

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

H. BEINHOF

Mathematik IV

Höhere Mathematik

LEHRBRIEF 7

Differentialgleichungen

**Herausgeber: Fachgruppe Lehrmaterial für Grundlagenfächer
im Fachschulfernstudium, Dresden**

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
Teil V: Differentialgleichungen	
1. Kapitel: Allgemeines über Differentialgleichungen	
1 Auftreten von Differentialgleichungen, Definition	1
2 Einteilung der Differentialgleichungen	2
3 Geometrische Deutung einer Differential- gleichung I. Ordnung	3
4 Anfangsbedingung	4
Zusammenfassung	5
2. Kapitel: Differentialgleichungen I. Ordnung	
5 Lösung durch Trennen der Veränderlichen	5
6 Lösung durch Substitution	18
Zusammenfassung [5] und [6]	23
7 Lineare Differentialgleichung I. Ordnung	23
a) Homogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung	24
b) Inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung	25
a) Lösung durch Substitution	25
β) Lösung durch Variation der Konstanten ...	28
Zusammenfassung [7]	34
3. Kapitel: Differentialgleichungen II. Ordnung	
8 Einfache Typen der Differentialgleichung II. Ordnung	34
a) $y'' = a$ ($a = \text{konst.}$)	35
b) $y'' = f(x)$	36
9 Die homogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	36
a) Lösung mittels der charakteristischen Gleichung	37
b) Anwendung auf Schwingungsvorgänge	42
Zusammenfassung [8] und [9]	51
10 Die inhomogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	51
Zusammenfassung [10]	63
4. Kapitel: Die geradlinige Bewegung	
Zusammenfassung	70
Antworten und Lösungen	70

Teil V: Differentialgleichungen

1. Kapitel: Allgemeines über Differentialgleichungen

[1] Auftreten von Differentialgleichungen, Definition. In den letzten Lehrbriefen sind Sie schon öfters auf das Wort *Differentialgleichung* gestoßen. So trat in Lehrbrief IV/5, [8], beim *Träger gleicher Festigkeit* die Differentialgleichung

$$\sigma \, dF = F \, \gamma \, dx$$

auf. In dieser Gleichung kommen die Differentiale dF und dx vor. Zur Verallgemeinerung des Begriffes Differentialgleichung wollen wir der vorstehenden die Form

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\gamma}{\sigma} F$$

geben. Hier liegt also eine Beziehung vor, in der die gesuchte Funktion $F = F(x)$ und ihr Differentialquotient $\frac{dF}{dx}$ erscheinen. Wir wollen nun die damals gefundene Lösung

$$F = \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

zur Probe in diese Differentialgleichung einsetzen. Bilden Sie dazu zunächst den Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dx} = \frac{P_0 \gamma}{\sigma^2} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

Ersetzen Sie in der Differentialgleichung $\frac{dF}{dx}$ und F durch die vorstehenden Ausdrücke, so erhalten Sie

$$\frac{P_0 \gamma}{\sigma^2} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} = \frac{\gamma}{\sigma} \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

Sie sehen, daß die im Lehrbrief IV/5, [8], gefundene Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

Eine andere Differentialgleichung ist beispielsweise

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

Sie erkennen darin sofort die Differentialgleichung des freien Falls, wenn Sie s als Weg, t als Zeit und die Konstante g als Erdbeschleunigung ($9,81 \text{ m/s}^2$) deuten. Das Galileische Fallgesetz $s = \frac{1}{2} g t^2$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung. Führen Sie selbst die Probe durch, indem Sie zunächst die zweite Ableitung von s nach t bilden und dann deren Wert in die Differentialgleichung einsetzen.

Wir wollen nun in Verallgemeinerung der soeben aufgestellten Betrachtungen zur Definition des Begriffes Differentialgleichung kommen.

Definition: Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen, einer noch unbekannten Funktion dieser Veränderlichen und den Ableitungen dieser Funktion.

Lösung ist die Funktion, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.

Die Differentialgleichung muß dabei mindestens einen Differentialquotienten enthalten, während x und y selbst nicht aufzutreten brauchen. In dem zuerst angeführten Beispiel fehlte x , während im 2. Beispiel nur die 2. Ableitung auftrat. Symbolisch können Sie eine *Differentialgleichung in der impliziten Form* durch

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

darstellen.

Als Beispiele seien hier die Differentialgleichungen

1. $y' + \frac{x}{y} = 0$
2. $y' - ay = 0$
3. $ay'' - by' + cy = 0$
4. $y^2 + by^2 = 1$
5. $ay'' - by' + cy = \sin x$

angeführt. Wie sie gelöst werden, sollen Sie beim Studium dieses Lehrbriefes kennenlernen. Zur Bedeutung der Differentialgleichungen ist noch zu sagen, daß sie das wichtigste Hilfsmittel zur Lösung physikalischer, technischer Probleme usw. darstellen.

Zunächst aber wollen wir die Begriffsbestimmung noch etwas weiterführen.

[2] Einteilung der Differentialgleichungen. In den in [1] gebrachten Beispielen 1 bis 5 für Differentialgleichungen kommen nur Ableitungen nach der einen Veränderlichen (hier x) vor. In diesem Falle sprechen wir von **gewöhnlichen Differentialgleichungen** im Gegensatz zu den **partiellen Differentialgleichungen**, die mehrere unabhängige Veränderliche und dementsprechend

auch partielle Ableitungen der gesuchten Funktion nach diesen Veränderlichen enthalten.

Weiter werden die Differentialgleichungen nach der Ordnung der höchsten in ihr auftretenden Ableitung unterteilt. Da in den Beispielen 1, 2 und 4 nur die 1. Ableitung von y vorkommt, sprechen wir hier von **Differentialgleichungen I. Ordnung**.

Dagegen stellen die Beispiele 3 und 5 **Differentialgleichungen II. Ordnung** dar, da in ihnen Ableitungen 2. Ordnung auftreten.

Im Beispiel 4 kommen y' und auch y in der 2. Potenz vor, wir nennen die Gleichung deshalb eine **Differentialgleichung I. Ordnung 2. Grades**, während alle anderen **Differentialgleichungen 1. Grades** oder **lineare Differentialgleichungen** darstellen.

Allgemein bestimmt der größte Exponent von y und seinen Ableitungen den Grad der Differentialgleichungen.

[3] Geometrische Deutung einer Differentialgleichung I. Ordnung. Eine Differentialgleichung I. Ordnung $F(x, y, y') = 0$ sei Ihnen in der nach y' aufgelösten (expliziten) Form

$$y' = f(x, y)$$

vorgegeben. Wir wollen uns jetzt über ihre geometrische Deutung klar werden. Wenn Sie sich an Stelle von y' die Veränderliche z denken, dann nimmt die Differentialgleichung die Gestalt der in vorhergehenden Lehrbriefen (vgl. Lbf. IV/3, [12]) behandelten Funktionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen an, die Sie geometrisch als räumliche Fläche darstellen können. Wir wollen jetzt zunächst auch einmal wie bei den dort behandelten Funktionen x und y als zwei voneinander unabhängige Veränderliche ansehen. Dagegen sollen aber die Funktionswerte, die Sie für beliebig gewählte x und y mittels $f(x, y)$ erhalten, in einer anderen Weise gedeutet werden.

Die Art, wie diese Funktionswerte darzustellen sind, liegt sofort auf der Hand, wenn Sie sich noch einmal über die geometrische Bedeutung des Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ Klarheit verschaffen.

y' stellt doch nichts anderes als den Tangens des Winkels dar, den die Tangente an eine Kurve $y = y(x)$ mit der positiven Richtung der x -Achse bildet. Unsere Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ordnet demnach jedem Punkt $(x; y)$ der Ebene eine ganz bestimmte Richtung zu (wohingegen in Lbf. IV/3, [12], die Funktion $z = f(x, y)$ jedem Punkt $(x; y)$ der Ebene einen Punkt im Abstand z von der xy -Ebene zuordnet).

Mit anderen Worten:

Eine Differentialgleichung I. Ordnung bestimmt ein Richtungsfeld.

Im Bild 1 ist für einige Punkte des I. Quadranten das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{y}{x}$ dargestellt.

Lösungen der Differentialgleichung sind nun nach der Definition die Funktionen $y = y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllen. Das bedeutet geometrisch, daß $y = y(x)$ die Gesamtheit der Kurven darstellen muß, die das Richtungsfeld erfüllen, die also in den einzelnen Punkten der Ebene die dort vorgeschriebene Richtung haben müssen. Im Bild 2 sind einige Lösungskurven gemäß dem in Bild 1 dargestellten Richtungsfeld eingezeichnet.

Wie Sie später sehen werden, läßt sich die Lösung einer Differentialgleichung I. Ordnung auf eine einfache, unbestimmte Integration zurückführen. Dann aber muß in der Lösung $y = y(x)$ immer noch eine willkürliche Integrationskonstante C auftreten. Wir wollen in diesem Fall $y = y(x, C)$ die **allgemeine**

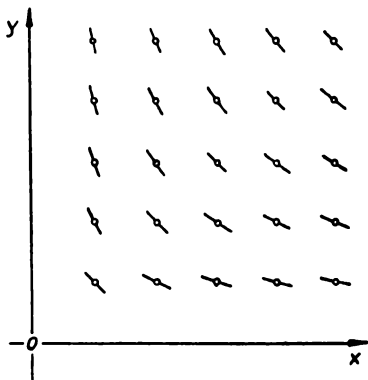


Bild 1

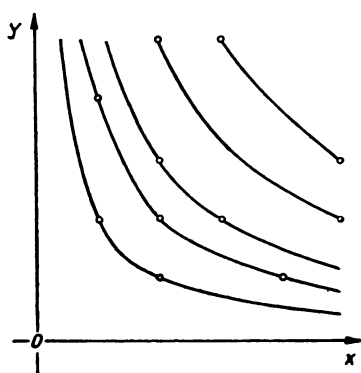


Bild 2

Lösung der Differentialgleichung nennen. Ihr entsprechen unendlich viele Lösungskurven, von denen in Bild 2 einige dargestellt sind. Diese erhalten Sie, wenn Sie der Konstanten C nacheinander verschiedene Werte geben. Für jedes fest gewählte C erhalten Sie dann eine bestimmte Kurve der Schar, wir sprechen dann jeweils von einer **partikulären Lösung der Differentialgleichung**. Die Lösung einer Differentialgleichung wird auch als **Integral der Differentialgleichung** bezeichnet (allgemeines Integral, partikuläres Integral).

[4] Anfangsbedingung. In den Anwendungsbeispielen wird uns meist nur eine ganz bestimmte partikuläre Lösung interessieren. Dann muß also aus der Schar der allgemeinen Lösungskurven eine spezielle Kurve herausgegriffen und der dazugehörige Wert von C bestimmt werden. Dazu genügt bei den Differentialgleichungen I. Ordnung die einfache Angabe, daß zu einem bestimmten $x = x_0$ die Ordinate y den Wert y_0 annehmen soll, d. h. also, daß diejenige Kurve aus-

zuwählen ist, die durch einen vorgegebenen Punkt $(x_0; y_0)$ läuft. Dieses Wertepaar x_0, y_0 nennt man eine **Anfangsbedingung**. Um die Konstante C zu ermitteln, brauchen Sie nur in der allgemeinen Lösung für x und y die gegebenen Werte x_0 und y_0 einsetzen und erhalten so eine Bestimmungsgleichung für C .

Lehrbeispiel 1

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 4x$ lautet $y = 2x^2 + C$. Welche Form hat die partikuläre Lösung mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1, y_0 = 3$?

Lösung:

Da in der partikulären Lösung y den Wert $y_0 = 3$ annehmen muß, wenn für x der Wert $x = 1$ eingesetzt wird, muß

$$3 = 2 \cdot 1 + C$$

oder
sein.

$$C = 1$$

Damit lautet die geforderte partikuläre Lösung

$$\underline{\underline{y = 2x^2 + 1}}$$

Prüfen Sie die Richtigkeit der partikulären Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung nach!

Zusammenfassung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung stellt eine Beziehung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x , einer unbekannten Funktion $y(x)$ und deren Ableitungen dar. Lösung ist jede Funktion $y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllt. Die Ordnung des höchsten auftretenden Differentialquotienten bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung, während der höchste bei y und seinen Ableitungen auftretende Potenzexponent den Grad der Differentialgleichung kennzeichnet.

Eine Differentialgleichung I. Ordnung legt zu jedem Punkt der xy -Ebene eine Richtung fest. Die allgemeine Lösung $y = y(x, C)$ stellt die Gesamtheit der Kurven dar, die dieses Richtungsfeld erfüllen. Eine vorgegebene Anfangsbedingung greift aus dieser Gesamtheit eine einzelne Kurve heraus, indem durch sie für die allgemeine Integrationskonstante C ein ganz bestimmter Wert festgelegt wird. Die diese Kurve kennzeichnende Funktion wird als partikuläre Lösung bezeichnet.

2. Kapitel: Differentialgleichungen I. Ordnung

[5] Lösung durch Trennen der Veränderlichen. Die Differentialgleichungen vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lassen sich einfach nach Trennung der Veränderlichen lösen.

Ersetzen Sie dazu y' durch $\frac{dy}{dx}$, und bringen Sie die nur y als Veränderliche enthaltende Funktion $g(y)$ und das Differential dy auf die eine Seite, die nur x als Veränderliche enthaltende Funktion $f(x)$ und dx auf die andere Seite der Gleichung:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Jetzt können Sie die linke Seite nach y und die rechte nach x integrieren.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Eigentlich tritt auf jeder Seite eine Integrationskonstante auf. Es ist aber üblich, diese auf einer Seite zusammengefaßt zu schreiben.

Die Lösung besitzt die Form

$$G(y) = F(x) + C$$

wobei $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$ und $F(x) = \int f(x) dx$ sind.

Sie können nun meist noch nach y auflösen, so daß Sie dann endlich die allgemeine Lösung in der Form $y = y(x, C)$ bekommen.

Lehrbeispiel 2

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{3} x^2$$

Lösung:

In diesem Beispiel ist $g(y) = 1$ und $f(x) = \frac{1}{3} x^2$. Sie erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} x^2$$

$$dy = \frac{1}{3} x^2 dx$$

$$\int dy = \frac{1}{3} \int x^2 dx + C$$

$$y = \frac{1}{9} x^3 + C$$

Das Richtungsfeld weist in diesem Fall eine besonders einfache Form auf. Da y nur von x abhängig ist, erhalten alle Punkte der Ebene, die auf einer Parallelen zur y -Achse liegen, dieselbe Richtung zugeordnet. Wie Sie aus Bild 3 ersehen,

verlaufen alle Lösungskurven parallel zueinander. Diese einfachste Art der Differentialgleichungen haben Sie bereits als unbestimmtes Integral in Lehrbrief IV/4 kennengelernt.

Lehrbeispiel 3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \, dy = -x \, dx$$

$$\int y \, dy = -\int x \, dx + C_1$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\underline{x^2 + y^2 = C} \quad \text{wobei } C = 2 C_1 \text{ gesetzt ist.}$$

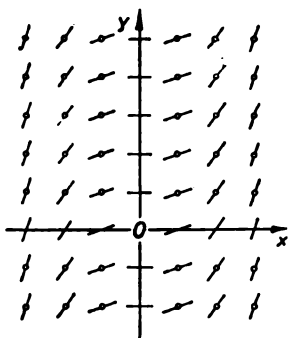


Bild 3

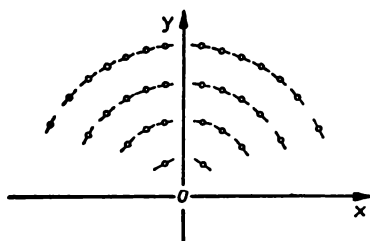


Bild 4

Die Lösungskurven sind nichts anderes als die Schar der konzentrischen Kreise mit dem Radius $\sqrt{C}$ und dem Mittelpunkt $(0; 0)$.

Im Bild 4 ist das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung dargestellt. Da der zum Punkt $P_1(x_1; y_1)$ gehörige Ursprungsstrahl den Richtungsfaktor $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ hat, während die demselben Punkt durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtung $m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$ ist, müssen Ursprungsstrahl und zugeordnete Richtung wegen $m_1 m_2 = -1$ aufeinander senkrecht stehen. Das ist aber die Ihnen bekannte Eigenschaft, daß beim Kreis Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen.

Lehrbeispiel 4

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, in der die rechte Seite x nicht enthält, also $f(x) = 1$ ist!

$$y' = ay$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$\frac{dy}{y} = a dx$$

$$\ln y = ax + C_1$$

$$y = e^{ax+C_1}$$

$$y = e^{ax} e^{C_1}$$

Für den konstanten Faktor e^{C_1} können Sie einfach C schreiben, kommt es doch hier nur darauf an, damit einen willkürlichen Faktor zu kennzeichnen. Die Lösung lautet dann

$$\underline{\underline{y = C e^{ax}}}$$

Sie kommen auf einfacherem Wege zum gleichen Ergebnis, wenn Sie in den Fällen, wo im Integral $\ln$ -Funktionen auftreten, die Integrationskonstante in der Form $\ln C$ ansetzen (dies dürfen Sie jederzeit tun, denn wie bereits mehrfach erwähnt, ist C bzw. C_1 eine willkürliche Konstante). Im vorliegenden Beispiel erhalten Sie

$$\ln y = ax + \ln C$$

$$\ln y - \ln C = ax$$

$$\ln \frac{y}{C} = ax$$

$$\frac{y}{C} = e^{ax}$$

$$\underline{\underline{y = C e^{ax}}}$$

Diese Differentialgleichung ist von außerordentlicher Bedeutung. Wenn Sie bedenken, daß der Differentialquotient y' ein Maß für das Anwachsen der Größe y darstellt, können Sie die vorliegende Differentialgleichung in der Form deuten: Der Zuwachs ist dem augenblicklichen Wert von y proportional.

Diese Differentialgleichung liegt den verschiedensten physikalischen, chemischen und technischen Vorgängen zugrunde. Einen Fall haben Sie bereits bei der Behandlung des Trägers gleicher Festigkeit in Lehrbrief IV/5, [8], kennengelernt.

Im Fall $a > 0$ spricht man von der Differentialgleichung des organischen Wachstums, während man bei $a < 0$ von der des organischen Abklingens spricht.

Lehrbeispiel 5

In sehr vielen Anwendungen liegt eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dt} + a y = b$$

oder

$$\frac{dy}{dt} = b - a y$$

vor ($a > 0$), wobei t die Zeit darstellt. Lösen Sie diese Differentialgleichung!

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{b - a y} &= dt \\ -\frac{1}{a} \ln(b - a y) &= t + C_1 \\ \ln(b - a y) &= -a t - a C_1 \\ b - a y &= C_2 e^{-a t} \quad \text{mit } C_2 = e^{-a C_1} \\ y &= \frac{1}{a} (b - C_2 e^{-a t}) \end{aligned}$$

Wir wollen hier noch die partikuläre Lösung aufstellen, die durch die Anfangsbedingung $t = 0, y = 0$ gekennzeichnet wird. Wir suchen also die Lösungskurve, die durch den Ursprung des ty -Systems läuft. Setzen Sie zur Bestimmung des C_2 wieder die gegebenen Werte in die gefundene allgemeine Lösung ein. Sie erhalten

$$0 = \frac{1}{a} (b - C_2 e^0) \quad \text{oder} \quad C_2 = b$$

und damit

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{a} (1 - e^{-a t})}}$$

Wir wollen diese Lösung näher diskutieren. Der Wert des Gliedes $e^{-a t}$ nimmt für wachsendes t immer mehr ab, während sich $(1 - e^{-a t})$ dem Wert 1 nähert.

Insgesamt wächst y von 0 ab und nähert sich asymptotisch dem Wert $\frac{b}{a}$, wenn t das Intervall $0 \leq t < +\infty$ durchläuft. Bezeichnen wir diesen „Endwert“ $\frac{b}{a}$ mit y_E , so läßt sich die Lösung in der Form

$$y = y_E (1 - e^{-a t})$$

schreiben.

Von Bedeutung ist hier der Wert $t = \frac{1}{a} = \tau$, die sogenannte Zeitkonstante.
Für dieses t wird nämlich

$$\begin{aligned} y_\tau &= y_E \left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &= y_E \left(1 - \frac{1}{2,718}\right) \\ &= 0,632 y_E \end{aligned}$$

Nach dem Verstreichen dieser Zeit τ hat also y rund 63 % des Endwertes erreicht.

Bilden Sie nun noch den Differentialquotienten der Lösungsfunktion.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y' = y_E a e^{-at} \\ &= \frac{y_E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Für $t = 0$ haben Sie speziell

$$y' = \frac{y_E}{\tau} = \operatorname{tg} \alpha$$

Im Bild 5 erkennen Sie, daß auf Grund dieser Beziehung die Länge der Projektion der Tangente zwischen Berührungspunkt und Parallele zur t -Achse im Abstand y_E auf diese Parallele konstant $= \tau$ ist. Den Beweis können Sie leicht mit Hilfe der analytischen Geometrie führen.

Mit Hilfe der Zeitkonstanten τ können wir noch die Halbwertszeit t_H ermitteln, die verstreichen muß, damit $y = \frac{1}{2} y_E$ ist.

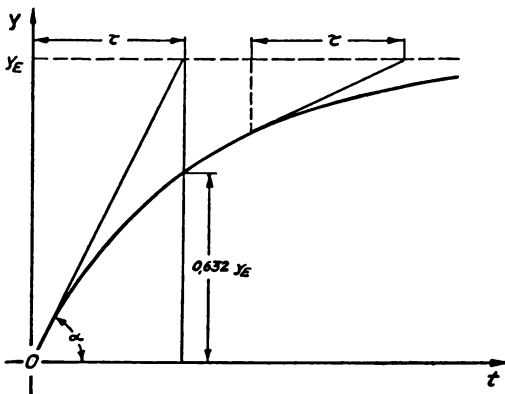


Bild 5

Aus der Lösung finden Sie

$$\frac{1}{2} y_E = y_E \left(1 - e^{-\frac{t_H}{\tau}}\right)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t_H}{\tau}}$$

$$e^{+\frac{t_H}{\tau}} = 2$$

$$t_H = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \approx \underline{\underline{0,7 \tau}}$$

Den soeben durchgesprochenen Typ einer Differentialgleichung wollen wir noch in einem Anwendungsbeispiel kennenlernen.

Lehrbeispiel 6

Einem Heizkörper werde in der Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge zugeführt. Wie erwärmt sich der Heizkörper unter Berücksichtigung des Wärmeüberganges in den Außenraum?

Es sei dT = Temperaturänderung des Heizkörpers in der Zeit dt ,
 m = Masse des Körpers,
 c = spezifische Wärme des Heizkörpers
 α = Wärmeübergangszahl von der Körperoberfläche zur Luft des Außenraumes (Wärmemenge pro Oberflächeneinheit, 1° Temperaturunterschied und Zeiteinheit),
 Q = zugeführte Wärmemenge pro Zeiteinheit,
 F = Oberfläche des Heizkörpers,
 T_1 = Außentemperatur,
 $T - T_1$ = Übertemperatur (Heizkörpertemperatur — Außentemperatur).

Lösung:

Während der Zeit dt wird

1. dem Heizkörper die Wärmemenge $Q dt$ zugeführt,
2. im Heizkörper die Wärmemenge $m c dT$ gespeichert und zur Erwärmung des Körpers benutzt und
3. an den Außenraum die Wärmemenge $F(T - T_1) \alpha dt$ abgeführt.

Auf Grund des Erhaltungssatzes muß dann die Summe der Wärmemengen 2 und 3 gleich der zugeführten Wärmemenge 1 sein.

$$m c dT + F(T - T_1) \alpha dt = Q dt$$

oder

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{m c} - \frac{F \alpha}{m c} (T - T_1)$$

Führen Sie zur Abkürzung noch $a = \frac{F \alpha}{m c}$ und $b = \frac{Q}{m c}$ ein.

$$\frac{dT}{dt} = b - a(T - T_1)$$

$$\frac{dT}{b - a(T - T_1)} = dt$$

Nach der Integration erhalten Sie

$$-\frac{1}{a} \ln [b - a(T - T_1)] = t + C_1$$

$$\ln [b - a(T - T_1)] = -at - aC_1$$

$$b - a(T - T_1) = C_2 e^{-at} \quad \text{mit } C_2 = e^{-aC_1},$$

$$T - T_1 = \frac{b}{a} - C e^{-at} \quad \text{wobei } C = \frac{C_2}{a} \text{ ist.}$$

Aus der Anfangsbedingung $t = 0$, $T = T_1$ (Anfangstemperatur des Heizkörpers = Außentemperatur) ergibt sich $C = \frac{b}{a}$ und damit als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} T - T_1 &= \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) \\ &= \frac{Q}{Fa} \left(1 - e^{-\frac{Fa}{mc} t} \right) \end{aligned}$$

oder mit Einführung der Temperaturdifferenz im Endzustand ($t \rightarrow \infty$) $T_E = \frac{Q}{Fa}$

$$\underline{T = T_1 + T_E \left(1 - e^{-\frac{Fa}{mc} t} \right)}$$

Weisen Sie nach, daß der Exponent von e dimensionslos ist, d. h., daß $\frac{mc}{Fa}$ die Dimension einer Zeit hat!

Lehrbeispiel 7

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = y \sin x$$

Lösung:

$$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx$$

$$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx$$

$$\ln y = -\cos x + \ln C$$

$$\underline{y = C e^{-\cos x}}$$

Lehrbeispiel 8

Es soll untersucht werden, wie die Bewegung eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfenen Körpers unter Berücksichtigung der Luftreibung verläuft.

Lösung:

Experimentell wurde ermittelt, daß die Luftreibung bei langsamen Bewegungen der Geschwindigkeit und bei mittleren Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor k ist u. a. von der Form und Querschnittsfläche des Körpers und von der Wichte der Luft abhängig.

Nach dem grundlegenden Gesetz von Newton muß die Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung sein. Welche Kräfte wirken nun auf den Körper?

Da ist einmal die entgegen der Bewegung wirkende Luftreibung

$$W = -k v^2$$

Das Minuszeichen soll dabei ausdrücken, daß W der Richtung von v entgegengesetzt ist. Weiterhin wirkt infolge der Erdanziehung das Gewicht des Körpers

$$G = -mg$$

der Bewegung entgegen.

Nach dem erwähnten Newtonschen Grundgesetz ist dann

$$\begin{aligned} m b &= G + W \\ m b &= -mg - k v^2 \\ &= -k \left(\frac{mg}{k} + v^2 \right) \end{aligned}$$

Wenn Sie noch zur Abkürzung $\frac{mg}{k} = a^2$ setzen, erhalten Sie mit $b = \frac{dv}{dt}$ die Differentialgleichung der Bewegung in der Form

$$\text{I} \quad m \frac{dv}{dt} = -k(a^2 + v^2)$$

Mit

$$\text{II} \quad \frac{m}{k} = \frac{a^2}{g}$$

wird

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{a^2}{g} \frac{dv}{a^2 + v^2} \\ t &= -\frac{a}{g} \arctg \frac{v}{a} + C \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten C müssen Sie eine zutreffende Anfangsbedingung aufstellen. In der Voraussetzung war festgelegt, daß die Abwurfgeschwindigkeit den Wert v_0 haben soll. Zählen Sie die Zeit vom Moment des Abwurfes, so finden Sie die gesuchte Bedingung zu

$$t = 0, v = v_0$$

Eingesetzt, ergibt sich damit für C

$$0 = -\frac{a}{g} \arctg \frac{v_0}{a} + C$$

oder

$$C = \frac{a}{g} \arctg \frac{v_0}{a}$$

und für die partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$t = \frac{a}{g} \left(\arctg \frac{v_0}{a} - \arctg \frac{v}{a} \right)$$

Dieser Lösung haftet nun noch der Mangel an, daß die Zeit t als Funktion der Geschwindigkeit v und nicht umgekehrt v als Funktion von t dargestellt ist. Wir wollen deshalb nach v auflösen. Arbeiten Sie die folgenden Zeilen gründlich durch! Lernen Sie hier einmal eine etwas schwierigere Umformung kennen!

Nach der gefundenen Gleichung ist

$$\frac{gt}{a} = \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a}$$

Um v aus seiner Umklammerung als Argument der $\operatorname{arc\,tg}$ -Funktion zu befreien, bilden Sie von beiden Seiten den Tangens.

$$\operatorname{tg} \frac{gt}{a} = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} \right)$$

Die rechte Seite müssen Sie nun mit dem Additionstheorem der Tangensfunktion umformen. Setzen Sie dazu

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{a} \qquad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{a} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{v}{a}$$

Die rechte Seite der obenstehenden Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{gt}{a}$ wird damit zu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{tg} (\alpha - \beta) &= \frac{\frac{v_0}{a} - \frac{v}{a}}{1 + \frac{v_0 v}{a^2}} = \frac{a v_0 - a v}{a^2 + v_0 v} \end{aligned}$$

und die ganze Gleichung zu

$$\operatorname{tg} \frac{gt}{a} = \frac{a v_0 - a v}{a^2 + v_0 v}$$

Lösen Sie jetzt nach v auf. Sie erhalten nach kurzer Rechnung

$$v = a \frac{v_0 - a \operatorname{tg} \frac{gt}{a}}{a + v_0 \operatorname{tg} \frac{gt}{a}} \qquad \text{mit } a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Jetzt soll uns die Länge des in der Zeit t zurückgelegten Weges s interessieren. Setzen Sie dazu

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{gt}{a} = \frac{\sin \frac{gt}{a}}{\cos \frac{gt}{a}}$$

dann wird die für die Geschwindigkeit v gefundene Formel nach Trennung der Variablen zu

$$ds = a \frac{v_0 \cos \frac{gt}{a} - a \sin \frac{gt}{a}}{a \cos \frac{gt}{a} + v_0 \sin \frac{gt}{a}} dt$$

Es wird Ihnen sicher auffallen, daß bis auf die konstanten Faktoren die Ableitung des Nenners im Zähler steht. Das legt uns die Substitution

$$u = a \cos \frac{gt}{a} + v_0 \sin \frac{gt}{a}$$

nahe. Zur Umrechnung von dt in du bilden Sie den Differentialquotienten

$$\frac{du}{dt} = -g \sin \frac{gt}{a} + \frac{v_0 g}{a} \cos \frac{gt}{a}$$

Der Zähler vereinfacht sich damit zu

$$\left(v_0 \cos \frac{gt}{a} - a \sin \frac{gt}{a} \right) dt = \frac{a}{g} du$$

während die Differentialgleichung die einfache Form

$$ds = \frac{a^2}{g} \frac{du}{u}$$

und die allgemeine Lösung die Gestalt

$$s = \frac{a^2}{g} \ln u + C$$

annimmt. Nach Ersetzen von u ist

$$s = \frac{a^2}{g} \ln \left(a \cos \frac{gt}{a} + v_0 \sin \frac{gt}{a} \right) + C$$

Legen Sie als Anfangsbedingung zweckmäßigerweise $t = 0$, $s = 0$ fest, und setzen Sie dies ein, dann ergibt sich für C

$$0 = \frac{a^2}{g} \ln (a \cos 0 + v_0 \sin 0) + C$$

oder
$$C = -\frac{a^2}{g} \ln a$$

Die partikuläre Lösung unserer Wurfbewegung ist dann

$$s = \frac{a^2}{g} \ln \left(a \cos \frac{gt}{a} + v_0 \sin \frac{gt}{a} \right) - \frac{a^2}{g} \ln a$$

III
$$s = \frac{a^2}{g} \ln \left(\cos \frac{gt}{a} + \frac{v_0}{a} \sin \frac{gt}{a} \right)$$

Interessant ist in diesem Beispiel noch die erreichte Steighöhe H und die dazu erforderliche Steigzeit T .

Im Gipfelpunkt der Bewegung muß $v = 0$ sein. Sie erhalten mit $t = T$, $v = 0$

$$0 = a \frac{v_0 - a \operatorname{tg} \frac{gT}{a}}{a + v_0 \operatorname{tg} \frac{gT}{a}}$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{gT}{a} = \frac{v_0}{a}$$

$$T = \frac{a}{g} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_0}{a}$$

Zur Ermittlung der Steighöhe setzen Sie die gefundene Steigzeit in die für den Weg s gefundene Formel ein. Sie erhalten

$$H = \frac{a^2}{g} \ln \left(\cos \frac{gT}{a} + \frac{v_0}{a} \sin \frac{gT}{a} \right)$$

Nun war doch $\operatorname{tg} \frac{gT}{a} = \frac{v_0}{a}$, Sie brauchen aber zum Einsetzen $\cos \frac{gT}{a}$ und $\sin \frac{gT}{a}$. Sie müssen also die Sinus- bzw. Kosinusfunktion durch die Tangensfunktion ausdrücken. Im Lehrbrief „Trigonometrie 1“ haben Sie diese Umformungen kennengelernt. Es war

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

bzw.
$$\cos \frac{gT}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{gT}{a}}} \quad \sin \frac{gT}{a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{gT}{a}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{gT}{a}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \quad = \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}$$

Damit erhalten Sie für die Steighöhe

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{a^2}{g} \ln \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} + \frac{v_0^2}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right) \\
 &= \frac{a^2}{g} \ln \frac{\sqrt{a^2 + v_0^2}}{a} \\
 H &= \frac{a^2}{2g} \ln \left[1 + \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

In sämtlichen Ergebnissen kommt die Konstante $a = \sqrt{\frac{m}{k} g}$ vor, das bedeutet aber nichts anderes als die Abhängigkeit der Bewegungsgesetze nicht nur von dem Faktor k , sondern auch vom Gewicht des geworfenen Körpers. In der Physik haben Sie im Gegensatz dazu bei der Behandlung der reibungsfreien Bewegung die Unabhängigkeit von der Masse bzw. vom Gewicht des bewegten Gegenstandes kennengelernt.

Wir wollen hier noch kurz den für s gefundenen Wert **III** mit Hilfe der ersten Glieder der Taylorsche Reihe entwickeln.

Die Taylorsche Reihe nimmt mit den im Beispiel auftretenden Größen t und $s = s(t)$ die Form

$$s(t) = s(0) + s'(0) \cdot t + \frac{s''(0) \cdot t^2}{2!} + \dots$$

an.

Auf Grund der Anfangsbedingung ist

$$s(0) = 0$$

Die Bedeutung von $s'(t)$ ist $\frac{ds}{dt} = v$, so daß

$$s'(0) = v_0$$

wird.

Die 2. Ableitung des Weges s nach der Zeit t ist die Beschleunigung

$$b = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Aus Gleichung **I** folgt dafür

$$s''(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} (a^2 + v^2)$$

Damit wird

$$s''(0) = -\frac{k}{m} (a^2 + v_0^2)$$

Diese Werte in die Taylorsche Reihe eingesetzt, ergibt

$$s(t) = 0 + v_0 \cdot t - \frac{k}{2m} (a^2 + v_0^2) t^2 + \dots$$

Gleichung II lautete $\frac{k}{m} = \frac{g}{a^2}$

Somit wird

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2a^2} (a^2 + v_0^2) t^2 + \dots$$

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{g v_0^2 t^2}{2 a^2} + \dots$$

In den folgenden Gliedern treten im Nenner immer höhere Potenzen von a^2 , bzw. bei Ersatz des a^2 durch $\frac{mg}{k}$ im Zähler Potenzen von k auf. Da in den ersten Gliedern der Entwicklung die für die Luftreibung maßgebliche Konstante k fehlt, sind sie von der Luftreibung unabhängig. Sie stellen nichts anderes als das Bewegungsgesetz für den reibungsfreien Wurf dar ($k = 0$):

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Übungen

Lösen Sie die Differentialgleichungen

1. $y' = \frac{y}{x}$. Diskutieren Sie das Richtungsfeld und die Lösungskurven!
2. $ax - byy' = 0$
3. $y' - y \sin 2x = 0$
4. $7x - 3yy' = 2$
5. $yy' - x^2 = 3$
6. $\sin x + y' \sin y = 0$

[6] Lösung durch Substitution. So wie Sie bei der Integralrechnung zuweilen erst nach Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen zum Ziel kamen, macht sich auch verschiedentlich bei der Lösung von Differentialgleichungen eine Substitution erforderlich. Leider können wir auch hier keine bestimmten Regeln für die Wahl der neuen Veränderlichen aufstellen. Sie sollen deshalb im folgenden nur an wenigen Beispielen dieses Verfahren kennenlernen.

Lehrbeispiel 9

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = (4x + 9y)^2$!

Lösung :

Sie setzen hier

$$u = 4x + 9y$$

Differenzieren Sie beide Seiten der Substitutionsgleichung nach x und bedenken Sie dabei, daß y von x abhängig ist, also nach der Kettenregel zu differenzieren ist.

$$\frac{du}{dx} = 4 + 9 \frac{dy}{dx}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9} \frac{du}{dx} - \frac{4}{9}$$

Setzen Sie das in die Differentialgleichung ein, so erhalten Sie

$$\frac{1}{9} \frac{du}{dx} - \frac{4}{9} = u^2$$

Diese neue Differentialgleichung für eine Funktion $u = u(x)$ können Sie wieder nach Trennung der Veränderlichen lösen

$$\frac{du}{u^2 + \frac{4}{9}} = 9 dx$$

$$\frac{3}{2} \arctan \frac{3u}{2} = 9x + C_1$$

$$u = \frac{2}{3} \operatorname{tg}(6x + C) \quad \text{mit } C = \frac{2}{3} C_1$$

Führen Sie nun wieder y ein, so ist die allgemeine Lösung

$$y = \frac{2}{27} \operatorname{tg}(6x + C) - \frac{4}{9} x$$

Von größerer Bedeutung ist die Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

in der die Veränderlichen nur in der Verbindung $\frac{y}{x}$ vorkommen.

In dieser Differentialgleichung führen Sie mit Hilfe der Substitution

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{oder} \quad y = ux$$

eine neue Veränderliche u ein. Die Differentiation ergibt hierbei

$$y' = \frac{d y}{d x} = \frac{d u}{d x} x + u$$

und damit die Differentialgleichung

$$\frac{d u}{d x} x + u = f(u)$$

Diese Differentialgleichung können Sie dann ohne weiteres durch Trennung der Veränderlichen lösen. Es ist nämlich

$$\frac{d u}{f(u) - u} = \frac{d x}{x}$$

und

$$\int \frac{d u}{f(u) - u} = \ln x + C$$

Nach Auswertung des links stehenden Integrals können Sie dann wieder y einführen.

Meist liegt jedoch eine derartige Differentialgleichung noch nicht gleich in der erwähnten Form vor. In vielen Fällen kommen Sie zum Ziel, indem Sie die Differentialgleichung zunächst nach y' auflösen und Zähler und Nenner des auf der rechten Seite stehenden Bruches durch die höchste auftretende Potenz von x dividieren.

Lehrbeispiel 10

Lösen Sie die Differentialgleichung $x^2 - y^2 + 2 x y y' = 0!$

Lösung:

a) Zurückführung auf die Form $y' = f(x, y)$

Die Umstellung ergibt

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2 x y}$$

β) Division durch die höchste Potenz von x und dadurch Zurückführung auf die

Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \frac{y}{x}}$$

γ) Substitution

$$u = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u$$

$$\frac{du}{dx} x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{u^2 + 1}{2u}$$

δ) Trennung der Veränderlichen

$$\frac{2u}{u^2 + 1} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln x + \ln C$$

(Hier wurde gleich $\ln C$ statt C_1 geschrieben)

$$= \ln \frac{C}{x}$$

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}$$

ε) Wiedereinführung von y

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}$$

$$y^2 + x^2 = Cx$$

oder

$$\underline{\underline{x^2 - Cx + y^2 = 0}}$$

Die Lösungskurven sind die Kreise $\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$ mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{C}{2}; 0\right)$ und dem Radius $\frac{C}{2}$.

Lehrbeispiel 11

Welche Kurven schneiden alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel ψ (ψ sei dabei verschieden von 90°)?

Lösung:

Nach Bild 6 ist

$$\varphi + \psi = \alpha \quad \text{oder} \quad \psi = \alpha - \varphi$$

Da der Differentialquotient y' der gesuchten Kurve mit $\tan \alpha$ identisch

ist, während $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ ist, wobei x

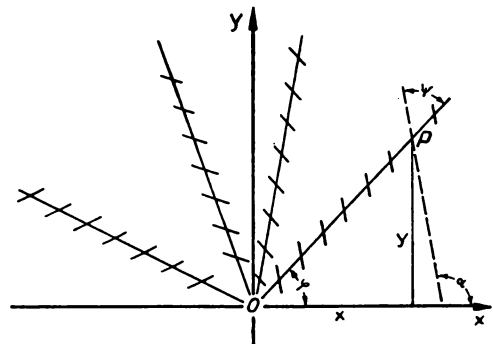


Bild 6

und y die Koordinaten des Schnittpunktes der Kurve mit einem Radiusvektor darstellen, erscheint es zweckmäßig, die Beziehung der Winkel φ , ψ und α durch eine Beziehung zwischen den Tangenswerten zu ersetzen. Es ergibt sich

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}$$

Ersetzen Sie noch $\operatorname{tg} \psi$ durch $\frac{1}{a}$ (das dürfen Sie tun, da sowohl $\operatorname{tg} \psi$ als auch $\frac{1}{a}$ nur der Ausdruck für eine der jeweiligen Aufgabenstellung entsprechende Konstante ist), so erhalten Sie mit

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y' \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \frac{y}{x}}$$

Lösen Sie nach y' auf, und bringen Sie die Differentialgleichung auf die Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y' = - \frac{a \frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - a}$$

Substitution:

$$\frac{d u}{d x} x + u = - \frac{a u + 1}{u - a}$$

$$\frac{d u}{d x} x = - \frac{u^2 + 1}{u - a}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{u - a}{u^2 + 1} du = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du - a \int \frac{du}{u^2 + 1} = - \ln x + \ln C$$

$$\frac{1}{2} \ln (u^2 + 1) - a \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = + \ln \frac{C}{x}$$

$$\ln \frac{x}{C} \sqrt{u^2 + 1} = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$$

$$\frac{x}{C} \sqrt{u^2 + 1} = e^{a \operatorname{arc} \operatorname{tg} u}$$

Wiedereinführung von y :

$$\frac{x}{C} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = e^{a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

Das Auftreten von $\sqrt{x^2 + y^2}$ und $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ legt hier noch die Einführung von Polarkoordinaten nahe.

Sie erhalten mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

die Lösungskurven

$$r = C e^{a\varphi}$$

als logarithmische Spiralen, wobei C der Wert von r für $\varphi = 0$ ist. Sie werden sich jetzt sicher an das Lehrbeispiel 6 in Lehrbrief IV/5, [3], erinnern. Dort hatten wir schon nachgewiesen, daß die logarithmischen Spiralen alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel schneiden.

Übungen

Lösen Sie die Differentialgleichungen

7. $y' = (x + y)^2$ 8. $x y' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
 9. $(2y - 5x) y' = 2x + 5y$ 10. $x + yy' = 2y$

Zusammenfassung [5] und [6]

In [5] lernten Sie ein Verfahren zur Lösung einiger Differentialgleichungen I. Ordnung kennen. Die Trennung der beiden auftretenden Veränderlichen x und y und nachfolgende Integration führt bei all den Differentialgleichungen zum Ziel, die sich in der Form $y' = f(x) g(y)$ darstellen lassen.

Zuweilen lassen sich auch andere Differentialgleichungen I. Ordnung durch Einführung einer neuen Veränderlichen auf diesen Typ zurückführen. Sie haben dabei die gegebene Differentialgleichung zwischen x , y und y' mit Hilfe der Substitution $u = u(x, y)$ in eine entsprechende Gleichung zwischen x , u und u' umzuformen.

[7] Lineare Differentialgleichung I. Ordnung. Die lineare Differentialgleichung I. Ordnung hat die Form

$$y' + g(x) y = h(x)$$

Ist die rechts stehende Funktion $h(x)$, die „*Störungsfunktion*“, gleich Null, so wollen wir die Differentialgleichung

$$y' + g(x) y = 0$$

als **homogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung** und im anderen Fall $h(x) \neq 0$ als **inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung** bezeichnen.

a) Homogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung

Diesen homogenen Fall können Sie wieder sofort nach Trennung der Veränderlichen lösen. Es ist

$$\frac{d y}{d x} = - g(x) y$$

$$\frac{d y}{y} = - g(x) d x$$

$$\ln y = - \int g(x) d x + \ln C$$

$$\underline{\underline{y = C e^{-\int g(x) dx}}}$$

Lehrbeispiel 12

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{x}{1 + x^2} y = 0$$

Lösung:

$$\frac{d y}{y} = \frac{x}{1 + x^2} d x$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + \ln C$$

Auch hier haben wir wieder die Integrationskonstante in der Form $\ln C$ angesetzt, da auf beiden Seiten der Lösung Logarithmen stehen.

$$\ln y = \ln (C \sqrt{1 + x^2})$$

$$\underline{\underline{y = C \sqrt{1 + x^2}}}$$

Lehrbeispiel 13

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y \cos x = 0$$

Lösung:

$$\frac{dy}{y} = \cos x \, dx$$

$$\ln y = \sin x + \ln C$$

$$\underline{\underline{y = C e^{\sin x}}}$$

b) *Inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung*

$$y' + g(x)y = h(x)$$

Wir wollen hier zwei Lösungsverfahren durchsprechen. Wenn auch das erste Verfahren eleganter ist, sollen Sie doch auch das zweite Verfahren kennenlernen, denn Sie müssen beim Lösen einiger Differentialgleichungen II. Ordnung einen ähnlichen Weg beschreiten.

a) Lösung durch Substitution

Ehe wir diese Methode an der allgemeinen Differentialgleichung durchführen, sollen Sie sie erst an einem Lehrbeispiel kennenlernen.

Lehrbeispiel 14

Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x} y = x$$

Lösung:

Führen Sie eine neue Funktion $u = u(x)$ mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \quad \left(u' = \frac{du}{dx} \right)$$

ein, wobei die rechte Seite gleich dem Faktor des y -Gliedes der gegebenen Differentialgleichung ist. Die Trennung der Veränderlichen ergibt hier

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{x} \, dx$$

$$\ln u = \ln x$$

$$u = x$$

Sie werden in der Lösung die Integrationskonstante vermissen. Es kommt in dieser Teilaufgabe aber nur auf die Herstellung einer partikulären Lösung an, und die haben wir mit $C = 0$ erhalten. Die eigentliche Differentialgleichung hat nun die Form

$$y' + \frac{u'}{u} y = x$$

angenommen. Multiplizieren Sie beide Seiten mit u :

$$y'u + u'y = ux$$

dann erkennen Sie auf der linken Seite den Differentialquotienten des Produktes $u \cdot y$. Nachdem Sie noch auf der rechten Seite $u = x$ setzen (gemäß der partikulären Lösung der durch die Substitution erhaltenen Differentialgleichung mit $u = u(x)$), können Sie jetzt die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d}{dx} (u \cdot y) = x^2$$

schreiben. Führen Sie die Integration der beiden Seiten durch.

$$u y = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \frac{1}{u} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$$

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

Wir wollen jetzt den Lösungsgang noch einmal an der allgemeinen Form der linearen Differentialgleichung I. Ordnung demonstrieren.

Sie haben in der Differentialgleichung

$$y' + g(x) y = h(x)$$

den Faktor $g(x)$ durch $\frac{u'}{u}$ zu ersetzen und ein partikuläres Integral ($C = 0$) der so entstehenden Differentialgleichung

$$\frac{u'}{u} = g(x)$$

zu bilden, indem Sie einfach nach Trennung der Veränderlichen

$$\frac{du}{u} = g(x) dx$$

integrieren:

$$\ln u = \int g(x) dx$$

$$u = e^{\int g(x) dx}$$

Die Differentialgleichung, die jetzt die Form

$$y' + \frac{u'}{u} y = h(x)$$

hat, müssen Sie nun mit u multiplizieren, so daß auf der linken Seite die Ableitung des Produktes $u \cdot y$ steht.

$$y' u + u' y = u h(x)$$

oder (mit dem partikulären Integral $u = e^{\int g(x) dx}$)

$$\frac{d}{dx}(u y) = h(x) e^{\int g(x) dx}$$

$$u y = \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx + C$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen Differentialgleichung I. Ordnung ist dann

$$y = e^{-\int g(x) dx} \left[\int h(x) e^{\int g(x) dx} dx + C \right]$$

Es wäre vollkommen falsch, wollten Sie eine vorliegende Differentialgleichung nach dieser Formel lösen. An dieser allgemeinen Durchrechnung sollten Sie nur noch einmal den formalen Lösungsgang kennenlernen, den Sie sich einprägen müssen.

Lehrbeispiel 15

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + y \sin x = \sin x$

Lösung:

Sie setzen $\frac{u'}{u} = \sin x$

und erhalten nach Trennung der Variablen

$$\frac{du}{u} = \sin x dx$$

$$\ln u = -\cos x$$

$$u = e^{-\cos x}$$

Damit erhält die Differentialgleichung die Gestalt

$$y' + \frac{u'}{u} y = \sin x$$

$$y' u + u' y = \sin x e^{-\cos x}$$

$$u y = \int \sin x e^{-\cos x} dx + C$$

Substitution:

$$v = -\cos x$$

$$dv = \sin x dx$$

$$= \int e^v dv + C$$

$$= e^{-\cos x} + C$$

$$y = \frac{e^{-\cos x}}{u} + \frac{C}{u} = \frac{e^{-\cos x}}{e^{-\cos x}} + \frac{C}{e^{-\cos x}}$$

$$\underline{\underline{y = 1 + C e^{\cos x}}}$$

β) Lösung durch Variation der Konstanten

Sie sollen nun das andere, von Lagrange stammende Verfahren zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kennenlernen.

Wir müssen hierzu einen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen heranziehen, auf dessen Beweis verzichtet werden soll.

Er lautet:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die Lösung einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung I. Ordnung erfolgt also in zwei Schritten:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, die sich nach Streichung des Störungsgliedes ergibt;
2. Bestimmen einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Machen Sie sich gleich an Hand eines Lehrbeispielles mit der Art des Lösungsganges vertraut. Es soll dazu die Differentialgleichung benutzt werden, die Sie schon im letzten Lehrbeispiel gelöst haben.

Lehrbeispiel 16

Gesucht ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y' + y \sin x = \sin x$$

Lösung:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' + y \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$$

$$\frac{dy}{y} = -\sin x \, dx$$

$$\ln y = \cos x + \ln C$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\underline{y_h = C e^{\cos x}}$$

Probe:

$$-C e^{\cos x} \sin x + C e^{\cos x} \sin x = 0$$

Der Index h soll andeuten, daß es sich bei y_h um die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung handelt.

2. Bestimmen einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Um nun zur Lösung der inhomogenen Gleichung zu kommen, müssen Sie y_h so umgestalten, daß sich beim Einsetzen in die linke Seite nicht der Wert 0, sondern $\sin x$ ergibt, so wie es die rechte Seite der inhomogenen Differentialgleichung verlangt. Ersetzen Sie dazu das C in y_h durch eine (noch unbekannte) Funktion $C(x)$. Diese Abänderung bezeichnet man allgemein als *Variation der Konstanten*. Sie erhalten so als Ansatz für die inhomogene Gleichung

$$y = C(x) e^{\cos x}$$

Zur Bestimmung der Funktion $C(x)$ haben Sie diese in die Differentialgleichung einzusetzen. Bilden Sie dazu mit Hilfe der Produktregel der Differentialrechnung

$$y' = C'(x) e^{\cos x} - C(x) e^{\cos x} \sin x$$

Damit wird die inhomogene Differentialgleichung zu

$$C'(x) e^{\cos x} - C(x) e^{\cos x} \sin x + C(x) e^{\cos x} \sin x = \sin x$$

Sie erkennen, daß sich das 2. und 3. Glied der linken Seite gegenseitig aufheben. Das ist kein Zufall, denn $y = C(x) e^{\cos x}$ ist mit konstantem $C(x)$ Lösung der homogenen Differentialgleichung, und diese beiden Glieder ergaben sich mit $C(x) = C$ beim Einsetzen von y_h in die homogene Gleichung.

Es besteht danach für die Funktion $C(x)$ die Differentialgleichung

$$C'(x) e^{\cos x} = \sin x,$$

die Sie nach Division durch $e^{\cos x}$ bzw. Multiplikation mit $e^{-\cos x}$ sofort durch Integration lösen können.

$$C'(x) = e^{-\cos x} \sin x$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{-\cos x} \sin x \, dx \\ &= e^{-\cos x} \end{aligned}$$

Auch hier können Sie auf eine weitere Integrationskonstante verzichten, da es nur auf die Gewinnung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung ankommt.

Es ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (angedeutet durch den Index i)

$$y_i = C(x) e^{\cos x} = e^{-\cos x} \cdot e^{\cos x}$$

$$\underline{\underline{y_i = 1}}$$

Im vorliegenden Fall erhalten Sie nach dem am Anfang dieses Unterabschnittes stehenden Satz als allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_i$$

$$\underline{\underline{y = C e^{\cos x} + 1}}$$

in Übereinstimmung mit der Lösung aus Lehrbeispiel 15.

Lehrbeispiel 17

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

Lösung:

1. Homogene Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\ \ln y &= \ln x + \ln C \\ \underline{\underline{y_h = C x}}\end{aligned}$$

2. Inhomogene Differentialgleichung

(Statt $C(x)$ soll der Einfachheit halber nur C geschrieben werden.)

Ansatz: $y = C x \quad y' = C' x + C$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}C'x + C - C &= x \cos x \\ C'x &= x \cos x \\ C' &= \cos x \\ C(x) &= \sin x\end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$\underline{\underline{y_i = x \sin x}}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_i \\ y &= \underline{\underline{C x + x \sin x}}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 18

Zur Zeit $t = 0$ werde an einen stromlosen Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R und der Selbstinduktion L eine Spannungsquelle mit der Wechselspannung $u = U_m \sin \omega t$ angeschlossen. Wie ist der zeitliche Verlauf der Stromstärke i ?

Lösung:

Der Ohmsche Widerstand ruft einen Spannungsabfall $i \cdot R$ hervor, während die Selbstinduktion infolge der zeitlichen Veränderung der Stromstärke eine gegen-

elektromotorische Kraft $-L \cdot \frac{d i}{d t}$ erzeugt. Nach dem II. Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller elektromotorischen Kräfte gleich der Summe aller Spannungsabfälle.

Also ist

$$u - L \frac{d i}{d t} = i \cdot R \quad u = U_m \sin \omega t$$

$$U_m \sin \omega t - L \frac{d i}{d t} = i \cdot R$$

Hier liegt nun wieder eine inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung vor, die in der Normalform

$$\frac{d i}{d t} + \frac{R}{L} i = \frac{U_m}{L} \sin \omega t$$

lautet.

Anfangsbedingung: für $t = 0$ ist $i = 0$.

Die Differentialgleichung soll durch Substitution gelöst werden.

Setzen Sie dazu

$$\frac{v'}{v} = \frac{R}{L} \quad \left(v' = \frac{d v}{d t} \right)$$

$$\frac{d v}{v} = \frac{R}{L} d t$$

$$\ln v = \frac{R}{L} t$$

$$v = e^{\frac{R}{L} t}$$

Damit ist

$$\frac{d i}{d t} + \frac{v'}{v} i = \frac{U_m}{L} \sin \omega t$$

$$\frac{d i}{d t} v + \frac{d v}{d t} i = \frac{U_m}{L} v \sin \omega t$$

$$\frac{d}{d t} (v i) = \frac{U_m}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t$$

und

$$v i = \frac{U_m}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t d t + K$$

Die Integrationskonstante ist hier durch den Buchstaben K bezeichnet, da in der Elektrotechnik der Buchstabe C für die Kapazität verwendet wird.

Die Lösung des Integrals erfolgt durch zweimalige partielle Integration.

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{R^2} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t - \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt\end{aligned}$$

Das ganz rechts stehende Integral stimmt wieder mit dem Ausgangsintegral überein. Bringen Sie es auf die linke Seite.

$$\underbrace{\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)}_{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2}} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\sin \omega t - \frac{\omega L}{R} \cos \omega t \right)$$

Um zu einer Vereinfachung zu kommen, setzen Sie

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\sin \omega t - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \omega t \right) \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi}{\cos \varphi} \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

und

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt = \frac{R L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Da nun aber $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$ ist, können Sie für $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

setzen, so daß endgültig

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt = \frac{L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t - \varphi)$$

ist.

Setzen Sie dieses Ergebnis nun wieder in die Lösung der Differentialgleichung ein, dann ist

$$v i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t - \varphi) + K \quad v = e^{\frac{R}{L} t}$$

und

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi) + K e^{-\frac{R}{L} t}$$

Zur Bestimmung von K setzen Sie die Anfangsbedingung ein.

Es ist

$$0 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(-\varphi) + K \quad \sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

$$K = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \varphi$$

Drücken Sie auch $\sin \varphi$ wieder durch ω , L und R aus:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Damit wird

$$K = \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

und

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L} t}$$

Verschaffen Sie sich nun noch kurz Klarheit über die Bedeutung der einzelnen Glieder der Lösung.

Der erste Summand stellt den rein periodischen Teil dar. Danach wird die Stromstärke durch eine um den Winkel φ gegenüber der Wechselspannung phasenverschobene Sinusschwingung dargestellt. Der Verschiebungswinkel läßt sich dabei aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

entweder rechnerisch oder graphisch nach Bild 7 bestimmen. Der zweite Summand, der abklingende Teil, verliert im Verlauf

der Zeit (wachsendes t) an Wirksamkeit, da $e^{-\frac{R}{L} t}$ mit $t \rightarrow \infty$ dem Wert 0 zustrebt. Damit nähert sich die Stromstärke immer

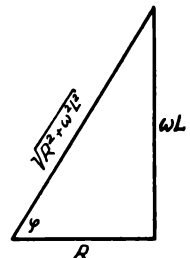


Bild 7

mehr der schon beschriebenen Sinusschwingung mit der konstanten Amplitude

$$J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Zusammenfassung [7]

Bei der linearen Differentialgleichung I. Ordnung haben Sie zwischen

a) der homogenen Gleichung $y' + g(x) y = 0$

und

b) der inhomogenen Gleichung $y' + g(x) y = h(x)$

zu unterscheiden.

Die homogene Gleichung können Sie nach Trennung der Veränderlichen integrieren.

Bei der inhomogenen Gleichung können Sie zwei Wege zur Lösung beschreiten.

Im ersten Fall führt die Substitution $\frac{u'}{u} = g(x)$ und nachfolgende Multiplikation mit u auf eine Differentialgleichung, die Sie durch gewöhnliche Integration lösen können.

Im zweiten Fall haben Sie zunächst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen. Mit Hilfe der *Variation der Konstanten* ermitteln Sie anschließend eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Summe beider stellt dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung dar.

Übungen

11. Lösen Sie die Differentialgleichung aus Lehrbeispiel 14 mit Hilfe der Variation der Konstanten!

12. $y' + y = x^3$

13. $xy' + 2y = 3x$

Anleitung: Bringen Sie die Differentialgleichung zunächst auf die Form $y' + g(x)y = h(x)$

14. $y' + 2y = e^{3x}$

15. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

3. Kapitel: Differentialgleichungen II. Ordnung

[8] **Einfache Typen der Differentialgleichung II. Ordnung.** Nach der Definition der Ordnung einer Differentialgleichung muß als höchste Ableitung hier y'' vorkommen. Demnach können Sie allgemein eine Differentialgleichung II. Ordnung durch

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{oder} \quad y'' = f(x, y, y')$$

kennzeichnen. Entsprechend dem Auftreten von y'' können Sie sich die Lösung über zwei aufeinanderfolgende Integrationen hergestellt denken. Wir werden auch so zum Teil in diesem Abschnitt verfahren. Da bei jeder Integration eine Integrationskonstante auftritt, müssen in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung II. Ordnung zwei willkürliche Konstanten zu finden sein.

a) $y'' = a$ ($a = \text{konst.}$)

In dieser besonders einfachen Differentialgleichung tritt neben y'' lediglich eine Konstante auf. Sie finden y , indem Sie zweimal hintereinander integrieren. Sie sollen diese Differentialgleichung gleich in ihrer wichtigsten Anwendung kennenlernen. Fassen Sie dazu y'' als zweite Ableitung des Weges nach der Zeit, also als Beschleunigung auf, während Sie $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ setzen.

$$b = \frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

Dies besagt dann, daß bei der vorliegenden Bewegung die Beschleunigung konstant ist. (Bei welcher Bewegung liegt dieser Fall vor?)

Setzen Sie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

so erhalten Sie aus der Differentialgleichung II. Ordnung für s eine I. Ordnung für v . Die Trennung der Veränderlichen ergibt dann

$$\begin{aligned} dv &= g dt \\ v &= g t + C_1. \end{aligned}$$

Nun ist aber $v = \frac{ds}{dt}$ und damit

$$\begin{aligned} ds &= (g t + C_1) dt \\ s &= \frac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Verschaffen Sie sich jetzt noch Klarheit über die Bedeutung der Integrationskonstanten.

Setzen Sie in $v = g t + C_1$ für t den Wert 0 ein, so ist

$$v \Big|_{t=0} = v_0 = C_1$$

Demnach ist C_1 mit der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 identisch. Beim freien Fall ist normalerweise $v_0 = 0$. Zur Bestimmung von C_2 setzen Sie in s für t ebenfalls den Wert 0 ein, dann ist

$$s \Big|_{t=0} = s_0 = C_2$$

$C_2 = s_0$ stellt also die Lage des Körpers zur Zeit $t = 0$ dar. Mit diesen anderen Bezeichnungen für die Integrationskonstanten nimmt die Lösung die Form

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$

an. Mit $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ erhalten Sie das bekannte Fallgesetz von Galilei

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

b) $y'' = f(x)$

Auch in diesem Fall kommen Sie durch zweimalige Integration direkt zur Lösung. Es ist

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$dy' = f(x) dx$$

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

und entsprechend

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Dieser Typ tritt beispielsweise bei Aufgaben der Festigkeitslehre auf. Sie werden dort

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}$$

als (verkürzte) Differentialgleichung der elastischen Linie kennenlernen. Unter $M(x)$ verstehen Sie das Biegemoment des betreffenden Balkens an einer Stelle x , während die Konstanten E und J den Elastizitätsmodul bzw. das Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts darstellen.

Wir wollen hier auf die Durchrechnung eines entsprechenden Beispiels verzichten.

Sie werden nun sicher noch eine Differentialgleichung der Form $y'' = g(y)$ erwarten. Die Behandlung dieses Falles soll aber auf das 4. Kapitel verschoben werden. Sie finden ihn dort, wenn auch mit etwas anderer Bezeichnung, unter Fall 6 wieder.

[9] Die homogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nachdem Sie einige besonders einfache Fälle der Differentialgleichung II. Ordnung kennengelernt haben, sollen Sie sich mit einem allgemeineren Fall beschäftigen. Für die Anwendung erlangt diese Diffe-

rentialgleichung außerordentliche Bedeutung. So lassen sich mit ihr beispielsweise Schwingungsvorgänge behandeln. Die Differentialgleichung wird aus diesem Grunde oft die *Schwingungsgleichung* genannt.

a) Lösung mittels der charakteristischen Gleichung

Die allgemeine Form der homogenen Gleichung ist durch

$$y'' + a y' + b y = 0$$

gekennzeichnet. Die Koeffizienten a und b sind dabei konstante Werte. Die Differentialgleichung ist durch den Ansatz

$$y = C e^{\lambda x}$$

zu lösen, wobei C eine willkürliche Integrationskonstante und λ ein noch zu bestimmender Wert ist.

Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung des Lösungsansatzes und setzen Sie diese in die Differentialgleichung ein.

Es ist

$$y = C e^{\lambda x} \quad y' = C \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = C \lambda^2 e^{\lambda x}$$

und damit

$$y'' + a y' + b y = C (\lambda^2 + a \lambda + b) e^{\lambda x} = 0$$

Sie erkennen daraus: Soll der Lösungsansatz die Differentialgleichung erfüllen, soll also die linke Seite den Wert 0 annehmen, so muß der Ausdruck in der Klammer verschwinden, denn der Faktor C kann (willkürliche Integrationskonstante!) von Null verschieden angenommen werden, während der Faktor $e^{\lambda x}$ grundsätzlich für endliche Werte von x von Null verschieden ist. Es muß demnach

$$\lambda^2 + a \lambda + b = 0$$

sein. Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als eine quadratische Gleichung für λ , die zugehörige *charakteristische Gleichung*. Ihre Auflösung liefert zwei Werte λ_1 und λ_2 zu

$$\lambda_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Wie Sie wissen, haben Sie bei der Lösung einer quadratischen Gleichung drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Fall α)	$\frac{a^2}{4} - b > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ und reell
Fall β)	$\frac{a^2}{4} - b < 0$	λ_1 und λ_2 konjugiert-komplex
Fall γ)	$\frac{a^2}{4} - b = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$, reelle Doppelwurzel

Sie sollen nun jeweils an einem Beispiel die Art der Behandlung dieser drei Fälle kennenlernen.

Lehrbeispiel 19

Zu lösen sei die Differentialgleichung $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Lösung:

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

Sie hat die Lösungen

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -4$$

Es liegt der Fall α) vor. Die Theorie der Differentialgleichung bestätigt, daß dann

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = \underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}}$$

die allgemeine Lösung darstellt.

Den Bemerkungen zu Beginn dieses Kapitels entsprechend, finden Sie in der allgemeinen Lösung zwei Integrationskonstanten vor. Führen Sie selbst die Probe durch.

Lehrbeispiel 20

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 13y = 0$!

Lösung:

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

mit

$$\lambda_1 = 2 + 3i \quad \lambda_2 = 2 - 3i$$

Auch in diesem Fall β) können Sie als allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

ansetzen, die im vorliegenden Beispiel zu

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}$$

wird. Diesem Ergebnis kann aber noch eine andere, übersichtlichere Form gegeben werden. Wenn Sie bedenken, daß $e^{a+b} = e^a e^b$ ist, ergibt sich

$$y = e^{2x} (C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

und mit Hilfe des Satzes von Euler $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} [C_1 (\cos 3x + i \sin 3x) + C_2 (\cos 3x - i \sin 3x)] \\ &= e^{2x} [(C_1 + C_2) \cos 3x + i(C_1 - C_2) \sin 3x] \end{aligned}$$

Setzen Sie noch $C_1 + C_2 = A$ und $i(C_1 - C_2) = B$, so ist schließlich

$$\underline{y = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)}$$

Die Lösungskurve setzt sich demnach aus einer Sinus- und Kosinuscurve, also aus zwei phasenverschobenen Sinuskurven mit veränderlicher Amplitude zusammen. Wie Sie schon wissen, ergibt die Überlagerung zweier derartiger Kurven wieder eine Sinuskurve.

Rechnerisch können Sie das bestätigen, indem Sie

$$A = C \sin \varphi \quad \text{und} \quad B = C \cos \varphi$$

setzen. Die Größen C und φ lassen sich aus A und B sofort bestimmen (Bild 8), wenn Sie bedenken, daß

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \text{und} \quad \frac{A}{B} = \operatorname{tg} \varphi$$

ist.

Mit diesen beiden Konstanten nimmt die Lösung die Form

$$y = C e^{2x} (\sin \varphi \cos 3x + \cos \varphi \sin 3x)$$

$$\underline{y = C e^{2x} \sin (3x + \varphi)}$$

an.

Fassen Sie diesen Fall β) zusammen, so nimmt infolge des Auftretens konjugiert-komplexer Wurzeln $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ der charakteristischen Gleichung die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Formen

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

oder

$$y = C e^{\alpha x} \sin (\beta x + \varphi)$$

mit

$$C^2 = A^2 + B^2 \quad \text{und} \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A}{B} \quad \text{an.}$$

Lehrbeispiel 21

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = 0$!

Lösung:

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

Während bei den Fällen α) und β) in gleicher Weise die Lösung angesetzt werden konnte, können Sie im vorliegenden Fall γ) nicht so vorgehen. Es ist wohl

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} = C_1 e^{3x}$$

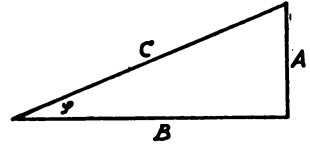


Bild 8

eine Teillösung, aber

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} = C e^{3x} \quad (C_1 + C_2 = C)\end{aligned}$$

kann nicht die allgemeine Lösung sein, da ja als Folge von $\lambda_1 = \lambda_2$ nur eine Integrationskonstante C vorhanden ist. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall γ)

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda) \\ &= e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x)\end{aligned}$$

und speziell für die vorliegende Aufgabe

$$\underline{\underline{y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)}}$$

Auf den Beweis soll wiederum verzichtet werden. Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Lösung, indem Sie die Probe durchführen. Wir wollen nun noch einmal kurz die Art des Ansatzes für die drei Fälle zusammenstellen:

Fall α) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ reell}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Fall β) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ konjugiert-komplex, } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

umformbar in

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

oder

$$y = C e^{\alpha x} \sin (\beta x + \varphi)$$

Fall γ) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x)$$

Sie haben erkannt, daß zur Lösung derartiger homogener, linearer Differentialgleichungen II. Ordnung lediglich die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, der charakteristischen Gleichung, festgestellt werden müssen.

Soll nun aus der Schar der Lösungen wiederum nur eine partikuläre angegeben werden, so haben Sie für die beiden Integrationskonstanten die entsprechenden

Werte zu ermitteln. Das läßt sich aber nur durchführen, wenn Ihnen zwei Bedingungen bekannt sind. Als solche zählen beispielsweise die Angabe eines Punktes, durch den die Kurve laufen soll in Verbindung mit der Forderung, daß sie in diesem Punkt eine bestimmte Richtung hat. Eine andere Möglichkeit besteht in der Angabe zweier Punkte, durch die die Kurve laufen soll (Randbedingung).

Mit diesen beiden Bedingungen können Sie dann zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten C_1 und C_2 bzw. A und B aufstellen, deren Lösungen Ihnen die gesuchten Werte für die Integrationskonstanten geben.

Lehrbeispiel 22

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$! Die Lösungskurve soll durch den Punkt mit den Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ gehen und dort die Richtung $y_0' = 1$ haben.

Lösung:

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda_1 &= -1, \lambda_2 = -2\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}}$$

Damit die Kurve durch den vorgeschriebenen Punkt läuft, muß

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{-2x_0}$$

also

$$1 = C_1 + C_2$$

sein. Bilden Sie nun

$$y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}y_0' &= -C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{-2x_0} \\ 1 &= -C_1 - 2C_2\end{aligned}$$

Damit haben Sie die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 - 2C_2 &= 1\end{aligned}$$

Deren Lösungen lauten

$$\underline{\underline{C_1 = 3}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{C_2 = -2}}$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist

$$\underline{\underline{y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}}}$$

Fehlt das Glied mit y' , so nehmen die Lösungen eine besonders einfache Form an. In dem folgenden Lehrbeispiel sollen Sie den einen der beiden möglichen Fälle kennenlernen.

Lehrbeispiel 23

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + a^2 y = 0$!

Lösung:

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + a^2 = 0$$

$$\lambda_1 = a i, \lambda_2 = -a i$$

Die Lösung läßt sich in den drei Formen

$$y = C_1 e^{a i x} + C_2 e^{-a i x}$$

$$y = A \cos ax + B \sin ax$$

$$y = C \sin (ax + \varphi)$$

angeben.

Sie werden feststellen, daß diese Differentialgleichung bei der Berechnung der reibungsfreien Schwingung zur Anwendung kommt.

Übungen

$$16. y'' - y' - 6 y = 0$$

$$17. 2 y'' - 8 y' + 6 y = 0$$

$$18. 3 y'' + 6 y' + 3 y = 0$$

$$19. y'' - 8 y' + 16 y = 0$$

$$20. y'' + 4 y' + 13 y = 0$$

$$21. y'' - 2 y' + 2 y = 0$$

$$22. y'' - \gamma^2 y = 0$$

b) Anwendung auf Schwingungsvorgänge

Nachdem Sie die mathematische Behandlung der homogenen, linearen Differentialgleichung II. Ordnung kennengelernt haben, sollen Sie sich jetzt mit einigen Anwendungsbeispielen vertraut machen.

Freie, ungedämpfte Schwingung

Denken Sie sich einen um eine Ruhelage beweglichen Massenpunkt. Auf ihn wirke eine Kraft, die stets zur Ruhelage hin gerichtet und deren Größe der momentanen Entfernung des Massenpunktes von der Ruhelage proportional ist. (Derartige Kräfte treten beispielsweise bei allen Formänderungen elastischer Körper auf, bei denen das Hookesche Gesetz in Wirkung ist.)

Einen solchen Mechanismus können Sie sich etwa in der im Bild 9 gezeigten Form darstellen. Wie Sie (vgl. Physik, Lbf. 3) wissen, wird ein solcher Massenpunkt eine schwingende Bewegung, eine *harmonische Schwingung* ausführen.

In diesem ersten Beispiel soll von einer Dämpfung infolge Reibung abgesehen werden.

Im Ansatz müssen Sie nun den obenstehenden Sachverhalt zum Ausdruck bringen.

$$P = -k x \quad (k = \text{Proportionalitätsfaktor})$$

Dabei soll das Minuszeichen besagen, daß die Kraft stets der Auslenkung entgegenwirkt. Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist

$$P = m b = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x}$$

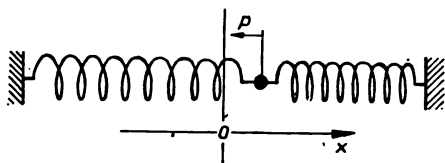


Bild 9

Bei Ableitungen nach der Zeit werden die Differentialquotienten in der Newtonschen Schreibweise (wie bei der Parameterdarstellung) durch aufgesetzte Punkte gekennzeichnet.

Damit erhalten Sie die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Zur Abkürzung setzen Sie $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, ohne daß Sie zunächst Betrachtungen über die Bedeutung von ω_0 anstellen. Die Differentialgleichung erhält so die endgültige Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$.

Sie erkennen, daß diese Differentialgleichung die Form der im Lehrbeispiel 23 behandelten aufweist. Als Lösung erhalten Sie demnach

$$\underline{\underline{x = C \sin (\omega_0 t + \varphi)}}$$

Es kommt jetzt darauf an, eine zweckmäßige Anfangsbedingung aufzustellen. Der Massenpunkt soll zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v = v_0$ durch die Ruhelage ($x = 0$) schwingen. Die Anfangsbedingungen sind dann

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ v = \frac{dx}{dt} = v_0 \end{array} \right.$$

Bilden Sie zunächst durch Differentiation

$$v = \frac{dx}{dt} = C \omega_0 \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

und durch Einsetzen der Anfangsbedingung

$$v_0 = C \omega_0 \cos \varphi$$

Weiterhin erhalten Sie aus der allgemeinen Lösung selbst

$$0 = C \sin \varphi$$

und daraus

$$\varphi = 0$$

Damit ist aber dann

$$v_0 = C \omega_0 \cos 0 = C \omega_0$$

und

$$C = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist schließlich

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}}$$

Dieses Endergebnis stellt eine reine Sinusschwingung mit der Amplitude $\frac{v_0}{\omega_0}$ dar.

Verschaffen Sie sich nun durch die folgende Überlegung Klarheit über die Bedeutung von $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Zur Zeit $t = 0$ schwingt der Massenpunkt durch die Ruhelage. Nach Verlauf der Zeit T soll *ein* Hin- und Hergang vollzogen sein, so daß sich der Massenpunkt nach dieser Zeit wieder in der gleichen Richtung durch die Ruhelage wie bei $t = 0$ bewegt. Es muß demnach

$$0 = \frac{v_0}{\omega_0} \sin 0 = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 T$$

sein. Da die Sinusfunktion die Periode 2π hat, muß zur Erfüllung dieser Bedingung

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

sein.

Mit Hilfe dieser Schwingungsdauer T ergibt sich für die Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Diese Verhältnisse liegen ungefähr beim mathematischen Pendel (Bild 10) vor. An einem (gewichtlosen) Faden der Länge l befinde sich ein Massenpunkt m . Die auf diese Masse wirkende Erdanziehung $G = m g$ können Sie in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten zerlegen. Dabei wirkt $m g \cos \psi$ fadenspannend, während $m g \sin \psi$ versucht, die Pendelmasse zur Ruhelage zurückzutreiben. Damit gilt hier

$$P = - m g \sin \psi$$

Die Lösung der hieraus entstehenden Differentialgleichung stößt auf große Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde soll die Schwingung auf kleine Schwingungswerten, also auf kleine Winkel ψ beschränkt werden. In diesem Fall können Sie $\sin \psi$ durch ψ (im Bogenmaß!) ersetzen, so daß

$$P = - m g \psi$$

ist. Die damit aufstellbare Differentialgleichung

$$m \ddot{x} = - m g \psi$$

$$\ddot{x} = - g \psi$$

hat aber den Mangel, daß in ihr die zwei von der Zeit t abhängigen Veränderlichen s und ψ vorkommen. Dem können Sie sofort abhelfen, wenn Sie bedenken, daß

$$x = l \cdot \psi$$

bzw.

$$\ddot{x} = l \cdot \ddot{\psi}$$

ist. Die Differentialgleichung nimmt dann die Form

$$\ddot{\psi} = - \frac{g}{l} \psi$$

oder

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

an.

Ihre Lösung lautet

$$\underline{\underline{\psi = C \sin (\omega_0 t + \varphi)}}$$

Mit den Anfangsbedingungen $t = 0, x = 0, v = v_0$ ergibt sich daraus für $x = l \cdot \psi$

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}}$$

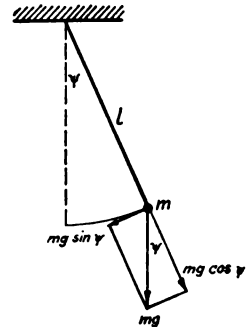


Bild 10

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Das sind aber die Ihnen aus der Physik bekannten Gesetze für das mathematische Pendel.

Freie, gedämpfte Schwingung

In der Praxis lassen sich ungedämpfte Schwingungen kaum verwirklichen. So werden durch Luft- und Lagerreibung bei mechanischen Bewegungen und durch Ohmschen Widerstand bei elektrischen Vorgängen stets Verluste eintreten, die zu einer Dämpfung, d. h. zu einer fortlaufenden Verkleinerung der Amplituden führen. Die Dämpfung kann sogar so groß werden, daß es überhaupt nicht zur Ausbildung einer Schwingung kommen kann. Ein aus seiner Ruhelage abgelenkter Körper wird dann mehr oder weniger schnell in die Ruhelage zurückkriechen.

Sie sollen sich zunächst wieder rein mechanischen Vorgängen zuwenden. Die Bewältigung der elektrischen Probleme bringt dann vom mathematischen Standpunkt nichts wesentlich Neues, gehen doch lediglich andere Bezeichnungen in die Differentialgleichung ein, ohne dabei ihren Charakter zu ändern. Es sind eben beide Male Schwingungen, die nach Abstraktion mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln gelöst werden können.

Wieder unterliege ein Massenpunkt der Einwirkung einer dem Ausschlag proportionalen, zur Ruhelage hin gerichteten Kraft. Die auftretende Reibung soll der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional sein. Diese Annahme genügt den meisten mechanischen Bewegungen. Es sind

rücktreibende Kraft: $P_R = -kx$

Widerstandskraft: $P_W = -w\dot{x} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$

Damit ergibt sich für die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -w\dot{x} - kx$$

oder

$$\ddot{x} + \frac{w}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Als Abkürzung seien hier zweckmäßigerweise

$$\frac{w}{m} = 2p \quad \text{und} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

eingeführt, so daß die Differentialgleichung die Gestalt

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

annimmt. Die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 2 p \lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

Wie Sie schon gelernt haben, sind jetzt 3 Fälle zu unterscheiden:

- $\alpha) p^2 - \omega_0^2 > 0$ (reelle Wurzeln)
- $\beta) p^2 - \omega_0^2 < 0$ (konjugiert-komplexe Wurzeln)
- $\gamma) p^2 - \omega_0^2 = 0$ (reelle Doppelwurzel)

Fall $\alpha) p^2 - \omega_0^2 > 0$

Dieser Fall wird bei großem p , also bei großer Dämpfung vorliegen. Setzen Sie $\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = \omega$, so ist

$$\lambda_{1,2} = -p \pm \omega$$

und

$$x = C_1 e^{(-p+\omega)t} + C_2 e^{(-p-\omega)t}$$

$$x = e^{-pt} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t})$$

Als Anfangsbedingung sei wieder $t = 0$, $x = 0$ und $v = \frac{dx}{dt} = v_0$ gewählt. Die Differentiation der vorletzten Zeile für x ergibt

$$v = \frac{dx}{dt} = C_1 (-p + \omega) e^{(-p+\omega)t} + C_2 (-p - \omega) e^{(-p-\omega)t}$$

und nach Einsetzen der Anfangsbedingung

$$v_0 = C_1 (-p + \omega) + C_2 (-p - \omega)$$

während aus x selbst

$$0 = C_1 + C_2$$

folgt. Die beiden Bestimmungsgleichungen für C_1 und C_2

$$v_0 = C_1 (-p + \omega) - C_2 (p + \omega)$$

$$0 = C_1 + C_2$$

ergeben als Lösung

$$C_1 = \frac{v_0}{2\omega} \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{v_0}{2\omega}$$

Die partikuläre Lösung lautet damit

$$x = \frac{v_0}{2\omega} e^{-pt} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

oder

$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t$$

Damit ist erwiesen, daß sich der Bewegungsvorgang auf eine unperiodische Funktion zurückführen läßt. Eine Schwingung kann also nicht auftreten.

Es soll hier noch kurz die in Bild 11 dargestellte Lösungskurve diskutiert werden. Zur Feststellung des Maximalausschlages bilden Sie den Differentialquotienten (hier identisch mit der Geschwindigkeit!) und fragen nach der Stelle, an der er den Wert Null annimmt.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} (-p \sin \omega t + \omega \cos \omega t) = 0$$

Für endliche Werte von t kann nur der Klammerausdruck verschwinden, es muß also

$$-p \sin \omega t + \omega \cos \omega t = 0$$

$$p \sin \omega t = \omega \cos \omega t$$

$$\operatorname{Tg} \omega t = \frac{\omega}{p}$$

$$\omega t = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{\omega}{p} = \frac{1}{2} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega}$$

$$t_{\max} = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega}$$

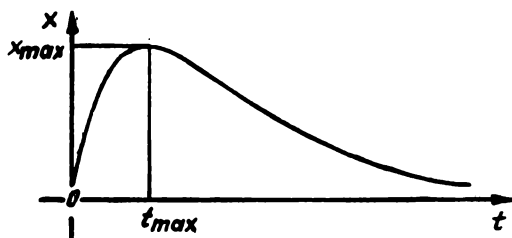


Bild 11

sein. Unter Benutzung der Beziehung

$$\sin a = \frac{\operatorname{Tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 a}}$$

erhalten Sie für diesen Wert von t

$$\sin \omega t = \frac{\operatorname{Tg} \omega t}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 \omega t}} = \frac{\omega}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

und für den maximalen Ausschlag

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{p - \omega}{p + \omega} \right)^{\frac{p}{2\omega}}$$

Für wachsendes t nimmt dann x immer mehr ab und nähert sich asymptotisch dem Wert Null.

Ohne weitere Diskussion soll noch gleich der Fall γ angeschlossen werden. Der zugehörige Ablauf der Bewegung unterscheidet sich nicht wesentlich von dem des Falles α . Man spricht hier allgemein vom *aperiodischen Grenzfall*.

Von wesentlich größerer Bedeutung ist dagegen

Fall β) $p^2 - \omega_0^2 < 0$

Hierbei ist die Dämpfung klein. Wie Sie sehen werden, kommt es zur Ausbildung einer gedämpften Schwingung.

Setzen Sie

$$\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = i \omega \quad (i^2 = -1; \omega \text{ reell})$$

also

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$$

Dann ist

$$\lambda_{1;2} = -p \pm i \omega$$

und

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-pt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= C e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Mit den gleichen Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = 0$ und $v = v_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v_0 &= C(-p \sin \varphi + \omega \cos \varphi) \\ 0 &= C \sin \varphi \end{aligned}$$

In dem Produkt $C \sin \varphi$ kann nur $\sin \varphi = 0$ und damit $\varphi = 0$ sein, denn $C = 0$ würde im Widerspruch zur vorhergehenden Bestimmungsgleichung stehen, da doch die rechte Seite gleich $v_0 \neq 0$ sein soll. Mit $\varphi = 0$ wird dann

$$v_0 = C \omega \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{v_0}{\omega}$$

Als Lösung erhalten Sie so

$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t$$

Hier wird der Bewegungsablauf durch die periodische Sinusfunktion beschrieben, es liegt also wirklich eine Schwingung vor. Die Amplitude dieser Schwingung ist aber zeitlich veränderlich, und zwar nimmt sie mit zunehmender Zeit ab. Die Schwingung kommt zum Erliegen. Im Bild 12 ist eine derartige Schwingung dargestellt.

Für die Schwingungsdauer finden Sie

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{w^2}{4m^2}}} \end{aligned}$$

Wie Sie durch Vergleich mit der ungedämpften Schwingung erkennen können, ist die Dauer einer Vollschringung im gedämpften System größer als im ungedämpften. Das gedämpfte System schwingt langsamer. Die Schwingungsdauer T bleibt aber auch während des Vorganges konstant.

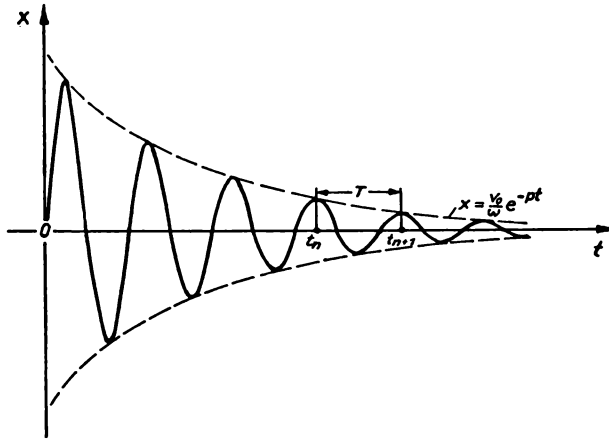


Bild 12

Von Interesse ist noch die Veränderung der Amplituden. Zu den Zeiten t_n und $t_{n+1} = t_n + T$ mögen zwei aufeinanderfolgende Maximalausschläge stattfinden, so daß dafür

$$\sin \omega t_n = \sin \omega t_{n+1}$$

ist. Die zugehörigen Maximalausschläge sind dann

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_n} \sin \omega t_n \\ x_{n+1} &= \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_{n+1}} \sin \omega t_{n+1} = \frac{v_0}{\omega} e^{-p(t_n + T)} \cdot \sin \omega t_n \\ &= \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_n} e^{-p T} \cdot \sin \omega t_n \\ &= x_n e^{-p T} \end{aligned}$$

Der Quotient dieser beiden Amplituden, das Dämpfungsverhältnis, ergibt sich zu

$$q = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{p T} = e^{\frac{w T}{2 m}}$$

In der Praxis wird nun noch ein weiterer Begriff, das logarithmische Dekrement, als Maß für die Dämpfung eingeführt. Sie haben darunter den natürlichen Logarithmus des Dämpfungsverhältnisses

$$\delta = \ln q = \frac{w T}{2 m} = \frac{2 w \pi}{\sqrt{4 k m - w^2}}$$

zu verstehen. Führen Sie bei kleiner Dämpfung hier die Schwingungsdauer des ungedämpften Systems ein, so erhalten Sie in Annäherung

$$\delta = \frac{w T}{2m} \approx \frac{w \pi}{\sqrt{mk}}$$

Zusammenfassung [8] und [9]

Von wesentlicher technischer Bedeutung sind die homogenen, linearen Differentialgleichungen II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie finden bei allen freien Schwingungen Verwendung.

Zur Lösung dieser Art Differentialgleichungen haben Sie lediglich die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, der charakteristischen Gleichung, festzustellen. Den dabei auftretenden drei Fällen entsprechend erhalten Sie drei Formen der Lösung, die alle durch das Auftreten von zwei willkürlichen Integrationskonstanten gekennzeichnet sind.

Bei den Anwendungsbeispielen haben Sie gesehen, daß sich lediglich beim Auftreten eines Paares konjugiert-komplexer Wurzeln in der charakteristischen Gleichung eine harmonische Schwingung ausbildet. In den beiden anderen Fällen entsteht infolge großer Dämpfung nur eine aperiodische Schwingung.

[10] Die inhomogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie bei den linearen Differentialgleichungen I. Ordnung liegt dann der inhomogene Fall vor, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine Funktion $h(x)$, die Störungsfunktion, auftritt:

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

Übernehmen Sie auch hier wieder den Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen, daß sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer auf irgendeinem Wege gefundenen partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt.

Wir wollen uns hier auf einige Formen der Störungsfunktion beschränken, und zwar auf

1. $h(x) = \alpha e^{nx}$
2. $h(x) = \alpha \cos nx + \beta \sin nx$
3. $h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$

In vielen Fällen kommen Sie durch einen entsprechenden Lösungsansatz zum Ziel, und zwar setzen Sie als partikuläre Lösung im Fall

1. $y = A e^{nx}$ (gleicher Exponent wie bei der Störungsfunktion)

2. $y = A \cos nx + B \sin nx$ (gleiches Argument wie bei der Störungsfunktion)

3. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ (n = höchster in der Störungsfunktion auftretender Exponent)

an. Die noch unbekannten Koeffizienten müssen Sie, nachdem Sie den Lösungsansatz in die betreffende Differentialgleichung eingesetzt haben, durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Lehrbeispiel 24

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2 y' - 3 y = e^{2x}$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + 2 y' - 3 y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2 \lambda - 3 = 0$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

Inhomogene Gleichung:

Die Störungsfunktion hat die Form 1, also setzen Sie die Lösung in der Form

$$y = A e^{2x}$$

an. Daraus folgt $y' = 2 A e^{2x}, \quad y'' = 4 A e^{2x}$

und

$$y'' + 2 y' - 3 y = 4 A e^{2x} + 4 A e^{2x} - 3 A e^{2x} = e^{2x}$$

$$5 A e^{2x} = e^{2x}$$

$$5 A = 1$$

$$A = \frac{1}{5}$$

Damit ist

$$y_i = \frac{1}{5} e^{2x}$$

und

$$y = y_h + y_i = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$$

Lehrbeispiel 25

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2 y' - 3 y = 65 \sin 2 x$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + 2 y' - 3 y = 0$ (wie im Lehrbeispiel 24)

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

Inhomogene Gleichung:

Obwohl im Störungsglied nur die Sinusfunktion auftritt, müssen Sie doch den vollständigen Ansatz nach Fall 2 durchführen. Im vorliegenden Fall ist $n = 2$.

$$\begin{aligned}y &= A \cos 2x + B \sin 2x \\y' &= -2A \sin 2x + 2B \cos 2x \\y'' &= -4A \cos 2x - 4B \sin 2x\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}y'' + 2y' - 3y &= -4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4A \sin 2x + 4B \cos 2x \\&\quad - 3A \cos 2x - 3B \sin 2x \\&= (-7A + 4B) \cos 2x + (-4A - 7B) \sin 2x = 65 \sin 2x\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Sinusfunktion bzw. Kosinusfunktion müssen auf beiden Seiten gleich sein.

$$\begin{array}{rcl}-7A + 4B & = & 0 \\-4A - 7B & = & 65 \\ \hline A = -4, & B = & -7\end{array}$$

Mit diesen gefundenen Werten A und B ist

$$\underline{\underline{y_i = -4 \cos 2x - 7 \sin 2x}}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und damit

$$\underline{\underline{y = y_h + y_i = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 4 \cos 2x - 7 \sin 2x}}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lehrbeispiel 26

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 11 - 9x^2$!

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 3, \quad \lambda_2 = -1 \\ \underline{\underline{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}}\end{aligned}$$

Inhomogene Gleichung:

Wenn auch in der Störungsfunktion das lineare Glied fehlt, so haben Sie doch stets den Ansatz gemäß Fall 3 vollständig auszuführen ($n = 2$).

$$\begin{aligned}y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad y' = a_1 + 2a_2 x, \quad y'' = 2a_2 \\ y'' - 2y' - 3y &= 2a_2 - 2a_1 - 4a_2 x - 3a_0 - 3a_1 x - 3a_2 x^2 = 11 - 9x^2 \\ (-3a_0 - 2a_1 + 2a_2) &+ (-3a_1 - 4a_2)x - 3a_2 x^2 = 11 - 9x^2\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcl} -3a_0 - 2a_1 + 2a_2 & = & 11 \\ -3a_1 - 4a_2 & = & 0 \\ -3a_2 & = & -9 \\ \hline a_0 = 1, a_1 = -4, a_2 = 3 \end{array}$$

Damit ist

$$y_i = 1 - 4x + 3x^2$$

und

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 1 - 4x + 3x^2$$

Lehrbeispiel 27

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 2y' = 3!$

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' - 2y' = 0$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{array}{l} \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \\ \underline{y_h = C_1 + C_2 e^{2x}} \end{array}$$

Inhomogene Gleichung:

Verwenden Sie ohne weitere Überlegung den Ansatz zu Fall 3, der hier infolge $n = 0$ zu $y = a_0$ führt, so erkennen Sie sofort einen Widerspruch, wenn Sie das in die Differentialgleichung einsetzen. Ursache ist das Fehlen des Gliedes mit y . Wenn Sie bedenken, daß das Störungsglied konstant ist, kommen Sie zu einer verträglichen Lösung, wenn Sie die niedrigste vorkommende Ableitung ebenfalls als Konstante ansetzen. Mit $y' = a_0$ und $y'' = 0$ erhalten Sie

$$\begin{array}{l} y'' - 2y' = 0 - 2a_0 = 3 \\ a_0 = -\frac{3}{2} \end{array}$$

und damit

$$y' = -\frac{3}{2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{y = y_i = -\frac{3}{2}x}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\underline{y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x}$$

Tritt der Fall ein, daß die Störungsfunktion eine Kombination der Typen 1 bis 3 darstellt, so können Sie entweder die inhomogene Differentialgleichung in Teildifferentialgleichungen zerlegen, oder Sie setzen den Ansatz aus entsprechenden Teilen zusammen.

Lehrbeispiel 28

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y = x^2 + 2e^x$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + 4y = 0$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i \text{ (vgl. Lehrbeispiel 23)}$$

$$\underline{y_h = C \sin(2x + \varphi)}$$

Inhomogene Gleichung:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + A e^x$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + A e^x$$

$$y'' = 2a_2 + A e^x$$

$$y'' + 4y = 2a_2 + A e^x + 4a_0 + 4a_1 x + 4a_2 x^2 + 4A e^x = x^2 + 2e^x$$

$$(4a_0 + 2a_2) + 4a_1 x + 4a_2 x^2 + 5A e^x = x^2 + 2e^x$$

Koeffizientenvergleich:

$$4a_0 + 2a_2 = 0$$

$$4a_1 = 0$$

$$5A = 2$$

$$4a_2 = 1$$

$$a_0 = -\frac{1}{8}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{2}{5}$$

Partikuläre Lösung:

$$\underline{y_i = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{5}e^x}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{y = C \sin(2x + \varphi) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{5}e^x}$$

Wenn Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y = e^{2x}$ in der bisher behandelten Art lösen wollen, werden Sie auf Schwierigkeiten stoßen. Das liegt daran, daß die Störungsfunktion $h(x) = e^{2x}$ schon eine partikuläre Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist nämlich

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 0$ erhalten Sie daraus $h(x)$. Man sagt, daß sich in diesem Fall die Störungsfunktion in *Resonanz* mit der Eigenfunktion befindet.

In diesem Resonanzfall können Sie die inhomogene Gleichung mit Hilfe des schon einmal verwendeten Verfahrens der Variation der Konstanten lösen.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung führen Sie den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$y = C(x) e^{2x}$$

durch, wobei $C(x)$ wieder eine (noch unbekannte) Funktion von x ist. Die Ableitungen dieses Ansatzes sind

$$y' = C' e^{2x} + 2 C e^{2x}$$

$$y'' = C'' e^{2x} + 4 C' e^{2x} + 4 C e^{2x}$$

Setzen Sie dies wieder in die Differentialgleichung ein, dann erhalten Sie

$$C'' e^{2x} + 4 C' e^{2x} + 4 C e^{2x} - 4 C e^{2x} = e^{2x}$$

$$e^{2x} (C'' + 4 C') = e^{2x}$$

$$C'' + 4 C' = 1$$

Das aber ist eine inhomogene Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $C = C(x)$. Entsprechend Lehrbeispiel 27 setzen Sie hier

$$C' = a_0$$

und erhalten damit

$$4 a_0 = 1 \quad \text{bzw.} \quad a_0 = \frac{1}{4}$$

und

$$C = a_0 x = \frac{1}{4} x$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist so

$$\underline{\underline{y_I = \frac{1}{4} x e^{2x}}}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} \\ &= \underline{\underline{\left(C_1 + \frac{1}{4} x \right) e^{2x} + C_2 e^{-2x}}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 29

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + y = \cos x$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + y = 0$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\underline{y_h = C \sin(x + \varphi)}$$

Inhomogene Gleichung:

Auch hier ist wieder die Störungsfunktion in Resonanz, h. h., der nach Fall 2 durchzuführende Ansatz $y = A \cos x + B \sin x$ ist schon Lösung der homogenen Gleichung.

Sie müssen nun versuchen, diese Differentialgleichung mit einer trigonometrischen Störungsfunktion auf eine solche mit einer Exponentialfunktion als Störungsglied zurückzuführen. Eine derartige Differentialgleichung haben Sie im vorhergehenden Beispiel kennengelernt.

Der Aufbau dieser Differentialgleichung gelingt unter Verwendung der Formel von Euler $\cos x + i \sin x = e^{ix}$.

Kennzeichnen Sie dazu die bisherige Differentialgleichung durch den Index 1

$$y_1'' + y_1 = \cos x$$

Stellen Sie eine neue Differentialgleichung mit gleicher linker Seite (Index 2) auf, deren Störungsglied aber im vorliegenden Fall $\sin x$ lautet

$$y_2'' + y_2 = \sin x$$

Multiplizieren Sie nun die neue Differentialgleichung mit i , und addieren Sie beide zu

$$(y_1'' + i y_2'') + (y_1 + i y_2) = \cos x + i \sin x$$

Setzen Sie noch $z = y_1 + i y_2$ und entsprechend $z' = y_1' + i y_2'$, $z'' = y_1'' + i y_2''$, so bekommen Sie die Differentialgleichung

$$z'' + z = e^{ix}$$

Auch in dieser Differentialgleichung ist das Störungsglied in Resonanz.

Jetzt verfahren Sie wie im vorhergehenden Beispiel und setzen

$$z = C(x) e^{ix}$$

an, wobei $C(x)$ wieder eine noch unbekannte Funktion von x ist. Bilden Sie nun z'' und z' , und setzen Sie die erhaltenen Werte in die letzte Differentialgleichung ein:

$$z' = C' e^{ix} + i C e^{ix}, \quad z'' = C'' e^{ix} + 2 i C' e^{ix} - C e^{ix}$$

$$z'' + z = C'' e^{ix} + 2 i C' e^{ix} - C e^{ix} + C e^{ix} = e^{ix}$$

$$e^{ix} (C'' + 2 i C') = e^{ix}$$

$$C'' + 2 i C' = 1$$

Der Ansatz $C' = a_0$ führt zu $2i a_0 = 1$ oder $a_0 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

Damit ist

$$C = a_0 x = -\frac{i}{2} x$$

und

$$\begin{aligned} z &= -\frac{i}{2} x e^{ix} \\ &= -\frac{i}{2} x (\cos x + i \sin x) \\ z &= \frac{x}{2} \sin x - \frac{i}{2} x \cos x \end{aligned}$$

Da nun aber $z = y_1 + i y_2$ war, führt die Trennung des reellen und imaginären Teiles zu

$$\underline{y_1 = \frac{x}{2} \sin x} \quad \text{und} \quad \underline{y_2 = -\frac{x}{2} \cos x}$$

wobei y_1 eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = \cos x$ und y_2 eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = \sin x$ darstellt.

In Verbindung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung erhalten Sie als allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$\underline{y = C \sin(x + \varphi) + \frac{x}{2} \sin x}$$

Daneben haben Sie auch gleich die Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = \sin x$ in der Form $y = C \sin(x + \varphi) - \frac{x}{2} \cos x$ gefunden.

Erzwungene Schwingung (Allgemeines Ohmsches Gesetz für Wechselstrom).

An einen elektrischen Schwingkreis, der in Reihenschaltung Ohmschen Widerstand R , eine Spule mit der Selbstinduktion L und einen Kondensator mit der Kapazität C enthält, soll eine Wechselspannung

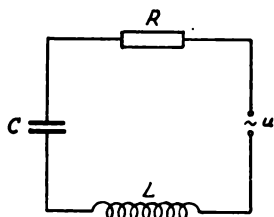


Bild 13

$$u = U_m \sin \omega t$$

angeschlossen werden (Bild 13).

Wie ist der zeitliche Verlauf des im Schwingkreis fließenden Stromes?

Fassen Sie alle auftretenden Spannungen zusammen, so erhalten Sie

1. Spannungsabfall am Widerstand: $u_R = R i$

2. Gegen elektromotorische Kraft der Selbstinduktion:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}$$

3. Spannungsabfall am Kondensator:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

4. Angelegte Wechselspannung:

$$u = U_m \sin \omega t$$

Zu 3: Zur Zeit t_0 sei der Kondensator ohne Ladung, während er zur Zeit t die Ladung Q haben möge. Zwischen dem Spannungsunterschied u_C an den beiden Kondensatorplatten, der Kapazität C und der Ladung Q besteht die Beziehung

$$Q = C u_C$$

Da nun andererseits der Ladestrom $i = \frac{dQ}{dt}$ ist und dementsprechend

$$Q = \int_{t_0}^t i \, dt,$$

ergibt sich für u_C

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

Für den gesamten Schwingkreis besteht nun nach Kirchhoff die Gleichung

$$u + e_L = u_R + u_C$$

oder nach Einsetzen von 1 bis 4 und Umordnung

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = U_m \sin \omega t$$

Sie erhalten daraus durch Differentiation nach t die Differentialgleichung in der Form

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega U_m \cos \omega t$$

oder

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\omega U_m}{L} \cos \omega t$$

Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

Diese Differentialgleichung ist Ihnen bereits als die einer freien, gedämpften Schwingung bekannt. Es treten hier lediglich andere Bezeichnungen auf.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Sie haben hier wieder die Ihnen bekannten 3 Fälle zu unterscheiden. Sie erhalten als Lösungen entsprechende Ausdrücke wie bei der Behandlung der freien, gedämpften Schwingung. Für die weitere Behandlung des vorliegenden Problems können Sie die Lösungen der homogenen Gleichung unberücksichtigt lassen. Eine Rechtfertigung finden Sie in der Erkenntnis, daß alle Erscheinungen, die diesen Lösungen entsprechen, infolge der Dämpfung abklingen. Das heißt, daß alle die Glieder in der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit zunehmender Zeit an Einfluß verlieren, die aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung resultieren.

Bestimmen Sie lediglich die Frequenz des freien Schwingkreises unter der Voraussetzung, daß die Dämpfung genügend klein ist, um eine Schwingung zuzulassen. Die Schwingungsdauer ist nach den gewonnenen Erkenntnissen

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} \quad (\omega_0^2 - p^2 > 0)$$

wobei hier

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad p = \frac{R}{2L}$$

sind. Damit ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

Da hier das Störungsglied eine trigonometrische Funktion ist, könnten Sie mit Hilfe des entsprechenden Ansatzes zur Lösung kommen. Sie sollen aber einen anderen, kürzeren Weg kennenlernen. Im Lehrbeispiel 29 haben Sie gelernt, wie man zu einer Differentialgleichung übergehen kann. Ähnlich soll auch jetzt verfahren werden. Dazu ist es wieder nötig, eine weitere Differentialgleichung hinzuzunehmen, eine von beiden mit $j = \sqrt{-1}$ zu multiplizieren und beide zu addieren (zum Unterschied von der Stromstärke bezeichnen wir im Nachstehenden die imaginäre Einheit mit j).

Die beiden einzelnen Differentialgleichungen sollen wieder durch die Indizes 1 bzw. 2 gekennzeichnet werden.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC} i_1 = \frac{\omega U_m}{L} \cos \omega t$$

Hinzugenommen sei die Differentialgleichung, die gilt, wenn die an den gleichen Schwingkreis angelegte Wechselspannung gegenüber der ersten um 90° phasenverschoben ist, also

$$L \frac{di_2}{dt} + R i_2 + \frac{1}{C} \int_{i_0}^t i_2 dt = U_m \cos \omega t$$

bzw.

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{LC} i_2 = -\frac{\omega U_m}{L} \sin \omega t$$

Zusammen ergeben beide die erweiterte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} + j \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) + \frac{R}{L} \left(\frac{di_2}{dt} + j \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{1}{LC} (i_2 + j i_1) \\ &= \frac{\omega U_m}{L} (-\sin \omega t + j \cos \omega t) = \frac{\omega U_m}{L} j (\cos \omega t + j \sin \omega t) \end{aligned}$$

und mit $i_2 + j i_1 = z$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{LC} z = \frac{\omega U_m}{L} j e^{j\omega t}$$

Lösungsansatz: $z = A e^{j\omega t}$

Setzen Sie das in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$A e^{j\omega t} \left(-\omega^2 + \frac{\omega R}{L} j + \frac{1}{LC} \right) = \frac{\omega U_m}{L} j e^{j\omega t}$$

Dividieren Sie beide Seiten durch $e^{j\omega t}$ und lösen Sie nach der gesuchten Größe A auf. Es ist

$$A = \frac{j \omega U_m}{-\omega^2 L + j \omega R + \frac{1}{C}}$$

und nach Division durch $j \omega$ und Umordnung des Nenners $\left(\frac{1}{j} = -j \right)$

$$A = \frac{U_m}{R + j \omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{U_m}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Die Lösung der inhomogenen (erweiterten!) Gleichung ist somit

$$z = \frac{U_m}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} e^{j\omega t}$$

Der Nenner ist der „Scheinwiderstand“ des Schwingkreises. Durch eine Umformung kann ihm eine andere Gestalt gegeben werden.

den Gesetzen des Rechnens mit komplexen Zahlen stellt dann die Hypotenuse die Resultierende dieser beiden Komponenten, den Scheinwiderstand $\Re$ dar. Bezeichnen Sie den Winkel zwischen $\Re$ und R mit φ , so ist



und

Der Winkel φ ist dabei aus

zu berechnen.

$$\begin{aligned}\Re &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j \varphi}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{e^{j\omega t}}{e^{j\varphi}} \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)} \\ z &= i_2 + j i_1 \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

Die Trennung des reellen und imaginären Teiles führt zu

$$i_2 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

und

$$i_1 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

Für die vorliegende Aufgabe erhalten Sie so als Lösung

$$i = i_1 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

das „Ohmsche Gesetz für Wechselstrom“.

Diese Lösung kennzeichnet den stationären Zustand, der sich nach Abklingen des Einschaltvorganges (berücksichtigt in der Lösung der homogenen Gleichung) einstellt.

Die angelegte Wechselspannung zwingt also den Kreis, in ihrer Frequenz bzw. Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ zu schwingen. Allerdings besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung um den Winkel φ . Die Amplitude des Stromes ist hier

$$J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Übungen

23. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2$

24. $y'' + 4y' - 21y = e^2$

25. $y'' + 4y' - 21y = e^{3x}$

26. $y'' + 9y' = \sin 3x$

27. $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$

Zusammenfassung [10]

Bei der inhomogenen, linearen Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

haben Sie zunächst drei besondere Formen der Störungsfunktion $h(x)$ kennengelernt. Steht $h(x)$ nicht in Resonanz mit der Eigenfunktion, ist also $h(x)$ nicht schon eine (partikuläre) Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so können Sie die Lösung mit Hilfe der entsprechenden Ansätze herstellen. Die unbestimmten Koeffizienten im Ansatz lassen sich nach Einsetzen in die Differentialgleichung durch Vergleich bestimmen.

Steht dagegen $h(x)$ in Resonanz, so können Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten finden.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und der gefundenen partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Selbstverständlich können Sie im Fall, daß $h(x)$ nicht in Resonanz steht, ebenfalls mit Hilfe der Variation der Konstanten zum Ziel kommen. Wie Sie aber gesehen haben, ist dieser Weg umständlicher.

4. Kapitel: Die geradlinige Bewegung

In den folgenden Betrachtungen sollen Sie die 7 *Fundamentalfälle der geradlinigen Bewegung* kennenlernen.

1. $s = s(t)$

Gegeben ist die Funktion $s = s(t)$, die die Lage eines geradlinig bewegten Punktes in Abhängigkeit von der Zeit t angibt.

Es lassen sich daraus sofort durch Differentiation berechnen:

$$\text{Geschwindigkeit} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \text{als Funktion der Zeit } v = v(t)$$

$$\text{Beschleunigung} \quad b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{als Funktion der Zeit } b = b(t)$$

2. $t = t(s)$

In diesem seltener vorkommenden Fall ist die Umkehrfunktion zu der Funktion im Fall 1 gegeben.

Dieser Erkenntnis entsprechend erhalten Sie

$$\text{Geschwindigkeit} \quad v = \frac{1}{\frac{dt}{ds}} \quad \text{als Funktion der Lage } v = v(s)$$

$$\text{Beschleunigung} \quad b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad \text{als } b = b(s)$$

3. $v = v(t)$

Im Hinblick auf Fall 1 ergibt sich hier, wenn s_0 die Lage des Punktes zur Zeit t_0 ist

$$\text{Lage} \quad s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \text{als } s = s(t)$$

$$\text{Beschleunigung} \quad b = \frac{dv}{dt} \quad \text{als } b = b(t)$$

4. $v = v(s)$

Die Beschleunigung kann nach den Überlegungen im Fall 2 behandelt werden. Es ist

$$\text{Beschleunigung} \quad b = \frac{dv}{ds} v \quad \text{als } b = b(s)$$

Zur Berechnung von Lage bzw. Zeit bedenken Sie, daß $v = v(s) = \frac{ds}{dt}$ ist. Durch Trennung der Veränderlichen und nachfolgende Integration bekommen Sie $dt = \frac{ds}{v(s)}$.

$$\text{Zeit} \quad t = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)} \quad \text{als } t = t(s)$$

und daraus durch Bilden der Umkehrfunktion die Lage s als Funktion der Zeit t .

5. $b = b(t)$

Dieser Fall stellt lediglich die Umkehrung des Falles 1 dar. Hier ergeben sich durch Integration

$$\text{Geschwindigkeit} \quad v = v_0 + \int_{t_0}^t b(t) dt \quad \text{als } v = v(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Lage} \quad s &= s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt & \text{als } s &= s(t) \\ &= s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t b(t) dt \right] dt \end{aligned}$$

6. $b = b(s)$

In diesem überaus wichtigen Fall ist für jeden Ort der Bewegung die dort auftretende Beschleunigung bekannt.

Nun ist

$$b = b(s) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

Der Ausdruck $\frac{dv}{ds} v$ ist aber nichts anderes als die Ableitung von $\frac{1}{2} v^2$ nach s

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= b(s) \\ \frac{1}{2} v^2 &= \frac{1}{2} v_0^2 + \int_{s_0}^s b(s) ds \end{aligned}$$

und schließlich

$$\text{Geschwindigkeit} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s b(s) \, ds} \quad \text{als } v = v(s)$$

Da nun andererseits $v = \frac{ds}{dt}$ ist, ergibt sich daraus nach Fall 4

$$\begin{aligned} \text{Zeit} \quad t &= t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)} \\ &= t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s b(s) \, ds}} \quad \text{als } t = t(s) \end{aligned}$$

7. $b = b(v)$

Hierbei folgt aus

$$b = b(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

durch Trennung der Veränderlichen

$$ds = \frac{v}{b(v)} \, dv \quad \quad \quad dt = \frac{dv}{b(v)}$$

und nach Integration

$$\text{Lage} \quad s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{b(v)} \, dv \quad \quad \quad \text{als } s = s(v)$$

$$\text{Zeit} \quad t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{b(v)} \quad \quad \quad \text{als } t = t(v)$$

Aus $t = t(v)$ können Sie durch Bilden der Umkehrfunktion $v = v(t)$ aufstellen. Setzen Sie dies in $s = s(v)$ ein, so erhalten Sie $s = s(t)$.

In der Zusammenfassung haben Sie dann:

Ist gegeben,

dann ist

$$1. \, s = s(t) \quad \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \quad b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$2. \, t = t(s) \quad \quad v = \frac{1}{\frac{dt}{ds}} \quad \quad b = \frac{dv}{ds} v$$

3. $v = v(t)$	$s = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt$	$b = \frac{dv}{dt}$
4. $v = v(s)$	$t = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}$	$b = \frac{dv}{ds} v$
5. $b = b(t)$	$v = v_0 + \int_{t_0}^t b \, dt$	$s = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt$
6. $b = b(s)$	$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s b \, ds}$	$t = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}$
7. $b = b(v)$	$s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{b} \, dv$	$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{b}$

Einige Beispiele zu diesen Grundaufgaben haben Sie bereits kennengelernt. So kennen Sie aus der Differentialrechnung die Behandlung des freien Falles nach Fall 1. Weiterhin haben Sie die Umkehrung dazu, also Fall 5, im Abschnitt [8a] dieses Lehrbriefes durchgerechnet. Fall 7 finden Sie im Lehrbeispiel 8.

Lehrbeispiel 30

Aus der Physik ist Ihnen die Formel $v = \sqrt{2 g s}$ für die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers bekannt. Es sind durchfallene Höhe s als Funktion der Zeit t und die Beschleunigung zu berechnen, wenn $t_0 = 0$ und $s_0 = 0$ sind.

Lösung:

Es liegt Fall 4 vor. Danach ist

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{2 g s}} = \frac{1}{\sqrt{2 g}} \int_{s_0}^s s^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{2 \sqrt{s}}{\sqrt{2 g}}$$

Lösen Sie nach s auf, dann erhalten Sie das bekannte Fallgesetz

$$\underline{\underline{s = \frac{1}{2} g t^2}}$$

Für die Beschleunigung folgt

$$\begin{aligned} b &= \frac{dv}{ds} v & v &= \sqrt{2 g s} \\ b &= \frac{g}{\sqrt{2 g s}} \sqrt{2 g s} & \frac{dv}{ds} &= \frac{g}{\sqrt{2 g s}} \\ \underline{\underline{b &= g}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 31

Am Ende einer (gewichtlosen) Schraubenfeder befinde sich ein Körper mit der Masse m . Eine Kraft $P_{\max}$ drücke die Feder um $s_{\max}$ zusammen. In welcher Zeit entspannt sich die Feder bis zu einer beliebigen Zusammendrückung $s < s_{\max}$, in der sie durch eine Kraft $P < P_{\max}$ festgehalten wird? Von Reibungsverlusten ist abzusehen.

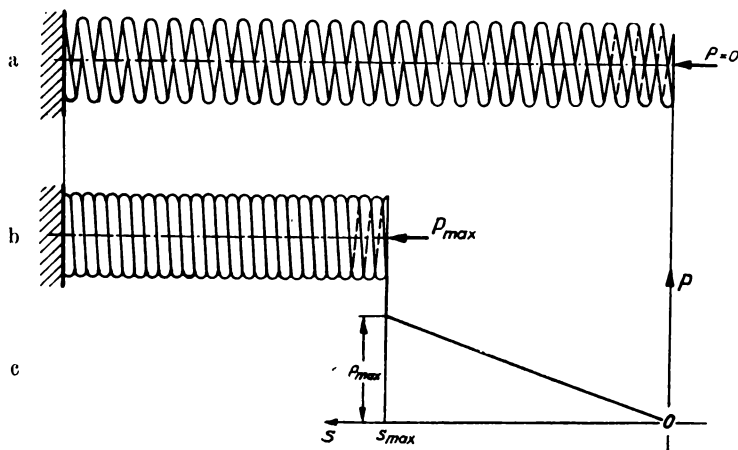


Bild 15

Lösung:

Im Bild 15 a ist die Feder in entspanntem Zustand gezeichnet, während Bild 15 b die maximal zusammengedrückte Feder darstellt. Im Diagramm 15 c ist zu jeder Stellung der Feder die zum Festhalten nötige Kraft angegeben.

Die Feder versucht sich mit der Kraft $P = -k s$ zu entspannen. Dabei soll das Minuszeichen andeuten, daß die Kraft in Richtung abnehmender Werte s wirkt. Die Federkonstante k errechnet sich aus

$$k = \frac{P_{\max}}{s_{\max}}$$

Bei der Entspannung der Feder erfährt die Masse m die Beschleunigung b . Nach Newton besteht zwischen diesen beiden Größen und der beschleunigenden Kraft der Feder der Zusammenhang:

$$m b = P$$

oder

$$b = \frac{P}{m} = -\frac{k}{m} s$$

Setzen Sie zur Abkürzung

$$\frac{k}{m} = \omega^2,$$

dann erhalten Sie in

$$b = -\omega^2 s$$

ein Beispiel für den Fall 6.

Ermittlung der Geschwindigkeit:

Die Anfangsgeschwindigkeit ist im vorliegenden Fall $v_0 = 0$.

Damit ist

$$v = \int_{s_{\max}}^s \sqrt{2 \int b \, ds} = \int_{s_{\max}}^s \sqrt{-2 \omega^2 \int s \, ds}$$

und, da $s_{\max} > s$, nach Umkehrung der Grenzen

$$v = \omega \sqrt{2 \int_s^{s_{\max}} s \, ds} = \omega \sqrt{2 \left(\frac{s_{\max}^2}{2} - \frac{s^2}{2} \right)} = \omega \sqrt{s_{\max}^2 - s^2} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

Ermittlung der Zeit:

Die Zeit soll von Beginn der Bewegung an gezählt werden, es ist also $t_0 = 0$. Da mit zunehmender Zeit t die Zusammendrückung abnimmt, setzen Sie

$$\begin{aligned} t &= - \int_{s_{\max}}^s \frac{ds}{v} = - \frac{1}{\omega} \int_{s_{\max}}^s \frac{ds}{\sqrt{s_{\max}^2 - s^2}} \\ &= \frac{1}{\omega} \arccos \frac{s}{s_{\max}} \Big|_{s_{\max}}^s \\ t &= \frac{1}{\omega} \left(\arccos \frac{s}{s_{\max}} - \arccos 1 \right) \quad (\arccos 1 = 0) \\ t &= \frac{1}{\omega} \arccos \frac{s}{s_{\max}} \end{aligned}$$

Hier ist die Wahl der Stammfunktion in der Form $\arccos \frac{s}{s_{\max}}$ günstiger als in der Form $\arcsin \frac{s}{s_{\max}}$, da sich damit an der unteren Grenze der Wert $\arccos 1 = 0$ ergibt. Für den Fall der völligen Entspannung der Feder ergibt sich mit $s = 0$

$$v = \omega s_{\max} \qquad t = \frac{1}{\omega} \arccos 0 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Wie Sie aus der Erfahrung wissen, beendet die Feder nicht mit Erreichen der entspannten Lage ihre Bewegung, sondern führt eine (mehr oder weniger gedämpfte) Schwingung um diese Lage aus. Diese Schwingung soll noch kurz untersucht werden.

Aus

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{s}{s_{\max}}$$

folgt

$$\frac{s}{s_{\max}} = \cos \omega t \qquad s = s_{\max} \cos \omega t$$

Aus dieser Formel erkennen Sie, daß die Feder im reibungsfreien Fall eine harmonische Schwingung ausführt. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung ist

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

während die Amplitude mit der ursprünglichen Zusammendrückung $s_{\max}$ identisch ist. Vergleichen Sie hierzu das Beispiel der freien, ungedämpften Schwingung in [9].

Zusammenfassung

Im 4. Kapitel wurden die 7 Fundamentalfälle der geradlinigen Bewegung behandelt. In der Zusammenstellung finden Sie, wie in den einzelnen Fällen durch Differentiation bzw. Integration die fehlenden Größen aus der gegebenen Abhängigkeit zu berechnen sind. Beim Ansatz haben Sie stets eine Überlegung über die Wahl der Integrationsgrenzen, Integrationskonstanten und eventueller Vorzeichen anzustellen.

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

1. $y = C x$

Jedem Punkt der Ebene ist die Richtung des zu diesem Punkt gehörigen Radiusvektors zugeordnet.

Lösungskurven sind alle Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

2. $ax^2 - by^2 = C$ (Hyperbelschar)

3. $y = C e^{-\frac{1}{2} \cos 2x}$

4. $7x^2 - 4x - 3y^2 = C$

5. $3y^2 - 2x^3 - 18x = C$

6. $\cos x + \cos y = C$

7. $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$

8. $y = x \arcsin Cx$

9. $x^2 + 5xy - y^2 = C$
10. $y - x = C e^{\frac{x}{y-x}}$
11. siehe Lösung Lehrbeispiel 14.
12. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + C e^{-x}$
13. $y = \frac{C}{x^2} + x$
14. $y = C e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$
15. $y = \frac{C}{x} - \cos x + \frac{\sin x}{x}$
16. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$
17. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$
18. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$
19. $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$
20. $y = e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) = C e^{-2x} \sin (3x + \varphi)$
21. $y = e^x (A \cos x + B \sin x) = C e^x \sin (x + \varphi)$
22. $y = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}$
23. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} - x^2 - \frac{3}{5} x - \frac{19}{50}$
24. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{9} e^{2x}$
25. $y = \left(C_1 + \frac{1}{10} x \right) e^{3x} + C_2 e^{-7x}$
26. $y = C \sin (3x + \varphi) - \frac{1}{6} x \cos 3x$
27. $y = \left(\frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right) e^{2x}$

Als Manuskript gedruckt!

Nur für das Fachschulfernstudium bestimmt!

Veröffentlicht unter der Druckgenehmigungs-Nr. Ag. 239/55/DDR des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. 1. Auflage. Herausgegeben im Auftrage des Staatssekretariats für Hochschulwesen, HA Fachschulwesen, von der Fachgruppe Lehrmaterial für Grundlagenfächer im Fachschulfernstudium an der Fachschule für Eisenbahnwesen, Dresden.

Satz und Druck: Druckerei „Magnus Poser“ Jena.