_1$ auf σ' ergibt. Die konstruierte Funktion $w(M)$ erfüllt alle angegebenen Bedingungen. Auf der Achse des Bereichs $T(\alpha, k, h)$, d. h. auf der z -Achse, gilt

$$w(M) = \gamma(z + z^{1+\beta}) + u_0 \quad (z > 0).$$

Ist M ein veränderlicher Punkt dieser Achse, so gilt

$$\frac{w(M) - w(N_0)}{z} = \gamma + \gamma z^\beta > \gamma. \quad (120)$$

Wir beweisen nun folgenden Satz.

Satz. Ist $u(M)$ eine im Innern eines Bereichs D_i harmonische nichtkonstante Funktion, u_0 die endliche untere Grenze der Werte von $u(M)$ im Innern von D_i und existiert auf der Randfläche S ein Punkt N_0 derart, daß $u(M) \rightarrow u_0$ gilt, wenn M von innen her gegen N_0 strebt, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{u(M) - u(N_0)}{|N_0 M|} \quad (121)$$

größer als eine bestimmte positive Zahl, wenn M längs der Normalen gegen N_0 strebt.

Wir nehmen an, daß ein Bereich $T(\alpha, k, h)$ existiert, der S im Punkt N_0 berührt und dessen Punkte mit Ausnahme von N_0 im Innern von S liegen. Die Zahl h wird so klein festgelegt, daß auf der gesamten Teilfläche σ'' der Oberfläche des Bereichs $T(\alpha, k, h)$ die Ungleichung (119) gilt. Es sei u_1 der kleinste Wert von $u(M)$ auf der Teilfläche σ' der Oberfläche von $T(\alpha, k, h)$. Da $u(M)$ nicht konstant ist, ist $u_0 < u_1$; wählen wir γ genügend klein, so können wir eine Funktion $w(M)$ mit den angegebenen Eigenschaften konstruieren. Hierbei ist $w(N_0) = u(N_0)$ und $w(N) < u(N)$ auf dem übrigen Teil der Oberfläche von $T(\alpha, k, h)$. Legen wir die z -Achse in Richtung der inneren Normalen von S im Punkt N_0 , so erhalten wir

$$\frac{u(M) - u(N_0)}{|N_0 M|} = \frac{u(M) - u(N_0)}{z} > \frac{w(M) - w(N_0)}{z} > \gamma, \quad (122)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aus dem Satz folgt unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems im folgenden Sinne:

Ist die im Innern von D_i harmonische Funktion $u(M)$ bis einschließlich S stetig und ist $\left(\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right)_i = 0$ auf der ganzen Fläche S , so ist $u(M)$ eine Konstante. Es sei N_0 der Punkt von S , in dem $u(M)$ den kleinsten Wert annimmt. Aus (122) folgt unmittelbar, daß die Normalableitung im Punkt N_0 nicht gegen 0 streben kann, wenn M auf der Normalen gegen N_0 strebt. Denn wäre dies der Fall, so würde der Differenzenquotient

$$\frac{u(M) - u(N_0)}{z}$$

gegen 0 streben, was (122) widerspricht.

Ganz analog läßt sich auch die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren Neumannschen Problems beweisen.

Der angegebene Beweis ist einer gemeinsamen Arbeit von M. W. KELDYSCH und M. A. LAVRENTIEFF (Doklady AN SSSR 16 (1937), 151–152) entnommen.

Kann die Fläche S von innen durch eine Kugel berührt werden, so läßt sich der Eindeutigkeitssatz elementar beweisen (S. ZAREMBA, Uspechi matem. nauk 1: 3–4, Übersetzung der Arbeit: Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace, Krakau Anz. (A) (1910), 313–344).

108. Lösung der Randwertprobleme im dreidimensionalen Fall. Wir betrachten die inneren Probleme von DIRICHLET und NEUMANN für einen Bereich D_i , der durch eine Fläche S begrenzt wird. Die Lösung des inneren Dirichletschen Problems suchen wir in der Gestalt des Doppelschichtpotentials

$$u(M) = \int_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \quad (r = |MN|), \quad (123)$$

wobei mit $\mathbf{r}$ der Vektor von M nach N und mit $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor der äußeren Normalen an die Fläche im Punkt N bezeichnet wird. Gesucht ist die Dichte $\mu(N)$. Nach der ersten Relation (42) ist das innere Dirichletsche Problem mit den Randwerten

$$(u)_i|_S = f(N) \quad (124)$$

der Integralgleichung

$$f(N_0) = \int_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) \quad (r_0 = |N_0N|)$$

für die Dichte $\mu(N)$ gleichwertig. Führen wir den Kern

$$K(N_0, N) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0^2}$$

ein, so können wir die Integralgleichung in der Gestalt

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) + \int_S \mu(N) K(N_0, N) dS \quad (125)$$

schreiben. Der Kern $K(N_0, N)$ ist nicht symmetrisch, da die Normale im Punkt N zu nehmen ist und $\mathbf{r}_0$ den Vektor von N_0 nach N bezeichnet. Wir erhalten den Kern der transponierten Integralgleichung [IV/1, 9], wenn wir die Normale in N_0 wählen und $\mathbf{r}_0$ als von N nach N_0 gerichtet annehmen. Dieser transponierte Kern $K_1(N_0, N)$ ist somit durch die Relation

$$K_1(N_0, N) = K(N, N_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} \quad (126)$$

bestimmt, wobei $\mathbf{n}_0$ der Einheitsvektor der äußeren Normalen in N_0 ist. Wir haben das Vorzeichen des Kerns geändert, da wir in $K_1(N_0, N)$ den Vektor $\mathbf{r}_0$ umgekehrt haben, aber in (126) mit $\mathbf{r}_0$ wie früher den Vektor von N_0 nach N bezeichnen.

Die Lösung des inneren Neumannschen Problems mit der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial \mathbf{n}}\right)_i = f(N) \quad (127)$$

suchen wir in der Gestalt des Potentials einer einfachen Schicht:

$$u(M) = \int_S \frac{\mu(N)}{r} dS. \quad (128)$$

Unter Berücksichtigung der ersten Relation (49) gelangen wir zu der Integralgleichung

$$f(N_0) = \int_S \int \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0),$$

die dem gestellten Problem gleichwertig ist. Diese Integralgleichung läßt sich auch in der Gestalt

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) - \int_S \int \mu(N) K_1(N_0, N) dS \quad (129)$$

schreiben. Entsprechend erhalten wir unter Benutzung der zweiten Relation (42) und der zweiten Relation (49) für das äußere Dirichletsche Problem bzw. für das äußere Neumannsche Problem unter den Randbedingungen

$$(u)_a|_S = f(N), \quad (130_1)$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_a = f(N) \quad (130_2)$$

die Integralgleichungen

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi} f(N_0) - \int_S \int \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0^2} dS, \quad (131_1)$$

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi} f(N_0) + \int_S \int \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS, \quad (131_2)$$

wobei wir wiederum die Lösung des Dirichletschen Problems in der Gestalt (123) und die Lösung des Neumannschen Problems in der Gestalt (128) suchen. Wir führen jetzt in die Integralgleichungen einen Parameter λ ein:

$$\mu(N_0) = \varphi(N_0) + \lambda \iint_S \mu(N) K(N_0, N) dS, \quad (132)$$

$$\mu(N_0) = \varphi(N_0) + \lambda \iint_S \mu(N) K_1(N_0, N) dS. \quad (133)$$

Die Integralgleichung (132) entspricht für $\lambda=1$ und $\varphi(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0)$ dem inneren Dirichletschen Problem und für $\lambda=-1$ und $\varphi(N_0) = -\frac{1}{2\pi} f(N_0)$ dem äußeren Dirichletschen Problem. Die Integralgleichung (133) entspricht für $\lambda=1$ und $\varphi(N_0) = -\frac{1}{2\pi} f(N_0)$ dem äußeren Neumannschen Problem und für $\lambda=-1$ und $\varphi(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0)$ dem inneren Neumannschen Problem. Ist S eine Liapounoffsche Fläche und ist in der Bedingung (3) speziell $\alpha=1$, so erhalten wir für den Kern der Integralgleichung auf Grund der Resultate aus [94] die Abschätzung

$$|K(N_0, N)| \leq \frac{C}{r}. \quad (134)$$

Daher sind auf die Integralgleichungen (132) und (133) die fundamentalen Sätze der Theorie der Integralgleichungen anwendbar [IV/1, 10].

109. Untersuchung der auftretenden Integralgleichungen. Wir untersuchen nun die homogene Integralgleichung

$$\mu(N_0) = \lambda \iint_S \mu(N) K(N_0, N) dS. \quad (135)$$

Im Falle einer konvexen Fläche ist dies sehr einfach. Dann ist $\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0) \geq 0$ und $K(N_0, N) \leq 0$. Es sei $\mu(N)$ eine von 0 verschiedene Lösung der Integralgleichung (135), und es sei N_0 der Punkt, in dem $|\mu(N)|$ seinen größten Wert annimmt. Ist $\mu(N)$ keine Konstante, so erhalten wir

$$|\mu(N_0)| < |\lambda| |\mu(N_0)| \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{2\pi r_0^2} dS$$

oder wegen (26)

$$|\mu(N_0)| < |\lambda| |\mu(N_0)| \quad (\mu(N_0) \neq 0),$$

woraus $|\lambda| > 1$ folgt. Setzen wir in der Integralgleichung (135) voraus, daß $\mu(N)$ eine von 0 verschiedene Konstante ist, so ergibt sich durch abermalige Benutzung der Relation (26) speziell $\lambda = -1$.

Somit erhalten wir das folgende Ergebnis:

Ist die Fläche S konvex, so ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert der Integralgleichung (135), dagegen ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert mit der Vielfachheit 1, zu dem die Eigenfunktion $\mu(N) = \text{const}$ gehört. Folglich ist für die Integralgleichung (133) $\lambda = 1$ ebenfalls kein Eigenwert und $\lambda = -1$ ein Eigenwert mit der Vielfachheit 1.

Wir zeigen jetzt, daß diese Ergebnisse auch für eine beliebige Liapounoffsche Fläche mit $\alpha = 1$ gelten, wobei wir die Ergebnisse aus [102] über die Konstruktion von Parallelf lächen benutzen. Wir betrachten die zu (133) gehörige homogene Integralgleichung für $\lambda = 1$:

$$\mu(N_0) = \iint_S \mu(N) K_1(N_0, N) dS. \quad (136)$$

Es sei $\mu_0(N)$ eine stetige Lösung dieser Integralgleichung. Wir müssen zeigen, daß $\mu_0(N) \equiv 0$ ist. Das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu_0(N)$ liefert eine Funktion $u_0(M)$, die in D_i und D_a harmonisch und im ganzen Raum stetig ist; außerdem sind die Randwerte ihrer Normalableitung $\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_a$ auf S gleich 0.

Die letztere Eigenschaft geht daraus hervor, daß $\mu_0(N)$ nach Voraussetzung die Integralgleichung (136) erfüllt. Durch Anwendung der Formel (94) auf das Potential $u_0(N)$ der einfachen Schicht erkennen wir, daß $u_0(N)$ in D_a konstant ist. Im Unendlichen ist das Potential der einfachen Schicht gleich 0; folglich ist $u_0 = 0$ in D_a und insbesondere auf S . Da die harmonische Funktion $u_0(M)$ auch im Innern von S verschwindet, ist $u_0(M) \equiv 0$ im ganzen Raum. Unter Berücksichtigung von (54) erhalten wir

$$\mu_0(N) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial u} \right)_i - \left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n} \right)_a \right] \equiv 0 \quad (\text{auf } S),$$

was zu beweisen war. Daher ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert der Integralgleichungen (132) und (133). Die homogene Integralgleichung (135) hat für $\lambda = -1$ wegen (26) eine Lösung, die gleich einer willkürlichen Konstante ist, d. h., $\lambda = -1$ ist ein Eigenwert der Integralgleichungen (132) und (133). Wir beweisen, daß seine Vielfachheit gleich 1 ist. Es genügt, zu zeigen, daß die zu (133) gehörige homogene Integralgleichung für $\lambda = -1$,

$$\mu(N_0) = - \iint_S \mu(N) K_1(N_0; N) dS, \quad (137)$$

bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor nur eine einzige Eigenfunktion besitzt.

Es sei $\mu_1(N)$ eine Eigenfunktion der Integralgleichung (137). Das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu_1(N)$ liefert eine in D_i harmonische Funktion $u_1(M)$, für welche die Randwerte $\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_i$ auf S gleich 0 sind. Wie vorhin ergibt die Formel (92), daß die Funktion $u_1(M)$ in D_i und auf S konstant ist; die Dichte $\mu_1(N)$ liefert also das Potential einer einfachen Schicht, das auf S und im Innern von S einen konstanten Wert besitzt. Anders ausgedrückt, $\mu_1(N)$ ist die elektrostatische Dichte (Flächendichte). Es sei k der konstante Wert von $u_1(M)$ in D_i und auf S . Wir wollen zeigen, daß $k \neq 0$ ist. Wäre $k=0$, so hätten wir $u_1(M)=0$ auf S und auch im Unendlichen, d. h., es wäre $u_1(M)=0$ im ganzen Raum. Hieraus schließen wir auf Grund von (54), daß $\mu_1(N) \equiv 0$ auf S ist. Dies widerspricht aber der Annahme, daß $\mu_1(N)$ Eigenfunktion ist.

Es sei $\mu_2(N)$ eine andere von der Nulllösung verschiedene Lösung der Integralgleichung (137). Wir haben zu zeigen, daß $\mu_2(N)$ sich von $\mu_1(N)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet. Wir bilden das Potential u_3 der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu_3(N) = \mu_1(N) + c\mu_2(N)$, wobei c eine Konstante ist. Auch $\mu_3(N)$ ist in D_i und auf S konstant. Man kann c so wählen, daß der konstante Wert u_3 auf S gleich 0 ist ($u_2 \neq 0$ auf S). Hieraus schließen wir, daß auf S die Beziehung $\mu_3(N) = \mu_1(N) + c\mu_2(N) \equiv 0$ gilt, d. h., $\mu_2(N)$ unterscheidet sich von $\mu_1(N)$ tatsächlich nur durch einen konstanten Faktor.

Wir zeigen nun: Das Integral

$$\iint_S \mu_1(N) dS, \quad (138)$$

das die Gesamtladung darstellt, die sich auf der leitenden Fläche S im Gleichgewicht befindet, ist von 0 verschieden. Wie wir bereits erwähnt haben, besitzt u_1 in D einen konstanten Wert, und die Relation (54) liefert

$$\mu_1(N) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n} \right)_a. \quad (139)$$

Wäre das Integral (138) gleich 0, so würden wir

$$\int_S \int \left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n} \right)_a dS = 0 \quad (140)$$

erhalten.

Wir wenden auf u_1 die Formel (94) an. Die Funktion u_1 besitzt auf S einen konstanten Wert, und das Integral (140) ist gleich 0. Hieraus folgt, daß auch die rechte Seite der Formel (94) für $u=u_1$ verschwindet, d. h., u_1 ist in D_a gleich einer Konstanten. Die Beziehung (139) zeigt, daß $\mu_1(N)$ auf S gleich 0 ist. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß $\mu_1(N)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Integralgleichung (137) ist. Somit ist das Integral (138) tatsächlich von 0 verschieden. Multiplizieren wir $\mu_1(N)$ mit einem konstanten Faktor, so können wir dem Integral (138) einen beliebigen vorgegebenen Wert erteilen.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Integralgleichungen (132) und (133) für $\lambda=1$ bei beliebigem freiem Glied je eine einzige wohlbestimmte Lösung haben; wir erhalten somit die Lösung des Dirichletschen Problems für das Innengebiet und des Neumannschen Problems für das Außengebiet.

Wir kehren jetzt zur Integralgleichung (133) für $\lambda=-1$ zurück. Sie liefert die

Dichte des Potentials (128), welches das Neumannsche Problem für das Innengebiet löst. Für die Existenz einer Lösung ist notwendig und hinreichend, daß die gegebene Funktion in der Integralgleichung zu der Eigenfunktion der (homogenen) transponierten Integralgleichung, d. h. zu einer Konstanten, orthogonal ist. Das führt zur Bedingung

$$\iint_S f(N) \, dS = 0, \quad (141)$$

deren Notwendigkeit wir bereits gezeigt haben. Unter unseren Voraussetzungen ist sie auch hinreichend. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Lösung der inhomogenen Integralgleichung bis auf einen Summanden bestimmt, der die homogene Integralgleichung (137) löst, d. h. bis auf einen Summanden, der die elektrostatische Dichte darstellt. Setzt man diesen Summanden in das Potential der einfachen Schicht ein, so erhält man ein konstantes Potential; ein konstanter Summand spielt aber bei der Lösung des Neumannschen Problems für das Innengebiet keine Rolle.

Wir betrachten nun die Integralgleichung (132) für $\lambda = -1$, die dem äußeren Dirichletschen Problem entspricht. Für die Lösbarkeit der Integralgleichung ist notwendig und hinreichend, daß die gegebene Funktion in der Integralgleichung orthogonal zur Lösung der homogenen Integralgleichung (137) und damit zu der elektrostatischen Dichte $\mu_1(N)$ ist:

$$\iint_S \mu_1(N) f(N) \, dS = 0. \quad (142)$$

Diese Nebenbedingung entspricht nicht dem Problem selbst, sondern kommt daher, daß wir die Lösung des Dirichletschen Problems für das Außengebiet in der Gestalt des Potentials einer Doppelschicht suchen. Aus der Gestalt eines solchen Potentials folgt unmittelbar, daß es für $r \rightarrow \infty$ von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ verschwindet.

Ein so starkes Verschwinden im unendlich fernen Punkt ist aber bei der Lösung des Dirichletschen Problems für das Außengebiet nicht notwendig; gerade dieser Umstand bringt die Nebenbedingung (142) mit sich. Wir zeigen, daß man das äußere Dirichletsche Problem ohne jede Nebenbedingung für $f(N)$ durch eine Summe aus dem Potential einer einfachen Schicht und dem Potential einer Doppelschicht lösen kann. Es sei nämlich $\mu_1(N)$ die elektrostatische Dichte, für die das Integral (138) gleich 1 ist, und $u_1(M)$ das zugehörige Potential der einfachen Schicht. Die Randwerte des Potentials $u_1(M)$ auf S sind gleich einer von 0 verschiedenen Konstanten k . Wir wählen die Konstante c so, daß die Beziehung

$$\iint_S \mu_1(N) [f(N) - c] \, dS = 0$$

erfüllt ist, d. h., wir setzen

$$c = \iint_S \mu_1(N) f(N) \, dS. \quad (143)$$

Auf Grund der vorhergehenden Ausführungen können wir das Potential $w(M)$ einer Doppelschicht bilden, welches das äußere Dirichletsche Problem mit den Randwerten $f(N) - c$ löst. Dann löst die Summe

$$w(M) + \frac{c}{k} u_1(M)$$

das äußere Dirichletsche Problem mit den vorgegebenen Randwerten $f(N)$.

Bemerkung. In diesem Abschnitt haben wir vorausgesetzt, daß der Bereich, für den wir das Randwertproblem lösen, durch eine einzige Fläche S begrenzt wird. Die Resultate ändern sich, wenn der endliche Bereich D von außen durch eine Fläche S_0 und im Innern dieser Fläche durch Flächen S_k ($k=1, 2, \dots, m$) begrenzt wird. Für diesen Bereich suchen wir die Lösung des Dirichletschen Problems in der Gestalt des Doppelschichtpotentials. Für die Dichte erhalten wir wiederum die Integralgleichung (132) mit $\lambda=1$; dabei ist S die vollständige Berandung von D , d. h., S besteht aus den Flächen S_0 und S_k ($k=1, 2, \dots, m$). Auf den Flächen S_k muß die Normale von D aus nach außen, also in die Gebiete im Innern dieser Flächen gerichtet sein. Wir erhalten somit ein inneres Dirichletsches Problem. Der Integralgleichung (133) für $\lambda=1$ entspricht ein äußeres Neumannsches Problem. Im vorliegenden Fall besteht es in der Ermittlung einer Funktion, die im Innern einer jeden Fläche S_k und im Äußern von S_0 harmonisch ist, wobei die Werte ihrer Normalableitung auf diesen Flächen vorgegeben sind. Im Unendlichen muß die Funktion wie immer regulär sein.

Sind die vorgegebenen Werte der Normalableitung gleich 0, so erhalten wir die homogene Integralgleichung (133) mit $\lambda=1$. Wie wir soeben gesehen haben, hat diese Integralgleichung nur die Nulllösung, wenn D durch eine einzige Fläche begrenzt wird. Jetzt gilt das aber nicht mehr. Um dies einzusehen, stellen wir uns alle Flächen als leitend vor. Auf die Fläche S_1 bringen wir eine positive Einheitsladung, die Fläche S_0 erden wir und nehmen an, daß sich alle Flächen im elektrostatischen Gleichgewicht befinden. Auf den Flächen S_l ($l=2, \dots, m$) wird eine Elektrizitätsverteilung der Gesamtladung 0 induziert.

Es sei $\mu_1(N)$ die Dichte der erhaltenen elektrostatischen Verteilung auf S . Das Potential einer einfachen Schicht mit dieser Dichte ist offenbar im Innern einer jeden Fläche S_k konstant und im Äußeren von S_0 gleich 0; dieses Potential ist also die Lösung des äußeren Neumannschen Problems für homogene Randbedingungen. Mit anderen Worten, $\mu_1(N)$ erfüllt die homogene Integralgleichung (133) mit $\lambda=1$. Bringen wir eine positive Einheitsladung nacheinander auf jede der Flächen S_k , so erhalten wir m linear unabhängige Lösungen $\mu_k(N)$ der homogenen Integralgleichung (133) für $\lambda=1$. Man kann zeigen, daß diese Funktionen $\mu_k(N)$ ein zu $\lambda=1$ gehöriges System linear unabhängiger Lösungen dieser homogenen Integralgleichung darstellen. Wir sehen somit, daß $\lambda=1$ im vorliegenden Fall ein Eigenwert der Integralgleichungen (132) und (133) ist. Die Integralgleichung (132) ist genau dann lösbar, wenn die gegebene Funktion $f(N)$ den m Bedingungen

$$\iint_S f(N) \mu_k(N) dS = 0$$

genügt. Ist nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so ist das innere Dirichletsche Problem nicht in der Gestalt des Potentials einer Doppelschicht lösbar. Man kann zeigen, daß dann analog zum äußeren Dirichletschen Problem die Lösung in Gestalt einer Summe aus dem Potential einer Doppelschicht und dem Potential einer einfachen Schicht darstellbar ist. Eine ausführliche Behandlung der Probleme der Potentialtheorie für den Fall, daß die Berandung aus mehreren Flächen besteht, findet man in dem Buch von N. M. GÜNTHER, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik.

Wir haben früher die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems unter der Bedingung bewiesen, daß die gesuchte harmonische Funktion bis einschließlich S stetig ist. Aus den angestellten Überlegungen folgt, daß sich diese eindeutige Lösung des Neumannschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht darstellen läßt.

110. Übersicht über die Ergebnisse zur Lösbarkeit der betrachteten Randwertprobleme. In diesem Abschnitt stellen wir die erhaltenen Resultate, die sich auf die Lösung der Probleme von DIRICHLET und NEUMANN beziehen, zusammen und führen noch einige weitere Ergebnisse an. Für eine beliebige auf S stetige Funktion $f(N)$ bestimmt die Integralgleichung (125) eine stetige Dichte $\mu(N)$, mit der das Potential der Doppelschicht (123) die Lösung des inneren Dirichletschen Problems unter der Randbedingung (124) liefert. Ganz analog dazu liefert die Integralgleichung (131₂) eine stetige Dichte $\mu(N)$, mit der das Potential der einfachen Schicht (128) das äußere Neumannsche Problem unter der Randbedingung (130₂) löst. Erfüllt $f(N)$ die Bedingung (141), so bestimmt die Integralgleichung (129) eine Dichte $\mu(N)$, mit der das Potential einer einfachen Schicht das innere Neumannsche Problem löst.

Hier noch einige wichtige Bemerkungen über die Lösung des Neumannschen Problems: In den Integralgleichungen (129) und (131₂) erfüllt das Integral auf der rechten Seite eine Lipschitzbedingung [99]. Genügt die Funktion $f(N)$ ebenfalls dieser Bedingung, so folgt aus den Integralgleichungen, daß auch $\mu(N)$ eine solche Bedingung erfüllt. Dann folgt aber aus [100], daß hierbei das zugehörige Potential der einfachen Schicht, d. h. *die Lösung des Neumannschen Problems, nicht nur selbst bis einschließlich S stetig ist, sondern auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bis einschließlich S besitzt.*

Wir kehren zur (notwendigen) Bedingung (102) für die Lösbarkeit des inneren Neumannschen Problems zurück, die wir unter der Voraussetzung erhielten, daß die Lösung $u(M)$ eine reguläre Normalableitung besitzt. Deshalb muß $u(M)$ bis einschließlich S stetig sein [102]. Wir zeigen, daß bereits aus der Stetigkeit von $u(M)$ bis einschließlich S notwendigerweise die Bedingung (141) folgt. Wir nehmen an, daß $f(N)$ diese Bedingung nicht erfüllt, daß aber trotzdem eine Lösung $u(M)$ des Neumannschen Problems existiert, die bis einschließlich S stetig ist, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her.

Nach Voraussetzung ist

$$\iint_S f(N) \, dS \neq 0,$$

und man kann eine solche von 0 verschiedene Konstante C hinzufügen, daß

$$\iint_S [f(N) - C] \, dS = 0$$

gilt. Nach den vorhergehenden Ausführungen können wir eine Lösung $u_1(M)$ des inneren Neumannschen Problems mit der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n} \right)_t = f(N) - C$$

in der Gestalt des Potentials einer einfachen Schicht mit stetiger Dichte konstruieren, wobei $u_1(M)$ bis einschließlich S stetig ist. Die Differenz $u_2(M) = u(M) - u_1(M)$ ist ebenfalls bis einschließlich S stetig und erfüllt die Randbedingung

$$\left(\frac{\partial u_2(N)}{\partial n} \right)_t = C.$$

Ändern wir notfalls das Vorzeichen von $u_2(M)$, so können wir $C > 0$ annehmen. Die Funktion $u_2(M)$ nimmt auf S ihren kleinsten Wert in einem bestimmten Punkt N_0 an. Das widerspricht aber der Tatsache, daß bei der Konvergenz von M gegen N_0 auf der Normalen der Differentialquotient $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ gegen einen positiven Wert C

konvergiert. Somit folgt die Notwendigkeit der Bedingung (102) für die Lösbarkeit des inneren Neumannschen Problems bereits aus der Stetigkeit der gesuchten Lösung bis einschließlich S .

Wir haben oben die Eigenschaften untersucht, welche die Ableitungen der Lösung des Neumannschen Problems bei der Annäherung an S besitzen. Die entsprechende Untersuchung der Lösung des Dirichletschen Problems ist bedeutend schwieriger, was damit zusammenhängt, daß diese Lösung durch das Potential einer Doppelschicht dargestellt wird. Das Potential einer Doppelschicht wird in der zitierten Arbeit von A. M. LIAPOUNOFF untersucht, außerdem in seiner Arbeit „Über das Neumannsche Grundprinzip beim Dirichletschen Problem“ 1902.

Wir geben die Resultate an, die A. M. LIAPOUNOFF über das Potential einer Doppelschicht und die Lösung des Dirichletschen Problems erhalten hat.

1. Die Werte des Potentials $w(N)$ einer Doppelschicht mit stetiger Dichte stellen in den Punkten der Fläche S eine Funktion dar, welche einer Lipschitzbedingung mit einem beliebigen Exponenten kleiner als 1 genügt.

2. Besitzt das Potential einer Doppelschicht mit stetiger Dichte auf S eine reguläre Normalableitung von der einen Seite dieser Fläche her, so besitzt es auch auf der anderen Seite der Fläche eine reguläre Normalableitung, und die beiden Normalableitungen sind in allen Punkten von S einander gleich.

3. Dafür, daß die Lösung des inneren oder äußeren Dirichletschen Problems mit auf S stetigen Randwerten $f(N)$ dort auch eine reguläre Normalableitung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß das Potential der Doppelschicht mit der Dichte $f(N)$ auf S eine reguläre Normalableitung besitzt. Dieser Satz wurde unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Zahl α , die in der Bedingung (3) vorkommt, gleich 1 ist.

4. Es sei $F(x, y, z)$ eine eindeutige, nebst den Ableitungen der ersten beiden Ordnungen stetige Funktion, die in einer gewissen Umgebung der Fläche S erklärt ist, und es sei $f(N)$ der Wert von $F(x, y, z)$ auf S . Dann hat die Funktion $u(M)$, die in D_i oder D_a harmonisch ist und auf S die Werte $f(N)$ annimmt, eine Ableitung nach jeder festen Richtung, und diese ist bis einschließlich S stetig. Dieser Satz wurde ohne die Voraussetzung $\alpha = 1$ bewiesen.

LIAPOUNOFF stellt auch eine hinreichende Bedingung dafür auf, daß das Potential einer Doppelschicht eine reguläre Normalableitung besitzt. Wir geben sie hier an. Es sei N_0 ein beliebiger Punkt von S , den wir als Koordinatenursprung der Polarkoordinaten ϱ , θ in der Tangentialebene von S im Punkt N_0 wählen. Die Werte der Dichte $\mu(N)$ in den Punkten N , die in der Nähe von N_0 liegen, lassen sich, wenn man N auf die Tangentialebene projiziert, als Funktion von ϱ und θ auffassen. Wir setzen

$$\bar{\mu}(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varrho, \theta) d\theta.$$

Die Bedingung lautet folgendermaßen: Es existieren zwei positive Zahlen b und β derart, daß bei jeder Wahl des Punktes N_0 die Ungleichung

$$|\bar{\mu}(\varrho) - \mu(N_0)| \leq b\varrho^{\beta+1}$$

gilt. Diesen Satz hat LIAPOUNOFF unter der Voraussetzung $\alpha = 1$ bewiesen.

Weitere Resultate in der Theorie des Potentials einer räumlichen Masseverteilung, einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht sowie in bezug auf die Lösung des Dirichletschen Problems findet man in dem zitierten Buch von N. M. GÜNTER und in der Arbeit von CH. L. SMOLIZKI, Abschätzungen der Ableitungen fundamentaler Funktionen, Doklady AN SSSR 74 (1950).

111. Randwertprobleme in der Ebene. Die Probleme von DIRICHLET und NEUMANN lassen sich für die Ebene in derselben Weise behandeln wie in [108]. Die Lösung

des Dirichletschen Problems wird als Potential einer Doppelschicht angesetzt,

$$u(M) = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds, \quad (144)$$

die Lösung des Neumannschen Problems dagegen als Potential einer einfachen Schicht,

$$u(M) = \int_l \mu(N) \lg \frac{1}{r} ds. \quad (145)$$

Für die Dichten ergeben sich die Integralgleichungen

$$\mu(N_0) = \varphi(N_0) + \lambda \int_l \mu(N) K(N_0, N) ds, \quad (146)$$

$$\mu(N_0) = \varphi(N_0) + \lambda \int_l \mu(N) K_1(N_0, N) ds \quad (147)$$

mit

$$K(N_0, N) = -\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{\pi r_0}, \quad K_1(N_0, N) = \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{\pi r_0} \quad (r_0 = |N_0 N|).$$

Die Integralgleichung (146) gehört für $\lambda = 1$ und $\varphi(N_0) = \frac{1}{\pi} f(N_0)$ zum Dirichletschen Problem für das Innengebiet und für $\lambda = -1$ und $\varphi(N_0) = -\frac{1}{\pi} f(N_0)$ zum Dirichletschen Problem für das Außengebiet. Die Integralgleichung (147) gehört für $\lambda = 1$ und $\varphi(N_0) = \frac{1}{\pi} f(N_0)$ zum Neumannschen Problem für das Außengebiet und für $\lambda = -1$ und $\varphi(N_0) = \frac{1}{\pi} f(N_0)$ zum Neumannschen Problem für das Innengebiet. In allen Fällen bedeutet $f(N_0)$ die in der Randbedingung vorkommende Funktion.

Die Integralgleichung (146) läßt sich in der Gestalt

$$\mu(s_0) = \varphi(s_0) + \lambda \int_0^{l_0} \mu(s) K(s_0, s) ds$$

schreiben; dabei sind s und s_0 die Längen der Kurvenstücke LN und LN_0 auf der Randkurve l , die von irgendeinem festen Punkt L in einer bestimmten Richtung gemessen werden, und l_0 ist die Länge der Randkurve l . In analoger Weise läßt sich auch die Integralgleichung (147) schreiben. Unter den in [101] gemachten Voraussetzungen über die Kurve l sind die Kerne $K(s_0, s)$ und $K_1(s_0, s)$ stetig.

Wie in [109] ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert und $\lambda = -1$ ein Eigenwert der Vielfachheit 1. Die zugehörige Eigenfunktion der Integralgleichung (146) ist eine Konstante, und die Eigenfunktion der Integralgleichung (147) ist die elektrostatische Dichte $\mu_0(M)$, für die das Potential (145) der einfachen Schicht auf l und im Innern von l konstant ist.

Die Lösung des inneren Dirichletschen Problems und die Lösung des inneren Neumannschen Problems erhält man wie im dreidimensionalen Fall. Wir gehen auf die äußeren Probleme ein. Die Lösung des äußeren Neumannschen Problems ist mit der Integralgleichung (147) für $\lambda = 1$ verknüpft. Dabei muß die Funktion $\varphi(N_0)$ der Bedingung

$$\int_0^1 \varphi(N_0) ds_0 = 0$$

genügen [105]. Integrieren wir beide Seiten von (147) mit $\lambda=1$ nach N_0 , so ergibt sich

$$\int_0^1 \mu(N_0) ds_0 = 0.$$

Folglich erhalten wir eine harmonische, im Unendlichen reguläre Funktion [105], wenn wir die Lösung $\mu(N)$ der Integralgleichung (147) mit $\lambda=1$ in (145) einsetzen, und damit die Lösung des äußeren Neumannschen Problems.

Wir gehen nun zum Dirichletschen Problem für das Außengebiet über. Erfüllt $f(N)$ die Bedingung

$$\int \mu_0(N) f(N) ds = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir die Lösung der Integralgleichung (146) mit $\lambda=-1$ in (144) einsetzen, die Lösung des Problems.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wählen wir eine Konstante a derart, daß

$$\int \mu_0(N) [f(N) - a] ds = 0$$

gilt (vgl. [109]), und wie soeben erhalten wir mit Hilfe von (144) die Lösung $w(M)$ des Problems für die Randwerte $f(N) - a$; die Summe $w(M) + a$ ist die gesuchte Lösung des Problems mit den Randwerten $f(N)$. Die additive Konstante hängt damit zusammen, daß die Formel (144) eine harmonische Funktion darstellt, die im Unendlichen gleich 0 ist, daß im ebenen Fall aber die Lösung des äußeren Problems nicht im Unendlichen zu verschwinden braucht.

112. Die Integralgleichung der Kugelfunktionen. Wir betrachten die homogene Integralgleichung (133) für die Einheitskugel Σ mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Hier ist die Richtung n_0 die Richtung des Radius $\overline{ON_0}$; außerdem gilt $\cos(\tau_0, n_0) = -\frac{\tau_0}{2}$, so daß die homogene Integralgleichung (133) die Gestalt

$$\mu(N_0) = -\frac{\lambda}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\mu(N)}{r_0} dS \quad (148)$$

hat. Zu derselben Integralgleichung wären wir gelangt, wenn wir von der Integralgleichung (132) ausgegangen wären. Das Integral rechts stellt den Wert des Potentials der einfachen Kugelschicht mit der Dichte $-\frac{\lambda\mu(N)}{4\pi} = -\frac{\lambda\mu(\theta, \varphi)}{4\pi}$ im Punkt $N_0(\theta_0, \varphi_0)$ dar.

Zunächst betrachten wir dieses Potential im Punkt $M(\varrho, \theta', \varphi')$, der sich im Innern der Kugel befindet. Bezeichnen wir mit r die Entfernung $|MN|$ und mit ϱ die Entfernung $|OM|$, so gilt die Entwicklung [III/2, 133]

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \varrho^k \quad (\varrho < 1), \quad (149)$$

wobei die $P_k(x)$ die Legendreschen Polynome bedeuten und γ den Winkel zwischen den Radiusvektoren $\overline{OM}$ und $\overline{ON}$ bezeichnet. Wir nehmen für $\mu(\theta, \varphi)$ eine Laplace'sche Kugelfunktion n -ten Grades, $\mu(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi)$. Unter Benutzung der Entwicklung (149), die für $\varrho < 1$ gleichmäßig konvergiert, erhalten wir die Integralgleichung

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) \frac{1}{r} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta', \varphi') \varrho^n,$$

die sich unmittelbar aus den Beziehungen [III/2, 134]

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) P_m(\cos \gamma) dS = 0 \quad \text{für } m \neq n,$$

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \gamma) dS = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta', \varphi')$$

ergibt. Ist der Punkt M mit einem auf der Kugel liegenden Punkt N , identisch, so erhält man

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) \frac{1}{r_0} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0).$$

Hieraus erkennt man, daß $\lambda_n = -(2n+1)$ die Eigenwerte der Integralgleichung (148) sind. Zu jedem dieser Eigenwerte gehören $2n+1$ Eigenfunktionen, und diese Eigenfunktionen sind die Laplaceschen Kugelfunktionen n -ten Grades. Zum ersten Eigenwert $\lambda_0 = -1$ gehört eine konstante Eigenfunktion (die elektrostatische Dichte für den Fall der Kugel).

Wir zeigen nun, daß die Integralgleichung (148) keine weiteren Eigenwerte besitzt und daß zu jedem Eigenwert λ_n keine weiteren Eigenfunktionen gehören als die angegebenen Kugelfunktionen. Es sei λ' ein Eigenwert der Integralgleichung (148), der von den Eigenwerten λ_n verschieden ist, und es sei $\mu'(N)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Der Kern der Integralgleichung (148) ist eine symmetrische Funktion von N und N_0 , deshalb muß $\mu'(N)$ zu allen Kugelfunktionen und insbesondere zu den $P_k(\cos \gamma)$ orthogonal sein:

$$\iint_{\Sigma} \mu'(\theta, \varphi) P_k(\cos \gamma) d\sigma = 0.$$

Somit folgt aus der Entwicklung (149), daß das Potential der Kugelschicht mit der Dichte $\mu'(N)$ überall im Innern der Kugel und damit auch überall auf der Kugel gleich 0 ist. Dann ergibt die Integralgleichung (148), daß $\mu'(N)$ auf der Kugel identisch gleich 0 ist, was für eine Eigenfunktion nicht möglich ist. Jetzt betrachten wir einen Eigenwert λ_n . Würde zu ihm irgendeine Eigenfunktion gehören, die keine Laplacesche Kugelfunktion n -ten Grades ist, so könnte man annehmen, daß diese Eigenfunktion zu allen Kugelfunktionen orthogonal ist. Durch Wiederholung der vorigen Überlegung könnten wir uns davon überzeugen, daß auch diese Funktion auf der Kugel identisch gleich 0 sein muß.

Somit *stellen die Laplaceschen Kugelfunktionen gerade die sämtlichen Eigenfunktionen der Integralgleichung (148) dar.*

113. Das Wärmegleichgewicht eines Wärme ausstrahlenden Körpers. Wir untersuchen nun das dritte Randwertproblem für die Laplacesche Differentialgleichung.

Bei einer stationären Wärmeströmung muß die Temperatur $u(M)$ im Innern des Körpers der *Laplaceschen* Differentialgleichung genügen und auf der Randfläche S die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0$$

erfüllen, wobei h der Koeffizient des äußeren Wärmeleitvermögens und u_0 die Temperatur des äußeren Mediums darstellt, das den Körper umgibt. Diese beiden Größen können wir als Punktfunktionen auf der Fläche S annehmen. Wir gelangen somit zu dem Problem, eine im Innern der Fläche S harmonische Funktion zu er-

mitteln, die auf dieser Fläche einer Randbedingung der Gestalt

$$\frac{\partial u(N)}{\partial n} + p(N) u(N) = f(N) \quad (150)$$

genügt, wobei $p(N)$ und $f(N)$ auf S vorgegebene Funktionen sind und $p(N) > 0$ ist. Wir suchen die Lösung dieses Randwertproblems als Potential einer einfachen Schicht. Die Randbedingung (150) führt zu der Integralgleichung

$$\int_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) + p(N_0) \int_S \mu(N) \frac{1}{r_0} dS = f(N_0)$$

oder

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) - \int_S \mu(N) \left[\frac{p(N_0)}{2\pi r_0} + \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{2\pi r_0^2} \right] dS$$

für die Dichte. Wir zeigen, daß die zugehörige homogene Integralgleichung unter unseren Voraussetzungen keine von der Nulllösung verschiedene Lösung haben kann. Wir haben nämlich in [104] gesehen, daß für $p(N) > 0$ die harmonische Funktion, welche sich durch das Potential einer einfachen Schicht darstellen läßt (sie hat dann eine reguläre Normalableitung) und welche die homogene Randbedingung

$$\frac{\partial u(N)}{\partial n} + p(N) u(N) = 0 \quad (151)$$

erfüllt, im Innern von S identisch gleich 0 ist. Angenommen, die homogene Integralgleichung besitze die Lösung $\mu(N)$. Das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu(N)$ erfüllt dann die homogene Randbedingung (151); folglich ist es im Innern von S gleich 0. Da es auch im Unendlichen gleich 0 ist, schließen wir daraus wie früher, daß es im ganzen Raum gleich 0 ist und daß $\mu(N) \equiv 0$ ist. Die homogene Integralgleichung hat also tatsächlich keine Lösung, und damit ist die inhomogene Integralgleichung für jede beliebige gegebene Funktion $f(N_0)$ lösbar.¹⁾ Jetzt setzen wir voraus, daß die Fläche S die Einheitskugel Σ ist und daß die Funktion $p(N)$ eine positive Konstante h ist. In diesem Fall erhalten wir wegen $r_0 = -2 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)$ die Integralgleichung

$$\mu(N_0) = \frac{1-2h}{4\pi} \int_S \mu(N) \frac{1}{r_0} d\sigma + \frac{1}{2\pi} f(N_0),$$

die wir im vorigen Abschnitt untersuchten. Fassen wir h als nicht notwendig positiven Parameter auf, so können wir die Eigenwerte dieser Integralgleichung aus der Gleichung $1-2h=2n+1$ bestimmen, d. h., die Eigenwerte sind $h=0, -1, -2, \dots$, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind die Kugelfunktionen. Ganz analog kann man das dritte Randwertproblem auch für den ebenen Fall behandeln.

114. Das alternierende Verfahren von Schwarz. Wir behandeln nun ein weiteres Verfahren zur Lösung des Dirichletschen Problems. Wir nehmen an, daß wir das Dirichletsche Problem für zwei Bereiche B_1 und B_2 für beliebige stetige Randwerte lösen können und daß diese beiden Bereiche einen Teilbereich D gemeinsam haben (vgl. Abb. 8). Das alternierende Verfahren von SCHWARZ liefert die Möglichkeit, das Dirichletsche Problem für den Bereich $B = B_1 \cup B_2$, die Vereinigung der

¹⁾ Im ebenen Fall versagt die Schlußweise; dort kann die homogene Gleichung Lösungen haben. (Anm. d. Red.)

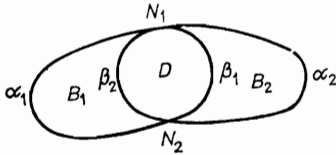


Abb. 8

beiden Bereiche B_1 und B_2 , zu lösen. Wir führen die Überlegungen im ebenen Fall durch; sie verlaufen im Fall des dreidimensionalen Raumes ganz analog. Die Randkurven der Bereiche B_1 und B_2 werden durch ihre Schnittpunkte in die Kurvenstücke α_1 und β_1 für B_1 sowie α_2 und β_2 für B_2 zerlegt. Auf der Kurve $l = \alpha_1 \cup \alpha_2$ des Bereiches B sei eine stetige Funktion $\omega(N)$ vorgegeben. Die Rechnungen beim alternierenden Verfahren von SCHWARZ werden in folgender Weise durchgeführt. Die insbesondere auf α_1 vorgegebene Funktion $\omega(N)$ setzen wir in irgendeiner Weise auf β_1 stetig fort. Es sei $\omega_1(N)$ die so auf β_1 erklärte Funktion. Durch Lösung des Dirichletschen Problems für B_1 konstruieren wir in B_1 eine harmonische Funktion $u_1(M)$ mit den Randwerten

$$u_1(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_1, \\ \omega_1(N) & \text{auf } \beta_1. \end{cases}$$

Die Werte dieser Funktion auf β_2 und die Werte von $\omega(N)$ auf α_2 benutzen wir als Randwerte für eine neue harmonische Funktion $v_1(M)$ in B_2 :

$$v_1(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_2, \\ u_1(N) & \text{auf } \beta_2. \end{cases}$$

Jetzt konstruieren wir in B_1 die harmonische Funktion $u_2(M)$ mit den Randwerten

$$u_2(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_1, \\ v_1(N) & \text{auf } \beta_1. \end{cases}$$

Weiterhin konstruieren wir in B_2 die harmonische Funktion $v_2(M)$ mit den Randwerten

$$v_2(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_2, \\ u_2(N) & \text{auf } \beta_2 \end{cases}$$

usw. Allgemein ist

$$\begin{aligned} u_n(M) \text{ harmonisch in } B_1 \quad \text{und} \quad u_n(N) &= \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_1, \\ v_{n-1}(N) & \text{auf } \beta_1, \end{cases} \\ v_n(M) \text{ harmonisch in } B_2 \quad \text{und} \quad v_n(N) &= \begin{cases} \omega(N) & \text{auf } \alpha_2, \\ u_n(N) & \text{auf } \beta_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (152)$$

Wir beweisen nun, daß die Grenzfunktionen $\lim u_n(M)$ in B_1 und $\lim v_n(M)$ in B_2 existieren und daß in dem gemeinsamen Teilbereich von B_1 und B_2 diese Grenzfunktionen identisch sind. Hierzu benutzen wir einen Hilfssatz, den wir sogleich formulieren werden. Zunächst geben wir die Voraussetzungen über die Ränder der Bereiche an. Wir setzen voraus, daß die Randkurven von B_1 und B_2 aus endlich vielen Teilkurven bestehen, die eine sich stetig ändernde Tangente besitzen. Somit darf die Kurve nur endlich viele Eckpunkte besitzen. Außerdem nehmen wir an, daß in den Schnittpunkten N_1 und N_2 (vgl. Abb. 8) beide Randkurven eine Tangente haben und daß diese Tangenten in N_1 und N_2 miteinander einen von 0 verschiedenen Winkel bilden. Wir formulieren nunmehr den

Hilfssatz. *Erfüllen die Randkurven der Bereiche B_1 und B_2 die angegebenen Bedingungen und ist $w(M)$ eine im Innern von B_1 harmonische Funktion, die im abgeschlossenen Bereich stetig ist, auf α_1 die Werte 0 annimmt und auf β_1 der Bedingung $|w(N)| \leq A$ genügt, so existiert eine positive Konstante $q < 1$, die nur von den Bereichen B_1 und B_2 , jedoch nicht von der Wahl von $w(M)$ abhängt, und für die $w(M) \leq qA$ auf β_2 ist.*

Die entsprechende Aussage gilt, wenn wir von B_2 ausgehen und $w(M)$ auf β_1 abschätzen. Wir können dabei annehmen, daß die Zahl q in beiden Fällen ein und dieselbe ist. Wir beweisen den Hilfssatz zwar erst im nächsten Abschnitt, benutzen ihn aber jetzt schon zum Beweis der Tatsache, daß das alternierende Verfahren von SCHWARZ konvergiert.

Entsprechend unserer Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1}(N) - u_n(N) &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \alpha_1, \\ v_n(N) - v_{n-1}(N) & \text{auf } \beta_1, \end{cases} \\ v_n(N) - v_{n-1}(N) &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \alpha_2, \\ u_n(N) - u_{n-1}(N) & \text{auf } \beta_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (153)$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} M_n &= \max |u_{n+1}(N) - u_n(N)| = \max |v_n(N) - v_{n-1}(N)| \quad \text{auf } \beta_1, \\ M'_n &= \max |v_{n+1}(N) - v_n(N)| = \max |u_{n+1}(N) - u_n(N)| \quad \text{auf } \beta_2. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (153) und des Hilfssatzes erhalten wir $M'_n \leq qM_n$ und $M_n \leq qM'_{n-1}$. Hieraus folgt $M_n \leq q^2 M_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) und damit $M_n \leq q^{2(n-1)} M_1$.

Jetzt bilden wir die Reihe

$$u_1(M) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{n+1}(M) - u_n(M)]. \quad (154)$$

Ihre Glieder sind vom zweiten Glied an auf α_1 gleich 0 und erfüllen auf β_1 die Abschätzung $|u_{n+1}(N) - u_n(N)| \leq q^{2(n-1)} M_1$. Somit konvergiert die Reihe (154) auf der Randkurve von B_1 und daher auch im ganzen abgeschlossenen Bereich absolut und gleichmäßig. Ihre Summe $u(M)$ ist im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}_1$ stetig und im Innern von B_1 harmonisch. Die Summe der ersten n Glieder der Reihe (154) ist $u_n(M)$; folglich konvergieren die Funktionen $u_n(M)$ im abgeschlossenen Bereich gleichmäßig gegen eine Funktion $u(M)$. Ganz analog läßt sich beweisen, daß die Funktionen $v_n(M)$ im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}_2$ gleichmäßig gegen eine Funktion $v(M)$ konvergieren, die in $\bar{B}_2$ stetig und im Innern von B_2 harmonisch ist. Auf Grund von (152) gilt

$$u_n(N) = v_{n-1}(N) \quad \text{auf } \beta_1 \quad \text{und} \quad v_n(N) = u_n(N) \quad \text{auf } \beta_2.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich, daß die Funktionen $u(N)$ und $v(N)$ auf β_1 und β_2 identisch sind. Hieraus folgt, daß sie auch überall in dem gemeinsamen Teilbereich D von B_1 und B_2 miteinander übereinstimmen. Somit stellen die Funktionen $u(M)$ und $v(M)$ im Innern von $B = B_1 \cup B_2$ eine einzige harmonische Funktion dar. Diese harmonische Funktion hat wegen (152) die auf der Randkurve $l = \alpha_1 \cup \alpha_2$ vorgegebenen Randwerte $\omega(N)$; somit löst das alternierende Verfahren von SCHWARZ tatsächlich das gestellte Problem.

115. Beweis des Hilfssatzes. Wir bilden das Potential der Doppelschicht, die längs der Kurve β_1 ausgebreitet ist und deren Dichte gleich 1 ist:

$$F(M) = - \int_{\beta_1} \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial n} ds. \quad (155)$$

Es stellt den Winkel dar, unter dem die Kurve β_1 vom Punkt M aus erscheint; dabei nehmen wir an, daß M in B_1 liegt. Die Funktion (155), die im Innern von B_1 harmonisch ist, nimmt in den inneren Punkten der Kurven α_1 und β_1 stetige Randwerte an (Abb. 9).

Bei Annäherung des Punktes N der Randkurve an den Punkt N_1 von der Seite der Kurve α_1 und von der Seite der Kurve β_1 her erhalten wir für die Randwerte $F(N)$ der Funktion (155) zwei verschiedene Grenzwerte, die wir mit $F_-(N_1)$ und $F_+(N_1)$ bezeichnen.

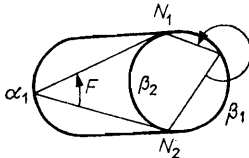


Abb. 9

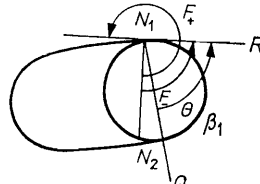


Abb. 10

Diese Grenzwerte sind die Winkel, die von der Sekante $\overline{N_1 N_2}$ mit den verschiedenen Tangentenrichtungen der Randkurve von B_1 im Punkt N_1 gebildet werden (Abb. 10), wobei

$$F_+(N_1) - F_-(N_1) = \pi \quad (156)$$

gilt.

Nähert sich der Punkt M dem Punkt N_1 längs eines beliebigen Strahles $N_1 Q$, der einen Winkel θ mit der in der Abbildung angegebenen Richtung der Tangente in N_1 bildet, so hat die Funktion (155), wie aus der Abbildung leicht zu ersehen ist, den Grenzwert $F_+(N_1) - \theta$, der sich auf Grund von (156) in der Gestalt

$$F_+(N_1) - \theta = \frac{\theta}{\pi} F_-(N_1) + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) F_+(N_1) \quad (157)$$

schreiben läßt.

Wenn sich der Punkt M dem Punkt N_1 in verschiedener Weise nähert, kann die Funktion (155) verschiedene Randwerte annehmen, die aber zwischen $F_-(N_1)$ und $F_+(N_1)$ liegen müssen; die Funktion (155) ist in der Umgebung von N_1 beschränkt. Völlig analoge Resultate erhält man auch im Punkt N_2 .

Wir definieren auf der Kurve $l = \alpha_1 \cup \beta_1$ eine Funktion $f(N)$, die im Innern von α_1 gleich 0 und im Innern von β_1 gleich 1 ist. Wie vorhin bezeichnen wir mit $F(N)$ die Randwerte der Funktion (155) und bilden im Innern von α_1 und β_1 die Funktion $f_1(N) = F(N) - f(N)$. Es ist leicht zu sehen, daß sie auf der ganzen Randkurve $l = \alpha_1 \cup \beta_1$ einschließlich der Punkte N_1 und N_2 stetig ist, da der Minuend und der Subtrahend in diesen Punkten den gleichen Sprung machen. Der Wert dieser Funktion ist beispielsweise im Punkt N_1 gleich $F_-(N_1)$. Es sei $F_1(M)$ die in B_2 harmonische Funktion, die auf der Randkurve die stetigen Randwerte $f_1(N)$ hat.

Wir bilden die harmonische Funktion

$$G(M) = \frac{1}{\pi} [F(M) - F_1(M)] . \quad (158)$$

Ihre Randwerte sind im Innern von α_1 gleich 0 und im Innern von β_1 gleich 1. Außerdem müssen die Randwerte von $G(M)$ bei Annäherung von M an N_1 oder N_2 auf Grund der Eigenschaften von $F(M)$ dem Intervall $[0, 1]$ angehören. Da die Extremwerte einer nichtkonstanten harmonischen Funktion auf der Randkurve angenommen werden, befinden sich alle inneren Werte der Funktion (158) im Innern dieses Intervalls, d. h., es gilt $0 < G(M) < 1$, wenn M im Innern von B_1 liegt. Mit θ_1 und θ_2 bezeichnen wir die Winkel, welche die Tangenten der Kurve β_2 in den Punkten N_1 und N_2 mit den Tangenten der Randkurve von B_1 in denselben Punkten bilden. Die Funktion $F(M)$ hat bei Annäherung an den Punkt N_1 längs β_2 wegen (157) den Grenzwert $F_+(N_1) - \theta_1$, die Funktion $F_1(M)$ mit den stetigen Randwerten $f_1(N)$ hat den Grenzwert $f_1(N_1) = F_-(N_1)$. Wegen (156) hat damit die Funktion (158) den Grenzwert $1 - \frac{\theta_1}{\pi}$. Analog dazu nimmt die Funktion (158)

im Punkt N_2 den Grenzwert $1 - \frac{\theta_2}{\pi}$ an. Diese beiden Grenzwerte sind kleiner als 1, und im Innern des Bereiches gilt $0 < G(M) < 1$. Hieraus folgt unmittelbar, daß eine positive Zahl $q < 1$ existiert, mit der $G(M) \leq q$ auf β_2 gilt.

Nach diesen Hilfskonstruktionen kehren wir zu der im Hilfssatz angegebenen Funktion $w(M)$ zurück. Ersetzen wir diese Funktion durch $\frac{w(M)}{A}$, so können wir annehmen, daß die im Hilfssatz auftretende Zahl A gleich 1 ist, d. h., die harmonische Funktion $w(M)$, die im abgeschlossenen Bereich B_1 stetig ist, hat auf α_1 Randwerte, die gleich 0 sind, und es gilt $|w(N)| \leq 1$ auf β_1 . In den Punkten N_1 und N_2 sind die Randwerte von $w(M)$ offenbar gleich 0. Wir bilden die harmonische Funktion $H(M) = G(M) - w(M)$. Ihre Randwerte sind im Innern der Kurve α_1 gleich 0 und im Innern der Kurve β_1 nichtnegativ; denn im Innern von β_1 ist $G(N) = 1$ und $|w(N)| \leq 1$. Bei Annäherung von M an N_1 und N_2 müssen die Randwerte $H(M)$ dem Intervall $[0, 1]$ angehören. Hieraus folgt unmittelbar, daß im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}_1$ die Ungleichung $H(M) \geq 0$ gilt, d. h., es gilt $w(M) \leq G(M)$; folglich ist auf β_2 die Ungleichung $w(M) \leq G(M) \leq q$ erfüllt. Analog dazu gilt $G(M) + w(M) \geq 0$ in $\bar{B}_1$, und hieraus folgt auf β_2 die Ungleichung $-w(M) \leq G(M) \leq q$. Die beiden Ungleichungen zusammen liefern $|w(M)| \leq q$, womit der Hilfssatz bewiesen ist. Dieser Beweis läßt sich auch im dreidimensionalen Fall durchführen.¹⁾

116. Das alternierende Verfahren von Schwarz (Fortsetzung). Bis jetzt haben wir das alternierende Verfahren von SCHWARZ nur auf den einfachsten Fall der gegenseitigen Lage der Bereiche B_1 und B_2 angewandt. Die Randkurven dieser Bereiche können sich aber auch in mehr als zwei Punkten schneiden (Abb. 11), sie können sogar ganze Kurvenstücke gemeinsam haben (Abb. 12). Weiterhin kann es vorkommen, daß zwar die Bereiche B_1 und B_2 einfach zusammenhängend sind, aber ihre Summe (ihr Vereinigungsbereich) mehrfach zusammenhängt (Abb. 13). In Abb. 11 ist die Randkurve des Bereiches $B = B_1 \cup B_2$ die Linie $DCEFGHJKC$. In Abb. 12 ist der Streckenzug CDE der gemeinsame Teil der Randkurven, und in Abb. 13 sind die gestrichelten Bereiche die gemeinsamen Teile der Bereiche

¹⁾ Vgl. R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. II.

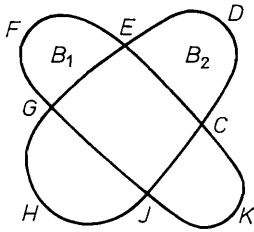


Abb. 11

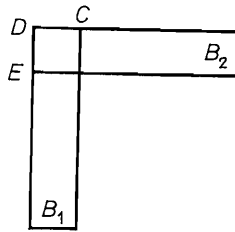


Abb. 12

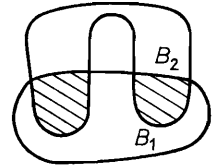


Abb. 13

B_1 und B_2 . In allen Fällen verläuft die Konstruktion der sukzessiven Näherungen in dem alternierenden Verfahren von SCHWARZ genau wie beim einfachsten Fall.

Können wir für B_1 und B_2 das Dirichletsche Problem lösen, so erhalten wir durch eine Änderung des Verfahrens nicht nur die Lösung für die Vereinigung dieser Bereiche, sondern auch für den gemeinsamen Bereich von B_1 und B_2 (den Durchschnitt). Im Fall der Abb. 8 ist dieser Bereich durch die Randkurve $\beta_1 \cup \beta_2$ begrenzt. Auf dieser Randkurve sind die Randwerte $\omega(N)$ vorgegeben.

Wir machen bei diesen Randwerten für die harmonische Funktion den Ansatz

$$w(M) = u(M) + v(M), \quad (159)$$

wobei die Funktion $u(M)$ in B_1 und die Funktion $v(M)$ in B_2 harmonisch sind. Eine solche Zerlegung der gesuchten Funktion in zwei Summanden ist offenbar nicht eindeutig, was aber bei der folgenden Konstruktion unwesentlich ist. Die auf β_1 vorgegebenen Werte der Funktion $\omega(N)$ setzen wir in beliebiger Weise auf die Kurve α_1 stetig fort und bezeichnen diese Fortsetzung mit $\varphi_1(N)$.

Als sukzessive Näherungen für $u(M)$ und $v(M)$ benutzen wir die Lösungen des Dirichletschen Problems mit den Randbedingungen

$$u_1(N) = \begin{cases} \varphi_1(N) & \text{auf } \alpha_1, \\ \omega(N) & \text{auf } \beta_1, \end{cases} \quad v_1(N) = \begin{cases} 0 & \text{auf } \alpha_2, \\ \omega(N) - u_1(N) & \text{auf } \beta_2. \end{cases}$$

Wir bemerken, daß die Differenz $\omega(N) - u_1(N)$ in den Punkten N_1 und N_2 gleich 0 ist. Zur Berechnung der folgenden Näherungen setzen wir

$$u_{n+1}(N) = \begin{cases} \varphi_1(N) & \text{auf } \alpha_1, \\ \omega(N) - v_n(N) & \text{auf } \beta_1, \end{cases} \quad v_{n+1}(N) = \begin{cases} 0 & \text{auf } \alpha_2, \\ \omega(N) - u_{n+1}(N) & \text{auf } \beta_2. \end{cases}$$

Der Prozeß konvergiert, und die Summe (159) liefert die Lösung des Problems.

Eine ausführliche Darlegung dieses Verfahrens findet man in dem Buch von L. W. KANTOROWITSCH und W. I. KRYLOW, Näherungsmethoden der höheren Analysis. Dort wird das Verfahren nicht nur auf die Laplacesche Differentialgleichung, sondern auch auf andere elliptische Differentialgleichungen angewandt. Auch auf den dreidimensionalen Fall läßt sich das Verfahren übertragen.

Wir weisen noch auf eine Anwendungsmöglichkeit des alternierenden Verfahrens von SCHWARZ hin. Es handelt sich dabei um die Lösung des Dirichletschen Problems für das Außengebiet, und zwar werden wir den dreidimensionalen Fall behandeln. Es seien im Raum n geschlossene paarweise punktfremde Flächen S_k ($k=1, 2, \dots, n$) gegeben. Mit D bezeichnen wir den Teil des Raumes, der sich im Äußeren aller Flächen S_k befindet, und mit D_k den Teil des Raumes, der sich im Äußeren von S_k befindet. Wir nehmen an, daß wir das Dirichletsche Problem für alle Bereiche D_k bei beliebigen stetigen Randwerten auf S_k lösen können, und zeigen, auf welche Weise man dann das Dirichletsche Problem für D lösen kann.

Alle Bereiche D_k und der Bereich D enthalten als inneren Punkt den unendlich fernen Punkt, und wir nehmen wie gewöhnlich für die Lösung des Dirichletschen Problems an, daß die harmonische Funktion im Unendlichen gleich 0 ist.

Somit wird eine im Innern von D harmonische Funktion gesucht, die auf den Flächen S_k vorgegebene stetige Werte

$$u|_{S_k} = f_k(N) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (160)$$

annimmt. Durch den ersten Schritt finden wir für jedes k eine Funktion $u_{0,k}(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$), die im Innern von D_k harmonisch ist und auf S_k die Werte $f_k(N)$ annimmt. Weiterhin finden wir Funktionen $u_{1,k}(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$), die im Innern von D_k harmonisch sind und die Randwerte

$$u_{1,k}(M) = -\sum_{i \neq k} u_{0,i}(N) \quad \text{auf } S_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (161)$$

besitzen, wobei die Summation über alle i von $i=1$ bis $i=n$ mit Ausnahme von $i=k$ zu erstrecken ist.

Allgemein finden wir für jedes ganze positive m Funktionen $u_{m,k}(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$), die im Innern von D_k harmonisch sind und die Randbedingungen

$$u_{m,k}(N)|_{S_k} = -\sum_{i \neq k} u_{m-1,i}(N) \quad \text{auf } S_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (162)$$

erfüllen. Die Funktionen $\sum_{m=0}^p u_{m,k}(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$) sind im Innern von D_k harmonisch und besitzen die Randwerte

$$\sum_{m=0}^p u_{m,k}(N) = f_k(N) - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i \neq k} u_{m,i}(N) \quad \text{auf } S_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten die Summe $\sum_{m=0}^{p-1} u_{m,k}(N)$, so können wir die Randbedingungen in der Form

$$\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i=1}^n u_{m,i}(N) = f_k(N) - u_{p,k}(N) \quad \text{auf } S_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (163)$$

schreiben. Wenn wir beweisen, daß bei unbeschränkt wachsendem p alle Funktionen $u_{p,k}(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$) im abgeschlossenen Bereich D gleichmäßig gegen 0 konvergieren, folgt aus (163), daß die im Innern von D harmonische und bis zum Rand stetige Funktion $\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i=1}^n u_{m,i}(M)$ bei unbeschränkt wachsendem p gerade die Lösung des Dirichletschen Problems für den Bereich D mit den Randwerten $f_k(N)$ auf S_k darstellt:

$$u(M) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n u_{m,i}(M). \quad (164)$$

Wir gehen nun zur Aufstellung der Bedingungen über, unter denen die Funktionen $u_{p,k}(M)$ in dem abgeschlossenen Bereich $\bar{D}$ gleichmäßig gegen 0 konvergieren. Wir bezeichnen mit $v_k(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$) die Funktion, die im Innern von D_k harmonisch und auf S_k gleich 1 ist. Hierbei ist $v_k(M) \geq 0$ im Innern von D_k . Weil $v_k(M)$ gegen 0 konvergiert, wenn M ins Unendliche rückt, existiert eine Konstante q_k ($0 < q_k < 1$) derart, daß die Ungleichungen

$$v_k(M) \leq q_k \quad \text{auf } S_i \quad \text{für } i \neq k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (165)$$

erfüllt sind. Sind die $w_k(M)$ ($k=1, 2, \dots, n$) beliebige Funktionen, die im Innern

von D_k harmonisch und bis einschließlich S_k stetig sind und der Bedingung

$$|w_k(M)| \leq a_k \quad \text{auf } S_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (166)$$

mit gewissen Konstanten a_k genügen, so sind die Funktionen $a_k v_k(M) - w_k(M)$ im Innern von D_k harmonisch und auf S_k nichtnegativ. Hieraus ergibt sich die Ungleichung $a_k v_k(M) - w_k(M) \geq 0$ im abgeschlossenen Bereich D_k , d. h., es gilt $w_k(M) \leq a_k v_k(M)$ in D_k . Ohne Änderung der Bedingung (166) können wir das Vorzeichen der harmonischen Funktion $w_k(M)$ ändern; folglich können wir annehmen, daß $w_k(M) \geq 0$ im betrachteten Punkt M ist. Somit folgt aus den vorhergehenden Überlegungen

$$|w_k(M)| \leq a_k v_k(M), \quad (167)$$

woraus sich wegen (165)

$$|w_k(N)| \leq a_k q_k \quad \text{auf } S_i \quad \text{für } i \neq k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (168)$$

ergibt. Diese Ungleichung ist somit eine Folge von (166). Es sei a eine positive Zahl mit der Eigenschaft $|f_k(N)| \leq a$ für $k=1, 2, \dots, n$, und q die größte der Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_n$, wobei offenbar $0 < q < 1$ ist. Wegen (160) gilt $|u_{0,k}(N)| \leq a$ auf S_k . Wegen (161) und (168) gilt weiterhin auf S_k ($k=1, 2, \dots, n$) die Ungleichung $|u_{1,k}(N)| \leq (n-1)aq$. Wenden wir ferner die Beziehung (162) für $m=2$ an und benutzen wiederum (168), so erhalten wir $|u_{2,k}(N)| \leq (n-1)^2 a q^2$ auf S_k ; allgemein finden wir $|u_{p,k}(N)| \leq (n-1)^p a q^p$ auf S_k . Folglich gilt

$$|u_{p,k}(M)| \leq [(n-1)q]^p a \quad (M \text{ in } \overline{D_k}; k=1, 2, \dots, n). \quad (169)$$

Ist $n=2$ die Anzahl der Flächen, so ergibt sich hieraus, daß $u_{p,k}(M)$ in $\overline{D_k}$ und deshalb erst recht im abgeschlossenen Bereich $\overline{D}$ für $p \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Ist $n > 2$, so erhalten wir die folgende hinreichende Bedingung dafür, daß $u_{p,k}(M)$ gegen 0 konvergiert:

$$(n-1)q < 1. \quad (170)$$

Die Zahl q hängt auf Grund ihrer Konstruktion nicht von den Randwerten $f_k(N)$ ab, sie wird nur durch den Bereich D bestimmt. Wir könnten ebenso auch den Fall betrachten, daß der Bereich D endlich ist, also eine äußere Berandung S_1 und innere Berandungen $S_2, S_3, \dots, S_n$ besitzt. Hierbei erhalten wir für den Bereich D_1 , der durch die Fläche S_1 begrenzt ist, das innere Dirichletsche Problem und für die Bereiche D_k ($k=2, \dots, n$) wie soeben das äußere Dirichletsche Problem. Die angegebene Konstruktion stammt von G. M. GOLUSIN, *Matem. sb.* 41 (1934). Sie ist im ebenen Fall nicht anwendbar, was man leicht erkennt, wenn man auf den einzelnen geschlossenen Randkurven l_k konstante Werte vorgibt.

117. Sub- und superharmonische Funktionen. Bei der Lösung des Dirichletschen Problems mit der Methode der Integralgleichungen waren verhältnismäßig einschneidende Voraussetzungen über die Begrenzung des Bereiches notwendig. Jetzt wollen wir eine andere Methode zur Lösung des Dirichletschen Problems entwickeln, die unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Begrenzung des Bereiches und über die Randwerte auf dieser Begrenzung anwendbar ist. Diese Methode trägt einen mehr theoretischen Charakter und liefert kein Verfahren zur näherungsweisen Konstruktion der Lösung des Problems. Sie wurde von H. POINCARÉ entwickelt und danach von O. PERRON verbessert (*Math. Z.* 18 (1923); vgl. auch eine Arbeit von I. G. PETROWSKI in *Uspechi matem. nauk* 8, sowie das Buch dieses Autors über partielle Differentialgleichungen).

In diesem Abschnitt führen wir einige neue Begriffe ein, welche sich für die angegebene Methode als nützlich erweisen werden. Diese neuen Begriffe sind in der mathematischen Physik auch von allgemeinem Interesse. Wir behandeln hier nur den ebenen Fall. Die Entwicklungen lassen sich wörtlich auf den Fall des dreidimensionalen Raumes übertragen. Der Unterschied bei der Untersuchung der Randwerte einer harmonischen Funktion, welche durch die Methode konstruiert wird, wird am Schluß dargestellt.

Für eine Funktion $y(x)$ einer einzigen unabhängigen Veränderlichen ist das Analogon zur Laplaceschen Differentialgleichung die Differentialgleichung $y''(x)=0$; ihr allgemeines Integral ist die lineare Funktion $y=ax+b$, deren graphisches Bild eine Gerade ist. Das Dirichletsche Problem, d. h. das Problem, diejenige Lösung der Differentialgleichung $y''(x)=0$, die in den Endpunkten des Intervalls $[a, b]$ vorgegebene Werte annimmt, im Innern dieses Intervalls zu bestimmen, besteht einfach darin, durch zwei vorgegebene Punkte eine Gerade zu legen. Für eine lineare Funktion ist die Eigenschaft charakteristisch, daß ihr Wert in einem beliebigen Punkt $x=x_0$ das arithmetische Mittel ihrer Werte in den Punkten $x=x_0+h$ und $x=x_0-h$ ist, die von $x=x_0$ gleich weit entfernt sind. Jetzt betrachten wir eine stetige Kurve, die nach der Seite der positiven Ordinaten konkav ist. Es sei $y=y(x)$ ihre Gleichung. In den Punkten dieser Kurve gilt

$$y(x_0) < \frac{1}{2} [y(x_0+h) + y(x_0-h)] . \quad (171_1)$$

Entsprechend gilt, wenn die Kurve nach der Seite der positiven Ordinaten konvex ist,

$$y(x_0) > \frac{1}{2} [y(x_0+h) + y(x_0-h)] . \quad (171_2)$$

Die Ungleichung (171₁) folgt unmittelbar daraus, daß sich im vorliegenden Fall jedes Kurvenstück unterhalb seiner Sehne befindet. Wir führen auch im Fall mehrerer Veränderlicher entsprechende Funktionenklassen ein. Es sei $f(M)$ eine Funktion, die im Innern des ebenen Bereiches B stetig ist. Wir nennen sie *subharmonisch im Innern von B*, wenn für jeden Punkt P , der sich im Innern von B befindet, eine solche positive Zahl δ existiert, daß $f(P)$ nicht größer ist als der Mittelwert von $f(M)$ über den Kreis mit dem Mittelpunkt P und einem beliebigen Radius $\varrho < \delta$. Führen wir die Koordinaten x, y des Punktes P ein, so läßt sich diese Bedingung auch in der Gestalt

$$f(x, y) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \varrho \cos \varphi, y + \varrho \sin \varphi) d\varphi \quad (\varrho < \delta) \quad (172_1)$$

schreiben.

Ist die Funktion $f(M)$ im Innern von B harmonisch, so gilt für jeden Punkt im Innern von B in der Formel (172₁) das Gleichheitszeichen [II, 204]; somit sind die harmonischen Funktionen ein Spezialfall der subharmonischen Funktionen. Die Definition läßt sich auch unmittelbar auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinern, wir brauchen nur den Kreis durch eine Kugel zu ersetzen. Ganz analog dazu werden die *superharmonischen Funktionen* definiert. Diese müssen an Stelle von (172₁) in jedem inneren Punkt des Bereiches B der Ungleichung

$$f(x, y) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \varrho \cos \varphi, y + \varrho \sin \varphi) d\varphi \quad (172_2)$$

genügen.

Jede harmonische Funktion ist auch ein Spezialfall der superharmonischen Funktionen. Aus der Definition geht unmittelbar hervor: Wenn $f(M)$ eine subharmonische Funktion und C eine Konstante ist, ist die Funktion $Cf(M)$ für $C > 0$ subharmonisch und für $C < 0$ superharmonisch. Ist andererseits $f(M)$ superharmonisch, so ist $Cf(M)$ für $C > 0$ superharmonisch und für $C < 0$ subharmonisch. Außerdem folgt aus der Definition, daß eine endliche Summe subharmonischer Funktionen eine subharmonische Funktion und eine endliche Summe superharmonischer Funktionen eine superharmonische Funktion ist.

Wir setzen voraus, daß $f(M) = f(x, y)$ im Innern des Bereiches B stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und daß

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0 \quad (\text{im Innern von } B) \quad (173_1)$$

gilt. Wenden wir die Greensche Formel auf eine Kreisfläche K_ϱ mit dem Mittelpunkt $P(x, y)$ an, die im Innern von B liegt, und setzen wir $u = f$ und $v = 1$, so erhalten wir

$$\int_{C_\varrho} \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_{K_\varrho} \Delta f d\sigma, \quad (174)$$

wobei C_ϱ die Berandung der Kreisfläche K_ϱ bezeichnet. Weiterhin wenden wir auf die Funktion f die Formel [II, 203]

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\varrho} \left(f \frac{\partial \lg r}{\partial n} - \lg r \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{K_\varrho} \Delta f \lg r d\sigma$$

an, wobei r die Entfernung von (x, y) bis zum veränderlichen Integrationspunkt bezeichnet. Auf C_ϱ ist die Richtung von n mit der Richtung von r identisch, und es gilt $ds = \varrho d\varphi$. Unter Benutzung von (174) läßt sich daher die Formel in der Gestalt

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \varrho \cos \varphi, y + \varrho \sin \varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \iint_{K_\varrho} \Delta f \lg \frac{r}{\varrho} d\sigma$$

schreiben.

In der Kreisfläche K_ϱ gilt $\frac{r}{\varrho} \leq 1$, und wegen (173₁) liefert die vorige Beziehung die Ungleichung (172₁) d. h., *unter der Bedingung (173₁) ist die Funktion $f(M)$ im Innern von B subharmonisch. Ebenso ist $f(M)$ unter der Bedingung*

$$\Delta f \leq 0 \quad (\text{in } B) \quad (173_2)$$

eine im Innern von B superharmonische Funktion. Bei der Definition der sub- und superharmonischen Funktionen haben wir natürlich nicht die Existenz der Ableitungen vorausgesetzt. Die Bedingungen (173₁) und (173₂) entsprechen denjenigen bei Funktionen einer Variablen, nach denen eine Kurve konvex oder konkav ist [I, 71].

Wir weisen noch auf eine einfache Eigenschaft der sub- bzw. superharmonischen Funktionen hin. Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(M)$ in einem abgeschlossenen Bereich stetig und im Innern des Bereiches subharmonisch ist. Dann folgt aus (172₁) unmittelbar, daß *eine subharmonische Funktion ihren größten Wert auf der Randkurve annimmt.* Darüber hinaus kann sie im Innern kein Maximum haben, in dessen

Umgebung sie nicht konstant ist. Ebenso nimmt eine superharmonische Funktion ihren kleinsten Wert auf der Randkurve an.

118. Einige Hilfssätze. Wir beweisen einige Sätze über sub- und superharmonische Funktionen, die wir zur Lösung des Dirichletschen Problems brauchen. Im folgenden bezeichnen wir mit B wie bisher einen beschränkten Bereich B einschließlich seiner Randkurve, d. h. den abgeschlossenen Bereich.

Satz I. Es seien $f_k(M)$ ($k=1, \dots, m$) Funktionen, die in $\bar{B}$ stetig und im Innern von B subharmonisch sind. Wir konstruieren die Funktion $\varphi(M)$, die in jedem Punkt von B gleich dem Maximum der Werte $f_k(M)$ ($k=1, \dots, m$) ist:

$$\varphi(M) = \max [f_1(M), \dots, f_m(M)] . \quad (175_1)$$

Dann ist $\varphi(M)$ in $\bar{B}$ stetig und im Innern von B subharmonisch.

Satz I'. Sind die Funktionen $f_k(M)$ superharmonisch und ist

$$\psi(M) = \min [f_1(M), \dots, f_m(M)] , \quad (175_2)$$

so ist auch die Funktion $\psi(M)$ superharmonisch.

Die Stetigkeit von $\varphi(M)$ in $\bar{B}$ folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der $f_k(M)$. Ferner sei (x_0, y_0) ein Punkt im Innern von B , und es sei $\varphi(x_0, y_0)$ in diesem Punkt beispielsweise gleich $f_1(x_0, y_0)$. Da $f_1(x, y)$ subharmonisch ist, gilt

$$\varphi(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi .$$

Weiterhin gilt wegen (175₁) auf der Kreislinie, über die integriert wird, $\varphi(M) \geq f_1(M)$; folglich gilt erst recht

$$\varphi(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi ,$$

woraus folgt, daß $\varphi(M)$ subharmonisch ist.

Satz II. Es sei $f(M)$ eine im Innern von B subharmonische und in $\bar{B}$ stetige Funktion; K sei ein Kreis, der in B enthalten ist, und $u_K(M)$ sei diejenige im Innern von K harmonische Funktion, deren Werte auf dem Kreisrand von K mit den Werten $f(M)$ identisch sind. Dann gilt

$$f(M) \leq u_K(M) \quad (\text{in } K) . \quad (176_1)$$

Satz II'. Ist $f(M)$ eine superharmonische Funktion, so gilt

$$f(M) \geq u_K(M) \quad (\text{in } K) . \quad (176_2)$$

Der Ausdruck $f - u_K = f + (-u_K)$ ist die Summe aus der subharmonischen Funktion $f(M)$ und der harmonischen (d. h. ebenfalls subharmonischen) Funktion $-u_K$. Folglich ist $f - u_K$ eine im Innern von K subharmonische Funktion, die auf der Randkurve gleich 0 ist. Nach der Bemerkung am Schluß des vorigen Abschnittes gilt somit $f - u_K \leq 0$ im Innern von K , womit die Ungleichung (176₁) bewiesen ist.

Satz III. Ersetzen wir unter den Voraussetzungen des Satzes II die Werte von $f(M)$ im Kreis K durch die Werte von $u_K(M)$ und bezeichnen die neue Funktion mit $f_K(M)$, so ist diese in $\bar{B}$ stetige Funktion im Innern von B subharmonisch.

Satz III'. Die entsprechende Konstruktion für eine superharmonische Funktion liefert eine superharmonische Funktion $f_K(M)$.

Im Äußeren von K ist die Funktion f_K mit f identisch, und die Bedingung (172₁) ist offenbar in jedem Punkt im Äußeren von K für hinreichend kleines δ erfüllt. Im Innern von K ist die Funktion f_K harmonisch, und (172₁) ist mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Es bleibt noch nachzuprüfen, ob (172₁) in den Punkten (x_0, y_0) der Berandung von K erfüllt ist. Besitzt diese Berandung mit der Randkurve des Bereiches B gemeinsame Punkte, so nehmen wir an, daß der Punkt (x_0, y_0) im Innern von B liegt. Es gilt

$$f_K(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi) d\varphi \quad (\varrho < \delta).$$

Im Innern von K gilt wegen Satz II die Ungleichung $f_K \equiv f$, außerhalb von K gilt $f_K = f$. Folglich gilt erst recht

$$f_K(x_0, y_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_K(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi) d\varphi,$$

was zu beweisen war.

119. Die Methode der Unter- und Oberfunktionen. Wir entwickeln nun eine neue Methode zur Lösung des Dirichletschen Problems. Es sei in der Ebene ein beschränkter Bereich mit der Randkurve l vorgegeben, über die wir zunächst nichts voraussetzen wollen. Auf l sei eine Funktion $\omega(N) = \omega(x, y)$ vorgegeben, von der wir zunächst nur voraussetzen, daß sie beschränkt ist, daß also zwei Zahlen a und b existieren, mit denen

$$a \equiv \omega(N) \equiv b \tag{177}$$

gilt.

Jede Funktion $\varphi(M)$, die im abgeschlossenen Bereich stetig, im Innern des Bereiches subharmonisch ist und auf der Randkurve die Bedingung $\varphi(N) \leq \omega(N)$ erfüllt, heißt eine *Unterfunktion*. Analog ist eine *Oberfunktion* $\psi(M)$ im Innern superharmonisch und genügt auf der Randkurve der Bedingung $\psi(N) \geq \omega(N)$.

Es existieren offenbar unendlich viele Unter- und Oberfunktionen. Beispielsweise ist jede Konstante, die nicht größer ist als a , eine Unterfunktion. Es sei φ eine Unterfunktion und ψ eine Oberfunktion. Der Ausdruck $\chi = \varphi - \psi = \varphi + (-\psi)$ ist als Summe zweier subharmonischer Funktionen eine subharmonische Funktion, und es gilt $\chi \leq 0$ auf l . Hieraus folgt $\chi \leq 0$ in $\bar{B}$, d. h. $\varphi \leq \psi$ in $\bar{B}$. Mit anderen Worten, *keine Unterfunktion in $\bar{B}$ ist größer als eine beliebige Oberfunktion*. Aus den Sätzen I und II folgt unmittelbar: *Wenn $f_1(M), f_2(M), \dots, f_m(M)$ Unterfunktionen sind, ist die durch (175₁) definierte Funktion $\varphi(M)$ ebenfalls eine Unterfunktion. Entsprechendes gilt auch für Oberfunktionen und die Funktion in (175₂)*. In derselben Weise folgt aus den Sätzen III und III': *Wenn $f(M)$ eine Unterfunktion ist, ist auch die Funktion $f_K(M)$ eine Unterfunktion, und entsprechend ist $f_K(M)$ eine Oberfunktion, wenn $f(M)$ eine Oberfunktion ist*.

Offenbar sind die Unterfunktionen nach oben durch eine gewisse Zahl beschränkt, und ebenso sind die Oberfunktionen nach unten beschränkt. Beispielsweise ist die in der Ungleichung (177) auftretende Zahl b eine Oberfunktion, und für jede beliebige Unterfunktion gilt $\varphi(M) \leq b$. Ganz analog gilt für jede Oberfunktion

$\varphi(M) \equiv a$. Somit hat die Menge der Werte aller nur möglichen Oberfunktionen $\varphi(M)$ in einem beliebigen festen Punkt M , der im Innern von B liegt, eine untere Grenze [I, 42], die wir mit $u(M)$ bezeichnen. Diese untere Grenze stellt eine Funktion dar, die im Innern von B erklärt ist. Aus $\varphi(M) \equiv a$ folgt $u(M) \equiv a$, und da die Konstante b eine Oberfunktion ist, gilt $u(M) \leq b$, d. h., die konstruierte Funktion $u(M)$ erfüllt die Bedingung $a \leq u(M) \leq b$. Auf Grund der Definition der unteren Grenze für jeden Punkt M_0 , der im Innern von B liegt, existiert eine Folge $\varphi_n(M)$ von Oberfunktionen mit $\varphi_n(M_0) \rightarrow u(M_0)$ für $n \rightarrow \infty$. Existiert eine Oberfunktion $\varphi(M)$ mit der Eigenschaft $\varphi(M_0) = u(M_0)$, so können wir beispielsweise für beliebige n annehmen, daß $\varphi_n(M) = \varphi(M)$ ist. Für verschiedene Punkte M_0 ist im allgemeinen die Folge $\varphi_n(M)$ verschieden. Wir beweisen nun den folgenden Satz.

Satz. Die Funktion $u(M)$ ist im Innern von B harmonisch.

Im folgenden schreiben wir die Indizes bei den Funktionen nicht unten, sondern oben in Klammern.

Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz. Ist P ein willkürlicher fester Punkt im Innern von B , so existiert eine monotone Folge von Oberfunktionen

$$\varphi^{(1)}(M) \leq \varphi^{(2)}(M) \leq \dots \quad (M \text{ in } \bar{L}) \quad (178)$$

mit der Eigenschaft $\varphi^{(n)}(P) \rightarrow u(P)$.

Wie wir gesehen haben, existiert eine Folge von Oberfunktionen $\varphi_n(M)$ mit $\varphi_n(P) \rightarrow u(P)$. Wir setzen jetzt

$$\varphi^{(n)}(M) = \min [\varphi_1(M), \varphi_2(M), \dots, \varphi_n(M)]. \quad (179)$$

Die Funktionen $\varphi^{(n)}(M)$ sind, wie wir vorher gesehen haben, stetige Oberfunktionen. Bei wachsendem n vergrößert sich die Anzahl der Funktionen $\varphi_s(M)$, aus denen das Minimum gebildet wird; folglich erfüllen die $\varphi^{(n)}(M)$ die Bedingung (178). Aus (179) und aus der Tatsache, daß die Funktion $u(M)$ die untere Grenze der Oberfunktionen ist, ergibt sich die Ungleichung $u(P) \leq \varphi^{(n)}(P) \leq \varphi_n(P)$, aus der auf Grund von $\varphi_n(P) \rightarrow u(P)$ folgt, daß die $\varphi^{(n)}(P)$ gegen $u(P)$ konvergieren. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. Es sei K eine beliebige Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P , die im Innern von B liegt. Wie in Satz III' bilden wir die Funktionen $\varphi_K^{(n)}(M)$. Da auf der Berandung von K die Ungleichungen (178) erfüllt sind, sind die entsprechenden Ungleichungen im ganzen abgeschlossenen Kreisbereich erfüllt. Im Äußeren von K sind die Funktionen $\varphi_K^{(n)}(M)$ und $\varphi^{(n)}(M)$ identisch und erfüllen dort ebenfalls die Bedingung (178):

$$\varphi_K^{(1)}(M) \leq \varphi_K^{(2)}(M) \leq \dots \quad (M \text{ in } \bar{B}).$$

Außerdem ist $u(M) \leq \varphi_K^{(n)}(M) \leq \varphi^{(n)}(M)$, und wegen $\varphi^{(n)}(P) \rightarrow u(P)$ strebt $\varphi_K^{(n)}(P)$ gegen $u(P)$. Also können wir annehmen, daß die im Hilfssatz vorkommenden Funktionen $\varphi^{(n)}(M)$ im Innern einer beliebigen festen in B liegenden Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P harmonisch sind.

Wir gehen nun zum Beweis des Satzes über. Es genügt, zu zeigen, daß $u(M)$ im Innern einer beliebigen Kreisfläche K , die im Innern von B liegt, harmonisch ist. Es sei P der Mittelpunkt der Kreisfläche K . Auf Grund des Hilfssatzes und der zugehörigen Bemerkung konstruieren wir Funktionen $\varphi^{(n)}(M)$, die im Innern von K harmonisch sind. Diese Funktionen haben im Punkt P den Grenzwert $u(P)$. Auf

Grund des Satzes von HARNACK konvergieren diese Funktionen in allen Punkten im Innern von K gegen eine harmonische Funktion

$$\varphi^{(n)}(M) \rightarrow v(M) \quad (M \text{ im Innern von } K),$$

wobei sie in jedem abgeschlossenen Kreisbereich K' mit dem Mittelpunkt P , der im Innern von K liegt, gleichmäßig konvergieren. Wir beweisen, daß im Innern von K die Beziehung $v(M) = u(M)$ gilt. Hiermit ist dann der Satz bewiesen. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, in einem Punkt P_1 im Innern von K wäre $v(P_1) \neq u(P_1)$. Da $\varphi^{(n)}(P_1) \rightarrow v(P_1)$ gilt und $u(P_1)$ die untere Grenze der Werte aller Oberfunktionen im Punkt P_1 ist, müßte $v(P_1) > u(P_1)$ sein. Deshalb müßte eine Oberfunktion $w(M)$ mit $w(P_1) < v(P_1)$ existieren. Es sei K' die Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P , auf deren Berandung sich der Punkt P_1 befindet. Wir bilden die Oberfunktionen

$$\varrho^{(n)}(M) = \min [w(M), \varphi^{(n)}(M)] \quad \text{und} \quad \varrho_{K'}^{(n)}(M)$$

mit

$$\varrho_{K'}^{(n)}(M) \leq \varrho^{(n)}(M).$$

Da $\varphi^{(n)}(M)$ im abgeschlossenen Kreisbereich K' gleichmäßig gegen $v(M)$ konvergiert, folgt, daß $\varrho^{(n)}(M)$ dort ebenfalls gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$\varrho(M) = \min [w(M), v(M)]$$

konvergiert. Deshalb ist die Konvergenz auch auf der Berandung des Kreises K' gleichmäßig, und es ergibt sich, daß auch die im Innern von K' harmonischen Funktionen $\varrho_{K'}^{(n)}(M)$ im abgeschlossenen Kreisbereich K' gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $\varrho_{K'}(M)$ konvergieren. Wegen $w(P_1) < v(P_1)$ ist $\varrho(P_1) < v(P_1)$, und in allen Punkten der Berandung von K' gilt die Beziehung $\varrho(M) \leq v(M)$. Somit folgt nach dem Mittelwertsatz für harmonische Funktionen $\varrho_{K'}(P) < v(P)$. Wegen $v(P) = u(P)$ ist deshalb auch $\varrho_{K'}(P) < u(P)$. Im Punkt P ist die Funktion $\varrho_{K'}(M)$ der Grenzwert der Oberfunktionen $\varrho_{K'}^{(n)}(M)$, die Ungleichung $\varrho_{K'}(P) < u(P)$ widerspricht aber der Tatsache, daß $u(P)$ die untere Grenze der Werte aller Oberfunktionen im Punkt P ist. Somit ist der Satz, daß $u(M)$ eine im Innern von B harmonische Funktion ist, bewiesen.

Im dreidimensionalen Fall verläuft der Beweis ganz analog. Somit läßt sich bei einer auf der Berandung l vorgegebenen beschränkten Funktion $\omega(N)$ nach der dargelegten Methode eine Funktion $u(M)$ konstruieren, die im Innern von B harmonisch ist. Anstatt die untere Grenze $u(M)$ der Oberfunktionen zu konstruieren, könnte man auch die obere Grenze $u_0(M)$ der Unterfunktionen konstruieren. Ist $\omega(N)$ eine auf der Berandung l stetige Funktion, so kann man zeigen, daß $u_0(M)$ mit $u(M)$ identisch ist. Im folgenden sprechen wir immer von der unteren Grenze der Oberfunktionen.

Wie wir bereits erwähnt haben, läßt sich die gesamte Konstruktion ohne Änderung auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Die Funktion $u(M)$ nennt man die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems mit den Randwerten $\omega(N)$. Auf die Bedeutung dieser Bezeichnung gehen wir im folgenden Abschnitt ein.

Bemerkung. Die angegebene verallgemeinerte Lösung $u(M)$ des Dirichletschen Problems läßt sich, falls die Funktion $\omega(N)$ auf der Berandung l stetig ist, auch mit Hilfe einer anderen Methode konstruieren, die wir nun kurz beschreiben wollen. Wir setzen die Funktion $\omega(N)$ auf die ganze Ebene stetig fort. Ferner nehmen wir

eine Folge von Bereichen B_n ($n=1, 2, \dots$) an, die mit ihren Randkurven l_n im Innern von B liegen und so gegen B streben, daß jeder Punkt M , der im Innern von B liegt, von einer gewissen Nummer n ab im Innern aller Bereiche B_n liegt. Die Bereiche B_n können beispielsweise aus endlich vielen Kreisen bestehen. Wir setzen voraus, daß wir für die Bereiche B_n das Dirichletsche Problem mit stetigen Werten auf l_n lösen können.

Es sei $u_n(M)$ die Lösung des Dirichletschen Problems für B_n , wobei die Randwerte auf l_n als Fortsetzung der Funktion $\omega(N)$ vorgegeben sind, wovon wir schon gesprochen haben. Man kann beweisen, daß die Funktionen $u_n(M)$ bei unbeschränkt wachsendem n gegen die soeben konstruierte verallgemeinerte Lösung $u(M)$ des Dirichletschen Problems konvergieren, wobei die Konvergenz in jedem abgeschlossenen Bereich, der im Innern von B liegt, gleichmäßig ist. Somit zeigt sich, daß die Grenzfunktion der $u_n(M)$ weder von der Methode der Fortsetzung von $\omega(N)$ noch von der Wahl der Bereiche B_n abhängt. Wichtig sind allein diejenigen Eigenschaften der Bereiche, die wir angegeben haben. Der Beweis dieser Tatsachen findet sich in einer Arbeit von M. W. KELDYSCH in *Uspechi matem. nauk* 8 (1941).

120. Untersuchung der Randwerte. Bisher haben wir keinerlei Voraussetzungen über die Berandung des Bereiches B gemacht. Jetzt stellen wir eine Bedingung auf, in deren Formulierung ein fester Punkt N_0 der Berandung des Bereiches B vorkommt. Die Menge aller Randpunkte des Bereiches B wird mit l bezeichnet.

Bedingung I. *Es existiert eine in B stetige und im Innern von B superharmonische Funktion $w(M)$ derart, daß $w(N_0)=0$ ist und $w(M)>0$ in den übrigen Punkten von $\bar{B}$ gilt.*

Wir beweisen nun den folgenden Satz.

Satz. *Ist die Bedingung I erfüllt und ist die Randfunktion $\omega(N)$ im Punkt N_0 stetig, so konvergiert $u(M)$ gegen $\omega(N_0)$, wenn M vom Innern des Bereiches her gegen den Punkt N_0 strebt.*

Mit β_η bezeichnen wir die Menge derjenigen Punkte des Bereiches $\bar{B}$, deren Entfernung von N_0 nicht größer ist als eine Zahl $\eta>0$. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Da die Funktion $\omega(N)$ im Punkt N_0 stetig ist, existiert eine positive Zahl η derart, daß für alle Punkte auf dem Rand von B , die β_η angehören, die Ungleichung

$$\omega(N_0) - \varepsilon \leq \omega(N) \leq \omega(N_0) + \varepsilon \quad (N \text{ auf } l \text{ und in } \beta_\eta) \quad (180)$$

erfüllt ist. Nunmehr konstruieren wir eine in $\bar{B}$ stetige und im Innern von B subharmonische Funktion

$$\varphi_1(M) = \omega(N_0) - \varepsilon - C\omega(M), \quad (181)$$

wobei C eine positive Konstante ist, die wir sogleich näher bestimmen werden. Wegen (180) und $w(M) \geq 0$ gilt $\varphi_1(N) \leq \omega(N)$ in den Punkten von l , die β_η angehören. Wir wählen C so groß, daß in den Punkten von l im Äußeren von β_η dieselbe Ungleichung erfüllt ist, daß also

$$\omega(N_0) - \varepsilon - Cw(N) \leq w(N) \quad (N \text{ auf } l \text{ und außerhalb von } \beta_\eta) \quad (182)$$

gilt. In der Menge aller Punkte von B , deren Entfernung von N_0 nicht kleiner als η ist, nimmt die Funktion $w(M)$ einen kleinsten positiven Wert m_μ an. Dies folgt

unmittelbar aus der Tatsache, daß die angegebenen Punkte eine abgeschlossene Menge bilden und die Funktion $w(M)$ auf dieser Menge stetig und positiv ist [II, 92]. Dafür, daß die Ungleichung (182) erfüllt ist, genügt es,

$$C \equiv \max \left\{ \frac{\omega(N_0) - \varepsilon - a}{m}; 0 \right\}$$

zu wählen, wobei a die Zahl ist, die in der Ungleichung (177) vorkommt. Bei dieser Wahl von C ist die Funktion (181) eine Unterfunktion. Ebenso ist für hinreichend großes C die Funktion

$$\varphi_1(M) = \omega(N_0) + \varepsilon + Cw(M) \quad (183)$$

eine Oberfunktion. Aus $w(N_0) = 0$ folgt $\varphi_1(N_0) = \omega(N_0) + \varepsilon$, und da $\varphi_1(M)$ in B stetig ist, gibt es eine so kleine positive Zahl δ_1 , daß in β_{δ_1}

$$\varphi_1(M) \equiv \omega(N_0) - 2\varepsilon \quad (M \text{ in } \beta_{\delta_1})$$

gilt. Es sei $\psi(M)$ eine beliebige Oberfunktion. Für alle Punkte M aus $\bar{B}$ ist $\psi(M) \equiv \varphi_1(M)$; damit folgt aus der letzten Ungleichung

$$\psi(M) \equiv \omega(N_0) - 2\varepsilon \quad (M \text{ in } \beta_{\delta_1}).$$

Die untere Grenze der $\psi(M)$ muß ebenfalls dieser Ungleichung genügen, d. h., es gilt

$$u(M) \equiv \omega(N_0) - 2\varepsilon \quad (M \text{ im Innern von } B \text{ und in } \beta_{\delta_1}). \quad (184)$$

In der gleichen Weise ergibt sich aus (183) $\varphi_1(N_0) = \omega(N_0) + \varepsilon$; folglich existiert auf Grund der Stetigkeit von $\varphi_1(M)$ eine so kleine positive Zahl δ_2 , daß in β_{δ_2}

$$\varphi_1(M) \leq \omega(N_0) + 2\varepsilon \quad (M \text{ in } \beta_{\delta_2})$$

und damit erst recht

$$u(M) \leq \omega(N_0) + 2\varepsilon \quad (M \text{ im Innern von } B \text{ und in } \beta_{\delta_2}) \quad (185)$$

gilt. Es sei δ das Minimum der Zahlen δ_1 und δ_2 . Wegen (184) und (185) ist

$$\omega(N_0) - 2\varepsilon \leq u(M) \leq \omega(N_0) + 2\varepsilon \quad (M \text{ im Innern von } B \text{ und in } \beta_{\delta}). \quad (186)$$

Da die Wahl von ε willkürlich ist, strebt $u(M)$ nach (186) für $M \rightarrow N_0$ vom Innern des Bereiches her gegen $\omega(N_0)$, und der Satz ist bewiesen. Der Beweis gilt sowohl im zweidimensionalen als auch im dreidimensionalen Fall. Ist $\omega(N)$ in jedem Punkt der Berandung stetig und ist in jedem Punkt die Bedingung I erfüllt, so ist die Funktion $u(M)$ im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetig und nimmt in den Randpunkten die Werte $\omega(N)$ an.

Definition. Strebt bei einer beliebig gewählten, auf l stetigen Funktion $\omega(N)$ die Funktion $u(M)$ für $M \rightarrow N_0$ gegen $\omega(N_0)$, so nennen wir den Punkt N_0 einen *regulären Randpunkt*. Randpunkte, die diese Eigenschaft nicht besitzen, heißen *irreguläre Randpunkte*.

Aus dem oben bewiesenen Satz folgt, daß die Bedingung I hinreichend für die Regularität des Punktes N_0 ist.

Für den dreidimensionalen Fall geben wir eine einfache hinreichende Bedingung geometrischer Art für die Regularität eines Randpunktes an. Wir setzen voraus, daß der Randpunkt N_0 folgende Eigenschaft besitzt: Es existiert eine Kugel, die keine Punkte von $\bar{B}$ enthält mit Ausnahme des Punktes N_0 . Es sei M_1 der Mittelpunkt dieser Kugel und R ihr Radius. Mit r bezeichnen wir die Entfernung $|M_1 M|$

und bilden die Funktion

$$\omega(M) = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}.$$

Diese Funktion erfüllt offenbar alle Forderungen der Bedingung I und ist im Innern von B harmonisch.

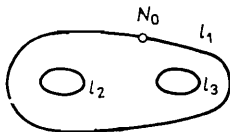


Abb. 14

Wir betrachten nun den ebenen Fall. Die Berandung von B möge aus endlich vielen paarweise punktfremden doppelpunktfreien geschlossenen Kurven bestehen, die eine Darstellung $x=x(t)$, $y=y(t)$ besitzen, wobei $x(t)$ und $y(t)$ stetige periodische Funktionen eines Parameters t sind (Abb. 14). Zunächst setzen wir voraus, daß sich der Punkt N_0 auf der äußeren Randkurve l_1 befindet. Wir legen in ihn den Koordinatenursprung $z=0$ ($z=x+iy$) und wählen den Maßstab so, daß der Bereich $\bar{B}$ im Innern des Kreises $|z|<1$ liegt. Dann bilden wir die Funktion

$$F(z) = -\frac{1}{\lg z}.$$

Bewegt sich der Punkt z in B , so kann er den Koordinatenursprung nicht umlaufen, und $F(z)$ ist eine in $\bar{B}$ eindeutige Funktion, die im Innern von B regulär und in $\bar{B}$ stetig ist, dabei gilt $F(0)=0$.

Setzen wir $z = \varrho e^{i\varphi}$, so erhalten wir für den Realteil von $F(z)$ den Ausdruck

$$w(z) = -\frac{\lg \varrho}{(\lg \varrho)^2 + \varphi^2}$$

mit $\lg \varrho < 0$. Diese harmonische Funktion genügt allen angegebenen Bedingungen.

Insbesondere gilt außerhalb β_ε

$$w(z) > -\frac{\lg R}{(\lg \varepsilon)^2 + \varphi_0^2},$$

wobei φ_0 der größte Wert von φ in B und R die größte Entfernung vom Koordinatenursprung bis zu den Punkten aus $\bar{B}$ ist.

Wir setzen jetzt voraus, daß N_0 auf einer inneren Randkurve l_2 liegt. Wir wählen im Innern von l_2 einen beliebigen Punkt α und führen die konforme Abbildung

$$z' = \frac{1}{z - \alpha}$$

der Ebene durch. Die Randkurve l_2 geht in die äußere Berandung über, und wir können für den betrachteten Punkt N_0 nach der angegebenen Methode eine Funktion $w(M)$ konstruieren. Kehren wir zur früheren Veränderlichen z zurück, so erhalten wir die gesuchte Funktion. Ist somit $\omega(N)$ in allen Punkten der betrachteten Randkurve l stetig, so ist $u(M)$ bis einschließlich der Randkurve stetig und auf der Randkurve gleich $\omega(N)$.

Wir setzen nun voraus, daß N_0 eine Unstetigkeitsstelle der Funktion $\omega(N)$ ist, wobei sich für $\omega(N)$ verschiedene Grenzwerte ergeben sollen, wenn N längs der Randkurve von der einen und von der anderen Seite her gegen N_0 strebt (Unstetig-

keit erster Art). Wir bezeichnen diese Grenzwerte mit $\omega_1(N_0)$ bzw. $\omega_2(N_0)$, und es sei $\omega_1(N_0) < \omega_2(N_0)$. Verfahren wir genau wie oben, so erhalten wir an Stelle von (184)

$$u(M) \geq \omega_1(N_0) - 2\varepsilon$$

und an Stelle von (185)

$$u(M) \leq \omega_2(N_0) + 2\varepsilon.$$

Strebt M vom Innern des Bereiches B her gegen N_0 , so kann $u(M)$ verschiedene Grenzwerte haben. Für jeden dieser Grenzwerte u_0 gilt aber wegen der vorhergehenden Ungleichungen, da ε willkürlich ist,

$$\omega_1(N_0) \leq u_0 \leq \omega_2(N_0). \quad (187)$$

Ist $\omega(N)$ eine beschränkte Funktion, d. h., ist die Bedingung (177) erfüllt, so genügt, wie wir gesehen haben, auch die Funktion $u(M)$ dieser Bedingung. Somit ist $u(M)$ eine beschränkte harmonische Funktion, welche die Randwerte $\omega(N)$ in allen Stetigkeitspunkten dieser Funktion annimmt.

Wir kehren nun zum dreidimensionalen Fall zurück. Man kann verhältnismäßig einfache geschlossene Flächen konstruieren, die irreguläre Punkte besitzen. Dieser Umstand wurde von LEBESGUE entdeckt, unabhängig von ihm nochmals von P. S. URYSOHN. Eine ausführliche Untersuchung der Randwerte findet man in einer Arbeit von M. W. KELDYSCH in *Uspechi matem. nauk* 8 (1941).

Wir geben noch ein Beispiel für den ebenen Fall an. Es sei B ein Kreisbereich mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, dabei gehöre der Mittelpunkt selbst nicht zu B . Die Menge l der Randpunkte besteht aus der Peripherie und dem Mittelpunkt des Kreisbereiches. Es sei auf der Berandung $\omega(N) = 0$ und im Mittelpunkt $\omega(N) = 1$. Die Funktion $\omega(N)$ ist folglich auf l stetig. Die zugehörige harmonische Funktion $u(M)$ strebt offenbar gegen 0, wenn sich M einem Punkt der Berandung nähert. Wir beweisen, daß $u(M)$ bei Annäherung an den Mittelpunkt nicht gegen 1 streben kann. Denn wäre dies der Fall, so wäre die Funktion $u(M)$ überall im Innern von l harmonisch, wenn man ihren Wert im Mittelpunkt als 1 annimmt [105]. Dies widerspricht aber dem Mittelwertsatz der harmonischen Funktionen. Somit ist der Koordinatenursprung ein irregulärer Randpunkt.

Es ist leicht zu zeigen, daß im vorliegenden Fall $u(M) \equiv 0$ ist. In der Tat ist die Funktion $u(M)$ beschränkt und hat deshalb einen Grenzwert, wenn M gegen den Mittelpunkt strebt [105]. Nehmen wir diesen Grenzwert als Funktionswert von $u(M)$ im Mittelpunkt, so ist die Funktion $u(M)$ überall im Innern von l harmonisch [105] und auf der Peripherie gleich 0, d. h., es ist $u(M) \equiv 0$.

Wir bemerken noch, daß man an Stelle der Bedingung I auch eine Regularitätsbedingung aufstellen kann, in der nur die Umgebung des Punktes N_0 eine Rolle spielt. Es läßt sich zeigen, daß die neue Bedingung der Bedingung I gleichwertig ist.

Bedingung II. Für eine Umgebung β_n des Punktes N_0 existiert eine Funktion $w_n(M)$, die in β_n bis zum Rand stetig und im Innern von β_n superharmonisch ist und dabei die Bedingungen $w_n(N_0) = 0$ und $w_n(M) > 0$ in den übrigen Punkten von β_n erfüllt.

Man kann zeigen, daß ein Punkt N_0 im dreidimensionalen Fall die Bedingung II erfüllt, wenn dieser Punkt die Spitze eines Kreiskegels ist, dessen hinreichend nahe an N_0 liegenden Punkte (mit Ausnahme des Punktes N_0 selbst) alle im Äußeren von $\bar{B}$ liegen. Somit ist ein solcher Punkt regulär. (Vgl. I. G. PETROWSKI, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen.)

Im folgenden nehmen wir, wenn nicht gerade das Gegenteil vorausgesetzt wird, stets an, daß die Randkurven oder Randflächen nur aus regulären Punkten bestehen. Solche Flächen sind beispielsweise die Liapounoffschen Flächen. Für sie haben wir das Dirichletsche Problem mit Hilfe der Potentialtheorie und der Theorie der Integralgleichungen gelöst.

Ist auf dem Rand eine stetige Funktion $\omega(N)$ vorgegeben und sind alle Randwerte regulär, so ist die konstruierte harmonische Funktion $u(M)$ bis zum Rand stetig und nimmt auf dem Rand die Werte von $\omega(N)$ an. Wir wissen, daß es nur eine einzige solche Funktion geben kann. Hat der Rand irreguläre Punkte, so ist die harmonische Funktion $u(M)$ im Innern des Bereiches beschränkt und nimmt in allen regulären Punkten des Randes die Werte von $\omega(N)$ an. Man kann zeigen, daß es nur eine einzige Funktion mit diesen Eigenschaften geben kann. Den Beweis dieser wichtigen Aussage sowie eine Reihe interessanter Fakten, darunter die Wienerschen Regularitätskriterien, findet man in der bereits zitierten Arbeit von M. W. KELDYSCH.

121. Die Laplacesche Differentialgleichung im n -dimensionalen Raum. Bis jetzt haben wir die Laplacesche Differentialgleichung nur in der Ebene und im dreidimensionalen Raum betrachtet.

Die Resultate lassen sich leicht auch auf den Fall des n -dimensionalen Raumes übertragen, wo die Differentialgleichung die Gestalt

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

hat. Wir geben die wichtigsten Resultate über die Lösungen dieser Differentialgleichung an. Funktionen, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen und diese Differentialgleichung erfüllen, heißen harmonisch. Die singuläre Grundlösung hat die Gestalt

$$\frac{C}{r^{n-2}} \quad (n > 2).$$

Dabei wird die Konstante C gleich $\frac{1}{(n-2)\omega_n}$ gewählt, wobei ω_n die Größe der Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist, so daß die singuläre Grundlösung die Gestalt

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}} \quad (n > 2)$$

hat.

Das Volumen v_n einer n -dimensionalen Kugel mit dem Radius r läßt sich durch die Formeln

$$v_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{n(n-2)\dots 2} r^n \quad \text{für gerades } n,$$

$$v_n = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{n(n-2)\dots 1} r^n \quad \text{für ungerades } n$$

ausdrücken [II, 101], die man, wie leicht zu verifizieren ist, auch in der einheitlichen Form

$$v_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

schreiben kann. Hieraus entsteht durch Differentiation nach r , wenn wir $r=1$ setzen, die Beziehung

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Für eine im Bereich D mit der Oberfläche S harmonische Funktion gilt die Relation [II, 204]

$$u(M) = \int_S \left(\varphi_0(r) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \varphi_0(r)}{\partial n} \right) dS,$$

wobei wir wie stets nur ein Integralzeichen schreiben. Die Größe r ist die Entfernung zwischen dem veränderlichen Integrationspunkt S auf der Oberfläche und M . Die Grundeigenschaften der harmonischen Funktionen behalten ihre Gültigkeit, unter ihnen der Mittelwertsatz für den Wert einer harmonischen Funktion im Mittelpunkt einer Kugel sowie die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletschen Problems.

Die Formel, die das Dirichletsche Problem für die Kugel mit dem Radius R löst, hat die Gestalt

$$u(M) = \frac{R^n (R^2 - \varrho^2)}{\omega_n} \int_S f(N) \frac{ds}{(R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos \theta)^{n/2}}, \quad (188)$$

wobei ϱ die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt O der Kugel und M , ferner N der veränderliche Punkt auf der Kugel und θ der Winkel zwischen ON und OM ist.

Die Methode der Ober- und Unterfunktionen zur Lösung des Dirichletschen Problems läßt sich ohne Änderung auf den n -dimensionalen Raum übertragen, wobei die früher bewiesene Regularitätsbedingung für die Punkte der Fläche in Kraft bleibt.

122. Die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators. Für partielle Differentialgleichungen können wir eine entsprechende Greensche Funktion bestimmen wie für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir beginnen mit der Definition der Greenschen Funktion für die Laplacesche Differentialgleichung bei einer der homogenen Randbedingungen

$$u|_S = 0, \quad (189)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + p(N) u|_S = 0 \quad (p(N) > 0) \quad (190)$$

im dreidimensionalen Fall. Die Greensche Funktion läßt sich sowohl für den endlichen Bereich D_i im Innern von S als auch für den unendlichen Bereich D_a im Äußeren von S konstruieren. Wir beginnen mit dem endlichen Bereich D_i . Die Greensche Funktion $G(P, Q)$ ist eine Funktion der Punkte P und Q , die als Funktion von P im Innern von D_i überall außer im Punkt Q stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, die Laplacesche Differentialgleichung erfüllt und auf dem Rand der vorgeschriebenen Randbedingung genügt. Weiterhin muß $G(P, Q)$ als Funktion von P im Punkt Q eine Singularität haben, die einer im Punkt Q konzentrierten endlichen Ladung (oder Masse) entspricht. Unter Berücksichtigung

des Faktors 4π , der in der Relation

$$\Delta \left[\iint_{D_i} \frac{\mu(M)}{r} d\tau_M \right] = -4\pi\mu(M_0) \quad (r = |M_0 M|) \quad (191)$$

vorkommt [II, 201], können wir die Greensche Funktion für die Randbedingung (189) oder (190) in folgender Weise festlegen.

Definition. *Unter der Greenschen Funktion des Laplaceschen Operators mit der zugehörigen Randbedingung (189) oder (190) versteht man eine Funktion $G(P, Q)$, die den folgenden Bedingungen genügt: 1. Sie ist im Innern von D_i außer im Punkt Q harmonisch. 2. Sie erfüllt die Randbedingung (189) oder (190). 3. Sie läßt sich in der Gestalt*

$$G(P; Q) = G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, Q) \quad (192)$$

darstellen, wobei $r = |PQ|$ ist und $g(P; Q)$ eine überall im Innern von D_i harmonische Funktion darstellt.

Die Konstruktion der Greenschen Funktion reduziert sich auf die Ermittlung ihres regulären Teils $g(P; Q)$. Im Fall der Randbedingung (189) muß die im Innern von D_i harmonische Funktion $g(P; Q)$ auf S die Randwerte

$$g(N; Q) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (N \in S, r = |NQ|) \quad (193)$$

besitzen. Im Fall (190) hat die Randbedingung für $g(P; Q)$ die Gestalt.

$$\left(\frac{\partial g(N; Q)}{\partial n} \right)_i + p(N) g(N; Q) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{p(N)}{r} \right] \quad (N \in S) \quad (194)$$

Somit reduziert sich die Konstruktion der Greenschen Funktion auf die Lösung des ersten oder dritten Randwertproblems für die Laplacesche Differentialgleichung; es existiert daher genau eine Greensche Funktion, wenn S eine Liapounoffsche Fläche ist.

Für den äußeren Bereich D_a muß bei der Definition der Greenschen Funktion noch die Bedingung hinzugefügt werden, daß sie im Unendlichen regulär ist: $G(P; Q)$ strebt bei beliebigem festem im Endlichen liegenden Q gegen 0, wenn der Punkt P gegen ∞ strebt.

Es sei D_i ein beliebiger beschränkter Bereich und Γ die Menge seiner Randpunkte. In D_i existiert eine verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems mit der Randbedingung (193). Dabei wird durch (192) eine verallgemeinerte Greensche Funktion für den Bereich D_i und die Randbedingung (189) bestimmt. Ist N_0 ein regulärer Randpunkt, so gilt $G(P; Q) \rightarrow 0$ für $P \rightarrow N_0$. Man kann auch das Umgekehrte beweisen: Strebt $G(P; Q)$ für $P \rightarrow N_0$ gegen 0, so ist N_0 ein regulärer Randpunkt.

Im ebenen Fall läßt sich die Greensche Funktion ganz analog definieren, an Stelle von (192) gilt nur

$$G(P; Q) = \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} + g(P; Q). \quad (195)$$

Aus (192) und (195) folgt, daß die Greensche Funktion für $P \rightarrow Q$ unendlich groß wird, wobei für alle P in einer hinreichend kleinen Umgebung von Q die Greensche Funktion positiv ist. Der Punkt Q heißt *Pol der Greenschen Funktion*.

Im folgenden betrachten wir die Greensche Funktion nur unter der Randbedingung (189). Wir beweisen, daß $G(P; Q)$ eine stetige Funktion der Punkte P und Q ist, wenn diese Punkte nicht identisch sind. Unter Berücksichtigung von (192) ergibt sich, daß der Beweis der Stetigkeit von $G(P; Q)$ auf den Beweis der Stetigkeit von $g(P; Q)$ zurückgeführt werden kann. Wir schätzen hierzu die Differenz $g(P'; Q') - g(P''; Q'')$ ab; durch Addition und Subtraktion von $g(P'; Q'')$ erhalten wir

$$|g(P'; Q') - g(P''; Q'')| \leq |g(P'; Q') - g(P'; Q'')| + |g(P'; Q'') - g(P''; Q'')|.$$

Die Differenz $g(P'; Q') - g(P''; Q'')$ der Funktion $g(P; Q'')$ in den Punkten P' und P'' strebt offenbar für $P'' \rightarrow P'$ gegen 0. Die Differenz $g(P'; Q') - g(P'; Q'')$ stellt den Wert der im Punkt P' harmonischen Funktion $g(P; Q') - g(P; Q'')$ mit den Randwerten $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right)$ auf S dar, wobei r' und r'' die Entfernung des veränderlichen Punktes N auf S von dem Punkt Q' bzw. Q'' bezeichnet.

Liegt Q'' hinreichend nahe an Q' , so ist der absolute Betrag der Differenz $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}$ für alle N auf S beliebig klein. Da aber die harmonische Funktion $g(P; Q') - g(P; Q'')$ den kleinsten und den größten Wert auf dem Rand S annimmt, folgt, daß die Differenz $g(P'; Q') - g(P'; Q'')$ für $Q'' \rightarrow Q'$ gegen 0 strebt. Hieraus ergibt sich die Stetigkeit der Funktion $g(P; Q)$ und damit auch die der Funktion $G(P; Q)$.

Die Funktion $G(P; Q)$ ist in der Umgebung des Punktes Q positiv und auf S gleich 0; folglich ist sie im Innern des Bereiches D_i positiv. Dieselben Überlegungen gelten im dreidimensionalen Fall auch für D_a . Nun leiten wir noch eine einfache Ungleichung für $G(P; Q)$ her. Die Funktion $g(P; Q)$ hat auf S die negativen Randwerte (193). Deshalb ist $g(P; Q) < 0$ auf dem abgeschlossenen Bereich D_i ; folglich gilt

$$0 < G(P; Q) < \frac{1}{4\pi r} \quad \text{im Innern von } D_i \quad (r = |PQ|). \quad (196)$$

Eine ebensolche Abschätzung gilt auch für D_a .

Wir führen nun die Überlegungen im ebenen Fall durch. Es sei d der Durchmesser eines endlichen ebenen Bereiches B , d. h. die größte Entfernung zwischen je zwei Punkten, die dem abgeschlossenen Bereich B angehören. Die harmonische Funktion $g(P; Q) + \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{d}$ nimmt auf dem Rand l die Werte $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{r}{d}$ an, die bei beliebiger Lage des Pols Q in B negativ sind. Somit ist $g(P; Q) + \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{d}$ negativ oder $g(P; Q) < -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{d}$ in B . Diese Abschätzung liefert

$$G(P; Q) < \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{d},$$

wir erhalten also eine Ungleichung der Gestalt

$$0 < G(P; Q) < a \lg \frac{1}{r} + b \quad (\text{im Innern von } B), \quad (197)$$

wobei a und b Konstanten bezeichnen. Die Ungleichungen (196) und (197) stellen Abschätzungen der Greenschen Funktion dar, die von der Entfernung r zwischen den Punkten P und Q abhängen.

123. Die Eigenschaften der Greenschen Funktion. Wir betrachten die Greensche Funktion D_i und bezeichnen mit r wie soeben die Entfernung des veränderlichen

Punktes des Raumes vom Punkt $Q \in D_t$. Wir definieren eine Funktion $v(P)$ durch

$$v(P) = \begin{cases} g(P; Q), & P \in D_t, \\ -\frac{1}{4\pi r}, & P \in D_a. \end{cases} \quad (198)$$

Sie ist sowohl im Innern von D_t als auch im Innern von D_a harmonisch und im Unendlichen gleich 0. In D_a hat sie Ableitungen jeder Ordnung, die bis einschließlich S stetig sind. Wir können $v(P)$ in D_a als Lösung des Neumannschen Problems mit den Randwerten

$$f(M) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (M \in S) \quad (199)$$

auffassen und somit $v(P)$ in D_a als Potential einer einfachen Schicht mit stetiger Dichte darstellen:

$$v(P) = \int_S \int \frac{\mu(N)}{r'} dS \quad (r' = |NP|). \quad (200)$$

Die Werte dieses Potentials auf S sind gleich $-\frac{1}{4\pi r'}$, wobei $r' = |NQ|$ ist, d. h., sie sind gleich den Randwerten von $g(P; Q)$. Hieraus erkennt man, daß die Darstellung (200) für die durch (198) definierte Funktion $v(P)$ im ganzen Raum richtig ist. Es gilt also

$$g(P; Q) = \int_S \int \frac{\mu(N)}{r'} dS \quad (P \text{ in } D_t), \quad (201)$$

folglich hat $g(P; Q)$ in D_t reguläre Normalableitungen auf S . Dasselbe gilt offenbar auch von $G(P; Q)$.

Wir bemerken im Zusammenhang mit der Randbedingung (199), daß die Funktion $\frac{1}{r}$ für jede beliebige Lage des Punktes Q im Innern von D_t nicht nur auf S , sondern auch in der Umgebung von S erklärt ist und Ableitungen jeder Ordnung besitzt. Auf S erfüllt die rechte Seite von (199) offenbar die Lipschitzbedingung

$$|f(N_2) - f(N_1)| \leq ar_{1,2} \quad (r_{1,2} = |N_1 N_2|),$$

woraus folgt, daß auch $\mu(N)$ eine Lipschitzbedingung erfüllt [98]; folglich hat $g(P; Q)$ bis einschließlich S stetige Ableitungen erster Ordnung [100].

Wir beweisen nun die Symmetrie der Greenschen Funktion:

$$G(P; Q) = G(Q; P). \quad (202)$$

Wie oben bewiesen wurde, hat die Funktion $G(P; Q)$ reguläre Normalableitungen auf S . Im Innern von D_t hat sie überall außer in Q stetige Ableitungen. Wir wenden die Formel

$$\iiint_{D'_t} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{S'} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

auf die Funktionen $u = G(P; Q_1)$ und $v = G(P; Q_2)$ an, indem wir als Integrationsbereich D'_t den Bereich D_t mit Ausnahme zweier Kugelkörper mit den Mittelpunkten in Q_1 bzw. Q_2 und dem kleinen Radius ε wählen. Die Anwendung der Formel ist auf Grund der vorhergehenden Ausführungen möglich. Das dreifache Integral

über D_i verschwindet, da die Greensche Funktion außerhalb der Pole die Laplace'sche Differentialgleichung erfüllt. Das Integral über S verschwindet wegen der Randbedingung (189) bzw. (190). Somit gelangen wir zu der Beziehung

$$\iint_{S_1} \left[G(P; Q_1) \frac{\partial G(P; Q_2)}{\partial n} - G(P; Q_2) \frac{\partial G(P; Q_1)}{\partial n} \right] dS + \iint_{S_2} [\quad] dS = 0,$$

wobei S_1 und S_2 die Oberflächen der angegebenen Kugelkörper bezeichnen. Im Punkt Q_2 hat die Funktion $G(P; Q_1)$ keine Singularität, aber die Funktion $G(P; Q_2)$ wird im Punkt Q_2 von der Ordnung $\frac{1}{r}$ unendlich. Da das Produkt von $\frac{1}{\varepsilon}$ mit dem Flächeninhalt der Kugeloberfläche $4\pi\varepsilon^2$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 strebt, sehen wir, daß die einzigen Glieder in der letzten Beziehung, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht gegen 0 streben, diejenigen Glieder sind, welche die Normalableitung von $G(P; Q_i)$ in der Umgebung desjenigen Punktes enthalten, in dem $G = \infty$ ist. Es gibt zwei solche Glieder, und wir erhalten

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} G(P; Q_1) \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} G(P; Q_2) \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} dS + \eta = 0,$$

wobei η für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 strebt, r_1 die Entfernung vom veränderlichen Punkt P bis Q_1 und r_2 die Entfernung vom veränderlichen Punkt P bis Q_2 angibt. In der Greenschen Formel tritt die äußere Normale auf, folglich muß in den letzten Beziehungen die Normale ins Innere der Kugel und damit dem Radius entgegengesetzt gerichtet sein; wir erhalten damit

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{S_2} G(P; Q_1) dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{S_1} G(P; Q_2) dS + \eta = 0.$$

Wenden wir auf die Integrale den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, so finden wir

$$G(P_2; Q_1) - G(P_1; Q_2) + \eta = 0,$$

wobei P_2 ein Punkt auf S_2 und P_1 ein Punkt auf S_1 ist. Führen wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durch, so erhalten wir

$$G(Q_2; Q_1) = G(Q_1, Q_2),$$

womit die Symmetrie der Greenschen Funktion bewiesen ist.

Für einen Kugelkörper lautet die Greensche Funktion [II, 208]

$$G(P; Q) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\varrho r_1} \right), \quad (203)$$

wobei ϱ die Entfernung des Punktes Q vom Mittelpunkt und r_1 die Entfernung des Punktes P vom Punkt Q' angibt, der zu Q in bezug auf die Kugel konjugiert ist; R bezeichnet den Radius der Kugel. Bezeichnen wir mit x, y, z und ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes P bzw. Q , so haben wir

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{R^2\xi}{\varrho^2}\right)^2 + \left(y - \frac{R^2\eta}{\varrho^2}\right)^2 + \left(z - \frac{R^2\zeta}{\varrho^2}\right)^2}.$$

Differenzieren wir (203) beispielsweise nach x und berücksichtigen

$$\frac{|x - \xi|}{r} < 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{x - \frac{R^2 \xi}{\varrho^2}}{r_1} \right| \leq 1,$$

so erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial G(P; Q)}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{R}{\varrho r_1^2} \right).$$

Da für alle Punkte P , die sich im Innern der Kugel befinden, $r_1 > r$ und $\frac{R}{\varrho r_1} < \frac{1}{r}$ ist, ergibt sich

$$\left| \frac{\partial G(P; Q)}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{2\pi r^2}. \quad (204)$$

Entsprechende Abschätzungen erhält man auch für die anderen partiellen Ableitungen.

Es sei $u(M)$ die Lösung des inneren Dirichletschen Problems mit den Randwerten $f(N)$ für den durch die Fläche S begrenzten Bereich D_i . Falls $u(M)$ eine reguläre Normalableitung besitzt, können wir auf D_i die Formel (91) mit $v = g(P; Q)$ anwenden. Hierbei erhalten wir (vgl. [II, 208])

$$u(Q) = - \int_S \int f(N) \frac{\partial G(N; Q)}{\partial n} dS_N. \quad (205)$$

A. M. LIAPOUNOFF hat bewiesen, daß diese Darstellung die Lösung des Dirichletschen Problems für jede beliebige stetige Randfunktion $f(N)$ liefert. Von ihm stammt auch der erste strenge Beweis für die Symmetrie der Greenschen Funktion. Diese Resultate sowie die Resultate, die sich auf die Potentialtheorie beziehen und auf die wir bereits eingegangen sind, findet man in der bereits zitierten Arbeit von A. M. LIAPOUNOFF, Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (1898).

124. Die Greensche Funktion für ebene Bereiche. Die Untersuchung der Greenschen Funktion für ebene Bereiche besitzt im Vergleich zum räumlichen Fall einige Besonderheiten. Wir betrachten die Greensche Funktion für einen beschränkten Bereich B_i mit der Randkurve l und der Randbedingung (189) auf l .

Wie in [123] definieren wir in der Ebene eine Funktion $v(P)$ durch

$$v(P) = \begin{cases} g(P; Q) & \text{innerhalb von } l. \\ -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} & \text{außerhalb von } l. \end{cases} \quad (206)$$

Wie in [123] bilden wir das Potential einer einfachen Schicht,

$$v_1(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds, \quad (207)$$

wobei r' die Entfernung des Punktes P von dem veränderlichen Punkt N auf l darstellt, mit den Randwerten der Normalableitung für den Bereich B_a , der im Äußeren von l liegt:

$$f(N) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \lg \frac{1}{r} \Big|_l = -\frac{\cos(\mathbf{r}'', \mathbf{n})}{2\pi r''}. \quad (208)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{r}''$ den Vektor $\overline{QN}$ und $\mathbf{n}$ den Einheitsvektor der äußeren Normale von l . Jetzt bilden wir die in B_a harmonische Funktion

$$w(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds + \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} \quad (r = |PQ|, Q \text{ innerhalb von } l), \quad (209)$$

welche auf l eine reguläre Normalableitung besitzt, die gleich 0 ist. Wir führen im Innern von B_a eine beliebige geschlossene, die Kurve l umschließende Randkurve l' ein und wenden die Greensche Formel für $u = w(P)$ und $v = 1$ auf den Bereich an, der durch l und durch l' begrenzt wird. Es gilt

$$\int_l \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds - \int_{l'} \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds = 0,$$

wobei n in beiden Fällen die äußere Normale in bezug auf die geschlossene Randkurve darstellt. Hieraus folgt wegen $\frac{\partial w(P)}{\partial n} = 0$ auf l

$$\int_{l'} \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds = 0. \quad (210)$$

Es gilt

$$\frac{\partial w(P)}{\partial n} = \int_l \mu(s) \frac{\cos(\mathbf{r}', \mathbf{n})}{r'} ds + \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{2\pi r},$$

wenn $\mathbf{r}'$ den Vektor $\overline{PN}$ bezeichnet. Integrieren wir über l' , ändern die Integrationsfolge [IV/1, 16] und berücksichtigen, daß sich die Punkte P und N im Innern von l' befinden, so erhalten wir wegen (210)

$$2\pi \int_l \mu(s) ds + 1 = 0.$$

Jetzt können wir (209) in der Gestalt

$$w(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{r}{r'} ds \quad (r = |QP|, r' = |NP|) \quad (211)$$

darstellen. Rückt der Punkt P ins Unendliche, so strebt der Quotient $\frac{r}{r'}$ gleichmäßig gegen 1, d. h., bei beliebig vorgegebenem positivem ε existiert eine positive Zahl M derart, daß $\left|1 - \frac{r}{r'}\right| \leq \varepsilon$ gilt bei beliebiger Lage von N auf l , wenn nur $r > M$ ist. Somit hat die in B_a harmonische Funktion (211) auf l eine reguläre Normalableitung, die gleich 0 ist, und sie strebt gegen 0, wenn P ins Unendliche rückt. Auf eine solche Funktion ist die Formel

$$\iint_{B_a} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dS = \int_{l'} w \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_a ds$$

anwendbar, aus der $w(P) = 0$ in B_a und damit

$$\int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds = -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} \quad \text{in } B_a$$

folgt. Hieraus ergibt sich wie in [123] unmittelbar, daß das Potential (207) der einfachen Schicht mit der Funktion $v(P)$, die durch die Gleichung (206) definiert ist, in der ganzen Ebene identisch ist und daß $g(P; Q)$ auf l eine reguläre Normalableitung besitzt. Weiterhin folgt wie in [123], daß $g(P; Q)$ in B_l stetige Ableitungen erster Ordnung bis einschließlich l besitzt. Der Beweis der Symmetrie von $G(P; Q)$ läßt sich genau wie in [123] führen. Für den Kreis mit dem Radius R hat die Greensche Funktion die Gestalt

$$G(P; Q) = \frac{1}{2\pi} \lg \frac{qr_1}{Rr} \quad (212)$$

mit denselben Bezeichnungen wie in [123]. Dies führt zu den Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial G(P; Q)}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{\pi r}, \quad \left| \frac{\partial G(P; Q)}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{\pi r}. \quad (213)$$

Die Lösung des Dirichletschen Problems wird in B_l durch einen Ausdruck dargestellt, der (205) entspricht.

Die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators für einen ebenen einfach zusammenhängenden Bereich und die Randbedingung (189) hängt eng mit der Funktion zusammen, welche den Bereich konform auf den Kreis $|w| \leq 1$ abbildet [III/2, 37]. Es sei B ein einfach zusammenhängender Bereich mit der Randkurve l und $z = \xi + \eta i$ ein innerer Punkt dieses Bereiches. Weiterhin sei $w = f(z)$ eine Funktion, welche den Bereich B konform auf den Einheitskreis abbildet und die Bedingung $f(z_0) = 0$ erfüllt, d. h. der Punkt $z = z_0$ geht in den Mittelpunkt des Kreises über. Bei sehr allgemeinen Annahmen über l ist $f(z)$ im abgeschlossenen Gebiet $\bar{B}$ stetig und bildet l eineindeutig auf $|w| \leq 1$ ab. Da die Abbildung schlicht ist, besitzt die Funktion $f(z)$ im Punkt $z = z_0$ eine einfache Nullstelle,

$$f(z) = (z - z_0) [a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots] \quad (a_0 \neq 0). \quad (214)$$

Wir bilden die Funktion

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg |f(z)|. \quad (215)$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß sie gerade die Greensche Funktion des Bereiches B mit dem Pol (ξ, η) ist. In der Tat stellt $\lg |f(z)|$ den Realteil von $\lg f(z)$ dar und genügt folglich der Laplaceschen Differentialgleichung. Nach (214) ist der Teil der Funktion (215), der im Punkt (ξ, η) gleich ∞ wird, gleich $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{|z - z_0|}$, und schließlich geht die Randkurve l des Bereiches B in die Peripherie des Einheitskreises über, d. h., es ist $|f(z)| = 1$ auf der Randkurve l , so daß die Funktion (215) auf dieser Randkurve verschwindet.

Mit $H(x, y, \xi, \eta)$ bezeichnen wir die zu (215) konjugierte harmonische Funktion. Dann gilt

$$G + iH = -\frac{1}{2\pi} \lg f(z); \quad (216)$$

folglich können wir $f(z)$ durch die Greensche Funktion und die zu ihr konjugierte Funktion ausdrücken:

$$f(z) = e^{-2\pi(G + Hi)}.$$

Die Funktion H ist bis auf einen konstanten Summanden bestimmt. Deshalb erhalten wir auf der rechten Seite der letzten Beziehung einen willkürlichen kon-

stanten Faktor, dessen Betrag gleich 1 ist, was einer beliebigen Drehung des Einheitskreises $|w| \leq 1$ um den Koordinatenursprung entspricht.

Wir setzen voraus, daß die Randkurve l des Bereiches B folgende Eigenschaften besitzt: Der Winkel $\theta(s)$, der von der Tangente an l mit einer beliebigen festen Richtung gebildet wird, erfüllt als Funktion der Bogenlänge s eine Lipschitzbedingung

$$|\theta(s_2) - \theta(s_1)| \leq b|s_2 - s_1|^\beta, \quad (217)$$

wobei b und β positive Konstante bezeichnen. Es läßt sich beweisen, daß dann die Ableitung $f'(z)$ bis einschließlich l stetig ist und daß zwei positive Konstanten m und M existieren, mit denen

$$m \leq |f'(z)| \leq M \quad (218)$$

gilt. Diese Konstanten hängen natürlich von der Wahl des Punktes z_0 ab, der in den Koordinatenursprung der w -Ebene übergeht. Wir legen diesen Punkt z_0 fest und bilden jetzt die allgemeine konforme Abbildung von B auf den Kreis $|w| \leq 1$ unter der Bedingung, daß ein beliebiger Punkt z' , der im Innern von B liegt, in den Koordinatenursprung übergeht. Hierzu muß man die konforme Abbildung $w = f(z)$ ausführen und danach den Kreis $|w| \leq 1$ in sich selbst so abbilden, daß der Punkt $f(z')$ in den Koordinatenursprung übergeht. Da die letztere Abbildung eine gebrochene lineare Transformation ist, erhalten wir schließlich, wenn wir den konstanten Faktor vom Betrag 1 weglassen:

$$-2\pi G(z; z') = \operatorname{Re} \left[\lg \frac{f(z) - f(z')}{1 - \overline{f(z)} f(z')} \right],$$

wobei Re wie immer den Realteil bezeichnet und $G(z; z')$ die Greensche Funktion des Bereiches B mit dem Pol im Punkt z' ist. Differenzieren wir nach x , wobei wir unter x eine beliebige Richtung verstehen können, so erhalten wir

$$-2\pi \frac{\partial G(z; z')}{\partial x} = \operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{f(z) - f(z')} + \frac{\overline{f(z')} f'(z)}{1 - \overline{f(z)} f(z')} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{f'(z) [1 - |f(z')|^2]}{[f(z) - f(z')] [1 - \overline{f(z)} f(z')]} \right]$$

oder, wenn wir den Realteil durch den Betrag ersetzen,

$$2\pi \left| \frac{\partial G(z; z')}{\partial x} \right| \leq \frac{|f'(z)| |1 - |f(z')|^2|}{|f(z) - f(z')| |1 - \overline{f(z)} f(z')|},$$

und aus $|f(z)| < 1$ und $|f(z')| < 1$ folgt

$$2\pi \left| \frac{\partial G(z; z')}{\partial x} \right| < \frac{|f'(z)| |1 - |f(z')|^2|}{|f(z) - f(z')| (1 - |f(z')|)} < \frac{2|f'(z)|}{|f(z) - f(z')|}. \quad (218_1)$$

Es sei $z = \varphi(w)$ die inverse Funktion von $w = f(z)$. Sie ist im Kreis $|w| \leq 1$ erklärt. Aus (218) folgt $|\varphi'(w)| \leq \frac{1}{m}$, und wir erhalten

$$|\varphi(w) - \varphi(w')| = \left| \int_w^{w'} \varphi'(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{m} |w - w'|,$$

wobei die Integration über die geradlinige Verbindungsstrecke durchgeführt werden kann. Die letzte Ungleichung liefert $|f(z) - f(z')| \geq m |z - z'|$; unter Berücksichtigung von (218₁) ergibt sich daraus

$$\left| \frac{\partial G(z; z')}{\partial x} \right| \leq \frac{2M}{2\pi m |z - z'|} = \frac{M}{\pi m r}, \quad (219)$$

wobei r die Entfernung der Punkte z und z' bezeichnet. Somit bekommen wir unter den bezüglich der Randkurve l gemachten Voraussetzungen für die Ableitung der Green-

schen Funktion nach einer beliebigen Richtung eine Abschätzung, die nur von der Entfernung r abhängt.

Ist der Bereich B mehrfach zusammenhängend und erfüllt jede der Randkurven die angegebene Bedingung, so kann man auch in diesem Fall eine Abschätzung der Gestalt (219) erhalten. Den dargestellten Beweis der Abschätzung (219) sowie den Beweis für mehrfach zusammenhängende Bereiche, den ich hier nicht angebe, teilte mir G. M. GOLUSIN mit.

125. Beispiele. Wir wollen nun spezielle Greensche Funktionen konstruieren und beginnen mit der Konstruktion der Greenschen Funktion für den Kreisbereich $|z| \leq 1$. Wir haben früher eine Funktion aufgestellt, die diesen Kreisbereich in sich selbst abbildet derart, daß ein im Kreisbereich liegender Punkt $\alpha = \xi + \eta i$ in den Koordinatenursprung übergeht. Diese Funktion läßt sich in der Gestalt

$$w = \frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \alpha'}$$

darstellen [III/2, 33], wobei $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Zahl und α' der Punkt ist, der zu α in bezug auf die Kreislänge konjugiert liegt, d. h., es ist $\alpha' = \bar{\alpha}^{-1}$. Bezeichnen wir mit r_1 und r_2 die Entfernung des veränderlichen Punktes z von den Punkten α bzw. α' , so erhalten wir unmittelbar den Ausdruck

$$G(z; \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \lg \left| \frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \alpha'} \right| = -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi} \lg \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

für die Greensche Funktion des Kreises.

Wir setzen nun voraus, der Bereich B sei ein Rechteck mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, a)$, (a, b) und $(0, b)$. Wir setzen $\omega_1 = 2a$ und $\omega_2 = 2bi$ und bilden die Weierstraßsche Funktion $\sigma(z; \omega_1, \omega_2)$. Wie wir wissen [III/2, 189], hat die Funktion, die unser Rechteck auf den Einheitskreis so abbildet, daß der Punkt $z = \xi + \eta i$ in den Koordinatenursprung übergeht, die Gestalt

$$f(z) = e^{i\psi} \frac{\sigma(z - \xi - \eta i) \sigma(z + \xi + \eta i)}{\sigma(z - \xi + \eta i) \sigma(z + \xi - \eta i)}.$$

Somit erhalten wir den Ausdruck

$$G(z; \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \lg \left| \frac{\sigma(z - \xi - \eta i) \sigma(z + \xi + \eta i)}{\sigma(z - \xi + \eta i) \sigma(z + \xi - \eta i)} \right|$$

für die Greensche Funktion des Rechtecks.

Die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen läßt sich auch bei der Konstruktion der Greenschen Funktion für einen mehrfach zusammenhängenden Bereich anwenden, wobei wir uns wie oben auf die Randbedingung (189) längs l beschränken. Es sei B beispielsweise ein zweifach zusammenhängender Bereich, der durch die äußere Randkurve l_1 und die innere Randkurve l_2 begrenzt wird, und es sei $G(z; \alpha)$ die Greensche Funktion dieses Bereiches. Wir bilden die zu $G(z; \alpha)$ konjugierte harmonische Funktion $H(z; \alpha)$ und die Funktion einer komplexen Veränderlichen $\varphi(z) = G(z; \alpha) + H(z; \alpha)i$. Im Punkt $z = \alpha$, dem Pol der Greenschen Funktion, hat $\varphi(z)$ eine logarithmische Singularität, und zwar läßt sich die Funktion $\varphi(z)$ in der Umgebung dieses Punktes als

Summe aus $-\frac{1}{2\pi} \lg(z - \alpha)$ und einem Summanden darstellen, der in diesem Punkt regulär

ist. Außerdem ändert sich $\varphi(z)$ beim Umlauf um eine geschlossene Kurve, die l_2 einschließt, um einen imaginären Summanden γi , und die Funktion $f(z) = e^{-2\pi\varphi(z)}$ ändert sich um den Faktor $e^{2\pi\gamma i}$, der dem Betrag nach gleich 1 ist. Weiterhin hat die letztere Funktion im Punkt $z = \alpha$ eine einfache Nullstelle, und auf den Randkurven l_1 und l_2 ist ihr Betrag gleich 1, da die Greensche Funktion $G(z; \alpha)$ auf diesen Kurven verschwindet. Somit reduziert sich die Konstruktion der Greenschen Funktion auf die Ermittlung einer

analytischen Funktion $f(z)$, die im Innern des mehrfach zusammenhängenden Bereiches B einen eindeutigen Betrag besitzt, auf den Randkurven des Bereiches gleich 1 ist und im Punkt $z = \alpha$ eine einzige einfache Nullstelle besitzt.

Als Beispiel betrachten wir einen Ring, der durch zwei konzentrische Kreislinien begrenzt ist. Wir wählen den Mittelpunkt dieser Kreise als Koordinatenursprung und nehmen an, der Radius dieser Kreise sei gleich $h^{-1/2}$ bzw. $h^{1/2}$ mit $0 < h < 1$. Dies kann man stets mit Hilfe einer passend gewählten Ähnlichkeitstransformation erreichen. Wir führen an Stelle von z durch $z = e^{i\pi v}$ eine neue Veränderliche v ein und betrachten neben h die imaginäre Zahl $\tau = ci$ ($c > 0$), die durch $h = e^{\pi\tau i}$ definiert ist. Dem Ring entspricht in der v -Ebene der Teil des Streifens zwischen den zu der reellen Achse

parallelen Geraden $y = \pm \frac{c}{2}$, der durch zwei Geraden begrenzt wird, die parallel zur imaginären Achse verlaufen und deren Abstand voneinander gleich 2 ist.

Die Funktion $f(z)$ muß als Funktion von v im ganzen Streifen analytisch sein. Der Übergang von v zu $v + 2$ entspricht im Ring einem Umlauf um den Koordinatenursprung; hierbei muß die Funktion $f(z)$ sich um einen Faktor ändern, dessen Betrag gleich 1 ist. Auf den Randlinien $y = \pm \frac{c}{2}$ des Streifens muß die Bedingung $|f(z)| = 1$ erfüllt sein, und ist $z = \alpha$ der Pol der Greenschen Funktion in der z -Ebene, so muß die Funktion $f(z)$ als Funktion von v einfache Nullstellen in den Punkten β besitzen, die durch $\alpha = e^{\pi\beta i}$ bestimmt sind. Diese Punkte stellen sämtliche Nullstellen von $f(z)$ im Innern des Streifens dar. Wir können α als reelle positive Zahl annehmen. Dies kann man stets durch eine einfache Drehung des Ringes um den Koordinatenursprung erreichen. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die Funktion

$$f(z) = z^{\frac{\lg \alpha}{\lg h}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi\beta}{\tau} v i} \frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$$

allen angegebenen Bedingungen genügt. Dabei sind $\vartheta_0(v)$ und $\vartheta_1(v)$ Funktionen, die wir in [III/2, 177] definiert haben, und β ist die (rein) imaginäre Lösung der Gleichung $\alpha = e^{\pi\beta i}$. Für den Nachweis aller Eigenschaften der Funktion $f(z)$ müssen wir die Tabellen (109) und (110) aus [III/2, 178] benutzen und die Tatsache berücksichtigen, daß die Funktionen $\vartheta_k(v)$ für reelle h und konjugiert komplexe Werte von v konjugiert komplexe Werte besitzen. Mit Hilfe der Funktion $f(z)$ ergibt sich die Greensche Funktion in der Form

$$G(z; \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \lg |f(z)|.$$

126. Die Greensche Funktion und die inhomogene Differentialgleichung. Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung

$$\Delta u(P) = -\varphi(P) \quad (220)$$

im Bereich D_i , der durch die Fläche S begrenzt wird. Wir nehmen an, daß $\varphi(P)$ in D_i bis einschließlich S stetig ist und im Innern von D_i stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Gesucht ist diejenige Lösung von (220), die bis einschließlich S stetig ist und der Randbedingung

$$u|_S = 0 \quad (221)$$

genügt. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar daraus, daß die Differenz zweier Lösungen der Differentialgleichung (220) unter der Bedingung (221) die Laplacesche Differentialgleichung und die Randbedingung (221) erfüllt und damit

identisch gleich 0 sein muß. Wir zeigen, daß *die gesuchte Lösung die Gestalt*

$$u(P) = \iint_{D_i} G(P; Q) \varphi(Q) d\tau_Q \quad (222)$$

oder

$$u(x, y, z) = \iiint_{D_i} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (223)$$

besitzt.

Wegen (192) können wir

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{D_i} \varphi(Q) \frac{1}{r} d\tau + \iint_{D_i} g(P; Q) \varphi(Q) d\tau \quad (224)$$

schreiben. Der erste Summand hat im Innern von D_i stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und der Laplacesche Differentialausdruck ist gleich $-\varphi(P)$ [II, 211]. Wir zeigen, daß der zweite Summand beliebig oft unter dem Integralzeichen nach den Koordinaten x, y, z des Punktes P differenziert werden kann. Hieraus folgt dann, daß er eine im Innern von D_i harmonische Funktion ist; denn $g(P; Q)$ ist eine harmonische Funktion von P . Zunächst machen wir noch eine Bemerkung. Es mögen die Randwerte $f(N; a)$ einer harmonischen Funktion u von einem Parameter a abhängen. Dann hängt auch die harmonische Funktion $u(P; a)$ von a ab. Strebt für $a \rightarrow a_0$ die Funktion $f(N; a)$ gleichmäßig auf S gegen $f(N; a_0)$, so strebt $u(P; a)$ ebenfalls gleichmäßig im abgeschlossenen Bereich D_i gegen $u(P; a_0)$ [103].

Wegen $g(P, Q) = g(Q, P)$ ist die Funktion $g(P, Q)$ eine harmonische Funktion des Punktes $Q(\xi, \eta, \zeta)$ mit den Randwerten $-\frac{1}{4\pi r^0}$, wobei

$$r^0 = \sqrt{(x - \xi^0)^2 + (y - \eta^0)^2 + (z - \zeta^0)^2}$$

und $Q^0(\xi^0, \eta^0, \zeta^0) \in S$ ist [122]. Wir nehmen an, daß sich P im Innern von D_i befindet.

Die Funktion

$$\frac{g(x + \Delta x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - g(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\Delta x} \quad (225)$$

ist eine harmonische Funktion des Punktes (ξ, η, ζ) mit den Randwerten

$$-\frac{1}{4\pi \Delta x} \left[\frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x - \xi^0)^2 + (y - \eta^0)^2 + (z - \zeta^0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \xi^0)^2 + (y - \eta^0)^2 + (z - \zeta^0)^2}} \right].$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ konvergieren diese Randwerte gleichmäßig auf S gegen

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^0} \right), \quad (226)$$

und hieraus folgt unmittelbar, daß der Ausdruck (225) gleichmäßig in bezug auf $(\xi, \eta, \zeta) \in \bar{D}_i$ gegen eine harmonische Funktion des Punktes (ξ, η, ζ) mit den Randwerten (226) konvergiert. Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für die anderen Ableitungen jeder beliebigen Ordnung durchführen. Somit hat die Funktion $g(P, Q)$ stetige Ableitungen aller Ordnungen nach den Koordinaten des Punktes P , wenn $P \in D_i$ und $Q \in \bar{D}_i$ gilt. Hieraus folgt unmittelbar, daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (224) unter dem Integralzeichen nach x, y und z differenziert werden kann.

Es bleibt zu beweisen, daß die durch (222) definierte Funktion $u(M)$ die Rand-

bedingung (221) erfüllt. Im Grunde folgt dies aus der Tatsache, daß $G(P; Q)$ als Funktion von P dieser Bedingung genügt. Eine Unzulänglichkeit dieser Überlegung besteht jedoch darin, daß der Punkt Q bei der Integration der Fläche S beliebig nahek kommt und der Punkt P andererseits beim Nachweis der Bedingung (221) gegen S streben muß. Hierfür ist das Verhalten der Funktion $G(P; Q)$ noch nicht geklärt.

Wir wollen nun streng beweisen, daß die Funktion (222) der Bedingung (221) genügt. Es sei D'_i der Teilbereich von D_i , der außerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 (N_0 auf S) und dem Radius d_1 liegt, und D''_i der Teilbereich von D_i , der sich im Innern dieser Kugel befindet. Ist eine positive Zahl ε vorgegeben, so können wir unter Berücksichtigung der Abschätzung (196) die Größe d_1 so klein wählen, daß das in (222) vorkommende Integral über D'_i dem absoluten Betrag nach bei beliebiger Lage des Punktes P im Innern der angegebenen Kugel kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.

Bei der Integration über D'_i liegt der Punkt Q in D'_i , und vom Punkt P nehmen wir an, daß er sich in einer engen Umgebung des Punktes N_0 , beispielsweise im Innern der Kugel mit dem Mittelpunkt N_0 und dem Radius $\frac{d_1}{2}$, befindet. Dann ist die Entfernung $|PQ|$ größer als $\frac{d_1}{2}$, und aus [122] folgt, daß $G(P; Q)$ eine stetige Funktion der Punkte P und Q ist.

Somit können wir im Integral über D'_i den Grenzübergang $P \rightarrow N_0$ vollziehen. Der Grenzwert ist aber gleich 0, da $G(P; Q)$ die Bedingung (221) erfüllt. Somit ist das Integral über D'_i dem absoluten Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, wenn P hinreichend nahe an N_0 liegt; folglich ist das Integral, welches in (222) vorkommt, dem absoluten Betrag nach kleiner als ε , wenn P hinreichend nahe an N_0 liegt. Da ε willkürlich ist, folgt hieraus schließlich, daß dieses Integral die Bedingung (221) erfüllt. Somit ist unsere Behauptung, daß der Ausdruck (222) diejenige Lösung der Differentialgleichung (220) liefert, die der Randbedingung (221) genügt, bewiesen.

Bemerkung 1. Beim Beweis, daß das räumliche Potential stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und die Poissonsche Formel gilt, braucht man nur voraussetzen, daß die Dichte in D_i einer Lipschitzbedingung genügt (vgl. beispielsweise N. M. GÜNTHER, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung ...). Somit ist unsere Behauptung, daß der Ausdruck (222) die Lösung des Problems (220), (221) liefert, richtig, wenn $\varphi(P)$ einer Lipschitzbedingung

$$|\varphi(P_2) - \varphi(P_1)| \leq br_{1,2}^\beta \quad (r_{1,2} = |P_1 P_2|) \quad (227)$$

genügt. Ist $\varphi(P)$ im abgeschlossenen Bereich D_i nur stetig, so können wir nicht mehr beweisen, daß der erste Summand auf der rechten Seite von (224) stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Differentialgleichung (220) genügt. Es bleibt aber der Beweis in Kraft, daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (224) eine im Innern von D_i harmonische Funktion darstellt und daß die durch (222) definierte Funktion $u(M)$ die Bedingung (221) erfüllt.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das räumliche Potential mit stetiger Dichte eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (220) ist [62], ergibt sich, daß der Ausdruck (222) mit einer im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_i$ stetigen Funktion $\varphi(P)$ eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (220) liefert, die der Bedingung (221) genügt.

Wir zeigen, daß es nur eine einzige derartige Lösung gibt. Angenommen, es würden zwei stetige verallgemeinerte Lösungen $u_1(M)$ und $u_2(M)$ der Differentialgleichung (220) existieren, die der Bedingung (221) genügen, d. h., es gilt

$$\iiint_{D_i} u_1 \Delta \sigma \, d\tau = - \iiint_{D_i} \varphi \sigma \, d\tau, \quad \iiint_{D_i} u_2 \Delta \sigma \, d\tau = - \iiint_{D_i} \varphi \sigma \, d\tau,$$

wobei σ eine beliebige Funktion mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in D_i darstellt, die in allen Punkten, die S hinreichend nahe kommen, gleich 0 ist. Durch Subtraktion erhalten wir

$$\iiint_{D_i} (u_2 - u_1) \Delta \sigma \, d\tau = 0,$$

woraus folgt, daß die Differenz $u_2 - u_1$ eine im Innern von D_i harmonische Funktion ist [62]. Da diese bis einschließlich S stetig und auf S gleich 0 ist, ist u_2 in D_i mit u_1 identisch.

Somit liefert der Ausdruck (222) für jede beliebige stetige Funktion $\varphi(P)$ die einzige verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (220), die der Bedingung (221) genügt. Diese Lösung hat in D_i stetige Ableitungen erster Ordnung [II, 210].

Bemerkung 2. Wir setzen voraus, daß uns eine Funktion $u(P)$ vorgegeben ist, die im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetig ist, die Bedingung (221) erfüllt und im Innern von D_i stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt derart, daß der Laplacesche Differentialausdruck $\Delta u(P)$ bis einschließlich S stetig ist. Setzen wir diese Funktion in die linke Seite der Differentialgleichung (220) ein, so erhalten wir eine Funktion $\varphi(P)$, die im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetig ist. Die Funktion $u(P)$ ist offenbar sowohl die gewöhnliche als auch die verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (220), die der Bedingung (221) genügt; deshalb muß sich diese Funktion mit Hilfe von (222) durch $\varphi(P)$ ausdrücken lassen.

Alles dies läßt sich auf den zweidimensionalen Fall übertragen, in dem die Differentialgleichung (220) die Gestalt

$$\Delta u(x, y) = -\varphi(x, y) \quad (228)$$

besitzt. Ihre Lösung in einem Bereich B mit der Randkurve l , die der Randbedingung

$$u|_l = 0 \quad (229)$$

genügt, wird durch

$$u(x, y) = \iint_B G(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad (230)$$

dargestellt.

127. Eigenwerte und Eigenfunktionen. Die bewiesene Grundeigenschaft der Greenschen Funktion in bezug auf die inhomogene Differentialgleichung (220) ermöglicht es, die Greensche Funktion zur Lösung des Randwertproblems für die Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda v \quad (\text{im Innern von } D_i) \quad (231)$$

mit der Randbedingung

$$v|_S = 0 \quad (232)$$

heranzuziehen. Das Problem (231), (232) tritt bei der Lösung von Randwertproblemen für die Wellengleichung und die Wärmeleitungsgleichung auf, womit wir uns noch eingehend beschäftigen werden.

Bringen wir λv auf die rechte Seite, so können wir wie in [75] beweisen, daß das Problem (231), (232) der Integralgleichung

$$v(P) = \lambda \iiint_{D_i} G(P; Q) v(Q) d\tau \quad (233)$$

mit symmetrischem Kern gleichwertig ist. Der Kern dieser Integralgleichung wird für $P \rightarrow Q$ unendlich groß, aber es läßt sich auf ihn die gesamte Theorie aus [IV/1, 17] anwenden; denn wegen (192) hat der Kern eine Polarität der Ordnung $\frac{1}{r}$,

$$G(P; Q) = \frac{K(P; Q)}{r}, \quad (234)$$

wobei $K(P; Q)$ eine stetige Funktion ist.

Wir schreiben die Integralgleichung (233) in der Gestalt

$$v(P) = \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{D_i} v(Q) \frac{1}{r} d\tau + \lambda \iiint_{D_i} g(P; Q) v(Q) d\tau \quad (r = |PQ|). \quad (235)$$

Ist $v(P)$ eine stetige Lösung dieser Integralgleichung, so hat der erste Summand auf der rechten Seite als Potential einer Masse, die in D_i mit stetiger Dichte verteilt ist, im Innern von D_i stetige Ableitungen erster Ordnung. Der zweite Summand auf der rechten Seite hat im Innern von D_i , wie wir gesehen haben, stetige Ableitungen jeder beliebigen Ordnung, folglich hat $v(P)$ im Innern von D_i stetige Ableitungen erster Ordnung. Dann hat aber der erste Summand auf der rechten Seite nach [II, 211] im Innern stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Deshalb hat auch $v(P)$ auf Grund der vorhergehenden Ausführungen stetige Ableitungen zweiter Ordnung. Durch Anwendung der Poissonschen Formel erhalten wir wegen (235) im Innern von D_i die Differentialgleichung $\Delta v = -\lambda v$. Die Randbedingung (232) erhält man in derselben Weise wie in [126]. Umgekehrt erhalten wir aus (231) und (232), wie wir in [126] gesehen haben, unmittelbar (233). Somit haben wir bewiesen, daß die Differentialgleichung (231) mit der Randbedingung (232) der Integralgleichung (233) gleichwertig ist. Für den Kern dieser Integralgleichung gilt (234), woraus unmittelbar die Ungleichung

$$\iiint_{D_i} G^2(P; Q) d\tau \leq C \quad (236)$$

folgt, in der C eine Konstante bezeichnet.

Es mögen λ_k die Eigenwerte und $v_k(P)$ die Eigenfunktionen der Integralgleichung (233) oder, was dasselbe ist, des Problems (231), (232) sein,

$$\Delta v_k + \lambda_k v_k = 0 \quad (\text{im Innern von } D_i) \quad (237_1)$$

$$v_k|_S = 0. \quad (237_2)$$

Man kann annehmen, daß die Funktionen $v_k(P)$ in D_i ein normiertes Orthogonalsystem bilden,

$$\iiint_{D_i} v_l(P) v_m(P) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq m, \\ 1 & \text{für } l = m. \end{cases} \quad (238)$$

Die Funktion $\omega(P)$ möge nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in D_i bis einschließlich S stetig sein und die Bedingung (232) erfüllen. Man kann sie auch in der Gestalt

$$\omega(P) = - \iiint_{D_i} G(P; Q) \Delta \omega(Q) d\tau \quad (239)$$

darstellen [IV/1, 31]. Wenden wir den Entwicklungssatz aus [126] an, so finden wir, daß sich $\omega(P)$ in eine Fourierreihe nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt,

$$\omega(P) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(P), \quad (240)$$

die im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ regulär konvergiert. Die Koeffizienten lassen sich in der üblichen Weise bestimmen:

$$c_k = \iiint_{D_i} \omega(P) v_k(P) d\tau. \quad (241)$$

Somit erhalten wir den

Satz. Jede Funktion $\omega(P)$, die nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetig ist und die Bedingung (232) erfüllt, läßt sich in eine Fourierreihe nach den Eigenfunktionen $v_k(P)$ entwickeln, die im abgeschlossenen Bereich D_i regulär konvergiert.

Weiterhin zeigen wir, daß die Anzahl der Eigenwerte λ_k unendlich ist. Dies haben wir bereits in der Schreibweise (240) benutzt. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (240) folgt, daß die Vollständigkeitsrelation

$$\iiint_{D_i} \omega^2(P) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad (242)$$

gilt, falls $\omega(P)$ die im Satz angegebenen Bedingungen erfüllt. Im folgenden beweisen wir, daß diese Relation für jede im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetige Funktion richtig ist. Konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P) \quad (243)$$

einer im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetigen Funktion $\omega_1(P)$ gleichmäßig in $\overline{D_i}$, so läßt sich leicht zeigen, daß die Summe dieser Reihe gleich $\omega_1(P)$ ist. Wir bezeichnen mit $\omega_2(P)$ die Summe von (243) und betrachten die Funktion $\omega_2(P) - \omega_1(P)$, die in $\overline{D_i}$ stetig und zu allen Eigenfunktionen $v_k(P)$ orthogonal ist. Deshalb ist sie auch zum Kern orthogonal, d. h., es gilt

$$\iiint_{D_i} G(P; Q) [\omega_2(Q) - \omega_1(Q)] d\tau = 0 \quad (P \text{ in } \overline{D_i}).$$

Hieraus ergibt sich, daß die verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u(P) = \omega_1(P) - \omega_2(P)$$

unter der Bedingung (232) gerade die Funktion $u(P) \equiv 0$ ist; folglich ist $\omega_2(P)$ mit $\omega_1(P)$ identisch.

Aus diesen Überlegungen folgt unmittelbar, daß der Kern $G(P; Q)$ abgeschlossen ist (vgl. [77]); deshalb hat er unendlich viele Eigenwerte λ_k [VI/1, 42]. Jetzt zeigen

wir, daß die Vollständigkeitsrelation (242) für jede in $\bar{D}_i$ stetige Funktion $\omega(P)$ gilt. Eine derartige Funktion ist gewiß beschränkt, d. h., es existiert eine positive Zahl M derart, daß $|\omega(P)| \leq M$ ist. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wir wählen einen abgeschlossenen Bereich D'_i , der im Innern von D_i liegt derart, daß das Volumen von $D_i - D'_i$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{32M^2}$ ist. Weiterhin wählen wir im Innern von $D_i - D'_i$ eine geschlossene Fläche S' , innerhalb der D'_i liegt, und bestimmen eine Funktion $\varphi(P)$, die im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}'_i$ gleich $\omega(P)$ und auf S' und im Äußeren von S' gleich 0 ist. Diese Funktion läßt sich auf den ganzen Raum so fortsetzen, daß sie stetig ist und die Ungleichung $|\varphi(P)| \leq M$ erfüllt [59]. Es seien $\varphi_n(P)$ die Mittelfunktionen von $\varphi(P)$. Sie haben Ableitungen jeder Ordnung für alle hinreichend großen Werte von n , sind auf der Fläche S gleich 0 und genügen der Ungleichung $|\varphi_n(P)| \leq M$. Die Funktionen $\varphi_n(P)$ konvergieren in $\bar{D}'_i$ gleichmäßig gegen $\omega(P)$, und wir können eine Zahl n so festlegen, daß

$$\iint_{D'_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Für die Funktionen $\varphi_n(P)$ gilt auf Grund der obigen Ausführungen die Vollständigkeitsrelation, d. h., es existiert eine Zahl N , so daß

$$\iint_{D_i} [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]^2 d\tau \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{für } m \geq N$$

gilt, wobei $s_m(\varphi_n)$ ein Abschnitt der Fourierreihe der Funktion $\varphi_n(P)$ ist. Unter Berücksichtigung der Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ können wir

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} [\omega(P) - s_m(\varphi_n)]^2 d\tau &= \iint_{D_i} \{[\omega(P) - \varphi_n(P)] + [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]\}^2 d\tau \\ &\leq 2 \iint_{D_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau + 2 \iint_{D_i} [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]^2 d\tau \\ &\leq 2 \iint_{D_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

schreiben. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau &= 2 \iint_{D_i - D'_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau + 2 \iint_{D'_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau \\ &\leq 2 \iint_{D_i - D'_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Für das letzte Integral benutzen wir die Ungleichung $|\omega(P) - \varphi_n(P)|^2 \leq 4M^2$ und erhalten

$$2 \iint_{D_i - D'_i} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 d\tau \leq 8M^2 \cdot \text{Volumen von } (D_i - D'_i) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daher ergibt sich die Ungleichung

$$\iint_{D_i} [\omega(P) - s_m(\varphi_n)]^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } m \geq N$$

und damit erst recht [IV/1, 3]

$$\iint_{D_t} [\omega(P) - s_m(\omega)]^2 d\tau < \varepsilon \quad \text{für } m \cong N,$$

woraus, da ε willkürlich ist, schließlich die Vollständigkeitsrelation für $\omega(P)$ folgt.

Bemerkung. Aus (236) geht unmittelbar hervor, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$ konvergent ist [IV/1, 3]. Die Vollständigkeitsrelation läßt sich auch leicht für nichtbeschränkte Funktionen der in [IV/1, 3] eingeführten Art und insbesondere für die Greensche Funktion $G(P; Q)$ beweisen.

128. Die Normalableitung der Eigenfunktionen. Wir wollen nun das für das Folgende wichtige Verhalten der Ableitungen der Funktionen $v_k(P)$ bei Annäherung an S studieren.

Satz. Die Funktionen $v_k(P)$ besitzen auf S eine reguläre Normalableitung.

Wir bilden das Potential einer räumlich verteilten Masse,

$$u(P) = \frac{\lambda_k}{4\pi} \iiint_{D_t} \frac{v_k(Q)}{r} d\tau \quad (r = |PQ|).$$

Es ist im ganzen Raum definiert und stetig und besitzt stetige Ableitungen erster Ordnung, ist im Unendlichen gleich 0 und im Innern von D_a eine harmonische Funktion, besitzt im Innern von D_t stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und genügt schließlich der Differentialgleichung

$$\Delta u = -\lambda_k v_k. \quad (244)$$

Man kann das Potential der einfachen Schicht

$$v(P) = \int_S \frac{\mu(N)}{r} dS$$

bilden, das auf S der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n} \right)_a = \frac{\partial u(N)}{\partial n}$$

genügt, wobei man zu berücksichtigen hat, daß die Funktion $u(P)$ Ableitungen erster Ordnung besitzt, die im ganzen Raum stetig sind. Wir bilden die Funktion

$$w(P) = u(P) - v(P).$$

Sie ist im Innern von D_a harmonisch, im Unendlichen gleich 0 und besitzt auf S eine reguläre Normalableitung von außen, die gleich 0 ist. Auf die Funktion $w(P)$ läßt sich in D_a die Greensche Formel anwenden [102], aus der hervorgeht, daß $w(P) \equiv 0$ ist in D_a und deshalb auch auf S . Im Innern von D_t erfüllt $w(P)$ wegen (244) die Differentialgleichung

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = -\lambda_k v_k,$$

woraus folgt, daß $w(P)$ in D_t mit $v_k(P)$ identisch ist; es gilt also

$$v_k(P) = u(P) - v(P) \quad (P \text{ in } D_t),$$

wobei $u(P)$ und $v(P)$ die oben definierten Funktionen sind. Hieraus folgt unmittelbar der Satz. Wegen dieser Eigenschaft können wir auf die (nicht harmonische) Funk-

tion $v_k(P)$ die Greensche Formel

$$\iiint_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \iint_S v_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial n} \right)_i dS - \iiint_{D_i} v_k \Delta v_k d\tau$$

anwenden. Wenn wir berücksichtigen, daß die Differentialgleichung $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$ sowie die Bedingung (237₂) gilt und die Funktionen $v_k(P)$ normiert sind,

$$\iiint_{D_i} v_k^2(P) d\tau = 1,$$

erhalten wir die Beziehung

$$\lambda_k = \iint_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau, \quad (245)$$

aus der hervorgeht, daß alle λ_k positiv sind. Dieses Resultat kann man auch einfacher herleiten. Es folgt unmittelbar aus dem Satz, daß die Differentialgleichung (231) für $\lambda < 0$ und unter der Bedingung (232) nur die Nulllösung besitzt. Dieser Satz wird in [136] bewiesen werden.

In [143, 149] findet man vollständigere Ergebnisse über die Glattheit der Eigenfunktionen in der Nähe von S .

Im ebenen Fall läßt sich die Existenz einer regulären Normalableitung der Eigenfunktionen durch eine entsprechende Änderung des vorhergehenden Beweises herleiten, in derselben Weise, wie wir dies in [124] beim Beweis der Existenz einer regulären Normalableitung der Greenschen Funktion getan haben.

129. Die Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Die Extremaleigenschaften der Eigenwerte λ_n und der Eigenfunktionen $v_n(P)$ lassen sich ebenso herleiten wie in [88]. Wie wir gesehen haben, sind dies die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung (233) mit symmetrischem Kern, der nach (234) schwach polar ist. Wir nehmen an, daß die (positiven) Eigenwerte λ_n nichtabnehmend angeordnet sind, d. h., daß $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ gilt. Wir wissen, daß λ_1 der kleinste Wert des Integrals

$$\iiint_{D_i} \iiint_{D_i} G(P; Q) \omega(P) \omega(Q) d\tau_P d\tau_Q \quad (246)$$

in der Klasse der stetigen Funktionen $\omega(P)$ ist, die der Bedingung

$$\iiint_{D_i} [\iiint_{D_i} G(P; Q) \omega(Q) d\tau_Q]^2 d\tau_P = 1$$

genügen, und dieser kleinste Wert wird für $\omega(P) = v_1(P)$ angenommen. Die Indizes von $d\tau$ geben an, welcher Punkt die Integrationsveränderliche ist. Die Reihenfolge der Integrationen im Integral (246) ist beliebig (vgl. [IV/1, 16]).

Um die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen zu erhalten, müssen wir noch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\iiint_{D_i} \omega(P) v_k(P) d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

hinzufügen. Führen wir die Klasse A der Funktionen $v(P)$ ein, die sich quellenmäßig darstellen lassen,

$$v(P) = \iiint_{D_i} G(P; Q) \omega(Q) d\tau_Q,$$

wobei $\omega(Q)$ eine beliebige in $\overline{D_i}$ stetige Funktion bezeichnet, so besteht das angegebene Problem darin, das Minimum des Integrals

$$\iiint_{D_i} v(P) \omega(P) d\tau$$

unter der Bedingung

$$\iiint_{D_i} v^2(P) d\tau = 1$$

in der Klasse A der Funktionen $v(P)$ zu ermitteln.

Diese Funktionenklasse ist die Klasse der verallgemeinerten Lösungen der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta v(P) = -\omega(P),$$

die auf S gleich 0 sind, und zwar für beliebige in $\overline{D_i}$ stetige Funktionen $\omega(P)$. Schließlich können wir vom Minimum des Integrals

$$-\iiint_{D_i} v \Delta v d\tau \quad (247)$$

in der Klasse A sprechen, wobei Δv den verallgemeinerten Laplaceschen Differentialausdruck bezeichnet. Die oben angegebenen Orthogonalitätsbedingungen führen wie in [188] zu den Orthogonalitätsbedingungen

$$\iiint_{D_i} v(P) v_k(P) d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (248)$$

für $v(P)$. Die Funktionen $v(P)$ der Klasse A haben im Innern von D_i stetige Ableitungen erster Ordnung. Durch Wiederholung der Überlegungen aus [128] können wir beweisen, daß $v(P)$ auf S eine reguläre Normalableitung besitzt.

Wir definieren jetzt eine Funktionenklasse A_1 , die eine Teilmenge der Klasse A ist; und zwar sei A_1 die Menge aller Funktionen $v(P)$, die folgende Eigenschaften besitzen: Die Funktionen $v(P)$ sind im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetig und auf S gleich 0 und haben im Innern von D_i stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, wobei ihr Laplacescher Differentialausdruck Δv bis einschließlich S stetig ist. Zur Klasse A_1 gehören alle Eigenfunktionen $v_n(P)$. Gehört $v(P)$ zur Klasse A_1 , so ist auf das Integral (247) die Greensche Formel anwendbar, und unter Berücksichtigung von $v(P)=0$ auf S können wir an die Stelle des Integrals (247) das Integral

$$\iiint_{D_i} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) d\tau \quad (249_1)$$

setzen. Somit ergibt sich, daß λ_1 der kleinste Wert dieses Integrals in der Klasse A_1 unter der Bedingung

$$\iiint_{D_i} v^2 d\tau = 1 \quad (249_2)$$

ist und daß dieser kleinste Wert für $v(P) = v_1(P)$ angenommen wird. Um die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen zu erhalten, muß man die Orthogonalitätsbedingungen (248) schrittweise hinzufügen. Man kann zeigen, daß die Greensche Formel

$$\iiint_{D_i} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) d\tau = -\iiint_{D_i} v \Delta v d\tau$$

für eine beliebige Funktion v der Klasse A gilt, wobei Δv der verallgemeinerte Laplacesche Differentialoperator ist.

Somit gelten die angegebenen Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen für die ganze Klasse A . In [150] werden wir zeigen, daß diese Extremaleigenschaften in einer bedeutend umfangreicheren Funktionenklasse Gültigkeit haben. Wir machen darauf aufmerksam, daß beginnend in [143] das Eigenwertproblem in der Form $Lu = \lambda u$, $u|_S = 0$ geschrieben wird und daß die entsprechenden λ , für die $u \neq 0$ gilt, Eigenwerte von L unter der ersten Randbedingung genannt werden.

130. Die Helmholtzsche Gleichung und das Ausstrahlungsprinzip. Wir betrachten jetzt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad (250)$$

und suchen eine Lösung in Gestalt eines stationären sinusförmigen Bewegungszustandes von vorgegebener Frequenz,

$$u = e^{i\omega t} v. \quad (251)$$

Für v erhalten wir die *Helmholtzsche Differentialgleichung*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{a} \right), \quad (252)$$

die mit der Laplaceschen Differentialgleichung Ähnlichkeit besitzt. Zunächst gehen wir auf die Bedingung ein, der die Lösung dieser Differentialgleichung im Unendlichen genügen muß. Wir haben diese Bedingung bereits in [III/2, 155] angegeben und nennen sie das *Ausstrahlungsprinzip*¹⁾. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir diese Bedingung mathematisch exakt formulieren. Es sei im Äußeren einer Fläche S ein stationärer Bewegungszustand gegeben. Wir denken uns eine Kugel S_ϱ mit dem Mittelpunkt M , der sich im Äußeren von S befindet, und genügend großen Radius, so daß S im Innern von S_ϱ liegt, und wenden die Kirchhoffsche Formel [II, 212]

$$u(M; t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S+S_\varrho} \left[\frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - [u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS$$

auf die Lösung (251) an. In dieser Formel ist die Integration über S und S_ϱ zu erstrecken. Für die Lösung (251) erhalten wir

$$[u] = e^{i\omega(t-r/a)} v, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = e^{i\omega(t-r/a)} \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = i\omega e^{i\omega(t-r/a)} v,$$

und für die Integration über S_ϱ ergeben sich die Integrale

$$\iint_{S_\varrho} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) dS + \iint_{S_\varrho} \frac{v}{r^2} e^{-ikr} dS, \quad (253)$$

wobei wir unter dem Integralzeichen $r = \varrho$ zu setzen haben. Man muß natürlich fordern, daß der letztere Ausdruck für $\varrho \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt (dies bedeutet, daß im Unendlichen keine Quelle von Schwingungen vorhanden ist). Das Flächenelement der Kugeloberfläche enthält den Faktor ϱ^2 , und die genannte Forderung ist erfüllt, wenn wir v für $r \rightarrow \infty$ den beiden Forderungen

$$rv \text{ beschränkt} \quad \text{und} \quad r \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) \rightarrow 0$$

¹⁾ Meist Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung genannt. (Anm. d. Red.)

unterwerfen. Dabei sollen diese Bedingungen bei beliebiger Wahl des Koordinatenursprungs für die Radiusvektoren r und gleichmäßig in bezug auf die Richtungen dieser Radiusvektoren erfüllt sein. Im folgenden bezeichnen wir mit $O(r^\alpha)$ eine Größe x , für die der Quotient $\frac{x}{r^\alpha}$ für $r \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt, und mit $o(r^\alpha)$ eine Größe x ,

für die der Quotient $\frac{x}{r^\alpha}$ für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, wobei dies gleichmäßig in bezug auf die Richtung des Radiusvektors r und unabhängig von der Wahl seines Koordinatenursprungs gelten muß. Die obigen Bedingungen lassen sich dann in der Gestalt

$$v = O(r^{-1}), \quad (254)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o(r^{-1}) \quad (255)$$

schreiben.

Diese Bedingungen stellen gerade die mathematische Formulierung des Ausstrahlungsprinzips im dreidimensionalen Fall dar. Die entsprechenden Bedingungen im zweidimensionalen Fall lauten

$$v = O(r^{-1/2}), \quad (256)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o(r^{-1/2}). \quad (257)$$

Die singuläre Grundlösung von (252), die das Ausstrahlungsprinzip erfüllt, lautet im dreidimensionalen Fall

$$v(P) = \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (258)$$

wobei r die Entfernung von einem festen Punkt O bis zum veränderlichen Punkt P angibt. Differenzieren wir die Lösung (258) nach r , so können wir uns davon überzeugen, daß sie einer stärkeren Bedingung genügt als der Bedingung (255), und zwar kann an Stelle von $o(r^{-1})$ rechts $O(r^{-2})$ stehen. Hierbei nehmen wir an, daß in (255) die Entfernung von demselben Punkt O gerechnet wird. Wir verifizieren jetzt die Bedingungen (254) und (255) unter der Annahme, daß die Entfernung von einem anderen Punkt O_1 gerechnet wird, und setzen $\overline{O_1P} = \varrho$. Die Beschränktheit von ϱv folgt unmittelbar aus $\frac{\varrho}{r} \rightarrow 1$. Die Bedingung (255) läßt sich durch einfache Differentiation der Lösung (258) nach ϱ mittels r nachprüfen. Dabei gilt

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \cos \gamma,$$

wenn γ der Winkel zwischen den Richtungen $\overline{OP}$ und $\overline{O_1P}$ ist. Wenden wir die Formel für das Quadrat der Seite OO_1 im Dreieck OO_1P an, so erhalten wir

$$\cos \gamma = 1 + O(r^{-2}). \quad (259)$$

Im ebenen Fall ist die Grundlösung, die das Ausstrahlungsprinzip erfüllt, die Lösung $H_0^{(2)}(kr)$, wobei $H_0^{(2)}(z)$ eine Hankelsche Funktion zweiter Art bezeichnet. Um dies nachzuprüfen, genügt es, den asymptotischen Ausdruck für die Hankelschen Funktionen und die Beziehung

$$\frac{d}{dz} H_0^{(2)}(z) = -H_1^{(2)}(z) \quad (260)$$

zu benutzen. Hierbei ist an Stelle der Bedingung (257) eine stärkere Bedingung erfüllt, und zwar kann anstatt $o(r^{-1/2})$ auf der rechten Seite $O(r^{-3/2})$ stehen. Wir multiplizieren die Lösung $H_0^{(2)}(kr)$ mit einem konstanten Faktor derart, daß die Singularität für $r=0$ gleich $\lg \frac{1}{r}$ ist. Somit erhalten wir die Lösung

$$v = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) . \quad (261)$$

Wie soeben kann man zeigen, daß auch die Lösungen

$$H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi, \quad H_m^{(2)}(kr) \sin m\varphi \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (262)$$

dem Ausstrahlungsprinzip genügen.

131. Der Eindeutigkeitssatz. Mit Hilfe des Ausstrahlungsprinzips läßt sich der Eindeutigkeitssatz beweisen, d. h., *genügt eine Funktion v im Äußeren einer geschlossenen Randkurve l der Differentialgleichung (252), im Unendlichen dem Ausstrahlungsprinzip und auf der Randkurve l einer homogenen Randbedingung, beispielsweise der Bedingung $v|_l = 0$ oder $\frac{\partial v}{\partial n}|_l = 0$, so ist sie identisch gleich 0.*

Zum Beweis wenden wir die Formel

$$\iint_{B_1} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dS = \int_{\partial B_1} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \quad (263)$$

auf einen Bereich B_1 an, der von innen durch die Randkurve l und von außen durch einen Kreis S_r mit dem Mittelpunkt in einem festen Punkt und genügend großem Radius begrenzt wird, und setzen $u_1 = v$ und $u_2 = \bar{v}$, wobei $\bar{v}$ und v konjugiert komplex sind. Wir nehmen an, daß v bis einschließlich l stetig ist und eine reguläre Normalableitung besitzt. Wegen (252) ist das Doppelintegral gleich 0, und wegen der Randbedingung ist das Integral über l ebenfalls gleich 0. Es bleibt das Integral über S_r ; auf dieser Randkurve ist die Richtung von n mit der Richtung von r identisch. Die Bedingung (257) gibt uns die Möglichkeit, mit Hilfe von

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -ikv + o(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = ik\bar{v} + o(r^{-1/2})$$

die Ableitungen zu ersetzen; damit gelangen wir zu der Beziehung

$$2ik \int_{S_r} |v|^2 ds + \int_{S_r} v \cdot o(r^{-1/2}) ds + \int_{S_r} \bar{v} \cdot o(r^{-1/2}) ds = 0 .$$

Da die Produkte $\sqrt{r}v$ und $\sqrt{r}\bar{v}$ für $r \rightarrow \infty$ beschränkt sind, streben die letzten beiden Summanden auf der linken Seite gegen 0. Führen wir auf der Kreislinie S_r den Polarwinkel φ ein, so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} |\sqrt{r}v|^2 d\varphi \rightarrow 0 . \quad (264)$$

Wir wenden nun die Greensche Formel auf die Lösung v und die erste der Lösungen (262) an. Das Doppelintegral fällt wiederum fort, und es bleiben nur die Integrale über l und S_r übrig; daher hängt der Wert des Integrals über S_r nicht von r ab. Beide Lösungen genügen dem Ausstrahlungsprinzip, wobei die Lösung (262) ebenso wie die Lösung $H_0^{(2)}(kr)$ an Stelle der Bedingung (257) eine stärkere Bedingung erfüllt. Unter Benutzung der Bedingung (257) erhalten wir wiederum, daß

das Integral über S_r gegen 0 strebt; da sein Wert nicht von r abhängt, ist es gleich 0, d. h., es gilt

$$H_m^{(2)}(kr) \int_{S_r} \frac{\partial v}{\partial r} \cos m\varphi \, d\varphi - \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} \int_{S_r} v \cos m\varphi \, d\varphi = 0.$$

Setzen wir

$$f_m(r) = \int_{S_r} v \cos m\varphi \, d\varphi,$$

so erhalten wir

$$H_m^{(2)}(kr) f'_m(r) = \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} f_m(r),$$

woraus die Beziehung $f_m(r) = c_m H_m^{(2)}(kr)$ mit konstantem c_m hervorgeht. Ganz analog dazu erhalten wir für

$$g_m(r) = \int_{S_r} v \sin m\varphi \, d\varphi$$

den Ausdruck $g_m(r) = d_m H_m^{(2)}(kr)$, wobei d_m ebenfalls konstant ist. Aus der Vollständigkeitsrelation [IV/1, 3] und der Beziehung (264) folgt, daß bei festem m und $r \rightarrow \infty$

$$c_m \sqrt{r} H_m^{(2)}(kr) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad d_m \sqrt{r} H_m^{(2)}(kr) \rightarrow 0$$

gilt. Aus dem asymptotischen Ausdruck von $H_m^{(2)}(kr)$ folgt, daß $\sqrt{r} H_m^{(2)}(kr)$ dem absoluten Betrag nach für große r größer als eine gewisse positive Zahl bleibt, woraus sich $c_m = d_m = 0$, d. h. $f_m(r) = g_m(r) = 0$ ergibt; hieraus folgt wegen der Vollständigkeitsrelation, daß v auf dem Kreis S_r gleich 0 ist.

Ist l eine Kreislinie, so ergibt sich, wenn wir für S_r Kreise wählen, die zu l konzentrisch liegen, daß v im Äußeren von l identisch 0 ist, was zu beweisen war. Im Fall einer beliebigen Kurve zeigen die vorhergehenden Überlegungen, daß v in der Umgebung des unendlich fernen Punktes verschwindet. Weiter unten werden wir zeigen [132], daß $v(x, y)$ wie bei der Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung eine analytische Funktion sein muß, und auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung folgt, daß v in der Umgebung des unendlich fernen Punktes verschwindet, daß im Äußeren von l überall $v = 0$ ist. Ganz analog dazu läßt sich der Eindeigkeitssatz auch im dreidimensionalen Fall beweisen.

132. Die Prinzipien der Grenzamplitude und der Grenzabsorption. Wie im vorigen Abschnitt läßt sich zeigen, daß durch die Ausstrahlungsbedingung eine im ganzen Raum definierte eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v + k^2 v = -F(P) \quad (k > 0) \quad (264_1)$$

ausgezeichnet wird. Wir setzen $F(P)$ als stetig differenzierbare Funktion eines Punktes P des dreidimensionalen euklidischen Raumes voraus, die im ganzen Raum definiert und außerhalb eines endlichen Bereiches D gleich 0 ist. Dann läßt sich die fragliche Lösung durch den Ausdruck

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{e^{-ikr}}{r} F(Q) \, d\tau_Q \quad (r = |PQ|)$$

bestimmen.

Wir gelangen zu diesem Ausdruck, wenn wir das instationäre Problem der erzwungenen Schwingungen betrachten, die unter der Wirkung einer periodischen Kraft entstehen. Aus der Kirchhoffschen Formel [II, 212] folgt unmittelbar

$$v(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(P, t) e^{-ikt},$$

wobei $u(P, t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta u - u_{tt} = -F(P) e^{ikt}$$

ist, welche verschwindende Anfangswerte hat. Daher sagt man von der Lösung $v(P)$, daß sie die „Grenzamplitude der periodischen Schwingung ist, die für große Werte von t unter der Wirkung einer periodischen Kraft „auftritt“. Dieses Prinzip der Aussonderung von Lösungen der Differentialgleichung (264₁) heißt „Prinzip der Grenzamplitude“.

Ein anderes Prinzip zur Aussonderung von Lösungen der Differentialgleichung (264₁) das sogenannte Prinzip der Grenzabsorption (vgl. W. S. IGNATOWSKY, Ann. d. Phys. 18 (1905)) besteht in folgendem: In der Differentialgleichung (264₁) wird ein komplexer Parameter $-i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), die „Absorption“ eingeführt:

$$\Delta v_\varepsilon + (k^2 - i\varepsilon) v_\varepsilon = -F(P).$$

Wir wählen diejenige (eindeutige) Lösung $v_\varepsilon(P)$, die im Unendlichen gegen 0 konvergiert,

$$v_\varepsilon(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_D \int \frac{e^{-ir(a_\varepsilon - ib_\varepsilon)}}{r} F(Q) d\tau_Q,$$

dabei ist $a_\varepsilon - ib_\varepsilon = \sqrt{k^2 - i\varepsilon}$ ($a_\varepsilon > 0$, $b_\varepsilon > 0$), und es gilt $b_\varepsilon \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Die Grenzfunktion von $v_\varepsilon(P)$ für $\varepsilon \rightarrow +0$ existiert und ist mit der durch (264₂) bestimmten Funktion $v(P)$ identisch. Die in [130] und hier angegebenen drei Prinzipien zur Aussonderung von Lösungen führen in dem von uns betrachteten einfachsten Fall, wie wir gezeigt haben, auf ein und dieselbe Lösung (264₂). Die Vermutung liegt nahe, daß die Prinzipien auch auf allgemeinere Probleme anwendbar sind, wie auf Randwertprobleme bei elliptischen Differentialgleichungen in unbeschränkten Bereichen. Die Anwendbarkeit dieser Prinzipien ist jedoch verschieden. So ist das Ausstrahlungsprinzip in den Fällen anwendbar, in denen die Differentialgleichung (264₁) im ganzen Raum oder in einem Bereich $\mathfrak{E}$ betrachtet wird, der den unendlich fernen Punkt im Innern enthält [131]. Wird dagegen der Bereich $\mathfrak{E}$ etwa durch $0 \leq z \leq 1$ bestimmt, so hat die Differentialgleichung (264₁) für $F(Q) \not\equiv 0$ keine einzige Lösung, die für $z=0$ und $z=1$ gleich 0 ist und der Ausstrahlungsbedingung in der Gestalt (254), (255) genügt. Werden diese Bedingungen jedoch ein wenig abgeändert, so hat das Problem eine einzige Lösung. (Vgl. A. G. SWESCHNIKOW, Das Ausstrahlungsprinzip, Doklady AN SSSR 73 (1950).)

Dieses Beispiel zeigt, daß die „Ausstrahlungsbedingungen“ von der Form des Bereiches $\mathfrak{E}$ im Unendlichen abhängen. Betrachtungen physikalischen Charakters weisen darauf hin, daß auch das Prinzip der Grenzabsorption in der angegebenen Gestalt nicht immer anwendbar ist, wenn sich $\mathfrak{E}$ im Unendlichen hinreichend schnell verengt.

Das Problem der Anwendbarkeit der genannten Prinzipien ist noch nicht vollständig genug untersucht worden. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf Arbeiten von RELICH in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 53 und 57, in denen die Form der „Ausstrahlungsbedingungen“ für die Differentialgleichung (264₁) in nichtbeschränkten Bereichen verschiedener Gestalt diskutiert wird. Ferner verweisen wir auf die Arbeit von A. J. POWSNER, Über die Entwicklung von Funktionen nach den Eigenfunktionen des Operators $-\Delta u + cu$, Matem. sb. 32 (74) (1953), 109 bis 156, in der das Prinzip der Grenzabsorption für die Differentialgleichung

$$\Delta u + q(P) u + k^2 u = -F(P)$$

im dreidimensionalen Raum begründet wird. Schließlich verweisen wir noch auf die Arbeit von O. A. LADYSHENSKAJA, Über das Prinzip der Grenzamplitude, Uspechi

matem. nauk 12: 3 (75) (1957). Sie beschäftigt sich mit dem Prinzip der Grenzamplitude für die oben angegebene Differentialgleichung. Aus den Arbeiten von POWSNER und LADYSHENSKAJA folgt, daß das Prinzip der Grenzabsorption größere Anwendungsmöglichkeiten bietet als das Prinzip der Grenzamplitude, zumindest in der angegebenen Form. Die Grenzfunktion der im Unendlichen verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta v_\varepsilon + q(P) v_\varepsilon + (k^2 - i\varepsilon) v_\varepsilon = -F(P)$$

existiert für $\varepsilon \rightarrow +0$, wenn nur k^2 kein Eigenwert des Ausdrucks $\Delta v + q(P) v$ ist; die Grenzfunktion $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(P, t) e^{-ikt}$ der Lösungen des entsprechenden instationären Problems braucht nicht zu existieren, wenn $\Delta v + q(P) v$ wenigstens einen Eigenwert hat. Dabei heißt eine Zahl c Eigenwert des Operators, wenn die Differentialgleichung $\Delta v + q(P) v + cv = 0$ eine von der Nulllösung verschiedene Lösung hat, für die das Quadrat ihres absoluten Betrages über den ganzen Raum integrierbar ist. Arbeiten von D. M. EIDUS, B. R. WAINBERG und anderen sind der Untersuchung dieser Prinzipien für allgemeinere Gleichungen gewidmet.

133. Randwertprobleme für die Helmholtzsche Differentialgleichung. Die Lösung (258) der Differentialgleichung (252) hat für $r=0$ die Polarität $\frac{1}{r}$; dies gibt uns die Möglichkeit, für die Differentialgleichung (252) eine Potentialtheorie zu konstruieren, die der Theorie des Newtonschen Potentials für die Laplacesche Differentialgleichung entspricht. Bezeichnen wir mit r die Entfernung zwischen dem veränderlichen Punkt N der Fläche S und dem Punkt P , so erhalten wir im dreidimensionalen Fall die folgenden Analoga zu den Potentialen der einfachen Schicht und der Doppelschicht

$$v(P) = \iint_S \mu(N) \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \quad w(P) = \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS; \quad (265)$$

dabei ist n die Richtung der äußeren Normalen von S im veränderlichen Punkt N . Trennen wir vom Kern den polaren Summanden $\frac{1}{r}$ ab, so erhalten wir gewöhnliche Potentiale, in denen sich der Grenzübergang, bei dem P gegen die Fläche strebt, nach den Relationen aus [95] und [97] vollziehen läßt. Im übrigbleibenden Integral ist der Kern für $r=0$ nicht mehr singulär, und der Grenzübergang ist unter dem Integralzeichen möglich. Wir erhalten somit Relationen, die den Relationen aus [95] und [97] völlig entsprechen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0} \right)_i &= 2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS, \\ \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0} \right)_a &= -2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS \end{aligned} \quad (r_0 = |N_0 N|) \quad (266)$$

und

$$\begin{aligned} w_i(N_0) &= 2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS, \\ w_a(N_0) &= -2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS. \end{aligned} \quad (267)$$

Dabei stellt der Kern des Integrals in (266) den Wert der Ableitung nach der Richtung der Normalen n_0 im Punkt N_0 und in (267) den Wert der Ableitung nach der Richtung der Normalen n im Punkt N dar, und es ist $P = N_0$.

Im ebenen Fall lautet das Potential der einfachen Schicht und das der Doppelschicht

$$v(P) = \int_i \mu(N) \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) \, ds, \quad w(P) = \int_i \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] \, ds; \quad (268)$$

für diese Potentiale gelten Relationen, die den Relationen (266) und (267) entsprechen, wobei man rechts den Faktor 2π durch π ersetzen muß. Die Potentiale erfüllen die Differentialgleichung (252) im Innern und Äußeren von S , und auf Grund der speziellen Wahl des Kerns genügen die Integranden dieser Integrale und damit die Integrale selbst dem Ausstrahlungsprinzip.

Wir führen den Kern

$$K(N_0, N; k) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) = -\frac{e^{-ikr_0}(ikr_0 + 1)}{2\pi r_0^2} \cos \varphi$$

ein, wobei φ der Winkel zwischen der Richtung der Normalen n und der Richtung von $\overline{N_0 N}$ ist. Der transponierte Kern lautet

$$K(N, N_0; k) = \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) = \frac{e^{-ikr_0}(ikr_0 + 1)}{2\pi r_0^2} \cos \psi,$$

wobei ψ der Winkel zwischen der Normalen n_0 im Punkt N_0 und der Richtung von $\overline{N_0 N}$ ist. Ebenso wie für die Laplacesche Differentialgleichung lassen sich die Probleme von DIRICHLET und NEUMANN aufstellen.

Das Dirichletsche Problem für das Innengebiet besteht in der Ermittlung einer Lösung der Differentialgleichung (252) im Innern von S , die auf S der Randbedingung

$$u|_S = f(N_0)$$

genügt. Entsprechend läßt sich auch das Problem für das Außengebiet formulieren, wobei im Unendlichen das Ausstrahlungsprinzip erfüllt sein muß. Im Fall des Neumannschen Problems lautet die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f(N_0).$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz [131] folgt, daß die Probleme für das Außengebiet nur eine einzige Lösung haben können. Bei den Problemen für das Innengebiet existieren die (einzigen) Lösungen nicht für alle k .

Die Zahl k^2 heißt *Eigenwert des Dirichletschen Problems für das Innengebiet*, wenn im Innern von S eine Lösung der Differentialgleichung (252) existiert, die auf S der homogenen Randbedingung $u|_S = 0$ genügt. Entsprechend lassen sich die Eigenschaften des Neumannschen Problems für das Innengebiet definieren.

Suchen wir die Lösung des Dirichletschen Problems für das Außengebiet in Gestalt des Potentials einer Doppelschicht und die Lösung des Neumannschen Problems für das Innengebiet in Gestalt des Potentials einer einfachen Schicht, so gelangen wir zu den transponierten Integralgleichungen

$$\mu(N_0) + \int_S \int \mu(N) K(P, N; k) \, dS = -\frac{1}{2\pi} f(N_0), \quad (269)$$

$$\mu(N_0) + \int_S \int \mu(N) K(N, P; k) \, dS = -\frac{1}{2\pi} f(N_0), \quad (270)$$

wobei N_0 ein veränderlicher Punkt auf S ist. Es sei k^2 kein Eigenwert des Neumannschen Problems für das Innengebiet. Wir zeigen, daß dann die zu (269) gehörige homogene Integralgleichung außer der Nulllösung keine Lösungen besitzt. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, die homogene Integralgleichung besitze eine von der Nulllösung verschiedene Lösung. Dann muß auch die zu (270) gehörige homogene Integralgleichung eine Lösung $\mu_0(N)$ haben, die von der Nulllösung verschieden ist. Bilden wir das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu_0(N)$, so erhalten wir eine Lösung der Differentialgleichung (252) mit der homogenen Randbedingung $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0$. Da aber k^2 kein Eigenwert des Neumannschen Problems

für das Innengebiet ist, muß diese Lösung im Innern von S gleich 0 sein. Auf Grund der Stetigkeit ist das angegebene Potential der einfachen Schicht dann auch auf S gleich 0, und damit muß es auf Grund des Unitätssatzes auch im Äußeren von S gleich 0 sein. Hierbei ist $\mu_0(N)$ wegen der zu (54) analogen Relation identisch gleich 0. Durch diesen Widerspruch ist folgendes bewiesen: *Ist k^2 kein Eigenwert des Neumannschen Problems für das Innengebiet, so hat die zu (269) gehörige homogene Integralgleichung nur die Nulllösung; folglich ist die inhomogene Integralgleichung (269) für jedes beliebige $f(N_0)$ lösbar, d. h., bei beliebigem $f(N_0)$ hat das Dirichletsche Problem für das Außengebiet eine Lösung in der Gestalt des Potentials einer Doppelschicht.* Ganz analog gilt: *Ist k^2 kein Eigenwert des Dirichletschen Problems für das Innengebiet, so hat das Neumannsche Problem für das Außengebiet eine Lösung in Gestalt des Potentials einer einfachen Schicht.*

Das Buch von W. D. KUPRADSE, Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, enthält ausführliche Untersuchungen, die den stationären Bewegungszuständen in der Elektrodynamik und in der Elastizitätstheorie und insbesondere dem Beugungsproblem gewidmet sind, das wir im folgenden Abschnitt behandeln werden. In diesem Buch werden auch die Fälle untersucht, in denen k^2 ein Eigenwert des Problems von DIRICHLET oder NEUMANN für das Innengebiet ist, und es wird dort gezeigt, wie man in diesen Fällen die Lösungen der Probleme für das Außengebiet ermitteln kann.

Wir zeigen jetzt, daß jede Lösung $v(P)$ der Differentialgleichung (252) mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung im Innern eines Bereiches D eine analytische Funktion der Koordinaten ist. Hierbei genügt es, zu zeigen, daß die Funktion $v(P)$ im Innern einer Kugel S_0 mit dem Mittelpunkt in einem beliebigen Punkt P_0 , der im Innern von D liegt, analytisch ist.

Wir versuchen, die Funktion $v(P)$ im Innern von D in Gestalt des Potentials (265) einer Doppelschicht darzustellen. Für die Dichte $\mu(N)$ dieser Schicht erhalten wir die Integralgleichung

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS, \quad (271)$$

wobei $f(N)$ der Wert von $v(P)$ auf der Kugel S_0 ist. Der Radius dieser Kugel läßt sich so klein wählen, daß die Integralgleichung

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) dS \quad (272)$$

als einzige Lösung die Nulllösung besitzt. Dies wollen wir zunächst beweisen. Es sei λ_1 der erste Eigenwert der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ unter der Randbedingung $u|_{S_0} = 0$, wobei S_0 die Kugel mit dem Radius 1 ist. Durch die Ähnlichkeits-

transformation können wir uns ohne Mühe davon überzeugen, daß der erste Eigenwert für eine Kugel mit dem Radius R gleich $\frac{\lambda_1}{R^2}$ ist, und die Zahl R kann man so klein wählen, daß $\frac{\lambda_1}{R^2}$ größer als k^2 ist. Dann hat das innere Dirichletsche Problem für die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit der homogenen Randbedingung als einzige Lösung die Nulllösung. Die Integralgleichung (272) ist die Gleichung für die Dichte des Potentials der Doppelschicht, das die Lösung des soeben gestellten homogenen Dirichletschen Problems für das Innengebiet darstellt. Da dieses Problem als einzige Lösung die Nulllösung besitzt, ergibt sich durch dieselben Überlegungen wie in [109], daß auch die Integralgleichung (272) für eine Kugel mit dem Radius R als einzige Lösung die Nulllösung besitzt. In diesem Fall ergibt sich die Existenz einer Lösung der Integralgleichung (271); wir erhalten

$$v(P) = \iint_{S_0} \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \quad (P \text{ innerhalb von } S_0; r = |PN|)$$

oder [II, 207]

$$v(P) = - \iint_{S_0} \mu(N) \frac{e^{-ikr}(ikr + 1)}{r^2} \cdot \frac{R^2 + r^2 - \varrho^2}{2Rr} dS, \quad (273)$$

wobei R der Radius von S_0 und $\varrho = |P_0 P|$ ist. Der Integrand ist eine analytische Funktion der Koordinaten x, y, z des Punktes P , der im Innern von S_0 liegt, und aus (273) folgt, daß auch $v(P)$ eine analytische Funktion von x, y, z ist (vgl. [61]). Analog dazu verläuft der Beweis auch im ebenen Fall mit Hilfe der entsprechenden singulären Lösung.

Für die Differentialgleichung (252) ergibt sich die Greensche Funktion in derselben Weise wie für die Laplacesche Differentialgleichung. Im dreidimensionalen Fall läßt sich die singuläre Grundlösung dieser Differentialgleichung in der Gestalt $\frac{\cos kr}{r}$ schreiben. Die Greensche Funktion, die zu der Bedingung

$$v|_S = 0 \quad (274)$$

gehört, müssen wir in der Gestalt

$$G_1(P, Q; k^2) = \frac{\cos kr}{4\pi r} + g_1(P, Q; k^2) \quad (r = |PQ|) \quad (275)$$

suchen, wobei $g_1(P, Q; k^2)$ im Innern von D die Differentialgleichung (252) und auf S die Randbedingung

$$g_1(P, Q; k^2)|_S = - \frac{\cos kr}{4\pi r} \Big|_S \quad (276)$$

erfüllt. Ist k^2 kein Eigenwert der Differentialgleichung (252) unter der Randbedingung (274), so existiert sicher eine derartige Funktion.

Im ebenen Fall hat die Lösung der Differentialgleichung (252), die nur von der Entfernung $r = |PQ|$ abhängt, die Gestalt $Z_0(kr)$, wobei $Z_0(z)$ eine beliebige zum Index 0 gehörige Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$Z_0''(z) + \frac{1}{z} Z_0'(z) + Z_0(z) = 0 \quad (277)$$

ist.

Als Lösung dieser Differentialgleichung kennen wir z. B. die Neumannsche Funktion [III/2, 150]

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left(\lg \frac{z}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1 \right). \quad (278)$$

Die singuläre Grundlösung, die im Punkt Q die Polarität $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r}$ besitzt, lautet

$$-\frac{1}{4} N_0(kr). \quad (279)$$

Aus (278) folgt, daß, abgesehen von diesem polaren Glied, im Ausdruck für die Funktion (279) Glieder der Gestalt $r^{2n} \lg r$ ($n=1, 2, \dots$) auftreten, die also $\lg r$ als Faktor enthalten. Diese Glieder streben für $r \rightarrow 0$ gegen 0. Durch Differentiation kann man sich leicht davon überzeugen, daß auch ihre Ableitungen erster Ordnung gegen 0 streben und die Funktion (279) stetige Ableitungen erster Ordnung in Q hat. Es sei k kein Eigenwert der Differentialgleichung (252) unter der Randbedingung (274). Für solche Werte von k läßt sich leicht die Greensche Funktion $G_1(P, Q; k^2)$ der Differentialgleichung (252) bilden.

Wir suchen diese Greensche Funktion in der Gestalt

$$G_1(P, Q; k^2) = -\frac{1}{4} N_0(kr) + g_1(P, Q; k^2). \quad (280)$$

Da der erste Summand auf der rechten Seite die Differentialgleichung erfüllt und die geforderte Polarität hat, braucht nur noch der Summand $g_1(P, Q; k^2)$ so bestimmt zu werden, daß er keine Polarität mehr besitzt, die Differentialgleichung (252) erfüllt und auf der Randkurve l der inhomogenen Randbedingung

$$g_1|_l = \frac{1}{4} N_0(kr)$$

genügt. Da k kein Eigenwert ist, erhalten wir eine wohlbestimmte Funktion g_1 , die diesen Bedingungen genügt.

Wir kehren nochmals zum dreidimensionalen Fall zurück und erwähnen eine Relation, die mit der Differentialgleichung (252) zusammenhängt. Es sei $v_0(r)$ eine beliebige singuläre Lösung dieser Differentialgleichung mit der Polarität $\frac{1}{r}$, und es sei $v(P)$ eine beliebige Funktion, die im Bereich D_i bis einschließlich S stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Verfahren wir wie in [II, 203], so erhalten wir

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[v_0(r) \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial v_0(r)}{\partial n} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_i} \frac{\Delta v + k^2 v}{r} d\tau,$$

wobei P im Innern von D liegt und r die Entfernung des Punktes P vom Integrationspunkt bezeichnet. Erfüllt v die Differentialgleichung (252), so ist das dreifache Integral gleich 0. Wir wenden die erhaltene Relation auf den Fall an, daß S die Kugel mit dem Radius R und dem Mittelpunkt P ist, und wählen $v_0(r)$ gemäß der Forderung $v_0(R) = 0$:

$$v_0(r) = \frac{\cos kr}{r} - \cot kR \frac{\sin kr}{r}.$$

Als Resultat erhalten wir

$$\frac{\sin kR}{kR} v(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S v \, dS;$$

rechts steht das Mittel von v über die Kugel S . Diese Formel verallgemeinert die Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen.

134. Die Beugung einer elektromagnetischen Welle. Zu einem komplizierteren Problem führt die Erscheinung der Beugung einer sinusförmigen elektromagnetischen Welle, die auf einen Körper mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Leitfähigkeit σ fällt. Wir betrachten das ebene Problem. Es sei l die Randkurve des Körpers, so daß wir im Äußeren von l Vakuum haben. Mit B_i und B_a bezeichnen wir die Teile der Ebene, die im Innern bzw. im Äußeren von l liegen. Das mathematische Problem führt auf die Ermittlung einer Funktion $E(x, y)$, die den Differentialgleichungen

$$\Delta E + k_i^2 E = 0 \quad (\text{in } B_i), \quad \Delta E + k_a^2 E = 0 \quad (\text{in } B_a) \quad (281)$$

mit

$$k_i^2 = \frac{\omega^2 \epsilon - \omega \sigma i}{c^2}, \quad k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

genügt, wobei ω die Frequenz der einfallenden Welle und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die Funktion E ist in B_i die z -Komponente des Vektors der elektrischen Feldstärke, die durch die einfallende Schwingung $e^{i\omega t} A(x, y)$ entsteht; in B_a ist E die Summe aus der einfallenden Welle A und der Welle, die wir durch Beugung an der Kurve l erhalten, so daß die Differenz $E - A$ das Ausstrahlungsprinzip erfüllen muß. Die vorgegebene Funktion A muß in der ganzen Ebene die Differentialgleichung

$$\Delta A + k_a^2 A = 0 \quad (282)$$

erfüllen.

Die Randbedingungen bestehen in der Forderung, daß E und $\frac{\partial E}{\partial n}$ beim Durchgang durch die Kurve stetig sind.

Wir wenden die Greensche Formel (263) auf den Bereich B_i mit den Funktionen $E(Q)$ und

$$G(P; Q) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k_a r) \quad (r = |PQ|) \quad (283)$$

an, wobei wir annehmen, daß P im Innern von B_i liegt. Hierbei schneiden wir den Punkt P durch einen kleinen Kreis γ aus und bezeichnen den restlichen Teil von B_i mit B'_i . Dann können wir die Greensche Formel in der Gestalt

$$\iint_{B'_i} (E \Delta G - G \Delta E) \, dS = \int_i \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds + \int_\gamma \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds$$

schreiben.

Die erste Differentialgleichung (281) und die entsprechende Differentialgleichung für die Funktion (283) liefern

$$E \Delta G - G \Delta E = (k_a^2 - k_i^2) G(P; Q) E(Q).$$

Da die Funktion $G(P; Q)$ für $r=0$ die Polarität $\lg \frac{1}{r}$ besitzt und der Kreis γ beliebig klein sein kann, erhalten wir durch Grenzübergang (vgl. [II, 199])

$$2\pi E(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{B_i} G(P; Q) E(Q) \, dS + \int_i \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds. \quad (284_1)$$

Es sei S_ϱ eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und hinreichend großem Radius ϱ und B'_a der Teil von B_a , der im Innern von S_ϱ liegt. Durch Anwendung der Greenschen Formel auf B'_a erhalten wir, wenn sich P in B_i befindet,

$$0 = \int_{S_\varrho} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS + \int_l \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds. \quad (284_2)$$

Nehmen wir jetzt an, daß sich P in B_a befindet, und wenden wir die Greensche Formel auf B_i an, so finden wir

$$0 = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{B_i} G(P; Q) E(Q) dS + \int_l \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds. \quad (284_3)$$

Nehmen wir schließlich an, daß sich P in B'_a befindet, und wenden die Greensche Formel auf B'_a an, so erhalten wir

$$2\pi E(P) = \int_l \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds + \int_{S_\varrho} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds. \quad (284_4)$$

In den Relationen (284₁) und (284₂) sind die Richtungen der äußeren Normalen der Randkurve l einander entgegengesetzt. Dasselbe ist in den Relationen (284₃) und (284₄) der Fall. Addieren wir (284₁) und (284₂) sowie (284₃) und (284₄) und berücksichtigen die Stetigkeit von E und $\frac{\partial E}{\partial n}$ beim Durchgang durch die Randkurve l , so erhalten wir in beiden Fällen, wenn P in B_i oder B'_a liegt, ein und dieselbe Relation

$$2\pi E(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{B_i} G(P; Q) E(Q) dS + \int_{S_\varrho} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS. \quad (285)$$

Jetzt brauchen wir nur noch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow \infty$ durchzuführen. Durch Anwendung der Greenschen Formel für den Kreisbereich, welcher durch die Kreislinie S_ϱ begrenzt ist, auf die Funktionen A und G erhalten wir, wenn sich P im Innern von S_ϱ befindet,

$$2\pi A(P) = \int_{S_\varrho} \left(A \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial A}{\partial n} \right) ds;$$

folglich ist das Kurvenintegral, das in der Relation (285) vorkommt, gleich dem Ausdruck

$$2\pi A(P) + \int_{S_\varrho} \left\{ [E(Q) - A(Q)] \frac{\partial G(P; Q)}{\partial n} - G(P; Q) \frac{\partial}{\partial n} [E(Q) - A(Q)] \right\} ds. \quad (286)$$

Mit Hilfe der Tatsache, daß die Differenz $E - A$ das Ausstrahlungsprinzip erfüllt, werden wir am Schluß des folgenden Abschnittes beweisen, daß dieses Integral gegen 0 streben muß; damit folgt aus der Relation (285) die Gleichung

$$E(P) = \frac{k_i^2 - k_a^2}{2\pi} \iint_{B_i} G(P; Q) E(Q) dS + A(P). \quad (287)$$

Nehmen wir an, daß sich P in B_i befindet, so ist diese Gleichung eine gewöhnliche Integralgleichung. Bestimmen wir aus ihr $E(P)$, wobei P dem Bereich B_i angehört, und setzen die erhaltene Lösung in die rechte Seite von (287) ein, so erhalten wir einen expliziten Ausdruck von $E(P)$ für den Fall, daß P dem Bereich B_a angehört. Wir haben die Integralgleichung (287) unter der Annahme hergeleitet, daß eine Lösung des Problems existiert. Strenggenommen muß man noch die Integralgleichung (287) unter-

suchen und zeigen, daß sie eine Lösung hat, wenn P in B_i liegt, und daß diese Lösung auch eine Lösung des gestellten Beugungsproblems ist. Dies ist in den Arbeiten durchgeführt, die wir am Schluß des folgenden Abschnittes angeben werden. Wir weisen noch darauf hin, daß die Integration in der Integralgleichung (287) nicht über die Kurve l , sondern über den ganzen Bereich B_i zu erstrecken ist.

135. Der Vektor der magnetischen Feldstärke. Zur Bestimmung des Vektors $H(x, y)$ der magnetischen Feldstärke ergeben sich dieselben Gleichungen und Bedingungen wie im vorigen Abschnitt mit einer einzigen Änderung. An Stelle der Stetigkeit von $\frac{\partial H}{\partial n}$ bei Durchgang durch l muß $\frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial n}$ mit $k = k_i$ in B_i und $k = k_a$ in B_a stetig sein. Außerdem muß die Differenz $H - B$, wobei $B(x, y)$ eine vorgegebene Funktion ist, die der Differentialgleichung (282) genügt, das Ausstrahlungsprinzip erfüllen. Wir erhalten wiederum die Relationen (284). Wir beachten die vorausgesetzte Stetigkeit von $\frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial n}$, multiplizieren (284₁) mit $\frac{1}{k_i^2}$ sowie (284₂) mit $\frac{1}{k_a^2}$ und addieren die erhaltenen Relationen. In derselben Weise verfahren wir mit (284₃) und (284₄). Führen wir danach wie vorhin den Grenzübergang durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{H(P)}{k_i^2} &= \frac{k_i^2 - k_a^2}{2\pi k_i^2} \iint_{B_i} G(P; Q) H(Q) dS + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2} \right) \int_l H(Q) \frac{\partial G(P; Q)}{\partial n} ds + \frac{B(P)}{k_a^2} \\ &\quad (P \text{ in } B_i), \\ \frac{H(P)}{k_a^2} &= \frac{k_i^2 - k_a^2}{2\pi k_i^2} \iint_{B_i} G(P; Q) H(Q) dS + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2} \right) \int_l H(Q) \frac{\partial G(P; Q)}{\partial n} ds + \frac{B(P)}{k_a^2} \\ &\quad (P \text{ in } B_a). \end{aligned}$$

Wegen der Polarität der Funktion $G(P; Q)$ für $P \rightarrow Q$ verhält sich das Kurvenintegral, wenn P gegen die Randkurve strebt, wie das Potential einer Doppelschicht; wir erhalten, wenn P auf der Randkurve liegt,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{k_a^2} \right) H(P) = \dots,$$

wobei auf der rechten Seite dieselben Ausdrücke stehen wie in den vorhergehenden Relationen. Wir können die erhaltenen drei Relationen in der Form

$$\frac{1}{k^2} H(P) = \frac{k_i^2 - k_a^2}{2\pi k_i^2} \iint_{B_i} G(P; Q) H(Q) dS + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2} \right) \int_l H(Q) \frac{\partial G(P; Q)}{\partial n} ds + \frac{B(P)}{k_a^2} \quad (288)$$

zusammenfassen, wenn wir $k^2 = k_i^2$ (falls P im Innern von B_i liegt), $k^2 = k_a^2$ (falls P im Innern von B_a liegt) und, falls P auf l liegt,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{k_a^2} \right)$$

setzen.

Befindet sich P im abgeschlossenen Bereich $\overline{B_i}$, so ist (288) eine belastete Integralgleichung [IV/1, 56], auf die sich die übliche Fredholmsche Theorie anwenden läßt. Man kann zeigen, daß eine Lösung existiert und daß diese die Lösung des gestellten Beugungsproblems liefert. Lösen wir die Integralgleichung (288), d. h., bestimmen wir die Funktion $H(Q)$ im abgeschlossenen Bereich $\overline{B_i}$, so können wir aus (288) auch noch die Funktion $H(P)$ in B_a bestimmen.

Jetzt zeigen wir, daß das in dem Ausdruck (286) vorkommende Integral für $\varrho \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Auf Grund des asymptotischen Ausdrucks für $H_0^{(2)}(z)$ und $H_1^{(2)}(z)$ gilt

$$\frac{\partial G(P; Q)}{\partial r} = -ik_a G(P; Q) + O(r^{-3/2}) \quad (r = |PQ|).$$

Im folgenden müssen wir annehmen, daß der Punkt P fest ist und der Punkt Q sich auf S_q befindet. Es gilt

$$\frac{\partial G(P; Q)}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial r} \cos \gamma,$$

wobei für $\cos \gamma$ die Beziehung (259) gilt.

Weiterhin gilt offenbar die Beziehung

$$O(r^\alpha) = O(q^\alpha)$$

und folglich

$$\frac{\partial G(P; Q)}{\partial q} = -ik_a G(P; Q) + O(q^{-3/2}).$$

Das im Ausdruck (286) vorkommende Integral läßt sich auch in der Gestalt

$$J = \int_{S_q} \{ (E - A) [-ik_a G + O(q^{-3/2})] - G [-ik_a (E - A) + o(r^{-1/2})] \} ds$$

oder

$$J = \int_{S_q} [(E - A) \cdot O(q^{-3/2}) + G \cdot o(q^{-1/2})] ds = \int_{S_q} [o(r^{-1}) + o(r^{-1})] ds$$

schreiben, woraus unmittelbar $J \rightarrow 0$ hervorgeht. Das Beugungsproblem wird in den folgenden Arbeiten untersucht:

1. W. D. KUPRADSE: Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen.

2. W. STERNBERG: Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie (Compositio Math. 3 (1936)).

3. H. FREUDENTHAL: Über ein Beugungsproblem aus der elektromagnetischen Lichttheorie (Compositio Math. 6 (1938)).

136. Der Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen. Bevor wir auf das Thema dieses Abschnittes eingehen, beweisen wir einen Hilfssatz für Matrizen.

Hilfssatz. *Es seien A und B zwei quadratische reelle symmetrische Matrizen, und alle Eigenwerte von A seien positiv. Wenn alle Eigenwerte von B nichtpositiv sind, ist die Spur des Produkts AB ebenfalls nichtpositiv, $\text{Sp}(AB) \leq 0$. Wenn dagegen alle Eigenwerte von B nichtnegativ sind, gilt $\text{Sp}(AB) \geq 0$.*

Es sei U die Matrix einer orthogonalen Transformation, die B in Diagonalform überführt; es gelte also $UBU^{-1} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$, dabei sind μ_i die Eigenwerte der Matrix B . Bekanntlich [III/1, 27] gilt $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(UABU^{-1}) = \text{Sp}(UAU^{-1}UBU^{-1})$, und die reelle symmetrische Matrix $A' = UAU^{-1}$ hat dieselben Eigenwerte wie A . Nach Voraussetzung sind diese allesamt positiv, daher ist die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^n \{A'\}_{ik} \xi_i \xi_k$$

positiv definit. Wählen wir $\xi_s = 1$ und die übrigen ξ_i gleich 0, so erhalten wir $\{A'\}_{ss} > 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$). Andererseits gilt

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(A'[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]) = \sum_{s=1}^n \{A'\}_{ss} \mu_s;$$

hieraus folgt unmittelbar: Ist $\mu_s \leq 0$ für alle s , so gilt $\text{Sp}(AB) \leq 0$; ist dagegen $\mu_s \geq 0$ für alle s , so gilt $\text{Sp}(AB) \geq 0$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir erwähnen noch eine Tatsache, die für das Folgende wichtig ist. Es sei $u(P) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine im Innern eines Bereiches D des $x_1, x_2, \dots, x_n$ -Raumes definierte reelle stetige Funktion, die im Innern von D stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung hat. Wir nehmen an, daß in einem Punkt P_0 im Innern von D die Funktion $u(P)$ ein Maximum hat. Dann kann die reelle symmetrische quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^n u_{x_i x_k}(P_0) \xi_i \xi_k$$

keine positiven Werte annehmen (vgl. [III/1, 35]), d. h., alle Eigenwerte der reellen symmetrischen Matrix $u_{x_i x_k}(P_0)$ sind nichtpositiv. Analog dazu sind die Eigenwerte in einem Punkt, in dem ein Minimum vorliegt, nichtnegativ.

Wir gehen nun zu der elliptischen linearen Differentialgleichung

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad (a_{ki} = a_{ik}) \quad (289)$$

über, in der wir die Koeffizienten a_{ik} , b_i , c und f in einem endlichen abgeschlossenen Bereich $\bar{D}$ als stetige Funktionen voraussetzen. Die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k$$

sei in $\bar{D}$ positiv definit. Wir bemerken, daß die Summe

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} \right) \quad (290)$$

die Spur des Produktes der reellen symmetrischen Matrizen (a_{ik}) und $(u_{x_i x_k})$ ist; dabei setzen wir voraus, daß die Funktion $u(P)$ im Innern von D stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Der Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Dirichletschen Problems für die Differentialgleichung (289) ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz. Gilt $c < 0$ im Innern von D , so kann keine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$L(u) = 0 \quad (291)$$

im Innern von D ein positives Maximum oder ein negatives Minimum haben.

Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, die Funktion $u(P)$ habe in einem Punkt P_0 im Innern von D ein Maximum $u(P_0) > 0$. In einem solchen Punkt sind alle Ableitungen erster Ordnung gleich 0, und die Differentialgleichung (291) ergibt dort

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} = -cu \quad (\text{in } P_0). \quad (292)$$

Aus der Bedingung für ein Maximum folgt, daß alle Eigenwerte der Matrix $(u_{x_i x_k})$ nichtpositiv sind; nach dem Hilfssatz ist daher die Summe in (292) nichtpositiv. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber positiv, da nach Voraussetzung $u(P_0) > 0$ und $c(P_0) < 0$ gilt. Durch diesen Widerspruch ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Die Unmöglichkeit eines negativen Minimums läßt sich ganz analog beweisen; man kann diesen Fall auch durch Ersetzen von u durch $-u$ auf den vorigen zurückführen.

In derselben Art läßt sich beweisen: Gilt in der inhomogenen Differentialgleichung (289) mit $c < 0$ im Innern von D die Ungleichung $f(P) \geq 0$, so kann die Lösung dieser Differentialgleichung im Innern von D kein positives Maximum haben; gilt $f(P) \leq 0$, so kann die Lösung kein negatives Minimum haben.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß nur eine einzige Lösung des Dirichletschen Problems für die Differentialgleichung (289) existiert, wenn $c < 0$ im Innern von D gilt. Sind nämlich $u_1(P)$ und $u_2(P)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (289) im Innern von D , die im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}$ stetig sind und auf dem Rand S von D derselben Randbedingung

$$u|_S = \varphi(P) \quad (293)$$

genügen, dann genügt die Differenz $v(P) = u_1(P) - u_2(P)$ der homogenen Differentialgleichung $L(v) = 0$ und verschwindet auf S . Daraus folgt nach dem obigen Satz $v(P) \equiv 0$, d. h. $u_1(P) \equiv u_2(P)$ in $\bar{D}$. Denn wäre das nicht der Fall, so müßte $v(P)$ im Innern von D ein positives Maximum oder ein negatives Minimum (oder beides) besitzen, was aber nach dem Satz nicht möglich ist.

Man kann den Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Dirichletschen Problems auch beweisen, wenn man die Voraussetzung $c < 0$ durch die schwächere Voraussetzung $c \leq 0$ im Innern von D ersetzt. In diesem Fall führen wir an Stelle der Funktion $v(P)$ eine neue Funktion $w(P)$ ein, indem wir

$$v = (\alpha - e^{-\beta x_1}) w \quad (294)$$

setzen; die Zahlen α und β werden wir dabei noch festlegen, und zwar so, daß die Differenz $\alpha - e^{-\beta x_1}$ in $\bar{D}$ positiv ist. Setzen wir (294) in die Differentialgleichung $L(v) = 0$ ein, so erhalten wir für w eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} w_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b'_i w_{x_i} + c' w = 0; \quad (295)$$

dabei sind die Koeffizienten b'_i wie auch die b_i in $\bar{D}$ stetig, es ist

$$c' = c + e^{-\beta x_1} \frac{b_1 \beta - a_{11} \beta^2}{\alpha - e^{-\beta x_1}}, \quad (296)$$

und wegen (294) gilt $w = 0$ auf S .

Berücksichtigen wir $a_{11} > 0$ in $\bar{D}$, so können wir die Zahl β so wählen, daß in $\bar{D}$ die Ungleichung $b_1 \beta - a_{11} \beta^2 < 0$ gilt, und darauf die Zahl α so wählen, daß $\alpha - e^{-\beta x_1} > 0$ in $\bar{D}$ gilt. Dann gilt in der Differentialgleichung (295) $c' < 0$ im Innern von D ; auf die Funktion $w(P)$, die auf S gleich 0 ist, läßt sich der bewiesene Satz anwenden, aus dem $w \equiv 0$ in $\bar{D}$ folgt. Damit folgt aus (294) schließlich $v \equiv 0$ in $\bar{D}$.

Das Dirichletsche Problem hat unter der Voraussetzung $c \leq 0$ eine einzige Lösung. Es läßt sich leicht ein Beispiel dafür angeben, daß eine homogene Differentialgleichung $L(v) = 0$ im Fall $c > 0$ eine auf dem Rand S verschwindende Lösung besitzt, die nicht identisch gleich 0 ist. Als ein solches Beispiel führen wir die Differentialgleichung

$$v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2} + 2k^2 v = 0 \quad (297)$$

an und betrachten sie im Quadrat $0 \leq x_1 \leq \pi$, $0 \leq x_2 \leq \pi$. Nimmt man k als ganzzahlig an, so hat die Differentialgleichung (297) die Lösung

$$v = \sin kx_1 \sin kx_2,$$

die auf dem Rand des Quadrates verschwindet. Wir erinnern daran, daß die Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (298)$$

im allgemeinen unendlich viele positive Eigenwerte $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots$ besitzt, so daß die Differentialgleichung für $\lambda = \lambda_k$ nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt, die auf dem Rand S des Bereiches gleich 0 sind.

Bemerkung. Mit Hilfe dieser Ergebnisse kann man Abschätzungen für die Lösung des Dirichletschen Problems erhalten. Wir zeigen das an einem einfachen Beispiel.

Es sei $u(P)$ die Lösung des Randwertproblems

$$L(u) = f \quad \text{im Innern von } D; \quad u|_S = 0. \quad (299)$$

Wir nehmen an, daß $c < 0$ gilt in $\bar{D}$. Mit μ bezeichnen wir den kleinsten Wert von $|c|$ und mit M den größten Wert von $|f|$ in $\bar{D}$. Wir führen eine neue Funktion v ein, indem wir $v = u + k$ (k konstant) setzen. Dann gilt $L(v) = L(u) + ck = f + ck$, so daß $v(P)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$L(v) = f + ck \quad \text{im Innern von } D, \quad v|_S = k \quad (300)$$

darstellt. Wir setzen zunächst $k = \frac{M}{\mu}$. Dann gilt $f + ck \leq 0$ in $\bar{D}$, und die Lösung der Differentialgleichung $L(v) = f + ck$ hat im Innern von D kein negatives Minimum. Nun sind die Werte von $v(P)$ auf S gleich der positiven Konstanten $\frac{M}{\mu}$; daraus folgt, daß $v(P)$ nicht negativ ist, $v = u + \frac{M}{\mu} \geq 0$ oder $u \geq -\frac{M}{\mu}$. In derselben Weise erhalten wir, wenn wir $k = -\frac{M}{\mu}$ setzen, die Abschätzung $u \leq \frac{M}{\mu}$. Abschließend können wir feststellen, daß die Lösung des Problems (299) (falls sie existiert) in $\bar{D}$ der Ungleichung

$$|u| \leq \frac{M}{\mu}$$

genügen muß.

Wir betrachten nun das Problem

$$L(u) = 0 \quad (\text{im Innern von } D), \quad u|_S = \varphi. \quad (301)$$

N bezeichne den größten Wert von $|\varphi|$ auf S . Setzen wir wieder $v = u + k$, so erhalten wir das Problem

$$L(v) = ck \quad (\text{im Innern von } D), \quad v|_S = \varphi + k. \quad (302)$$

Wir wählen dann $k = N$. Weil wir $c < 0$ im Innern von D angenommen haben, kann die Funktion v im Innern von D keine negativen Minima besitzen. Für die Randwerte $v(P)$ gilt natürlich $\varphi + N \geq 0$. Daraus folgt wie oben $v = u + N \geq 0$, d. h. $u \geq -N$. Völlig analog erhält man für $k = -N$ die Ungleichung $u \leq N$, d. h., für das Problem (301) gilt $|u| \leq N$ in $\bar{D}$.

137. Die Differentialgleichung $\Delta v - \lambda v = 0$. Nun betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Delta v - \lambda v = 0, \quad (303)$$

in der λ eine vorgegebene positive Zahl bedeutet, und stellen das innere Dirichlet'sche Problem mit der Randbedingung

$$v|_S = f(N) \quad (304)$$

auf. Die Lösungen der Differentialgleichung (303) können im Innern von D_i weder positive Maxima noch negative Minima haben [136], und hieraus folgt, daß unser Dirichlet'sches Problem nur eine einzige Lösung hat.

Genügt die Funktion $f(N)$ der Ungleichung $-a \leq f(N) \leq b$, wobei a und b positive Zahlen sind, so muß die Lösung des Dirichlet'schen Problems in D_i derselben Ungleichung genügen.

Wir untersuchen zunächst die inhomogene Differentialgleichung

$$\Delta v - \lambda v = -\varphi(P) \quad (\text{im Innern von } D_i) \quad (305)$$

mit der homogenen Randbedingung

$$v|_S = 0. \quad (306)$$

Wir nehmen an, daß $\varphi(P)$ im abgeschlossenen Bereich $\overline{D_i}$ stetig ist und im Innern von D_i stetige Ableitungen besitzt. Das Problem (305), (306) ist der Integralgleichung

$$v(P) = -\lambda \iint_{D_i} G(P; Q) v(Q) d\tau + \iint_{D_i} G(P; Q) \varphi(Q) d\tau \quad (307)$$

gleichwertig (vgl. [126]), wobei $G(P; Q)$ die Greensche Funktion der Laplaceschen Differentialgleichung mit der Randbedingung (306) ist. Da $-\lambda$ eine negative Zahl ist und alle Eigenwerte des Kerns $G(P; Q)$ positiv sind, hat die Integralgleichung (307) bei beliebiger gegebener Funktion eine wohlbestimmte Lösung, die gerade die Lösung des Problems (305), (306) darstellt.

Wir gehen nun zur Lösung des Dirichlet'schen Problems (303) und (304) über. Es sei $w(P)$ die Lösung des Dirichlet'schen Problems für die Laplacesche Differentialgleichung mit der Randbedingung (304). Die Funktion

$$u(P) = v(P) - w(P) \quad (308)$$

muß die Differentialgleichung

$$\Delta u - \lambda u = \lambda w$$

und die Randbedingung

$$u|_S = 0$$

erfüllen. Wir haben soeben die Existenz der Lösung dieses Problems bewiesen. Kennen wir $u(P)$, so erhalten wir die Lösung $v(P)$ des Dirichlet'schen Problems aus der Beziehung (308).

Die singuläre Grundlösung der Differentialgleichung (303) ist die Lösung

$$v_0(P) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{r}, \quad (309)$$

wobei r die Entfernung des Punktes P von einem festen Punkt Q bezeichnet. Von dieser Lösung ausgehend, können wir eine entsprechende Potentialtheorie wie in [132] begründen. Hierauf wollen wir aber nicht näher eingehen und jetzt die Greensche Funktion bestimmen.

Die Greensche Funktion $G_1(P, Q; \lambda)$ der Differentialgleichung (303) bei der Randbedingung (306) ist eine Funktion des Punktes P , die, außer im Punkt Q ,

in D_i bis einschließlich S stetig ist, im Innern von D_i überall, außer im Punkt Q , stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und dort der Differentialgleichung (303) und auf S der Randbedingung (306) genügt. Sie ist von der Gestalt

$$G_1(P, Q; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} + g_1(P, Q; \lambda), \quad (310)$$

wobei die Funktion $g_1(P, Q; \lambda)$ im Innern von D_i überall stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung hat. Die Funktion $g_1(P, Q; \lambda)$ ist die Lösung des Dirichlet'schen Problems für die Differentialgleichung (303) und die Randbedingung

$$g_1(P, Q; \lambda)|_S = -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} \Big|_S. \quad (311)$$

Wie in [122] läßt sich zeigen, daß $g_1(P, Q; \lambda)$ eine stetige Funktion der beiden Punkte P und Q ist und daß im Innern von D_i die Ungleichung

$$0 < G_1(P, Q; \lambda) < \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} \quad (r = |PQ|) \quad (312)$$

gilt. Weiterhin läßt sich wie in [123] die Symmetrie der Funktion $G_1(P, Q; \lambda)$ beweisen.

Die Lösung der Differentialgleichung (305) unter der Bedingung (306) läßt sich in der Gestalt

$$v(P) = \iiint_{D_i} G_1(P, Q; \lambda) \varphi(Q) d\tau \quad (313)$$

ausdrücken. Dies kann man ebenso beweisen wie in [126]. Das Integral

$$\iiint_{D_i} g_1(P, Q; \lambda) \varphi(Q) d\tau$$

genügt im Innern von D_i der homogenen Differentialgleichung (303) (vgl. [123]). Das Integral mit dem singulären Bestandteil läßt sich in der Gestalt

$$\iint_{D_i} \int \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} \varphi(Q) d\tau_Q = \iint_{D_i} \int \frac{\varphi(Q)}{4\pi r} d\tau + \iint_{D_i} \int \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r} \right) \varphi(Q) d\tau$$

darstellen. Auf den ersten Summanden ist die Poissonsche Formel anwendbar; im zweiten Summanden ist keine polare Unstetigkeit mehr vorhanden, man kann somit zweimal unter dem Integralzeichen differenzieren. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß die Anwendung des Operators $\Delta - \lambda$ auf (313) zu der Funktion $-\varphi(P)$ führt. Wie in [126] läßt sich verifizieren, daß die Funktion (313) die Randbedingung (306) erfüllt.

Man kann zu dem Begriff der Greenschen Funktion auch auf anderem Wege gelangen, und zwar so wie in [74]. Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung (305) und nehmen an, daß die Funktion $\varphi(P)$ überall, außer in einer Kugel D_ε mit dem Mittelpunkt Q und dem kleinen Radius ε , verschwindet und der Bedingung

$$\iiint_{D_\varepsilon} \varphi(P) d\tau = 1 \quad (314)$$

genügt. Betrachten wir jetzt die Integralgleichung (307), so können wir ihre Lösung in der Gestalt

$$v(P) = \iiint_{D_i} R(P, Q'; \lambda) \varphi(Q') d\tau_{Q'} \quad (315)$$

schreiben [IV/1, 8], wobei $R(P, Q; \lambda)$ die Resolvente der Integralgleichung (307) bezeichnet. Berücksichtigen wir die Definition von $\varphi(Q')$, so können wir erwarten, daß die linke Seite von (315) für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $G_1(P, Q; \lambda)$ und die rechte Seite gegen $R(P, Q; \lambda)$ konvergiert, so daß

$$G_1(P, Q; \lambda) = R(P, Q; \lambda)$$

gilt. Die Greensche Funktion $G_1(P, Q; \lambda)$ ist also die Resolvente der Integralgleichung (307).

Dies führt naturgemäß zu der Beziehung

$$G_1(P, Q; \lambda) = G(P, Q) - \lambda \iint_{D_i} G(P; Q') G_1(Q', Q; \lambda) d\tau_{Q'}, \quad (316)$$

die sich leicht beweisen läßt, da die Differenz $H(P, Q; \lambda) = G_1(P, Q; \lambda) - G(P, Q)$ der Differentialgleichung $\Delta H(P, Q; \lambda) = \lambda G_1(P, Q; \lambda)$ sowie der Randbedingung (306) genügt und im Punkt Q stetig ist. Da sich die Resolvente in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des Kerns entwickeln läßt [I/V1, 32] erhalten wir jetzt

$$G_1(P, Q; \lambda) = G(P, Q) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(P) v_k(Q)}{\lambda_k (\lambda_k + \lambda)},$$

wobei λ_k die Eigenwerte und $v_k(P)$ die Eigenfunktionen des Kerns $G(P, Q)$, d. h. der Differentialgleichung (231) unter der Bedingung (232) sind. Durch Vergleich mit (316) ergibt sich

$$\iint_{D_i} G(P; Q') G_1(Q', Q; \lambda) d\tau_{Q'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(P) v_k(Q)}{\lambda_k (\lambda_k + \lambda)}. \quad (317)$$

Die letzten Entwicklungen sind nicht streng. Deshalb wollen wir jetzt die Beziehung (317), die wir im folgenden benutzen werden, streng beweisen.

Wir erinnern zunächst daran, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}, \quad (318)$$

in der λ_k die Eigenwerte des Problems (237_i) ($i=1, 2$) bezeichnen, konvergiert.

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $G_1(Q', Q; \lambda)$ in bezug auf die Eigenfunktion des Problems (237_i) ($i=1, 2$) lauten

$$h_k = \iint_{D_i} G_1(Q', Q; \lambda) v_k(Q') d\tau_{Q'}.$$

Wegen $v_k(Q') = -\frac{\Delta v_k(Q')}{\lambda_k}$ erhalten wir

$$\lambda_k h_k = - \iint_{D_i} G_1(Q', Q; \lambda) \Delta v_k(Q') d\tau_{Q'}.$$

Aus den letzten beiden Beziehungen folgt

$$(\lambda_k + \lambda) h_k = - \iint_{D_i} G_1(Q', Q; \lambda) [\Delta v_k(Q') - \lambda v_k(Q')] d\tau_{Q'}. \quad (319)$$

Da die Funktion $G_1(Q', Q; \lambda)$ symmetrisch ist und der Ausdruck (313) diejenige Lösung der Differentialgleichung (305) liefert, die der Bedingung (306) genügt, folgt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (319) gleich $v_k(Q)$ ist. Im vorliegenden Fall spielt der Ausdruck

$$-[\Delta v_k(Q') - \lambda v_k(Q')] = (\lambda + \lambda_k) v_k(Q')$$

die Rolle der Funktion $\varphi(Q)$ in (313). Dieser Ausdruck besitzt im Innern von D_i stetige Ableitungen. Wählen wir ihn als rechte Seite der Differentialgleichung (305),

so lautet die Lösung dieser Differentialgleichung, die der Bedingung (306) genügt (es gibt nur eine solche Lösung), $v(P) = v_k(P)$. Die Beziehung (319) liefert

$$h_k = \frac{v_k(Q)}{\lambda_k + \lambda}. \quad (320)$$

Somit ist die rechte Seite der Beziehung (317) die Fourierreihe der linken Seite, wobei diese letztere eine quellenmäßig darstellbare Funktion ist. Die auf der rechten Seite von (317) stehende Reihe konvergiert in bezug auf P bei beliebigem festem Q regulär. Dies folgt aus den Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(P)}{\lambda_k^2} = \iiint_{D_i} G^2(P; Q) \, d\tau \leq C, \quad \sum_{k=m}^{m+p} h_k^2 \leq \varepsilon$$

in derselben Weise wie in [IV/1, 31]. Die erste dieser Formeln drückt die Vollständigkeitsrelation für die Funktion $G(P; Q)$ aus [127]. Wir bemerken noch, daß die linke Seite von (317) im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_i$ eine stetige Funktion der Punkte P und Q ist. Dies läßt sich ebenso beweisen wie die Stetigkeit des räumlichen Potentials und seiner Ableitungen erster Ordnung [II, 210]. Wir bemerken, daß das Glied mit der größten Polarität im Integranden auf der linken Seite der

Beziehung (317) gleich $\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{rr'}$ ist, wobei r und r' die Entfernungen von Q' bis P bzw. Q bezeichnen.

Hieraus geht hervor, daß die Beziehung (317) richtig ist. Sind die Punkte P und Q identisch, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(P)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)} = \iiint_{D_i} G(P; Q') G_1(Q', P; \lambda) \, d\tau_{Q'}, \quad (321)$$

wobei die Reihe im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_i$ gleichmäßig konvergiert, da rechts auf Grund der vorhergehenden Ausführungen eine stetige Funktion von P steht [IV/1, 38]. Integrieren wir (321) über D_i , so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)} = \iiint_{D_i} \psi(P, \lambda) \, d\tau \quad (322)$$

mit

$$\psi(P, \lambda) = \iiint_{D_i} G(P; Q) G_1(Q, P; \lambda) \, d\tau_Q. \quad (323)$$

Die Beziehung (322) werden wir bei der Untersuchung der Zahlen λ_k benutzen.

138. Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte. Zunächst leiten wir einige Eigenschaften der Funktion $\psi(P, \lambda)$ her. Unter Berücksichtigung der Abschätzungen für G und G_1 erhalten wir

$$|\psi(P, \lambda)| \leq \iiint_{D_i} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2 r^2} \, d\tau_Q \quad (r = |PQ|). \quad (324)$$

Integrieren wir über den ganzen Raum und führen wir Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt P ein, so erhalten wir

$$|\psi(P, \lambda)| \leq \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{\lambda}r} \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi \sqrt{\lambda}}. \quad (325)$$

Jetzt beweisen wir, daß in jedem abgeschlossenen Bereich D' , der im Innern von D_t liegt, das Produkt $\sqrt{\lambda}\psi(P, \lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{4\pi}$ konvergiert:

$$\sqrt{\lambda}\psi(P, \lambda) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \quad \text{gleichmäßig in } D'. \quad (326)$$

Aus den Randwerten, welche die Funktionen $g(P; Q)$ und $g_1(P, Q; \lambda)$ auf S annehmen, erhalten wir die Abschätzungen

$$0 \leq g(P; Q) \leq -\frac{1}{4r'}, \quad 0 \leq g_1(P, Q; \lambda) \leq -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{4\pi r'} \quad (P \text{ in } D'),$$

wobei r' die Entfernung von der Berandung von D' bis S angibt. Es gilt

$$\sqrt{\lambda}\psi(P, \lambda) = \sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} \left[\frac{1}{4\pi r'} + g(P; Q) \right] \left[\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{4\pi r'} + g_1(P, Q; \lambda) \right] d\tau_Q.$$

Wir multiplizieren die Klammerausdrücke aus und zerlegen das Integral in vier Integrale über die einzelnen Summanden des Integranden. Aus der Abschätzung

$$\left| \sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} g(P; Q) g_1(P, Q; \lambda) d\tau_Q \right| \leq \sqrt{\lambda} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{16\pi^2 r'^2} \cdot \text{Volumen von } D_t$$

ist ersichtlich, daß das erste Teilintegral für $\lambda \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, wenn P dem Bereich D' angehört. Weiterhin gilt

$$\left| \sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} \frac{1}{4\pi r'} g_1(P, Q; \lambda) d\tau_Q \right| \leq \sqrt{\lambda} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{16\pi^2 r'^2} \iiint_{D_t} \frac{d\tau_Q}{r'}.$$

Das auf der rechten Seite stehende Integral ist bei beliebiger Lage von P und D_t nicht größer als eine gewisse Konstante, woraus folgt, daß das Integral auf der linken Seite gleichmäßig gegen 0 strebt. Ganz analog läßt sich das Integral

$$\sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} g(P; Q) d\tau_Q$$

abschätzen. Es bleibt nur noch zu beweisen, daß das Integral

$$\sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2 r^2} d\tau_Q \quad (327)$$

gleichmäßig gegen $\frac{1}{4\pi}$ konvergiert, wenn P in D' liegt. Es seien D_0 und D_1 Kugeln mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r' bzw. d , wobei d den Durchmesser des Bereiches D_t bezeichnet. Dann gilt

$$\sqrt{\lambda} \iiint_{D_0} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2 r^2} d\tau_Q \leq \sqrt{\lambda} \iiint_{D_t} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2 r^2} d\tau_Q \leq \sqrt{\lambda} \iiint_{D_1} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2 r^2} d\tau_Q.$$

Die Integrale über D_0 und D_1 drücken wir in Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt P aus und führen die neue Veränderliche $\varrho = \sqrt{\lambda}r$ ein. So gelangen wir zu

der Ungleichung

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda} r'} e^{-\varrho} d\varrho \leq \sqrt{\lambda} \iint_{D_t} \int \frac{e^{-\sqrt{\lambda} r}}{16\pi^2 r^2} d\tau \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda} d} e^{-\varrho} d\varrho.$$

Für $\lambda \rightarrow \infty$ konvergieren die Randglieder der Ungleichung gegen $\frac{1}{4\pi}$; sie hängen nicht von der Lage des Punktes P in D' ab. Hieraus folgt unmittelbar, daß das Integral (327) gleichmäßig in D' gegen $\frac{1}{4\pi}$ strebt, und damit ist die Beziehung (326) bewiesen. Unter Berücksichtigung von (325) können wir D' so nahe an D_t wählen, daß das Integral von $\sqrt{\lambda} \psi(P, \lambda)$ über $D_t - D'$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, wobei ε eine vorgegebene positive Zahl ist. Andererseits gilt wegen (326) für hinreichend große λ

$$\left| \iint_{D'} \sqrt{\lambda} \psi(P, \lambda) d\tau - \frac{v'}{4\pi} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei v' das Volumen von D' bezeichnet. Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$\left| \iint_{D_t} \sqrt{\lambda} \psi(P, \lambda) d\tau - \frac{v}{4\pi} \right| \leq \frac{1}{4\pi} (v - v') + \varepsilon,$$

in der v das Volumen von D_t ist. Daraus folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \iint_{D_t} \sqrt{\lambda} \psi(P, \lambda) d\tau = \frac{v}{4\pi}$$

und wegen (322)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)} = \frac{v}{4\pi}. \quad (328)$$

Die Benutzung dieser Beziehung zur Herleitung eines asymptotischen Ausdrucks für λ_k beruht auf dem folgenden Satz.

Satz. *Konvergiert die Reihe*

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} \quad (c_k > 0, \lambda_k > 0) \quad (329)$$

mit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$ für $\lambda > 0$ und ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} s(\lambda) = H, \quad (330)$$

so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k = \frac{2H}{\pi}, \quad (331)$$

wobei in der letzten Summe die Summation über die Werte von k zu erstrecken ist, für die $\lambda_k \leq \lambda$ ist.

Wir wenden diesen Satz auf die Reihe (328) an. In diesem Fall ist $c_k = \frac{1}{\lambda_k}$ und $H = \frac{v}{4\pi}$, und wir erhalten

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda}, \quad (332)$$

wobei $\varepsilon(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Für $\lambda = \lambda_n$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda_n} + \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0). \quad (333)$$

Wir setzen

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}$$

und bezeichnen die linke Seite von (332) mit $\varphi(\lambda)$. Dies ist eine nicht abnehmende Funktion von λ ,

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad \text{für } \lambda < \lambda_1 \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda) = \sigma_m \quad \text{für } \lambda_m \leq \lambda < \lambda_{m+1}. \quad (334)$$

Jetzt wollen wir einen asymptotischen Ausdruck von λ_n für große n herleiten. Es gilt

$$n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{1}{\lambda_k} = \sigma_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \dots + \sigma_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \sigma_n \lambda_n. \quad (335)$$

Die nicht abnehmende Funktion

$$\varphi(\lambda) = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} \quad (336)$$

ist über jedes endliche Intervall integrierbar, und damit ist der zweite Summand auf der rechten Seite ebenfalls eine integrierbare Funktion. Wegen (332) und (334) gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_n} \varphi(\lambda) d\lambda &= \sigma_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(\lambda_3 - \lambda_2) + \dots + \sigma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \\ &= \frac{v}{3\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (337)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (338)$$

gilt. Es sei δ eine vorgegebene positive Zahl. Wir legen p so groß fest, daß $|\varepsilon(\lambda)| \leq \delta$ gilt für $\lambda \geq \lambda_p$. Weiterhin gilt

$$\left| \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda \right| \leq \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)| \sqrt{\lambda} d\lambda + 2\delta \frac{(\lambda_n^{3/2} - \lambda_p^{3/2})}{3} \quad (n > p),$$

woraus

$$\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda \right| \leq \frac{2}{3} \delta + \left[\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)| \sqrt{\lambda} d\lambda - \frac{2\delta \lambda_p^{3/2}}{3\lambda_n^{3/2}} \right]$$

folgt. Für hinreichend große n ist die eckige Klammer dem absoluten Betrag nach nicht größer als $\frac{1}{3}\delta$, d. h., es gilt

$$\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda \right| \leq \delta \quad \text{für große } n;$$

daraus ergibt sich (338). Somit erhalten wir wegen (337) die Beziehung

$$\sigma_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(\lambda_3 - \lambda_2) + \dots + \sigma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \frac{v}{3\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \varepsilon'_n \lambda_n^{3/2}$$

mit $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Setzen wir diese Beziehung in (335) ein und benutzen (333), so erhalten wir

$$n = \frac{v}{6\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \varepsilon''_n \lambda_n^{3/2} \quad (339)$$

mit $\varepsilon''_n \rightarrow 0$. Hieraus folgt $\lambda_n = \left(\frac{6\pi^2 n}{v} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{6\pi^2}{v} \varepsilon''_n \right)^{-2/3}$ und schließlich

$$\lambda_n = \left(\frac{6\pi^2 n}{v} \right)^{2/3} + \varepsilon'''_n n^{2/3} \quad (\varepsilon'''_n \rightarrow 0). \quad (340)$$

Für einen ebenen Bereich lautet das Resultat

$$\lambda_n = \frac{4\pi n}{S} + \varepsilon'''_n n, \quad (341)$$

wobei S den Flächeninhalt des Bereiches bezeichnet.

Somit braucht nur noch der Satz über die Reihe (329) bewiesen zu werden.

Mit Hilfe der angegebenen Methode untersuchte CARLEMAN in seiner Arbeit „Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen“ (Berichte der Sächsischen Akad. der Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse 88 (1936)) die Eigenwerte von Differentialgleichungen sehr allgemeiner Gestalt.

Wir wollen hier das von ihm erhaltene Resultat angeben. Es sei ein Ausdruck

$$L(u) = \sum_{p,q=1}^3 a_{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{p=1}^3 a_p \frac{\partial u}{\partial x_p} + au \quad (a_{qp} = a_{pq})$$

gegeben, worin a_{pq} , a_p und a in einem abgeschlossenen Bereich D des x_1, x_2, x_3 -Raumes vorgegebene reelle stetige Funktionen sind. Weiterhin sei die quadratische Form

$$\sum_{p,q=1}^3 a_{pq} \xi_p \xi_q$$

der Veränderlichen ξ_k positiv definit, wenn sich der Punkt (x_1, x_2, x_3) in dem abgeschlossenen Bereich D befindet. Wir betrachten das aus der Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda u = 0$$

und der Bedingung (306) bestehende Randwertproblem. Es gibt unendlich viele Eigenwerte, die auch komplex sein können. In jedem beschränkten Teil der Ebene befinden sich nur endlich viele Eigenwerte, und wenn sie nach nicht abnehmenden Beträgen geordnet werden, gilt die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2} \iiint_D \frac{dv}{\sqrt{\Delta}},$$

in der Δ die Determinante bezeichnet, die aus den Elementen a_{pq} besteht. Da die quadratische Form positiv definit ist, ist übrigens $\Delta > 0$ und die rechte Seite der letzten Beziehung reell.

In R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, werden die für große n erhaltenen asymptotischen Ausdrücke für die Eigenwerte λ_n der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ mit Hilfe der Extremaleigenschaften der Eigenwerte hergeleitet. Diese Methode ist von uns in [90] für den Fall einer einzigen unabhängigen Veränderlichen entwickelt worden. Die Anwendung dieser Methode auf die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ ist bedeutend schwieriger.

139. Der Beweis des Satzes aus [138]. Bevor wir zum Beweis des Satzes übergehen, den wir im vorigen Abschnitt formuliert haben, stellen wir einige Hilfsformeln auf und beweisen zwei Hilfssätze. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k, \quad (342)$$

$$\sigma_n = \varphi(\lambda_n) = \sum_{k=1}^n c_k. \quad (343)$$

In (342) erstreckt sich die Summation über diejenigen Werte von k , für die $\lambda_k \leq \lambda$ ist. Die Funktion $\varphi(\lambda)$ ist eine nicht abnehmende, nichtnegative Funktion von λ :

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad \text{für } \lambda < \lambda_1, \quad \varphi(\lambda) = \sigma_m \quad \text{für } \lambda_m \leq \lambda < \lambda_{m+1}. \quad (344)$$

Da $\lambda_k + \lambda \leq 2\lambda$ ist für $\lambda_k \leq \lambda$, gilt

$$\varphi(\lambda) \leq 2\lambda \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda},$$

und unter Berücksichtigung von (330) erhalten wir

$$\varphi(\lambda) = O(\sqrt{\lambda}), \quad (345)$$

d. h., der Quotient $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ bleibt für $\lambda \rightarrow \infty$ beschränkt. Weiterhin gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left(\frac{1}{\lambda_k + \lambda} - \frac{1}{\lambda_{k+1} + \lambda} \right) + \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \lambda}$$

mit

$$\frac{1}{\lambda_k + \lambda} - \frac{1}{\lambda_{k+1} + \lambda} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{dx}{(x + \lambda)^2},$$

und wegen (334) können wir

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \int_0^{\lambda_n} \frac{\varphi(x)}{(x + \lambda)^2} dx + \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \lambda}$$

schreiben. Aus $\sigma_n = \varphi(\lambda_n)$ und aus (345) folgt $\frac{\sigma_n}{\lambda_n + \lambda} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so daß aus der letzten Beziehung

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(x + \lambda)^2} dx \quad (346)$$

folgt. Aus (345) ergibt sich unmittelbar, daß der Integrand für $x \rightarrow \infty$ von der Ordnung $x^{-3/2}$ ist. Zur Abkürzung der Schreibweise führen wir die folgende Bezeichnung ein. Gilt $\psi(\lambda) = a\lambda^b + \varepsilon(\lambda)\lambda^b$ mit $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \infty$, so schreiben wir $\psi(\lambda) \sim a\lambda^b$ (vgl. [III/2, 112]). Wir beweisen nun zwei Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Wenn die Funktion $f(\lambda)$ für alle hinreichend großen positiven Werte von λ erklärt ist und eine stetige Ableitung besitzt, wenn der Ausdruck $\lambda f'(\lambda)$ bei zunehmendem λ nicht abnimmt und wenn $f(\lambda) \sim a\lambda^q$ ($q > 0$) gilt, ist $f'(\lambda) \sim aq\lambda^{q-1}$.*

Zunächst beweisen wir diesen Hilfssatz für $a=1$ und $q=1$. Dann gilt $f(\lambda) \sim \lambda$, und wir müssen beweisen, daß $f'(\lambda) \sim 1$ ist, d. h., daß $f'(\lambda) \rightarrow 1$ gilt für $\lambda \rightarrow \infty$.

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, $f'(\lambda)$ konvergiert nicht gegen 1, so existiert eine Folge von Werten λ_n , für die $f'(\lambda_n) \rightarrow h$ für $\lambda_n \rightarrow \infty$ gilt, wobei h eine von 1 verschiedene Zahl ist. Beispielsweise sei $h > 1$. Ferner sei γ eine positive Zahl. Da $\lambda f(\lambda)$ eine nicht abnehmende Funktion ist, gilt

$$\frac{f(\lambda_n + \gamma\lambda_n) - f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} = \frac{1}{\gamma\lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_n + \gamma\lambda_n} f'(\lambda) d\lambda \cong \frac{\lambda_n f'(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_n + \gamma\lambda_n} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{f'(\lambda_n)}{\gamma} \lg(1 + \gamma).$$

Der letzte Ausdruck konvergiert gegen die Zahl $\frac{h}{\gamma} \lg(1 + \gamma)$, die größer als 1 ist, wenn wir γ hinreichend nahe bei 0 wählen. Nun folgt aber aus $f(\lambda) \sim \lambda$ unmittelbar

$$\frac{f(\lambda_n + \gamma\lambda_n) - f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} \rightarrow 1.$$

Durch diesen Widerspruch ist der Hilfssatz für $a=q=1$ bewiesen.

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über. Wir setzen $\mu = \lambda^q$ und führen an Stelle von $f(\lambda)$ die neue Funktion $f_1(\mu) = \frac{1}{a} f(\mu^{1/q})$ ein. Dann gilt

$$f_1(\mu) \sim \mu \quad (\mu \rightarrow \infty), \quad \mu f_1'(\mu) = \frac{1}{aq} \mu^{1/q} f'(\mu^{1/q}) = \frac{1}{aq} \lambda f'(\lambda).$$

Somit ist $\mu f_1'(\mu)$ eine nicht abnehmende Funktion, und wir können auf $f_1(\mu)$ den Hilfssatz für $a=q=1$ anwenden, woraus

$$f_1'(\mu) \sim 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{aq} \mu^{(1/q)-1} f'(\mu^{1/q}) \sim 1$$

folgt. Hieraus ergibt sich $f'(\lambda) \sim aq\lambda^{q-1}$, womit der Hilfssatz bewiesen ist. Dieser Beweis bleibt auch für $h = \infty$ richtig.

Wir betrachten nun das Integral

$$K_p = \int_0^\infty \frac{u^{p+(1/2)}}{(u+1)^{2p+2}} du \quad (p=1, 2, \dots). \quad (347)$$

Durch die Transformation $u = \frac{x}{1-x}$ der Integrationsveränderlichen führen wir dieses Integral in die Gestalt [III/2, 72]

$$K_p = \int_0^1 x^{p+(1/2)} (1-x)^{p-(1/2)} dx = \frac{\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p+2)} \quad (348)$$

über.

Hilfssatz II. Es sei

$$K_{p,1} = \int_0^{1-\alpha} \frac{u^{p+(1/2)}}{(u+1)^{2p+2}} du, \quad K_{p,2} = \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{u^{p+(1/2)}}{(u+1)^{2p+2}} dp, \quad K_{p,3} = \int_{1+\alpha}^{\infty} \frac{u^{p+(1/2)}}{(u+1)^{2p+2}} du$$

mit $0 < \alpha < 1$. Dann gilt

$$K_{p,1} \leq \delta'_p K_p, \quad K_{p,2} \geq (1 - \delta''_p) K_p, \quad K_{p,3} \leq \delta'''_p K_p, \quad (349)$$

wobei die Größen δ'_p , δ''_p und δ'''_p von der Wahl von α abhängen und für $p \rightarrow \infty$ gegen 0 streben.

Wenden wir die Stirlingsche Formel [III/2, 75]

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-(1/2)} e^{-z} [1 + \varepsilon(z)] \quad (\varepsilon(z) \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow \infty)$$

auf die rechte Seite von (348) an, so erhalten wir

$$K_p = \sqrt{2\pi} 2^{-3/2} 2^{-2p} \frac{\left(p + \frac{3}{2}\right)^{p+1} \left(p + \frac{1}{2}\right)^p}{(p+1)^{2p+(3/2)}} (1 + \varepsilon_p)$$

mit $\varepsilon_p \rightarrow 0$ für $p \rightarrow \infty$. Wird der in dieser Beziehung auftretende Bruch mit $\sqrt{p}$ multipliziert, so strebt er für $p \rightarrow \infty$ gegen 1, und wir können

$$K_p = A p^{-1/2} 2^{-2p} (1 + \varepsilon'_p) \quad (\varepsilon'_p \rightarrow 0) \quad (350)$$

mit $A = \sqrt{2\pi} \cdot 2^{-3/2}$ schreiben. Die Funktion $\frac{u}{(u+1)^2}$ hat für $u=1$ ein Maximum, das gleich $\frac{1}{4}$ ist. Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$K_{p,1} \leq k^p \int_0^{1-\alpha} \frac{u^{1/2}}{(u+1)^2} du < k^p \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2}}{(u+1)^2} du$$

mit $0 < k < \frac{1}{4}$, in der k von der Wahl von α abhängt. Somit erhalten wir

$$K_{p,1} \leq A_1 k^p \quad (351)$$

mit $A_1 = \frac{\pi}{2}$ und ganz entsprechend

$$K_{p,3} \leq A_1 k^p. \quad (352)$$

Es gilt $k^p = \left(\frac{1}{4} - \delta\right)^p$, wobei die Zahl δ größer als 0 ist und von der Wahl von α abhängt. Hieraus folgt, daß der Ausdruck $k^p \cdot 2^{2p} p^{1/2} = (1 - \delta)^p \cdot p^{1/2}$ für $p \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, und unter Berücksichtigung von (350), (351) und (352) erhalten wir die Ungleichungen (349) für $K_{p,1}$ und $K_{p,3}$. Weiterhin gilt

$$K_{p,2} = K_p - K_{p,1} - K_{p,3} \geq K_p - (\delta'_p + \delta'''_p) K_p,$$

woraus die Ungleichung (349) für $K_{p,2}$ hervorgeht; damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis des in [138] aufgestellten Satzes. Nach den Voraussetzungen dieses Satzes gilt

$$s(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2} dx \sim H \lambda^{-1/2}. \quad (353)$$

Wir betrachten die Funktion $\lambda^2 s(\lambda)$ und beweisen, daß ihre Ableitung positiv ist und bei wachsendem λ nicht abnimmt. Es ist

$$\frac{d}{d\lambda} [\lambda^2 s(\lambda)] = 2 \int_0^\infty \frac{\lambda x \varphi(x)}{(x+\lambda)^3} dx = 2 \int_0^\infty \frac{u \varphi(\lambda u)}{(u+1)^3} du.$$

Aus dem letzten Ausdruck und aus der Tatsache, daß die Funktion $\varphi(x)$ nicht abnimmt, folgt unmittelbar, daß auch die auf der linken Seite stehende Ableitung positiv ist und nicht abnimmt. Somit können wir auf die Funktion $\lambda^2 s(\lambda)$ den Hilfssatz I anwenden und erhalten unter Berücksichtigung von (353)

$$\frac{d}{d\lambda} [\lambda^2 s(\lambda)] \sim \frac{3}{2} H \lambda^{1/2},$$

woraus

$$-s'(\lambda) = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^3} dx \sim \frac{1}{2} H \lambda^{-3/2} \quad (354)$$

hervorgeht. Weiterhin erhalten wir

$$-\lambda^3 s'(\lambda) \sim \frac{1}{2} H \lambda^{3/2}, \quad -\frac{d}{d\lambda} [\lambda^3 s'(\lambda)] = 2 \cdot 3 \int_0^\infty \frac{u \varphi(\lambda u)}{(u+1)^4} du;$$

damit können wir den Hilfssatz I auch auf die Funktion $-\lambda^3 s'(\lambda)$ anwenden und erhalten

$$-\frac{d}{d\lambda} [\lambda^3 s'(\lambda)] \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} H \lambda^{1/2}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation und unter Benutzung von (354) die Beziehung

$$s''(\lambda) = 3! \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^4} dx \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} H \lambda^{-5/2}. \quad (355)$$

Setzen wir das Verfahren fort, so gelangen wir allgemein zu der Beziehung

$$(-1)^m s^{(m)}(\lambda) = (m+1)! \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{m+2}} dx \sim \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m} H \lambda^{-\frac{2m+1}{2}}. \quad (356)$$

Wir studieren nun das asymptotische Verhalten des Integrals

$$J_p(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x^p \varphi(x)}{(x+\lambda)^{2p+2}} dx \quad (p \geq 1) \quad (357)$$

für große λ . Es gilt

$$\frac{x^p}{(x+\lambda)^{2p+2}} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^p}{(x+\lambda)^{p+2}} = \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} \frac{(-\lambda)^s}{(x+\lambda)^{p+2+s}}$$

mit

$$\binom{p}{s} = \frac{p(p-1) \dots (p-s-1)}{s!}, \quad \binom{p}{0} = 1,$$

und folglich ist

$$J_p(\lambda) = \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (-\lambda)^s \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{p+2+s}} dx.$$

Unter Berücksichtigung von (356) erhalten wir die Beziehungen

$$J_p(\lambda) \sim H \lambda^{-p-(1/2)} \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2p+2s+1)}{(p+s+1)! 2^{p+s}}, \quad J_0(\lambda) = s(\lambda) \sim H \lambda^{-1/2}. \quad (358)$$

Die erste Beziehung läßt sich in der Gestalt

$$J_p(\lambda) \sim H \lambda^{-p-(1/2)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)} \quad (359)$$

schreiben. Wir wollen die Relation

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)} = \frac{2}{\pi} K_p \quad (360)$$

beweisen. Zu diesem Zweck untersuchen wir das Integral

$$L_p = \int_0^{\infty} \frac{x^{p+(1/2)}}{(x+\lambda)^{2p+2}} dx, \quad (361)$$

das sich mit Hilfe der Transformation $x = \lambda u$ auch in der Form

$$L_p = \frac{1}{\lambda^{p+(1/2)}} \int_0^{\infty} \frac{u^{p+(1/2)}}{(u+1)^{2p+2}} du = \frac{1}{\lambda^{p+(1/2)}} K_p \quad (362)$$

schreiben läßt. Wegen

$$\left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^p = \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \frac{\lambda^s}{(x+\lambda)^s}$$

läßt sich das Integral (361) in der Gestalt

$$L_p = \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \lambda^s \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{(x+\lambda)^{p+s+2}} dx = \frac{1}{\lambda^{p+(1/2)}} \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2}}{(u+1)^{p+s+2}} du \quad (363)$$

darstellen. Mit $u = \frac{x}{1-x}$ erhalten wir die Beziehung

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{1/2}}{(u+1)^{p+s+2}} du = \int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{p+s-(1/2)} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}.$$

Setzen wir diese in (363) ein, so finden wir

$$L_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{p+(1/2)}} \sum_{s=0}^p (-1)^s \binom{p}{s} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}.$$

Durch Vergleich mit (362) erhalten wir (360); die Beziehung (359) nimmt die Gestalt

$$J_p(\lambda) \sim \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p \quad (364)$$

oder

$$J_p(\lambda) = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p(1 + \eta_\lambda) \quad (365)$$

an, wobei η_λ von p und λ abhängt und bei festem p und $\lambda \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

Das Integral $J_p(\lambda)$ zerlegen wir in vier Teilintegrale:

$$J_p(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^p \varphi(x)}{(x + \lambda)^{2p+2}} dx + \int_1^{(1-\alpha)\lambda} + \int_{(1-\alpha)\lambda}^{(1+\alpha)\lambda} + \int_{(1+\alpha)\lambda}^\infty = J_{p,0} + J_{p,1} + J_{p,2} + J_{p,3} \quad (366)$$

mit $0 < \alpha < 1$. Aus (345) folgt $0 \leq \varphi(\lambda) \leq A \sqrt{\lambda}$, wobei A konstant ist, und damit gilt

$$J_{p,1} \leq A \int_0^{(1-\alpha)\lambda} \frac{x^{p+(1/2)}}{(x + \lambda)^{2p+2}} dx = A \lambda^{-p-(1/2)} K_{p,1}.$$

Hieraus geht nach Hilfssatz II die Beziehung

$$J_{p,1} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p \eta_p$$

hervor, wobei η_p von p und α abhängt und bei festem α für $p \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. In derselben Weise erhalten wir

$$J_{p,3} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p \eta'_p,$$

wobei η'_p der Größe η_p entspricht. Jetzt schätzen wir $J_{p,0}$ ab. Es gilt

$$J_{p,0} \leq B \int_0^1 \frac{dx}{(x + \lambda)^{2p+2}} = \frac{B}{2p+1} \left[\frac{1}{\lambda^{2p+1}} - \frac{1}{(1 + \lambda)^{2p+1}} \right] \leq \frac{B_1}{p \lambda^{2p+1}},$$

hierbei sind B und B_1 Konstante (die von p und λ unabhängig sind). Daraus folgt, daß wir

$$J_{p,0} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p \eta'_\lambda$$

schreiben können, wobei

$$0 < \eta'_\lambda \leq \frac{C}{p K_p} \lambda^{-p-(1/2)}$$

und C eine Konstante ist. Aus den bisherigen Beziehungen ergibt sich

$$J_{p,2} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-(1/2)} K_p (1 + \eta_\lambda - \eta'_\lambda - \eta_p - \eta'_p). \quad (367)$$

Unter Berücksichtigung der Definition von $J_{p,2}$ erhalten wir, da $\varphi(x)$ bei wachsendem x nicht abnimmt,

$$J_{p,2} \geq \frac{\varphi(\lambda + \alpha\lambda)}{(\lambda - \alpha\lambda)^{1/2}} \int_{\lambda - \alpha\lambda}^{\lambda + \alpha\lambda} \frac{x^{p+(1/2)}}{(x + \lambda)^{2p+2}} dx = \frac{\varphi(\lambda + \alpha\lambda)}{(\lambda + \alpha\lambda)^{1/2}} \cdot \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2} \lambda^{-p-(1/2)} K_{p,2}, \quad (368)$$

woraus

$$\frac{\varphi(\lambda + \alpha\lambda)}{(\lambda + \alpha\lambda)^{1/2}} \geq \lambda^{p+(1/2)} \frac{J_{p,2}}{K_{p,2}} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2} \geq \lambda^{p+(1/2)} \frac{J_{p,2}}{K_p} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2}$$

hervorgeht. Berücksichtigen wir noch (367), so finden wir die Ungleichung

$$\frac{\varphi(\lambda + \alpha\lambda)}{(\lambda + \alpha\lambda)^{1/2}} \cong \frac{2H}{\pi} (1 + \eta_\lambda - \eta'_\lambda - \eta_p - \eta'_p) \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2}. \quad (369)$$

Analog zu (368) gilt

$$J_{p,2} \cong \frac{\varphi(\lambda - \alpha\lambda)}{(\lambda - \alpha\lambda)^{1/2}} \int_{\lambda - \alpha\lambda}^{\lambda + \alpha\lambda} \frac{x^{p+(1/2)}}{(x + \lambda)^{2p+2}} dx = \frac{\varphi(\lambda - \alpha\lambda)}{(\lambda - \alpha\lambda)^{1/2}} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2} \lambda^{-p-(1/2)} K_{p,2},$$

woraus

$$\frac{\varphi(\lambda - \alpha\lambda)}{(\lambda - \alpha\lambda)^{1/2}} \cong \lambda^{p+(1/2)} \frac{J_{p,2}}{K_{p,2}} \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2}$$

hervorgeht, und nach dem Hilfssatz II und der Beziehung (367) erhalten wir

$$\frac{\varphi(\lambda - \alpha\lambda)}{(\lambda - \alpha\lambda)^{1/2}} \cong \frac{2H}{\pi} (1 + \eta_\lambda - \eta'_\lambda - \eta_p - \eta'_p) \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2} (1 - \delta''_p)^{-1}. \quad (370)$$

Wir zeigen noch, daß der Quotient $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1/2}}$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen $\frac{2H}{\pi}$ strebt,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1/2}} = \frac{2H}{\pi}. \quad (371)$$

Allgemein ist eine Zahl A ein Häufungspunkt von $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ für $\lambda \rightarrow \infty$, wenn es zu beliebig vorgegebenen positiven Werten ε und M Werte λ' gibt, für die $\left| A - \frac{\varphi(\lambda')}{\sqrt{\lambda'}} \right| \leq \varepsilon$ und $\lambda' \geq M$ gilt. Analog dazu ist $A = \infty$ dann ein Häufungspunkt von $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$, wenn es bei beliebig vorgegebenen positiven Werten M und N Werte λ' gibt, für die $\frac{\varphi(\lambda')}{\sqrt{\lambda'}} \geq N$ für $\lambda' \geq M$ gilt. Dabei ist ein Häufungspunkt ein Wert A , für den eine unbeschränkt wachsende Folge λ_n von Werten λ existiert derart, daß $\frac{\varphi(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \rightarrow A$ gilt. Wir haben zu zeigen, daß nur ein einziger Häufungspunkt existiert und daß dieser gleich $\frac{2H}{\pi}$ ist.

Wir kehren zu den Ungleichungen (369) und (370) zurück und bemerken, daß ihre linken Seiten nicht von der Größe p abhängen, die auf den rechten Seiten der Ungleichungen vorkommt. Zunächst legen wir p und α in beliebiger Weise fest und lassen λ so gegen ∞ streben, daß die linken Seiten von (369) und (370) gegen einen der Häufungspunkte A streben. Da die Größen η_p und η'_p nicht von λ abhängen, erhalten wir hierbei

$$A \cong \frac{2H}{\pi} (1 - \eta_p - \eta'_p) \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2}$$

und

$$A \leq \frac{2H}{\pi} (1 - \eta_p - \eta'_p) \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2}.$$

Der Ausdruck A auf den linken Seiten hängt weder von p noch von α ab. Nehmen wir an, daß p hinreichend groß festgelegt ist und α hinreichend nahe bei 0 liegt, so erhalten wir, daß der einzig mögliche Wert von A gerade der Wert $\frac{2H}{\pi}$ ist; es

gilt also (371). Somit ist die Behauptung (331) des Satzes aus [138] bewiesen. Der angegebene Beweis stammt von HARDY und LITTLEWOOD. In der Arbeit dieser Autoren wird ein etwas allgemeinerer Satz aufgestellt, von dem der bewiesene Satz ein Spezialfall ist.

140. Lineare Differentialgleichungen allgemeinerer Gestalt. Wir betrachten eine Differentialgleichung der Gestalt

$$L(u) = \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} + b(x_1, x_2, x_3) u = -f(x_1, x_2, x_3). \quad (372)$$

Einen Raumpunkt (x_1, x_2, x_3) oder (ξ_1, ξ_2, ξ_3) bezeichnen wir im folgenden einfach mit x oder ξ .

Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (372), welche die homogene Randbedingung

$$u|_S = 0 \quad (373)$$

erfüllt. Die vorgegebenen Funktionen $b(x)$ und $f(x)$ setzen wir im abgeschlossenen Bereich $\bar{D}_t$ als stetig voraus, außerdem sollen sie im Innern von D_t stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Ganz analog zu dem Vorgehen in [137] machen wir für eine Lösung unseres Problems den Ansatz

$$u(x) = \iiint_{D_t} G(x, \xi) \mu(\xi) d\tau_\xi, \quad (374)$$

wobei $G(x; \xi)$ die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators mit der Randbedingung (373) ist. Diese Bedingung ist für die Funktion $u(x)$, die durch (374) definiert ist, bei jeder beliebigen Wahl der stetigen Funktion $\mu(\xi)$ erfüllt; wir müssen diese Funktion nun so wählen, daß im Innern von D_t die Differentialgleichung (372) erfüllt ist. Nehmen wir an, daß $\mu(\xi)$ stetige Ableitungen besitzt, so erhalten wir für $\mu(\xi)$ die Integralgleichung

$$\mu(x) = f(x) + \iiint_{D_t} K(x; \xi) \mu(\xi) d\tau_\xi \quad (375)$$

mit dem Kern

$$K(x; \xi) = b(x) G(x; \xi). \quad (376)$$

Wir betrachten die zugehörige homogene Integralgleichung

$$\mu(x) = \iiint_{D_t} K(x; \xi) \mu(\xi) d\tau_\xi. \quad (377)$$

Zu untersuchen ist, ob sie eine von der Nulllösung verschiedene Lösung besitzt. Unter der Voraussetzung $b(x) \leq 0$ in $\bar{D}_t$ sei $\mu_0(x)$ eine Lösung der Integralgleichung (377). Der Ausdruck (374) liefert für $\mu(\xi) = \mu_0(\xi)$ eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, welche der Bedingung (373) genügt. Eine solche Lösung ist aber identisch gleich 0 [136], d. h., es gilt

$$\iiint_{D_t} G(x; \xi) \mu_0(\xi) d\tau_\xi = 0, \quad (378)$$

und aus der Integralgleichung (377) folgt $\mu_0(x) \equiv 0$. Die Integralgleichung (377) hat also für $b(x) \leq 0$ als einzige Lösung die Nulllösung.

Folglich ist die Integralgleichung (375) für jede beliebige gegebene Funktion

$f(x)$ lösbar. Da $f(x)$ nach Voraussetzung im Innern von D_i stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, ergibt sich, daß auch $\mu(x)$ solche Ableitungen besitzt, woraus folgt, daß der Ausdruck (374) eine Lösung des gestellten Problems liefert. Man kann zeigen, daß die homogene Integralgleichung (377) unabhängig vom Vorzeichen von $b(x)$ als einzige Lösung die Nulllösung besitzt, falls der Bereich D_i hinreichend klein ist. Dies alles gilt auch für den ebenen Fall. Wenden wir die angegebene Methode auf die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^3 u_{x_i} x_i + \sum_{i=1}^3 a_i(x) u_{x_i} + b(x) u = -f(x) \quad (379)$$

an, so gelangen wir zu einer Integralgleichung mit dem Kern

$$K(x; \xi) = \sum_{i=1}^3 a_i(x) G_{x_i}(x; \xi) + b(x) G(x; \xi). \quad (380)$$

Genügen die Ableitungen der Greenschen Funktion einer Abschätzung

$$|G_{x_i}(x; \xi)| \leq \frac{C}{r^2}, \quad (381)$$

so kann man auf die zugehörige Integralgleichung die bekannten Existenzsätze anwenden. Es muß aber noch bewiesen werden, daß die Lösung $\mu(x)$ der Integralgleichung (375) im Innern von D_i stetige Ableitungen besitzt. Die Abschätzung (381) ist im Beispiel von D. M. EIDUS für eine Klasse von Gebieten bewiesen (Doklady AN SSSR 106 (1956)).

141. Der Greensche Tensor. Es sei $L(u)$ eine auf einen Vektor $u(u_1, u_2, u_3)$, der von x, y, z abhängt, ausgeübte lineare Differentialoperation, die ebenfalls auf einen Vektor führt. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$L(u) = -f, \quad (382)$$

in der f ein vorgegebener Vektor ist, der von x, y und z abhängt. Zerlegen wir die linke und die rechte Seite in ihre Komponenten, so erhalten wir ein System von drei Differentialgleichungen für die Komponenten u_1, u_2, u_3 des Vektors u . Wir setzen voraus, daß außerdem auf der Randfläche S des Bereiches D eine homogene Randbedingung, beispielsweise die Bedingung

$$u|_S = 0 \quad (383)$$

vorgegeben ist.

Unter einem *Greenschen Tensor* von $L(u)$ bei der Randbedingung (383) versteht man eine Matrix

$$G(P; Q) = G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}$$

mit der Eigenschaft, daß die Differentialgleichung (382) mit der Randbedingung (383) der Beziehung

$$u(P) = \iiint_D G(P; Q) f(Q) dv \quad (384)$$

gleichwertig ist, wobei der Integrand die Anwendung der Matrix $G(P; Q)$ als Operator auf den Vektor f darstellt, d. h., der Integrand ist der Vektor mit den Komponenten

$$G_{i1}f_1 + G_{i2}f_2 + G_{i3}f_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Jede Spalte des Tensors besteht aus den Komponenten eines Vektors $\mathbf{g}_k$ ($k=1, 2, 3$), der außer im Punkt Q stetige Ableitungen besitzt, die der zu (382) gehörigen homogenen Differentialgleichung und der Randbedingung (383) genügen. Der Charakter der Polarität im Punkt Q geht gewöhnlich leicht aus der physikalischen Bedeutung des Problems hervor. Unter Benutzung des Greenschen Tensors kann man das Problem, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Differentialgleichung

$$L(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{u} = 0$$

unter der Randbedingung (383) zu ermitteln, hier auf die Auflösung eines Systems von Integralgleichungen zurückführen.

Die Grundgleichung der Elastizitätstheorie für den Verschiebungsvektor lautet (vgl. [IV/1, 104]),

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \text{grad div } \mathbf{u} \right).$$

Unter Benutzung der Identität [II, 124] $\text{rot rot } \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}$ können wir die Differentialgleichung im statischen Fall in der Gestalt

$$\Delta^* \mathbf{u} = a \text{ grad div } \mathbf{u} - b \text{ rot rot } \mathbf{u} = 0 \quad (385)$$

mit

$$a = \frac{G(2m-2)}{m-2}, \quad b = G$$

oder, unter Benutzung der üblichen Laméschen Konstanten λ und μ , mit $a = \lambda + 2\mu$ und $b = \mu$ schreiben.

Im unbegrenzten Raum ruft die Kraft, deren Größe gleich 1 ist und die im Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ parallel zur Z -Achse angreift, die Verschiebung mit den Komponenten

$$u_1 = A \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3}, \quad u_2 = A \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3}, \quad u_3 = A \left[\frac{(z-\zeta)^2}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{r} \right]$$

hervor, wobei

$$A = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ist.¹⁾

Entsprechende Ausdrücke gelten auch für die Verschiebung, falls die Kräfte zur X -Achse oder zur Y -Achse parallel sind. Der Greensche Tensor lautet im vorliegenden Fall

$$G = \frac{1}{8\pi a} P_a + \frac{1}{8\pi b} P_b, \quad (386)$$

wobei

$$P_a = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r} - \frac{(x-\xi)^2}{r^3} & -\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} & -\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3} \\ -\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{(y-\eta)^2}{r^3} & -\frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3} \\ -\frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3} & -\frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{(z-\zeta)^2}{r^3} \end{array} \right\|$$

¹⁾ Vgl. A. E. H. LOVE, Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907 (Übersetzung aus dem Englischen).

und

$$P_b = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r} + \frac{(x-\xi)^2}{r^3} & \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} & \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3} \\ \frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{(y-\eta)^2}{r^3} & \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3} \\ \frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{(z-\zeta)^2}{r^3} \end{array} \right\|$$

ist.

An Stelle der Randbedingung (383) haben wir im vorliegenden Fall die Bedingung, daß die Vektoren im unendlich fernen Punkt verschwinden müssen. Die Differentialgleichung

$$\Delta^* u = -f$$

hat jetzt die Lösung (385). Den Tensor (386) nennt man in der Elastizitätstheorie gewöhnlich den Verschiebungstensor von SOMIGLIANA. Man kann ihn in der Gestalt

$$G = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[\frac{\lambda+3\mu}{r} E + (\lambda+\mu) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} \right]$$

schreiben, wobei E die Einheitsmatrix und $\mathbf{r} \times \mathbf{r}$ der Tensor

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \left\| \begin{array}{ccc} (x-\xi)^2 & (x-\xi)(y-\eta) & (x-\xi)(z-\zeta) \\ (y-\eta)(x-\xi) & (y-\eta)^2 & (y-\eta)(z-\zeta) \\ (z-\zeta)(x-\xi) & (z-\zeta)(y-\eta) & (z-\zeta)^2 \end{array} \right\|$$

ist.

In einer Arbeit von H. WEYL¹⁾ werden verschiedene Analoga zu der Greenschen Formel für die Differentialgleichung (385) eingeführt und der Greensche Tensor für einen beschränkten Bereich konstruiert. Ferner werden mit Hilfe dieses Tensors die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\Delta^* u + \lambda u = 0$$

untersucht.

142. Das ebene statische Problem der Elastizitätstheorie. Einige Randwertprobleme lassen sich im ebenen Fall mit Hilfe des Cauchyschen Integrals lösen. Dies ist beispielsweise beim Dirichletschen Problem für die harmonische und die biharmonische Differentialgleichung oder beim Problem der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreis oder eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches auf einen speziellen Bereich dieser Art der Fall (W. I. KRYLOW, *Matem. sb.* **4** (46) (1938)). Mit Hilfe des Cauchyschen Integrals führen diese Probleme auf Integralgleichungen. Wir legen die Anwendung dieser Methode auf die Lösung des ebenen statischen Problems der Elastizitätstheorie dar (N. I. MUSCHELISCHWILI, *Einige Probleme der Elastizitätstheorie*, Groningen 1953 (engl.; Übersetzung aus dem Russischen)). Besteht die Randbedingung in der Vorgabe der Verschiebung auf der Randkurve des Bereiches B , so reduziert sich die Lösung des statischen Problems auf die Ermittlung zweier Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, die in B regulär sind und auf der Randkurve des Bereiches der Randbedingung

$$-k\overline{\varphi(z')} + \overline{z'}\varphi'(z') + \psi(z') = f(z') \quad (z' \text{ auf } l) \quad (387)$$

genügen, wobei k eine reelle Konstante bezeichnet und $f(z')$ eine auf der Randkurve l vorgegebene Funktion ist. Multiplizieren wir beide Seiten von (387) mit $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z'-z}$ (dabei liege z außerhalb von l) und integrieren über l , so erhalten wir

$$-\frac{k}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-z} dz' + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{z'}\varphi'(z')}{z'-z} dz' = F(z),$$

¹⁾ Rend. Circolo mat. Palermo **39** (1915).

wobei

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad (z \text{ außerhalb von } l)$$

eine im Äußeren von l bekannte Funktion ist. Lassen wir z gegen die Randkurve l streben, so ergibt sich die Integralgleichung

$$\frac{k}{2} \overline{\varphi(t)} - \frac{k}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z' - t} dz' - \frac{1}{2} t \varphi'(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{z'} \varphi'(z')}{z' - t} dz' = F_a(t), \quad (388)$$

wobei die Integrale im Sinne ihrer Hauptwerte zu verstehen sind. Um eine Integralgleichung zu erhalten, welche gewöhnliche Integrale enthält, gehen wir von den Integralgleichungen

$$\frac{k}{2} \overline{\varphi(t)} + \frac{k}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z' - t} dz' = 0, \quad \frac{1}{2} \varphi'(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi'(z')}{z' - t} dz' = 0$$

aus.

Multiplizieren wir die zweite Integralgleichung mit $\bar{t}$ und addieren beide Integralgleichungen zu der Integralgleichung (388), so finden wir

$$k \overline{\varphi(t)} + \frac{k}{2\pi i} \int_l \overline{\varphi(z')} d \lg \frac{\bar{z}' - \bar{t}}{z' - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_l \varphi'(z') \frac{\bar{z}' - \bar{t}}{z' - t} dz' = F_a(t).$$

Schließlich erhalten wir durch partielle Integration in dem Integral, das $\varphi'(z')$ enthält, die Integralgleichung

$$k \overline{\varphi(t)} + \frac{k}{2\pi i} \int_l \overline{\varphi(z')} d \lg \frac{\bar{z}' - \bar{t}}{z' - t} - \frac{1}{2\pi i} \int_l \varphi(z') d \frac{\bar{z}' - \bar{t}}{z' - t} = F_a(t). \quad (389)$$

Setzen wir $z' - t = re^{i\theta}$, so können wir die vorige Integralgleichung in der Gestalt

$$k \overline{\varphi(t)} + \frac{1}{\pi} \int_l [e^{-2i\theta} \varphi(z') - \overline{k \varphi(z')}] d\theta = F_a(t) \quad (390)$$

schreiben.

Zerlegen wir diese Integralgleichung in Real- und Imaginärteil, so entsteht ein System zweier Integralgleichungen für die Werte des Real- und Imaginärteiles von $\varphi(z')$ auf l . Lösen wir diese Integralgleichungen, so erhalten wir $\varphi(z')$ auf l , und mit der Cauchy'schen Formel ergibt sich $\varphi(z)$ im Innern von l . Zur Ermittlung der Funktion $\psi(z)$ multiplizieren wir beide Seiten von (387) mit $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z' - z}$, wobei z im Innern von l liegt, und integrieren über l . Dadurch erhalten wir

$$\psi(z) = \frac{k}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z' - z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{z'} \varphi'(z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

Diese Methode, das Randwertproblem (387) in eine Integralgleichung überzuführen, stammt von N. I. MUSCHELISCHWILI, Doklady AN SSSR 3 (1934). Bei der Aufstellung der Integralgleichung (389) haben wir angenommen, daß das Problem eine Lösung hat. Unter Benutzung der Integralgleichung (389) kann man den Existenzsatz für das gestellte ebene statische Problem der Elastizitätstheorie nicht nur für einen einfach zusammenhängenden Bereich, wie wir ihn oben vorausgesetzt haben, sondern auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche beweisen.¹⁾

¹⁾ D. I. SCHERMAN, Doklady AN SSSR 4 (1935) 3.

Die Überführung des ebenen statischen Problems der Elastizitätstheorie in eine Integralgleichung wurde in einer Arbeit von V. FOCK (C. R. Acad. sci. Paris **182** (1926), 264) durchgeführt.

In der Integralgleichung (390) ist ϑ der Winkel zwischen dem Radiusvektor, der von einem festen Punkt t der Kurve l nach einem veränderlichen Punkt z' derselben Randkurve verläuft, und der reellen Achse. Berücksichtigen wir dies, so sehen wir, daß die zu (390) gehörige homogene Integralgleichung die von der Nulllösung verschiedene Lösung $\varphi(z') = \text{const}$ hat. Dasselbe gilt auch für die Integralgleichung (387). Wir können annehmen, daß der Punkt $z=0$ im Innern von l liegt. Aus der Gestalt der Randbedingung (387) folgt, daß wir den konstanten Summanden von $\varphi(z)$ zu $\psi(z)$ hinzufügen und somit $\varphi(0)=0$ annehmen können. Hieraus folgt

$$\int_l \frac{\varphi(z')}{z'} dz' = 0.$$

Addieren wir diese Beziehung zu (389), so erhalten wir eine neue Integralgleichung, die keine Eigenfunktion mehr hat.

Bei der Lösung des Randwertproblems (387) kann man auch eine andere Methode anwenden.¹⁾ Wir suchen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(z')}{z' - z} dz' \quad (z \text{ innerhalb von } l), \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{\omega(z')}}{z' - z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{z'} \omega(z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(z')}{z' - z} d\overline{z'},\end{aligned}$$

wobei $\omega(z')$ die auf l gesuchte Funktion ist. Setzen wir diese Ausdrücke in (387) ein und benutzen die Eigenschaften Cauchyscher Integrale, so erhalten wir für $\omega(z')$ die Integralgleichung

$$k\omega(t) - \frac{k}{2\pi i} \int_l \omega(z') d \lg \frac{\overline{z'} - \overline{t}}{z' - t} - \frac{1}{2\pi i} \int_l \omega(z') d \frac{\overline{z'} - \overline{t}}{z' - t} = -f(t).$$

In der zuletzt zitierten Arbeit von SCHERMAN werden der Fall eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches behandelt und die sich ergebende Integralgleichung gelöst.

143. Über die Ergebnisse von Schauder. Für elliptische Differentialgleichungen der allgemeinen Gestalt

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^n b_k u_{x_k} + cu = f \quad (391)$$

sind die grundlegenden (klassischen) Randwertprobleme: das Dirichletsche Problem, wo auf dem Rand S des Gebietes $D \subset R^n$ die Werte von u vorgegeben sind

$$u|_S = \varphi(s); \quad (392)$$

das Neumannsche Problem (das zweite Randwertproblem), wo auf S die Werte der Ableitung von u in Richtung der Konormalen an S vorgegeben sind

$$P(u)|_S \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i)|_S = \psi(s), \quad (393)$$

sowie das dritte Randwertproblem, wo auf S eine Linearkombination von u und $P(u)$ vorgegeben ist

$$P(u) + \sigma u|_S = \chi(s). \quad (394)$$

¹⁾ D. I. SCHERMAN, Doklady AN SSSR **27** (1940) 9.

Die schönsten Ergebnisse über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems in beschränkten Gebieten D wurden von SCHAUDER sowie teilweise von CACCIOPOLI in den folgenden Arbeiten bewiesen: J. SCHAUDER, Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 38 (1934), 257–282; Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, Studia Math. 5 (1934), 34–42; R. CACCIOPOLI, Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti, Rend. Acc. Lincei 19 (1934), 83–89. Die Ergebnisse wurden in Hölderschen Räumen $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ formuliert. Mit $C^\alpha(\bar{D})$ bezeichnet man den Raum der in $\bar{D}$ mit dem Exponenten α ($\alpha \in (0, 1)$) hölderstetigen Funktionen u , d. h., $u(x)$ ist in $\bar{D}$ stetig, und die Höldersche Konstante

$$\langle u \rangle_D^\alpha = \sup_{x, y \in D} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad (395)$$

ist endlich. Die Norm wird in $C^\alpha(\bar{D})$ durch die Gleichung

$$\|u\|_D^\alpha = \sup_{x \in \bar{D}} |u(x)| + \langle u \rangle_D^\alpha \quad (396)$$

erklärt. Elemente des $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ ($l \geq 1$) sind die in $\bar{D}$ stetigen Funktionen u , die sämtliche Ableitungen bis zur Ordnung l besitzen und deren Ableitungen der Ordnung l Elemente des $C^\alpha(\bar{D})$ sind. Die Norm wird in $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ durch die Gleichung

$$\|u\|^{(l+\alpha)} = \sum_{k=0}^l \sum_{(k)} \sup_{x \in \bar{D}} |D^k u(x)| + \sum_{(l)} \langle D^l u \rangle_D^\alpha \quad (397)$$

erklärt. Dabei bedeutet $\sum_{(k)}$ die Summation über alle Ableitungen der Ordnung k .

Der Raum $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ ($l \geq 0$) ist ein Banachraum. Ebenso sind die Räume $C^l(\bar{D})$ ($l = 0, 1, \dots$) der in $\bar{D}$ stetigen Funktionen u , die in $\bar{D}$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung l besitzen, Banachräume. Die Norm wird in $C^l(\bar{D})$ durch

$$\|u\|_D^{(l)} = \sum_{k=0}^l \sum_{(k)} \sup_{x \in \bar{D}} |D^k u(x)| \quad (398)$$

erklärt. An Stelle von $C^0(\bar{D})$ wird einfach $C(\bar{D})$ geschrieben.

Wir sagen, der Rand S des Gebietes $D \subset R^n$ gehört zur Klasse $C^{l+\alpha}$ ($l \geq 1, \alpha \in (0, 1)$), falls es eine Zahl $\rho > 0$ gibt derart, daß der Schnitt von S mit der Kugel B_ρ vom Radius ρ und dem Mittelpunkt in einem beliebigen Punkt $x^0 \in S$ eine zusammenhängende Fläche ist, deren Gleichung in dem örtlichen kartesischen Koordinatensystem $(y_1, \dots, y_n)$ mit dem Ursprung im Punkt x^0 die Gestalt $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ hat, wobei $\omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ in dem abgeschlossenen Gebiet $B(x^0, \rho)$ eine Funktion der Klasse $C^{l+\alpha}$ ist. $B(x^0, \rho)$ bezeichnet die orthogonale Projektion des Schnittes $S \cap B_\rho$ auf die Ebene $y_n = 0$. Der Terminus „örtliches kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkt $x^0 \in S$ “ bedeutet, daß die y_n -Achse wie die Normale im Punkt x^0 an S gerichtet ist, während die anderen paarweise orthogonale y_i in der tangentialen Hyperebene an S im Punkt x^0 liegen.

Für die auf der Fläche S der Klasse $C^{l+\alpha}$ gegebene Funktion φ heißt die Zugehörigkeit zur Klasse $C^{k+\beta}(S)$ ($k + \beta \leq l + \alpha$), daß sie als Funktion der örtlichen Koordinaten $(y_1, \dots, y_{n-1})$ für alle $x^0 \in S$ zu $C^{k+\beta}(\bar{B}(x^0, \rho))$ gehört.

Das grundlegende Ergebnis von SCHAUDER besteht dann in dem folgenden

Satz 1. Sind die Koeffizienten und die Störfunktion der Gleichung (391) Elemente aus $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ ($l \geq 0$), wobei D ein beschränktes Gebiet des R^n ist, gilt weiterhin

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq v \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad v = \text{const} > 0,$$

und $c(x) \leq 0$, gehört S zur Klasse $C^{l+2+\alpha}$ sowie φ zur Klasse $C^{l+2+\alpha}(S)$, dann hat das Problem (391), (392) eine eindeutig bestimmte Lösung u der Klasse $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$.

Auf der Grundlage dieses Satzes, der Aussage über die Kompaktheit der Einbettung von $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ in $C^l(\bar{D})$ und der Spektraleigenschaften vollstetiger Operatoren wird für den Operator L mit den Dirichletschen Randbedingungen ein Analogon des ersten und zweiten Fredholmschen Satzes formuliert. Wir betrachten neben dem Problem (391), (392) das Eigenwertproblem

$$L(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0. \quad (399)$$

Um möglichst vollständige Ergebnisse formulieren zu können, müssen wir λ komplex und u als komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen x voraussetzen. Dementsprechend müssen zu $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ analoge Räume eingeführt werden, deren Elemente komplexwertige Funktionen $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$ mit $u_k(x)$ ($k=1, 2$) aus $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ sind. Wir behalten dabei die Bezeichnung $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ bei. Die Norm in solchen Räumen wird als die Summe der Normen (397) von u_1 und u_2 definiert.

Es gilt dann die folgende Aussage.

Satz 2. Für L und S gelten die Voraussetzungen des Satzes 1 mit Ausnahme der Bedingung $c(x) \leq 0$. Dann hat das Problem (399) keine nichttrivialen (d. h. nicht identisch verschwindende) Lösungen außer im Fall abzählbar vieler Werte $\lambda = \lambda_k$ ($k=1, 2, \dots$). Diese Lösungen liegen im Raum $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Die Zahlen λ_k sind in der quadratischen Parabel $\pi = \{\lambda = \lambda' + i\lambda'' : \lambda''^2 \leq \alpha_1(\alpha_2 - \lambda'), \alpha_1 > 0\}$ verteilt. Die Parameter α_1 berechnet man aus den Koeffizienten von L . Jedes λ_k besitzt eine endliche Vielfachheit, d. h., jedem λ_k entspricht höchstens eine endliche Anzahl linearer unabhängiger Lösungen. Das Problem

$$L(u) = \lambda u + f, \quad u|_S = \varphi \quad (400)$$

ist für beliebiges $f \in C^{l+\alpha}(\bar{D})$ und $\varphi \in C^{l+2+\alpha}(S)$ eindeutig lösbar im Raum $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$, falls λ von den Zahlen λ_k ($k=1, 2, \dots$) verschieden ist.

Die letzte Aussage des Satzes kann man kurz auch so formulieren: Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Problem (400) folgt der Existenzsatz. Die Zahlen $\{\lambda_k\}$ bilden das Spektrum des Operators L unter den ersten Randbedingungen. Die ihnen entsprechenden Lösungen u_k (d. h. die Lösungen von (399) für $\lambda = \lambda_k$) heißen Eigenfunktionen des Operators L unter den ersten Randbedingungen. Sie liegen alle in $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Der dritte Fredholmsche Satz für das Problem (400) läßt sich unter den obigen Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten von L nicht in einfacher Form aussprechen. Wir formulieren diese Aussage weiter unten unter etwas anderen Voraussetzungen an die Koeffizienten von L , wenn wir das Problem (400) detailliert im Hilbertschen Raum $W_2^2(D)$ behandeln.

Der Beweis der obigen Sätze beruht im wesentlichen auf der folgenden wichtigen Ungleichung:

$$\|u\|_D^{(l+2+\alpha)} \leq C[\|L(u)\|_D^{(l+\alpha)} + \max_B |u| + \|u\|_S^{(l+2+\alpha)}]. \quad (401)$$

Sie gilt für beliebige Funktionen u aus $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Die in der Ungleichung auftretende Konstante C hängt nur von der Norm der Koeffizienten von L im Raum $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, der Elliptizitätskonstanten ν und dem Rand S , der zur Klasse $C^{l+2+\alpha}$ gehören muß, ab. Ist der Koeffizient $c(x)$ in L nicht positiv, so kann auf der rechten Seite von (401) der Summand $\max_B |u|$ weggelassen werden. Die Ungleichung (401) nennt man gewöhnlich Schaudersche Ungleichung (von SCHAUDER wurde sie für $l=0$ formuliert).

Wir führen die Beweise der angegebenen Aussagen hier nicht aus; sie sind nicht einfach und haben einen ausgeprägten technischen Charakter. Der Leser findet die Beweise in der Monographie von O. A. LADYSHENSKAJA und N. N. URALZEWA, Lineare und quasilineare Gleichungen vom elliptischen Typus, 2. Aufl., Nauka, Moskau 1973. Hier führen wir noch die originelle und sehr fruchtbare Idee von KORN an: das „Einfrieren“ der Koeffizienten. Diese Methode gestattet es, das gesamte Problem in einige „kanonische“ Probleme zu zerlegen, die nur den Laplaceschen Differentialoperator enthalten. Zur Lösung dieser Probleme verwendet man die klassische Potentialtheorie, wie sie in den vorangehenden Abschnitten dargestellt wurde. Die Idee von KORN hat bei der Lösung allgemeiner Randwertprobleme für elliptische bzw. parabolische Gleichungen und Systeme beliebiger Ordnung eine breite Anwendung gefunden. Insbesondere war es mit dieser Methode möglich, die Fredholmsche Lösbarkeit der Probleme (391), (393) und (391), (394) zu beweisen.

In den folgenden Abschnitten zeigen wir die Fredholmsche Lösbarkeit des Problems (400) im Hilbertschen Raum $W_2^2(D)$. Der Beweis verläuft wesentlich einfacher als in anderen Räumen, und man kommt ohne die erwähnte Methode von KORN zum Ziel.

144. Die verallgemeinerten Lösungen der Klasse $W_2^2(D)$. Wir setzen im folgenden voraus, daß der Operator L in der Gestalt

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \quad (a_{ik} = a_{ki}) \quad (402)$$

gegeben ist. Besitzen die Koeffizienten a_{ik} in D verallgemeinerte Ableitungen erster Ordnung, so kann jeder Operator L der Form (391) in die Gestalt (402) übergeführt werden und umgekehrt (dabei verändern sich nur die Koeffizienten b_i). In den nächsten Abschnitten untersuchen wir für allgemeine elliptische Operatoren L mit variablen Koeffizienten die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems

$$L(u) = \lambda u + f, \quad u|_S = 0 \quad (403)$$

in dem beschränkten Gebiet D in Abhängigkeit vom Parameter λ . Sind die a_{ik} , b_i sowie c meßbare, beschränkte Funktionen in D und besitzen die a_{ik} beschränkte verallgemeinerte Ableitungen erster Ordnung, dann liegt für jedes u aus $W_2^2(D)$ der Ausdruck $L(u)$ im Raum $L_2(D)$, und für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(D)$ gilt

$$-\int_D L(u) \eta \, dx = L(u, \eta). \quad (404)$$

Dabei bezeichnet $L(u, \eta)$ die Bilinearform

$$L(u, \eta) = \int_D (a_{ik} u_{x_i} \eta_{x_k} - b_i u_{x_i} \eta - cu \eta) \, dx. \quad (405)$$

Hier und im weiteren lassen wir das Summationszeichen $\sum$ für sich wiederholende Indizes weg. Die Gleichung (404) erhält man im Ergebnis der partiellen Integration der ersten Gruppe von Summanden der linken Seite von (404) (vgl. die Formel (107) aus [48]). Wegen $L(u) \in L_2(D)$ und wegen der Dichtheit der Menge $C_0^\infty(D)$ im Raum $\dot{W}_2^1(D)$ folgt die Gleichung (404) für beliebige Funktionen η aus $\dot{W}_2^1(D)$: Jede Funktion η aus $\dot{W}_2^1(D)$ kann man in der Norm von $W_2^1(D)$ durch Funktionen η_m aus $C_0^\infty(D)$ approximieren. Für u und η_m gilt die Beziehung (404). Man kann nun den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ vollziehen. Im Ergebnis erhalten wir die Gleichung (404) für beliebige Funktionen u aus $W_2^2(D)$ und η aus $\dot{W}_2^1(D)$.

Ist die Funktion u aus $W_2^2(D)$ und genügt der Gleichung

$$L(u) = \lambda u + f \quad (406)$$

(für fast alle $x \in D$) mit $f \in L_2(D)$, dann gilt für diese Funktion u und beliebiges η aus $\dot{W}_2^1(D)$

$$L(u, \eta) = - \int_D (\lambda u + f) \eta \, dx. \quad (407)$$

Es gilt auch die umgekehrte Aussage: Besteht für ein Element u aus $W_2^2(D)$ die Identität (407) für beliebige $\eta \in \dot{W}_2^1(D)$ (oder wenigstens für beliebige η aus $C_0^\infty(D)$), dann ist u Lösung der Gleichung (406). Aus (407) und (404) folgt nämlich

$$\int_D (L(u) - \lambda u - f) \eta \, dx = 0.$$

Da der erste Faktor zu $L_2(D)$ gehört und der zweite ein beliebiges Element aus $\dot{W}_2^1(D)$ (oder wenigstens aus $C_0^\infty(D)$) ist, muß nach Satz 2 aus [IV/1, 112] der erste Faktor verschwinden. Damit haben wir gezeigt, daß für Funktionen u aus $W_2^2(D)$ die Gleichung (406) und die Beziehung (407) mit beliebigem η aus $\dot{W}_2^1(D)$ bzw. $C_0^\infty(D)$ gleichwertig sind. Die Identität (407) hat jedoch noch Sinn für Funktionen u aus $W_2^1(D)$. Darüber hinaus gehen in diese Beziehung keine Ableitungen von a_{ik} nach x ein. Deshalb kann man die folgende Erweiterung des Lösungsbegriffs für die Gleichung (406) vornehmen:

Die Funktion $u(x)$ heißt *verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ der Gleichung (406)* (kurz *verallgemeinerte Lösung*), falls sie zu $W_2^1(D)$ gehört und für alle η aus $\dot{W}_2^1(D)$ der Beziehung (407) genügt. Bezüglich der Koeffizienten a_{ik} , b_i und c ist dabei nur vorauszusetzen, daß es sich um meßbare und beschränkte Funktionen in D handelt. Entsprechend nennen wir die Funktion u aus $W_2^1(D)$, die der Gleichung (407) für beliebige η aus $\dot{W}_2^1(D)$ genügt, *verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Problems (403)*.

Eine solche Erweiterung des Lösungsbegriffs für das Problem (403) erweist sich als äußerst zweckmäßig. Wenn für die a_{ik} für beliebige reelle Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (x \in D, \nu = \text{const} > 0)$$

gilt, die ja nichts anderes enthält als die Bedingung der Elliptizität von L , und wenn die a_{ik} differenzierbare Funktionen sind, dann gelten für das Problem (403) Aussagen, die man natürlicherweise Fredholmsche Sätze genannt hat. Sie sind zu den drei Fredholmschen Sätzen analog, die weiter oben für Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art sowie auch für allgemeinere Gleichungen der Gestalt $u = \lambda A(u) + f$ in separablen Hilbertschen Räumen (insbesondere in $L_2(D)$) für vollstetige Operatoren A bewiesen wurden (vgl. [IV/1, Kap. I] und [V, 133–135]). Wir geben hier die Formulierungen dieser Sätze an. Der Beweis dieser Aussagen – obwohl er vom analytischen Gesichtspunkt aus sehr einfach ist – verlangt die Kenntnis einer Reihe von Begriffen und Sätzen der Funktionalanalysis, die wir erst im fünften Band darlegen.

Der erste Fredholmsche Satz besagt: Wenn das Problem (403) höchstens eine verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ besitzt, dann ist es für beliebiges f aus $L_2(D)$ lösbar.

Das gilt auch für komplexe λ . Man muß in diesem Fall jedoch mit den komplexen Räumen $L_2(D)$, $W_2^1(D)$ und $\dot{W}_2^1(D)$ arbeiten. Mit anderen Worten: Man muß voraussetzen, daß u und f Elemente dieser Räume sind. *Die Koeffizienten von L setzen wir stets reell voraus.* Zur Formulierung des zweiten Fredholmschen Satzes ziehen

wir noch die beiden folgenden Eigenwertprobleme in Betracht:

$$L(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0 \quad (408)$$

und

$$L^*(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0. \quad (409)$$

Hier ist L^* der im Sinne von LAGRANGE zu L adjungierte Operator. Entsprechend [48] hat der Differentialoperator L^* die Gestalt

$$L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) + cu. \quad (410)$$

Unter einer nichttrivialen *verallgemeinerten Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Problems (408)* versteht man ein nicht identisch verschwindendes Element $u \in W_2^1(D)$, das der Beziehung (407) mit $f=0$ genügt. Analog ist eine *verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Problems (409)* ein Element aus $W_2^1(D)$, welches für alle η aus $W_2^1(D)$ der Beziehung

$$L^*(u, \eta) \equiv \int_D (a_{ik} u_{x_k} \eta_{x_i} - b_i u \eta_{x_i} - cu \eta) dx = -\lambda \int_D u \eta dx$$

genügt.

Der zweite Fredholmsche Satz hat den folgenden Inhalt: Die Probleme (408) und (409) haben höchstens für abzählbar viele Werte $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$) nichttriviale Lösungen. Sie stimmen mit den λ_k überein, von denen in [143] die Rede war. Jedem λ_k entspricht nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger verallgemeinerter Lösungen des Problems (408) und des Problems (409), und die Anzahl ist für beide Probleme gleich. Die Zahlenmenge $\{\lambda_k\}$ heißt *Spektrum des Operators L und des Operators L^* im Gebiet D für das Dirichletsche Problem*.

Das Problem (403) ist damit für beliebiges $f \in L_2(D)$ für alle diejenigen λ eindeutig lösbar, die nicht in $\{\lambda_k\}$ liegen. Wenn jedoch in (403) $\lambda = \lambda_k$ gilt, kann man sich leicht von der Gültigkeit der Beziehung

$$\int_D f v_k dx = 0 \quad (411)$$

für f überzeugen. Hier bezeichnet v_k eine beliebige verallgemeinerte Lösung des Problems (409) mit $\lambda = \lambda_k$. Das folgt aus (407), wenn dort $\lambda = \lambda_k$ und $\eta = v_k$ gesetzt wird, sowie aus der Tatsache, daß

$$L(u, v_k) = L^*(v_k, u) = -\lambda_k \int_D v_k u dx$$

gilt.

Der dritte Fredholmsche Satz für das Problem (403) mit $\lambda = \lambda_k$ besagt, daß die Gleichung (411) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Problems (403) im Raum $W_2^1(D)$ darstellt. Das Problem hat in diesem Fall eine überabzählbare Lösungsmenge. Alle Lösungen können in der Form

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^{N_k} c_i u_{k_i}$$

geschrieben werden, wobei u_0 eine beliebige spezielle verallgemeinerte Lösung des Problems (403), u_{k_i} ($i = 1, \dots, N_k$) verallgemeinerte Lösungen des Problems (408) für $\lambda = \lambda_k$ sowie c_i beliebige Zahlen sind. Für die Gültigkeit aller aufgezählten Aussagen ist wesentlich, daß das Gebiet D beschränkt ist und daß die Koeffizienten a_{ik} den Bedingungen

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ik} \xi_i \xi_k \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

genügen, wobei ν und μ positive Konstanten sind. Die Voraussetzungen über die Beschränktheit von b_i und c können noch abgeschwächt werden; man kann sie durch die Forderungen $b_i \in L_q(D)$ mit $q > n$ und $c \in L_q(D)$ mit $q > n/2$ ersetzen. Auch die Voraussetzungen über f können abgeschwächt werden, sie können z. B. durch die Bedingung $f \in L_q(D)$ mit $q \geq 2n(n-2)^{-1}$ für $n > 2$ bzw. q beliebig endlich im Fall $n=2$ ersetzt werden. Auf ähnliche Weise behandelt man auch den Fall der inhomogenen Dirichletschen Randbedingungen sowie das zweite und dritte Randwertproblem.

Für $b_i \equiv 0$ ist die Beziehung

$$L(u) = f \quad (412)$$

die Eulersche Gleichung für das quadratische Funktional

$$J(u) = \int_D (a_{ik} u_{x_k} u_{x_i} - cu^2 + 2uf) dx,$$

während die (412) entsprechende Identität

$$L(u, \eta) \equiv \int_D (a_{ik} u_{x_k} \eta_{x_i} - c u \eta) dx = - \int_D f \eta dx$$

nichts anderes als das Verschwinden der ersten Variation von $J(u)$ für die Funktionen u und $\delta u = \eta$ beinhaltet. Auf diese Weise ist mit dem Dirichletschen Problem für die Gleichung (412) ein Variationsproblem für das Funktional $J(u)$ in der Funktionenklasse $\dot{W}_2^1(D)$ verbunden. Die Lösung dieses Variationsproblems (falls sie existiert) ist nichts anderes als die verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Dirichletschen Problems für (412).

In [IV/1, 117–119] haben wir gezeigt, daß das Infimum des Funktional $J(u)$ auf $\dot{W}_2^1(D)$ im Fall $c(x) \equiv 0$ durch genau ein Element aus $\dot{W}_2^1(D)$ angenommen wird (das gilt auch für beliebige beschränkte, nicht positive Funktionen $c(x)$). Die dort angestellte Überlegung basierte nicht auf der Existenz einer Lösung des Dirichletschen Problems für die Gleichung (412); im Gegenteil, sie garantiert die Existenz einer verallgemeinerten Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Dirichletschen Problems für die Gleichung (412). Die Grundlagen dieser Betrachtungsweise von Randwertproblemen (der direkten Methoden) wurden von HILBERT mit der Begründung des Riemannschen Prinzips für $L = \Delta$ gelegt. Und zwar hat er ohne Anwendung der Potentialtheorie bewiesen, daß es unter den glatten Funktionen, die der Randbedingung $u|_S = \varphi$ genügen, eine solche Funktion gibt, für die das Integral

$$J(u) = \int_D \sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2 dx_1 dx_2$$

sein Infimum annimmt und die in D harmonisch ist. Es wurde damals nur mit stetig differenzierbaren Funktionen gearbeitet, und man strebte danach, sofort klassische Lösungen zu erhalten. Das hat alle Untersuchungen wesentlich erschwert. In den zwanziger Jahren begann man, sich von den gewöhnlichen (klassischen) Ableitungen zu lösen und verschiedene verallgemeinerte Ableitungen einzuführen. Anfang der dreißiger Jahre, als der Begriff der verallgemeinerten Ableitung bereits so wie am Schluß von [IV/1] formuliert wurde, wurde das Problem der Bestimmung des Infimums des Funktional $J(u)$ (mit $c(x) \leq 0$) im wesentlichen in der Gestalt formuliert und gelöst, wie es in [IV/1, 117–118] dargelegt wurde. In der Arbeit von K. FRIEDRICHS, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendungen auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren (Math. Ann. 109 (1934), 465–487, 685–713), wurde die Lösbarkeit dieses Problems mit Hilfe der Konstruk-

tion selbstadjungierter und halbbeschränkter Erweiterungen elliptischer Differentialoperatoren

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + cu,$$

die zunächst nur auf der Menge aller glatten, auf S verschwindenden Funktionen erklärt sind, nachgewiesen. Die Koeffizienten a_{ik} wurden dabei als stetig differenzierbar (oder allgemeiner als Funktionen mit beschränkter Ableitung nach x) vorausgesetzt; der Raum $L_2(D)$ wurde als zugrunde liegender Hilbertscher Raum, in dem die Frage nach der Erweiterung der unbeschränkten Operatoren L gestellt wurde, gewählt. Wir kehren zu dieser Frage in Band V zurück.

Die in diesem Abschnitt formulierten Sätze über die Lösbarkeit des Problems (403) (bzw. analoge Sätze über die Lösbarkeit anderer klassischer Randwertprobleme für die Gleichung $L(u) = \lambda u + f$) wurden Ende der vierziger Jahre von M. I. WISCHIK, O. A. LADYSHENSKAJA und S. G. MICHLIN mit verschiedenen Methoden bewiesen. Die von diesen Autoren eingeführten Begriffe der verallgemeinerten Lösungen sind in der Form unterschiedlich, aber im wesentlichen gleichwertig. Wir haben hier die von O. A. LADYSHENSKAJA verwendeten Definitionen der verallgemeinerten Lösung der Differentialgleichung und der verallgemeinerten Lösung des Problems (403) benutzt. Sie haben sich nicht nur bei der Behandlung linearer, sondern auch bei der Behandlung nichtlinearer Randwertprobleme als adäquat erwiesen. Der von O. A. LADYSHENSKAJA gegebene Beweis der Fredholmschen Sätze wird nach folgendem Plan geführt: Zunächst wird die Gleichwertigkeit der Identität (407) mit einer gewissen Operatorengleichung der Gestalt $u = \lambda A(u) + f$ im Hilbertschen Raum $\dot{W}_2^1(D)$ für einen vollstetigen Operator A gezeigt. Dazu benutzen wir nur die im folgenden Abschnitt bewiesenen Abschätzungen sowie den Satz von RIESZ über die allgemeine Gestalt eines linearen Funktionals. Danach wird mit Hilfe der Fredholmschen Sätze – die für diese Operatorengleichung gelten – die Gültigkeit der obigen Aussagen über die Lösbarkeit des Problems (403) nachgewiesen [vgl. in diesem Zusammenhang die Vorlesungen von O. A. LADYSHENSKAJA, die in Buchform herausgegeben wurden: Randwertprobleme der mathematischen Physik (russ.), Moskau 1970. Eine detailliertere Analyse der Probleme (403) und (408) sowie eine entsprechende Bibliographie enthält die bereits zitierte Monographie von O. A. LADYSHENSKAJA und N. N. URALZEWA].

145. Die erste grundlegende (energetische) Ungleichung. Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten des Operators L aus (402) den Bedingungen von [144] genügen; insbesondere gelte für beliebige reelle $\xi_1, \dots, \xi_n$ und $x \in D$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 &\leq a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2(x)} &\leq \mu_1, \quad \mu_2 \leq c(x) \leq \mu_3, \end{aligned} \quad (413)$$

wobei $\nu > 0$, $\mu > 0$, $\mu_1 \geq 0$ gilt und μ_2 sowie μ_3 gewisse (nicht notwendig positive) Zahlen sind. Zur Abkürzung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_D u v dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2, \\ |u_x| &= \sqrt{u_x^2}, \quad \|u_x\| = \left(\int_D u_x^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|u\|^{(1)} &= (\|u\|^2 + \|u_x\|^2)^{1/2} = \left(\int_D (u^2 + u_x^2) dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (414)$$

Wir setzen den Parameter λ und alle Funktionen reell voraus; alle folgenden Überlegungen lassen sich jedoch leicht auf den Fall komplexer λ , u und f übertragen. Wir benutzen die Ungleichung

$$\left| \int_D \sum_{i=1}^N u_i v_i dx \right| \leq \left(\int_D \sum_{i=1}^N u_i^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D \sum_{i=1}^N v_i^2 dx \right)^{1/2}, \quad (415)$$

eine Verallgemeinerung der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung [II, 161] (die genau so bewiesen wird wie die letztgenannte) sowie die elementare Ungleichung

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + (4\varepsilon)^{-1} b^2, \quad (416)$$

die für alle Zahlen a , b und beliebiges $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Wir schätzen die in (405) erklärte Form $L(u, u)$ mit Hilfe der Voraussetzungen (413) und der Ungleichung (415) wie folgt nach unten ab:

$$\begin{aligned} L(u, u) &\geq \nu \|u_x\|^2 - \left(\int_D \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D \sum_{i=1}^n (b_i u)^2 dx \right)^{1/2} - \mu_3 \|u\|^2 \\ &\geq \nu \|u_x\|^2 - \mu_1 \|u_x\| \|u\| - \mu_3 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt wegen (416) die Ungleichung

$$L(u, u) = (\nu - \varepsilon_1) \|u_x\|^2 - (\mu_3 + \mu_1^2 (4\varepsilon_1)^{-1}) \|u\|^2 \quad (417)$$

für beliebiges $\varepsilon_1 > 0$. Es sei u eine verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$ des Problems (403), es gilt also für u die Beziehung (407). Setzen wir in (407) $\eta = u$, so erhalten wir

$$L(u, u) + \lambda \|u\|^2 = - \int_D f u dx. \quad (418)$$

Daraus ergeben sich bei Anwendung von (417), der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung sowie von (416) die Abschätzungen

$$(\nu - \varepsilon_1) \|u_x\|^2 + (\lambda - \mu_3 - \mu_1^2 (4\varepsilon_1)^{-1}) \|u\|^2 \leq \|f\| \|u\| \leq \varepsilon_2 \|u\|^2 + (4\varepsilon_2)^{-1} \|f\|^2, \quad (419)$$

wobei ε_2 eine beliebige positive Zahl ist. Diese Abschätzung wird auch *erste grundlegende* (oder *energetische*) *Ungleichung* genannt. Aus (419) ist ersichtlich, daß die Norm $\|u_x\|$ der verallgemeinerten Lösung u des Problems (403) durch $\|f\|$ und $\|u\|$ nach oben abgeschätzt wird. Gilt noch

$$\lambda - \mu_3 - \mu_1^2 (4\nu)^{-1} \equiv \delta > 0, \quad (420)$$

so kann mit (419) die Norm $\|u_x\|$ nur durch $\|f\|$ abgeschätzt werden: Wählen wir z. B. $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4}$ und ε_1 so, daß $\lambda - \mu_3 - \mu_1^2 (4\varepsilon_1)^{-1} = \frac{3\delta}{4}$ gilt, dann liefert ein elementares Einsetzen $\varepsilon_1 = \nu \mu_1^2 (\delta \nu + \mu_1^2)^{-1}$, und aus (419) folgt die gewünschte Abschätzung

$$\frac{2\nu^2}{\delta\nu + \mu_1^2} \|u_x\|^2 + \|u\|^2 \leq \frac{2}{\delta^2} \|f\|^2 \quad (421)$$

oder kürzer

$$\|u\|^{(1)} \leq C_\delta \|f\|. \quad (422)$$

Auf Grund dessen gilt der folgende Eindeutigkeitssatz:

Satz 1. *Genügen die Koeffizienten von L den Bedingungen (413) und gilt die Bedingung (420), dann hat das Problem (403) höchstens eine verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_2^1(D)$. (Das Gebiet D kann hier auch unbeschränkt sein.)*

Für die Differenz $v = u' - u''$ zweier möglicher verallgemeinerter Lösungen u', u'' des Problems (403) besteht die Beziehung (407) mit $f=0$; daher gilt auch die Ungleichung (422) mit $f=0$, woraus $v=0$, d. h. $u' = u''$ folgt.

Für beschränkte Gebiete D kann man die Voraussetzung (420) abschwächen. Zu diesem Zweck benutzen wir die für alle Funktionen $u \in W_2^1(D)$ und beschränkte Gebiete D gültige Ungleichung

$$\int_D u^2 dx \leq C_D \int_D u_x^2 dx \quad (423)$$

(Ungleichung (32) aus [IV/1, 115]). Für $\varepsilon_1 \in (0, \nu]$ folgt aus (419)

$$\left(\frac{\nu - \varepsilon_1}{C_D} + \lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1} - \varepsilon_2 \right) \|u\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f\|_2^2. \quad (424)$$

Falls

$$\max_{0 < \varepsilon_1 \leq \nu} \left(\frac{\nu - \varepsilon_1}{C_D} + \lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1} \right) \equiv \delta_1 > 0 \quad (425)$$

gilt und $\varepsilon_2 = \frac{\delta_1}{2}$ in (424) gewählt wird, erhält man

$$\|u\|^2 \leq \delta_1^{-2} \|f\|^2. \quad (426)$$

Daraus und aus (419), wo beispielsweise $\varepsilon_1 = \frac{\nu}{2}$, $\varepsilon_2 = 1$ gewählt wurde, folgt auch eine Abschätzung der vollständigen Norm von u im Raum $W_2^1(D)$

$$\|u\|^{(1)} \leq C \|f\|. \quad (427)$$

Die Bedingung (425) ist z. B. für $L = \Delta$ für alle $\lambda \geq 0$ erfüllt. Dagegen gilt (420) für $L = \Delta$ und $\lambda = 0$ nicht. Wenn die Koeffizienten in einem gewissen Gebiet D_1 gegeben sind und dort den Voraussetzungen (413) genügen, dann ist die Bedingung (425) für beliebig festes λ (insbesondere für $\lambda = 0$) unter der Voraussetzung erfüllt, daß das Gebiet $D \subset D_1$ hinreichend kleines Volumen besitzt. Es gilt nämlich $C_D \rightarrow 0$ für $\text{mes } D \rightarrow 0$. In Anbetracht dessen sagt man: Der Eindeigkeitssatz für das Problem (403) gilt in Gebieten von „hinreichend kleinem Volumen“.

Bemerkung. Wir haben in [IV/1, 115] gezeigt, daß $C_D \rightarrow 0$ gilt, falls der Durchmesser von D gegen 0 strebt. Genauere Untersuchungen zeigen, daß C_D zu $|\text{mes } D|^{2/n}$ proportional ist.

146. Der Raum $W_{2,0}^2(D)$ und die zweite grundlegende Ungleichung. Wir beweisen zunächst die Ungleichung

$$\int_S |v| dS \leq C \int_D (|v| + |v_x|) dx. \quad (428)$$

Sie gilt für beliebige Funktionen v aus $W_1^1(D)$, d. h. für solche v aus $L_1(D)$, deren erste verallgemeinerte Ableitungen über D integrierbar sind. Der Rand S des Gebietes D muß dabei eine gewisse Regularität besitzen, z. B. zur Klasse C^1 gehören. Die Ungleichung (428) gilt jedoch auch für eine breitere Klasse von Gebieten, so für Gebiete mit einem Rand, der einer Lipschitzbedingung genügt. Wir geben die exakte Definition dieser Ränder nicht an; aus den folgenden Ausführungen kann man leicht sehen, welche Eigenschaften von S für die Gültigkeit von (428) hinreichend sind. Die Ungleichung (428) wird von uns nur für Funktionen v aus $C(\bar{D})$, benötigt. Daher beschränken wir uns im Beweis auf diese Funktionen v . Daraus

sowie aus der Dichtigkeit von $C^1(\bar{D})$ in $W_1^1(D)$ folgt die Ungleichung (428) für beliebiges $v \in W_1^1(D)$. Wir wählen in einem beliebigen Punkt $x^0 \in S$ ein örtliches kartesisches Koordinatensystem $(y_1, \dots, y_n)$ und ein Teilstück $S_\varrho(x^0)$ der Fläche S mit der Gleichung

$$y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1}), \\ y' \equiv (y_1, \dots, y_{n-1}) \in B_\varrho = \{y' : |y'| < \varrho\}.$$

Es sei ϱ so gewählt, daß das Gebiet $D_{\varrho, \delta} = \{y : y' \in B_\varrho, \omega(y') - \delta < y_n < \omega(y')\}$ in D enthalten ist. Die Funktion ω setzen wir als stetig differenzierbar in $\bar{B}_\varrho$ voraus. Die Funktion v aus $C^1(\bar{D})$ fassen wir als Funktion der Koordinaten y in $D_{\varrho, \delta}$ auf. Nach dem Newton-Leibnizschen Satz gilt

$$v(y', \omega(y')) = v(y', \omega(y') - \tau) + \int_{-\tau}^0 \frac{\partial v(y', \omega(y') + \xi)}{\partial \xi} d\xi. \quad (429)$$

Wir nehmen von beiden Seiten von (429) die Beträge, multiplizieren mit $\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{y_i}^2(y')}$ und integrieren über B_ϱ . Das liefert nach weiteren elementaren Abschätzungen

$$\begin{aligned} \int_{B_\varrho} |v(y', \omega(y'))| \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{y_i}^2(y')} dy' &= \int_{S_\varrho(x^0)} |v| dS \\ &= \int_{B_\varrho} \left| v(y', \omega(y') - \tau) + \int_{-\tau}^0 \frac{\partial v(y', \omega(y') + \xi)}{\partial \xi} d\xi \right| \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{y_i}^2(y')} dy' \\ &\leq C_1 \left[\int_{B_\varrho} |v(y', \omega(y') - \tau)| dy' + \int_{D_{\varrho, \delta}} \left| \frac{\partial v(y)}{\partial y_n} \right| dy \right] \end{aligned} \quad (430)$$

mit $\tau \in (0, \delta)$. Die Konstante C_1 ist eine Majorante für $\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{y_i}^2(y')}$ in B_ϱ . Wir integrieren nun (430) nach τ in den Grenzen von 0 bis δ und multiplizieren das Ergebnis mit δ^{-1} . Auf der rechten Seite erhalten wir ein Integral der Gestalt

$$\delta^{-1} \int_0^\delta d\tau \int_{B_\varrho} |v(y', \omega(y') - \tau)| dy',$$

dessen Wert $\delta^{-1} \int_{D_{\varrho, \delta}} |v(y)| dy$ nicht übersteigt. Damit erhalten wir

$$\int_{S_\varrho(x^0)} |v| dS \leq C_1 \delta^{-1} \int_{D_{\varrho, \delta}} |v| dy + C_1 \int_{D_{\varrho, \delta}} \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right| dy \leq C_1 \delta^{-1} \int_{D_{\varrho, \delta}} |v| dx + C_1 \int_{D_{\varrho, \delta}} |v_x| dx. \quad (431)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Fläche S von einer endlichen Anzahl von Teilen der Gestalt $S_\varrho(x^0)$ überdeckt werden kann, erhalten wir nach Summation von (431) über alle diese Teile die Ungleichung (428).

Wir definieren nun den Raum $W_{2,0}^2(D)$. Es handelt sich um die Abschließung des in [IV/1, 115] erklärten Teilraumes von $W_2^2(D)$. Wir erinnern daran, daß $W_2^2(D)$ aus den über D quadratisch integrierbaren Funktionen besteht, deren verallgemeinerte Ableitungen zweiter Ordnung über D quadratisch integrierbar sind. Das

Skalarprodukt in $W_2^2(D)$ ist dabei durch

$$(u, v)_2 = \int_D (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx}) \, dx \quad (432)$$

erklärt, wobei $u_x v_x = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}$ und $u_{xx} v_{xx} = \sum_{i,k=1}^n u_{x_i x_k} v_{x_i x_k}$ gesetzt ist. $W_2^2(D)$ ist ein vollständiger Hilbertscher Raum. Die Norm bezeichnen wir mit $\|u\|_{2,D}^{(2)}$ oder manchmal auch kürzer mit $\|u\|^{(2)}$.

Der Teilraum $W_{2,0}^2(D)$ besteht aus allen denjenigen Elementen des Raumes $W_2^2(D)$, die auf dem Rand S des Gebietes D verschwinden. Für „gute“ Ränder S ist die Menge aller Funktionen aus $C^2(\bar{D})$, die auf S verschwinden, dicht in $W_{2,0}^2(D)$. Um diese für uns wichtige Aussage nicht beweisen zu müssen, erklären wir $W_{2,0}^2(D)$ auf andere Weise:

$W_{2,0}^2(D)$ ist die Abschließung der Menge $C_0^2(\bar{D})$ derjenigen Funktionen aus $C^2(\bar{D})$, die auf S verschwinden, in der Norm von $W_2^2(D)$. (Wir haben hier die Bezeichnung $C_0^2(\bar{D})$ eingeführt; man darf sie nicht mit dem Raum $C_0^2(D)$ aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in D verwechseln. Die Elemente von $C_0^2(D)$ verschwinden nicht nur auf S , sondern in einer Umgebung von S .)

Die Menge $W_{2,0}^2(D)$ ist ein vollständiger Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt des Raumes $W_2^2(D)$. Für glatte (und auch Lipschitz-)Ränder ist die Menge $W_{2,0}^2(D)$ in der Menge $\bar{W}_2^2(D)$ enthalten. Wir überlassen dem Leser den Beweis dieser Aussage.

Wir kommen nun zur Herleitung der Abschätzung der $W_2^2(D)$ -Norm der Lösung u des Problems (403) durch die $L_2(D)$ -Normen von u und f . Dazu setzen wir neben den Bedingungen (413) über die Koeffizienten von L voraus, daß die a_{ik} beschränkte verallgemeinerte Ableitungen erster Ordnung besitzen, daß also

$$\left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right| \leq \mu_4 \quad (433)$$

gilt. Weiterhin setzen wir S aus der Klasse C^2 voraus. (Vgl. die Bemerkung am Schluß dieses Abschnitts über zulässige Abschwächungen dieser Voraussetzung.) Die gewünschte Abschätzung ist eine Folgerung der Ungleichung

$$\|u\|_{2,D}^{(2)} \leq \frac{2}{\nu} \|L(u)\|_{2,D} + C_1 \|u\|_{2,D}, \quad (434)$$

die für beliebige Funktionen u aus $W_{2,0}^2(D)$ gilt. Man nennt diese Ungleichung auch *zweite grundlegende Ungleichung für elliptische Operatoren*. Die Konstante C_1 wird dabei durch einige Charakteristika des Randes von D sowie die Konstanten ν , μ und μ_4 aus den Bedingungen (413), (433) bestimmt. Es genügt, die Ungleichung (434) nur für $u \in C_0^2(\bar{D})$ zu zeigen, denn $C_0^2(\bar{D})$ ist dicht in $W_{2,0}^2(D)$: Jedes u aus $W_{2,0}^2(D)$ kann man in der Norm von $W_2^2(D)$ durch Funktionen u_m aus $C_0^2(\bar{D})$ approximieren. Es gelte (434) für alle u_m . Wegen der Konvergenz von u_m gegen u kann man in der Ungleichung (434) für u_m den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ vollziehen und erhält damit die Beziehung (434) für u . Es sei nun $u \in C_0^2(\bar{D})$. Wir betrachten das Integral $\int_D (L(u))^2 \, dx$ und schätzen es auf die folgende Weise nach unten ab:

$$\begin{aligned} \int_D (L(u))^2 \, dx &= \int_D \left[(a_{ik} u_{x_i x_k})^2 + 2a_{ik} u_{x_i x_k} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} + b_i u_{x_i} + cu \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} + b_i u_{x_i} + cu \right)^2 \right] \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong (1-\varepsilon) \int_D (a_{ik} u_{x_i x_k})^2 dx + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_D \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} u_{x_k} + b_i u_{x_i} + cu \right)^2 dx \\ &\cong (1-\varepsilon) \int_D (a_{ik} u_{x_i x_k})^2 dx - C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \int_D (u^2 + u_x^2) dx. \end{aligned} \quad (435)$$

Hier und im folgenden verstehen wir, falls nichts anderes gesagt wird, unter zweimal sich wiederholenden Indizes die Summation von 1 bis n ; ε ist eine beliebige Zahl aus dem Intervall $(0, 1)$, während die Konstante C_2 wie auch die weiter unten auftretenden Konstanten C_k durch die Parameter aus den Bedingungen (413), (433) und möglicherweise auch durch das Gebiet D bestimmt wird. Wir überführen das Integral $\int_D (a_{ik} u_{x_i x_k})^2 dx$ mittels zweimaliger partieller Integration (vgl. (107) in [48]) in die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_D a_{ik} u_{x_i x_k} a_{jl} u_{x_j x_l} dx &= \int_D \left[a_{ik} u_{x_i x_j} a_{jl} u_{x_k x_l} - \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ik} a_{jl}) u_{x_i} u_{x_j x_l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ik} a_{jl}) u_{x_i} u_{x_k x_l} \right] dx + \int_S I(s) dS \end{aligned}$$

mit 1)

$$I(s) = a_{ik} a_{jl} u_{x_i} [u_{x_j x_l} \cos(n, x_k) - u_{x_k x_l} \cos(n, x_j)] \quad (x = s \in S). \quad (436)$$

Aus (436) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_D (a_{ik} u_{x_i x_k})^2 dx &\cong \int_D I_1(x) dx + \int_S I(s) dS \\ &\quad - C_3 \int_D \left(\varepsilon_1 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} u_x^2 \right) dx \quad (\varepsilon_1 \in (0, 1)), \end{aligned} \quad (437)$$

¹⁾ Damit die erste partielle Integration möglich ist, muß die Funktion u Ableitungen dritter Ordnung besitzen, jedoch enthält die Formel nach zweimaliger partieller Integration nur die zweiten Ableitungen von u , und sie gilt für alle Funktionen u aus $C^2(\bar{D})$. Um dies einzusehen genügt es, u aus $C^2(\bar{D})$ in der Norm von $C^2(\bar{D})$ durch Funktionen u_m aus $C^3(\bar{D})$ zu approximieren. Für jede der Funktionen u_m gilt die Gleichung (436). Vollziehen wir dann den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, so erhalten wir (436) für die Funktion u . Die approximierenden Funktionen u_m kann man z. B. wie folgt konstruieren: Man setzt u auf ein größeres Gebiet $\bar{D} \supset D$ so fort, daß die Fortsetzung im Raum $C^2(\bar{D})$ liegt.

Dann bildet man von der Fortsetzung die Mittelfunktionen u_h mit $h = \frac{1}{m}$ [IV/1, 110].

Man kann sich auch auf andere Weise von der Gültigkeit der Gleichung (436) für Funktionen $u \in C^2(\bar{D})$ überzeugen, ohne die Fortsetzung von u auf ein größeres Gebiet zu benutzen. Und zwar wähle man eine Folge von Teilgebieten $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ des Gebietes D mit den Rändern ∂D_k , die von ∂D einen konstanten Abstand haben [102]. Wir nehmen

an, daß ∂D_k aus ∂D durch eine Verschiebung um $\frac{1}{k}$ entlang der inneren Normalen an ∂D hervorgegangen ist. Für ein festes D_k werden die Mittelfunktionen $u_{1/m}$ der Funktion u für $m \geq k$ nur mittels der Werte von u in D erklärt; die $u_{1/m}$ konvergieren in der Norm von $C^2(\bar{D}_k)$ gegen u . Für das Gebiet D_k und alle $u_{1/m}$ mit $m \geq k$ gilt die Beziehung (436). Führen wir dann den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ aus, so können wir uns davon überzeugen, daß (436) für die Funktion u und das Gebiet D_k gilt. Danach vollziehen wir den Grenzübergang bezüglich der Gebiete D_k , indem wir k gegen ∞ streben lassen. Das liefert die Gleichung (436) für u und für das Gebiet D .

wobei zur Abkürzung

$$I_1(x) = a_{ik}(x) a_{jl}(x) u_{x_i x_j}(x) u_{x_k x_l}(x) \quad (438)$$

gesetzt wurde. Wir zeigen, daß wegen (413)

$$I_1(x) \equiv v^2 u_{xx}^2(x) \quad (439)$$

gilt. Dazu fixieren wir einen beliebigen Punkt $x^0 \in D$ und führen in seiner Umgebung neue kartesische Koordinaten $y_k = \alpha_{kl}(x_l - x_l^0)$ ($k, l = 1, \dots, n$) ein. Die orthogonale Matrix α_{kl} wählen wir so, daß sie die quadratische Form $a_{ik}(x^0) \xi_i \xi_k$ in die Diagonalgestalt überführt, d. h., daß

$$a_{ik}(x^0) \alpha_{ji} \alpha_{lk} = \lambda_j(x^0) \delta_{jl}$$

gilt. Hier sind $\lambda_j(x^0)$ die Eigenwerte der Form $a_{ik}(x^0) \xi_i \xi_k$ und δ_{jl} das Kronecker-Symbol¹⁾. Unter Verwendung von (413) sowie nach dem Transformationsgesetz für $u_{x_i x_j}$ beim Übergang zu den Koordinaten y erhalten wir

$$I_1(x^0) = \sum_{s,t=1}^n \lambda_s \lambda_t (u_{y_s y_t})^2 \big|_{x=x^0} \equiv v^2 u_{yy}^2 \big|_{x=x^0}.$$

Da nun (wie man leicht sieht) $u_{yy}^2 = u_{xx}^2$ gilt, besteht die Ungleichung (439) in der Tat für alle Punkte $x^0 \in D$. Wegen (437) und (439) folgt aus (435)

$$\begin{aligned} \int_D (L(u))^2 dx &\equiv (1-\varepsilon) [v^2 \|u_{xx}\|^2 + \int_S I(s) dS - C_3 \varepsilon_1 \|u_{xx}\|^2 - C_3 \varepsilon_1^{-1} \|u_x\|^2] \\ &\quad - C_2 (\varepsilon^{-1} - 1) (\|u\|^{(1)})^2 \end{aligned}$$

und daraus wiederum die Ungleichung

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon) (v^2 - C_3 \varepsilon_1) \|u_{xx}\|^2 &\leq \|L(u)\|^2 - (1-\varepsilon) \int_S I(s) dS \\ &\quad + [C_3 \varepsilon_1^{-1} (1-\varepsilon) + C_2 (\varepsilon^{-1} - 1)] (\|u\|^{(1)})^2. \end{aligned} \quad (440)$$

Dabei ist ε_1 eine beliebige positive Zahl, ε eine beliebige Zahl aus dem Intervall $(0, 1)$ und $\|u_{xx}\|^2 = \int_D u_{xx}^2 dx$. Für $\varepsilon = \frac{1}{7}$ und $\varepsilon_1 = \frac{v^2}{8C_3}$ hat (440) die Gestalt

$$\frac{3}{4} v^2 \|u_{xx}\|^2 \leq \|L(u)\|^2 - \frac{6}{7} \int_S I(s) dS + C_4 (\|u\|^{(1)})^2. \quad (441)$$

Bisher haben wir von dem Verschwinden von u auf S keinen Gebrauch gemacht. Wir zeigen, wie man unter Verwendung dieser Bedingung das Integral $\int_S I dS$ in

eine solche Gestalt umformen kann, die keine Ableitungen zweiter Ordnung von u nach x enthält. Das ist ein zentraler Punkt bei der Herleitung der Ungleichung (434). Um dies zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen Punkt x^0 auf der Fläche S und führen in x^0 ein *örtliches kartesisches Koordinatensystem* y ein: $y_k = c_{kl}(x_l - x_l^0)$ ($k = 1, \dots, n$). Hier stimmt die Richtung der y_n -Achse mit der Richtung der inneren Normalen $\mathbf{n}$ an S im Punkt x^0 überein, während die Matrix (c_{kl}) orthogonal ist. Es sei $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ die Gleichung der Fläche S in der Umgebung des Koordinatenursprungs $y = (0, \dots, 0)$. Nach Voraussetzung gilt $\omega(y_1, \dots, y_{n-1}) \in C^2$. Wegen der Orthogonalität der Matrix (c_{kl}) haben wir $x_l - x_l^0 = c_{kl} y_k$ ($l = 1, \dots, n$), und daher gilt $\cos(n, x_l) = c_{nl}$ ($l = 1, \dots, n$). Wir betrachten den Ausdruck $I(s)$ im Punkt

¹⁾ Wir erinnern daran, daß δ_{jl} gleich 1 für $j=l$ und gleich 0 für $j \neq l$ ist.

x^0 und führen dabei die Koordinaten y ein:

$$\begin{aligned} I(x^0) &= a_{ik} a_{jl} c_{mi} u_{y_m} c_{pj} c_{ql} u_{y_p} c_{nk} - a_{ik} a_{jl} c_{mi} u_{y_m} c_{pk} c_{ql} u_{y_p} c_{nq} \\ &\equiv (b_{mn} b_{pq} - b_{mp} b_{qn}) u_{y_m} u_{y_p} u_{y_q} \end{aligned} \quad (442)$$

mit $b_{pq} = a_{jl} c_{pj} c_{ql}$ ($p, q = 1, \dots, n$). Jetzt verwenden wir die Randbedingung $u|_S = 0$. In der Umgebung des Punktes x^0 , dessen Koordinaten y_l gleich 0 sind, hat diese Bedingung die Gestalt

$$u(y_1, \dots, y_{n-1}, \omega(y_1, \dots, y_{n-1})) = 0,$$

wobei diese Gleichung identisch in allen Variablen $y_1, \dots, y_{n-1}$ aus einer Umgebung von $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$ gilt. Wir differenzieren diese Identität nach y_i und y_k ($i, k = 1, \dots, n-1$) unter Beachtung von $\omega_{y_i} = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$) im Punkt x^0 . Das ergibt im Punkt x^0

$$u_{y_i} = 0, \quad u_{y_i y_k} = -u_{y_k} \omega_{y_i y_k} = -\frac{\partial u}{\partial n} \omega_{y_i y_k} \quad (443)$$

($i, k = 1, \dots, n-1$). Wegen $\left. \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|_{x^0} = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$) gilt

$$I(x^0) = (b_{nn} b_{pq} - b_{np} b_{qn}) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_p \partial y_q}. \quad (444)$$

Für $p = n$ und beliebiges q sowie für $q = n$ und beliebiges p heben sich die Glieder in der runden Klammer von (444) auf. Das ergibt mit (443) für $I(x^0)$ die Darstellung

$$I(x^0) = - \sum_{p,q=1}^{n-1} (b_{nn} b_{pq} - b_{np} b_{qn}) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \omega_{y_p y_q}. \quad (445)$$

Wir setzen voraus, daß die Koordinaten $y_1, \dots, y_{n-1}$ so in der Tangentialebene an S im Punkt x^0 gewählt sind, daß alle gemischten Ableitungen $\omega_{y_p y_q}$ ($p \neq q$) im Punkt x^0 verschwinden. (Das läßt sich bekanntlich immer mit Hilfe einer orthogonalen Koordinatentransformation erreichen.) Also gilt

$$I(x^0) = - \sum_{p=1}^{n-1} (b_{nn} b_{pp} - b_{np}^2) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \omega_{y_p y_p}. \quad (446)$$

Wegen der Voraussetzung $S \in C^2$ findet man eine nichtnegative Zahl K derart, daß für alle Punkte x^0 der Fläche S

$$\omega_{y_p y_p} |_{x^0} \leq K \quad (p = 1, \dots, n-1) \quad (447)$$

gilt. Ist insbesondere D ein konvexes Gebiet, so kann K gleich 0 gewählt werden. Aus der Bedingung (413) folgt $0 \leq b_{nn} b_{pp} - b_{np}^2 \leq \mu^2$, und daher gilt

$$-I(x^0) \leq \mu^2 (n-1) K \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2. \quad (448)$$

Damit erhalten wir aus der Ungleichung (441) die Beziehung

$$\frac{3}{4} v^2 \|u_{xx}\|^2 \leq \|L(u)\|^2 + \frac{6}{7} \mu^2 (n-1) K \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS + C_4' (\|u\|^{(1)})^2. \quad (449)$$

Für die Abschätzung des Randintegrals für $K > 0$ verwenden wir die Ungleichung (428) mit $v = u_x^2$:

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS = \int_S \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dS$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_5 \int_D \left\{ u_x^2 + \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \right]^2} \right\} dx \\
&= C_5 \int_D \left[u_x^2 + \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{x_i x_k} \right)^2} \right] dx \\
&\leq C_5 \int_D \left[u_x^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k}^2} \right] dx \\
&\leq C_5 \int_D (u_x^2 + 2|u_x| |u_{xx}|) dx \leq C_5 \int_D (\varepsilon u_{xx}^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) u_x^2) dx. \quad (450)
\end{aligned}$$

Hierbei ist ε eine beliebige positive Zahl. Die Konstante C_5 ist mit der Konstanten C aus (428) identisch. Wir setzen diese Abschätzung des Randintegrals mit $\varepsilon = \frac{1}{4} \nu^2 \left[\frac{6}{7} \mu^2 (n-1) K C_5 \right]^{-1}$ in (449) ein, fassen gleiche Glieder zusammen und erhalten die Abschätzung

$$\frac{\nu^2}{2} \|u_{xx}\|^2 \leq \|L(u)\|^2 + C_6 (\|u\|^{(1)})^2.$$

Addieren wir zu beiden Seiten der Ungleichung $\frac{\nu^2}{2} (\|u\|^{(1)})^2$, so erhalten wir

$$\frac{\nu^2}{2} (\|u\|^{(2)})^2 \leq \|L(u)\|^2 + C_7 (\|u\|^{(1)})^2. \quad (451)$$

Andererseits gilt für beliebige Funktionen $u \in C_0^2(\bar{D})$

$$\int_D u_x^2 dx = - \int_D u \Delta u dx \leq \|u\| \|\Delta u\| \leq \sqrt{n} \|u\| \|u_{xx}\| \leq \varepsilon \|u_{xx}\|^2 + \frac{n}{4\varepsilon} \|u\|^2$$

mit $\varepsilon > 0$. Wir benutzen diese Ungleichung mit $\varepsilon = \frac{\nu^2}{4C_7}$ für eine obere Abschätzung des Gliedes $C_7 \|u_{xx}\|^2$ auf der rechten Seite von (451). Daraus erhalten wir nach elementaren Umformungen die Ungleichung

$$\frac{\nu^2}{4} (\|u\|^{(2)})^2 \leq \|L(u)\|^2 + C_8 \|u\|^2, \quad (452)$$

woraus die uns interessierende Ungleichung (434) folgt. Wie schon weiter oben gesagt wurde, hängen alle Konstanten C_k von D und von den uns bekannten Parametern aus den Bedingungen (413), (433) ab. Sie können leicht explizit angegeben werden, wenn man die Herleitung der Ungleichung (434) genau verfolgt.

Ist u eine Lösung des Problems (403) aus dem Raum $W_{2,0}^2(D)$, so kann mittels (434) die Norm von u im Raum $W_2^2(D)$ durch $\|f\|$ und $\|u\|$ abgeschätzt werden; es gilt dann

$$\|u\|^{(2)} \leq \frac{2}{\nu} \|\lambda u + f\| + C_1 \|u\| \leq \frac{2}{\nu} \|f\| + \left(\frac{2|\lambda|}{\nu} + C_1 \right) \|u\|. \quad (453)$$

Falls λ die Ungleichung (420) erfüllt, folgt daraus und aus (421), daß $\|u\|^{(2)}$ nur durch $\|f\|$ abgeschätzt werden kann:

$$\|u\|^{(2)} \leq \left[\frac{2}{\nu} + \left(\frac{2|\lambda|}{\nu} + C_1 \right) \frac{\sqrt{2}}{\delta} \right] \|f\|. \quad (454)$$

Bemerkung. Aus dem Beweis der Ungleichung (434) geht hervor, daß nur zwei Charakteristika des Gebietes D benutzt wurden: die Konstante C aus (428) und die Konstante K aus (447), wobei die Bedingung (447) in einzelnen Punkten der Fläche S und sogar auf ganzen Punktmengen von S mit dem Oberflächenmaß 0 verletzt sein kann. Die gesamte Herleitung bleibt für eine breite Klasse von Gebieten D (z. B. für beliebige Polyeder) erhalten.

Die Ungleichung (434) und die hier ausgeführte Herleitung wurden einer Arbeit von O. A. LADYSHENSKAJA (Doklady AN SSSR 79 (1951), 723–725) entnommen. Solche Ungleichungen wurden von ihr auch für allgemeinere homogene Randbedingungen der Gestalt $\left(\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$ bewiesen, wobei $\frac{\partial}{\partial l}$ die Differentiation in einer nichttangentialen Richtung an die Fläche S bezeichnet, die sich beim Übergang von einem Punkt der Fläche zu einem anderen Punkt glatt verändert. Darüber hinaus wurden Verallgemeinerungen der Ungleichung (434) für den Fall beliebiger Ableitungsordnung von u angegeben. (Einen vollständigen Beweis findet man in dem Buch von O. A. LADYSHENSKAJA, Das gemischte Problem für die hyperbolische Gleichung (russ.), Moskau 1953.) Für die erste Randbedingung (d. h. für $u|_S = 0$) wurde die Ungleichung (434) unabhängig von O. A. LADYSHENSKAJA mit Hilfe anderer Methoden von CACCIOPOLI (Giorn. Mat. Battaglini 80 (1950–51), 186–212) bewiesen. Die Ungleichung (434) erhält man für den Fall einer Kugel D aus den Arbeiten von S. N. BERNSTEIN (Math. Ann. 62 (1906), 253–271; 69 (1910), 82–131). Eine erwähnenswerte Besonderheit im zweidimensionalen Fall ist die Tatsache, daß die Ungleichung (434) für solche Operatoren

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^2 b_i u_{x_i} + cu$$

gilt, deren Koeffizienten a_{ik} vor den Ableitungen höchster Ordnung meßbare Funktionen sind, die lediglich den Bedingungen (413) genügen. Das wird mit der Methode von S. N. BERNSTEIN, wonach das gegebene Problem für L in ein analoges Problem für den Laplaceschen Differentialoperator übergeführt wird, und mit der weiter oben ausgeführten Methode von O. A. LADYSHENSKAJA zur Umformung und Abschätzung des Kurvenintegrals $\int_S I(s) dS$ bewiesen. Ist die Raumdimension größer als 2, so kann die Methode von S. N. BERNSTEIN nicht angewendet werden. Es zeigt sich, daß für die Gültigkeit der Ungleichung (434) zusätzliche Einschränkungen bezüglich der Koeffizienten a_{ik} (hier ist das die Bedingung (433)) erforderlich sind. [Man vergleiche zu dieser Frage die Kapitel I und III des Buches von O. A. LADYSHENSKAJA und N. N. URALZEWA, Lineare und quasilineare Gleichungen vom elliptischen Typus (russ.), Moskau 1973.]

147. Einige Ausführungen über Hilbertsche Räume und über Operatoren in Hilbertschen Räumen. Bisher hatten wir es mit konkreten Hilbertschen Räumen, den Räumen $L_2(D)$, $W_2^1(D)$, $W_2^2(D)$ zu tun. Sie alle vereinen auf sich gewisse gemeinsame Eigenschaften, die die Grundlage für die Definition eines abstrakten, vollständigen, separablen Hilbertschen Raumes H bilden.

Wir führen hier eine kurze Formulierung der Axiome, die den *komplexen Hilbertschen Raum* definieren, sowie einige ihrer Folgerungen an (Genauerer findet man in [V, Kap. V]). Vor allem ist H eine lineare Menge, d. h., ihre Elemente $u, v, \dots$ können addiert und mit komplexen Zahlen $a, b, \dots$ multipliziert werden. Diese Operationen besitzen die gleichen Eigenschaften der Kommutativität und Assoziativität wie der komplexe n -dimensionale Vektorraum [III/1, 25].

Für jede beliebige positive ganze Zahl m existieren weiter m linear unabhängige Elemente. Schließlich entspricht jedem Paar u, v von Elementen aus H eine komplexe Zahl, das sogenannte Skalarprodukt, welches wir mit (u, v) bezeichnen. Dieses Skalarprodukt muß den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} (v, u) &= \overline{(u, v)}, & (u + v, w) &= (u, w) + (v, w), & (au, v) &= a(u, v), \\ (u, u) &> 0 \quad \text{für } u \neq 0. \end{aligned} \quad (455)$$

Mit (u, u) wird eine positive Zahl definiert, die sogenannte Norm des Elementes u : $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Sie verschwindet nur für das Nullelement von H (welches wir einfach mit 0 bezeichnen). Dementsprechend wird der Begriff der *Konvergenz* eingeführt: Die Folge $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergiert gegen das Element u , falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\| = 0$ gilt. Die Folge $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ heißt *in sich konvergent* oder Cauchyfolge, falls $\|u_k - u_m\| \rightarrow 0$ für $k, m \rightarrow \infty$ gilt.

Der Raum H heißt *vollständig*, falls für jede Cauchyfolge $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Element u derart existiert, daß $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ gegen u konvergiert. Schließlich heißt H *separabler* Raum, wenn eine abzählbare Menge $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Elementen aus H existiert, die dicht in H liegt. Letzteres bedeutet, daß man für ein beliebiges Element $u \in H$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein Element v_k derart finden kann, daß $\|u - v_k\| \leq \varepsilon$ gilt. Besitzt die Menge H alle aufgezählten Eigenschaften, so heißt sie *vollständiger separabler komplexer Hilbertscher Raum*. Oft schließt man die Bedingungen der Vollständigkeit und der Separabilität in den Begriff des Hilbertschen Raumes ein und behandelt sie nicht gesondert. Wir werden sie auch nicht extra aufführen und voraussetzen, daß diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

Wenn für $a, b, \dots$ nur reelle Zahlen gewählt werden, muß das Skalarprodukt (u, v) ebenfalls reell sein, und in den Gleichungen (455) tritt keine komplexe Konjugation auf. In diesem Fall spricht man von einem *reellen Hilbertschen Raum* H .

Man kann zeigen, daß im abstrakten Hilbertschen Raum H eine *orthonormierte Basis* existiert, das ist ein System von Elementen $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit den Eigenschaften:

$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$, und jedes Element u läßt sich als Reihe $u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k) \varphi_k$ darstellen, die in der Norm von H gegen u konvergiert. Daraus folgt, daß $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_k)|^2$

gilt. Die Anzahl dieser Basen ist unbeschränkt. Wählt man nun eine solche Basis aus, so kann man einen Isomorphismus zwischen zwei beliebigen komplexen Hilbertschen Räumen H_1 konstruieren, so auch zwischen H und dem komplexen Hilbertschen Raum l_2 . Elemente des l_2 sind alle diejenigen Folgen komplexer

Zahlen $x = (x_1, x_2, \dots)$, die der Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ genügen. Die Operation der

Multiplikation mit einer Zahl bzw. der Addition sind wie folgt erklärt: $ax = (ax_1, ax_2, \dots)$; $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$. Das Skalarprodukt ist durch die Gleichung $(x, y)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ definiert.

Der weiter oben erwähnte Isomorphismus wird wie folgt konstruiert: Dem Element $u \in H$ wird das System $\tilde{u} = ((u, \varphi_1), (u, \varphi_2), \dots)$ seiner Koeffizienten (u, φ_k) in einer ausgewählten orthonormierten Basis $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ von H zugeordnet. Wie man leicht sieht, gilt dann $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})_{l_2}$.

Auf Grund dessen sind alle Hilbertschen Räume (wenn nur vollständige separable Räume betrachtet werden) vom abstrakten Gesichtspunkt gleichartig konstruiert. Aussagen, die für einen dieser Räume bewiesen wurden, können für einen anderen

Raum umformuliert werden. Die zu Beginn dieses Abschnitts genannten Räume sind zu dem reellen Raum l_2 und damit einer zum anderen isomorph. Daher erweist sich vieles von dem, was für den Raum $L_2(D)$ bewiesen wurde, auch für die anderen Räume gültig. Beispielsweise ist die Bunjakowski-Schwarzsche Ungleichung eine einfache Folgerung der Axiome (455). Im Fall eines abstrakten Hilbertschen Raumes hat sie die Gestalt $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$. Wir werden jedoch die angeführten Isomorphismen zwischen den uns interessierenden konkreten Funktionenräumen nicht ausnutzen, da die daraus resultierenden Ergebnisse wenig anschaulich sind. Außerdem haben wir noch nicht bewiesen, daß die Räume $W_2^l(D)$ für ganzzahliges l separabel sind. Die Separabilität von $W_2^1(D)$ und $W_{2,0}^2(D)$ folgt aus den Aussagen von [150]. Man kann dies auch für alle Räume $W_2^l(D)$ mit einfacheren und allgemeineren Überlegungen beweisen, so wie in [V, Kap. IV].

In einem gegebenen Hilbertschen Raum H kann man eine neue Hilbertsche Struktur (d. h. ein neues Skalarprodukt) einführen derart, daß der dabei entstehende neue Raum ebenfalls vollständig ist. Dazu muß die neue Norm $\|\cdot\|^*$, die dem neuen Skalarprodukt entspricht (d. h. $\|u\|^* = \sqrt{(u, u)^*}$), zur gegebenen Norm $\|\cdot\|$ äquivalent sein. Die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^*$ bedeutet, daß es zwei positive Zahlen C_1 und C_2 derart gibt, daß für alle Elemente u des Raumes H die Ungleichung

$$C_1 \|u\| \leq \|u\|^* \leq C_2 \|u\|$$

gilt. Dann ist klar, daß eine in der Norm $\|\cdot\|^*$ konvergente Folge von Elementen u_k ($k=1, 2, \dots$) auch in der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert und umgekehrt. Damit wird garantiert, daß H auch in der neuen Norm ein vollständiger Raum ist. Ist H separabel, so ist es auch der aus H hervorgegangene neue Hilbertsche Raum.

Ein wichtiges Untersuchungsobjekt in Hilbertschen Räumen sind lineare Operatoren. Der Operator A heißt *linearer beschränkter Operator* in H , falls A den Raum H in H abbildet, wobei die Beziehung $A(au + bv) = aA(u) + bA(v)$ gilt, und falls eine positive Zahl C derart existiert, daß für alle Elemente u aus H die Ungleichung

$$\|A(u)\| \leq C \|u\|$$

erfüllt ist.¹⁾ Die untere Grenze aller dieser Konstanten C heißt *Norm des Operators* A und wird mit $\|A\|$ bezeichnet.

Wir beweisen die folgende einfache Aussage, die uns ihrem Wesen nach mehrmals in konkreten Funktionenräumen mit konkreten, in diesen Räumen definierten Operatoren begegnen wird.

Hilfssatz 1. *Es sei A ein linearer beschränkter Operator im Hilbertschen Raum H mit der Norm $\|A\| < 1$. Dann ist die Gleichung*

$$u = A(u) + v \tag{456}$$

für beliebiges v eindeutig in H lösbar.

Zur Bestimmung der Lösung der Gleichung (456) verwenden wir die Methode der sukzessiven Approximation in ihrer einfachsten Form. Es sei $u_1 = v$, $u_{n+1} = A(u_n) + v$ ($n=1, 2, \dots$). Man sieht leicht, daß

$$\begin{aligned} \|u_1\| &= \|v\|, \\ \|u_{n+1} - u_n\| &= \|A(u_n - u_{n-1})\| \leq \|A\| \|u_n - u_{n-1}\| \leq \dots \\ &\leq \|A\|^{n-1} \|u_2 - u_1\| \leq \|A\|^{n-1} \|v\| \end{aligned}$$

¹⁾ Man schreibt häufig Au an Stelle von $A(u)$.

gilt. Daraus sowie aus der Bedingung $\|A\| < 1$ folgt, daß $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge im Raum H ist. Wegen der Vollständigkeit von H existiert nun ein Element u mit $\|u - u_k\| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, d. h., die Folge $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ konvergiert im Raum H gegen u . Aus der Beschränktheit von A folgt, daß die Elemente $A(u_k)$ gegen $A(u)$ konvergieren. Also ist u Lösung der Gleichung (456). Hätte die Gleichung (456) zwei verschiedene Lösungen u und u' , so würde die Differenz w der Gleichung $w = A(w)$ genügen. Das ist jedoch wegen $\|w\| = \|A(w)\| \leq \|A\| \|w\| < \|w\|$ nicht möglich. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. In [V, 86] wird eine analoge Aussage für nichtlineare kontrahierende Operatoren bewiesen, aus der der Hilfssatz 1 folgt.

Weiter unten haben wir auch mit unbeschränkten linearen Operatoren im Raum H zu tun. In abstrakten Hilbertschen Räumen H unterscheidet man verschiedene Klassen solcher Operatoren. In der Mehrzahl der Fälle wird vorausgesetzt, daß der unbeschränkte lineare Operator A auf einer gewissen linearen Teilmenge von H erklärt ist, die dicht in H liegt. Diese Menge heißt *Definitionsbereich* von A und wird mit $\mathfrak{D}(A)$ bezeichnet. So ist z. B. der Differentialoperator L aus (402) selbst im Fall glatter Koeffizienten ein unbeschränkter Operator im Raum $L_2(D)$. Falls für L die Bedingungen (413) und (433) erfüllt sind, kann man als Definitionsbereich die Menge $W_2^2(D)$ oder die Menge $W_{2,0}^2(D)$ wählen. Diese Mengen sind dicht in $L_2(D)$. Die abstrakten Operatoren A , die L mit dem jeweiligen Definitionsbereich entsprechen, besitzen unterschiedliche Eigenschaften und müssen daher unterschieden werden. Im weiteren setzen wir im Hinblick auf das Dirichletsche Problem $\mathfrak{D}(L) = W_{2,0}^2(D)$ voraus. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir gewöhnlich keine spezielle Bezeichnung für den durch den konkreten Differentialoperator L erzeugten Operator ein; der Definitionsbereich wird jedoch deutlich angegeben (für die Operatoren behalten wir das Symbol L bei).

Wir benötigen im Zusammenhang mit linearen Operatoren im folgenden Abschnitt noch einen Begriff: Den Begriff des beschränkten linearen Operators A , der einen Hilbertschen Raum H in einen anderen Hilbertschen Raum H_1 abbildet. Solch ein Operator ist auf dem gesamten Raum H erklärt, seine Werte liegen in H_1 . Er ist linear, d. h., es gilt $A(au + bv) = aA(u) + bA(v)$. Weiter existiert eine Konstante C_1 derart, daß für alle u aus H die Ungleichung

$$\|A(u)\|_1 \leq C_1 \|u\| \quad (457)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Norm in H und $\|\cdot\|_1$ die Norm in H_1 . Die untere Grenze der Zahlen C_1 heißt *Norm des Operators* A und wird fast immer ebenfalls mit $\|A\|$ bezeichnet, ohne die Räume H und H_1 explizit anzugeben (soweit das nicht zu Mißverständnissen führt). Entsprechend dieser Definition ist der Differentialoperator L aus (402) unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten von L den Bedingungen (413), (433) genügen, ein beschränkter linearer Operator, der den Raum $H = W_{2,0}^2(D)$ in den Raum $H_1 = L_2(D)$ abbildet. Auch in diesem Fall führen wir keine besondere Bezeichnung für den Operator L ein. Wir geben genau an, welcher Definitionsbereich und welcher Wertebereich gemeint ist.

148. Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems im Raum $W_2^2(D)$. Wir kommen nun zur Untersuchung der Lösbarkeit des Problems (403) im Raum $W_2^2(D)$. Für L und D gelten die Bedingungen aus [145] und [146]. Damit bestehen die erste und zweite grundlegende Ungleichung. Wir bezeichnen mit L_1 den Operator $L - \lambda_0 E$, wobei E für den identischen (Einheits-) Operator steht und die Zahl λ_0 so gewählt

wurde, daß

$$\lambda_0 - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\nu} \equiv \delta_1 > 0 \quad (458)$$

gilt. Wegen (417) besteht dann für jede Funktion u aus $W_{2,0}^2(D)$ die Ungleichung

$$L_1(u, u) \equiv - \int_D L_1(u) u dx = L(u, u) + \lambda_0 \|u\|^2 \equiv \delta_1 \|u\|^2, \quad (459)$$

woraus die Abschätzung

$$\|u\| \leq \delta_1^{-1} \|L_1(u)\| \quad (460)$$

folgt. Andererseits gilt für den Operator L_1 und jedes Element u des Raumes $W_{2,0}^2(D)$ die Ungleichung (434) mit einer gewissen Konstanten C_1 , die durch das Gebiet D , die Zahlen ν, μ, μ_1, μ_4 aus den Bedingungen (413), (433) und durch die Zahl $\mu_5 + |\lambda_0|$ mit $\mu_5 = \max(|\mu_2|, |\mu_3|)$ bestimmt wird. Aus dieser Ungleichung und der Abschätzung (460) erhalten wir

$$\|u\|^{(2)} \leq C_2 \|L_1(u)\| \quad (461)$$

mit $C_2 = 2\nu^{-1} + C_1 \delta_1^{-1}$. Wir beweisen die folgende nützliche Aussage:

Satz 1. *Die Bedingungen (413) und (433) seien für L und den gleichgestalteten Operator L_0 erfüllt. Für $L_1 = L - \lambda_0 E$ und L_0 gelte die Ungleichung (459). Das Gebiet D erfülle die Voraussetzungen des vorhergehenden Abschnittes. Darüber hinaus habe das Problem*

$$L_0(u) = f, \quad u|_S = 0 \quad (462)$$

für jedes f aus einer gewissen in $L_2(D)$ dichten Menge M eine Lösung u aus $W_{2,0}^2(D)$. Dann ist das Problem

$$L_\tau(u) = f, \quad u|_S = 0 \quad (463)$$

mit $L_\tau = L_0 + \tau(L_1 - L_0)$ für alle τ aus $[0, 1]$ und für beliebiges f aus $L_2(D)$ eindeutig lösbar im Raum $W_{2,0}^2(D)$.

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß L_0 für beliebiges u aus $W_{2,0}^2(D)$ den Ungleichungen

$$L_0(u, u) \equiv - \int_D L_0(u) u dx \geq \delta_1 \|u\|^2 \quad (464)$$

und

$$\|u\|^{(2)} \leq C_2 \|L_0(u)\| \quad (465)$$

genügt. Wegen (465) ist das Problem (462) für beliebiges f aus $L_2(D)$ eindeutig in $W_{2,0}^2(D)$ lösbar: Für $f \in M$ ist die Lösbarkeit eine Voraussetzung des Satzes, während die Eindeutigkeit aus (465) folgt. Wenn nun $f \in L_2(D)$ gilt, aber f nicht zu M gehört, dann wählen wir eine Folge f_m ($m = 1, 2, \dots$) aus M , die in der Norm von $L_2(D)$ gegen f konvergiert. Für jedes f_m existiert die Lösung u_m aus $W_{2,0}^2(D)$ für das Problem (462) mit $f = f_m$. Wegen der Linearität des Problems (462) ist die Differenz $u_k - u_m$ Lösung dieses Problems mit der Störfunktion $f_k - f_m$. Für $u_k - u_m$ gilt die Ungleichung (465), d. h.

$$\|u_k - u_m\|^{(2)} \leq C_2 \|f_k - f_m\|.$$

Also ist $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ eine Cauchyfolge im Raum $W_{2,0}^2(D)$. Wegen der Vollständigkeit dieses Raumes existiert ein eindeutig bestimmtes Element $u \in W_{2,0}^2(D)$, der Grenzwert der Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ in der Norm von $W_{2,0}^2(D)$. Weil die Koeffizienten von L_0 beschränkte Funktionen sind, konvergiert $L_0(u_m)$ in der Norm von $L_2(D)$ gegen

$L_0(u)$. Daher gilt $L_0(u) = f$. Damit haben wir uns davon überzeugt, daß das Problem (462) für beliebiges f aus $L_2(D)$ in $W_{2,0}^2(D)$ lösbar ist. Wegen (465) ist die Lösung eindeutig bestimmt. Damit kann man sagen, daß der Operator L_0 eine eindeutige Zuordnung zwischen den vollständigen Räumen $W_{2,0}^2(D)$ und $L_2(D)$ erklärt. Der inverse Operator L_0^{-1} von L_0 bildet $L_2(D)$ auf $W_{2,0}^2(D)$ ab, und wegen der Ungleichung (465) gilt für alle Elemente v aus $L_2(D)$

$$\|L_0^{-1}(v)\|^{(2)} \leq C_2 \|v\|. \quad (466)$$

Die Abschätzung (466) oder die Abschätzung $\|L_0^{-1}\| \leq C_2$ für die Norm des aus $L_2(D)$ in $W_{2,0}^2(D)$ abbildenden Operators L_0^{-1} erhält man aus der Ungleichung (465) (wenn wir in (465) die Funktion $L_0(u)$ mit v bezeichnen, dann ist u nichts anderes als $L_0^{-1}(v)$). Wir zeigen, daß alle Operatoren L_τ ($\tau \in [0, 1]$) diese Eigenschaften besitzen. Dazu wenden wir auf beide Seiten der Gleichung (463) den Operator L_0^{-1} an und schreiben das Ergebnis in der Gestalt

$$u + \tau L_0^{-1} (L_1 - L_0) (u) = L_0^{-1}(f). \quad (467)$$

Die Gleichung (467) fassen wir als eine Operatorgleichung

$$u + \tau A_0(u) = L_0^{-1}(f) \quad (468)$$

im Raum $W_{2,0}^2(D)$ mit der Störfunktion $L_0^{-1}(f)$ auf. Dabei ist $A_0 = L_0^{-1} (L_1 - L_0)$ ein beschränkter Operator im Raum $W_{2,0}^2(D)$. Die Norm dieses Operators ist nicht größer als eine Konstante C_3 , die durch die Maxima der Beträge der Koeffizienten von L_1 und L_0 sowie durch C_2 bestimmt wird. Für beliebiges $u \in W_{2,0}^2(D)$ gilt nämlich $\|(L_1 - L_0)(u)\| \leq C_4 \|u\|^{(2)}$ sowie wegen (466)

$$\|A_0(u)\|^{(2)} \leq \|L_0^{-1}\| \|(L_1 - L_0)(u)\| \leq C_3 \|u\|^{(2)} \quad (469)$$

mit $C_3 = C_2 C_4$. Nach Hilfssatz 1 [147] hat die Gleichung (468) für $\tau \in [0, C_3^{-1}]$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $W_{2,0}^2(D)$. Das bedeutet nun, daß das Problem (463) für beliebiges $f \in L_2(D)$ und beliebiges nichtnegatives $\tau < C_3^{-1}$ in $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar ist. Die Operatoren L_τ erklären für $\tau \in [0, C_3^{-1}]$ eine eindeutige Beziehung zwischen $W_{2,0}^2(D)$ und $L_2(D)$. Gilt $C_3^{-1} \leq 1$, so wählen wir ein beliebiges τ_1 aus dem Intervall $\left[\frac{1}{2} C_3^{-1}, C_3^{-1}\right)$ und schreiben unter Verwendung von $L_\tau = L_{\tau_1} + (\tau - \tau_1) (L_1 - L_0)$ das Problem (463) in der äquivalenten Form

$$u + (\tau - \tau_1) L_{\tau_1}^{-1} (L_1 - L_0) (u) = L_{\tau_1}^{-1}(f). \quad (470)$$

Der Operator $A_1 = L_{\tau_1}^{-1} (L_1 - L_0)$ ist im Raum $W_{2,0}^2(D)$ beschränkt. Wir zeigen, daß seine Norm C_3 nicht übersteigt. Dazu bemerken wir, daß aus der Bedingung (459) für L_1 und L_0 die Ungleichung

$$L_\tau(u, u) \equiv - \int_D L_\tau(u) u \, dx = (1 - \tau) L_0(u, u) + \tau L_1(u, u) \equiv \delta_1 \|u\|^2$$

für $\tau \in [0, 1]$ folgt. Darüber hinaus gelten für die Koeffizienten von L_τ vor u_{x_i} und $u_{x_i x_k}$ die gleichen Ungleichungen wie für die entsprechenden Koeffizienten von L und L_0 . Der Betrag des Koeffizienten vor u übersteigt den Wert $\mu_5 + |\lambda_0|$ nicht. Angesichts dessen gelten für L_τ die Ungleichungen (460) und (461). Daraus folgt, daß $\|L_\tau^{-1} (L_1 - L_0)\| \leq C_3$ für diejenigen τ gilt, für die L_τ^{-1} existiert, insbesondere für $\tau = \tau_1$. Dann ist jedoch die Gleichung (470) für $\tau - \tau_1 \in [0, C_3^{-1}]$ in $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar, also auch für $\tau = 2\tau_1$. Damit haben wir die Existenz des zu $L_{2\tau_1}$ inversen Operators $L_{2\tau_1}^{-1}$ nachgewiesen. Falls $2\tau_1 < 1$ gilt, stellen wir L_τ in der Gestalt $L_{2\tau_1} + (\tau - 2\tau_1) (L_1 - L_0)$ dar und wiederholen für diesen Operator die soeben durchge-

fürten Überlegungen. Auf diese Weise schöpfen wir nach endlich vielen Schritten das gesamte Intervall $\tau \in [0, 1]$ aus und beweisen somit die Invertierbarkeit der Operatoren L_τ . Damit ist der Satz 1 bewiesen. Für $\tau = 1$ stimmt der Operator L_τ mit dem uns interessierenden Operator $L_1 = L - \lambda_0 E$ überein.

Mit Satz 1 ist es möglich, natürliche Existenzsätze für das Problem

$$L_1(u) = L(u) - \lambda_0 u = f, \quad u|_S = 0 \quad (471)$$

für eine genügend breite Klasse von Gebieten zu beweisen. Es sei zunächst D eine Kugel oder ein Parallelepiped.¹⁾ Für solche D wählen wir als L_0 den Laplace-schen Differentialoperator. Das Problem (462) genügt für diesen Operator den Voraussetzungen von Satz 1. In der Tat ist für solche Gebiete bekannt, daß der Laplace-sche Differentialoperator für das erste Randwertproblem solche Eigenfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ besitzt, die bis einschließlich des Randes S glatt sind und im Raum $L_2(D)$ dicht liegen.²⁾ Man kann die Eigenfunktionen orthonormiert voraussetzen. Eine beliebige Funktion f aus $L_2(D)$ läßt sich nach den Eigenfunktionen in die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x)$$

entwickeln, die in der Norm von $L_2(D)$ gegen f konvergiert. Die Funktionen u_k genügen den Gleichungen

$$\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad u_k|_S = 0. \quad (472)$$

Das Problem

$$\Delta u = f, \quad u|_S = 0 \quad (473)$$

hat für beliebiges $f(x) = \sum_{k=1}^N c_k u_k(x)$ die Lösung $u(x) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\lambda_k} u_k(x)$. Diese Lösung liegt im Raum $W_{2,0}^2(D)$. Darüber hinaus ist die Menge M aller Funktionen $f(x)$ der Gestalt $\sum_{k=1}^N c_k u_k(x)$ mit beliebigen Koeffizienten c_k dicht in $L_2(D)$. Der Operator $L_0 = \Delta$ genügt auch allen anderen Voraussetzungen von Satz 1, wenn auch mit anderen Konstanten ν, μ_i, δ als L_1 . Das spielt jedoch keine wesentliche Rolle: Man kann in den Bedingungen (413), (433) und (459) die Konstanten ν, μ_i und δ so wählen, daß sie für $L_0 = \Delta$ und L_1 gelten.

Auf diese Weise haben wir gezeigt, daß das Problem (471) für beliebiges $f \in L_2(D)$ im Raum $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar ist, falls D eine Kugel oder ein Parallelepiped ist. Analoge Überlegungen gelten für solche Gebiete D , für die alle Eigenfunktionen u_k des Eigenwertproblems (471) in $W_{2,0}^2(D)$ liegen. Das ist z. B. für die Kugelschicht $D = \{x : 0 < \varrho < |x| < \varrho_1\}$ sowie für solche Gebiete der Fall, die sich in Kugel- oder Zylinderkoordinaten als Parallelepiped darstellen lassen.

Es sei nun D ein Gebiet, welches in ein Gebiet $\bar{D}$ dieser Gestalt transformiert werden kann. Dabei seien die Funktionen $y = y(x)$ ($x \in \bar{D}$), die diese Transformation realisieren, und die entsprechenden Umkehrfunktionen $x = x(y)$ ($y \in \bar{D}$) aus der Klasse $C^2(\bar{D})$ bzw. $C^2(\bar{D})$. Die Jacobideterminanten $\frac{\partial(y)}{\partial(x)}$ und $\frac{\partial(x)}{\partial(y)}$ seien streng posi-

¹⁾ Im Fall $n = 2$ (das Problem im R^2) kann man für D einen Kreis oder ein Rechteck wählen.

²⁾ In [II, 190, 191] und in [III/2, 134–137, 146, 154–156] wurde die explizite Gestalt aller u_k für solche Gebiete D angegeben. Daraus geht deutlich hervor, daß $u_k \in C^\infty(D)$ gilt. In [127] wurde die Vollständigkeit von $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ bewiesen.

tiv. Daraus geht leicht hervor, daß für beliebiges $u(x) \in W_{2,0}^2(D)$ die Funktion $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ im Raum $W_{2,0}^2(\tilde{D})$ liegt und umgekehrt. Der Differentialausdruck $L(u)$ transformiert sich beim Übergang von den Veränderlichen x zu y wie folgt:

$$\tilde{L}(\tilde{u}) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\tilde{a}_{ik}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \right) + \tilde{b}_i(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} + \tilde{c}(y) \tilde{u}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik}(y) &= \left[a_{il}(x) \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial y_k(x)}{\partial x_l} \right] \Big|_{x=x(y)}, \\ \tilde{b}_i(y) &= \left[b_j(x) \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \right] \Big|_{x=x(y)} - \left[a_{lk}(x) \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_k} \right] \Big|_{x=x(y)} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_l} \right) \Big|_{x=x(y)} \end{aligned}$$

und $\tilde{c}(y) = c(x(y))$. Man überprüft leicht, daß die Koeffizienten von $\tilde{L}$ Ungleichungen der Gestalt (413) und (433) genügen, allerdings mit anderen Konstanten. Nach diesen Konstanten kann man die Zahl λ_0 so groß wählen, daß für $\tilde{L} - \lambda_0 E$ die Bedingung der Gestalt (458) und daher auch die Ungleichung (459) in $\tilde{D}$ erfüllt ist. Ist $\tilde{D}$ eine Kugel, ein Parallelepiped oder eine Kugelschicht, so folgt aus dem oben Gesagten, daß das Problem $\tilde{L}(\tilde{u}) - \lambda_0 \tilde{u} = \tilde{f}(y)$, $\tilde{u}|_{\partial \tilde{D}} = 0$ für beliebiges $\tilde{f} \in L_2(\tilde{D})$ in $W_{2,0}^2(\tilde{D})$ eindeutig lösbar ist. Gehen wir wieder zu den alten Veränderlichen x über, so erhalten wir für das von uns gewählte λ_0 und für beliebiges $f \in L_2(D)$ die eindeutige Lösbarkeit des Problems (471) im Raum $W_{2,0}^2(D)$. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. Wenn die Koeffizienten von L aus (402) den Bedingungen (413) und (433) genügen und das Gebiet D eine Kugel, ein Parallelepiped oder eine Kugelschicht ist bzw. mit Hilfe einer regulären Transformation $y = y(x) \in C^2(\bar{D})$ in eines dieser Gebiete übergeführt werden kann, dann ist das Problem (471) für hinreichend große λ_0 für beliebiges $f \in L_2(D)$ im Raum $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar.

Bemerkung. Mit diesem Satz läßt sich zeigen, daß eine solche Lösbarkeitsaussage auch für beliebige (darunter auch unbeschränkte) Gebiete mit einer Randfläche der Klasse C^2 gilt.

149. Über die Fredholmsche Lösbarkeit des Dirichletschen Problems. Wir behandeln nun die Frage nach der Lösbarkeit des Dirichletschen Problems

$$L(u) = \lambda u + f, \quad u|_S = 0 \quad (474)$$

für beliebiges reelles λ . Alles weitere gilt auch für beliebige komplexe λ , wir beschränken uns jedoch auf den Fall reeller λ . Für L und D seien die Voraussetzungen von Satz 2 aus [148] erfüllt. Wir wählen λ_0 so groß, daß für $L_1 = L - \lambda_0 E$ die Aussage dieses Satzes gilt, und formen das Problem (474) in die äquivalente Gestalt

$$u = (\lambda - \lambda_0) L_1^{-1}(u) + L_1^{-1}(f) \quad (475)$$

um. Wie in [148] bewiesen wurde, bildet L_1^{-1} die Elemente aus $L_2(D)$ auf Elemente aus $W_{2,0}^2(D)$ ab, und für beliebiges $f \in L_2(D)$ gilt (vgl. (461))

$$\|L_1^{-1}(f)\|^{(2)} \leq C_2 \|f\|. \quad (476)$$

Nach dem Satz von RELICH [IV/1, 116] folgt daraus, daß L_1^{-1} (aufgefaßt als Operator von $L_2(D)$ in $L_2(D)$) ein vollstetiger Operator im Raum $L_2(D)$ ist. Daher können wir die von uns in [IV/1, 29] [vgl. auch V, 133–135] dargelegten Fredholmschen Sätze auf die Gleichung (475) anwenden. Aus diesen Sätzen folgt, daß die Gleichung (475) für alle mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen λ in $L_2(D)$ eindeutig lösbar ist. Diese ausgeschlossenen Zahlen bezeichnen wir mit $\{\lambda_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Es sei λ eine Zahl, die von allen λ_k verschieden ist, und u sei die λ entsprechende Lösung der Gleichung (475). Diese Lösung u liegt faktisch in $W_{2,0}^2(D)$, so daß für $f \in L_2(D)$ beide Ausdrücke der rechten Seite der Gleichung (475) in $W_{2,0}^2(D)$ liegen. Daher ist u Lösung des Problems (474) aus dem Raum $W_{2,0}^2(D)$.

Für $\lambda = \lambda_k$ (und nur für solche λ) gibt es nichttriviale (d. h. nicht identisch verschwindende) Lösungen der homogenen Gleichung

$$u_k = (\lambda_k - \lambda_0) L_1^{-1}(u_k). \quad (477)$$

Sie liegen auch in $W_{2,0}^2(D)$, denn aus der Zugehörigkeit von u_k zu $L_2(D)$ und den Eigenschaften des Operators L_1^{-1} folgt, daß $L_1^{-1}(u_k) \in W_{2,0}^2(D)$ gilt. Damit sind die u_k Lösungen des Problems

$$L(u_k) = \lambda_k u_k, \quad u_k|_S = 0. \quad (478)$$

Sie heißen *Eigenfunktionen des Operators L im Gebiet D unter der ersten Randbedingung*, die λ_k heißen *Eigenwerte* des Operators. Aus der weiter oben zitierten Theorie der linearen Gleichungen mit vollstetigen Operatoren folgt, daß jeder Zahl λ_k höchstens eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen des Problems (478) entspricht, mit anderen Worten: Jedes λ_k besitzt eine endliche Vielfachheit. Zur Formulierung der folgenden Aussagen müssen wir zu den im $L_2(D)$ wirkenden Operatoren L und L_1 adjungierte Operatoren einführen.

Der zu einem gegebenen (linearen) Operator A adjungierte Operator wird mit A^* bezeichnet. Er wird durch die Identität

$$(A(u), v) = (u, A^*(v)) \quad (479)$$

erklärt, die für alle die Elemente u erfüllt sein muß, für die der Operator A definiert ist. Für beschränkte Operatoren A setzen wir voraus, daß der Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ des Operators A der gesamte $L_2(D)$ ist, während wir für unbeschränkte Operatoren A fordern, daß $\mathfrak{D}(A)$ dicht in $L_2(D)$ liegt. Der Definitionsbereich des Operators A^* (der mit $\mathfrak{D}(A^*)$ bezeichnet wird) besteht aus genau denjenigen Elementen v , für die der Ausdruck $(A(u), v)$, der ein lineares Funktional von u auf der Menge $\mathfrak{D}(A)$ darstellt, in der Form (u, w) geschrieben werden kann, wobei w ein gewisses Element aus $L_2(D)$ ist. Wegen der Dichtheit von $\mathfrak{D}(A)$ in $L_2(D)$ gibt es nur ein solches Element, welches mit $A^*(v)$ bezeichnet wird.

Für den Fall beschränkter Operatoren A kann man zeigen, daß $\mathfrak{D}(A^*)$ der gesamte $L_2(D)$ ist (falls an Stelle von $L_2(D)$ ein Hilbertscher Raum H gewählt wurde, ist es der gesamte Raum H). Das folgt leicht aus dem Rieszschen Satz über die allgemeine Gestalt eines linearen Funktionals in $L_2(D)$ (vgl. [V, 123]). In der Tat ist für ein beliebig fixiertes v aus $L_2(D)$ der Ausdruck $(A(u), v)$ eine auf dem gesamten Raum $L_2(D)$ erklärte, lineare, stetige Funktion (ein lineares Funktional) von u , und daher findet sich genau ein Element w derart, daß $(A(u), v) = (u, w)$ für alle $u \in L_2(D)$ gilt. Das bedeutet jedoch nichts anderes als $v \in \mathfrak{D}(A^*)$, $w = A^*(v)$ und $\mathfrak{D}(A^*) = L_2(D)$.

Für unbeschränkte Operatoren A ist die Bestimmung der „expliziten“ Gestalt von A^* und das Auffinden von $\mathfrak{D}(A^*)$ eine schwierige Frage. Die uns interessierenden Operatoren L und L_1 sind auf der in $L_2(D)$ dichten Menge $W_{2,0}^2(D)$ erklärte unbeschränkte Operatoren. Wir zeigen, daß die zugehörigen adjungierten Operatoren L^* und L_1^* die Gestalt

$$L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) + c u, \quad L_1^*(u) = L^*(u) - \lambda_0 u \quad (480)$$

besitzen (d. h., es sind Differentialoperatoren, die im Sinne von LAGRANGE zu L bzw. L_1 adjungiert sind; vgl. Formel (410)) und daß ihr Definitionsbereich mit

$W_{2,0}^2(D)$ übereinstimmt. Dazu überzeugen wir uns zunächst davon, daß das Problem

$$L_1^*(u) = f, \quad u|_S = 0 \quad (481)$$

für den Differentialausdruck $L_1^*(u)$ aus (480) für beliebiges $f \in L_2(D)$ im Raum $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar ist. In der Tat sind für L_1^* alle Voraussetzungen von Satz 2 aus [148], darunter auch die Forderung $L_1^*(u, u) \cong \delta_1 \|u\|^2$ ($\delta_1 > 0$) für $\lambda_0 \gg 1$ erfüllt, denn es gilt

$$L_1^*(u, u) = (-L_1^*(u), u) = \int (a_{ik} u_{x_k} u_{x_i} - b_i u u_{x_i} - c u^2 + \lambda_0 u^2) dx = L_1(u, u).$$

Wir bezeichnen mit $(L_1^*)^{-1}$ den Operator, der f die Lösung u des Problems (481) zuordnet. Dabei handelt es sich um einen beschränkten Operator im Raum $L_2(D)$, der eine eindeutige Beziehung zwischen $L_2(D)$ und $W_{2,0}^2(D)$ herstellt. Andererseits gilt für beliebige Funktionen u und v aus $W_{2,0}^2(D)$ die Gleichung

$$(L_1(u), v) = (u, L_1^*(v)), \quad (481_1)$$

die man durch zweimalige partielle Integration der linken Seite erhält. Vergleicht man sie mit der obigen Definition des zu A adjungierten Operators A^* , so sieht man, daß die Elemente v der Menge $W_{2,0}^2(D)$ zu $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(L_1^*)$ gehören und daß nach (480) für diese Elemente $A^* = L_1^*$ gilt. Es bleibt noch zu überprüfen, ob $\mathfrak{D}(L_1^*) = W_{2,0}^2(D)$ gilt. Es muß also gezeigt werden: Wenn für beliebige Elemente v und f aus $L_2(D)$ die Gleichung

$$(L_1(u), v) = (u, f)$$

für alle $u \in W_{2,0}^2(D)$ besteht, gilt $v \in W_{2,0}^2(D)$ und $f = L_1^*(v)$. Wir bestimmen zu f das Element $w = (L_1^*)^{-1}f$, die Lösung des Problems (481) (sie liegt im Raum $W_{2,0}^2(D)$) und stellen (u, f) in der Gestalt $(u, L_1^*(w)) = (L_1(u), w)$ entsprechend Formel (481₁) dar. Dann gilt $(u, f) = (L_1(u), w) = (L_1(u), v)$, und so wie die Elemente $L_1(u)$ den gesamten Raum $L_2(D)$ durchlaufen, durchläuft u den Raum $W_{2,0}^2(D)$. Daraus folgt $v = w$, d. h., v gehört tatsächlich zu $W_{2,0}^2(D)$, und es gilt $f = L_1^*(v)$.

Damit haben wir gezeigt, daß der adjungierte Operator L_1^* des unbeschränkten, im Raum $L_2(D)$ wirkenden und auf der Menge $\mathfrak{D}(L_1) = W_{2,0}^2(D)$ erklärten Operators L_1 den Definitionsbereich $\mathfrak{D}(L_1^*) = W_{2,0}^2(D)$ besitzt und auf den Elementen dieser Menge durch den Differentialausdruck (480) erklärt ist. Da sich der Differentialausdruck $L(u)$ von $L_1(u)$ nur durch den Summanden $\lambda_0 u$, dem ein beschränkter Operator entspricht, unterscheidet, gilt $\mathfrak{D}(L) = \mathfrak{D}(L_1) = W_{2,0}^2(D)$, $\mathfrak{D}(L^*) = \mathfrak{D}(L_1^*) = W_{2,0}^2(D)$, und der Operator L^* ist auf $W_{2,0}^2(D)$ durch den Differentialausdruck L^* aus (480) gegeben.

Bemerkung. Wird vom Differentialoperator L^* gesprochen, der durch den Ausdruck (480) gegeben ist, so hat man nur die Regeln für die Berechnung von $L^*(u)$ für die Funktion $u(x)$ im Sinn. Es ist notwendig, diesen Begriff vom Begriff des adjungierten Operators eines unbeschränkten Operators L , der durch einen Differentialausdruck gegeben ist, zu unterscheiden. In diesem Fall muß der Definitionsbereich des Differentialoperators L angegeben und der Definitionsbereich des zugehörigen adjungierten Operators bestimmt werden.

Wir konzentrieren uns nun auf die Untersuchung der Operatoren L und L^* sowie $L_1 = L - \lambda_0 E$ und $L_1^* = L^* - \lambda_0 E$, die auf der Teilmenge $W_{2,0}^2(D)$ des Raumes $L_2(D)$ erklärt sind. Wir beweisen, daß der adjungierte Operator des beschränkten, im Raum $L_2(D)$ wirkenden Operators L_1^{-1} der Operator $(L_1^*)^{-1}$ ist. Mit anderen Worten:

Wir beweisen, daß

$$(L_1^{-1})^* = (L_1^*)^{-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}((L_1^*)^{-1}) = \mathfrak{D}((L_1^{-1})^*) = L_2(D)$$

gilt. Das schließt man leicht aus den bereits bekannten Tatsachen, und zwar daraus, daß der Operator L_1 mit seinem adjungierten Operator L_1^* eine eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{D}(L_1) = \mathfrak{D}(L_1^*) = W_{2,0}^2(D)$ und dem gesamten Raum $L_2(D)$ herstellt, sowie daraus, daß zwischen diesen Operatoren die Beziehung (481₁) für beliebige u, v aus $W_{2,0}^2(D)$ besteht. Durchlaufen u und v die Menge $W_{2,0}^2(D)$, so durchlaufen $L_1(u)$ und $L_1(v)$ den gesamten Raum $L_2(D)$. Bezeichnen wir $L_1(u)$ mit φ und $L_1(v)$ mit ψ , so erhält (481₁) die Gestalt

$$(\varphi, (L_1^*)^{-1}\psi) = (L_1^{-1}\varphi, \psi).$$

Da diese Gleichung für beliebige $\varphi, \psi \in L_2(D)$ gilt, folgt daraus: $(L_1^{-1})^*$ ist gleich dem beschränkten Operator $(L_1^*)^{-1}$ in $L_2(D)$.

Wir wenden uns nun dem Problem (474) und den damit verbundenen Problemen (475), (477) und (478) zu. Da L_1^{-1} im Raum $L_2(D)$ ein vollstetiger Operator ist, stimmen die charakteristischen Zahlen des adjungierten Operators $(L_1^{-1})^*$ mit den Zahlen $\lambda_k - \lambda_0$ von L_1^{-1} überein, d. h., die Gleichung

$$v = (\lambda - \lambda_0) (L_1^{-1})^* (v) \quad (482)$$

hat nur für $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$) nichtverschwindende Lösungen (wir erinnern daran, daß wir uns auf die Betrachtung reeller λ beschränken). Jedem λ_k entspricht eine endliche Anzahl nichttrivialer Lösungen v_k der Gleichung (482), die mit der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (477) für dieses λ_k übereinstimmt. Mit anderen Worten: Die Vielfachheiten der charakteristischen Zahlen $\lambda_k - \lambda_0$ stimmen für L_1^{-1} und $(L_1^{-1})^*$ überein. Wegen $(L_1^{-1})^* = (L_1^*)^{-1}$ ist die Gleichung (482) mit dem Gleichungssystem

$$L_1^*(v) = (\lambda - \lambda_0) v, \quad v|_S = 0$$

gleichwertig. Das ist jedoch für sich genommen nichts anderes als das System

$$L^*(v) = \lambda v, \quad v|_S = 0, \quad (483)$$

dessen Lösungen im Raum $W_{2,0}^2(D)$ gesucht werden. Der Differentialoperator L^* ist durch die Gleichung (480) gegeben. Also ist das reelle Spektrum der Operatoren L und L^* für das erste Randwertproblem höchstens abzählbar, jedes Element λ_k des Spektrums besitzt eine endliche Vielfachheit, und einzige Häufungspunkte von $\{\lambda_k\}$ können nur $\lambda = \pm\infty$ sein. Aus Satz 2 [148] folgt jedoch, daß das Problem (478) für λ größer gleich λ_0 keine nichtverschwindenden Lösungen besitzt, folglich sind alle λ_k kleiner als λ_0 . Hätten wir von Anfang an den komplexen Hilbertschen Raum $L_2(D)$ und das Problem (474) für komplexe λ betrachtet, so hätten wir (unter Verwendung der entsprechenden Fredholmschen Sätze für die Gleichung (475)) die Aussage erhalten, daß das vollständige Spektrum der Operatoren L und L^* aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Ähnlich einfache Abschätzungen wie in [145] zeigen, daß sich außerhalb der quadratischen Parabel der Gestalt $\lambda''^2 = \alpha_1(\alpha_2 - \lambda')$ kein Punkt des Spektrums befindet. Hier sind α_i gewisse reelle Zahlen, die man leicht aus der Elliptizitätskonstanten ν sowie den Majoranten μ_i der Koeffizienten von L berechnen kann. Weiterhin gilt $\alpha_1 > 0$, und λ' und λ'' sind der Real- bzw. Imaginärteil von λ (d. h. $\lambda = \lambda' + i\lambda''$). Eine wesentlich schwierigere Untersuchung zeigt, daß das vollständige Spektrum des Problems (474) aus einer unbeschränkten Anzahl von Eigenwerten

$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow -\infty$ für $k \rightarrow \infty$ besteht. Das wurde von CARLEMAN nachgewiesen (vgl. [138]).

Im folgenden Abschnitt zeigen wir dies für den Fall symmetrischer Operatoren, d. h. für $L^* = L$ oder, was das gleiche ist, für $b_4(x) \equiv 0$. Jetzt kommen wir zur Formulierung und zum Beweis des dritten Fredholmschen Satzes für das Problem (474).

Es sei dabei λ gleich einem gewissen Eigenwert λ_k . Besitzt das Problem (474) eine Lösung u für f aus $L_2(D)$ (wir betrachten stets nur Lösungen der Klasse $W_{2,0}^2(D)$), so können wir die erste Gleichung von (474) nach der Multiplikation mit einer beliebigen Funktion v der Klasse $W_{2,0}^2(D)$ und nach der Integration über D auf die folgende Weise umformen:

$$\int_D L(u) v dx = \int_D u L^*(v) dx = \lambda_k \int_D u v dx + \int_D f v dx.$$

Für solche v , die mit einer der Lösungen v_k des Problems (483) mit $\lambda = \lambda_k$ übereinstimmen, nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\int_D f v_k dx = 0 \quad (484)$$

an. Also ist sie für die Lösbarkeit des Problems (474) notwendig. Wir zeigen, daß die Bedingung (484) auch eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Problems (474) ist. In der Tat hat nach dem dritten Fredholmschen Satz für Gleichungen mit vollstetigem Operator L_1^{-1} die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (475) im Raum $L_2(D)$ die Gestalt

$$0 = (L_1^{-1}(f), v_k) = (f, (L_1^{-1})^*(v_k)) = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_0} (f, v_k),$$

wobei v_k eine beliebige Lösung der Gleichung (482) mit $\lambda = \lambda_k$ ist. Nun ist aber das Problem (482) mit dem Problem (483) für $\lambda = \lambda_k$ gleichwertig, und die Lösungen v_k stimmen überein. Damit ist diese Bedingung nichts anderes als die Bedingung (484). Sie besitzt auch für komplexes λ_k die gleiche Gestalt. Wir fassen nun alle bewiesenen Aussagen in einem Satz zusammen.

Satz 1. *Es gelten für L und D die Voraussetzungen von Satz 2 aus [148]. Dann ist das Problem (474) für beliebige f aus $L_2(D)$ für alle reellen λ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Werten λ_k ($k=1, 2, \dots$), die den reellen Teil des Spektrums von L in D für das erste Randwertproblem bilden, im Raum $W_{2,0}^2(D)$ eindeutig lösbar. Für diese und nur für diese Werte λ_k hat das homogene Problem (478) nichttriviale reelle Lösungen, wobei jedem λ_k höchstens eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen des Problems (478) entspricht. Die Menge $\{\lambda_k\}$ ist der reelle Teil des Spektrums des adjungierten Problems (483), wobei die λ_k hierbei die gleiche Vielfachheit besitzen wie für das Problem (478). Die Zahlen λ_k ($k=1, 2, \dots$) kann man als fallende Folge ordnen; der einzige Häufungspunkt von $\{\lambda_k\}$ kann nur $\lambda = -\infty$ sein.*

Für die Lösbarkeit des Problems (474) für $\lambda = \lambda_k$ ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung (484) über die Orthogonalität von f bezüglich aller Lösungen des adjungierten homogenen Problems für dieses λ_k erfüllt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat die allgemeine Lösung des Problems (474) die Gestalt $u = u_0 + \sum_{i=1}^{N_k} c_i u_{k_i}$, wobei u_0 eine beliebige spezielle Lösung des Problems (474) ist, c_i beliebige Zahlen und u_{k_i} ($k_i=1, \dots, N_k$) die Lösungen des Problems (478) für das gegebene λ_k sind.

Dieser Satz stellt eine der möglichen Formulierungen der **Fredholmschen Lösbarkeit** des Dirichletschen Problems (474) dar.

Wie weiter oben gesagt wurde, wird das Problem (474) für den Fall beliebiger komplexer Zahlen λ analog behandelt. Die Bedingung für die Lösbarkeit des Problems (474) für komplexes λ hat ebenfalls die Gestalt (484).

Es ist nützlich zu bemerken, daß für die Lösungen des Problems (474) mit $\lambda \neq \lambda_k$ ($k=1, 2, \dots$) die Abschätzung

$$\|u\|^{(2)} \leq C_\lambda \|f\| \quad (485)$$

gilt, wobei die Konstante C_λ von den Koeffizienten von L , vom Gebiet D und von λ abhängt. Für die λ , die die Bedingung (420) erfüllen, konnten wir C_λ explizit durch einige relativ einfache Charakteristika des Gebietes D sowie die Parameter ν , μ , μ_1 und λ ausdrücken. Im allgemeinen Fall, wenn nur bekannt ist, daß λ nicht mit einem Wert λ_k ($k=1, 2, \dots$) des Spektrums übereinstimmt, können wir zwar die Existenz der Konstanten C_λ nachweisen, wir können jedoch nicht ihre explizite Gestalt angeben. Es ist klar, daß C_λ gegen ∞ strebt, wenn λ sich dem Spektrum $\{\lambda_k\}$ nähert. Wir bemerken, daß die tatsächliche Bestimmung des Spektrums für L und D ein sehr kompliziertes numerisches Problem darstellt.

Aus Satz 1 dieses Abschnitts und Satz 2 [148] ergibt sich die folgende Aussage:

Satz 2. Für L und D seien die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt. Dann ist jede verallgemeinerte Lösung der Klasse $W_{2,0}^1(D)$ des Problems (474) ein Element von $W_{2,0}^2(D)$.

Zum Beweis sei u eine verallgemeinerte Lösung des Problems (474) aus der Klasse $W_{2,0}^1(D)$, d. h., u liegt in $W_{2,0}^1(D)$ und genügt für alle Funktionen $\eta \in W_{2,0}^1(D)$ der Beziehung (407). Wir schreiben (407) in der Gestalt

$$L(u, \eta) = - \int_D (\lambda_0 u + F) \eta \, dx \quad (486)$$

mit $F = f + (\lambda - \lambda_0) u$. Die Zahl λ_0 wählen wir so groß, daß die Ungleichung (420) erfüllt ist. Diese Ungleichung garantiert die Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes aus [145] für das Problem (474) mit $\lambda = \lambda_0$, d. h. für das Problem

$$L(v) = \lambda_0 v + F, \quad v|_S = 0, \quad (487)$$

wobei wir die Funktion $F = f + (\lambda - \lambda_0) u$ als bekannt auffassen (hier wurde als u die nach den Voraussetzungen bekannte verallgemeinerte Lösung aus $W_{2,0}^1(D)$ gewählt). Offensichtlich gilt $F \in L_2(D)$. Nach (486) ist u für das angegebene F die verallgemeinerte Lösung des Problems (487) aus $W_{2,0}^1(D)$. Andererseits garantiert Satz 2 [148] die eindeutige Lösbarkeit des Problems (487) in der Klasse $W_{2,0}^2(D)$ (wegen (420) gilt der erste Fredholmsche Satz). Nach Satz 1 [145] folgt nun, daß diese Lösung mit der verallgemeinerten Lösung u aus $W_{2,0}^1(D)$ übereinstimmen muß, also ist u ein Element von $W_{2,0}^2(D)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

150. Über das Spektrum symmetrischer Operatoren. Wir betrachten symmetrische Differentialoperatoren L der Gestalt (402), d. h. solche, für die der im Sinne von LAGRANGE adjungierte Operator L^* (seine Form ist in (480) gegeben) mit L übereinstimmt. Beide haben die Gestalt

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + cu. \quad (488)$$

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$L(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0 \quad (489)$$

im beschränkten Gebiet D unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten von L und das Gebiet D den Bedingungen von Satz 2 [148] genügen. Aus den Ergebnissen von [149] folgt, daß der adjungierte Operator des unbeschränkten, auf der dichten Teilmenge $W_{2,0}^2(D)$ des Raumes $L_2(D)$ durch die Beziehung (488) erklärten Operators L mit diesem Operator übereinstimmt und den gleichen Definitionsbereich $W_{2,0}^2(D)$ besitzt. In diesem Fall nennt man L einen selbstadjungierten Operator; in Form einer Gleichung wird das durch $L = L^*$ ausgedrückt. Die diesem Operator entsprechende quadratische Form $L(u, u)$ hat die Gestalt

$$L(u, u) = - \int_D L(u) u \, dx = \int_D (a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} - cu^2) \, dx.$$

Da nach Voraussetzung $-c(x) \equiv -\mu_3$ gilt, besteht für $\lambda_0 = \mu_3$ die Beziehung

$$\begin{aligned} L_1(u, u) &\equiv - \int_D (L - \lambda_0)(u) \, dx = L(u, u) + \lambda_0 \|u\|^2 \\ &\equiv \nu \int_D u_x^2 \, dx \equiv \nu C_D^{-1} \|u\|^2, \end{aligned} \quad (490)$$

wobei C_D die positive Konstante aus der Ungleichung (423) [145] bezeichnet. Entsprechend der Ergebnisse von [148] für $L_1 = L_0 - \lambda_0 E$ existiert der inverse Operator L_1^{-1} , der ein selbstadjungierter, vollstetiger Operator im Raum $L_2(D)$ ist. Deshalb gelten für diesen Operator die in [IV/1, 30–36] bewiesenen Sätze. Danach besteht sein (vollständiges) Spektrum aus höchstens abzählbar vielen reellen Zahlen, die wir mit μ_k ($k=1, 2, \dots$) bezeichnen. Jeder Zahl μ_k entspricht eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen der Gleichung

$$L_1^{-1} u_k = \mu_k u_k, \quad (491)$$

die Elemente von $L_2(D)$ sind. Da L_1^{-1} umkehrbar ist, gehört die Zahl $\mu=0$ nicht zum Spektrum von L_1^{-1} (d. h., keines der μ_k ist 0). Damit ist die Zahl der unterschiedlichen Eigenwerte μ_k unbeschränkt. Aus den Eigenschaften des Operators L_1^{-1} folgt, daß die u_k zum Raum $W_{2,0}^2(D)$ gehören. Also ist jedes u_k Lösung des Problems

$$L_1 u = \frac{1}{\mu} u, \quad u|_S = 0 \quad (492)$$

mit $\mu = \mu_k$. Umgekehrt ist jede Lösung des Problems (492) aus dem Raum $W_{2,0}^2(D)$ eine Lösung der Gleichung (491). Genauer betrachtet ist das Problem (492) nichts anderes als das Problem (489) mit $\lambda = \lambda_0 + \mu^{-1}$. Aus der Ungleichung (490) folgt, daß alle μ_k negativ sind und daß $-\mu_k \leq \nu^{-1} C_D$ gilt. Für $u = u_k$ liefert nämlich die Ungleichung (490) die Abschätzung

$$L_1(u_k, u_k) = - \frac{1}{\mu_k} \|u_k\|^2 \geq \nu C_D^{-1} \|u_k\|^2.$$

Wegen der in [IV/1, 30–36] bewiesenen Eigenschaften vollstetiger symmetrischer Operatoren kann man die Eigenwerte μ_k ($k=1, 2, \dots$) als wachsende Folge auffassen. Außerdem ist es günstig, jeden Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit in der Folge $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ zu notieren sowie jedem Element der Folge eine normierte Eigenfunktion aus $L_2(D)$ so zuzuordnen, daß diese Funktionen paarweise orthogonal sind. Dementsprechend setzen wir voraus, daß

$$-\nu^{-1} C_D \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots < 0, \quad \mu_k \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty \quad (493)$$

gilt und daß die zugehörigen Eigenfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ den Bedingungen

$$(u_k, u_l) = \delta_{kl} \quad (494)$$

genügen. Das Spektrum des Operators L besteht bei Dirichletschen Bedingungen aus den Zahlen $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k = \lambda_0 + \mu_k^{-1}$. Der Zahl λ_k entspricht die Eigenfunktion u_k , die Lösung des Problems (489) für $\lambda = \lambda_k$. Alle Funktionen u_k gehören, wie oben bemerkt wurde, zum Raum $W_{2,0}^2(D)$. Es ist klar, daß $\lambda_k \rightarrow -\infty$ für $k \rightarrow \infty$ gilt.

Wir befassen uns nun mit den Entwicklungssätzen bezüglich des Systems von Eigenfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nach Satz 5 [IV/1, 36] bildet das System $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Basis in $L_2(D)$, d. h., eine beliebige Funktion f aus $L_2(D)$ kann bezüglich dieses Systems in eine Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x) \quad (495)$$

entwickelt werden, die in der Norm von $L_2(D)$ gegen f konvergiert. Es gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)^2. \quad (496)$$

Wir zeigen, daß die Reihe (495) für $f \in W_{2,0}^2(D)$ in der Norm von $W_{2,0}^2(D)$ gegen f konvergiert. Mit anderen Worten: Die Reihe (495) kann gliedweise ein- und zweimal nach x differenziert werden, und die dabei entstehenden Reihen konvergieren in der Norm von $L_2(D)$ gegen die entsprechenden Ableitungen von f (wir bemerken, daß diese Reihen in $L_2(D)$ nicht orthogonal sein müssen!). Zum Beweis fassen wir $W_{2,0}^2(D)$ als Hilbertschen Raum mit dem durch die Gleichung (432) definierten Skalarprodukt und der Norm $\|\cdot\|^{(2)}$ [146] auf.

Wir führen in $W_{2,0}^2(D)$ das neue Skalarprodukt

$$\{u, v\} \equiv \int_D L_1(u) L_1(v) dx$$

ein. Die zugehörige Norm, die wir mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnen, ist zur Norm $\|\cdot\|^{(2)}$ äquivalent (vgl. dazu [147]): Die für alle $u \in W_{2,0}^2(D)$ geltende Ungleichung

$$\|u\|_2 \leq C_1 \|u\|^{(2)}$$

folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von a_{ik} , $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}$ und der Funktion c . Die umgekehrte Ungleichung

$$\|u\|^{(2)} \leq C_2 \|u\|_2 = C_2 \|L_1(u)\|$$

ist nichts anderes als die Ungleichung (461). Damit ist die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|^{(2)}$ und $\|\cdot\|_2$ bewiesen. Die Funktionen u_k liegen in $W_{2,0}^2(D)$, also gehören die Partialsummen von (495) ebenfalls zu $W_{2,0}^2(D)$. Darüber hinaus sind die Funktionen $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ im Sinne des neuen Skalarprodukts paarweise orthogonal, denn aus (492) folgt

$$\{u_k, u_l\} \equiv (L_1(u_k), L_1(u_l)) = \frac{1}{\mu_k \mu_l} (u_k, u_l) = \mu_k^{-2} \delta_{kl}.$$

Angesichts dessen überprüft man leicht die Beziehung

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} (f, u_k) u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m}^{m+p} \mu_k^{-2} (f, u_k)^2 = \sum_{k=m}^{m+p} (f, L_1(u_k))^2 = \sum_{k=m}^{m+p} (L_1(f), u_k)^2.$$

Dabei haben wir nur die Tatsache $f \in W_{2,0}^2(D)$ benutzt. Die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (L_1(f), u_k)^2$ konvergiert gegen $\|L_1(f)\|_2^2$, denn es gilt $L_1(f) \in L_2(D)$ (vgl. (496)). Also bilden die Funktionen $f^N(x) = \sum_{k=1}^N (f, u_k) u_k(x)$ ($N=1, 2, \dots$) eine Cauchyfolge im Raum

$W_{2,0}^2(D)$, und wegen dessen Vollständigkeit existiert ein Element $\hat{f}(x)$ aus $W_{2,0}^2(D)$ derart, daß f^N in der Norm von $W_{2,0}^2(D)$ gegen $\hat{f}$ konvergiert. Andererseits wissen wir, daß $f^N(x)$ in der Norm von $L_2(D)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Folglich gilt $f(x) = \hat{f}(x)$. Damit haben wir bewiesen, daß die Reihe (495) für $f \in W_{2,0}^2(D)$ in der Norm von $W_{2,0}^2(D)$ (d. h. in jeder der Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|^{(2)}$) konvergiert. Also gilt

$$L(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) L(u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, u_k) u_k, \quad (497)$$

wobei diese Reihe in der Norm von $L_2(D)$ konvergiert, und

$$\|L(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (f, u_k)^2.$$

Wir beweisen noch die folgende Aussage: Wenn $f \in \dot{W}_2^1(D)$ gilt, konvergiert die Reihe (495) in der Norm von $\dot{W}_2^1(D)$ gegen f . Das bedeutet, daß die Reihe (495) und die aus ihr durch Differentiation nach x_i hervorgehenden Reihen in der Norm von $L_2(D)$ gegen f bzw. gegen f_{x_i} konvergieren. Dazu führen wir im Hilbertschen Raum $\dot{W}_2^1(D)$ ein neues Skalarprodukt

$$[u, v] \equiv L_1(u, v) = \int (a_{ik} u_{x_i} v_{x_k} - cuv + \lambda_0 uv) dx \quad (498)$$

ein. Aus (490) sowie der Beschränktheit von $|a_{ik}|$ und $|c|$ folgt, daß die zugehörige Norm $\|\cdot\|_1$ mit der ursprünglichen Norm $\|\cdot\|^{(1)}$ des Raumes $\dot{W}_2^1(D)$ äquivalent ist. Die Eigenfunktionen u_k liegen in $\dot{W}_2^1(D)$ und sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $[\cdot, \cdot]$, denn es gilt

$$[u_k, u_l] = (-L_1 u_k, u_l) = -\mu_k^{-1} (u_k, u_l) = -\mu_k^{-1} \delta_{kl}. \quad (499)$$

Die Funktionen $\{\sqrt{-\mu_k} u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ bilden damit im Raum $\dot{W}_2^1(D)$ mit dem neuen Skalarprodukt ein orthonormiertes Funktionensystem. Deshalb gilt für beliebiges f aus $\dot{W}_2^1(D)$ und das System $\{\sqrt{-\mu_k} u_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Besselsche Ungleichung (vgl. [IV/1, 46])

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f, \sqrt{-\mu_k} u_k]^2 \leq \|f\|_1^2.$$

Andererseits bestehen die Gleichungen

$$[f, \sqrt{-\mu_k} u_k]^2 = (f, \sqrt{-\mu_k} L_1 u_k)^2 = (-\mu_k)^{-1} (f, u_k)^2 \quad (500)$$

und

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} (f, u_k) u_k \right\|_1^2 = \sum_{k=m}^{m+p} (-\mu_k)^{-1} (f, u_k)^2. \quad (501)$$

Vergleichen wir diese Beziehungen, so sehen wir, daß die Funktionen $f^N = \sum_{k=1}^N (f, u_k) u_k$ ($N=1, 2, \dots$) eine Cauchyfolge im Raum $\dot{W}_2^1(D)$ bilden. Daher existiert ein Element $\hat{f}(x)$ dieses Raumes derart, daß $f^N(x)$ in jeder der beiden Normen von $\dot{W}_2^1(D)$ gegen dieses Element konvergiert und daß

$$\|\hat{f}\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [f, \sqrt{-\mu_k} u_k]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k)^{-1} (f, u_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_k) (f, u_k)^2$$

gilt. Da f^N in der Norm von $L_2(D)$ gegen f konvergiert, muß $\hat{f}(x) = f(x)$ und

$$\|f\|_1^2 = L_1(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_k) (f, u_k)^2 \quad (502)$$

gelten. Wir fassen die in diesem Abschnitt bewiesenen Aussagen in Form eines Satzes zusammen (vgl. in diesem Zusammenhang die Bemerkung auf Seite 390):

Satz 1. Für den durch die Gleichung (488) erklärten Operator L und das Gebiet D seien die Voraussetzungen von Satz 2 aus [148] erfüllt. Dann besteht das gesamte Spektrum des Problems (489) (oder, was das gleiche ist, das Spektrum des Operators L im Gebiet D unter Dirichletschen Bedingungen) aus einer abzählbaren Anzahl reeller Werte $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, die für $k \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ streben und kleiner sind als die Zahl λ_0 , die obere Grenze des Koeffizienten $c(x)$. Die entsprechenden Eigenfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ können im Raum $L_2(D)$ orthonormiert werden. Sie bilden in den Räumen $L_2(D)$, $\dot{W}_2^1(D)$ und $W_{2,0}^2(D)$ eine Basis, so daß die Fourierreihe (495) bezüglich dieses Systems für jedes f aus $L_2(D)$ in der Norm von $L_2(D)$, für jedes f aus $\dot{W}_2^1(D)$ in der Norm von $\dot{W}_2^1(D)$ und für jedes f aus $W_{2,0}^2(D)$ in der Norm von $W_2^2(D)$ gegen f konvergiert. Darüber hinaus gilt für $f \in L_2(D)$ die Gleichung (496), für f aus $\dot{W}_2^1(D)$ die Gleichung (502), für f aus $W_{2,0}^2(D)$ die Gleichung (497) und (498).

Der hier geführte Beweis der Konvergenz der Reihe (495) im Raum $W_2^2(D)$ stammt von O. A. LADYSHENSKAJA. Der Konvergenzbeweis wurde von ihr darüber hinaus für alle drei klassischen Randbedingungen nicht nur im Raum $W_2^2(D)$, sondern in allen Räumen $W_l^1(D)$ mit ganzzahligem l geführt [siehe Kapitel II des Buches von O. A. LADYSHENSKAJA, Ein gemischtes Problem für die hyperbolische Gleichung (russ.), Moskau 1953).

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators L besitzen eine Reihe von Extremaleigenschaften, die weitgehend zu den von uns weiter oben nachgewiesenen Eigenschaften der Integraloperatoren mit symmetrischem Kern, der vollständigen symmetrischen Operatoren im Raum $L_2(D)$ (vgl. [IV/1, 36, 37]), der gewöhnlichen Differentialoperatoren vom Sturm-Liouvilleschen Typ [88], des Laplace'schen Operators mit Dirichletscher Bedingung [129] analog sind. So beweist man z. B. mit Hilfe der für alle Funktionen f aus $\dot{W}_2^1(D)$ gültigen Gleichungen (496) und (502) leicht den folgenden Satz:

Satz 2. Der kleinste Wert des quadratischen Funktionals

$$J(f) = L(f, f) = \int_D (a_{ik} f_{x_i} f_{x_k} - cf^2) dx$$

auf der Menge der Funktionen f aus $\dot{W}_2^1(D)$ mit $\|f\| = 1$ ist gleich $-\lambda_1$, dem mit -1 multiplizierten ersten Eigenwert. Er wird für die erste Eigenfunktion u_1 angenommen. Den mit -1 multiplizierten zweiten Eigenwert liefert das Minimum von $J(f)$ auf der Menge der Funktionen f aus $\dot{W}_2^1(D)$, die den beiden Bedingungen $\|f\| = 1$ und $(f, u_1) = 0$ genügen. Er wird von den λ_2 entsprechenden Eigenfunktionen angenommen (wir bezeichnen eine der Lösungen dieses Problems mit u_2).¹⁾ Die nächste Eigenfunktion u_3 findet man als Lösung des isoperimetrischen Problems der Bestimmung der unteren Grenze von $J(f)$ auf der Menge der Funktionen f aus $\dot{W}_2^1(D)$, die den Bedingungen $\|f\| = 1$, $(f, u_1) = 0$, $(f, u_2) = 0$ genügen. Der Wert von $J(f)$ ist dabei gleich $-\lambda_3$ (er ist gleich $-\lambda_2$, wenn λ_2 kein einfacher Eigenwert ist, d. h., wenn die Vielfachheit von λ_2 größer als 1 ist). So findet man nacheinander alle u_k und die zugehörigen λ_k .

Zum Beweis dieser Aussagen muß man berücksichtigen, daß $0 < \lambda_0 - \lambda_1 \leq \lambda_0 - \lambda_2 \leq \dots$ gilt. Angesichts dessen besteht für alle f aus $\dot{W}_2^1(D)$ die Relation

$$L_1(f, f) \equiv (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)^2 = (\lambda_0 - \lambda_1) \|f\|^2,$$

¹⁾ Eine zusätzliche Untersuchung zeigt, daß der erste Eigenwert einfach ist.

während für $f = u_1$ die Beziehung $L_1(u_1, u_1) = (\lambda_0 - \lambda_1) \|u_1\|^2 = \lambda_0 - \lambda_1$ gilt. Folglich haben wir für beliebiges $f \in \dot{W}_2^1(D)$ mit $\|f\| = 1$

$$J(f) = L(f, f) = L_1(f, f) - \lambda_0 \|f\|^2 \geq -\lambda_1 = J(u_1).$$

u_1 liefert demnach die Lösung des ersten Variationsproblems des Satzes. Im nächsten Variationsproblem müssen wir alle diejenigen f aus $\dot{W}_2^1(D)$ betrachten, die den Bedingungen $\|f\| = 1$ und $(f, u_1) = 0$ genügen. Für sie gilt $L_1(f, f) \geq (\lambda_0 - \lambda_2) \|f\|^2 = (\lambda_0 - \lambda_2)$, andererseits aber auch $L_1(u_2, u_2) = \lambda_0 - \lambda_2$, also $L(f, f) \geq L(u_2, u_2) = -\lambda_2$. Analog werden die übrigen Aussagen des Satzes bewiesen.

Es ist nützlich zu bemerken, daß die in diesem Satz beschriebenen Variationsprobleme unter bedeutend schwächeren Voraussetzungen an die Koeffizienten von L und an das Gebiet D Lösungen besitzen. Es genügt z. B. zu fordern, daß L die in [144] formulierten Bedingungen erfüllt und D ein beliebiges beschränktes Gebiet ist. Dabei erhalten wir die gleichen Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Von den ihnen entsprechenden Funktionen u_k können wir nur sagen, daß sie Elemente des Raumes $\dot{W}_2^1(D)$ sind. Entsprechend der in [144] angegebenen Definition ist $u_k(x)$ verallgemeinerte Lösung der Klasse $\dot{W}_2^1(D)$ des Eigenwertproblems (489) für $\lambda = \lambda_k$. Genügen jedoch L und D den Forderungen von Satz 2 aus [148], so erweist sich jedes dieser $u_k(x)$ als Element von $W_{2,0}^2(D)$ und genügt den Gleichungen (489) (siehe Satz 2 [148]).

§3. Parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen

151. Die Abhängigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung von der Anfangs- und Randbedingung sowie von der Störfunktion. Wir haben bereits früher einen Eindeutigkeitssatz für die Wärmeleitungsgleichung bewiesen, wobei sich der Beweis auf einen Satz stützte, welcher besagt, daß *jede Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ihren größten und ihren kleinsten Wert entweder für $t=0$ oder auf dem Rand des Bereiches annimmt*.

Den Beweis dieses Satzes haben wir für den eindimensionalen Fall geführt [II, 219]. Im mehrdimensionalen Fall verläuft der Beweis ganz analog.

Wir betrachten nun die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \quad (1)$$

in einem Bereich B der x, y -Ebene mit der Anfangs- und Randbedingung

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (\text{im Bereich } \bar{B}), \quad u|_l = \psi(x, y, t), \quad (2)$$

wobei l die Randkurve von B ist. Die Funktion f setzen wir im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ für $t \geq 0$ als stetig voraus. Entsprechend setzen wir auch φ in $\bar{B}$ und ψ auf l für $t \geq 0$ als stetig voraus. Im x, y, t -Raum denken wir uns einen Zylinderkörper D , dessen Grundfläche der Bereich B in der x, y -Ebene ist und dessen Erzeugende parallel zur t -Achse verlaufen. Es sei D_T der Teil dieses Zylinders, der von unten durch die Ebene $t=0$ und von oben durch die Ebene $t=T$ ($T>0$) begrenzt wird. Mit S' bezeichnen wir die untere Grundfläche $t=0$ und die Mantelfläche von D_T . Mit Hilfe von Überlegungen, die zu den in [II, 219] beim Beweis des obigen Satzes angegebenen analog verlaufen, läßt sich leicht der folgende Satz beweisen.

Satz 1. *Genügt die Funktion u im Innern von D der Differentialgleichung (1), ist sie bis S' stetig und gilt $f \geq 0$ in D_T , so nimmt u den kleinsten Wert in $\overline{D_T}$ auf S' an, d. h. entweder für $t=0$ oder auf der Mantelfläche von D_T , also auf dem Rand des Bereiches B . Gilt $f \leq 0$ in D_T , so nimmt u auf S' den größten Wert an.*

Wir führen einen kurzen Beweis für diesen Satz, der dem Beweis aus [II, 219] völlig analog ist. Dabei betrachten wir nur den Fall $f \leq 0$ und führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, die Funktion u habe ihren größten Wert, den wir mit M bezeichnen wollen, in einem Punkt (x', y', t') von $\overline{D_T}$, der S' nicht angehört. Wir bilden die neue Funktion

$$v = u - k(t - T), \quad (3)$$

in der k eine positive Zahl ist, die wir sogleich festlegen werden. In $\overline{D_T}$ gilt

$$u \leq v \leq u + kT,$$

und man kann k so klein wählen, daß der größte Wert von v auf S' sowie auch der von u kleiner ist als der Wert von u im Punkt (x', y', t') . Bei einer solchen Wahl von k nimmt die Funktion v entweder im Innern von D_T oder im Innern der oberen Grundfläche $t = T$ den größten Wert an. Wir führen diese beiden Fälle zu einem Widerspruch.

Die Funktion v möge ihren größten Wert in einem Punkt $C(x, y, t)$ im Innern von D_T annehmen. In diesem Punkt hat v ein Maximum; folglich gilt

$$v_t = 0, \quad v_{xx} \leq 0, \quad v_{yy} \leq 0 \quad \text{im Punkt } C,$$

woraus $v_t - v_{xx} - v_{yy} \geq 0$ oder wegen (3) $u_t - u_{xx} - u_{yy} - k \geq 0$ im Punkt C hervorgeht. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß im Punkt C die Differentialgleichung $u_t - u_{xx} - u_{yy} - f = 0$ erfüllt und $f \leq 0$ ist. Jetzt setzen wir voraus, daß die Funktion v ihren größten Wert in einem Punkt C annimmt, der sich im Innern der Grundfläche $t = T$ befindet. In diesem Punkt muß $v_t \geq 0$ sein; betrachten wir die Änderung von v in der oberen Grundfläche, so erhalten wir $v_{xx} \leq 0$ und $v_{yy} \leq 0$ im Punkt C . Dies führt uns ebenso wie soeben zu einem Widerspruch, der Satz ist also bewiesen. Unter Benutzung dieses Satzes läßt sich noch der folgende Satz beweisen.

Satz 2. *Erfüllen die Funktionen φ , ψ und f die Bedingungen $|\varphi| \leq a$ auf der unteren Grundfläche von D_T , $|\psi| \leq a$ auf der Mantelfläche von D_T und $|f| \leq \frac{a}{T}$ in $\overline{D_T}$, so gilt $|u| \leq 2a$ in D_T .*

Wir betrachten die Funktion

$$v = u + \frac{a(T-t)}{T}, \quad (4)$$

die der Differentialgleichung

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + \left(f - \frac{a}{T}\right)$$

und den Bedingungen

$$v|_{t=0} = \varphi + a, \quad v|_l = \psi + \frac{a(T-t)}{T}$$

genügt.

Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes und wegen $0 \leq t \leq T$ auf der Mantel-

fläche von D_T gilt

$$f - \frac{a}{T} \leq 0 \quad \text{in } D_T, \quad |\varphi + a| \leq 2a \quad \text{auf der Grundfläche } t=0,$$

$$\left| \psi + \frac{a(T-t)}{T} \right| \leq 2a \quad \text{auf der Mantelfläche von } D_T.$$

Aus Satz 1 ergibt sich hierbei, daß der größte Wert von v auf S' angenommen wird; folglich ist $v \leq 2a$ in $\overline{D_T}$. Da der zweite Summand auf der rechten Seite von (4) nichtnegativ ist, finden wir $u \leq 2a$. Führen wir die Funktion

$$v = u - \frac{a(T-t)}{T}$$

ein, so können wir ganz analog beweisen, daß $u \geq -2a$ gilt; hieraus folgt $|u| \leq 2a$. Der Satz 2 liefert eine Abschätzung der Lösung der Differentialgleichung (1) durch eine Abschätzung der gegebenen Funktion f und der Funktionen, die in der Anfangsbedingung bzw. in der Randbedingung vorkommen.

Ganz analog dazu läßt sich der Satz auch im Fall des dreidimensionalen Raumes beweisen.

152. Die Potentiale der Wärmeleitungsgleichung im eindimensionalen Fall. Wie wir sogleich zeigen werden, kann man für die Wärmeleitungsgleichung eine Theorie entwickeln, die der Potentialtheorie für die Laplacesche Differentialgleichung entspricht; auf diese Weise lassen sich die Randwertprobleme der Wärmeleitungsgleichung in Integralgleichungsprobleme überführen.

Wir betrachten für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{5}$$

im Intervall $0 \leq x \leq l$ das Randwertproblem mit den Randbedingungen

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad u|_{x=l} = \omega_2(t), \tag{6}$$

wobei $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$ stetige Funktionen sind, und der Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leq x \leq l). \tag{7}$$

Zunächst setzen wir die im Intervall $[0, l]$ vorgegebene Funktion $f(x)$ auf die ganze x -Achse so fort, daß sie dort stetig ist und außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, und bilden (vgl. [II, 214]) die Lösung der Differentialgleichung (5), die der Bedingung

$$u_0|_{t=0} = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{8}$$

genügt:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (t > 0). \tag{9}$$

Führen wir an Stelle von $u(x, t)$ die neue Funktion $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$ ein, so erhalten wir für w die Differentialgleichung (5) mit der homogenen Anfangsbedingung

$$w|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

und Randbedingungen für $x=0$ und $x=l$, auf deren rechten Seiten die Differenzen $\omega_1(t) - w(0, t)$ bzw. $\omega_2(t) - w(l, t)$ stehen. Somit suchen wir im folgenden eine Lösung

der Differentialgleichung (5), die den Randbedingungen (6) und der homogenen Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (10)$$

genügt.

Die singuläre Grundlösung, die einer Quelle im Punkt $x = \xi$ zur Zeit $t = \tau$ entspricht, wird durch die Lösung [II, 214]

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (t > \tau) \quad (11)$$

beschrieben.

Differenzieren wir nach ξ und fügen den konstanten Faktor $2a^2$ hinzu, so erhalten wir die singuläre Lösung

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^{3/2}}} (x-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \quad (12)$$

die einem Dipol entspricht.

Multiplizieren wir die Lösung (12) mit einer stetigen Funktion $\varphi(\tau)$ und integrieren über τ von $\tau = 0$ bis $\tau = t$, so erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^{3/2}}} (x-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau, \quad (13)$$

die einem Dipol im Punkt $x = \xi$ mit dem Moment $\varphi(\tau)$ entspricht, der vom Zeitpunkt $\tau = 0$ an wirkt. Daß die Funktion (13) für $x \neq \xi$ der Differentialgleichung (5) genügt, läßt sich unmittelbar durch einfache Differentiation nachprüfen; hierbei ergibt die Differentiation nach der oberen Grenze den Wert 0, da der Integrand im Fall $x \neq \xi$ für $\tau \rightarrow t$ gegen 0 strebt. Wir zeigen nun, daß die Funktion (13) den Randbedingungen

$$u(\xi + 0, t) = \varphi(t), \quad u(\xi - 0, t) = -\varphi(t) \quad (14)$$

genügt, wenn x von rechts bzw. von links her gegen ξ strebt. Wir nehmen $x \neq \xi$ und $t > 0$ an und führen an Stelle von τ die neue Integrationsveränderliche

$$\alpha = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

ein. Ist $x > \xi$, so gilt $\alpha \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow t$; ist dagegen $x < \xi$, so gilt $\alpha \rightarrow -\infty$ für $\tau \rightarrow t$. In der neuen Veränderlichen erhalten wir für $x > \xi$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi \left[t - \frac{(\xi-x)^2}{4a^2\alpha^2} \right] e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (15)$$

woraus sich für $x \rightarrow \xi + 0$ durch Grenzübergang die Beziehung

$$u(\xi + 0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha^2} d\alpha = \varphi(t) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \varphi(t)$$

ergibt.

Entsprechend läßt sich auch die zweite Beziehung (14) beweisen. Außerdem

genügt die Lösung (13) offenbar der homogenen Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

Auf eine ausführliche Durchführung des Grenzüberganges in (15) wollen wir nicht eingehen. Der Grenzübergang läßt sich leicht durchführen, wenn man voraussetzt, daß $\varphi(\tau)$ stetig ist.

Wir nehmen nun an, daß das oben formulierte Problem mit den Randbedingungen (6) und der Anfangsbedingung (10) vorliegt. Wir suchen eine Lösung als Summe zweier Dipole, von denen sich der eine im Punkt $x=0$ und der andere im Punkt $x=l$ befindet. Das gesuchte Moment des ersten Dipols bezeichnen wir mit $\varphi(\tau)$, das des zweiten mit $\psi(\tau)$:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} (x-l) e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (17)$$

Die Randbedingungen (6) lassen sich wegen (14) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi(t) - l \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau &= \omega_1(t), \\ -\psi(t) + l \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau &= \omega_2(t) \end{aligned} \quad (18)$$

schreiben.

Diese Gleichungen bilden ein System Volterrascher Integralgleichungen für $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$. Da die Kerne nur von der Differenz $t-\tau$ abhängen, läßt sich auf dieses Integralgleichungssystem die Laplacetransformation so anwenden, wie wir dies in [IV/1, 53] angegeben haben. Ist beispielsweise in einem der Endpunkte nicht die Funktion u , sondern ihre Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorgegeben, so muß man in diesem Endpunkt nicht einen Dipol, sondern eine einfache Quelle ansetzen, deren Wirkung durch den Ausdruck (11) dargestellt wird. Beispielsweise mögen die Randbedingungen die Gestalt

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \omega_2(t) \quad (19)$$

und die Anfangsbedingungen wie vorhin die Gestalt (16) haben.

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln multiplizieren wir die Lösung (11) mit $2a^2$ und suchen somit die Lösung in der Gestalt

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (20)$$

Die erste Bedingung (19) liefert

$$\varphi(t) + \int_0^t \frac{ae^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \psi(\tau) d\tau = \omega_1(t).$$

Differenzieren wir (20) nach x und lassen x gegen l streben, so erhalten wir wegen (14) und der zweiten Bedingung (19)

$$\psi(t) + \int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \varphi(\tau) d\tau - l^2 \int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^3(t-\tau)^{3/2}} \varphi(\tau) d\tau = \omega_2(t),$$

und es ergibt sich wiederum für $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ ein System von Integralgleichungen mit Kernen, die nur von der Differenz $t - \tau$ abhängen.

153. Wärmequellen im mehrdimensionalen Fall. Der Begriff des Potentials läßt sich auch auf mehrdimensionale Probleme der Wärmeleitung übertragen. Wir beschränken uns darauf, die Resultate anzugeben, die den vorhergehenden entsprechen. Ein Nachweis der Eigenschaften der Potentiale ist im mehrdimensionalen Fall bedeutend schwieriger als im eindimensionalen Fall. Wir betrachten den ebenen Fall, d. h. die Differentialgleichung

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) . \quad (21)$$

Es sei in der x, y -Ebene ein Bereich B mit der Randkurve l vorgegeben. Die singuläre Grundlösung, die einer Quelle im Punkt (ξ, η) entspricht, welche im Zeitpunkt τ wirkt, hat die Gestalt

$$u = \frac{1}{2\pi(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2) .$$

Das Analogon zum Potential einer einfachen Schicht wird durch den Ausdruck

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma \quad (22)$$

dargestellt, in dem σ die Bogenlänge der Randkurve l bezeichnet, die von einem festen Punkt an gerechnet wird, und $a(\sigma, \tau)$ eine Funktion des veränderlichen Punktes σ der Randkurve und des Parameters τ ist. Mit r wurde die Entfernung des Punktes (x, y) vom veränderlichen Punkt σ der Randkurve l bezeichnet. Das Wärmepotential der Doppelschicht läßt sich durch den Ausdruck

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma \quad (23)$$

darstellen, in dem n die Richtung der äußeren Normalen im veränderlichen Integrationspunkt angibt, oder auch durch

$$v(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) d\sigma , \quad (23_1)$$

wobei der Vektor $\mathbf{r}$ vom Punkt σ nach dem Punkt (x, y) zeigt. Führen wir den Winkel $d\varphi$ ein, unter dem das Bogenelement $d\sigma$ vom Punkt (x, y) aus erscheint, so läßt sich der Ausdruck (23₁) in der Gestalt

$$v(x, y, t) = - \int_l d\varphi \int_0^t \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\tau \quad (23_2)$$

schreiben.

Die Randwerte des Potentials der Doppelschicht in einem Punkt $\sigma_0(x_0, y_0)$ der Randkurve lassen sich durch die Ausdrücke

$$v_i(x_0, y_0, t) = -b(\sigma_0, t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) d\sigma , \quad (24)$$

$$v_a(x_0, y_0, t) + b(\sigma_0, t) + \dots ,$$

darstellen, in denen r_0 die Entfernung des veränderlichen Integrationspunktes vom Punkt $\sigma_0(x_0, y_0)$ bezeichnet. Das Potential (22) einer einfachen Schicht ist beim Durch-

gang durch die Randkurve l stetig, und seine Ableitung nach der Normalen n im Punkt σ_0 der Randkurve hat in diesem Punkt die Randwerte

$$\left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_t = a(\sigma_0, t) - \int_0^t d\tau \int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0 \cos(r_0, n_0) d\sigma, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_a = -a(\sigma_0, t) - \dots$$

Unter Benutzung dieser Ausdrücke lassen sich die Randwertprobleme in Integralgleichungsprobleme überführen. Es sei beispielsweise eine Funktion $v(x, y, t)$ gesucht, die im Innern von B die Differentialgleichung (21) erfüllt und auf der Randkurve l die vorgegebenen Randwerte

$$v|_l = \omega(s, t) \quad (26)$$

besitzt, wobei s die von einem bestimmten Punkt an gerechnete Bogenlänge auf l ist. Die Anfangswerte werden identisch gleich 0 angenommen. Suchen wir die Lösung in Gestalt des Potentials (23) einer Doppelschicht, so erhalten wir wegen des ersten Ausdruckes (24) für die Funktion $b(\sigma, \tau)$ die Integralgleichung

$$-b(s, t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) d\sigma = \omega(s, t). \quad (27)$$

Dabei gibt r die Entfernung zwischen den Punkten s und σ der Randkurve l an, und der Vektor r zeigt von σ nach s . In dieser Integralgleichung wird die Integration bezüglich σ über ein festes Intervall $(0, L)$ erstreckt, wobei L die Länge der Randkurve l darstellt. Bei der Integration über τ ist die obere Grenze veränderlich. Anders ausgedrückt: Die Integralgleichung (27) hat den Charakter einer Fredholmschen Integralgleichung in bezug auf die Veränderliche σ und den einer Volterraschen Integralgleichung in bezug auf die Veränderliche τ . Trotz dieses gemischten Charakters konvergiert jedoch das übliche Verfahren der sukzessiven Approximation, welches wir für Volterrasche Integralgleichungen entwickelt haben, auch für die Integralgleichung (27). Das Verfahren läßt sich auch auf einen Bereich anwenden, der durch mehrere Randkurven begrenzt wird. Es läßt sich ferner leicht auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinern und auch auf Probleme für ein Außengebiet anwenden. Der Übergang zu verschwindenden Anfangswerten läßt sich wie im eindimensionalen Fall mit Hilfe der Lösung des Problems für die ganze Ebene bzw. für den ganzen Raum durchführen. Im Fall des dreidimensionalen Raumes haben wir den entsprechenden Ausdruck für die Lösung in [II, 214] aufgestellt. Im zweidimensionalen Raum lautet er

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Die Eigenschaften der Wärmepotentiale und ihre Anwendungen auf Randwertprobleme wurden in folgenden Arbeiten untersucht:

1. E. LEVI, *Annali di Matematica* (1908); 2. M. GEVREY, *J. Math. pure et appl.* **9** (1913); 3. G. M. MÜNTZ, *Math. Z.* **38** (1934); 4. G. M. MÜNTZ, *Integralgleichungen* (russ.), Leningrad 1934; 5. A. N. TYCHONOFF, *Bjull. Mosk. Univ.* 1938.

154. Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung. Genau wie für die Laplace'sche Differentialgleichung kann man auch für die Wärmeleitungsgleichung eine Greensche Funktion einführen. Zur Vereinfachung der folgenden Formeln bezeichnen wir mit $u_0(x - \xi, t - \tau)$ die singuläre Grundlösung (11). Die Greensche Funktion für das Intervall $0 \leq x \leq t$ bei den homogenen Randbedingungen

$$u|_{x=0} = u|_{x=t} = 0 \quad (28)$$

wird durch den Ausdruck

$$G(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} u_0(x - \xi, t - \tau) - u(x, t; \xi, \tau) & \text{für } t \geq \tau, \\ 0 & \text{für } t \leq \tau \end{cases} \quad (29)$$

definiert. Dabei erfüllt die Funktion $u(x, t; \xi, \tau)$ die Wärmeleitungsgleichung in bezug auf x und t für $0 < x < l$ und $t > \tau$ sowie die homogene Anfangsbedingung für $t = \tau$,

$$u(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \quad (30)$$

und die Randbedingungen

$$u(x, t; \xi, \tau) = u_0(x - \xi, t - \tau) \quad \text{für } x = 0, x = l \quad \text{und } t \geq \tau. \quad (30_1)$$

In diesen Formeln sind die Größen ξ und τ fest, dabei gilt $0 < \xi < l$. Aus ihrer Definition folgt unmittelbar, daß die Funktion $u(x, t; \xi, \tau)$ und die Greensche Funktion nur von der Differenz $\alpha = t - \tau$ abhängen; an Stelle von $u(x, t; \xi, \tau)$ kann man deshalb $u(x, \xi, \alpha)$, und an Stelle von $G(x, t; \xi, \tau)$ kann man $G(x, \xi, \alpha)$ schreiben. Die Bedingungen (30) und (30₁) liefern die Randwerte der Funktion $u(x, \xi, \alpha)$ auf der Randkurve des Halbstreifens, der durch die Halbgeraden $x = 0$ und $x = l$ ($t \geq \tau$) und durch die Strecke $0 \leq x \leq l$ der Geraden $t = \tau$ begrenzt wird. In den Eckpunkten dieses Halbstreifens sind die Randwerte stetig, da die Lösung (11) für jeden festen Wert von x , der nicht gleich ξ ist, und für $t \rightarrow \tau + 0$ gegen 0 strebt. Da die Randwerte nichtnegativ sind, finden wir, daß $u(x, \xi, \alpha) \geq 0$ und wegen (29) $G(x, \xi, \alpha) \leq u_0(x, \xi, \alpha)$ gilt. Die Greensche Funktion hat für $t = \tau + 0$ und $x = \xi$ eine Singularität, die durch die Singularität von u_0 charakterisiert wird. Es gilt $u_0 \geq 0$, und wegen (30) strebt $u(x, \xi, \alpha)$ für $\alpha \rightarrow +0$ gegen 0; hieraus folgt unmittelbar eine weitere Ungleichung für die Greensche Funktion, nämlich $G(x, \xi, \alpha) \geq 0$. Man kann auch die Symmetrie der konstruierten Greenschen Funktion in bezug auf x und ξ beweisen.

Unter Benutzung der Greenschen Funktion läßt sich eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung konstruieren, welche der homogenen Anfangsbedingung und den homogenen Randbedingungen genügt. Ist nämlich $\pi(x, t)$ eine im Intervall $(0, l)$ für $t \geq 0$ stetige Funktion, die stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, so genügt die Funktion

$$w(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, \alpha) \pi(\xi, \tau) d\xi \quad (31)$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi(x, t)$$

und besitzt verschwindende Rand- und Anfangswerte.

Alles dies läßt sich auch auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Die Beweise für die angegebenen Tatsachen findet man in der zitierten Arbeit von A. N. TYCHONOFF.

155. Anwendung der Laplacetransformation. Wie wir bereits erwähnt haben, läßt sich bei der Lösung des Systems der Integralgleichungen (18) die Laplacetransformation verwenden. Diese Transformation kann man auch unmittelbar auf die Differentialgleichung (5) anwenden. Im vorliegenden Fall benutzen wir die einseitige Transformation

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = L_1(F). \quad (32)$$

Es mögen die Randbedingungen (6) und die homogene Anfangsbedingung (10) vorgegeben sein. An Stelle der Funktion $u(x, t)$ führen wir als gesuchte Funktion ihre Laplacetransformierte

$$\varphi(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt \quad (33)$$

ein. Wir integrieren partiell und nehmen an, daß das Produkt $e^{-st}u(x, t)$ für $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Unter Berücksichtigung der homogenen Anfangsbedingung (16) erhalten wir

$$\varphi(x, s) = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} u(x, t) \, de^{-st} = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt.$$

Ändern wir den Maßstab für t oder x , so können wir annehmen, daß in der Differentialgleichung (5) gerade $\alpha = 1$ ist. Wenden wir auf beide Seiten der Gleichung die Laplace-Transformation an und setzen voraus, daß wir in (33) unter dem Integralzeichen nach x differenzieren können, so erhalten wir für $\varphi(x, s)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = s\varphi, \quad (34)$$

in der nur die Ableitung nach x vorkommt.

Wenden wir die Laplacetransformation auch auf die Gleichungen (6) an, so erhalten wir für φ die Randbedingungen

$$\varphi|_{x=0} = a_1(s), \quad \varphi|_{x=l} = a_2(s), \quad (35)$$

in denen

$$a_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \omega_k(t) \, dt \quad (k=1, 2) \quad (36)$$

ist.

Die Lösung der Differentialgleichung (34) unter den Randbedingungen (35) läßt sich ohne Mühe in expliziter Form

$$\varphi(x, s) = a_1(s) \varphi_1(x, s) + a_2(s) \varphi_2(x, s) \quad (37)$$

angeben, wobei

$$\varphi_1(x, s) = \frac{\sin(l-x) \sqrt{-s}}{\sin l \sqrt{-s}}, \quad \varphi_2(x, s) = \frac{\sin x \sqrt{-s}}{\sin l \sqrt{-s}} \quad (38)$$

ist.

Wenden wir auf die Funktion (37) die zu (32) inverse Transformation an, so erhalten wir die gesuchte Funktion $u(x, t)$. Es zeigt sich, daß sich diese Funktion in einfacher Weise durch die Funktionen $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$, die in den Randbedingungen vorkommen, sowie durch die Jacobische Funktion $\vartheta_3(v)$ [III/2, 177] mit $h = e^{-\pi^2 t}$ ausdrücken läßt:

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi v - n^2 \pi^2 t}. \quad (39)$$

Die folgenden Rechnungen stützen sich auf die Beziehung

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = -\frac{\cos(2v-1) \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}} = \psi(v, s) \quad (0 \leq v \leq 1), \quad (40)$$

in der wir zur Abkürzung der Schreibweise den Bruch mit $\psi(v, s)$ bezeichnet haben. Die Ausdrücke (38) kann man in der Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, s) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi(v, l^2 s)}{\partial v} \right]_{v=\frac{x}{2l}} \quad (0 \leq x \leq 2l), \\ \varphi_2(x, s) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi(v, l^2 s)}{\partial v} \right]_{v=\frac{l-x}{2l}} \quad (-l \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (41)$$

schreiben. Außerdem gilt offenbar

$$f(l^2 s) = \int_0^{\infty} e^{-l^2 s t} F(t) dt = \frac{1}{l^2} \int_0^{\infty} e^{-s t} F\left(\frac{t}{l^2}\right) dt,$$

d. h., bei der Transformation (32) ist der Übergang von $f(s)$ zu $f(l^2 s)$ dem Übergang von $F(t)$ zu $\frac{1}{l^2} F\left(\frac{t}{l^2}\right)$ gleichwertig. Berücksichtigen wir diese Tatsache sowie die Beziehungen (40) und (41) und führen die Differentiation nach v unter dem Integralzeichen durch, so erhalten wir

$$L_1^{-1}\{\varphi_1(x, s)\} = -\frac{1}{2l^2} \left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial v} \right]_{v=\frac{x}{2l}} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq 2l),$$

$$L_1^{-1}\{\varphi_2(x, s)\} = -\frac{1}{2l^2} \left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial v} \right]_{v=\frac{l-x}{2l}} = \frac{1}{l} \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} \quad (-l \leq x \leq l).$$

Wenden wir auf die Funktion (37) die Transformation L_1^{-1} an und berücksichtigen (36) und den Faltungssatz, so erhalten wir schließlich

$$u(x, t) = -\frac{1}{l} \omega_1(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{l} \omega_2(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} \quad (0 < x < l), \quad (42)$$

wobei wir die Bezeichnung

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau$$

eingeführt haben. Man kann weiter die Greensche Funktion, über die wir im vorigen Abschnitt gesprochen haben, durch die Funktion $\vartheta_3(v, t)$ ausdrücken. Zunächst bemerken wir, daß die Beziehung (40) nur für das Intervall $0 \leq v \leq 1$ gilt. Ist $-1 \leq v \leq 0$, so ist $0 \leq v+1 \leq 1$, und wegen der Periodizität von $\vartheta_3(v, t)$ können wir

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = L_1[\vartheta_3(v+1, t)] = -\frac{\cos[2(v+1)-1] \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}} \quad (0 \leq v+1 \leq 1)$$

oder

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = -\frac{\cos(2v+1) \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}} \quad (-1 \leq v \leq 0) \quad (43)$$

schreiben.

Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi(x, t) \quad (44)$$

mit homogener Anfangsbedingung und homogenen Randbedingungen. Führen wir die Funktion

$$\sigma(x, s) = L_1[\pi(x, t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \pi(x, t) dt \quad (45)$$

ein und wenden auf die Differentialgleichung (44) die Laplacetransformation an, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, s)}{\partial x^2} - s\varphi(x, s) = -\sigma(x, s) \quad (46)$$

und die Randbedingungen

$$\varphi(0, s) = \varphi(l, s) = 0. \quad (47)$$

Für diese Randbedingungen lautet die Greensche Funktion des Operators, der auf der linken Seite der Differentialgleichung (46) steht,

$$\gamma(x, \xi; s) = \begin{cases} \frac{\sin(l - \xi) \sqrt{-s} \cdot \sin x \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} & (x \leq \xi), \\ \frac{\sin(l - x) \sqrt{-s} \cdot \sin \xi \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} & (x \geq \xi), \end{cases} \quad (48)$$

wie leicht zu verifizieren ist. Durch diese Greensche Funktion läßt sich die Lösung der Differentialgleichung (46), die den Randbedingungen (47) genügt, in der Gestalt

$$\varphi(x, s) = \int_0^l \gamma(x, \xi; s) \sigma(\xi; s) d\xi \quad (49)$$

ausdrücken.

Um die Transformation L_1^{-1} durchführen zu können, stellen wir die Funktion (48) in der Gestalt

$$\gamma(x, \xi; s) = \begin{cases} -\frac{\cos(x - \xi + l) \sqrt{-s}}{2 \sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} + \frac{\cos(x + \xi - l) \sqrt{-s}}{2 \sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} & (x \leq \xi), \\ -\frac{\cos(x - \xi - l) \sqrt{-s}}{2 \sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} + \frac{\cos(x + \xi + l) \sqrt{-s}}{2 \sqrt{-s} \sin l \sqrt{-s}} & (x \geq \xi) \end{cases} \quad (50)$$

dar. Für $0 \leq x \leq \xi \leq l$ gilt $-\frac{1}{2} \leq \frac{x - \xi}{2l} \leq 0$ sowie $0 \leq \frac{x + \xi}{2l} \leq 1$, und für $0 \leq \xi \leq x \leq l$ gilt $0 \leq \frac{x - \xi}{2l} \leq \frac{1}{2}$ sowie $0 \leq \frac{x + \xi}{2l} \leq 1$. Damit ergibt sich aus (40) und (43) die Beziehung

$$L_1^{-1}[\gamma(x, \xi; s)] = G(x, \xi; t) = \frac{1}{2l} \left[\theta_3\left(\frac{x - \xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right) - \theta_3\left(\frac{x + \xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right) \right]. \quad (51)$$

Aus dem Faltungssatz folgt

$$L_1^{-1}[\gamma(x, \xi; s) \sigma(\xi; s)] = \int_0^t \pi(\xi, \tau) G(x, \xi; t - \tau) d\tau,$$

folglich gilt auf Grund von (49)

$$u(x, t) = \int_0^l d\xi \int_0^t \pi(\xi, \tau) G(x, \xi; t - \tau) d\tau. \quad (52)$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit der Darstellung (31), so sehen wir, daß die Funktion $G(x, \xi; t - \tau)$, die nach (51) durch die Funktion $\theta_3(v, t)$ definiert wird, die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung ist, über die wir im vorigen Abschnitt gesprochen haben.

Wir beweisen noch die Beziehung (40), auf die sich alle nachfolgenden Rechnungen stützten. In [II, 157] hatten wir für das Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ die Entwicklung

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \frac{\cos x}{1^2 - z^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - z^2} + \dots \right)$$

bewiesen. Setzen wir darin $x = 2\pi v - \pi$ und $z = \frac{\sqrt{-s}}{\pi}$, so erhalten wir

$$-\frac{\cos(2v - 1) \sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}} = \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{s + n^2 \pi^2};$$

die angegebene Ungleichung für x liefert $0 \leq v \leq 1$. Andererseits läßt sich $\theta_3(v, t)$ in eine Fourierreihe entwickeln [III/2, 177]:

$$\theta_3(v, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos 2n\pi v.$$

Diese Reihe konvergiert in jedem endlichen Intervall $0 < \varepsilon \leq t \leq T$, das rechts von 0 liegt, gleichmäßig in bezug auf t . Nehmen wir den Realteil von s als positiv an, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_{\varepsilon}^T e^{-st} \theta_3(v, t) dt = \frac{e^{-s\varepsilon} - e^{-sT}}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{s + n^2 \pi^2} [e^{-(s+n^2 \pi^2)\varepsilon} - e^{-(s+n^2 \pi^2)T}].$$

Das Auftreten von n^2 im Nenner bewirkt die in bezug auf ε und T gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe, und beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \theta_3(v, t) dt = \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{s + n^2 \pi^2},$$

womit die Beziehung (40) bewiesen ist.

Eine eingehende Darstellung der Anwendung der Laplacetransformation auf Probleme der Wärmeleitung findet man in den Arbeiten von DOETSCH, Math. Z. **22**, **25**, **26**, **28**, und in dem Buch desselben Autors „Theorie und Anwendung der Laplacetransformation“, Berlin 1937 (vgl. auch G. DOETSCH, Handbuch der Laplacetransformation I (1950), II (1955), III (1956), Basel und Stuttgart).

156. Anwendung des Differenzenverfahrens. Wir betrachten jetzt die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + \pi(x, t) \quad (53)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (54)$$

und den homogenen Randbedingungen

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0; \quad (55)$$

dabei nehmen wir in den folgenden Rechnungen $a=1$ und $l=1$ an. Dies kann man stets durch Änderung des Maßstabes von t und x erreichen. Wir wählen ein Intervall $[0, T]$, in dem sich t befinden darf, und teilen es durch die Punkte $t_k = kh$ ($k=0, 1, \dots, n$) in n gleiche Teile, es ist also $h = \frac{T}{n}$. In der Differentialgleichung (53)

setzen wir $t = t_{k+1}$, und die Ableitung nach t ersetzen wir durch den Quotienten aus dem Zuwachs der Funktion und dem Zuwachs h der unabhängigen Veränderlichen. Hierdurch erhalten wir ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für Funktionen $u_k(x)$, die als Näherungswerte für die Werte $u(x, t_{k+1})$ aufgefaßt werden können, da wir die Ableitung nach t durch den Differenzenquotienten ersetzt haben. Das System der Differentialgleichungen für $u_k(x)$ hat offenbar die Gestalt

$$\frac{d^2 u_{k+1}(x)}{dx^2} = \frac{u_{k+1}(x) - u_k(x)}{h} - \pi(x, t_{k+1}) \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (56)$$

Unter Berücksichtigung von (54) setzen wir $u_0(x) = f(x)$, und alle übrigen Funktionen $u_{k+1}(x)$ unterwerfen wir den Randbedingungen (55):

$$u_{k+1}(0) = u_{k+1}(1) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (57)$$

Die Rechnungen verlaufen jetzt folgendermaßen: Setzen wir in der Differentialgleichung (56) $k=0$ und führen $u_0(x)=f(x)$ ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u_1(x)$, die wir unter den Randbedingungen (57) integrieren müssen. Nachdem wir somit $u_1(x)$ gefunden haben, setzen wir in (56) $k=1$ und erhalten eine Differentialgleichung für $u_2(x)$, die wir unter den Randbedingungen (57) integrieren müssen, usw. Im folgenden müssen wir daher eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = -\pi(x) \quad (58)$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (59)$$

untersuchen, wobei wir $m^2 = \frac{1}{h}$ gesetzt haben. Wir führen die Greensche Funktion des Operators, der auf der linken Seite der Differentialgleichung (58) steht, mit den Randbedingungen (59) ein. Es läßt sich leicht verifizieren, daß sie die Gestalt

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -(e^{mx} - e^{-mx}) [e^{m(\xi-1)} - e^{-m(\xi-1)}] : 2m (e^m - e^{-m}) & (x \leq \xi), \\ -[e^{m(x-1)} - e^{-m(x-1)}] (e^{m\xi} - e^{-m\xi}) : 2m (e^m - e^{-m}) & (x \geq \xi) \end{cases} \quad (60)$$

besitzt [74], und die Lösung der Differentialgleichung (58), die den Randbedingungen (59) genügt, läßt sich durch

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \pi(\xi) d\xi \quad (61)$$

ausdrücken.

Wir beweisen den folgenden

Hilfssatz. Für die Lösung der Differentialgleichung (58), die den Randbedingungen (59) genügt, gilt die Abschätzung

$$|y(x)| \leq \frac{1}{m^2} \max_{0 \leq x \leq 1} |\pi(x)|. \quad (62)$$

Zunächst betrachten wir den Fall $\pi(x) \geq 0$ im Intervall $[0, 1]$. Wir zeigen, daß dann $y(x) \geq 0$ gilt. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte $y(x)$ im Innern des Intervalls ein negatives Minimum haben, und in dem zugehörigen Punkt müßte $y'' \geq 0$ und $m^2y < 0$ gelten; dies widerspricht aber der Differentialgleichung (58) für $\pi(x) \geq 0$. Die Ungleichung $y(x) \geq 0$ folgt auch unmittelbar aus (61).

Somit sind alle Werte von $y(x)$ nichtnegativ, und diese Funktion nimmt in einem Punkt im Innern des Intervalls $[0, 1]$ ihren größten (positiven) Wert an. In diesem Punkt muß $y''(x) \leq 0$ gelten, und aus der Differentialgleichung (58) folgt unmittelbar $-m^2y(x) \leq -\pi(x)$, woraus gerade die Abschätzung (62) hervorgeht. Nimmt die Funktion $\pi(x)$ negative Werte an, so erhalten wir unter Benutzung des Ausdrucks (61), da die Greensche Funktion (60) keine negativen Werte annimmt, die Abschätzung

$$|y(x)| \leq \int_0^1 G(x, \xi) |\pi(\xi)| d\xi. \quad (63)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung stellt die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - m^2z = -|\pi(x)|$$

dar, die den Randbedingungen (59) genügt. Für diese Lösung gilt, wie wir soeben bewiesen haben, die Abschätzung

$$z(x) \leq \frac{1}{m^2} \max_{0 \leq x \leq 1} |\pi(x)|.$$

Deshalb gilt wegen (63) erst recht die Abschätzung (62).

Nunmehr führen wir in die Betrachtung den Fehler $\gamma_{k+1}(x)$, den wir durch Ersetzen von $u(x, t_{k+1})$ durch $u_{k+1}(x)$ erhalten, und den Fehler $\eta_{k+1}(x)$, den wir durch Ersetzen der Ableitung durch den Differenzenquotienten erhalten, ein:

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1}(x) &= u(x, t_{k+1}) - u_{k+1}(x), \\ \eta_{k+1}(x) &= \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_{k+1}} - \frac{u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)}{h}. \end{aligned} \quad (64)$$

Dabei ist offenbar $\gamma_0(x) \equiv 0$. Setzen wir in der Differentialgleichung (53) $t = t_{k+1}$ und addieren die sich ergebende Differentialgleichung zu (56), so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \gamma_{k+1}(x)}{dx^2} = \frac{\gamma_{k+1}(x) - \gamma_k(x)}{h} + \eta_{k+1}(x)$$

oder

$$\frac{d^2 \gamma_{k+1}(x)}{dx^2} - m^2 \gamma_{k+1}(x) = -m^2 \gamma_k(x) + \eta_{k+1}(x). \quad (65)$$

Setzen wir voraus, daß die Funktion $u(x, t)$ eine bis $t=0$ stetige Ableitung nach t besitzt, so können wir aus dem Ausdruck (64) für $\eta_{k+1}(x)$ schließen, daß die Funktion $\eta_{k+1}(x)$ die Abschätzung $|\eta_{k+1}(x)| \leq \tau$ zuläßt, wobei τ nicht von k und x abhängt und zusammen mit h gegen 0 strebt. Wir bezeichnen mit δ_k das Maximum von $|\gamma_k(x)|$ für $0 \leq x \leq 1$. Durch Anwendung des soeben bewiesenen Hilfssatzes auf die Differentialgleichung (65) ergibt sich $\delta_{k+1} \leq \delta_k + h\tau$. Summieren wir diese Ungleichungen von $k=0$ bis $k=n-1$ und berücksichtigen, daß $\delta_0=0$ ist, so erhalten wir $\delta_n \leq nh\tau = T\tau$. Diese Ungleichung gilt erst recht, wenn wir nur von $k=0$ bis zu einer Zahl $k=m \leq n-1$ summieren, d. h., es gilt

$$|u(x, t_m) - u_m(x)| \leq T\tau \quad (m=1, 2, \dots, n-1). \quad (66)$$

Somit sehen wir, daß der Fehler $\gamma_m(x)$ mit h gegen 0 strebt. Beim Beweis dieser Tatsache haben wir vorausgesetzt, daß eine Lösung $u(x, t)$ des Problems existiert und daß diese Funktion eine bis $t=0$ stetige Ableitung nach t besitzt.

Das angegebene Differenzenverfahren stammt von ROTHE und ist in seiner Arbeit „Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben“ (Math. Ann. 102 (1929)) entwickelt. In dieser Arbeit wird eine allgemeinere Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + \pi(x, t, u)$$

betrachtet und das Differenzenverfahren auch für den Beweis der Existenz einer Lösung benutzt.

Haben wir inhomogene Randbedingungen

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad u|_{x=l} = \omega_2(t),$$

so können wir durch

$$v = u - (1-x)\omega_1(t) - x\omega_2(t)$$

an Stelle von u eine neue gesuchte Funktion v einführen und dadurch die Randbedingungen in homogene Randbedingungen überführen. Die Transformation der gesuchten Funktion ändert auch die gegebene Funktion $\pi(x, t)$, was aber keine wesentliche Rolle spielt.

Mit dieser Methode können auch mehrdimensionale parabolische Gleichungen, darunter nicht nur lineare, sondern auch einige Klassen quasilinearer Differentialgleichungen untersucht werden (siehe die Arbeit von O. A. LADYSHENSKAJA, Das erste Randwertproblem für quasilineare parabolische Gleichungen (russ.), Doklady AN SSSR **107** (1956), 636–639; Tr. Mosk. matem. obschtschestwa **7** (1958), 149–177, sowie das Buch von A. O. LADYSHENSKAJA, Randwertprobleme der mathematischen Physik (russ.), Moskau 1972).

157. Die Fourierrmethode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Früher haben wir bei der Lösung von Randwertproblemen häufig die Fourierrmethode angewandt. Wir wollen jetzt unter Benutzung der Theorie der Integralgleichungen eine Begründung für diese Methode geben. Wir betrachten im Fall von drei unabhängigen Veränderlichen die homogene Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (67)$$

in einem Bereich B mit der Randkurve l unter den Bedingungen

$$u|_{t=0} = f(P) \quad (P \text{ aus } \bar{B}), \quad (68)$$

$$u|_l = 0. \quad (69)$$

Die Fourierrmethode liefert formal eine Lösung dieses Problems in der Gestalt

$$u(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k(P), \quad (70)$$

wobei die λ_k die Eigenwerte und die $v_k(P)$ die Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

unter der Randbedingung

$$v|_l = 0 \quad (71)$$

und die a_k die Fourierrkoeffizienten der Funktion $f(P)$ darstellen:

$$a_k = \iint_B f(P) v_k(P) dS. \quad (72)$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(P)$ stetig ist, auf dem abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und auf l gleich 0 ist. Hierbei gilt (vgl. [127])

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P); \quad (73)$$

diese Reihe konvergiert in $\bar{B}$ regulär, d. h., die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k v_k(P)| \quad (74)$$

konvergiert in $\bar{B}$ gleichmäßig.

Unter Berücksichtigung von $0 \leq e^{-\lambda_k t} \leq 1$ für $t \geq 0$ können wir zeigen, daß auch die Reihe (70) regulär konvergiert, wenn P in $\bar{B}$ liegt und $t \geq 0$ gilt. Daher ist ihre

Summe $u(P; t)$ eine stetige Funktion von P und t , wenn P in $\bar{B}$ liegt und $t \geq 0$ gilt. Hieraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(P; t) = u(P; 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P) = f(P),$$

d. h., die durch den Ausdruck (70) definierte Funktion $u(P; t)$ erfüllt die Anfangsbedingung (68). Weiterhin erfüllt jede der Funktionen $v_k(P)$ die Randbedingung (69); deshalb erfüllt auch die Funktion $u(P; t)$ diese Bedingung für $t \geq 0$. Nun müssen wir uns noch davon überzeugen, daß im Innern von B und für $t > 0$ die Ableitungen u_t , u_{xx} und u_{yy} existieren, stetig sind und die Differentialgleichung (67) erfüllen.

Durch gliedweises Differenzieren der Reihe (70) nach t erhalten wir

$$- \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} v_k(P). \quad (75)$$

Es sei α eine beliebig gewählte positive Zahl. Da für alle hinreichend großen k die Ungleichung $0 < \lambda_k e^{-\lambda_k \alpha} < 1$ erfüllt ist und die Reihe (74) gleichmäßig konvergiert, folgt, daß die Reihe (75) regulär konvergiert, wenn P in $\bar{B}$ liegt und $t \geq \alpha$ gilt. Ganz analog läßt sich beweisen, daß auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} v_k(P),$$

die man durch gliedweises Differenzieren der Reihe (75) nach t erhält, ebenfalls unter den angegebenen Bedingungen regulär konvergiert. Hieraus folgt, daß die Funktion $u(P; t)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach t besitzt, wenn $t > 0$ ist und wenn P in $\bar{B}$ liegt; für diese Ableitungen gilt

$$u_t(P; t) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} v_k(P), \quad (76_1)$$

$$u_{tt}(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} v_k(P). \quad (76_2)$$

Entsprechende Überlegungen kann man auch für die Ableitungen beliebiger Ordnung nach t anstellen.

Wegen

$$v_k(P) = \lambda_k \iint_B G(P; Q) v_k(Q) dS,$$

wobei $G(P; Q)$ die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators unter der Randbedingung (71) ist, läßt sich die Beziehung (76₁) in der Gestalt

$$u_t(P; t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \iint_B a_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} G(P; Q) v_k(Q) dS$$

darstellen. Unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (76₂) in $\bar{B}$ für $t > 0$ können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$u_t(P; t) = - \iint_B G(P; Q) u_t(Q; t) dS \quad (77)$$

und ganz analog

$$u(P; t) = - \iint_B G(P; Q) u(Q; t) dS. \quad (78)$$

Die Funktion $u_{tt}(Q; t)$ ist in $\bar{B}$ für $t > 0$ stetig, und aus (77) folgt, daß die Funktion $u_t(P; t)$ im Innern von B für $t > 0$ stetige Ableitungen erster Ordnung nach den Koordinaten x, y des Punktes P besitzt. Deshalb zeigt die Beziehung (78), daß die Funktion $u(P; t)$ im Innern von B für $t > 0$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Differentialgleichung

$$\Delta u(P; t) = u_t(P; t)$$

genügt, was wir beweisen wollten.

158. Die inhomogene Differentialgleichung. Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + \pi(x, y, t) \quad (79)$$

mit den homogenen Anfangs- und Randbedingungen

$$u|_{t=0} = 0, \quad (80)$$

$$u|_l = 0. \quad (81)$$

Wir führen die Fourierkoeffizienten

$$b_k(t) = \iint_B \pi(P; t) v_k(P) dS \quad (82)$$

der gegebenen Funktion ein und suchen eine Lösung des Problems in der Gestalt

$$u(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) v_k(P). \quad (83)$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (79) ein und berücksichtigen $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$, so finden wir für die Koeffizienten $c_k(t)$ die Differentialgleichung

$$c'_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + b_k(t),$$

aus der wir unter Berücksichtigung von (80), das heißt von $c_k(0) = 0$, die Beziehung

$$c_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t-t')} b_k(t') dt'$$

erhalten. Durch Einsetzen dieser Beziehung in (83) folgt

$$u(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t-t')} b_k(t') dt'. \quad (84)$$

Wir verifizieren diese Lösung unter den folgenden Voraussetzungen über die gegebene Funktion: Die Funktion $\pi(P; t)$ hat für jedes $t \geq 0$ im Innern von B stetige Ableitungen erster Ordnung nach den Koordinaten des Punktes P , und die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) v_k(P), \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \lambda_k v_k(P), \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \lambda_k^2 v_k(P) \quad (85)$$

konvergieren regulär, wenn P dem abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ und t einem beliebigen endlichen Intervall $[0, T]$ angehört. Da die erste Reihe (85) regulär konvergiert und für $0 \leq t' \leq t$ die Ungleichung $0 \leq e^{\lambda_k(t-t')} \leq 1$ gilt, können wir zeigen, daß die auf der rechten Seite von (84) stehende Reihe unter den angegebenen Bedingungen für P und t gleichmäßig konvergiert. Ihre Summe $u(P; t)$ ist unter diesen Bedingungen für P und t eine stetige Funktion von P und t . Aus der Gestalt der rechten

Seite von (84) folgt unmittelbar, daß die Funktion $u(P; t)$ den Bedingungen (80) und (81) genügt.

Es bleibt noch zu verifizieren, daß die durch den Ausdruck (84) definierte Funktion $u(P; t)$ im Innern von B und für $t > 0$ die verlangten stetigen Ableitungen besitzt und der Differentialgleichung (79) genügt. Differenzieren wir die Reihe auf der rechten Seite von (84) gliedweise nach t , so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'.$$

Da die zweite Reihe (85) regulär konvergiert, folgt, daß die in der vorhergehenden Differenz als Subtrahend auftretende Reihe unter den früheren Bedingungen für P und t gleichmäßig konvergiert. Die Summe der als Minuend auftretenden Reihe ist gleich $\pi(P; t)$, denn diese Reihe konvergiert nach Voraussetzung regulär [IV/1, 31]. Somit gilt

$$u_t(P; t) = \pi(P; t) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt', \quad (86)$$

und die Funktion $u_t(P; t)$ ist unter den angegebenen Bedingungen für P und t stetig.

Ersetzen wir in (86) P durch Q , multiplizieren beide Seiten mit $G(P; Q)$ und integrieren über B , so erhalten wir unter Berücksichtigung der Integralgleichung für $v_k(P)$ die Beziehung

$$\iint_B G(P; Q) u_t(Q; t) dS = \iint_B G(P; Q) \pi(Q; t) dS - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt',$$

wobei die Summe der auftretenden Reihe gleich $u(P; t)$ ist. Somit gilt

$$u(P; t) = - \iint_B G(P; Q) u_t(Q; t) dS + \iint_B G(P; Q) \pi(Q; t) dS. \quad (87)$$

Da die Funktion $\pi(Q; t)$ im Innern von B stetige Ableitungen besitzt, folgt, daß das zweite Integral auf der rechten Seite im Innern von B stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung nach den Koordinaten des Punktes P besitzt; die Anwendung des Laplaceschen Operators auf dieses Integral ergibt $-\pi(Q; t)$.

Wir benutzen jetzt die reguläre Konvergenz der dritten Reihe (85) und beweisen, daß die Funktion $u(P; t)$ im Innern von B stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Differentialgleichung (79) genügt.

Wir setzen

$$w(Q; t) = -u_t(P; t) + \pi(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'.$$

Wegen der regulären Konvergenz der dritten Reihe (85) können wir die hingeschriebene gleichmäßig konvergente Reihe gliedweise nach t differenzieren. Somit ergibt sich

$$w_t(P; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k(t) v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k^2 \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt',$$

wobei diese Reihen gleichmäßig konvergieren. Ersetzen wir in der letzten Beziehung P durch Q , multiplizieren beide Seiten mit $G(P; Q)$ integrieren und berücksichtigen die Integralgleichung für $v_k(P)$, so erhalten wir

$$\iint_B G(P; Q) w_t(Q; t) dS = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'$$

und damit wegen (86)

$$u_t(P; t) = \iint_B G(P; Q) w_t(Q; t) dS;$$

daraus folgt, daß die Funktion $u_t(P; Q)$ im Innern von B stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Hiernach zeigt die Beziehung (87), daß die Funktion $u(P; t)$ im Innern von B stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Differentialgleichung

$$\Delta u(P; t) = u_t(P; t) - \pi(P, t)$$

genügt; damit ist die Beziehung (84) vollständig bewiesen.

Sucht man nur eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (79), so kann man diese Beziehung auch unter geringeren Voraussetzungen über die gegebene Funktion beweisen. Wir erinnern an die Definition einer verallgemeinerten Lösung der Differentialgleichung (79). Es seien D der in [151] definierte Zylinder und D_0 der Teil von ihm, der nach oben durch die Ebene $t = T$ begrenzt wird. Die Funktion $u(P; t)$ heißt verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung, wenn für jede Funktion $\sigma(P; t)$, die im Innern von D_T stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und die in allen Punkten in hinreichender Nähe der Oberfläche von D_T verschwindet, die Beziehung

$$\iiint_{D_T} u(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_t) dx dy dt = - \iiint_{D_T} \pi \sigma dx dy dt \quad (88)$$

gilt.

Wir beschränken uns auf verallgemeinerte Lösungen der Klasse $C(\bar{D}_T)$ und setzen nun voraus, daß die erste Reihe (85) regulär konvergiert, wenn P zu $\bar{B}$ gehört und t sich in dem endlichen Intervall $[0, T]$ befindet. Dann ist die Summe dieser Reihe gleich $\pi(P; t)$, und die Reihe in (84) konvergiert, wie wir gesehen haben, gleichmäßig, so daß u in $C(\bar{D}_T)$ liegt.

Wir bezeichnen mit $\pi_n(P; t)$ die n -te Teilsumme der ersten Reihe (85),

$$\pi_n(P; t) = \sum_{k=1}^n b_k(t) v_k(P),$$

und mit $u_n(P; t)$ die n -te Teilsumme der Reihe (84),

$$u_n(P; t) = \sum_{k=1}^n v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'.$$

Die Funktion $u_n(P; t)$ genügt der Differentialgleichung (79) mit der gegebenen Funktion $\pi_n(P; t)$. Somit ist

$$\iiint_{D_T} u_n(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_t) dx dy dt = - \iiint_{D_T} \pi_n \sigma dx dy dt.$$

Führen wir den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch und berücksichtigen, daß gleichmäßig in $\bar{D}_T$ die Funktionen $\pi_n(P; t)$ gegen $\pi(P; t)$ und die Funktionen $u_n(P; t)$ gegen $u(P; t)$ konvergieren, so erhalten wir (88), d. h., die durch (84) definierte Funktion $u(P; t)$ ist eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (79). Es ist außerdem unmittelbar ersichtlich, daß diese Summe den Bedingungen (80) und (81) genügt.

Benutzen wir die Tatsache, daß die verallgemeinerte Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung die gewöhnliche Lösung dieser Differentialgleichung ist [62], und benutzen wir den Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Randwert-

problems der Wärmeleitungsgleichung, so können wir ebenso wie für die Poisson'sche Differentialgleichung zeigen, daß die inhomogene Differentialgleichung (79) unter den vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen nur eine einzige verallgemeinerte Lösung hat.

159. Die Eigenschaften der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0. \quad (89)$$

Es sei $u(x, t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, die in einem Punkt M und in seiner Umgebung stetige Ableitungen u_x und u_t besitzt. Aus der Differentialgleichung (89) folgt, daß dann auch die Ableitung u_{xx} stetig ist.

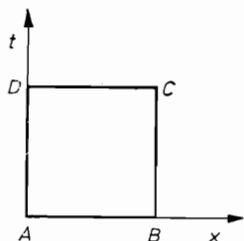


Abb. 15

Den Punkt M umgeben wir mit einem hinreichend kleinen Rechteck $ABCD$ mit achsenparallelen Seiten (Abb. 15) derart, daß in diesem Rechteck die oben erwähnte Lösung $u(x, t)$ existiert. Wir legen den Koordinatenursprung in den Punkt A . Es sei l die Länge von AB . Mit $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$ bezeichnen wir die Werte unserer Lösung auf den Seiten AD bzw. BC und mit $f(x)$ ihre Werte auf der Seite AB . Wir untersuchen zunächst den Fall $f(x) \equiv 0$. Auf Grund der Beziehung (17) können wir die Lösung $u(x, t)$ in der Gestalt

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} (x-l) e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \quad (90)$$

schreiben, wobei die stetigen Funktionen $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ durch die Integralgleichungen (18) bestimmt sind. Hierbei muß man den Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung (89) berücksichtigen.

Es möge der Punkt (x_0, t_0) im Innern von $ABCD$ liegen. Wir betrachten z. B. das erste Integral auf der rechten Seite von (90) für $x = x_0$, $t = t_0$. Ersetzen wir darin x_0 durch $x' + x''i$, wobei x' hinreichend nahe bei x_0 und x'' hinreichend nahe bei 0 liegt, so ist der Realteil von $(x' + x''i)^2$ positiv. Hieraus ist ersichtlich, daß das Integral an der Integrationsgrenze $\tau = t$ in bezug auf den Parameter $x = x' + x''i$ für alle hinreichend nahe an x_0 liegenden komplexen Werte von x gleichmäßig konvergiert und daß andererseits der Integrand dieses Integrals für $0 \leq \tau < t$ eine ganze Funktion von x ist. Daher ist der Wert des Integrals in der Umgebung eines jeden Punktes (x, t) , der sich im Innern von $ABCD$ befindet, und insbesondere in der Umgebung des Punktes M eine holomorphe Funktion von x [III/2, 70]. Dasselbe gilt auch für das zweite Integral auf der rechten Seite von (90).

Somit sind die Lösungen der Differentialgleichung (89) analytische Funktionen der Veränderlichen x .

Die entsprechende Aussage für die Veränderliche t ist nicht richtig. Denn wäre jede Lösung der Differentialgleichung (89) eine analytische Funktion von t , so wären die Werte dieser Funktion auf einer beliebigen Geraden, die zur t -Achse parallel verläuft und dem in Abb. 15 abgebildeten Halbstreifen angehört, auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung durch die Werte der Funktion auf dem Stück dieser Geraden, das dem Rechteck $ABCD$ angehört, vollständig bestimmt. Dies ist aber nicht der Fall, da die Werte von u offenbar davon abhängen, auf welche Weise wir die Funktionen $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$ fortsetzen, die zunächst nur auf den Strecken AD und BC der Geraden $x=0$ bzw. $x=l$ vorgegeben sind.

Bis jetzt hatten wir $f(x_0) \equiv 0$ im Intervall $(0, l)$ vorausgesetzt. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so können wir die Funktion auf ein größeres Intervall $[a, b]$ so fortsetzen, daß sie in den Endpunkten dieses Intervalls gleich 0 ist; außerhalb dieses Intervalls sei sie identisch gleich 0. Wir bilden die Differenz

$$u - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_a^b f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi.$$

Da diese Differenz auf der Strecke AB verschwindet, können wir die obigen Überlegungen anwenden. Es bleibt noch die Lösung

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_a^b f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi$$

zu untersuchen. Mit Hilfe des ersten Satzes aus [III/2, 70] über Integrale, die von einem Parameter abhängen, sehen wir, daß $u_0(x, t)$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes, der sich oberhalb der Achse $t=0$ befindet, d. h. für $t>0$, eine reguläre Funktion von x und t ist. Wir bemerken noch, daß unmittelbar aus der Formel (90) folgt, daß die Funktion u in $0 < x < l$ Ableitungen nach t von beliebiger Ordnung besitzt.

Man kann eine Abschätzung der Ableitungen nach t der Lösung der Gleichung (89) angeben. Die bezüglich x analytische Funktion $u(x, t)$ sei ungerade in x und habe in der Umgebung von $x=t=0$ Ableitungen beliebiger Ordnung nach t . Wir haben dann die folgende Darstellung als Maclaurinsche Reihe:

$$u = u_1(t) x + \frac{u_3(t)}{3!} x^3 + \dots + \frac{u_{2n+1}(t)}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \quad (91)$$

mit

$$u_{2n+1}(t) = \left. \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right|_{x=0} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Unter Verwendung der Gleichung (89) können wir

$$u_{2n+1}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} \quad (92)$$

schreiben. Ist ϱ eine positive Zahl kleiner als der Konvergenzradius der Reihe (91), so gilt [III/2, 84]

$$\left| \frac{u_{2n+1}(t)}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{M}{\varrho^n},$$

wobei M eine gewisse positive Zahl ist. Aus (92) folgt für die Ableitungen der Funktion $u_1(t)$

$$\left| \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} \right| \leq \frac{M(2n+1)!}{\varrho^n}.$$

Diese Abschätzung garantiert nicht die Analytizität der Funktion $u_1(t)$. Würde die strengere Abschätzung

$$\left| \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} \right| \leq \frac{Mn!}{\varrho^n}$$

gelten, so würde die Maclaurinsche Reihe der Funktion $u_1(t)$ konvergieren, und diese Funktion wäre in der Umgebung des Ursprungs regulär.

160. Die verallgemeinerten Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht im eindimensionalen Fall. In [152] haben wir das Randwertproblem im Halbstreifen gelöst, der von unten durch die Charakteristik $t=0$ der Differentialgleichung (5) und seitlich durch die Geraden $x=0$ und $x=l$ begrenzt wird. Jetzt betrachten wir einen Bereich in der x, t -Ebene, der von unten durch die Charakteristik $t=b$ und seitlich durch zwei Kurven l_i ($i=1, 2$) mit den expliziten Darstellungen

$$x = \sigma_1(t), \quad x = \sigma_2(t) \quad (\sigma_1(t) < \sigma_2(t)) \quad (93)$$

begrenzt wird (Abb. 16), wobei die $\sigma_i(t)$ für $t \geq b$ stetige Ableitungen besitzen. Zur Lösung des Problems in diesem Bereich bilden wir für $t > b$ die verallgemeinerten Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht, die für $\sigma_i(t) = \text{const}$ in die Potentiale aus [152] übergehen. Diese verallgemeinerten Potentiale haben die Gestalt

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{\varphi_i(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt', \quad (94)$$

$$v_i(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}} [x - \sigma_i(t')] e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt', \quad (95)$$

wobei $\varphi_i(t')$ und $\psi_i(t')$ stetige Funktionen sind.

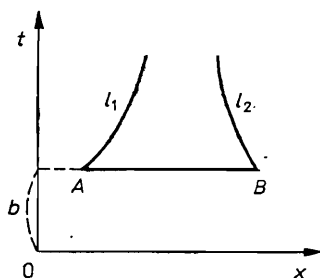


Abb. 16

Die Funktionen $u_i(x, t)$ und $v_i(x, t)$ haben stetige Ableitungen und genügen der Differentialgleichung (5) überall im Äußeren der Kurve l_i ($t > b$). Beide Potentiale haben auch dann einen Sinn, wenn sich der Punkt (x, t) auf der Kurve l_i befindet. Für das Potential $u_i(x, t)$ ist dies unmittelbar klar, da der Integrand eine Schranke $C(t-t')^{-1/2}$ besitzt, in der C konstant ist. Für das Potential $v_i(x, t)$ können wir, wenn der Punkt (x, t) auf l_i liegt,

$$\frac{|x - \sigma_i(t')|}{(t-t')^{3/2}} = \frac{|\sigma_i(t) - \sigma_i(t')|}{(t-t')^{3/2}} = \frac{\sigma'_i(t_0)}{(t-t')^{1/2}} \quad (t' < t_0 < t)$$

schreiben, woraus die Konvergenz des Integrals (95) hervorgeht.

Der Wert des Integrals (94) über die kleine Strecke $t - \delta \leq t' \leq t$ strebt für $\delta \rightarrow 0$ bei beliebiger Lage des Punktes (x, t) gegen 0; hieraus folgt unmittelbar, daß $u_i(x, t)$ bis einschließlich l_i stetig ist. Für das Integral (95) existieren verschiedene Grenzwerte, wenn (x, t) gegen den Punkt (x_0, t_0) auf l_i strebt, und zwar gilt

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} v_i(x, t) = \pm \psi_i(t_0) + v_i(x_0, t_0), \quad (96)$$

wobei $v_i(x_0, t_0)$ der Wert des Integrals (95) im Punkt (x_0, t_0) ist. Das Plus- bzw. Minuszeichen gilt, wenn (x, t) von rechts bzw. von links gegen (x_0, t_0) strebt. Ist $\sigma_i(t) = \text{const}$, so ist offenbar $v_i(x_0, t_0) = 0$, und wir erhalten das Resultat aus [152]. Beim Beweis der Beziehung (96) lassen wir den Index i fort.

Wir betrachten das Integral (95) mit $\psi(t') = 1$,

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{1}{(t-t')^{3/2}} [x - \sigma(t')] e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt', \quad (97)$$

und die Funktion

$$w_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt'. \quad (98)$$

Führen wir an Stelle von t' die neue Integrationsveränderliche

$$z = \frac{x - \sigma(t')}{2a\sqrt{t-t'}}$$

ein, so erhalten wir

$$v_0(x, t) + w_0(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\sigma(b)}{2a\sqrt{t-b}}}^{\pm\infty} e^{-z^2} dz, \quad (99)$$

wobei wir in der oberen Integrationsgrenze für $x - \sigma(t) > 0$ das Pluszeichen und für $x - \sigma(t) < 0$ das Minuszeichen zu wählen haben. Liegt der Punkt (x_0, t_0) auf l , d. h., ist $x_0 - \sigma(t_0) = 0$, so gilt

$$v_0(x_0, t_0) + w_0(x_0, t_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2a\sqrt{t_0-b}}}^0 e^{-z^2} dz. \quad (100)$$

Aus der Definition von $w_0(x, t)$ folgt wie oben unmittelbar, daß $w_0(x, t)$ bis einschließlich l stetig ist. Aus (99) ergibt sich die Beziehung

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} [v_0(x, t) + w_0(x, t)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2a\sqrt{t_0-b}}}^{\pm\infty} e^{-z^2} dz.$$

Subtrahieren wir die Beziehung (100) von der letzten Beziehung, so erhalten wir

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} v_0(x, t) = v_0(x_0, t_0) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-z^2} dz$$

oder

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} v_0(x, t) = v_0(x_0, t_0) \pm 1.$$

Damit ist die Beziehung (96) für $\psi(t') \equiv 1$ bewiesen.

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über. Wir schreiben den Ausdruck für $v(x, t)$ in der Gestalt

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t [\psi(t') - \psi(t_0)] \frac{x - \sigma(t')}{(t - t')^{3/2}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt' + \frac{\psi(t_0)}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{1}{(t - t')^{3/2}} [x - \sigma(t')] e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt'. \quad (101)$$

Wie in [95] genügt es, zu zeigen, daß der erste Summand stetig bleibt, wenn der Punkt (x, t) mit einem Punkt (x_0, t_0) der Kurve l identisch ist. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Wir wählen eine positive Zahl δ so klein, daß die Ungleichung

$$|\psi(t') - \psi(t_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |t' - t_0| \leq \delta$$

gilt, und zerlegen das Integrationsintervall $b \leq t' \leq t$ in die Teile $b \leq t' \leq t_0 - \delta$ und $t_0 - \delta \leq t' \leq t$. Die Funktion, die durch das Integral über das erste dieser Intervalle dargestellt wird, ist im Punkt (x_0, t_0) stetig; es genügt also zu zeigen, daß das Integral

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0 - \delta}^t [\psi(t') - \psi(t_0)] \frac{x - \sigma(t')}{(t - t')^{3/2}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt$$

für jede Lage des Punktes (x, t) beliebig klein ist, wenn dieser genügend nahe bei dem Punkt (x_0, t_0) liegt oder mit ihm identisch ist. Das letzte Integral ist dem absoluten Betrag nach nicht größer als

$$\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0 - \delta}^t \frac{|x - \sigma(t')|}{(t - t')^{3/2}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt'.$$

Wir setzen voraus, daß die Differenz $x - \sigma(t')$ für $t_0 - \delta \leq t' \leq t$ und willkürliche Lage von (x, t) in einer bestimmten Umgebung von (x_0, t_0) ihr Vorzeichen höchstens k -mal ändert, wobei k eine feste ganze positive Zahl ist. Dann läßt sich das Integral

$$\int_{t_0 - \delta}^t \frac{|x - \sigma(t')|}{(t - t')^{3/2}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt'$$

als Summe von höchstens k Integralen der Gestalt

$$\pm \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x - \sigma(t')}{(t - t')^{3/2}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt' \quad (t_0 - \delta \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t)$$

darstellen, die sich von den Integralen

$$\frac{x - \sigma(t_{i+1})}{2a\sqrt{t - t_{i+1}}} \pm 4a \int \frac{x - \sigma(t_i)}{2a\sqrt{t - t_i}} e^{-z^2} dz$$

nur durch den Wert

$$\pm \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t - t'}} e^{-\frac{[\sigma(t') - x]^2}{4a^2(t - t')}} dt'$$

unterscheiden, der dem absoluten Betrag nach nicht größer ist als eine gewisse Konstante. Somit bleibt das zu untersuchende Integral beschränkt, wenn sich (x, t) in einer bestimmten Umgebung von (x_0, t_0) befindet. Dieses Integral wird noch mit ε multipliziert, und damit läßt sich der Beweis, daß der erste Summand auf der rechten Seite von (101) stetig ist, wenn (x, t) mit einem Punkt (x_0, t_0) der Kurve l identisch ist, genauso zu Ende führen wie in [95]. Unter Benutzung der angegebenen Potentiale läßt sich das Randwertproblem für den in Abb. 16 angegebenen Bereich in eine Integralgleichung überführen, wie wir dies in [152] getan haben. Es mögen folgende Bedingungen vorliegen: Es sei $u=0$ auf der Charakteristik $t=b$ und $u=\omega_i(t)$ auf l_i ($\omega_i(b)=0$). Wir suchen eine Lösung in der Gestalt

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}} [x - \sigma_i(t')] e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt' . \quad (102)$$

Hierbei sind für jedes $\psi_i(t')$ die Differentialgleichung (5) und die Randbedingung auf der Charakteristik $t=b$ erfüllt. Aus den Randbedingungen auf l_i erhalten wir für die $\psi_i(t)$ das System Volterrascher Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \psi_1(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}} [\sigma_1(t) - \sigma_i(t')] e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt' , \\ \omega_2(t) &= -\psi_2(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}} [\sigma_2(t) - \sigma_i(t')] e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt' . \end{aligned} \quad (103)$$

Zunächst betrachten wir die in der ersten Integralgleichung auftretenden Integrale

$$\int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}} [\sigma_1(t) - \sigma_1(t')] e^{-\frac{[\sigma_1(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt' , \quad (104)$$

$$\int_b^t \frac{\psi_2(t')}{(t-t')^{3/2}} [\sigma_1(t) - \sigma_2(t')] e^{-\frac{[\sigma_2(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt' . \quad (105)$$

Im Integral (104) läßt sich die Ordnung des Pols bei $t'=t$ mittels des Zählers des Bruches

$$\frac{\sigma_1(t) - \sigma_1(t')}{(t-t')^{3/2}}$$

in derselben Weise erniedrigen wie früher. Im zweiten Integral strebt der Exponent von e für $t' \rightarrow t$ gegen $-\infty$, wodurch der Pol vollständig aufgehoben wird. Entsprechendes gilt auch für die Integrale in der zweiten Integralgleichung (103). Somit hat das Integralgleichungssystem (103) eine einzige Lösung, die sich durch die Methode der sukzessiven Approximation ermitteln läßt.

Man kann die Lösung des angegebenen Randwertproblems auch als Summe zweier Potentiale einer einfachen Schicht

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^t \frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt' \quad (106)$$

ansetzen. Hierbei gelangen wir zu dem System von Integralgleichungen erster Art

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^t \frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt', \\ \omega_2(t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^t \frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt'.\end{aligned}\quad (107)$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $(y-t)^{-1/2}$ und integrieren über t von $t=b$ bis $t=y$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}f_1(y) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^y \varphi_j(t') K_{1j}(t', y) dt', \\ f_2(y) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^y \varphi_j(t') K_{2j}(t', y) dt'\end{aligned}\quad (108)$$

mit

$$\begin{aligned}f_i(y) &= \int_b^y \frac{\omega_i(t)}{\sqrt{y-t}} dt, \\ K_{ij}(t', y) &= \int_{t'}^y \frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt;\end{aligned}\quad (109)$$

dabei haben wir rechts die Reihenfolge der Integrationen geändert und die Dirichletsche Formel benutzt [II, 82]. Das Integralgleichungssystem (108) ist dem System (107) äquivalent (vgl. [II, 82]). Offenbar gilt

$$\lim_{t \rightarrow t'+0} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j, \end{cases}$$

und mit Hilfe der Beziehung [II, 82]

$$\int_{t'}^y \frac{dt}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} = \pi$$

erhalten wir

$$K_{11}(y, y) = K_{22}(y, y) = \pi, \quad K_{12}(y, y) = K_{21}(y, y) = 0.$$

Wir differenzieren das Integralgleichungssystem (108) nach y und nehmen dabei an, daß die $\omega_i(t)$ und damit auch die Funktionen $f_i(y)$ stetige Ableitungen haben [II, 83]. Auf diese Weise finden wir

$$\begin{cases} f'_1(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \varphi_1(y) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^y \varphi_j(t') \frac{\partial K_{1j}(t', y)}{\partial y} dt', \\ f'_2(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \varphi_2(y) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^2 \int_b^y \varphi_j(t') \frac{\partial K_{2j}(t', y)}{\partial y} dt'. \end{cases}\quad (110)$$

Zur Ermittlung der Ableitungen stellen wir $K_{ij}(t', y)$ in der Gestalt

$$K_{ij}(t', y) = \int_{t'}^y e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} d \left[\arcsin \left(2 \frac{t-t'}{y-t'} - 1 \right) \right]$$

dar. Durch partielle Integration und Differentiation nach y erhalten wir

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = -\frac{2}{(y-t')^2} \int_{t'}^y \frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} \left\{ [\sigma_i(t) - \sigma_j(t')] \sigma_i'(t) - \frac{[\sigma_j(t') - \sigma_i(t)]^2}{2(t-t')} \right\} dt.$$

Die Konvergenz des Integrals an der Integrationsgrenze $t=t'$ wird für $i \neq j$ durch die Exponentialfunktion gewährleistet; für $i=j$ hat der Bruch in den geschweiften Klammern keinen Pol, und der gesamte Ausdruck in geschweiften Klammern strebt wie $t-t'$ gegen 0. Berücksichtigen wir dies alles und führen elementare Abschätzungen des Integranden für $i \neq j$ und $i=j$ durch, so gelangen wir in beiden Fällen zu einem Integral der Gestalt

$$C \int_{t'}^y \frac{dt}{\sqrt{y-t}},$$

bei dem mit C eine Konstante bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = \frac{L_{ij}(t', y)}{\sqrt{y-t'}},$$

wobei $L_{ij}(t', y)$ eine stetige Funktion von t' und y ist. Somit läßt sich auf das Integralgleichungssystem (110) die Methode der sukzessiven Approximation anwenden [IV/1, 50].

161. Sub- und superparabolische Funktionen. Bei der Lösung des Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung läßt sich eine Methode anwenden, welche der in [119] entwickelten Methode der Ober- und Unterfunktionen entspricht. Wir betrachten in der x, t -Ebene einen Bereich B , der von unten durch die Charakteristik $t=0$, von oben durch die Charakteristik $t=b$ und von links und rechts durch Kurven begrenzt ist, die eine Darstellung der Form (93) besitzen; dabei machen wir einstweilen keinerlei Voraussetzungen über die Eigenschaften der Funktionen $\sigma_i(t)$ außer der, daß diese Funktionen eindeutig und stetig sind und $\sigma_1(t) < \sigma_2(t)$ gilt. Zur Definition der sub- und superparabolischen Funktionen müssen wir einen Grundbereich wählen, in dem wir das Randwertproblem der Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{111}$$

für beliebige stetige Randwerte lösen können. Für die Laplacesche Differentialgleichung war dies der Kreis. Als einen solchen Bereich für die Differentialgleichung (111) wählen wir beispielsweise ein gleichseitiges Dreieck β , dessen Grundlinie parallel zur Achse $t=0$ verläuft und dessen Seitenlinien nach der Seite wachsender t -Werte gerichtet sind. Die Lösung $u(x, t)$ des Randwertproblems für ein solches Dreieck erhält man durch die in [160] angegebene Methode; diese Lösung ist eindeutig. Sie nimmt ihren größten und ihren kleinsten Wert auf den Seiten des Dreiecks an [II, 219]. Eine im abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ stetige Funktion $\varphi(M) = \varphi(x, t)$ heißt *subparabolisch*, wenn ihr Wert $\varphi(M_0)$ in einem beliebigen Punkt M_0 , der im Innern von B liegt, nicht größer ist als der Wert, den in diesem Punkt die für ein beliebiges hinreichend kleines Dreieck β um M_0 konstruierte Lösung der Differentialgleichung (111) annimmt, die auf den Seiten von β dieselben Werte hat wie $\varphi(M)$. Eine *superparabolische* Funktion $\psi(M) = \psi(x, t)$ wird entsprechend definiert, dabei darf $\psi(M_0)$ nicht kleiner sein als der Wert der Lösung von (111) in den Dreiecken β . Der kleinste Wert einer superparabolischen Funktion und der größte Wert einer subparabolischen Funktion werden auf der Berandung von B angenommen.

Man erkennt leicht: *Besitzt eine Funktion $\psi(x, t)$ im Innern von B die stetigen Ableitungen ψ_t , ψ_x und ψ_{xx} , die im Innern von B der Ungleichung $\psi_t - \psi_{xx} \geq 0$ genügen, so ist sie*

superparabolisch. Ist nämlich u die Funktion, die der Differentialgleichung (111) genügt und auf den Seiten von β mit φ übereinstimmt, dann ist die Differenz $w = \varphi - u$ auf den Seiten von β gleich 0, und es gilt $w_t - w_{xx} \geq 0$ im Innern von β . Damit muß aber die Funktion w den kleinsten Wert auf der Berandung von β annehmen [151], wo sie gleich 0 ist. Es gilt also $w \geq 0$ im ganzen Dreieck β oder $\varphi \geq u$ in β , was zu beweisen war.

Ist entsprechend $\varphi_t - \varphi_{xx} \leq 0$ im Innern von B , so ist φ eine subparabolische Funktion. Jede Lösung der Differentialgleichung (111) ist gleichzeitig eine sub- und eine superparabolische Funktion. Genauso wie in [118] kann man beweisen: Sind $f_1(M), \dots, f_m(M)$ superparabolische Funktionen, so ist auch $\varphi(M) = \min[f_1(M), \dots, f_m(M)]$ eine superparabolische Funktion. Wir bezeichnen mit $f_\beta(M)$ eine Funktion, die außerhalb des Dreiecks β und auf seinen Seiten mit $f(M)$ identisch und im Innern von β gleich der Lösung der Differentialgleichung (111) ist, deren Werte auf der Berandung von β gleich $f(M)$ sind. Wie in [118] kann man beweisen, daß mit $f(M)$ auch $f_\beta(M)$ eine superparabolische Funktion ist, wobei $f_\beta(M) \leq f(M)$ in B gilt.

Die Randwerte in B sind auf der unteren Grundlinie $t=0$ und auf den Seitenlinien l_i vorgegeben. Wir bezeichnen diesen Teil der Berandung von B mit l' . Die Definition der Ober- und Unterfunktionen ist dieselbe wie für die Laplacesche Differentialgleichung. Insbesondere versteht man unter einer Oberfunktion jede superparabolische Funktion, deren Werte auf l' nicht kleiner als die vorgegebenen Randwerte sind.

Danach läßt sich die Funktion $u(x, t)$ im Innern von B als untere Grenze der Werte aller Oberfunktionen definieren. Man kann zeigen, daß diese Funktion der Differentialgleichung (111) genügt (vgl. [119]). Sie ist die verallgemeinerte Lösung des angegebenen Randwertproblems für die Differentialgleichung (111). Das Verhalten der Funktion $u(x, t)$ bei Annäherung an l' ist in der Arbeit von I. G. PETROWSKI, Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, *Compositio math.* 1 (1935), 383–419, untersucht worden.

162. Parabolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung. Im vorigen Abschnitt haben wir die Wärmeleitungsgleichung betrachtet. Sie ist das einfachste Beispiel einer parabolischen Differentialgleichung. Die kanonische Gestalt der parabolischen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten hat die Form

$$u_t - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x, t) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t), \quad (112)$$

wobei $a_{ik} = a_{ki}$ gilt und die quadratische Form $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k$ im Gebiet D , dem Bereich der Veränderlichen (x, t) ($x = (x_1, \dots, x_n)$), positiv definit ist. Die Variablen x_i heißen räumliche Veränderliche und die Variable t zeitliche Veränderliche. Für solche Gleichungen sind das Cauchysche Problem und verschiedene Anfangs-Randwert-Probleme in Richtung von wachsendem t sachgemäß lösbar.¹⁾ Das Cauchysche Problem für (112) besteht darin, die Lösungen $u(x, t)$ der Gleichungen (112) im Halbraum

$$H^+ = \{(x, t) : x \in R^n, t \geq t_0\}$$

zu finden, die der Anfangsbedingung $u|_{t=t_0} = \varphi(x)$ genügen. Anfangs-Randwert-Probleme im Gebiet B des R^n sind Probleme zur Bestimmung von Lösungen der Gleichung (112) im Zylindergebiet $D = B \times (t_0, T)$ des Raumes $R^{n+1} = R^n \times R^1$ (d. h. für $x \in B, t \in (t_0, T)$), die der Anfangsbedingung

$$u(x, t)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad x \in B,$$

¹⁾ Der Fall, daß vor der ersten Summe der Gleichung (112) das Pluszeichen steht, führt nach der Transformation $\tau = -t$ auf den vorliegenden Fall.

und einer der klassischen Randbedingungen: der ersten

$$u(x, t) |_{x \in S} = \varphi(x, t), \quad t \in [t_0, T];$$

der zweiten

$$P(u(x, t)) |_{x \in S} \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \cos(n, x_i) |_{x \in S} = \varphi(x, t), \\ t \in [t_0, T];$$

oder der dritten

$$(P(u(x, t)) + \sigma(x, t) u(x, t)) |_{x \in S} = \varphi(x, t), \quad t \in [t_0, T],$$

genügen. Hier sind S der Rand des Gebietes B , n der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen an S und φ , ψ bzw. σ auf B , $S \times [t_0, T]$ bzw. $S \times [t_0, T]$ vorgegebene Funktionen.

In den vorangehenden Abschnitten haben wir das Cauchysche Problem und das erste Anfangs-Randwertproblem (das letztere dabei in allgemeinerer Form, wenn sich der Rand des Gebietes B in der Zeit ändert) am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung betrachtet. Diese Überlegungen kann man auf den Fall der Gleichung (112) und auch auf eine breite Klasse parabolischer Systeme verallgemeinern. Die gegenwärtig bekannten Ergebnisse über parabolische Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme findet man in den Monographien: O. A. LADYSHENSKAJA, W. A. SOLONNIKOW und N. N. URALZEWA, Lineare und quasilineare Gleichungen vom parabolischen Typus (russ.), Moskau 1967, und S. D. EIDELMAN, Parabolische Systeme (russ.), Moskau 1964, sowie in der Arbeit von W. A. SOLONNIKOW, Über Randwertprobleme für lineare parabolische Differentialgleichungssysteme allgemeiner Gestalt (russ.), Trudy MIAN SSSR 83 (1965), und anderen. Wir legen nur einige der Ergebnisse von O. A. LADYSHENSKAJA dar, die sie Anfang der fünfziger Jahre erzielt hat.

Wir beginnen mit der Herleitung der energetischen Ungleichung für das erste Anfangs-Randwertproblem. Aus dieser Ungleichung folgt, daß dieses Problem sachgemäß gestellt ist. An Stelle von (112) betrachten wir die Gleichung

$$M(u) = u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x, t) u_{x_k}) + b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t), \quad (113)$$

wobei über sich wiederholende Indizes von 1 bis n summiert wird. Sind die $a_{ik}(x, t)$ nach x_i differenzierbar, so kann die Gleichung (113) in die Gestalt (112) übergeführt werden und umgekehrt. Für unsere Ziele ist die Gestalt (113) vorteilhafter. Wir setzen voraus, daß die Gleichung (113) im Gebiet $D_T = B \times (0, T) \subset R^{n+1}$ gegeben ist und die Koeffizienten in D_T den Bedingungen

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (114)$$

$$\left| \frac{\partial a_{ik}(x, t)}{\partial x_k} \right| \leq \mu_1, \quad (115)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i^2(x, t) \right)^{1/2}, \quad |c(x, t)| \leq \mu_2 \quad (116)$$

genügen, wobei ν , μ und μ_i gewisse positive Konstanten sind. Die Funktion $u(x, t)$ genüge (in D_T) der Gleichung (113) und den Anfangs-Randwert-Bedingungen

$$u |_{t=0} = \varphi(x) \quad (117)$$

und

$$u|_{S_T} = 0, \quad S_T = S \times [0, T]. \quad (118)$$

Für die weiteren Überlegungen ist es nicht notwendig, die Funktion $u(x, t)$ als glatt vorauszusetzen. Es genügt, wenn sie und ihre verallgemeinerten Ableitungen $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_k}$ in $L_2(D_T)$ liegen. Für solche Funktionen hat es Sinn davon zu sprechen, daß sie den Bedingungen (117), (118) genügen (vgl. dazu [V, Kap. IV], und für sie gelten alle weiter unten durchgeführten Überlegungen. Solche Lösungen erfüllen die Gleichung (113) in Lebesgue-fast-allem Punkten (x, t) des Bereiches D_T . Für die Funktionen $f(x, t)$ und $\varphi(x)$ genügt es, $f \in L_2(D_T)$ und $\varphi \in L_2(B)$ vorauszusetzen. Die Ableitungen $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}$ können wir ebenfalls als verallgemeinerte Ableitungen auffassen, wobei die Konstanten μ und μ_1 nicht in die weiter unten hergeleiteten Abschätzungen eingehen.

Der nicht mit der Theorie der verallgemeinerten Ableitungen vertraute Leser kann voraussetzen, daß alle in unseren Betrachtungen auftretenden Ableitungen in $\bar{D}_T$ stetig sind.

Aus (113) folgt

$$\int_{B(t)} M(u) u \, dx = \int_{B(t)} f u \, dx, \quad (119)$$

wobei $B(t_1)$ der Schnitt des Gebietes D mit der Ebene $t = t_1$ ist. Mit Hilfe der Formel über die partielle Integration und der Bedingung (118) transformieren wir die linke Seite der Gleichung (119) und erhalten

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} u^2 \, dx + \int_{B(t)} (a_{ik} u_{x_k} u_{x_i} + b_i u_{x_i} u + c u^2) \, dx. \quad (120)$$

Wir setzen diesen Ausdruck in (119) ein und führen unter Verwendung der Bedingungen (114) bis (116) die folgenden Umformungen und Abschätzungen durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} u^2 \, dx + \nu \int_{B(t)} u_x^2 \, dx &\leq - \int_{B(t)} (b_i u_{x_i} u + c u^2) \, dx + \int_{B(t)} f u \, dx \\ &\leq \left(\int_{B(t)} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(t)} \sum_{i=1}^n b_i^2 u^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \mu_2 \int_{B(t)} u^2 \, dx + \left(\int_{B(t)} f^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(t)} u^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \mu_2 \left(\int_{B(t)} u_x^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(t)} u^2 \, dx \right)^{1/2} + \mu_2 \int_{B(t)} u^2 \, dx \\ &\quad + \left(\int_{B(t)} f^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(t)} u^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \int_{B(t)} u_x^2 \, dx + \left(\frac{\mu_2^2}{2\nu} + \mu_2 + \frac{1}{2} \right) \int_{B(t)} u^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{B(t)} f^2 \, dx. \quad (121) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Bunjakowskische Ungleichung, die Cauchysche Ungleichung in der Form $|ab| \leq \frac{\nu}{2} a^2 + \frac{1}{2\nu} b^2$ sowie die abkürzende Bezeichnung $u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$ benutzt.

Aus (121) folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} u^2 dx + \nu \int_{B(t)} u_x^2 dx \leq C_1 \int_{B(t)} u^2 dx + \int_{B(t)} f^2 dx \quad (122)$$

mit $C_1 = \frac{\mu_2^2}{\nu} + 2\mu_2 + 1$. Wir verwenden nun den Hilfssatz aus [56]. Dazu lassen wir in (122) den Summanden $\nu \int_{B(t)} u_x^2 dx$ weg. Dann liefert dieser Hilfssatz für $w(t) = \int_{B(t)} u^2 dx$ die Abschätzung

$$\int_{B(t)} u^2 dx \leq e^{C_1 t} \int_{B(0)} u^2 dx + \int_0^t e^{C_1(t-\tau)} d\tau \int_{B(\tau)} f^2(x, \tau) dx \equiv y(t).$$

Durch Einsetzen in (122) erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} u^2 dx + \nu \int_{B(t)} u_x^2 dx \leq C_1 y(t) + \int_{B(t)} f^2 dx. \quad (123)$$

Es sei $D_t = B \times (0, t)$. Wir integrieren die Ungleichung (123) von 0 bis t bezüglich t . Im Ergebnis elementarer Rechnungen und Abschätzungen erhalten wir

$$\int_{B(t)} u^2 dx + \nu \int_{D_t} u_x^2 dx dt \leq e^{C_1 t} \left[\int_B \varphi^2 dx + \int_{D_t} f^2 dx dt \right], \quad t \in [0, T]. \quad (124)$$

Das ist die gewünschte *energetische Ungleichung* für die Lösung u des Problems (113), (117), (118). Ist u eine verallgemeinerte Lösung, die nur die auf Seite 424 beschriebenen Eigenschaften besitzt, so gelten für dieses u die Beziehungen (122) und (123) nicht für alle t aus $[0, T]$, sondern nur für Lebesgue-fast-alles t aus $[0, T]$. Die Ungleichung (124) gilt jedoch für alle $t \in [0, T]$. Auf der rechten Seite von (124) stehen bekannte Größen. Durch sie werden die Integrale der linken Seite, die die Funktion u enthalten, abgeschätzt. Aus dieser Ungleichung ergibt sich die nachstehende wichtige Schlußfolgerung für das Problem (113), (117), (118):

Satz. *Das Problem (113), (117), (118) besitzt unter den Bedingungen (114) bis (116) höchstens eine verallgemeinerte Lösung u , die einschließlich ihrer Ableitungen $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_k}$ in $L_2(D_T)$ liegt.*

Wir nehmen zum Beweisan, daß dieses Problem zwei verallgemeinerte Lösungen u' und u'' der angegebenen Klasse besitzt. Dann ist die Differenz $u = u' - u''$ eine verallgemeinerte Lösung dieses Problems mit $f(x, t) \equiv 0$ und $\varphi(x) \equiv 0$. Folglich gilt für u die Ungleichung (124) mit $f = 0$ und $\varphi = 0$. Dann haben wir $\int_{\bar{B}} u^2(x, t) dx = 0$ für alle $t \in [0, T]$, d. h., u' und u'' sind für fast alle (x, t) aus D_T identisch. (Wir bemerken, daß unsere Überlegungen auch für den Fall gelten, daß u' und u'' den inhomogenen Randbedingungen $u'(x, t)|_{x \in S} = u''(x, t)|_{x \in S} = \psi(x, t)$, $t \in (0, T)$, genügen.)

Aus der Ungleichung (124) folgt auch die stetige Abhängigkeit der Lösung des betrachteten Problems (unter der Voraussetzung, daß sie existiert!) von f und φ im folgenden Sinne:

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} (u_1 - u_2)^2 dx + \nu \int_{D_t} \sum_{i=1}^n (u_{1x_i} - u_{2x_i})^2 dx dt \\ & \leq e^{C_1 t} \left\{ \int_B (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx + \int_{D_t} (f_1 - f_2)^2 dx dt \right\}. \end{aligned} \quad (125)$$

Hier sind u_i ($i = 1, 2$) die den Störfunktionen f_i und den Anfangswerten φ_i entsprechenden verallgemeinerten Lösungen des Problems (113), (117), (118). Die Abschätzung (125) folgt unmittelbar aus der Ungleichung (124), wenn dort $u_1 - u_2$ für u gesetzt wird, was der Lösung des Problems für $f = f_1 - f_2$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ entspricht.

Im folgenden Abschnitt beweisen wir den Satz über die Lösbarkeit des Problems (113), (117), (118) zwar nicht für die gesamte Klasse von Gleichungen (113), aber zumindest für die Gleichungen, für die die Lösungen gut durch Fourierreihen dargestellt werden können.

163. Die Fourierrmethode für parabolische Differentialgleichungen. Wir zeigen die eindeutige Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems für parabolische Gleichungen der Gestalt

$$M(u) = u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x) u_{x_k}) + c(x) u = 0. \quad (126)$$

Die Randbedingung setzen wir als homogen voraus:

$$u|_{S_t} = 0, \quad S_t = S \times [0, t], \quad (127)$$

während die Anfangsbedingung die Gestalt

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (128)$$

mit $\varphi \in L_2(B)$ hat. Bezüglich der Koeffizienten von M und des Gebietes B seien die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt. Nach Satz 1 aus [150] hat das Eigenwertproblem

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x) u_{x_k}) - c(x) u = \lambda u, \quad u|_S = 0 \quad (129)$$

wobei S der Rand des Gebietes B ist, ein reelles Spektrum $\{\lambda_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Dabei können wir annehmen, daß die Folge $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ nicht monoton wächst und daß $\lambda_k \rightarrow -\infty$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $c(x) \equiv 0$ voraus. Dann sind alle λ_k negativ. Weiterhin fordern wir, daß die Eigenfunktionen $\{u_k(x)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) ein orthonormiertes System im Raum $L_2(B)$ bilden, also daß

$$(u_k, u_l) = \int_B u_k u_l \, dx = \delta_{kl} \quad (130)$$

gilt. Hier entspricht u_k dem Eigenwert λ_k . In [150] wurde bewiesen, daß alle Funktionen u_k im Raum $W_{2,0}^2(B)$ liegen und eine Basis in den Räumen $L_2(B)$, $\dot{W}_2^1(B)$, $W_{2,0}^2(B)$ bilden. Darüber hinaus wurde dort bewiesen, daß man in den Räumen $\dot{W}_2^1(B)$ und $W_{2,0}^2(B)$ neue Skalarprodukte

$$[u, v] = \int_B [a_{ik} u_{x_i} v_{x_k} + cuv] \, dx$$

und

$$\{u, v\} = \int_B L(u) L(v) \, dx$$

einführen kann. Die diesen Skalarprodukten entsprechenden Normen $\|u\|_1 = \sqrt{[u, u]}$ und $\|u\|_2 = \sqrt{\{u, u\}}$ sind zu den ursprünglichen Normen der Räume $\dot{W}_2^1(B)$ und $W_{2,0}^2(B)$ äquivalent. In diesen neuen Skalarprodukten ist das System der Eigenfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ orthogonal, wobei

$$[u_k, u_l] = -\lambda_k \delta_{kl} \quad (131)$$

und

$$\{u_k, u_l\} = \lambda_k^2 \delta_{kl} \quad (132)$$

gilt. Die Funktionen $a_k e^{\lambda_k t} u_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) sind für beliebige Zahlen a_k Lösungen der Gleichung (126) und genügen der Randbedingung (127). Sie gehören einschließlich aller ihrer Ableitungen nach t für alle $t \geq 0$ zum Raum $W_{2,0}^2(B)$. Der Gleichung (126) genügen diese Funktionen für alle $t \geq 0$ und für fast alle x aus B . Wir suchen die Lösung u des Problems (126) bis (128) in Gestalt einer Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k t} u_k(x).$$

Für a_k erhalten wir nach dem formalen Einsetzen dieser Reihe in (128) unter Beachtung von (130) die Ausdrücke $a_k = (\varphi, u_k)$ ($k=1, 2, \dots$). Unser nächstes Ziel besteht nun darin, das Konvergenzverhalten der Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k(x) \quad (133)$$

zu untersuchen. Wir überzeugen uns davon, daß die Reihe eine verallgemeinerte Lösung des Problems (126) bis (128) aus einer solchen Klasse liefert, für die ein Eindeutigkeitssatz gilt. Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Reihe (133) in $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \geq 0$ konvergiert. Für beliebiges m, p und $t \geq 0$ gilt nämlich

$$\left\| \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k)^2 e^{2\lambda_k t} \leq \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k)^2,$$

wobei die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, u_k)^2$ konvergiert und ihre Summe gleich $\|\varphi\|^2$ ist. Folglich ist die Summe u der Reihe (133) für beliebige $t \geq 0$ ein Element aus $L_2(B)$, das in der Norm von $L_2(B)$ stetig von $t \geq 0$ abhängt. Letzteres heißt nichts anderes als $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\| \rightarrow 0$ für $\Delta t \rightarrow 0$ und $t, t + \Delta t \geq 0$. Für $t=0$ konvergiert die Reihe (133) in der Norm von $L_2(B)$ gegen φ , daher gilt $\|u(x, \Delta t) - \varphi(x)\| \rightarrow 0$ für $\Delta t \rightarrow +0$. Wir zeigen, daß die Reihe (133) für $t > 0$ in der Norm des Raumes $W_{2,0}^2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [\varepsilon, \infty)$ konvergiert; ε ist hier eine beliebige positive Zahl. Wegen (132) gilt

$$j_{m,p}(t) \equiv \left\| \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k(x) \right\|_2^2 = \sum_{k=m}^p \lambda_k^2 e^{2\lambda_k t} (\varphi, u_k)^2.$$

Für $t \geq \varepsilon > 0$ werden die Funktionen $\lambda_k^2 e^{2\lambda_k t}$ für alle $k=1, 2, \dots$ nicht größer als eine gewisse von ε abhängige Zahl C_ε . Daher gilt für $t \geq \varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$j_{m,p}(t) \leq C_\varepsilon \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k)^2,$$

womit die Konvergenz der Reihe (133) bewiesen ist. Daraus folgt, daß die Summe u der Reihe (133) ein Element des Raumes $W_{2,0}^2(B)$ ist, das für $t > 0$ in der Norm von $W_{2,0}^2(B)$ stetig von t abhängt.

Differenziert man die Reihe (133) gliedweise nach t , so erhält man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k(x), \quad (134)$$

die in der Norm von $L_2(B)$ und $W_2^2(B)$ für $t \geq \varepsilon > 0$ gleichmäßig bezüglich t konvergiert; ε ist hier eine beliebige positive Zahl. Das wird wie oben bewiesen. Man muß dabei einschränken, daß die Werte der Funktionen $|\lambda_k|^r e^{\lambda_k t}$ ($k=1, 2, \dots$) auf der Halbgeraden $t \geq \varepsilon > 0$ eine gewisse, nur von ε und r abhängige Zahl $C_{\varepsilon,r}$ nicht über-

steigen. Diese Konvergenz der Reihe (134) sichert für alle $t > 0$ ihre Zugehörigkeit zu $\dot{W}_{2,0}^2(B)$; ihre Summe ist gleich der verallgemeinerten Ableitung der Summe $u(x, t)$ der Reihe (133) nach t in den Gebieten $D_{\varepsilon, T} = B \times (\varepsilon, T)$ ($\varepsilon > 0$). Aus allem Gesagten folgt, daß die Summe $u(x, t)$ der Reihe (133) die *verallgemeinerte Lösung der Klasse M_T des Problems* (126) bis (128) im Gebiet $D_T = B \times (0, T)$ ist. Die Elemente $v(x, t)$ der Klasse M_T haben die folgenden Eigenschaften: Sie sind Elemente des Raumes $L_2(B)$ und hängen in der Norm des Raumes $L_2(B)$ stetig von $t \in [0, T]$ ab; sie besitzen in D_T die verallgemeinerte Ableitung $v_t(x, t)$, wobei $v(x, t)$, $v_t(x, t)$ Elemente des Raumes $\dot{W}_{2,0}^2(B)$ sind und stetig von $t \in [0, T]$ abhängen. Die Summe $u(x, t)$ der Reihe (133) genügt für alle $t > 0$ und fast alle $x \in B$ der Gleichung (126). Der Randbedingung (127) genügt sie in dem Sinn, daß sie für $t > 0$ Element des Raumes $\dot{W}_{2,0}^2(B)$ ist. Die Anfangsbedingung wird „im Mittel“ erfüllt:

$$\|u(x, t) - \varphi(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +0.$$

Wir zeigen, daß das Problem (126) bis (128) in dieser Klasse keine zwei verschiedenen Lösungen besitzen kann. Eine der Lösungen, erklärt durch die Formel (133), haben wir schon gefunden. Es sei $u'(x, t)$ eine zweite verallgemeinerte Lösung der Klasse M_T des Problems (126) bis (128). Dann ist die Differenz $v(x, t)$ eine verallgemeinerte Lösung des homogenen Problems (126) bis (128) aus der Klasse M_T , d. h.

$$M(v) = 0, \quad v|_{S_t} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \quad (135)$$

Im Gebiet $D_{\varepsilon, T}$ ($\varepsilon > 0$) besitzt diese Lösung die Glattheitseigenschaften, wie sie bei der Herleitung der energetischen Ungleichung (124) vorausgesetzt wurden. Folglich gelten für beliebiges $\varepsilon \in (0, t)$ und $t \in [\varepsilon, T]$ die Abschätzungen

$$\int_{B(t)} v^2 dx \leq e^{C_1(t-\varepsilon)} \int_{B(\varepsilon)} v^2 dx. \quad (136)$$

Läßt man in dieser Ungleichung ε gegen 0 konvergieren, so überzeugt man sich unter Beachtung von $\int_{B(\varepsilon)} v^2 dx \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ davon, daß $v(x, t) \equiv 0$ gilt. Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Werden an $\varphi(x)$ zusätzliche Forderungen gestellt, so verbessert sich das Konvergenzverhalten der Reihe (133), und ihre Summe besitzt bessere Differentiationseigenschaften. Gilt beispielsweise $\varphi \in \dot{W}_2^1(B)$, so konvergiert die Reihe (133) in der Norm von $\dot{W}_2^1(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \geq 0$, und ihre Summe ist ein Element des Raumes $\dot{W}_2^1(B)$, das für alle $t \geq 0$ in der Norm von $\dot{W}_2^1(B)$ stetig von t abhängt.

In der Tat gilt wegen (131) und (129)

$$\left\| \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k \right\|_1^2 = \sum_{k=m}^p |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 e^{2\lambda_k t} \leq \sum_{k=m}^p |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 = \sum_{k=m}^p \left[\varphi, \frac{u_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \right]^2$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi, \frac{u_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \right]^2 = [\varphi, \varphi],$$

d. h., die Reihe (133) konvergiert in der Norm von $\dot{W}_2^1(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$. Wir zeigen, daß die durch zweimalige gliedweise Differentiation nach x_i ($i = 1, \dots, n$) aus der Reihe (133) entstehenden Reihen für $\varphi \in \dot{W}_2^1(B)$ in der Norm von $L_2(D_T)$ konvergieren, wobei $D_T = B \times (0, T)$ und T eine beliebige endliche Zahl ist. Das ist der Fall, denn für $m, p \rightarrow \infty$ gilt

$$\int_0^T \left\| \sum_{k=m}^p (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k \right\|_2^2 dt = \sum_{k=m}^p \int_0^T \lambda_k^2 (\varphi, u_k)^2 e^{2\lambda_k t} dt \leq \sum_{k=m}^p \frac{1}{2} |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 \rightarrow 0.$$

Diese Ungleichung sichert auch die Konvergenz der Reihe (134) in $L_2(B)$. Aus der Tatsache, daß das System $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Basis im Raum $W_{2,0}^2(B)$ bildet [150], folgt abschließend, daß für $\varphi \in W_{2,0}^2(B)$ die Reihe (133) in der Norm von $W_2^2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$ konvergiert und ihre Summe ein Element aus $W_{2,0}^2(B)$ ist, das in der Norm von $W_2^2(B)$ stetig von $t \in [0, \infty)$ abhängt. Die Reihe (134) konvergiert dabei in der Norm von $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$, und ihre Summe $v(x, t) = u_t(x, t)$ ist ein Element von $L_2(B)$, das in der Norm von $L_2(B)$ stetig von $t \in [0, \infty)$ abhängt.

Also haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Die Koeffizienten der Gleichung (126) und das Gebiet B mögen den Voraussetzungen von Satz 2 [148] genügen, $c(x)$ sei nichtnegativ und $\varphi \in L_2(B)$. Dann ist die Lösung des Problems (126) bis (128) durch die Reihe (133) gegeben, die in $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$ konvergiert. Für $t > 0$ konvergiert diese Reihe in der Norm von $W_2^2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [\varepsilon, \infty)$, wobei ε eine beliebige positive Zahl ist. Die aus der Reihe (133) durch gliedweise Differentiation nach t entstehende Reihe konvergiert für $t > 0$ in $L_2(B)$ und sogar gleichmäßig für $t \in [\varepsilon, \infty)$. Die Summe der Reihe (133) ist die verallgemeinerte Lösung des Problems (126) bis (128) aus der Klasse M_T (mit beliebigem T), wobei in dieser Klasse der Eindeutigkeitssatz gilt. Für $\varphi \in \dot{W}_2^1(B)$ konvergiert die Reihe (133) in $\dot{W}_2^1(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$, und die aus dieser Reihe durch einmalige gliedweise Differentiation nach t oder zweimalige gliedweise Differentiation nach x hervorgehenden Reihen konvergieren in der Norm von $L_2(D_T)$ ($D_T = B \times (0, T)$). Schließlich konvergiert die Reihe (133) für $\varphi \in W_{2,0}^2(B)$ in der Norm von $W_2^2(B)$ und die Reihe (134) für dieses φ in der Norm von $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$.*

Wir betrachten noch das Problem

$$L(u) = f(x, t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (137)$$

wobei L der Operator aus (126) und $f \in L_2(D_T)$ ist. Formal löst die Summe der Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau u_k(x) \quad (138)$$

mit $f_k(\tau) = \int_B f(x, \tau) u_k(x) dx$ dieses Problem. Wir zeigen, daß die Reihe (138) und die aus ihr durch ein- und zweimalige gliedweise Differentiation nach x hervorgehenden Reihen in der Norm von $L_2(D_T)$ konvergieren, so daß die Summe $u(x, t)$ der Reihe sowie ihre Ableitungen u_{x_i} und $u_{x_i x_k}$ Elemente von $L_2(D_T)$ sind. Dazu genügt es, wenn wir uns davon überzeugen, daß

$$j_{p,m} \equiv \int_0^T \left\| \sum_{k=p}^m \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau u_k(x) \right\|_2^2 dt \quad (139)$$

für $p, m \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Das ist der Fall, denn wegen (132) gilt

$$\begin{aligned} j_{p,m} &= \sum_{k=p}^m \int_0^T \lambda_k^2 \left| \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right|^2 dt \\ &\leq \sum_{k=p}^m \int_0^T \lambda_k^2 \left(\int_0^t f_k^2(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right) \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right) dt \\ &\leq \sum_{k=p}^m |\lambda_k| \int_0^T \int_0^t f_k^2(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau dt \leq \sum_{k=p}^m \int_0^T \int_0^t f_k^2(\tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

während für die Funktion $f(x, t)$ aus $L_2(D_T)$ die Gleichungen

$$\int_B \int_0^T f^2(x, \tau) dx d\tau = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau$$

bestehen. Aus dieser Abschätzung für $j_{p,m}$ folgt auch, daß die aus der Reihe (133) durch gliedweise Differentiation nach t hervorgehende Reihe in $L_2(D_T)$ konvergiert. Da die Partialsummen

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau u_k(x)$$

für fast alle $(x, t) \in D_T$ der Gleichung $L(u^N) = f^N$ mit $f^N(x, t) = \sum_{k=1}^N f_k(t) u_k(x)$ genügen und f^N in der Norm von $L_2(D_T)$ gegen f konvergiert, erfüllt die Summe der Reihe (138) für fast alle (x, t) aus D_T die Gleichung (137). Zum Nachweis der Gültigkeit der Anfangs- und Randbedingungen aus (137) zeigen wir, daß die Reihe (138) in der Norm von $W_2^1(B)$ für beliebiges $t \geq 0$ konvergiert. Unter Verwendung der gleichen Überlegungen wie bei der Abschätzung von $j_{p,m}$ erhalten wir in der Tat die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau u_k(x) \right\|_1^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \left| \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k^2(\tau) d\tau = \int_0^t \int_B |f(x, \tau)|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Daraus geht deutlich hervor, daß die Summe $u(x, t)$ für beliebiges $t \geq 0$ in $\dot{W}_2^1(B)$ liegt und daß $\|u(x, t)\|_1 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ gilt.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. Sind bezüglich L und B die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt und gilt $f \in L_2(D_T)$ mit $D_T = B \times (0, T)$, so ist die Lösung des Problems (137) in D_T durch die Reihe (138) gegeben. Diese Reihe und die aus ihr durch gliedweise Differentiation nach t bzw. zweimalige gliedweise Differentiation nach x hervorgehenden Reihen konvergieren in der Norm von $L_2(D_T)$. Die Summe der Reihe (138) genügt für fast alle $(x, t) \in D_T$ der Gleichung (137), für alle $t \in [0, T]$ liegt sie in $\dot{W}_2^1(B)$, und für $t \rightarrow 0$ gilt $\|u(x, t)\|^{(1)} \rightarrow 0$.

Bemerkung. Lösungen des zweiten und dritten Anfangs-Randwertproblems für die Gleichung $L(u) = f(x, t)$ kann man durch Reihen der Gestalt (133) und (138) erklären. Man muß dabei an Stelle der $u_k(x)$ die der jeweiligen Randbedingung entsprechenden Eigenfunktionen von L wählen.

164. Die zweite grundlegende Ungleichung und die Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems. Wir beschreiben, wie man die Lösbarkeit des Problems (113), (127), (128) in der Funktionenklasse $W_2^{2,1}(D_T)$ ($D_T = B \times (0, T)$) beweisen kann, wobei in $W_2^{2,1}(D_T)$ alle diejenigen Funktionen $u(x, t)$ aus $L_2(D_T)$ liegen, deren verallgemeinerte Ableitungen $u, u_{x_i}, u_{x_i x_k}$ Elemente des Raumes $L_2(D_T)$ sind. Diese Menge kann man als vollständigen Hilbertschen Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{2,D_T}^{(2,1)} = \int_{D_T} (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx} + u_t v_t) dx dt \quad (140)$$

auffassen (hier wurden die in [145, 146] eingeführten abkürzenden Bezeichnungen benutzt). Die Norm in $W_2^{2,1}(D_T)$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{2,D_T}^{(2,1)}$. Wir erklären $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$

als den Teilraum des Raumes $W_2^{2,1}(D_T)$, den man durch die Abschließung der Menge aller Funktionen aus $C^2(\bar{D}_T)$, die auf der Mantelfläche S_T des Zylinders D_T verschwinden, in der Norm von $W_2^{2,1}(D_T)$ erhält. Wir setzen voraus, daß das Gebiet B den Voraussetzungen von Satz 2 [148] genügt und daß die Koeffizienten von M die Bedingungen (114) bis (116) sowie die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial a_{ik}(x, t)}{\partial t} \right| \leq \mu_3 \quad (141)$$

erfüllen. Wir beweisen, daß für parabolische Operatoren M eine Ungleichung gilt, die in ihrem Charakter eng mit der Ungleichung (434) aus [146] verwandt ist. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau = \int_{D_t} [u_\tau - L(u)]^2 dx d\tau \quad (D_t = B \times (0, t))$$

mit

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x, t) u_{x_k}) - b_i(x, t) u_{x_i} - c(x, t) u$$

für beliebige Funktionen $u(x, t)$ aus $C^2(\bar{D}_T)$, die auf S_T verschwinden. Wir formen dieses Integral mit Hilfe der Formel über die partielle Integration (107) [48] auf die folgende Weise um:

$$\begin{aligned} & \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau \\ &= \int_{D_t} [u_\tau^2 + (L(u))^2 + 2a_{ik}u_{x_k}u_{x_i} + 2(b_i u_{x_i} + cu) u_\tau] dx d\tau \\ &= \int_{D_t} \left[u_\tau^2 + (L(u))^2 + \frac{\partial}{\partial \tau} (a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}) - \frac{\partial a_{ik}}{\partial \tau} u_{x_i}u_{x_k} + 2(b_i u_{x_i} + cu) u_\tau \right] dx d\tau. \end{aligned} \quad (142)$$

Aus dieser Gleichung sowie den Voraussetzungen (116), (141) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k} dx + \int_{D_t} [u_\tau^2 + (L(u))^2] dx d\tau \\ & \leq \int_{B(0)} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k} dx + C_1 \int_{D_t} [\varepsilon u_\tau^2 + (1 + \varepsilon^{-1})(u_x^2 + u^2)] dx d\tau + \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (143)$$

wobei die darin auftretende Konstante C_1 nur von μ_2 und μ_3 abhängt und ε eine beliebige positive Zahl ist.¹⁾ Wir benutzen nun die Ungleichung (452) [146]. Unter Ausnutzung dieser Ungleichung erhalten wir aus (143) vermöge (114) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & v \int_{B(t)} u_x^2 dx + \int_{D_t} \left[u_\tau^2 + \frac{v^2}{4} (u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) \right] dx d\tau \\ & \leq \mu \int_{B(0)} u_x^2 dx + C_2 \int_{D_t} [\varepsilon u_\tau^2 + (1 + \varepsilon^{-1})(u_x^2 + u^2)] dx d\tau + \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (144)$$

Hier hängt die Konstante C_2 von v , μ , μ_i und dem Gebiet B ab. Wir wählen in (144) $\varepsilon = (2C_2)^{-1}$. Dann erhalten wir nach Vergrößerung von (144) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} u_x^2 dx + \int_{D_t} (2u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) dx d\tau \\ & \leq C_3 \left[\int_{B(0)} u_x^2 dx + \int_{D_t} (u_x^2 + u^2) dx d\tau + \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau \right]. \end{aligned} \quad (145)$$

¹⁾ Mit $B(t)$ und $B(0)$ bezeichnen wir die obere und untere Deckfläche des Zylinders D_t .

Wegen der Ungleichung

$$\int_{B(t)} u^2 dx \leq \int_{B(0)} u^2 dx + \int_{D_t} (u_\tau^2 + u^2) d\tau, \quad (146)$$

die man leicht aus der Newton-Leibnizschen Formel für $u^2(x, t)$ mittels der Bunjakowskischen Ungleichung (siehe (198) [56]) ableiten kann, ergibt sich aus (145)

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) dx + \int_{D_t} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) dx d\tau \\ & \leq C_4 \left[\int_{B(0)} (u_x^2 + u^2) dx + \int_{D_t} (u_x^2 + u^2) dx d\tau + \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau \right]. \end{aligned} \quad (147)$$

Mit dem Hilfssatz aus [56] erhält man (ähnlich wie (124)) daraus die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) dx + \int_{D_t} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) dx d\tau \\ & \leq C_4 e^{C_1 t} \left[\int_{B(0)} (u_x^2 + u^2) dx + \int_{D_t} (M(u))^2 dx d\tau \right]. \end{aligned} \quad (148)$$

Die Ungleichung (148) wird auch *zweite grundlegende Ungleichung* für den parabolischen Operator M unter der Bedingung (127) genannt. Sie wurde für beliebige Funktionen $u(x, t)$ aus $C^2(\bar{D}_T)$, die auf S_T verschwinden, hergeleitet. Wir zeigen, daß für solche Funktionen die Integrale $(\int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) dx)^{1/2}$ ($t \in [0, T]$) durch $\|u\|_{2,D_T}^{(2,1)}$ nach oben abgeschätzt werden können. Dazu wählen wir eine beliebige nichtnegative, glatte Funktion $\chi(t)$, die für $t \in [\frac{T}{2}, T]$ den Wert 1 und für $t \in [0, \frac{T}{4}]$ den Wert 0 annimmt, und richten unsere Aufmerksamkeit auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) \chi dx &= \int_0^t \int_{B(\tau)} \left[\frac{d}{d\tau} (u_x^2 + u^2) \chi \right] dx d\tau \\ &= \int_{D_t} (2u_x u_{x\tau} \chi + u_x^2 \chi' + 2u u_\tau \chi + u^2 \chi') dx d\tau \\ &= \int_{D_t} (-2u_\tau \Delta u \chi + u_x^2 \chi' + 2u u_\tau \chi + u^2 \chi') dx d\tau. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt für $t \in [\frac{T}{2}, T]$ die Ungleichung

$$\int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) dx \leq C_5 \int_{D_T} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) dx d\tau. \quad (149)$$

Diese Ungleichung gilt auch für $t \in [0, \frac{T}{2}]$. Der Beweis verläuft analog. Es genügt, für $\chi(t)$ eine nichtnegative, glatte Funktion zu wählen, die gleich 1 für $t \in [0, \frac{T}{2}]$ und gleich 0 für $t \in [\frac{3T}{4}, T]$ ist. Auf Grund dessen ist die Norm $\|\cdot\|_{2,D_T}^{(2,1)}$ im Raum $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ mit der Norm

$$\|u\|^* = \max_{0 \leq t \leq T} \left[\int_{B(t)} (u_x^2 + u^2) dx \right]^{1/2} + \|u\|_{2,D_T}^{(2,1)} \quad (150)$$

äquivalent. Aus dieser Tatsache und der von uns für Funktionen u aus $C^2(\bar{D}_T)$, die auf S_T verschwinden, bewiesenen Ungleichung (148) folgt die Gültigkeit von

(148) für alle Elemente u aus $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$. Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man die eindeutige Lösbarkeit des Problems (113), (127), (128) für beliebige $f(x, t) \in L_2(D_T)$ und $\varphi(x) \in \dot{W}_2^1(B)$ nachweisen. Daneben muß man die Methode der Fortsetzung nach einem Parameter (vgl. [148]) und die Sätze aus [163] ausnutzen. Namentlich muß man das System von Problemen

$$\begin{aligned} M_\tau(u) &\equiv (1 - \tau) M_0(u) + \tau M_1(u) = f, \\ u|_{S_T} &= 0, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \tau \in [0, 1] \end{aligned} \quad (151)$$

mit $M_0(u) = u_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ und $M_1(u) = M(u)$ sowie das Paar Hilbertscher Räume $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ und $W = L_2(D_T) \times \dot{W}_2^1(B)$ betrachten. Elemente des Raumes W sind Paare von Funktionen $\{f(x, t); \varphi(x)\}$; das Skalarprodukt erklären wir durch die Gleichung

$$(\{f; \varphi\}, \{\tilde{f}; \tilde{\varphi}\})_W = \int_{D_T} f \tilde{f} \, dx \, dt + \int_B (\varphi_x \tilde{\varphi}_x + \varphi \tilde{\varphi}) \, dx.$$

Die Probleme (151) kann man als System von Operatorgleichungen

$$A_\tau(u) = \{f; \varphi\} \quad (\tau \in [0, 1]) \quad (152)$$

interpretieren, wobei die Operatoren A_τ durch die Gleichungen

$$A_\tau(u) = \{M_\tau(u); u|_{t=0}\} \quad (\tau \in [0, 1]) \quad (153)$$

erklärt sind. Die Operatoren A_τ transformieren den Raum $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ in den Raum W . Die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (152) für $\tau=0$ und beliebiges $\{f; \varphi\}$ aus W wurde in den Sätzen von [163] bewiesen. Daher kann man leicht mit Hilfe der Ungleichungen (149) und (148) [letztere gilt für alle M_τ ($\tau \in [0, 1]$) mit einer Konstanten C_4 , die unabhängig von τ gewählt werden kann] die eindeutige Lösbarkeit aller Probleme (152) für beliebiges $\{f; \varphi\}$ aus W beweisen. Wir führen diese Überlegungen hier nicht durch (sie verlaufen völlig analog zum Beweis von Satz 1 [148]) und formulieren nur das Endergebnis:

Satz. Für die Koeffizienten von M aus (113) setzen die Bedingungen (114) bis (116), (141) und für das Gebiet B die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt. Dann ist das Problem (113), (127), (128) in $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ ($D_T = B \times (0, T)$) für beliebige f aus $L_2(D_T)$ und φ aus $\dot{W}_2^1(B)$ eindeutig lösbar.

165. Hyperbolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung für das erste Anfangs-Randwertproblem. In den verbleibenden Abschnitten des Buches widmen wir uns dem ersten Anfangs-Randwertproblem für Gleichungen vom hyperbolischen Typus. Wir betrachten im Gebiet $D_T = B \times (0, T)$ des euklidischen Raumes R^{n+1} wie in [56] Gleichungen der Gestalt

$$M(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f. \quad (154)$$

Die räumlichen Veränderlichen $x = (x_1, \dots, x_n)$ variieren im Gebiet B des R^n , die zeitliche Veränderliche t variiert im Intervall $(0, T)$. Die Koeffizienten der Gleichung (154) und die Störfunktion f können von (x, t) abhängen. Bezüglich der Koeffizienten setzen wir voraus, daß es sich um beschränkte, meßbare Funktionen auf D_T handelt, wobei die a_{ik} bezüglich x und t differenzierbar und ihre Ableitungen (im allgemeinen Fall handelt es sich um verallgemeinerte Ableitungen) $\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$, $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x}$ auf D_T

beschränkt sind. Die Störfunktion f sei ein Element aus $L_2(D_T)$. Der hyperbolische Typus der Gleichung (154) wird durch die Bedingung

$$a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (155)$$

garantiert, wobei ν eine positive Konstante und ξ_i beliebige reelle Parameter sind (wie überall setzen wir $a_{ik} = a_{ki}$ voraus). Wir formulieren für die Gleichung (154) im Gebiet D_T das erste Anfangs-Randwertproblem. Es besteht darin, eine Funktion $u(x, t)$ zu finden, die in D_T der Gleichung (154), auf der unteren Basisfläche von D_T den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \in B) \quad (156)$$

und auf der Mantelfläche von D_T der Randbedingung

$$u|_{S_T} = 0 \quad (S_T = S \times [0, T]) \quad (157)$$

genügt. Hier ist S der Rand von B . Mit anderen Worten: Wir bestimmen eine Lösung $u(x, t)$ der Gleichung (154) im Gebiet B des euklidischen Raumes R^n zum Zeitpunkt $t \in (0, T)$, die zur Anfangszeit den Cauchyschen Bedingungen (156) genügt und zu allen Zeitpunkten auf dem Rand des Gebietes B verschwindet.

Wir zeigen, daß dieses Problem sachgemäß gestellt ist, d. h., daß es höchstens eine Lösung besitzt und daß diese Lösung stetig von den Anfangswerten und der Störfunktion der Gleichung abhängt. Die Stetigkeit wird im Sinne von Integralnormen verstanden, die mit Hilfe der energetischen Ungleichung erklärt werden. Diese Ungleichung leiten wir jetzt her. Die Lösbarkeit des Problems (154), (156), (157) beweisen wir im nächsten Abschnitt, allerdings nicht für die gesamte Klasse von Gleichungen (154), zumindest aber für diejenigen Gleichungen, für die die Lösungen eine gute Darstellung als Fourierreihe besitzen. Hier und auch weiter unten haben wir es mit verallgemeinerten Lösungen der Klasse $W_2^2(D_T)$ zu tun. Sie genügen der Gleichung (154) für Lebesgue-fast-alle Punkte $(x, t) \in D_T$. Die Elemente $u(x, t)$ dieser Klasse gehören für jedes $t \in [0, T]$ zu $W_2^1(B)$ und hängen in der Norm dieses Raumes stetig von t ab (d. h., für $t, t + \Delta t \in [0, T]$ strebt die Norm $\|u(x, t) - u(x, t + \Delta t)\|_{2, B}^{(1)}$ bei $\Delta t \rightarrow 0$ gegen 0). Ihre Ableitung $u_t(x, t)$ ist für alle $t \in [0, T]$ Element des $L_2(B)$ und hängt in der Norm von $L_2(B)$ stetig von t ab. Dementsprechend versteht man die Anfangsbedingungen im folgenden Sinne: Für $t \rightarrow +0$ gilt

$$\|u(x, t) - \varphi(x)\|_{2, B}^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|u_t(x, t) - \psi(x)\|_{2, B} \rightarrow 0.$$

Die Bedingung (157) ist so zu verstehen, daß $u(x, t)$ für alle $t \in [0, T]$ in $\dot{W}_2^1(B)$ liegt (detailliertere Angaben über die Räume W_2^1 findet man in [V, Kap. IV]). Bezüglich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist es natürlich,

$$\varphi(x) \in \dot{W}_2^1(B), \quad \psi \in L_2(B) \quad (158)$$

vorauszusetzen.

Die Herleitung der energetischen Ungleichung für die Lösung (hier und im folgenden lassen wir das einschränkende Adjektiv „verallgemeinerte“ weg und setzen voraus, daß es sich – falls nichts Gegenteiliges gesagt wird – stets um verallgemeinerte Lösungen der Klasse $W_2^2(D_T)$ handelt) des Problems (154), (156), (157) verläuft analog zur Herleitung der energetischen Ungleichung für die Lösung des Cauchyschen Problems, wie sie in [56] vorgenommen wurde; sie ist jedoch einfacher als letztere, denn wegen der Bedingung (157) verschwinden hier die Integrale über

die Mantelfläche S_T . Wir übernehmen aus [56] eine Reihe von Bezeichnungen und Abschätzungen. Genauer gesagt bezeichnen wir mit $K(t)$ das Integral

$$K(t) = \int_{B(t)} (a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_t^2) dx,$$

wobei $B(t_0)$ den Schnitt des Zylinders D_T mit der Ebene $t = t_0$ darstellt sowie mit D_{t_1} für $t_1 \leq T$ den Zylinder $B \times (0, t_1)$. Wir multiplizieren die Gleichung (154) mit $-2u_t$ und integrieren das Ergebnis über D_t :

$$- \int_{D_t} 2M(u) u_t dx dt = - \int_{D_t} 2f u_t dx dt. \quad (159)$$

Die linke Seite von (159) stellen wir anders dar, indem wir einen Teil der darin eingehenden Summanden mittels partieller Integration auf folgende Weise umformen:

$$\begin{aligned} \int_{D_t} 2u_{tt} u_t dx dt &= \int_{D_t} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 dx dt = \int_{B(t)} u_t^2 dx - \int_{B(0)} u_t^2 dx, \\ - \int_{D_t} 2a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} u_t dx dt &= \int_{D_t} \left(2a_{ik} u_{x_i} u_{tx_k} + 2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} u_{x_i} u_t \right) dx dt \\ &= \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a_{ik} u_{x_i} u_{x_k}) - \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} + 2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} u_{x_i} u_t \right] dx dt \\ &= \int_{B(t)} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} dx - \int_{B(0)} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} dx \\ &\quad + \int_{D_t} \left(- \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} + 2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} u_{x_i} u_t \right) dx dt. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichungen haben wir $u|_{S_T} = 0$ und die sich daraus ergebende Tatsache $u_t|_{S_T} = 0$ benutzt. Wegen dieser Gleichungen ist (159) mit der folgenden Gleichung gleichwertig:

$$K(t) = K(0) + \int_{D_t} \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} - 2 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} u_{x_i} u_t + 2b_i u_{x_i} u_t + 2cu u_t - 2f u_t \right] dx dt. \quad (160)$$

Die weiteren Abschätzungen des Integrals $\int_{D_t}$ der rechten Seite von (160) verlaufen völlig analog zu den in [56] durchgeführten Abschätzungen (dabei ist es nicht von Belang, daß es sich hier bei D_t um einen Zylinder und nicht um einen Kegel handelt). Wir wiederholen sie daher hier nicht und notieren die im Ergebnis dieser Abschätzungen aus (160) hervorgehende *energetische Ungleichung*. Sie hat die Gestalt

$$\int_{B(t)} (u_t^2 + a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u^2) dx \leq e^{Ct} \left[\int_{B(0)} (u_t^2 + a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u^2) dx + \int_{D_t} f^2 dx dt \right] \quad (161)$$

(in [56] entspricht ihr die Ungleichung (201)). Die darin auftretende Konstante C wird durch die Koeffizienten von M , genauer gesagt durch die Zahl ν aus der Bedingung (155) sowie die Maxima der Absolutbeträge der Funktionen $\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$, $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} - b_i \right)$ und c im Gebiet D_t bestimmt.

Die Funktionen auf der rechten Seite der Ungleichung (161) sind aus den Bedingungen des Problems bekannt, insbesondere ist das Integral über $B(0)$ gleich $\int_B (\psi^2 + a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k} + \varphi^2) dx$. Aus (161) folgt die Ungleichung

$$\int_{B(t)} (u_i^2 + u_x^2 + u^2) dx \leq e^{Ct} \left[\int_B (\psi^2 + \mu \varphi_x^2 + \varphi^2) dx + \int_{D_t} f^2 dx dt \right] \quad (0 \leq t \leq T), \quad (162)$$

wobei μ die Konstante aus der Ungleichung $a_{ik} \xi_i \xi_k \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ bezeichnet (μ ist also eine Majorante für a_{ik}). Die Ungleichung (162) wird ebenfalls *energetische Ungleichung* genannt. Aus ihr folgt der

Satz 1. *Das Problem (154), (156), (157) besitzt höchstens eine Lösung der Klasse $W_2^2(D_T)$ und diese Lösung hängt stetig von den Anfangswerten sowie der Störfunktion ab.*

Zum Beweis seien $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) zwei Lösungen aus $W_2^2(D_T)$, die den Anfangswerten $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ sowie den Störfunktionen (Kräften) $f_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) entsprechen. Dann ist ihre Differenz $u(x, t)$ eine Lösung dieses Problems aus $W_2^2(D_T)$ für die Anfangswerte $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ sowie die Störfunktion $f(x, t) = f_1(x, t) - f_2(x, t)$. Daher gilt für $u(x, t)$ die Ungleichung (162), woraus die beiden Behauptungen des Satzes folgen.

166. Die Fouriermethode für Gleichungen vom hyperbolischen Typus. Hier beweisen wir die Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems für hyperbolische Gleichungen der Gestalt

$$M(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x) u_{x_k}) + c(x) u - u_{tt} = 0. \quad (163)$$

Wir setzen voraus, daß für den elliptischen Teil $L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik} u_{x_k}) + cu$ dieser Gleichung und für das Gebiet B die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt sind. Folglich besitzt das System der Eigenfunktionen $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ und der Eigenwerte $\{\lambda_k\}$ des Operators L unter der Bedingung $u|_S = 0$ die in [150] beschriebenen Eigenschaften. Wir setzen weiter $c(x) \leq 0$ voraus. Das sichert, daß alle λ_k negativ sind und mit $-\mu_k^2$, $\mu_k > 0$, bezeichnet werden können. Alle Lösungen der Gleichung (163), die die Gestalt $u(x, t) = X(x) T(t)$ haben und der Randbedingung (157) genügen, können mit Hilfe der Funktionen $(a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k(x)$ dargestellt werden, wobei a_k , b_k beliebige Konstanten und $u_k(x)$ die den Eigenwerten $\lambda_k = -\mu_k^2$ entsprechenden Eigenfunktionen sind.

Angesichts dessen ist es natürlich, die Lösungen des Problems (163), (156), (157) in Gestalt der Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k(x) \quad (164)$$

zu suchen und die Koeffizienten a_k , b_k aus den Anfangsbedingungen (156) zu bestimmen. Die erste dieser Bedingungen liefert einen Ausdruck für a_k :

$$a_k = (\varphi, u_k); \quad (165)$$

die zweite einen Ausdruck für b_k :

$$b_k = \frac{1}{\mu_k} (\psi, u_k). \quad (166)$$

Formal genügt diese Reihe allen Forderungen unseres Problems. Unser Ziel ist die Konvergenzuntersuchung dieser Reihe. Insbesondere wollen wir zeigen, daß die Reihe gliedweise zweimal nach x und t differenziert werden kann. Letzteres ist für die Gültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} M(u) &= M \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} M(a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k(x) = 0 \end{aligned} \quad (167)$$

notwendig. Wir überzeugen uns somit davon, daß die Summe der Reihe (164) der Gleichung (163) genügt. Wir beweisen, daß die Reihe (164) und die aus ihr durch ein- und zweimalige gliedweise Differentiation nach x und t hervorgehenden Reihen in der Norm von $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \infty)$ konvergieren. Damit wird gezeigt, daß die Summe der Reihe (164) für fast alle $(x, t) \in D_T$ (darüber hinaus sogar für alle t aus $[0, \infty)$ und fast alle x aus B) der Gleichung (163) genügt. Die Anfangsbedingungen sind im folgenden Sinne erfüllt: Für $t \rightarrow +0$ gilt

$$\|u(x, t) - \varphi(x)\|_{2, B}^{(2)} \rightarrow 0, \quad \|u_t(x, t) - \psi(x)\|_{2, B}^{(1)} \rightarrow 0. \quad (168)$$

Die Randbedingung wird durch die Zugehörigkeit von $u(x, t)$ zum Raum $W_{2,0}^2(B)$ für alle $t \geq 0$ realisiert. Das alles gilt im Fall $\varphi(x) \in W_{2,0}^2(B)$ und $\psi \in \dot{W}_2^1(B)$. In [150] wurde bewiesen, daß man $\varphi(x)$ in eine Fourierreihe $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, u_k) u_k(x)$ entwickeln kann, die in der Norm $\|\cdot\|_2$ gegen φ konvergiert. Dabei gilt

$$\|\varphi\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, u_k)^2 \mu_k^4 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \mu_k^4. \quad (169)$$

Die Funktion ψ kann in eine Fourierreihe $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi, u_k) u_k(x)$ entwickelt werden, die in der Norm $\|\cdot\|_1$ gegen ψ konvergiert. Es gilt

$$\|\psi\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi, u_k)^2 \mu_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \mu_k^4. \quad (170)$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=m}^p (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=m}^p (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)^2 \mu_k^4 \leq 2 \sum_{k=m}^p (a_k^2 + b_k^2) \mu_k^4, \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=m}^p \frac{\partial}{\partial t} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k \right\|_1^2 \\ &= \sum_{k=m}^p \mu_k^2 (-a_k \sin \mu_k t + b_k \cos \mu_k t)^2 \mu_k^2 \leq 2 \sum_{k=m}^p (a_k^2 + b_k^2) \mu_k^4 \end{aligned} \quad (172)$$

und

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=m}^p \frac{\partial^2}{\partial t^2} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) u_k \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=m}^p (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)^2 \mu_k^4 \leq 2 \sum_{k=m}^p (a_k^2 + b_k^2) \mu_k^4. \end{aligned} \quad (173)$$

Kombiniert man die Abschätzungen (171) bis (173) mit (169) und (170), so überzeugt man sich von der Gültigkeit der obigen Behauptungen über die Konvergenz der Reihe (164) und der durch gliedweise Differentiation nach x und t aus ihr hervorgehenden Reihen. Dabei muß man berücksichtigen, daß die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zu den jeweiligen Ausgangsnormen der Räume $\dot{W}_2^1(B)$ bzw. $W_{2,0}^2(B)$ äquivalent sind. Die Zugehörigkeit der Summe $u(x, t)$ der Reihe (164) zu $W_{2,0}^2(B)$ und ihrer Ableitungen $u_t(x, t)$ bzw. $u_{tt}(x, t)$ zu $\dot{W}_2^1(B)$ bzw. $L_2(B)$ für alle $t \geq 0$ folgt aus der nachgewiesenen Konvergenz und der Tatsache, daß die Partialsummen dieser Reihen in $W_{2,0}^2(B)$, $\dot{W}_2^1(B)$ bzw. $L_2(B)$ liegen. Das ist der Beweis für den

Satz 1. Für die Koeffizienten von M und das Gebiet B seien die Voraussetzungen von Satz 2 [148] erfüllt. Weiter sei $c(x) \leq 0$. Gilt dann $\varphi \in W_{2,0}^2(B)$, $\psi \in \dot{W}_2^1(B)$, so ist die Summe $u(x, t)$ der Reihe (164) mit den durch die Formeln (165), (166) bestimmten Koeffizienten a_k, b_k Lösung des Problems (163), (156), (157). Sie liegt für alle $t \geq 0$ im Raum $W_{2,0}^2(B)$ und hängt in der Norm dieses Raumes stetig von t ab. Ihre Ableitungen $u_t(x, t)$ und $u_{tt}(x, t)$ sind Elemente von $\dot{W}_2^1(B)$ bzw. $L_2(B)$, die in den Normen dieser Räume stetig von $t \geq 0$ abhängen. Die durch ein- bzw. zweimalige gliedweise Differentiation nach x und t aus der Reihe (164) hervorgehenden Reihen konvergieren in $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \geq 0$.

Bemerkung 1. Läßt man die Bedingung $c(x) \leq 0$ weg, so bleiben alle Aussagen des Satzes erhalten, nur können einige der ersten Eigenwerte λ_k positiv oder gleich 0 sein. Die zugehörigen Summanden haben dann die Gestalt $(a_k e^{\sqrt{\lambda_k} t} + b_k e^{-\sqrt{\lambda_k} t}) \times u_k(x)$ bzw. $(a_k + b_k t) u_k(x)$. Auf die Konvergenz der Reihe (164) hat das Auftreten einiger dieser Summanden keinen Einfluß: Ihre Summe kann man aus der Reihe (164) in Form eines besonderen Terms abspalten.

Bemerkung 2. Für hyperbolische Gleichungen werden das Cauchysche Problem und die Anfangs-Randwertprobleme auf die gleiche Weise für wachsende und für abnehmende Zeit t gelöst. Die Reihe (164) konvergiert auf die nachgewiesene Art auch für $t \leq 0$.

Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$M(u) = f(x, t) \quad (174)$$

mit dem Differentialausdruck M aus (163). Wir bestimmen ihre Lösung für die homogenen Anfangs- und Randbedingungen

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_T} = 0. \quad (175)$$

Dazu entwickeln wir f in eine Reihe bezüglich $\{u_k\}_{k=1}^\infty$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x, t), u_k(x)) u_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) u_k(x)$$

und bestimmen für die Gleichung

$$M(u) = f_k(t) u_k(x) \quad (176)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen (175) die Lösung $u(x, t)$ in der Gestalt $X(x) T(t)$. Setzen wir $u(x, t) = T_k(t) u_k(x)$, so folgt aus (176) für $T_k(t)$ die Gleichung

$$\lambda_k T_k(t) - T_k''(t) = f_k(t). \quad (177)$$

Die Lösung dieser Gleichung, die für $t=0$ einschließlich ihrer Ableitung verschwindet, ist bekanntlich die Funktion

$$T_k(t) = -\frac{1}{\mu_k} \int_0^t \sin \mu_k(t-\tau) f_k(\tau) d\tau, \quad (178)$$

wobei wie oben $\mu_k^2 = -\lambda_k$ gilt. Die Summe der Reihe

$$u(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \mu_k(t-\tau) d\tau u_k(x) \quad (179)$$

genügt formal allen Bedingungen des Problems (174), (175). Zur Rechtfertigung der Formel (179) muß man zeigen, daß die Reihe (179) genau so konvergiert wie die Reihe (164) in Satz 1. Wir überzeugen uns von der Gültigkeit der folgenden Aussage:

Satz 2. *Bezüglich M und B seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Wenn dann $f \in L_2(D_T)$ gilt, so konvergiert die Reihe (179) in der Norm von $\dot{W}_2^1(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$. Besitzt darüber hinaus $f(x, t)$ die verallgemeinerte Ableitung $f_t(x, t) \in L_2(D_T)$, so konvergieren die Reihe (179) und die aus ihr durch ein- und zweimalige gliedweise Differentiation nach x und t hervorgehenden Reihen in $L_2(B)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$. Im letzten Fall ist die Summe u der Reihe die verallgemeinerte Lösung der Klasse $\dot{W}_2^2(D_T)$ (und sogar etwas besser) des Problems (174), (175).*

Die Behauptungen des Satzes folgen aus den nachstehenden Beziehungen und Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m}^p T_k(t) u_k(x) \right\|_1^2 &= \sum_{k=m}^p \mu_k^2 T_k^2(t) \\ &\leq \sum_{k=m}^p \left(\int_0^t |f_k(\tau)| d\tau \right)^2 \leq T \sum_{k=m}^p \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (180)$$

und

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau = \int_{D_T} f^2(x, t) dx dt. \quad (181)$$

Gilt dazu noch $f_t(x, t) \in L_2(D_T)$, so haben wir

$$\begin{aligned} T_k(t) &= -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^t f_k(\tau) d \cos \mu_k(t-\tau) \\ &= -\frac{1}{\mu_k^2} \left[- \int_0^t f'_k(\tau) \cos \mu_k(t-\tau) d\tau + f_k(t) - f_k(0) \cos \mu_k t \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_k^2} \left[\int_0^t f'_k(\tau) (1 - \cos \mu_k(t-\tau)) d\tau + f_k(0) (1 - \cos \mu_k t) \right]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$T_k^2(t) \leq \frac{8}{\mu_k^2} \left[T \int_0^T (f'_k(\tau))^2 d\tau + f_k^2(0) \right],$$

und deshalb gilt

$$\left\| \sum_{k=m}^p T_k(t) u_k(x) \right\|_2^2 = \sum_{k=m}^p T_k^2(t) \mu_k^2 \leq 8T \sum_{k=m}^p \int_0^T (f'_k(\tau))^2 d\tau + 8 \sum_{k=m}^p f_k^2(0). \quad (182)$$

Aus den Voraussetzungen $f, f_t \in L_2(D_T)$ folgen die Beziehungen $f(x, 0) \in L_2(B)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(0) = \int_B f^2(x, 0) dx \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (f'_k(\tau))^2 d\tau = \int_{D_T} f_t^2(x, t) dx dt.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bei einer größeren Glattheit der Koeffizienten von M , der Funktionen φ, ψ, f , des Randes von B sowie auch bei einer erhöhten Koordinierungsordnung der Anfangs- und Randbedingungen und der Gleichung auf der Punktmenge $\{(x, t) : x \in S, t = 0\}$ verbessert sich die Konvergenz der Reihen (164), (179). Wir geben hier keine exakten Aussagen über diese Abhängigkeit an, sondern verweisen auf das zweite Kapitel des Buches von O. A. LADYSHENSKAJA, Das gemischte Problem für die hyperbolische Gleichung (russ.), Moskau 1953, woraus auch die in diesem Abschnitt dargelegte Thematik entnommen wurde. Von ihr wurde die Konvergenz der Reihen (164), (179) in allen Räumen $W_{1/2}^l(B)$ ($l \geq 1$) unter gewissen, in einem bestimmten Sinne notwendigen Voraussetzungen untersucht. Diese Untersuchungen wurden nicht nur für die erste, sondern auch für die zweite und dritte Randbedingung angestellt. Aus der Konvergenz in $W_{1/2}^l(B)$ und den Einbettungssätzen folgt eine entsprechende Konvergenz in Normen anderer Räume, insbesondere folgt für $l \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ die gleichmäßige Konvergenz. In dem zitierten Buch werden

andere Methoden zur Lösung von Anfangs-Randwertproblemen für hyperbolische Gleichungen begründet, darunter das Differenzenverfahren für die Gleichung (154) in allgemeiner Gestalt. Für die Lösung dieser Probleme kann man auch das Galerkin-Verfahren und die „Funktional“-Methode verwenden. Letztere wird in der Arbeit von O. A. LADYSHENSKAJA, Über die Lösbarkeit grundlegender Randwertprobleme für Gleichungen vom parabolischen und hyperbolischen Typus (russ.), Doklady AN SSSR 97 (1954), 395–398, dargelegt.

Im Zusammenhang damit vergleiche man auch die Arbeiten: O. A. LADYSHENSKAJA, Über die Lösung instationärer Operatorgleichungen (russ.), Matem. sb. 39 (1956), 491–524; O. A. LADYSHENSKAJA, Über instationäre Operatorgleichungen und ihre Anwendungen auf lineare Probleme der mathematischen Physik (russ.), Matem. sb. 45 (1958), 123–158; O. A. LADYSHENSKAJA und M. I. WISCHIK, Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen und einige Klassen von Operatorgleichungen (russ.), Uspechi matem. nauk 11: 6 (1956), 41–97.

Abschließend sei bemerkt, daß man aus der Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems für hyperbolische Gleichungen und der Finitheit des Abhängigkeitsgebietes der Lösung des Cauchyschen Problems (vgl. [56]) leicht die Lösbarkeit des Cauchyschen Problems für hyperbolische Gleichungen folgern kann.

167. Ein Randwertproblem für die Kugel. Wir betrachten nun das Randwertproblem der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (183)$$

für die Kugel. Zunächst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz. Ist $u = \varphi(x, y, z, t) = \varphi(M, t)$ eine in bezug auf die Veränderlichen x, y, z, t homogene Lösung nullten Grades der Differentialgleichung (183), die auf der Kugel

$r=t$ (es ist $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) verschwindet, so ist der Ausdruck

$$u = \int_0^{t-r} \omega(\tau) \varphi(M, t-\tau) d\tau, \quad (184)$$

in dem $\omega(\tau)$ eine beliebige stetige Funktion bezeichnet und die untere Grenze eine beliebige vorgegebene Zahl sein kann, ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (184).

Differenzieren wir die Lösung (184), so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{t-r} \omega(\tau) \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial x} d\tau - \omega(t-r) \varphi(M, r) \frac{x}{r}.$$

Da nach Voraussetzung $\varphi(M, r)=0$ ist, gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{t-r} \omega(\tau) \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial x} d\tau.$$

Durch nochmaliges Differenzieren folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^{t-r} \omega(\tau) \frac{\partial^2 \varphi(M, t-\tau)}{\partial x^2} d\tau - \omega(t-r) \left[\frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial x} \right]_{\tau=t-r} \cdot \frac{x}{r}.$$

Ganz analoge Ausdrücke erhalten wir für die zweiten Ableitungen nach y und z . Für die zweite Ableitung nach t gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^{t-r} \omega(\tau) \frac{\partial^2 \varphi(M, t-\tau)}{\partial t^2} d\tau + \omega(t-r) \left[\frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial t} \right]_{\tau=t-r}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung (183) ein und berücksichtigen, daß $\varphi(M, t-\tau)$ nach Voraussetzung die Differentialgleichung (183) erfüllt, so erhalten wir als Resultat die Beziehung

$$\frac{\omega(t-r)}{r} \left[\frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial t} r + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial z} z \right]_{\tau=t-r} = 0. \quad (185)$$

Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen gilt [I, 154]

$$\frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial t} (t-\tau) + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi(M, t-\tau)}{\partial z} z = 0.$$

Setzen wir $\tau=t-r$, so überzeugen wir uns davon, daß die Beziehung (185) erfüllt ist; folglich liefert der Ausdruck (184) tatsächlich die Lösung der Differentialgleichung (183).

Wir machen nun für die Lösung der Differentialgleichung (183) einen speziellen Ansatz, und zwar

$$u = \psi\left(\frac{t}{r}\right) Y_n(\theta, \varphi), \quad (186)$$

wobei $Y_n(\theta, \varphi)$ eine Kugelfunktion n -ter Ordnung und $\psi(x)$ die gesuchte Funktion ist.

Transformieren wir die Differentialgleichung (131) auf Kugelkoordinaten, so erhalten wir [II, 131]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (187)$$

Setzen wir den Ausdruck (186) ein und berücksichtigen, daß die Kugelfunktion $Y_n(\theta, \varphi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0$$

genügt, so gelangen wir für $\psi\left(\frac{t}{r}\right)$ zu der Differentialgleichung

$$\psi''\left(\frac{t}{r}\right) = \frac{t^2}{r^2} \psi''\left(\frac{t}{r}\right) - n(n+1) \psi\left(\frac{t}{r}\right)$$

oder

$$(1-x^2) \psi''(x) + n(n+1) \psi(x) = 0. \quad (188)$$

Um die Funktion $\psi(x)$ zu ermitteln, erinnern wir an die Differentialgleichung

$$[(1-x^2) P'_n(x)]' + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

der die Legendreschen Polynome genügen [III/2, 105]. Wir führen das Polynom $(n+1)$ -ten Grades

$$Q_{n+1}(x) = \int_1^x P_n(x) dx \quad (189)$$

ein.

Wenn wir beide Seiten der letzten Differentialgleichung über das Intervall $(1, x)$ integrieren, erhalten wir

$$(1-x^2) P'_n(x) + n(n+1) Q_{n+1}(x) = 0$$

oder wegen (189)

$$(1-x^2) Q''_{n+1}(x) + n(n+1) Q_{n+1}(x) = 0.$$

Durch Vergleich mit (188) sehen wir, daß die Funktion

$$u = Q_{n+1}\left(\frac{t}{r}\right) Y_n(\theta, \varphi) \quad (190)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (183) ist. Wegen (189) ist $Q_{n+1}(1) = 0$, d. h., die Lösung (190) verschwindet für $r = t$. Außerdem ist offensichtlich, daß die Lösung (190) eine homogene Funktion nullten Grades in den Veränderlichen x, y, z, t ist. Benutzen wir den Hilfssatz, so finden wir, daß die Funktion

$$u(M, t) + Y_n(\theta, \varphi) \int_0^{t-r} \omega(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau}{r}\right) d\tau \quad (191)$$

bei beliebiger Wahl einer stetigen Funktion $\omega(\tau)$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (183) ist.

Nach diesen einleitenden Überlegungen gehen wir zur Lösung eines Randwertproblems für eine spezielle Form der Randbedingung über. Es sei im Äußeren der Kugel $r = 1$ die Lösung der Differentialgleichung (183) gesucht, die den homogenen Anfangsbedingungen

$$u_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (192)$$

und einer Randbedingung der Gestalt

$$u|_{r=1} = f(t) Y_n(\theta, \varphi) \quad (193)$$

genügt, wobei $f(t)$ eine vorgegebene Funktion bezeichnet. Wir setzen voraus, daß diese Funktion stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und daß

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (194)$$

gilt.

Wir kehren nun zu der Funktion (191) zurück. Ersetzen wir auf ihrer rechten Seite t durch $t+1$, so erhalten wir wiederum eine Lösung der Differentialgleichung (183), da die Koeffizienten dieser Differentialgleichung die Größe t nicht enthalten. Wir suchen die Lösung des gestellten Randwertproblems in der Gestalt

$$u = \begin{cases} Y_n(\theta, \varphi) \int_0^{t+1-\tau} \omega(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{t+1-\tau}{r}\right) d\tau & \text{für } t \geq r-1, \\ 0 & \text{für } t \leq r-1, \end{cases} \quad (195)$$

wobei $\omega(\tau)$ die gesuchte Funktion von τ für $\tau \geq 0$ ist. Aus (195) folgt unmittelbar die erste Bedingung von (192). Differenzieren wir den Ausdruck (195) für $r=1$ nach t und setzen danach $t=0$, so erhalten wir wegen $Q_{n+1}(1)=0$ die zweite Bedingung (192). Die Randbedingung (193) führt zu der Integralgleichung

$$\int_0^t \omega(\tau) Q_{n+1}(t+1-\tau) d\tau = f(t)$$

für $\omega(\tau)$.

Diese Integralgleichung ist eine Volterrasche Integralgleichung erster Art. Differenzieren wir beide Seiten, so erhalten wir die Integralgleichung

$$\int_0^t \omega(\tau) P_n(t+1-\tau) d\tau = f'(t),$$

die wegen (194) der vorhergehenden Integralgleichung gleichwertig ist. Differenzieren wir noch einmal, so erhalten wir wegen (194) die gleichwertige Integralgleichung zweiter Art

$$\omega(t) + \int_0^t \omega(\tau) P'_n(t+1-\tau) d\tau = f'(t).$$

Die Kerne dieser Integralgleichungen hängen nur von der Differenz $t-\tau$ ab. Wenden wir die in [IV/1, 53] entwickelte Methode an, so erhalten wir die Lösung in der Gestalt

$$\omega(t) = f''(t) - \int_0^t H(t-x) f''(x) dx,$$

wobei $H(z)$ die Summe der Residuen der Funktion

$$\frac{-s^n}{s^n + s^{n-1}P'_n(1) + s^{n-2}P''_n(1) + \dots + P_n^{(n)}(1)} e^{sz}$$

ist.

Die Randbedingung (193) gilt erst vom Zeitpunkt $t=0$ ab. Bis zu diesem Zeitpunkt herrscht Ruhe. Die Front der Erregung bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1. Im Äußeren der Kugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius $t+1$ herrscht wegen (195) im Zeitpunkt t Ruhe. Auf der Wellenfront können die Ableitungen zweiter Ordnung unstetig sein. Beliebige stetige Randwerte können auf der Kugeloberfläche im Mittel durch Linearkombinationen von Randwerten der Gestalt (193) angenähert werden. Dies folgt aus der Vollständigkeit der Kugelfunktionen. Die angegebene Methode kann man auch im ebenen Fall für

das Außengebiet eines Kreises anwenden. (Vgl. W. I. SMIRNOW, Doklady AN SSSR (1937).)

168. Die Schwingungen des Innengebietes einer Kugel. Wir konstruieren jetzt die Lösung der Differentialgleichung (183) unter den Bedingungen (192) und (193) für das Innengebiet einer Kugel. Ist $n \geq 1$, so ist, wie man leicht zeigen kann, $Q_{n+1}(x)$ eine gerade Funktion bei geradem $n+1$ und eine ungerade Funktion bei ungeradem $n+1$; die Lösung (191) können wir in der Gestalt

$$u_1(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int_0^{t-r} \omega_1(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{\tau-t}{r}\right) d\tau \quad (196)$$

schreiben. Ersetzen wir auf der rechten Seite t durch $t-1$, so erhalten wir eine Lösung der Gestalt

$$u_2(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int_0^{t+r-1} \omega_2(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right) d\tau, \quad (197)$$

wobei $\omega_2(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ ist. Dieser Lösung entspricht eine Welle, die von der Kugeloberfläche ins Innere läuft. Für $t > 1$ ist sie im Mittelpunkt der Kugel, d. h. für $r = 0$, nicht mehr endlich. Für $t = 1$ gelangt die entsprechende Welle bis zum Mittelpunkt der Kugel, und es ist natürlich, zu dieser Lösung eine aus (191) hervorgehende Lösung hinzuzufügen, in der t durch $t-1$ ersetzt und $\omega(\tau)$ in spezieller Weise ausgewählt wird. Dies führt zu einer Lösung der Gestalt

$$u_3(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int_{t-1-r}^{t-1+r} \omega_3(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right) d\tau, \quad (198)$$

wobei $\omega_3(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ ist.

Innerhalb der Integrationsgrenzen gilt $-r \leq \tau + 1 - t \leq r$, und die Lösung (198) bleibt auch für $r = 0$ endlich. Sie verschwindet dort sogar. Damit wir über die Ableitungen der Funktionen $f(t)$, die in der Randbedingung (193) vorkommt, weniger voraussetzen brauchen, wählen wir als Grundlösung diejenige Lösung, die aus (198) durch Differentiation nach t hervorgeht. Wegen $Q_{n+1}(\pm 1) = 0$ für $n \geq 1$ erhalten wir die Lösung

$$u(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \varphi_n(r, t) \quad (199)$$

mit

$$\varphi_n(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{r} \int_{t-1-r}^{t-1+r} \omega(\tau) P_n\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right) d\tau & \text{für } t > 1-r, \\ 0 & \text{für } t \leq 1-r \end{cases} \quad (200)$$

und $\omega(\tau) = 0$ für $\tau \leq 0$. Aus diesem Ausdruck folgt wie in [167], daß für jedes $\omega(\tau)$ die Bedingungen (192) erfüllt sind. Man kann leicht unmittelbar nachprüfen, daß die Ausdrücke (199) und (200) eine Lösung der Differentialgleichung (183) auch für $n = 0$ liefern, wenn $\omega(\tau)$ eine stetige Ableitung besitzt. Wir bemerken, daß der Ausdruck (198) für $n = 0$ keine Lösung der Differentialgleichung (193) darstellt.

Die Randbedingung (193) führt auf die Gleichung

$$\int_{t-2}^t \omega(\tau) P_n(\tau+1-t) d\tau = f(t). \quad (201)$$

Wir setzen voraus, daß $f(t)$ eine stetige Ableitung hat und daß $f(0)=f'(0)=0$ ist. Differenzieren wir die Gleichung (201) nach t , so erhalten wir

$$\omega(t) + (-1)^{n+1} \omega(t-2) - \int_{t-2}^t \omega(\tau) P'_n(\tau+1-t) d\tau = f'(t) \quad (n \geq 1) \quad (202_1)$$

und für $n=0$

$$\omega(t) - \omega(t-2) = f'(t). \quad (202_2)$$

Die Integralgleichung (202₁) liefert die Möglichkeit, $\omega(\tau)$ durch die Methode der sukzessiven Approximation zu konstruieren. Zunächst bestimmen wir $\omega(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 2$ aus der Volterraschen Integralgleichung

$$\omega(t) - \int_0^t \omega(\tau) P'_n(\tau+1-t) d\tau = f'(t).$$

Danach bestimmen wir $\omega(t)$ im Intervall $2 < t \leq 4$ aus der Integralgleichung

$$\omega(t) - \int_2^t \omega(\tau) P_n(\tau+1-t) d\tau = f'(t) + (-1)^n \omega(t-2) + \int_0^2 \omega(\tau) P'_n(\tau+1-t) d\tau,$$

deren rechte Seite bekannt ist, usw. Die erhaltene Funktion $\omega(\tau)$ setzen wir in die rechte Seite von (200) ein.

Zur Lösung der Integralgleichung (202₁) kann man auch die einseitige Laplace-Transformation benutzen. Diese Methode wollen wir in großen Zügen skizzieren. Eine endgültige Lösungsformel werden wir auf anderem Wege erhalten.

In der Integralgleichung (202₁) stellen wir das Integral als Summe zweier Integrale mit der unteren Grenze 0 dar, multiplizieren beide Seiten mit e^{-st} , wobei $s = \sigma_1 + \sigma_2 i$ und σ_1 eine hinreichend große positive Zahl ist, und integrieren über t im Intervall $0 \leq t < \infty$. Wir führen die Bezeichnungen

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-st} \omega(t) dt, \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (203)$$

ein und benutzen den Faltungssatz (vgl. [IV/1, 52]) sowie die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} P_n(1-t) dt &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)} e^{-s} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is), \\ \int_0^\infty e^{-st} P_n(-1-t) dt &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{i\frac{\pi}{4}(2n-1)} e^s H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is). \end{aligned} \quad (204)$$

Diese Beziehungen erhält man leicht durch unmittelbare Ausführung der Integration auf den linken Seiten. Das angegebene Verfahren führt zu der folgenden Gleichung für $\Omega(s)$:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{s}} e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)} e^{-s} J_{n+\frac{1}{2}}(-is) \Omega(s) = F(s).$$

Unter Benutzung der Umkehrformel für die Laplacetransformation erhalten wir

$$\omega(t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(2n+1)}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sqrt{\frac{s}{2\pi}} \frac{e^{(t+1)s} F(s)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} ds. \quad (205)$$

Die reelle Zahl σ wird so groß gewählt, daß alle Singularitäten der Funktion $F(s)$ links von der Integrationsgeraden liegen.

Der Beweis, daß wir die Laplacetransformation und die inverse Transformation anwenden können, wird im vorliegenden Fall dadurch erleichtert, daß wir mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation die Existenz von $\omega(t)$ bereits bewiesen haben und diese Funktion für große t abschätzen können, wenn wir $f'(t)$ gewissen Bedingungen für große t unterwerfen. Setzen wir den Ausdruck (205) in (200) ein, ändern die Reihenfolge der Integrationen und benutzen die leicht zu beweisende Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} e^{px} P_n(x) dx = \sqrt{2\pi} e^{\frac{i\pi}{4}(2n+1)} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-ip)}{\sqrt{p}}, \quad (206)$$

so erhalten wir

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r} 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s) e^{st} ds \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (207)$$

Diesen Ausdruck können wir auch auf kürzerem Wege erhalten. Setzen wir den Ausdruck (199) in die Differentialgleichung (183) ein und benutzen die Differentialgleichung für $Y_n(\theta, \varphi)$, so erhalten wir für $\varphi_n(r, t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \varphi_n. \quad (208)$$

Zu dieser Differentialgleichung müssen wir noch die Bedingungen

$$\varphi_n|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (209)$$

$$\varphi_n|_{r=1} = f(t) \quad (210)$$

hinzufügen.

Multiplizieren wir beide Seiten der Differentialgleichung (208) mit e^{-st} , integrieren über t im Intervall $0 \leq t < \infty$ und berücksichtigen die Bedingungen (209), so erhalten wir für die Funktion

$$X_n(r, s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(r, t) dt \quad (211)$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 X_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dX_n}{dr} + \left(-s^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) X_n = 0. \quad (212)$$

Die Anwendung der Laplacetransformation auf (210) liefert

$$X_n|_{r=1} = F(s). \quad (213)$$

Außerdem muß die Funktion $X_n(r, s)$ für $r=0$ endlich sein. Die Differentialgleichung (212) führt zur Besselschen Differentialgleichung, und unter Anwendung der Beziehung (213) und der Endlichkeit von X_n für $r=0$ erhalten wir

$$X_n(r, s) = \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s).$$

Die Umkehrung der Transformation (221) führt gerade auf die Lösungsformel (207).

Die Bedingungen für $f(t)$, unter denen die Laplacetransformation anwendbar ist und die Lösungsformel (207) gilt, findet man in der Arbeit von G. I. PETRASCHEN, Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie im Fall einer isotropen Kugel, Utsch. Zap. LGU, ser. matem. nauk, Nr. 21 (1950). Der Stoff des vorliegenden und des folgenden Abschnittes ist dieser Arbeit entnommen.

169. Untersuchung der Lösung. Wir untersuchen nun die erhaltene Lösung

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r} 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s) e^{st} ds. \quad (214)$$

Beispielsweise nehmen wir an, daß die Funktion $f(t)$ außerhalb eines endlichen Intervalls $[0, T]$ gleich 0 ist, eine stetige Ableitung bis zur zweiten Ordnung besitzt und den Bedingungen

$$f(0) = f'(0) = f(T) = f'(T) = 0$$

genügt. Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s^2} \int_0^T e^{-st} f''(t) dt. \quad (215)$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $F(s)$ von der Gestalt

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) e^{-sT} \quad (216)$$

ist, wobei $F_1(s)$ und $F_2(s)$ rationale Funktionen sind, bei denen der Grad des Nenners wenigstens um 2 größer ist als der Grad des Zählers. Es läßt sich leicht verifizieren, daß die Funktion $F(s)$ beispielsweise in den beiden Fällen

$$f(t) = t^2(T-t)^2, \quad f(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{T} \quad (0 \leq t \leq T)$$

diese Eigenschaft besitzt. Wie man aus der Beziehung (215) erkennt, ist $F(s)$ in diesen Fällen eine ganze Funktion.

Die Funktion $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ hat rein imaginäre Nullstellen, die wir mit $\pm k_s i$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) bezeichnen, wobei k_s die Wurzeln der Gleichung $J_{n+\frac{1}{2}}(k) = 0$ sind [III/2, 146].

Wir benutzen die Beziehung

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2} [H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) + H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) i]$$

und die Ausdrücke

$$\begin{aligned} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[1 + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[1 + \varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\right] \end{aligned} \quad (217)$$

für die Hankelschen Funktionen; dabei sind $\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)$ Polynome in bezug auf $\frac{1}{z}$ ohne Absolutglied [III/2, 149]. Setzen wir $z = -is$, so können wir uns leicht

davon überzeugen, daß in allen Punkten des Integrationsweges für hinreichend große σ der absolute Betrag des Bruches

$$\frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)}$$

nicht größer ist als eine bestimmte Zahl, die kleiner ist als 1. Berücksichtigen wir dies, so können wir

$$\begin{aligned} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} &= \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-irs)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \right]^p \\ &\quad + \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-irs)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \right]^p \end{aligned}$$

schreiben. Setzen wir diesen Ausdruck in die Lösungsformel (214) ein und integrieren die Reihe gliedweise, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_n(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-irs)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \left[\frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \right]^p F(s) e^{st} ds \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-irs)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \left[\frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(-is)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(-is)} \right]^p F(s) e^{st} ds. \quad (218) \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß auf der rechten Seite in Wirklichkeit nur endlich viele Summanden vorhanden sind und daß die Anzahl dieser Summanden mit wachsendem t zunimmt. Wir betrachten beispielsweise die Summanden der ersten Summe. Unter Benutzung der Ausdrücke (217) können wir die in dieser Summe vorkommenden Integrale in der Gestalt

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) [1 + O(|z|^{-1})] e^{s[t-(2p+1)+r]} ds \quad (219)$$

schreiben. Die Zahl p sei so groß, daß

$$t - (2p + 1) + r < 0 \quad (220)$$

gilt. Wir schlagen rechts von der Integrationsgeraden einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt σ und hinreichend großem Radius R . Berücksichtigen wir den Ausdruck (216) für $F(s)$ und die angegebenen Eigenschaften von $F_1(s)$ und $F_2(s)$, so finden wir, daß unter der Bedingung (220) das über diesen Halbkreis genommene Integral (219) bei unbeschränkt wachsendem R gegen 0 strebt.

Andererseits ist das Integral über die geschlossene Kurve, die durch diesen Halbkreis und die Strecke $-R \leq \sigma_1 \leq R$ der Integrationsgeraden des Integrals (219) gebildet wird, gleich 0, da im Innern dieser Kurve keine singulären Punkte des Integranden existieren. Hieraus folgt, daß das Integral (219) gleich 0 ist, wenn die Bedingung (220) erfüllt ist. Ebenso sind die Summanden der zweiten Summe auf der rechten Seite von (218) gleich 0, wenn die Bedingung

$$t - (2p + 1) - r < 0 \quad (221)$$

erfüllt ist. Die übrigen Summanden beschreiben Kugelwellen, die an der Kugelfläche $r=1$ mehrmals reflektiert werden. Unter Benutzung der ersten Beziehung (204) kann man leicht zeigen, daß der Integrand der auf der rechten Seite von (218) stehenden Integrale in einem endlichen Bereich nur endlich viele singuläre Punkte besitzt, die als Wurzeln der Gleichung

$$z^n - P'_n(1) z^{n-1} + \dots + (-1)^n P_n^{(n)}(1) = 0$$

bestimmt sind, und daß der Wert des Integrals die Summe der Residuen in diesen Polen ist, d. h., die angegebenen Integrale lassen sich durch elementare Funktionen ausdrücken.

Die Diskussion der Lösungsformel (214) führt somit auf die „D'Alembertsche Methode“ zur Berechnung der Schwingungen einer Kugel unter der Randbedingung (193).

Wir führen noch eine andere Umformung der Lösungsformel (214) durch, die zur „Fouriermethode“ oder genauer zur Entwicklung der Lösung des Problems in eine Reihe nach den Eigenschwingungen der Kugel führt. Wir setzen in (214) für $F(s)$ den Ausdruck (216) ein. Beim Einsetzen der Summanden $F_2 e^{-sT}$ enthält der Integrand den Faktor $e^{s(t-T)}$, und wie vorhin kann man zeigen, daß das zugehörige Integral für $t < T$ verschwindet, daß also

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r} 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F_1(s) e^{st} ds \quad (222)$$

gilt. Der Wert dieses Integrals ist gleich der Summe der Residuen seines Integranden, und unter der Annahme, daß kein Pol von $F(s)$ mit einer Nullstelle von $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ übereinstimmt (also keine Resonanz vorliegt), läßt sich zeigen, daß

$$\varphi_n(r, t) = \psi_n(r, t) - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p \sin(k_p t + \omega_p)}{J_{n-\frac{1}{2}}(k_p)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_p r)}{\sqrt{r}} \quad (223)$$

ist, wobei $\psi_n(r, t)$ die Summe der Residuen in den Polen von $F_1(s)$ angibt und

$$F_1(k_p i) = A_p e^{i\omega_p}$$

gesetzt wurde. Man kann zeigen, daß diese Reihe unter unseren Voraussetzungen für $F_1(s)$ in bezug auf t und r gleichmäßig konvergiert. Sie stellt die Entwicklung nach den Eigenschwingungen des Systems dar. Hieraus folgt, daß der Summand $\psi_p(r, t)$, der sich in endlicher Gestalt darstellen läßt, die Differentialgleichung (183) und die Randbedingung (193) erfüllt. Stimmt ein Pol von $F_1(s)$ mit einer Nullstelle von $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$

überein, so erscheint auf der rechten Seite von (223) ein Resonanzglied, welches t auch außerhalb der Argumente trigonometrischer Funktionen enthält.

Im Fall $t > T$ erhalten wir nur die Reihe nach den Eigenschwingungen, da $F(s)$ eine ganze Funktion ist, und für $t > T$ können wir das Jordansche Lemma [III/2, 60] für ein System von Halbkreisen mit dem Mittelpunkt σ_1 auf den Integranden anwenden, in dem $F(s)$ vorkommt. Für $t < T$ haben wir keine entsprechenden Abschätzungen des Integranden auf den angegebenen Halbkreisen. Das Fehlen eines zusätzlichen Summanden außerhalb der Reihe nach den Eigenschwingungen hängt damit zusammen, daß äußere Kräfte, die in die Randbedingung eingehen, ausgeschlossen sind.

170. Das Randwertproblem der Telegraphengleichung. Bei der Lösung von Randwertproblemen für elliptische und parabolische Differentialgleichungen haben wir die Potentialtheorie benutzt, die jeweils einer singulären Lösung der zugehörigen Differentialgleichung entsprach. Für hyperbolische Differentialgleichungen ist diese Methode der Potentialtheorie nicht anwendbar. Nur im eindimensionalen Fall für die Telegraphen-

gleichung kann man unter Benutzung des Grundgedankens dieser Methode das Randwertproblem in eine Volterrassche Integralgleichung überführen.

Wir betrachten die Differentialgleichung [II, 198]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u \quad (224)$$

im Intervall $0 \leq x \leq l$ mit den homogenen Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad (225)$$

und den Randbedingungen

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad u|_{x=l} = \omega_2(t). \quad (226)$$

Wir bemerken, daß sich die Anfangsbedingungen immer in homogene überführen lassen, wenn man die Lösung des Problems für das unbeschränkte Intervall benutzt [II, 198], wie wir dies bereits in [152] für die Wärmeleitungsgleichung getan haben. Führen wir wie in [II, 198] die Funktion $I(z) = J_0(iz)$ ein, so überzeugen wir uns ohne Mühe davon, daß die Funktion $I(c\sqrt{t^2 - x^2})$ eine Lösung der Differentialgleichung (224) ist. Sie dient uns als Grundlösung. Legen wir dieser Lösung entsprechende stetig wirkende Quellen in die Endpunkte des Intervalls $[0, l]$, so erhalten wir, wie sich leicht unmittelbar nachprüfen läßt, die Lösungen

$$\int_0^{t-x} \varphi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau \quad \text{und} \quad \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau$$

der Differentialgleichung (224), wobei wir die Funktionen $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ als differenzierbar annehmen. Differenzieren wir diese Lösungen nach x , so erhalten wir wiederum Lösungen; wir suchen die Lösung des Problems (224), (225), (226) in Gestalt der Summe

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2}) d\tau, \quad (227)$$

wobei wir annehmen, daß $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ ist.

Den Ausdruck (227) kann man auch in der Form

$$\begin{aligned} u = & -\varphi(t-x) - \int_0^{t-x} \varphi(\tau) \frac{cx I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}} d\tau \\ & + \psi(t-l+x) + \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) \frac{c(l-x) I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} d\tau \end{aligned} \quad (228)$$

darstellen.

Wir erinnern an die Entwicklung

$$I(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}.$$

Die Differentialgleichung (224) und die Anfangsbedingungen (225) sind bei beliebiger Wahl von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ erfüllt. Die Randbedingungen (226) führen zu dem Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} -\varphi(\tau) + \psi(t-l) + \int_0^{t-l} \psi(\tau) \frac{cl I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t), \\ -\varphi(t-l) + \psi(t) - \int_0^{t-l} \varphi(\tau) \frac{cl I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_2(t) \end{aligned} \quad (229)$$

für $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$. Die Funktionen $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$ nehmen wir als stetig differenzierbar an. Wir setzen

$$\psi(t) - \varphi(t) = \varphi_1(t), \quad \psi(t) + \varphi(t) = \psi_1(t).$$

Addieren und subtrahieren wir die Integralgleichungen (229), so erhalten wir für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) + \varphi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \varphi_1(\tau) \frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t) + \omega_2(t), \\ -\psi_1(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t) - \omega_2(t) \end{aligned} \quad (230)$$

mit $\varphi_1(\tau) = \psi_1(\tau) = 0$ für $\tau < 0$.

Aus diesen Integralgleichungen kann man die Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\psi_1(t)$ durch sukzessive Approximation in den Intervallen $[0, l]$, $[l, 2l]$, $\dots$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \omega_1(t) + \omega_2(t), & \psi_1(t) &= \omega_2(t) - \omega_1(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq l, \\ \varphi_1(t) &= \omega_1(t) + \omega_2(t) - \varphi_1(t-l) - cl \int_0^{t-l} \varphi_1(\tau) \frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau, \\ \psi_1(t) &= \omega_2(t) - \omega_1(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau \end{aligned} \quad (231)$$

für $l \leq t \leq 2l$

usw.

An Stelle der Methode der sukzessiven Approximation kann man zur Lösung der Integralgleichungen auch die Laplacetransformation benutzen.

Der Stoff dieses Abschnittes ist einer unveröffentlichten Arbeit von D. A. DOBROTIN entnommen.

Literaturhinweise

Zusammenfassende Berichte und Bücher, die mehrere Teilgebiete enthalten. Die zum Gebiet der partiellen Differentialgleichungen recht große Zahl von Kongreßberichten kann dabei keine Berücksichtigung finden:

- ACHESER, N. I.; GLASMANN, I. M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, 8. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1981 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ADAMS, R. A.: Sobolev spaces, Academic Press, New York 1975.
- ANDRONOV, A. A.; WITT, A. A.; CHAIKIN, S. E.: Theorie der Schwingungen, Akademie-Verlag, Berlin 1969 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ANDRONOV, A. A.; WITT, A. A.; CHAIKIN, S. E.: Theory of oscillations, 2nd printing, Princeton University Press, Princeton 1953 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ANGER, G.: Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I, Akademie-Verlag, Berlin 1967.
- ARFKEN, G.: Mathematical methods for physicists, 2nd ed., Academic Press, New York 1970.
- ARNOLD, V. I.: Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1978 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ARNOL'D, V. I.: Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Birkhäuser, Basel — Boston — New York — Tokyo 1988 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ARNOLD, V. I.: Singularity theory, Cambridge University Press, Cambridge 1981 (Übersetzung aus dem Russischen).
- BAUMGÄRTEL, H.; WOLLENBERG, M.: Mathematical scattering theory, Akademie-Verlag, Berlin/Birkhäuser, Basel — Boston 1984.
- BELLMAN, R.; COOKE, K. L.: Differential-difference equations, Academic Press, New York 1963.
- BELLMAN, R.; KALABA, R.: Dynamic programming and modern control theory, Academic Press, New York 1966.
- BELLMAN, R.: Introduction to the mathematical theory of control processes, Vol. 1, 2, Academic Press, New York 1967 bzw. 1971.
- BELLMAN, R.: Methods of nonlinear analysis, Vol. 1, 2, Academic Press, New York 1970 bzw. 1973.
- BERG, L.: Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.
- BHARUCHA-REID, A. T. (ed.): Probabilistic analysis and related topics, Vol. 1, 2, 3, Academic Press, New York 1978, 1979 bzw. 1983.
- BHARUCHA-REID, A. T. (ed.): Probabilistic methods in applied mathematics, Vol. 1, 2, 3, Academic Press, New York 1968, 1970 bzw. 1973.
- BICADZE, A. V.: Equations of mathematical physics, Mir Publ., Moscow 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- BIEBERBACH, L.: Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1956.
- BIEBERBACH, L.: Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamt-

- gebiet der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, Reprint der 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1979.
- BRAUN, M.: Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics, Corr. 2nd printing of the 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1984.
- BRAUN, M.: Differential equations and their applications (short version), 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1983.
- BRAUN, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1979.
- BRUTER, C. P.; ARAGNOL, A.; LICHNEROWICZ, A. (eds.): Bifurcation theory, mechanics and physics, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1983.
- CARATHÉODORY, C.; HÖLDER, E.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 2. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1956.
- CHATELIN, F.: Spectral approximation of linear operators, Academic Press, New York 1983.
- CHOW, S. N.; HALE, J. K.: Methods of bifurcation theory, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1982.
- COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1963.
- COLLATZ, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, unveränd. Nachdruck der 1. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1968.
- COLLATZ, L.: Numerical treatment of differential equations, Nachdruck der 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1966.
- CONTI, R.: Linear differential equations and control, Vol. 1, Academic Press, New York 1976.
- CONTI, R.: Recent advances in differential equations, Academic Press, New York 1981.
- COURANT, R.; HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 3. Aufl.; Bd. II, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1968.
- CURTAIN, R. F.; PRITCHARD, A. J.: Functional analysis in modern applied mathematics, Academic Press, New York 1977.
- DA PRATO, G.: Applications croissantes et équations d'évolution dans les espaces de Banach, Academic Press, New York 1976.
- DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 4, Bd. 5/6, Bd. 7, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1976, 1979 bzw. 1981 (Übersetzung aus dem Französischen).
- DODD, R. K.; EILBECK, J. C.; GIBBON, J. D.; MORRIS, H. C.: Solitons and nonlinear wave equations, Academic Press, New York 1982.
- DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 1, 1. Aufl.; Bd. 2, 3, 2. Aufl., Birkhäuser, Basel 1971 bzw. 1973.
- DOETSCH, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaft, 3. Aufl., Birkhäuser, Basel 1976.
- DUFF, G. F. D.; NAYLOR, D.: Differential equations of applied mathematics, Wiley, New York – London – Sydney 1966.
- DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T.: Linear operators, I, II; Interscience Publ., New York 1958 bzw. 1963.
- DUSCHEK, A.: Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. 3, 2. Aufl.; Bd. 4, Springer-Verlag, Wien – New York 1960 bzw. 1961.
- ECKHAUS, W.; VAN HARTEN, A.: The inverse scattering transformations and the theory of solitons, North-Holland, Amsterdam 1981; 1st repr. 1983.
- EKELAND, I.; TEMAM, R.: Convex analysis and variational problems, North-Holland, Amsterdam 1976.
- FENYÖ, I. S.; FREY, T.: Modern mathematical methods in technology, North-Holland, Amsterdam 1969/Interscience Publ., London 1970.
- FENYÖ, I. S.; FREY, T.: Moderne mathematische Methoden in der Technik, Bd. 1, 2, 3, Birkhäuser, Basel 1980.

- FLANDERS, H.: Differential forms: with applications to the physical sciences, Academic Press, New York 1963.
- FLETT, T. M.: Differential analysis, Cambridge University Press, Cambridge 1980.
- FLÜGGE, S.: Mathematische Methoden der Physik; I: Analysis, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1979.
- FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.
- FORD, L. R.: Differential equations, 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1955.
- FORSYTH, A. R.; JACOBSTHAL, W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Aufl., F. Vieweg, Braunschweig 1912.
- FRANK, PH.; VON MISES, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I. Teil: 3. Aufl.; II. Teil: 3. Aufl., F. Vieweg, Braunschweig 1961.
- FRIEDMAN, B.: Principles and techniques of applied mathematics, Wiley, New York/Chapman & Hall, London 1956.
- GAJEWSKI, H.; GRÖGER, K.; ZACHARIAS, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1974.
- GANTMACHER, F. R.; KREIN, M. G.: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme, 2. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1960 (Übersetzung aus dem Russischen).
- GELFAND, I. M.; SHILOV, G. E.: Generalized functions, Vol. 3: Theory of differential equations, Academic Press, New York 1963 (Übersetzung aus dem Russischen).
- GELFAND, I. M.; SCHILOV, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen, Bd. III: Einige Fragen zur Theorie der Differentialgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
- GLOWINSKI, R.: Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1984.
- GOLUBITSKY, M.; SCHAEFFER, D.: Singularities and groups in bifurcation theory I, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1985.
- GREENSPAN, D.: Discrete numerical methods in physics and engineering, Academic Press, New York 1974.
- GÜNTHER, N. M.; KUSMIN, R. O.: Aufgabensammlung zur höheren Mathematik, Bd. II, 9. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1993 (Übersetzung aus dem Russischen).
- HALANAY, A.: Differential equations: Stability, oscillations, time lag, Academic Press, New York 1966.
- HALE, J. K.: Theory of functional differential equations, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1977.
- HASSARD, B. D.; KAZARINOFF, N. D.; WAN, Y. H.: Theory and applications of Hopf bifurcations, Cambridge University Press, Cambridge 1981.
- HEBER, G.: Mathematische Hilfsmittel der Physik, Bd. I, 3. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1974.
- HELLWIG, G.: Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1964.
- HILDEBRAND, F. B.: Methods of applied mathematics, 2nd ed., Prentice-Hall, New York 1965.
- HILLE, E.: Analytic function theory, Vol. I, Ginn & Co., Toronto – London 1959.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, ST.: Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Academic Press, New York 1974.
- HORT, W.; THOMA, A.: Die Differentialgleichungen der Technik und Physik, 7. Aufl., J. A. Barth, Leipzig 1956.
- IKEDA, N.; WATANABE, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, Amsterdam 1981.
- IOOSS, G.; JOSEPH, D. D.: Elementary stability and bifurcation theory, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1980.

- IXARU, L.: Numerical methods for differential equations and applications, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1984.
- JEFFREY, B.: Operational methods in mathematical physics, Cambridge University Press, Cambridge 1931.
- JEFFREYS, H.; SWIRLES, B.: Methods of mathematical physics, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge 1956.
- KANTOROWITSCH, L. W.; AKILOV, B. P.: Funktionalanalysis in normierten Räumen, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1978 (Übersetzung aus dem Russischen).
- KANTOROWITSCH, L. W.; KRYLOW, W. I.: Näherungsmethoden der höheren Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- KELLS, L. M.: Elementary differential equations, 6th ed., McGraw-Hill, New York 1965.
- KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA: An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York 1980.
- KNESCHKE, A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Bd. 2, 3; 2. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1961 bzw. 1968.
- KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V.: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976 (Übersetzung aus dem Russischen).
- KRÁL, J.: Integral operators in potential theory, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1980.
- KREIN, M. G.: Topics in differential and integral equations and operator theory, Birkhäuser, Basel - Boston 1983 (Übersetzung aus dem Russischen).
- LADAS, G. E.; LAKSHMIKANTHAM, V.: Differential equations in abstract spaces, Academic Press, New York 1972.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.: Differential and integral inequalities. Theory and applications, Vol. 1, 2, Academic Press, New York 1969.
- LAMB, G. I.: Elements of soliton theory, Interscience Publ., New York 1980.
- LANGENBACH, A.: Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976/Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1977.
- LANGENBACH, A.: Vorlesungen zur höheren Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982.
- LEWIN, W. I.; GROßBERG, J. I.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik, VEB Verlag Technik, Berlin 1952 (Übersetzung aus dem Russischen).
- LJUSTERNIK, L. A.; SOBOLEW, W. I.: Elemente der Funktionalanalysis, 6. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1979 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 7. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1964.
- MASSERA, J. L.; SCHAFFER, J. J.: Linear differential equations and function spaces, Academic Press, New York 1966.
- MENNICKEN, R.: Locally convex spaces, distributions and linear partial differential operators, North-Holland, Amsterdam 1984.
- MICHLIN, S. G.: Lehrgang der mathematischen Physik, 2. ber. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1975 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MICHLIN, S. G.: Numerische Realisierung von Variationsmethoden, Akademie-Verlag, Berlin 1969 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MICHLIN, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1962 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MICHLIN, S. G.: Variational methods in mathematical physics, Macmillan, New York 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MILNE, W. E.: Numerical solutions of differential equations, Wiley, New York/Chapman & Hall, London 1953.
- MIRANKER, W.: Numerical methods for stiff equations and singular perturbation problems, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1980.

- MORSE, P. M.; FESHBACH, H.: *Methods of theoretical physics*, Vol. I, II, McGraw-Hill, New York 1953.
- ODEN, J. T.; REDDY, J. N.: *Variational methods in theoretical mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1983.
- OELSCHLÄGEL, D.; MATTHÄUS, W.-G.: *Numerische Methoden*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974.
- PAGE, C. H.: *Physical mathematics*, D. van Nostrand Comp., New York – London 1955.
- PROTTER, M.; WEINBERGER, H.: *Maximum principles in differential equations*, corr. reprint, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1984.
- PURDAY, H. F. P.: *Linear equations in applied mechanics*, Oliver and Boyd, Edinburgh – London/Interscience Publ., New York 1954.
- REED, M.; SIMON, B.: *Methods of modern mathematical physics*, Vol. I, rev. and enlarged ed., Vol. II, III, IV, Academic Press, New York 1980, 1975, 1979 bzw. 1978.
- RIESZ, F.; SZ.-NAGY, B.: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, 4. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1982 (Übersetzung aus dem Französischen).
- RILEY, K. F.: *Mathematical methods for the physical sciences. An informal treatment for students of physics and engineering*. Cambridge University Press, Cambridge 1974.
- RITGER, P. D.; ROSE, N. J.: *Introduction to differential equations with applications*, McGraw-Hill, New York 1968.
- ROSS, S. I.: *Differential equations*, 3rd ed., Wiley, New York 1981.
- RUBINSTEIN, Z.: *A course in ordinary and partial differential equations*. Academic Press, New York 1969.
- SAMARSKIJ, A. A.: *Theorie der Differenzenverfahren*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1984 (Übersetzung aus dem Russischen).
- SAUTER, F.: *Differentialgleichungen der Physik*, 4. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1966.
- SCHMIDT, G.; SCHULZ, R.: *Parametererregte Schwingungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- SOBOLEW, S. L.: *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
- SOONG, T. T.: *Random differential equations in science and engineering*, Academic Press, New York 1973.
- STEPANOW, W. W.: *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, 5. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982 (Übersetzung aus dem Russischen).
- TIKHONOV, A. N.; VASILEVA, A. B.; SVESHNIKOV, A. G.: *Differential equations*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1983 (Übersetzung aus dem Russischen).
- TRICOMI, F. G.: *Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1968.
- TRIEBEL, H.: *Analysis und mathematische Physik*, 2. bearb. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig/Hanser-Verlag, München 1984.
- TRIEBEL, H.: *Höhere Analysis*. 2. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1980.
- TRIEBEL, H.: *Interpolation theory, Function spaces, Differential operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977/North-Holland, Amsterdam – New York – Oxford 1978.
- TRIEBEL, H.: *Theory of function spaces*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.
- TURNBULL, H. W.: *Theory of equations*, 5th ed., Oliver and Boyd, Edinburgh 1952.
- TYCHONOFF, A. N.; SAMARSKI, A. A.: *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Russischen).
- VLADIMIROV, V. S.: *Equations of mathematical physics*, M. Dekker, Basel 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).

- VOLPERT, A. I.; HUDJAEV, S. I.: Analysis of discontinuous functions and equations of mathematical physics, Nijhoff Publ., Dordrecht 1985.
- WARGA, J.: Optimal control of differential and functional equations, Academic Press, New York 1972.
- VON WESTENHOLZ, C.: Differential forms in mathematical physics, North-Holland, Amsterdam 1981.
- WLADIMIROW, W. S.: Gleichungen der mathematischen Physik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
- WLOKA, J.: Funktionalanalysis und Anwendungen, W. de Gruyter, Berlin – New York 1971.
- ZAANEN, A. C.: Linear analysis, 4th printing, North-Holland, Amsterdam 1964.

Literatur zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen:

- ABBOTT, M. E.: An introduction to the method of characteristics. Amer. Elsevier Publ. Comp., New York 1966.
- AGMON, S.: Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations, Princeton University Press, Princeton 1982.
- ALBRECHT, R.; HOCHMUTH, H.; ZUSER, K.: Übungsaufgaben zur höheren Mathematik, Teil III, 2. Aufl., R. Oldenbourg, München 1963.
- ALMGREN, F. J.: Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints, Amer. Math. Soc., New York 1976.
- AMES, W. F.: Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. I, II, Academic Press, New York 1965 bzw. 1972.
- AMES, W. F.: Numerical methods for differential equations, Barnes & Noble, Totowa (N. J.) 1970.
- AMES, W. F.: Numerical methods for partial differential equations, 2nd ed., Academic Press, New York 1977.
- ANGEL, E.; BELLMAN, R.: Dynamic programming and partial differential equations, Academic Press, New York 1972.
- ATTIYAH, M. F.: Elliptic operators and compact groups, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1974.
- AZIZ, A. K.; WINGATE, J. W.; BALAS, M. J. (eds.): Control theory of systems governed by partial differential equations, Academic Press, New York 1977.
- BARBU, V.: Optimal control of variational inequalities, Pitman, New York – London 1984.
- BATEMAN, H.: Partial differential equations of mathematical physics, Dover Publ., New York 1944.
- BAUER, K. W.; RUSCHEWEYH, S.: Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1980.
- BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band 2 (Teil 5 - 8), Nachdruck, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1979.
- BELLMAN, R.; ADOMIAN, G.: Partial differential equations. New methods for their treatment and solution, Reidel Publ., Comp., Dordrecht 1984.
- BENTON jr., ST. H.: The Hamilton-Jacobi equation. A global approach, Academic Press, New York 1977.
- BERG, P. W.; MCGREGOR, J. L.: Elementary partial differential equations, Holden-Day, San Francisco 1966.
- BERGMAN, ST.; SCHIFFER, M.: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press, New York 1953.
- BERNSTEIN, D. L.: Existence theorems in partial differential equations, 2nd print., Princeton University Press, Princeton 1951.
- BERS, L.; JOHN, F. F.; SCHECHTER, M.: Partial differential equations, Wiley, New York 1964.

- BICADZE, A. V.; KALINICHENKO, D. F.: A collection of problems on the equations of mathematical physics, 2nd print., Mir Publ., Moscow 1983 (Übersetzung aus dem Russischen).
- BIZADSE, W. A.: Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).
- BLANC, CH.: Equations aux dérivées partielles; un cours pour ingénieurs, Birkhäuser, Basel 1976.
- BOTHA, J. F.: Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations, Wiley, New York 1983.
- BROMAN, A. E.: Introduction to partial differential equations, Addison-Wesley, Reading 1970.
- БУДАК, Б. М.; САМАРСКИЙ, А. А.; ТИХОНОВ, А. Н.: Сборник задач по математической физике, Гос. изд. техн.-теорет. лит., Москва 1956.
- CALUS, I. M.; FAIRLEY, A.: Fourier series and partial differential equations. A programmed course for students of science and technology, Wiley, New York 1970.
- CARATHÉODORY, C.: Calculus of variations and partial differential equations of the first order, Part 1, 2, Holden-Day, San Francisco 1965 bzw. 1967.
- CARRIER, G. F.; PEARSON, C. E.: Partial differential equations. Theory and practices, Academic Press, New York 1978.
- CARROL, R. W.: Abstract methods in partial differential equations, Harper & Row, New York 1969.
- CARROL, R. W.; SHOWALTER, R. E.: Singular and degenerate Cauchy problems, Academic Press, New York 1977.
- CHAILLOU, J.: Hyperbolic differential polynomials and their singular perturbations, Reidel Publ., Comp., Dordrecht 1979.
- CHAZARAIN, J.; PIRIOU, A.: Introduction to the theory of linear partial differential equations, North-Holland, Amsterdam 1982.
- CHIPOT, M.: Variational inequalities and flow in porous media, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1984.
- COLTON, D. L.: Partial differential equations in the complex domain, Pitman, New York — London 1976.
- COPSON, E. T.: Partial differential equations, Cambridge University Press, Cambridge 1974.
- CÓRDES, H. O.: Elliptic pseudo-differential operators. An abstract theory, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1979.
- COURANT, R.; SCHIFFER, M.: Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., New York — London 1950.
- DENNEMEYER, R.: Introduction to partial differential equations and boundary value problems, McGraw-Hill, New York 1968.
- DOLLARD, J. D.; FRIEDMAN, C. N.: Product integration with applications to differential equations, Addison-Wesley, Reading 1979.
- DOU, A.: Lectures on partial differential equations of first order, University of Notre Dame Press, Notre Dame (Indiana) 1972.
- DOUGLAS, jr., J.; DUPONT, T.: Collocation methods for parabolic equations in a single space variable, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1974.
- DRESNER, L.: Similarity solutions of nonlinear partial differential equations, Pitman, London — New York 1983.
- DUFF, G. F. D.: Partial differential equations, University of Toronto Press, Toronto 1956.
- EIDEL'MAN, S. D.: Parabolic systems, Interscience Publ., New York/North-Holland, Amsterdam 1969 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ELK, K.; GRASSER, W.: Die Methode der Greenschen Funktion in der Festkörperphysik, Akademie-Verlag, Berlin 1979.
- ELSCHNER, J.: Singular ordinary differential operators and pseudodifferential equations, Akademie-Verlag, Berlin 1985.
- EPSTEIN, B.: Partial differential equations: an introduction, R. E. Krieger, New York 1975.

- ERWE, F.; PESCHL, E.: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Bibliographisches Institut, Mannheim 1973.
- FLETCHER, C. A. J.: Computational Galerkin methods, Springer-Verlag, Berlin — New York 1984.
- FOLLAND, G. B.: Introduction to partial differential equations, Princeton University Press, Princeton 1976.
- FOLLAND, G. B.: Lectures on partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1983.
- FREDA, H.: Méthodes des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Gauthier-Villars, Paris 1937.
- FRIED, I.: Numerical solution of differential equations, Academic Press, New York 1979.
- FRIEDLANDER, F. G.: The wave equation on a curved spacetime, Cambridge University Press, Cambridge 1976.
- FRIEDMAN, A.: Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.
- FRIEDMAN, A.: Partial differential equations of parabolic type, R. E. Krieger, New York 1983.
- GARABEDIAN, P. R.: Partial differential equations, Wiley, New York 1964.
- GERONIMUS, J. L.; STEKLOW, W. A.: Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, VEB Verlag Technik, Berlin 1954.
- GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.: Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1983.
- GILBERT, R. P.: Constructive methods for elliptic equations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1974.
- GILBERT, R. P.; BUCHANAN, J.: First order elliptic systems: a function theoretic approach, Academic Press, New York 1983.
- GILBERT, R. P.: Function theoretic methods in partial differential equations, Academic Press, New York 1969.
- GOUSAT, ÉD.; MASER, H.: Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig 1893.
- GRAFFI, D.: Nonlinear partial differential equations in physical problems, Pitman, New York 1980.
- GREGORY, J.: Quadratic form theory and differential equations, Academic Press, New York 1980.
- GRIBBEN, R. J.: Elementary partial differential equations, Van Nostrand Publ., New York 1975.
- GRÖBNER, W.: Differentialgleichungen, T. 2: Partielle Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut, Mannheim — Zürich 1977.
- GROMOV, M.: Partial differential relations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1985.
- GÜNTHER, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, B. G. Teubner, Leipzig 1957 (Übersetzung aus dem Französischen).
- GUSTAFSON, K. E.: Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods, Wiley Publ., New York 1980.
- HAACK, W.; WENDLAND, W.: Lectures on partial and Pfaffian differential equations, Pergamon Press, New York 1972.
- HABERMAN, R.: Elementary applied partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1983.
- HADAMARD, J.: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Nachdruck d. 1. Aufl., Dover Publ., New York 1952.
- HADAMARD, J.: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann et Cie., Paris 1932.
- HEILBRONN, G.: Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach, Gauthier-Villars, Paris 1955.

- HELLWIG, G.: Partielle Differentialgleichungen; eine Einführung, B. G. Teubner, Stuttgart 1960.
- HENRY, D.: Geometric theory of semilinear parabolic equations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1981.
- HÖRMANDER, L.: The analysis of linear partial differential operators, Vol. I, II, III, IV, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1983 bzw. 1985.
- HOHEISEL, G.: Partielle Differentialgleichungen, 5. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1968.
- HOHEISEL, G.: Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, 4. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1964.
- HORN, J.: Partielle Differentialgleichungen, 4. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1949.
- HORNICH, H.: Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.
- HU, S. T.: Linear algebra with differential equations, Markham Publ. Comp., Chicago 1971.
- IVANOV, A. V.: Quasilinear degenerate and nonuniformly elliptic and parabolic equations of second order, Amer. Math. Soc., New York 1984 (Übersetzung aus dem Russischen).
- JANET, M.: Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris 1927.
- JANET, M.: Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris 1929.
- JEFFREY, A.: Quasilinear hyperbolic systems and waves, Pitman, London — New York 1976.
- JEROME, J. W.: Approximation of nonlinear evolution systems, Academic Press, New York 1983.
- JOHN, F.: Partial differential equations, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1982.
- JOHN, F.: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience Publ., New York 1955; Reprint: Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1981.
- JOHNSTONE, I.: A probabilistic study of linear elliptic-parabolic equations of second order, Austral. Nat. Univ. Canberra, Canberra 1977.
- КАМКЕ, Е.: Differentialgleichungen, Bd. II: Partielle Differentialgleichungen, 5. Aufl., Nachdruck, B. G. Teubner, Stuttgart 1965.
- КАМКЕ, Е.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion, 5. Aufl., Nachdruck, B. G. Teubner, Stuttgart 1965.
- KAPLAN, W.: Operational methods for linear systems, Addison-Wesley, Reading 1962.
- KRZYZANSKI, M.: Partial differential equations of second order, Vol. 1, 2, PWN, Warszawa 1971.
- KUSHNER, H.: Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations, Academic Press, New York 1977.
- LADYŽENSKAJA, O. A.: Funktionalanalytische Untersuchung der Navier-Stokesschen Gleichung, Akademie-Verlag, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.: Смешанная задача для гиперболического уравнения, Наука, Москва 1953.
- ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.; СОЛОННИКОВ, В. А.; УРАЛЬЦЕВА, Н. Н.: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, Москва 1967.
- LADYZHENSKAJA, O. A.; URAL'TSEVA, N. N.: Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press, New York 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.; УРАЛЬЦЕВА, Н. Н.: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2. перераб. изд., Наука, Москва 1973.
- LERAY, J.: Hyperbolic differential equations, Institute for advanced study, Princeton 1955.

- LIEBERSTEIN, H. M.: Theory of partial differential equations, Academic Press, New York 1972.
- LIONS, J. L.: Lectures on elliptic partial differential equations, Tata Institute, Bombay 1957.
- MANSION, P.; MASER, H.: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Springer, Berlin 1892 (Übersetzung aus dem Französischen).
- MARSAL, D.: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik, Bibliographisches Institut, Mannheim – Zürich 1976.
- MEINHOLD, P.; WAGNER, E.: Partielle Differentialgleichungen, 4. ber. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.
- MEIS, T.; MARCOWITZ, U.: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1978.
- MERCIER, B.: Lectures on topics in finite element solution of elliptic problems, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1980.
- MICHLIN, S. G.: Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1978 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MIKHAILOW, V.: Partial differential equations, Mir Publ., Moscow 1978 (Übersetzung aus dem Russischen).
- MILLER, F. H.: Partial differential equations, 6th reprint, Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London 1953.
- MILLER, K. S.: Partial differential equations in engineering problems, Prentice-Hall, New York 1953.
- MILLER, W.: Symmetry and separation of variables, Addison-Wesley, Reading 1977.
- MIMURA, M.; NISHIDA, T. (eds.): Nonlinear partial differential equations, North-Holland, Amsterdam 1984.
- MIRANDA, C.: Partial differential equations of elliptic type, 2nd rev. ed., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1970.
- MITCHELL, A. R.; GRIFFITHS, D. F.: The finite difference method in partial differential equations, Wiley Publ., New York 1980.
- MITCHELL, A. R.; WAIT, R. A.: The finite element method in partial differential equations, Interscience Publ., New York 1977.
- MOON, P. K.; SPENCER, D. E.: Partial differential equations, D. C. Heath, Lexington 1969.
- MYINT-U, T.: Partial differential equations of mathematical physics, 2nd rev. ed., 1st repr., North-Holland, Amsterdam 1980 bzw. 1981.
- NAUMANN, J.: Einführung in die Theorie parabolischer Variationsungleichungen, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1984.
- NEČAS, J.: Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.
- NOBLE, B.: Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Pergamon Press, London 1958.
- OLENIK, O. A.; RADKEVICH, E. V.: Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., New York 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).
- PANOW, D. J.: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren, Akademie-Verlag, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).
- PAZY, A.: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1983.
- PETROWSKI, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).
- PICARD, É.: Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique, Gauthier-Villars, Paris 1950.
- PINSKY, M. A.: Introduction to partial differential equations with applications, McGraw-Hill, New York 1984.

- POMMARET, J. F.: Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups, Gordon & Breach, New York – London 1978.
- PRASAD, P.: Partial differential equations, Wiley & Sons, New York 1984.
- REKTORYS, K.: The method of discretization in time. Partial differential equations, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1982.
- RENELT, H.: Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1982.
- REUTERSBERG, H.: Reduktionsverfahren zur Lösung elliptischer Differenzengleichungen im R^3 , Oldenbourg, München – Wien 1980.
- RIQUIER, CH.: Les systèmes d'équation aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris 1910.
- RIQUIER, CH.: La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris 1928.
- ROACH, G. F.: Green's functions, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge 1982.
- ROMANOV, V. G.: Integral geometry and inverse problems for hyperbolic equations, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1974.
- ROSINGER, E. E.: Distributions and nonlinear partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1978.
- ROSINGER, E. E.: Nonlinear partial differential equations; sequential and weak solutions, North-Holland, Amsterdam 1980.
- RUNGE, C.; WILLERS, F. A.: Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig 1915.
- SALTYKOW, N.: Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Gauthier-Villars, Paris 1931.
- SALTYKOW, N.: Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, Gauthier-Villars, Paris 1935.
- SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1958.
- SCHECHTER, M.: A modern approach of partial differential equations, McGraw-Hill, New York 1977.
- SCHMIDT, G.: Parametererregte Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- SCHULZE, B. W.; WILDENHAIN, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Akademie-Verlag, Berlin/Birkhäuser, Basel 1977.
- SMIRNOW, M. M.: Aufgaben zu den partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).
- SMIRNOV, M. M.: Equations of mixed type, Amer. Math. Soc., New York 1978 (Übersetzung aus dem Russischen).
- SMITH, G. D.: Numerical solution of partial differential equations. Finite difference methods (with exercises and worked solutions), 2nd ed., Oxford University Press, Oxford 1978.
- SNEDDON, I. N.: Elements of partial differential equations, McGraw-Hill, New York – London 1957.
- SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 6: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 6. Aufl., Nachdruck, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt - Thun 1992.
- STERNBERG, R. L.: Nonlinear partial differential equations in engineering and applied sciences, M. Dekker, Basel 1980.
- STREDULINSKY, E. W.: Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1984.
- TANABE, H.: Equations of evolution, Pitman, London – New York 1979.
- THOMÉE, V.: Galerkin finite element methods for parabolic problems, Springer-Verlag, Berlin – New York 1984.

- TREVES, F.: Basic linear partial differential equations, Academic Press, New York 1975.
- TREVES, F.: Locally convex spaces and linear partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1967.
- TRÖLTZSCH, F.: Optimality conditions for parabolic control problems and applications, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1984.
- TUTSCHKE, W.: Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und in mehreren komplexen Variablen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977.
- TUTSCHKE, W.: Partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.
- VARADHAM, S. R. S.: Lectures on diffusion problems and partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1980.
- VEJVODA, O.: Partial differential equations. Time-periodic solutions, M. Nijhoff Publ., Dordrecht 1982.
- VEKUA, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- WACHSPRESS, E. L.: Iterative solutions of elliptic systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1966.
- WASHIZU, K.: Variational methods in elasticity and plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, New York 1982.
- WEBSTER, A. G.; SZEGÖ, G.: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, B. G. Teubner, Leipzig 1930.
- WEINBERGER, H. F.: A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods, Wiley & Sons, New York 1975.
- WENDLAND, W. L.: Elliptic systems in the plane, Pitman, London 1979.
- WHITHAM, G. B.: Linear and nonlinear waves, Interscience Publ., New York 1974.
- WIDDER, D. V.: The heat equation, Academic Press, New York 1975.
- WILCOX, C. H.: Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1975.
- WILDENHAIN, G.: Darstellung von Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1981.
- WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen, Sobolevräume und Randwertaufgaben, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig/B. G. Teubner, Stuttgart 1982.
- YOUNG, E. C.: Partial differential equations, Allyn, London 1972.
- ZACHMANOGLU, E. C.; THOE, D. W.: Introduction to partial differential equations with applications, Williams & Wilkins, Baltimore 1976.
- ZAUDERER, E.: Partial differential equations of applied mathematics, Wiley Publ., New York 1983.

Zur Theorie der Randwertprobleme sei außerdem noch auf folgende Literatur verwiesen:

- AGMON, S.: Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand-Reinhold, Princeton 1965.
- ARTHURS, A. M.: Complementary variational principles, Clarendon Press, Oxford 1980.
- ATKINSON, F. V.: Discrete and continuous boundary problems, Academic Press, New York 1964.
- AUBIN, J.-P.: Approximation of elliptic boundary-value problems, R. E. Krieger, New York 1980.
- AXELSSON, O.: Finite element solution of boundary value problems, Academic Press, New York 1984.
- AXELSSON, O.; BARKER, V. A.: Finite element solution of boundary value problems: Theory and computation, Academic Press, New York 1983.

- BAIOCCHI, C.: Variational and quasivariational inequalities. Wiley Publ., New York 1984.
- BAILEY, P. B.; SHAMPINE, L. F.; WALTMAN, P. E.: Nonlinear two point boundary value problems, Academic Press, New York 1968.
- BALABAN, T.: On the mixed problem for a hyperbolic equation, Amer. Math. Soc., New York 1971.
- BALTES, H. P.; HILF, E. R.: Spectra of finite systems; a review of Weyl's problem. The eigenvalue distribution of the wave equation for finite domains and its applications on the physics of small systems, Bibliographisches Institut, Mannheim — Zürich 1976.
- BARROS-NETO, J.; ARTINO, R.: Hypoelliptic boundary value problems, M. Dekker, Basel 1980.
- BELTRAMI, E. J.; WOHLERS, M. R.: Distributions and the boundary values of analytic functions, Academic Press, New York 1966.
- BERNFELD, ST. R.; LAKSHMIKANTHAM, V.: An introduction to nonlinear boundary value problems, Academic Press, New York 1974.
- BOHL, E.: Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben, B. G. Teubner, Stuttgart 1981.
- BORGNIS, E.; PAPAS, C. H.: Randwertprobleme der Mikrowellenphysik, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1955.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.: Elementary differential equations and boundary value problems, 3rd ed., Wiley Publ., New York 1977.
- BREBBIA, C. A.: Boundary element techniques, Springer-Verlag, Berlin — New York 1984.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W.: Fourier series and boundary value problems, 3rd ed., McGraw-Hill, New York 1978.
- CLEMENTS, D. L.: Boundary value problems governed by second order elliptic systems, Pitman, Marshfield — London 1981.
- CODDINGTON, E. A.; DE SNOO, H. S.: Regular boundary value problems associated with pairs of ordinary differential expressions, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1981.
- COHEN, J. W.; BOXMA, O. J.: Boundary value problems in queueing system analysis, North-Holland, Amsterdam 1983.
- CRANK, J.: Free and moving boundary value problems, Clarendon Press, Oxford 1984.
- ELLIOTT, C. M.: Weak and variational methods for moving boundary problems, Pitman, London — New York 1982.
- ESKIN, G. I.: Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations, Amer. Math. Soc., New York 1981.
- FRIEDMAN, A.: Variational principles and free boundary problems, Wiley Publ., New York 1982.
- FUČIK, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1981.
- GACHOV, F. D.: Boundary value problems, Pergamon Press, London — New York 1966 (Übersetzung aus dem Russischen).
- ГАХОВ, Ф. М.: Краевые задачи, изд. 3. перераб. и дополн., Наука, Москва 1977.
- HANNA, J. R.: Fourier series and integrals of boundary value problems, Wiley Publ., New York 1982.
- KELLER, H. B.: Numerical methods for two-point boundary-value problems, Blaisdell, Waltham (Mass.) 1968.
- KOVACH, L. D.: Boundary value problems, Addison-Wesley, Reading 1981.
- KUBIČEK, M.: Numerical solution of nonlinear boundary value problems with applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1983.
- KUPRADSE, W. D.: Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).

- ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.: Краевые задачи математической физики, Наука, Москва 1973.
- LIGGETT, J. A.: The boundary integral equation method for porous media flow, Allen & Unwin, London 1983.
- LIONS, J. L.; MAGENES, E.: Non-homogeneous boundary value problems and applications, Vol. I, II, III, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1972, 1973.
- MACKIE, A. G.: Boundary value problems, Oliver and Boyd, Edinburgh 1965.
- MEYER, G. H.: Initial value methods for boundary value problems: Theory and application of invariant imbedding, Academic Press, New York 1973.
- MONAKHOV, V. N.: Boundary-value problems with free boundaries for elliptic systems of equations, Amer. Math. Soc., New York 1983 (Übersetzung aus dem Russischen).
- NA TSUNG YEN: Computational methods in engineering boundary value problems, Academic Press, New York 1979.
- POWERS, D. L.: Boundary value problems, 2nd ed., Academic Press, New York 1979.
- POWERS, D. L.: Instructor's manual to accompany boundary value problems, 2nd ed. Academic Press, New York 1979.
- PRENTER, P. M.: Splines and variational methods, Wiley Publ., New York 1975.
- PREIWALOW, I. I.: Randeigenschaften analytischer Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- REMPEL, St.; SCHULZE, B.-W.: Index theory of elliptic boundary problems, Akademie-Verlag, Berlin 1982.
- ROBERTS, S. M.; SHIPMAN, J. S.: Two-point boundary value problems; shooting methods, Amer. Elsevier Publ. Comp., New York 1972.
- SAKAMOTO, R.: Hyperbolic boundary-value problems, Cambridge University Press, Cambridge 1982.
- SCHWABIK, S.; TYRÝ, M.; VEJVODA, O.: Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints, Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1978.
- SCHWANK, F.: Randwertprobleme, B. G. Teubner, Leipzig 1951.
- SIMADER, C. G.: On Dirichlet's boundary value problem. L -theory based on a generalization of Garding's inequality, Springer-Verlag, Berlin — New York 1972.
- SOLOMON, A.: Moving boundary problems and their applications, Wiley Publ., New York 1981.
- STAKGOLD, I.: Boundary value problems of mathematical physics, Vol. I, II, Macmillan Press, New York 1967, 1968.
- STAKGOLD, I.: Green's function and boundary value problem, Interscience Publ., New York 1979.
- STUMMEL, F.: Rand- und Eigenwertprobleme in Sobolewschen Räumen, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1969.
- TAUFER, J.: Lösung der Randwertprobleme für Systeme von linearen Differentialgleichungen, Academia, Prag 1973.
- VELTE, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Eine Einführung unter Berücksichtigung von Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Stuttgart 1976.
- WENDLAND, W.: Integral equations methods for boundary value problems, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York 1985.
- WILLIAMS, W. E.: Fourierreihen und Randwertaufgaben, Verlag Chemie, Weinheim 1974.
- WILSON, D. G.; SALOMON, A. D.; BOGGS, P. T. (eds.): Moving boundary problems, Academic Press, New York 1978.
- ZEIDLER, E.: Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben. Funktional-analytische Untersuchungen über eine Klasse nichtlinearer hydrodynamischer Probleme, Akademie-Verlag, Berlin 1971.

Namen- und Sachverzeichnis

- Adjungierter Operator 108, 119
adjungiertes Problem 155
allgemeines Integral 42
alternierendes Verfahren von SCHWARZ 286, 290
Anfangsbedingungen, spezielle Cauchy-sche 83
Anfangswertproblem, charakteristisches 113
—, sachgemäßes 33
anisotrope elastische Körper 172
Ausstrahlungsbedingung, Sommerfeld-sche 325
Ausstrahlungsprinzip 325
- BERNSTEIN, S. N.** 158, 378
Beugung elektromagnetischer Wellen 335
Bicharakteristiken 98
- CACCIOPOLI, R.** 363, 378
CARLEMAN, T. 349, 389
Cauchy'sche Anfangsbedingungen, spezielle 83
— Methode 31, 55
—s Problem 14, 33
Charakteristik einer Differentialgleichung 12, 90, 95
—, komplexe 89
—, reelle 89
charakteristische Ebene 161
— Fläche 95, 161, 163
— Kurve 12, 30, 90
— Mannigfaltigkeit 22
—r Streifen 30, 85
—s Anfangswertproblem 113
—s Differentialgleichungssystem 29
—s Konoid 99
- CHRISTIANOWITSCH, S. A.** 137
COURANT, R. 122, 146, 350
COURANTS Maximum-Minimum-Prinzip 224
- Deformationstensor 172
Differentialgleichung; Charakteristik 12, 90, 95
- Differentialgleichung, elliptische 156
—, Helmholtzsche 325, 330
— mit konstanten Koeffizienten 78
—, Laplacesche 77, 156
—, Monge-Ampèresche 94
—, nichtlineare, erster Ordnung 27, 39
— erster Ordnung 11
— höherer Ordnung 76
—, quasilineare 11, 18
—, Riccatische 88
— der schwingenden Saite 222
—, totale 52
— vom elliptischen Typus 76
— vom hyperbolischen Typus 76
— vom parabolischen Typus 77
— vom ultrahyperbolischen Typus 77
—en der Elastizitätstheorie 170, 178
—en der Hydrodynamik 167
—en; Klassifikation 76
Differentialgleichungssystem, charakteristisches 29
—, elliptisches 163
—, hyperbolisches 184
—, Jacobisches 58
—, kanonisches 50, 64
—, parabolisch ausgeartetes 164
—, quasilineares 164
—, vollständig integrierbares 51
—, —es 57
—e, äquivalente 58
Dirichletsches Problem für das Außengebiet 267, 271
— — für das Innengebiet 264
— —; verallgemeinerte Lösung 299
DOBROTIN, D. A. 451
DOETSCH, G. 406
Drittes Randwertproblem für die Laplacesche Gleichung 265
dynamische Kompatibilitätsbedingung 106, 167
- Ebene, charakteristische 161
EIDELMAN, S. D. 423
EIDUS, D. M. 330, 358

- Eigenfunktionen 188
 — eines Operators 386
 — — — unter den ersten Randbedingungen 364
 Eigenwert 188
 — des Dirichletschen Problems für das Innengebiet 331
 — eines Operators 386
 Einbettungssatz von SOBOLEW 146
 Elastizitätstheorie; Differentialgleichungen 170, 178, 359, 360
 elektromagnetische Wellen 173
 elliptische Differentialgleichung 76, 156
 energetische Ungleichung 141, 370, 425
 Entwicklung nach den Eigenfunktionen 195
 Entwicklungssatz; Erweiterung von STEKLOW 210
 erste energetische Ungleichung 370
- Fläche** 18
 —, charakteristische 95, 161, 163
 —, glatte 12
 —, Liapounoffsche 234
 —; Parameterdarstellung 31
 —, raumartig orientierte 133, 138
 —n, parallele 259
 Fock, V. 362
 Folgen harmonischer Funktionen 261
 Fourierrmethode für die Schwingungsgleichung 215
 — für die Wärmeleitungsgleichung 213, 409
 Fredholmsche Lösbarkeit des Dirichletschen Problems 389
 — Sätze 366
 FREUDENTHAL, H. 338
 FRIEDRICHS, K. O. 141, 368
 Funktion, Greensche 189
 —, harmonische 261, 304
 —, im unendlich fernen Punkt reguläre 266
 —, im Unendlichen reguläre 271
 —, Riemannsche 111
 —, subharmonische 294
 —, subparabolische 421
 —, superharmonische 294
 —, superparabolische 421
 —en in Involution 55
- GEVREY, M. 401
 glatte Fläche 12
 GOGOLADSE, W. G. 133
 GOLUSIN, G. M. 293, 314
 GOURSAT, E. 74
- Greensche Formel 118
 — Funktion 189
 — — des Kreises 314
 — — des Laplace-Operators 306, 312
 — — des Rechtecks 314
 — —, verallgemeinerte 199
 —r Tensor 358
 Grenzabsorption 329
 Grenzamplitude 329
 GÜNTHER, N. M. 152, 280, 282, 317
- HAAR, A.** 37
 HADAMARD, J. 122, 154
 Hadamardsche Methode 122
 HARDY, G. H. 357
 harmonische Funktionen 261, 304
 Harnacksche Ungleichung 263
 Helmholtzsche Differentialgleichung 325, 330
 Hermitesche Funktionen 207
 HILBERT, D. 122, 146, 350, 368
 Hilbertraum, komplexer 378
 —, reeller 379
 Hölderbedingung 249
 HOLMGREN, E. 154
 Hookesches Gesetz 178
 Hydrodynamik; Differentialgleichungen 167
 hyperbolische Differentialgleichung 77
 —s Differentialgleichungssystem 184
 Huygenssche Konstruktion 101
- IGNATOWSKY, W. S. 329
 Integral, allgemeines 42
 —, singuläres 42
 —, vollständiges 42, 48
 Integralfäche 12
 Integralkonoid 39
 irregulärer Randpunkt 301
- Jacobische Identität 62
 — Klammer 54
 — Methode 63
 —r Satz 51
 —s Differentialgleichungssystem 58
- KAMKE, E.** 21, 41
 kanonisches Differentialgleichungssystem 50, 64
 KANTOROWITSCH, L. W. 291
 KELDYSCH, M. W. 274, 300, 303, 304
 Kelvintransformation 270
 kinematische Kompatibilitätsbedingung 105, 166
 Kirchhoffsche Formel; Verallgemeinerung 123

- Klammer, Jacobische 54
–, Mayersche 54
–, Poissonsche 54, 62
klassische Lösung 151
Kompatibilitätsbedingung, dynamische 106, 167
–, kinematische 105, 166
komplexe Charakteristik 89
Konoid, charakteristisches 99
Konormale 119
Konvergenz im Hilbertraum 379
Koordinatensystem, lokales 234
Kurve 18
–, charakteristische 12, 30, 90
KUPRADSE, W. D. 332, 338
KRYLOFF, N. 231
KRYLOW, W. I. 360
- LADYSHENSKAJA, O. A. 152, 154, 329, 330, 365, 369, 378, 394, 409, 423, 440
LAGRANGE, J. L. 119, 151
Lagrange-Charpitsche Methode 53
Laguerresche Funktionen 208
Laplacesche Differentialgleichung 77, 156
LAVRENTIEFF, M. A. 274
LEBESGUE, H. 303
Legendresche Polynome 204
LERAY, J. 152
LEVI, E. E. 401
LEVI-CIVITA, T. 161
LEWY, H. 92, 141
LIAPOUNOFF, A. M. 234, 248, 255, 282, 310
Liapounoffsche Fläche 234
LICHTENSTEIN, L. 255
Lipschitzbedingung 249
LITTLEWOOD, J. E. 357
logarithmisches Potential 255
lokales Koordinatensystem 234
Lorentzoperator 105
Lösung, klassische 151
–, verallgemeinerte, einer Differentialgleichung 413
–, –, der Klasse L_2 151, 153
Lösungsverfahren *siehe* Methode
LOVE, A. E. H. 359
- Majorante einer Reihe 67
Majorantenmethode 66
Mannigfaltigkeit, charakteristische 22
–, n -dimensionale 18
Mayersche Klammer 54
Methode von CAUCHY 31, 55
– von HADAMARD 122
– von JACOBI 63
- Methode von LAGRANGE-CHARPIT 53
– – –; Verallgemeinerung 55
– von KORN 365
– von RIEMANN 108
– von SCHWARZ 286, 290
– der Unter- und Oberfunktionen 297
– von VOLTERRA 119
MICHLIN, S. G. 231, 369
Monge-Ampèresche Differentialgleichung 94
Mongescher Kegel 27
MÜNTZ, G. M. 401
MUSCHELSCHWILI, N. I. 360, 361
MYSCHKIS, A. D. 37
- Näherungsweise Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen; Beispiel von RITZ 231
Neumannsches Problem für das Außengebiet 272
– – für das Innengebiet 264
Norm eines Operators 380, 381
Normalableitung, reguläre 248
- Oberfunktion 297
Operator, adjungierter 108, 119, 386
–, linearer beschränkter 380, 381
–, selbstadjungierter 113
–, symmetrischer 119
orthonormierte Basis 379
- Parabolisch ausgeartetes Differentialgleichungssystem 164
–e Differentialgleichung 77
Parallelflächen 259
PERRON, O. 23, 185, 293
PETRASCHEN, G. I. 447
PETROWSKI, I. G. 161, 185, 293, 303, 422
POINCARÉ, H. 293
Poissonsche Klammer 54, 62
Pol einer Greenschen Funktion 306
POWSNER, A. J. 329, 330
- Quadratische Form 76
quasilineare Differentialgleichung 11, 18
–s Differentialgleichungssystem 164
- Randpunkt, irregulärer 301
–, regulärer 301
Raum $L_2(D)$ 144
– $W_{2,0}^2(D)$ 371
raumartig orientierte Fläche 133, 138
räumliche Veränderliche 77
reguläre Normalableitung 248

- regulärer Randpunkt 301
 Relativgeschwindigkeit einer Welle 168
 RELICH, F. 329
 Riccatische Differentialgleichung 88
 Richtungsfeld 11
 Riemannsche Funktion 111
 — Integrationsmethode 108
 RITZ, W. 231
 Ritzsches Verfahren 230
 ROTHE, R. 408
- Sachgemäßes Anfangswertproblem 33
 Satz von COURANT 223
 — von JACOBI 51
 — von S. KOWALEWSKAJA 74, 75
 — von LIAPOUNOFF 255
 Sätze von FREDHOLM 366
 SCHAUDER, J. 141, 154, 255, 362, 363, 364
 Schaudersche Ungleichung 364
 SCHERMAN, D. I. 361, 362
 schwache Unstetigkeit 103, 105
 Schwarzsches alternierendes Verfahren 286, 290
 Schwingungen des Innengebiets einer Kugel 444
 — einer Membran 198
 — eines Stabes 208
 Schwingungsgleichung 215
 selbstadjungierter Operator 113
 separabler Hilbertraum 379
 singuläres Integral 42
 SMIRNOW, W. I. 444
 SMOLIZKI, CH. L. 282
 SOBOLEW, S. L. 126, 133, 135, 146, 152, 160
 Sobolewsche Formel 122, 125
 SOLONNIKOW, W. A. 423
 Spektrum eines Operators unter den ersten Randbedingungen 364
 — symmetrischer Operatoren 390
 starke Unstetigkeit 105
 STEKLOW, W. A. 210, 212
 STERNBERG, W. 328
 Streifen 84
 —, charakteristischer 30, 85
 — erster Ordnung 84
 subharmonische Funktion 294
 subparabolische Funktion 421
 superharmonische Funktion 294
 superparabolische Funktion 421
- SWESCHNIKOW, A. G. 329
 symmetrischer Operator 119
 SZEGÖ, G. 122
- Telegraphengleichung 449
 T-Kegel 27
 totale Differentialgleichung 52
 Transformation mittels reziproker Radien 270
 TYCHONOFF, A. N. 401, 402
 Typus der Differentialgleichung für eine gegebene Lösung 78
- Ultrahyperbolische Differentialgleichungen 77
 Unstetigkeit, schwache 103, 105
 —, starke 105
 Unterfunktion 297
 URALZEWA, N. N. 365, 369, 378, 423
 URYSOHN, P. 303
- VEKUA, I. N. 82
 verallgemeinerte Greensche Funktion 199
 — Lösung einer Differentialgleichung 413
 — — der Klasse L_2 151, 153
 — — der Klasse $W_2^1(D)$ 366, 367
 vollständig integrierbares Differentialgleichungssystem 51
 —er Hilbertraum 379
 —es Differentialgleichungssystem 57
 —es Integral 42, 48
 VOLTERRA, V. 122, 178
 Volterrasche Methode 119
 Vorintegral einer Differentialgleichung 93
- WAINBERG, B. R. 330
 Wärmeausbreitung in einem Stab 213
 Wärmegleichgewicht 285
 Wärmeleitungsgleichung 77, 395
 WEBSTER, A. G. 122
 Wellengleichung 77, 104, 120, 144, 440
 WEYL, H. 360
 WIENER, N. 152
 WISCHIK, M. I. 369, 440
- ZAREMBA, S. 275
 zeitliche Veränderliche 77
 zweite grundlegende Ungleichung für elliptische Operatoren 373