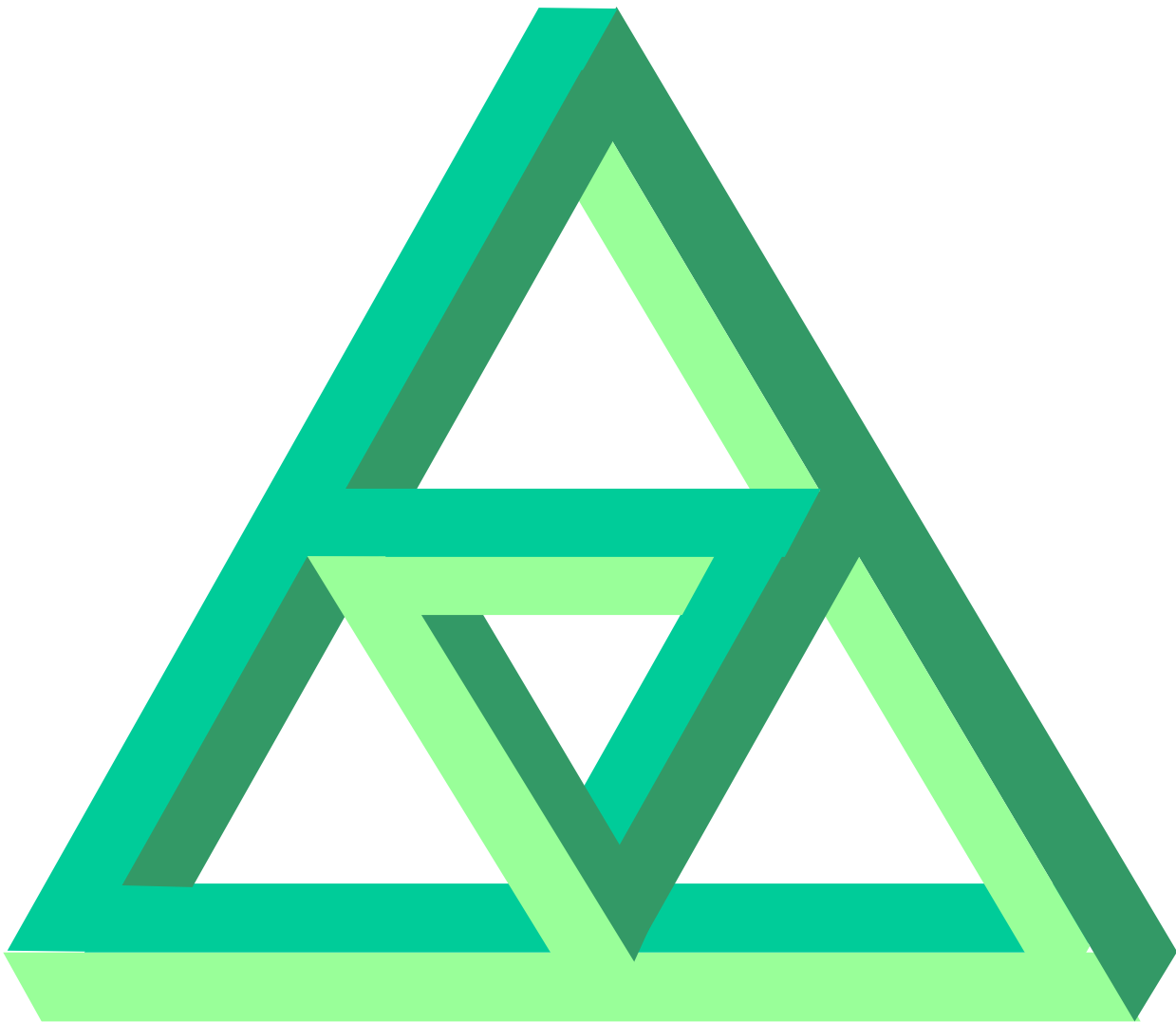


# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

---



## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben<sup>1</sup> thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10<sup>2</sup> haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO650922** und **MO651022** der Regionalrunde schließen wir den Rückblick auf die Regionalrunde der 65. Mathematik-Olympiade ab und diskutieren quadratische Gleichungen. Dabei sehen wir die derzeit oft beobachtete Aufgabenstruktur: Es wird eine parameterhaltige Aufgabenstellung formuliert, wobei in einem ersten Teil die Lösungen für spezielle Parameter gefragt sind, bevor im zweiten Teil die allgemeine Lösung zu finden ist.

Mit der aktuellen Aufgabe **A5-5A** aus dem sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik beschreiben wir die Methode der vollständigen Induktion und verweisen insbesondere auf das Erwartungsbild entsprechend der Musterlösungen der Aufgabenkommission: Dieser Lösungsansatz darf sinngemäß angewandt werden, ohne dabei die formale Umsetzung der Methode umsetzen zu müssen. Im historischen Rückblick zitieren wir dazu die Fassung der vollständigen Induktion von RICHARD DEDEKIND von 1883.

Die Technische Universität Chemnitz begeht im Mai 2026 ihr 190-jähriges Bestehen. Aus diesem Anlass hat Dr. FRANK GÖRING von der Fakultät für Mathematik zu Zahlenspielereien rund um die Zahl 190 aufgerufen. Auch in seinem (stets lesenswerten!) monatlichen Mathe-Rätsel geht es um die Zahl 190.

---

<sup>1</sup> [www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de)

<sup>2</sup> [https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no\\_cache=1](https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1)

## Quadratische Gleichungen

Aufgaben mit (quadratischen) Gleichungen erscheinen oft unterrichtsnah. Dennoch lassen sich dabei interessante Fragestellungen verbinden.

### Aufgabe MO650922.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen  $x$  der Gleichung

$$\frac{x-5}{x} + \frac{x}{5} = \frac{5-x}{5} + \frac{5}{x}$$

b) Gibt es Lösungspaare  $(a, b)$  reeller Zahlen, für die

$$\frac{a+b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} - \frac{b}{a}$$

gilt?

c) Bestimmen Sie alle Paare  $(a, b)$  reeller Zahlen, für die

$$\frac{a-b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} + \frac{b}{a}$$

gilt.

*Hinweis:* Ein Lösungspaar für die Gleichung  $a^2 + ab = b \cdot (a + 4b)$  ist zum Beispiel das Paar  $(6, -3)$ , denn für  $a = 6$  und  $b = -3$  hat die linke Seite der Gleichung den Wert  $6^2 + 6 \cdot (-3) = 18$  und die rechte Seite ebenfalls  $(-3) \cdot (6 + 4 \cdot (-3)) = 18$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Wir stellen zunächst fest, dass die gegebene Gleichung  $x \neq 0$  bedingt. Somit können wir beide Seiten mit  $5 \cdot x$  multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung

$$5 \cdot (x-5) + x^2 = x \cdot (5-x) + 5^2,$$

also

$$2 \cdot x^2 - 50 = 0,$$

woraus  $x = \pm 5$  folgt. Die Probe bestätigt beide Werte als Lösungen:

$$\frac{5-5}{5} + \frac{5}{5} = 1 = \frac{5-5}{5} + \frac{5}{5} \quad ; \quad \frac{(-5)-5}{(-5)} + \frac{(-5)}{5} = 1 = \frac{5-(-5)}{5} + \frac{5}{(-5)}.$$

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Damit alle Terme definiert sind, muss  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  gelten. Wir können beide Seiten mit dem Produkt  $a \cdot b$  multiplizieren und erhalten

$$b \cdot (a+b) + a^2 = a \cdot (b-a) - b^2.$$

Diese Gleichung formen wir äquivalent zu  $2 \cdot a^2 = -2 \cdot b^2$  um. Jedoch lässt sich diese Gleichung nur mittels  $a = b = 0$  erfüllen, im Widerspruch zum Definitionsbereich der Ausgangsgleichung. Es kann also keine Lösungen in reellen Zahlen geben.

*Lösungsvariante:* Offensichtlich gilt für die gegebene Gleichung

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}.$$

Setzen wir für  $a \neq 0$  zur abkürzenden Schreibweise  $z = \frac{b}{a}$ , so können wir die letzte Gleichung zu  $z = -\frac{1}{z}$  äquivalent umformen, was zum Widerspruch  $z^2 = -1$  führt.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):* Damit alle Terme definiert sind, muss  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  gelten. Wir können die Ausgangsgleichung äquivalent umformen und erhalten

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

woraus wie in Teilaufgabe b) für  $z = \frac{a}{b}$  der Zusammenhang  $z^2 = 1$  folgt. Folglich kann nur  $b = a$  oder  $b = -a$  zu Lösungen führen. Beide Ansätze erweisen sich tatsächlich als Lösungen, denn es gilt für alle  $a \neq 0$ :

$$\frac{a - a}{a} + \frac{a}{a} = 1 = \frac{a - a}{a} + \frac{a}{a}$$

bzw.

$$\frac{a - (-a)}{a} + \frac{a}{-a} = 1 = \frac{(-a) - a}{-a} + \frac{(-a)}{a}.$$

□

**Aufgabe MO651022.** In dieser Aufgabe sind  $a$  und  $b$  positive (reelle) Zahlen. Die Gleichung für  $x$

$$\frac{a \cdot (x + b)}{x + a} + \frac{b \cdot (x - a)}{x + b} = a + b$$

soll gelöst werden.

- a) Lösen Sie die Gleichung für  $a = 1$  und  $b = 3$ .
- b) Bestimmen Sie alle Lösungen für  $x$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Wir setzen die Werte für  $a$  und  $b$  ein und erhalten die Gleichung

$$\frac{1 \cdot (x + 3)}{x + 1} + \frac{3 \cdot (x - 1)}{x + 3} = 4$$

Damit es Lösungen gibt, muss  $x \neq -1$  und  $x \neq -3$  gelten. Multiplizieren wir beide Seiten mit  $(x + 1)(x + 3)$ , führt dies zur Gleichung

$$(x + 3)^2 + 3 \cdot (x^2 - 1) = 4(x + 1)(x + 3).$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung entspricht der Lösungsmenge der Gleichung

$$4 \cdot x^2 + 6x + 6 = 4x^2 + 16x + 12,$$

also

$$10x + 6 = 0 ; x = -\frac{3}{5}.$$

Die Probe bestätigt diese Lösung, denn wir finden

$$\frac{1 \cdot \left(-\frac{3}{5} + 3\right)}{-\frac{3}{5} + 1} + \frac{3 \cdot \left(-\frac{3}{5} - 1\right)}{-\frac{3}{5} + 3} = \frac{12}{5} - \frac{24}{5} = \frac{12}{2} - \frac{24}{12} = 6 - 2 = 4.$$

*Hinweis:* Natürlich wäre es korrekt, gleich mit der Lösung der Teilaufgabe b) zu beginnen und anschließend die Teilaufgabe a) als Spezialfall durch Einsetzen der vorgegebenen Werte für  $a$  und  $b$  zu lösen. Anliegen der Aufgabenstellung ist es aber, zunächst mit einfacher Konstellation erfolgreich zu sein und dann die Erkenntnisse aus den Umformungen für die Lösung der Teilaufgabe b) anzuwenden.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Wir stellen zunächst fest, dass die gegebene Gleichung  $x + a \neq 0$  und  $x + b \neq 0$  bedingt. Wir können die gegebene Gleichung umformen (immer in Anlehnung an die Schritte in Teilaufgabe a).

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot (x + b)}{x + a} + \frac{b \cdot (x - a)}{x + b} &= \frac{a \cdot (x + b)^2 + b \cdot (x^2 - a^2)}{(x + a) \cdot (x + b)} \\ &= \frac{ax^2 + 2abx + ab^2 + bx^2 - ba^2}{(x + a) \cdot (x + b)} = a + b. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2abx + ab^2 + bx^2 - ba^2 &= (a + b) \cdot (x + a) \cdot (x + b) \\ x^2(a + b - (a + b)) + x \cdot (2ab - (a + b)^2) + ab^2 - ba^2 - ab(a + b) &= 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also:

$$x \cdot (-a^2 - b^2) - 2 \cdot a^2 \cdot b = 0$$

Voraussetzungsgemäß ist  $a > 0, b > 0$  und somit auch  $a^2 + b^2 > 0$ . Wir können somit weiter nach  $x$  auflösen:

$$x = \frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2}.$$

Wir erkennen, dass für  $a = b$  aus  $x = \frac{-2 \cdot a^3}{2 \cdot a^2} = -a$  für den Nenner im linken Bruch  $x + a = 0$  folgt und somit keine Lösung möglich ist. Wir können also im Weiteren  $a \neq b$  voraussetzen.

*Kontrollrechnung:* Für  $a = 1$  und  $b = 3$  stimmt dieser Term mit der Lösung aus Teilaufgabe a) überein, denn  $x = \frac{-2 \cdot 1^2 \cdot 3}{1^2 + 3^2} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$ . Diese Information genügt aber nicht als Probe. Diese ist gesondert zu führen, indem wir die gefundene Zahl für  $x$  in die Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\frac{a \cdot \left( \frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + b \right)}{\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + a} + \frac{b \cdot \left( \frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} - a \right)}{\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + b} = a + b.$$

Wir beseitigen die Doppelbrüche und erhalten:

$$\frac{a \cdot (-2 \cdot a^2 \cdot b + a^2 \cdot b + b^3)}{-2 \cdot a^2 \cdot b + a^3 + a \cdot b^2} + \frac{b \cdot (-2 \cdot a^2 \cdot b - a^3 - a \cdot b^2)}{-2 \cdot a^2 \cdot b + a^2 \cdot b + b^3} = a + b,$$

$$\frac{b \cdot (b^2 - a^2)}{(a - b)^2} + \frac{a \cdot (a + b)^2}{b^2 - a^2} = a + b.$$

Unter Anwendung der bekannten binomischen Formel  $(b + a) \cdot (b - a) = b^2 - a^2$  vereinfachen wir

$$\frac{b \cdot (b + a) \cdot (b - a)}{(a - b)^2} + \frac{a \cdot (a + b)^2}{(b + a) \cdot (b - a)} = \frac{-b \cdot (a + b)}{(b - a)} + \frac{a \cdot (a + b)}{(b - a)} = a + b$$

□

Interessante quadratische Gleichungen entstehen, wenn die Basis der Zahlendarstellung variieren kann.

**Aufgabe – MO360945.** Untersuchen Sie, ob es ein Stellenwertsystem der Basis  $B$  gibt, in dem  $17^3 = 71^2$  gilt! Geben Sie im Falle der Existenz alle derartigen Basen  $B$  an!

*Lösungshinweise:* Wenn  $B$  eine Basis eines Stellenwertsystems ist, in dem die genannte Gleichung gilt, ist  $B \geq 8$  (da mindestens Ziffern bis 7 benötigt werden. Außerdem gilt

$$(B + 7)^3 = (7B + 1)^2.$$

Daraus folgt

$$B^3 + 21B^2 + 147B + 343 = 49B^2 + 14B + 1,$$

$$B \cdot (B^2 - 28B + 133) + 342 = 0.$$

Also ist die Zahl 342 durch  $B$  teilbar. Wegen der Primfaktorenzerlegung  $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$  kann  $B$  nur eine der folgenden Zahlen sein:

$B$	$B + 7$	$7B + 1$	Bemerkung
$3^2 = 9$	16	64	
$2 \cdot 3^2 = 18$	25	127	25 durch 5 teilbar, 127 nicht durch 5 teilbar
19	26	134	26 durch 13 teilbar, 134 nicht durch 13 teilbar
$2 \cdot 19 = 38$	45	267	45 durch 5 teilbar, 267 nicht durch 5 teilbar
$3 \cdot 19 = 57$	64	400	400 durch 5 teilbar, 64 nicht durch 5 teilbar
$2 \cdot 3 \cdot 19 = 114$	121	799	121 durch 11 teilbar, 799 nicht durch 11 teilbar
$3^2 \cdot 19 = 171$	178	1198	178 durch 89 teilbar, 1198 nicht durch 89 teilbar
$2 \cdot 3^2 \cdot 19 = 342$	349	2395	2395 durch 5 teilbar, 349 nicht durch 5 teilbar

Somit kann nur  $B = 9$  zu einer Lösung führen. Tatsächlich gilt:

$$(17)_9^3 = (9 + 7)^3 = 16^3 = 4096$$

$$(71)_9^2 = (7 \cdot 9 + 1)^2 = 64^2 = 4096$$

**Aufgaben MO380935/MO381035.** Jörn behauptet als Scherzaufgabe, die Zahl  $z = 49858$  sei gleich der Zahl  $2 \cdot z$  (obwohl diese Zahl  $z$  ja offensichtlich verschieden von der einzigen Lösung  $z = 0$  der Gleichung  $z = 2 \cdot z$  ist). Nora nennt eine Lösungsidee: Man verstehe die eine der Zifferangaben für  $z$  bzw.  $2 \cdot z$  im Dezimalsystem, die andere im Stellenwertsystem mit einer von 10 verschiedenen Basis  $B$ .

Man untersuche, ob diese Idee zur behaupteten Gleichheit führt. Ist das der Fall, so ermittle man alle diejenigen Basen  $B$ , für die das zutrifft.

*Lösungshinweise:* Wenn die gewünschte Gleichheit für eine Basis  $B$  erreichbar ist, so folgt: Da die Ziffer 9 vorkommt, muss  $B$  größer als 9, wegen  $B \neq 10$  also größer als 10 sein. Daher kann Gleichheit nur so eintreten: Die Zahl 49858, im System mit der Basis  $B$  verstanden, ist gleich der Zahl  $2 \cdot 49858$  im Dezimalsystem verstanden. Das bedeutet:

$$4 \cdot B^4 + 9 \cdot B^3 + 8 \cdot B^2 + 5 \cdot B + 8 = 99716,$$

also

$$B \cdot (4 \cdot B^3 + 9 \cdot B^2 + 8 \cdot B + 5) = 99708.$$

Wegen  $4 \cdot 13^4 = 4 \cdot 169^2 > 4 \cdot 160^2 = 4 \cdot 25600 > 99716$  würde  $B \geq 13$  zu groß werden, also ist  $B \leq 12$ . Jedoch entfällt  $B = 11$ , weil 99708 nicht durch 11 teilbar ist. Somit verbleibt nur die Möglichkeit  $B = 12$ . Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 12^4 + 9 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 + 8 \\ &= 4 \cdot 20736 + 9 \cdot 1728 + 8 \cdot 144 + 5 \cdot 12 + 8 \\ &= 82944 + 15552 + 1152 + 60 + 8 = 99716. \end{aligned}$$

Daher ist die gewünschte Gleichheit erreichbar, und zwar mit der Basis  $B = 12$ .  $\square$

## Methoden der vollständigen Induktion

Induktion (lat. *inductio* – *hinführen*) ist der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Die Bedeutung von Verallgemeinerungen der Ergebnisse von einzelnen Beobachtungen und Experimenten, also von Induktionen, ist für das experimentelle Arbeiten wohlbekannt und unstrittig. Dagegen gilt die Mathematik schon von alters her als klassisches Beispiel der Anwendungen rein deduktiver Methoden (lat. *Deductio* – Abführen, Ableitung), weil hierbei stets die Auffassung besteht, dass sich alle mathematischen Sätze (außer den Grundannahmen, den Axiomen) beweisen lassen und dass die konkreten Anwendungen dieser Sätze aus den auf die allgemeinen Fälle zugeschnittenen Beweisen hergeleitet (deduziert) werden.

Die Induktion, d.h. das Hinführen auf eine Idee, auf eine Vermutung oder auf eine Hypothese besitzt in der Mathematik aber dennoch eine große, wenn auch lediglich heuristische Rolle: Sie erlaubt darauf zu kommen, wie die Lösung vermutlich beschaffen sein muss. Zu beweisen sind mathematische Sätze stets deduktiv, so auch Verallgemeinerungen von Beispielen. Folgende mathematische Probleme demonstrieren die Notwendigkeit des Beweises<sup>3</sup> von Vermutungen.

- (1) Untersuchen wir die reellwertige Funktion  $f(x) = x^2 + x + 41$ , so finden wir für  $x = 0$  die Primzahl  $f(0) = 41$ . Auch für  $x = 1, 2, 3$  liefert die Funktion mit 43, 53, 61 Primzahlen. Weitere Test mit  $x = 4, 5, \dots$  ergeben immer wieder Primzahlen. Führt  $f(n)$  vielleicht für alle natürlichen Zahlen  $n$  auf eine Primzahl (nach LEONHARD EULER (1707 – 1783))? Leicht sehen wir jedoch, dass für  $x = 41$  der Ausdruck  $f(41)$  durch 41 teilbar ist und somit keine Primzahl sein kann. Aber auch  $x = 40$  ergibt wegen  $40^2 + 40 + 41 = (40 + 1)^2$  eine zusammengesetzte Zahl.
- (2) Offensichtlich ist  $n^3 - n$  für jede natürliche Zahl  $n$  durch 3 teilbar, ebenso ist  $n^5 - n$  durch 5 teilbar. Wir können auch zeigen, dass 7 ein Teiler von  $n^7 - n$ . Gilt vielleicht für jede ungerade natürliche Zahl  $k$  die Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist  $n^k - n$  durch  $k$  teilbar (nach GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716))?
  - Für  $k = 3$  gilt  $n^3 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ . Die Teilbarkeit durch 3 ist für ein Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen stets gültig.
  - Für  $k = 5$  finden wir die Zerlegung  $n^5 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$ . Ist einer der Zahlen  $(n - 1), n$  oder  $(n + 1)$  durch 5 teilbar, ist 5 auch ein Teiler von  $n^5 - n$ . Andernfalls lässt  $n$  bei Division durch 5 den Rest  $\pm 2$ . Für eine solche Zahl ist aber der Ausdruck  $(n^2 + 1)$  durch 5 teilbar.
  - Für  $k = 7$  finden wir die Zerlegung

<sup>3</sup> Sominskij, I.S.; Golovina, L.I.; Jaglom, I.M.: Die vollständige Induktion. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

$$n^7 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1).$$

Ist einer der Zahlen  $(n - 1)$ ,  $n$  oder  $(n + 1)$  durch 7 teilbar, ist 7 auch ein Teiler von  $n^7 - n$ . Lässt  $n$  bei Division durch 7 den Rest  $\pm 2$ , so ist der Faktor  $(n^2 \pm n + 1)$  durch 7 teilbar. Lässt  $n$  bei Division durch 7 den Rest  $\pm 3$ , so ist der Faktor  $(n^2 \mp n + 1)$  durch 7 teilbar.

- Für  $k = 9$  ergibt sich bereits für  $n = 2$  ein Widerspruch, da  $2^9 - 2 = 510$  nicht durch 9 teilbar ist.

Die obige Vermutung gilt auch allgemein nicht für gerade Zahlen  $k$ . Zwar ist 2 für jedes  $n$  ein Teiler von  $n^2 - n = (n - 1) \cdot n$ . Aber schon für  $k = 4$  ist für  $n = 2$  die Vermutung widerlegt:  $2^4 - 2 = 14$  ist nicht durch 4 teilbar.

In den folgenden Beispielen lassen sich die Vermutungen durch systematisches Probieren nur sehr aufwendig widerlegen:

(3) Berechnen wir für Primzahlen  $p = 2, 3, 5, \dots$  den Ausdruck  $2^{p-1} - 1$ , so könnten wir vermuten, dass dieser stets nicht durch  $p^2$  teilbar ist. Wir benötigen schon viel Geduld, um das Gegenbeispiel zu finden, denn erst für  $p = 1093$  teilt  $1093^2$  die Zahl  $2^{1092} - 1$  (nach DIMITRY A. GRAVE (1863 – 1939)).

(4) Ganz aussichtslos erscheint der Versuch, die Vermutung „Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ergibt  $991 \cdot n^2 + 1$  niemals eine Quadratzahl“ mittels Gegenbeispiel zu widerlegen. Die kleinste natürliche Zahl, die der Vermutung widerspricht, lautet

$$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.$$

Diese Beispiele erlauben den einfachen, aber wichtigen Schluss: Eine Aussage kann in einer ganzen Reihe spezieller Fälle richtig und trotzdem allgemein falsch sein.

Die Methode der vollständigen Induktion ist nun ein Prinzip, um eine Aussage für unendliche viele natürliche Zahlen zu beweisen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen und Inhalt des 5. Axioms des PEANOSchen Axiomensystems („Wenn eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, dann ist diese Teilmenge gleich der Menge aller natürlichen Zahlen“), das zur Beschreibung der natürlichen Zahlen durch GIUSEPPE PEANO (1858-1932) aufgestellt wurde. Wir können also dieses Prinzip nicht beweisen, es sei denn, wir stützen uns auf ein anderes, gleichwertiges Axiom wie z.B. „Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element“.

Die Methode der vollständigen Induktion funktioniert anschaulich nach dem Domino-Prinzip: Wir werfen den ersten Stein einer Reihe um und mit einem umkippenden Stein fällt auch der darauf folgende um. Dann fallen nacheinander alle Steine um.

**Aufgabe MO470924.** Es wird eine Folge von  $n$  positiven rationalen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  betrachtet, für die gilt:

$$x_2^2 = 1 + x_1 ; x_3^2 = 1 + x_2 ; \dots ; x_n^2 = 1 + x_{n-1}.$$

Kurz: Es gilt  $x_{k+1}^2 = 1 + x_k$  für alle  $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ .

- Bestimmen Sie für  $n = 3$  und  $x_1 = \frac{200}{2401}$  die Werte für  $x_2$  und  $x_3$ . Geben Sie die Werte der rationalen Zahlen  $x_2$  und  $x_3$  exakt in ihrer Bruchdarstellung an.
- Geben Sie ein weiteres Beispiel  $x_1, \dots, x_5$  an, welches den obigen Bedingungen genügt und wo  $x_1, \dots, x_5$  sämtlich ganze Zahlen größer als 1 sind.
- Beweisen Sie für jede Folge von  $n$  positiven rationalen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  welche den obigen Bedingungen genügt, folgende Aussage: Wenn  $x_1 < 2$  gilt, dann gilt  $x_n < 2$ .

**Aufgabe MO471022.** Gegeben ist eine positive reelle Zahl  $a$ . Es wird eine Folge von Zahlen  $x_2, x_3, \dots$  aus dem Startwert  $x_1 = 0$  schrittweise nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$$

für  $n \geq 1$  berechnet.

Weisen Sie nach,

- dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also  $x_n < x_{n+1}$  für  $n \geq 1$  gilt, und
- dass alle diese Werte  $x_n$  kleiner als  $a + 1$  sind.

Ohne hier die Lösung zu diskutieren, verweisen wir auf die Hinweise aus der Aufgabenkommission zu diesen Aufgaben: *Die Lösungen lassen sich mit dem Schema der vollständigen Induktion formulieren. Dies darf aber von Schülerlösungen nicht verlangt werden.*

In folgenden Jahrgängen wurden wiederholt Aufgaben gestellt, die auch mit der Methode der vollständigen Induktion gelöst werden können. Dieser Lösungsansatz wurde dann (gleichwertig) als Lösungsvariante angegeben, während die „erste“ Lösung ohne diese Methode auskam. Aber in der Lösungsdiskussion zur

**Aufgabe MO631016.**

- Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken). Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

- b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird. Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?

wird erneut der Hinweis gegeben: Ein exakter Beweis ist mit vollständiger Induktion möglich, wobei zu berücksichtigen ist, dass von  $n$  auf  $n + 2$  geschlossen wird, also die Induktionsvoraussetzung für zwei Startwerte zu prüfen ist. **Diese exakte Argumentation wird von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangt.**

Obwohl also weiterhin in der Mathematik-Olympiade die Methode der vollständigen Induktion nicht in korrekter formaler Form verlangt wird, lohnt es sich, damit umgehen zu können. Dabei sollte der Beweis stets folgender Form entsprechen:

Induktionsanfang: Man zeige, dass die Aussage für einen Anfangswert gilt, zum Beispiel für  $n = 1$ .

Induktionsschritt:

*Voraussetzung:* Man setze voraus, dass die Aussage für ein  $n = k$  wahr ist.

*Behauptung:* Man behauptet, dass die Aussage für  $n = k + 1$  wahr ist.

*Beweis:* Man zeige, dass die Aussage für  $n = k + 1$  folgt, wenn sie für  $n = k$  erfüllt ist.

Induktionsschluss: Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen ab dem Anfangswert erfüllt ist.

**Aufgabe KZM 5-5A.** Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl  $n$  größer als 7 existieren ganzzahlige nichtnegative Zahlen  $r$  und  $s$ , so dass gilt:  $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$ .

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ( $n \geq 1$ ) ist 9 ein Teiler von  $7^n + 3n - 1$ .

(c) In der Ebene seien  $n$  Kreise gegeben ( $n \geq 1$ ), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes  $n$  bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):*

- Induktionsanfang: Für  $n = 8$  ist die Aussage richtig, denn es gilt mit  $r_8 = 1$  und  $s_8 = 1$  die Gleichung  $3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$ .
- Induktionsschritt: Wir bezeichnen im Weiteren mit  $r_k$  und  $s_k$  die Koeffizienten, die eine geeignete Zerlegung für die Zahl  $k$  ergeben.
- Voraussetzung:* Die Aussage sei für eine Zahl  $n = k$  richtig ( $k \geq 8$ ).
- Behauptung:* Die Zerlegung einer Zahl in der geforderten Art ist auch für  $n = k + 1$  möglich.
- Beweis:* Wir unterscheiden zwei Fälle.
- (1) Die Zahl  $k$  sei ein ganzzahliges Vielfaches von 3, d.h. sie lässt sich in der Form  $k = 3 \cdot r_k + 5 \cdot 0$  darstellen. Da  $k$  mindestens 8 ist, ist  $r \geq 3$ .  
Dann gilt stets auch die Zerlegung für  $k + 1$  in der Form:  
 $k + 1 = 3 \cdot (r_k - 3) + 5 \cdot 2$  mit  $r_{k+1} = r_k - 3 \geq 0$  und  $s_{k+1} = 2$ .
- (2) Es sei  $k$  kein ganzzahliges Vielfaches von 3. Laut Voraussetzung existiert eine Zerlegung der geforderten Art, d.h.  $k = 3 \cdot r_k + 5 \cdot s_k$  mit  $s_k > 0$ .  
Dann ist aber für  $k + 1$  die folgende Zerlegung richtig:  
 $k + 1 = 3 \cdot (r_k + 2) + 5 \cdot (s_k - 1)$  mit  $r_{k+1} = r_k + 2$  und  $s_{k+1} = s_k - 1 \geq 0$ .
- Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 8$  erfüllt.

*Hinweis:* Die Lösung ist auch ohne explizite Anwendung der Methode der vollständigen Induktion möglich. Wir gehen davon aus, dass sich jede natürliche Zahl  $n > 10$  als  $n = 3 \cdot k + a$  mit  $a = 8, 9$  oder  $10$  darstellen lässt. Damit genügt es, die Zerlegungen für die Zahlen 8, 9 und 10 anzugeben, denn für jede Zahl größer 10 kann der Koeffizient für die Zahl 3 entsprechend um  $k$  vergrößert gewählt werden. Es gilt:  $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ ;  $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ ;  $10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):*

- Induktions-Anfang: Für  $n = 1$  gilt  $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$ .
- Induktions-Schritt:
- Voraussetzung:* Für  $n = k$  existiert eine ganze Zahl  $m$ , so dass die Gleichung  $7^k + 3 \cdot k - 1 = 9 \cdot m$  gilt.
- Behauptung:* Für  $n = k + 1$  gibt es eine ganze Zahl  $m'$ , so dass die Gleichung  $7^{k+1} + 3 \cdot (k + 1) - 1 = 9 \cdot m'$  gilt.
- Beweis:* Durch Ausmultiplizieren bestätigen wir die Richtigkeit folgender Gleichung:
- $$7^{k+1} + 3 \cdot (k + 1) - 1 = 7 \cdot (7^k + 3 \cdot k - 1) - 18 \cdot k + 9.$$

Da laut Voraussetzung der Ausdruck in der Klammer durch 9 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck offensichtlich ebenfalls durch 9 teilbar.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  erfüllt.

*Hinweis:* Die Lösung ist auch ohne explizite Anwendung der Methode der vollständigen Induktion möglich. Wir ermitteln beispielsweise für die Summanden und daraus für die Summe in Abhängigkeit von  $n$  die Reste bei Division durch 9 und tragen die Ergebnisse tabellarisch zusammen. Da sich die Reste periodisch wiederholen, ist die Teilbarkeit durch 9 für alle  $n$  erkennbar:

$n$	$7^n$	$3 \cdot n$	$7^n + 3n - 1$
1	7	3	9
2	4	6	9
3	1	0	0
4	7	3	9
5	4	6	9
6	1	0	0

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):*

Induktionsanfang: Für  $n = 1$  ist die Aussage offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:

*Voraussetzung:* Es sei möglich, die Schnittflächen von  $n \geq 1$  Kreisen so mit zwei Farben zu färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

*Behauptung:* Wir können die Schnittflächen von  $n + 1$  Kreisen so mit zwei Farben färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

*Beweis:* In der Ebene seien  $n + 1$  Kreise gegeben. Entfernen wir einen dieser Kreise, so können die Schnittflächen der verbleibenden  $n$  Kreise gemäß der Voraussetzung wie gefordert gefärbt werden. Danach fügen wir den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und vertauschen im Innern dieses Kreises die Farbe jeder Schnittfläche mit der anderen der beiden verwendeten Farben. Leicht sehen wir, dass dadurch eine Färbung entsteht, die den Bedingungen gerecht wird:

- In dem Teil der Ebene, der außerhalb des hinzugekommenen Kreises liegt, verändern sich die Farben von sich berührenden Schnittflächen nicht, so dass sie die Bedingungen laut Voraussetzung erfüllen.

- Im Innern des hinzugenommenen Kreises werden die Farben getauscht, damit haben sich berührenden Schnittflächen wie vorher unterschiedliche Färbungen.
- Entstehen durch die Kreislinie neue Berührungslinien zweier Schnittflächen durch ein vorher gleichfarbiges Gebiet, so liegt eine dieser Schnittflächen außerhalb und die andere innerhalb des Kreises. Aufgrund der Umkehrung der Färbung im Inneren wird auch in diesem Fall die Bedingung erfüllt.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  erfüllt. □

Manchmal soll eine Aussage nur für alle  $n$  ab einem bestimmten Startwert  $n_0$  gezeigt werden. Dann müssen wir im Induktionsanfang natürlich zeigen, dass die Aussage für  $n_0$  gilt, wobei der geeignete Startwert ggf. selbst zu finden ist.

**Aufgabe.** Man finde alle natürlichen Zahlen  $n$ , für die die Ungleichung  $2^{n-1} > (n-1)^2$  erfüllt ist.

*Lösungshinweise:*

Induktionsanfang: Für  $n = 1$  und für  $n = 2$  ist die geforderte Ungleichung erfüllt, denn es gilt  $2^0 > 0^2$  und  $2^1 > 1^2$ .

*Zwischenbemerkung:* Damit erscheint der Induktionsanfang korrekt. Da Terme mit Exponenten im Allgemeinen schneller wachsen als quadratische Terme, könnten wir die Gültigkeit für alle  $n > 0$  vermuten.

Induktionsschritt:

*Voraussetzung:* Es gelte die Ungleichung  $2^{n-1} > (n-1)^2$  für  $n = k$ .

*Behauptung:* Die Ungleichung  $2^{n-1} > (n-1)^2$  sei auch für  $n = k + 1$  richtig.

*Beweis:* Es gilt  $2^{n-1} = 2^k = 2 \cdot 2^{k-1} > 2 \cdot (k-1)^2 = 2 \cdot (n-2)^2$ . Ist nun  $2 \cdot (n-2)^2 > (n-1)^2$ , so ist der Beweis erbracht. Schnell neigen wir zu der Aussage „wie man leicht sieht“ und betrachten den Beweis als beendet.

Allerdings finden wir aus der Ungleichung durch Ausmultiplizieren der Quadrate

$$\begin{aligned} 2 \cdot n^2 - 8 \cdot n + 8 &> n^2 - 2n + 1 \\ n^2 - 6n + 7 &= (n-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist aber nur dann erfüllt, wenn  $(n-3)^2$  größer oder gleich als 2 wird. Wir überzeugen uns leicht, dass dies für ganze Zahlen  $n < 5$  nicht stimmt! Wir müssen

den Induktionsanfang noch einmal prüfen und stellen dabei fest, dass die geforderte Ungleichung für  $n = 3, 4, 5$  nicht gilt, denn es ist jeweils  $2^2 = 2^2, 2^3 = 8 < 9 = 3^2, 2^4 = 4^2$ . Aber es gilt  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ .

Die Ungleichung kann also nur für alle  $n > 5$  richtig sein.

Induktionsschluss: Nach der Methode der vollständigen Induktion folgt aus dem (präzisierten) Induktionsanfang und dem Induktionsschritt, dass die Ungleichung  $2^{n-1} > (n-1)^2$  für alle  $n \geq 5$  richtig ist.  $\square$

In der Lösungsvariante zu folgender Aufgabe wird noch einmal recht aktuell demonstriert, wie die Methode der vollständigen Induktion ohne Formalismus angewandt werden darf.

**Aufgabe MO611033.** Es sei  $a_0$  eine positive ganze Zahl, und für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  sei  $a_n$  das kleinste Vielfache von  $n$ , das größer ist als  $a_{n-1}$ .

Zeigen Sie, dass es eine positive ganze Zahl  $k$  gibt, für die  $a_n = k \cdot n$  für alle  $n \geq k$  gilt.

*Lösungshinweise:* Wir betrachten zunächst für  $n \geq 1$  die Folge der Quotienten  $b_n = \frac{a_n}{n}$ . Dies ist eine monoton fallende Folge positiver ganzer Zahlen. Nach Konstruktion ist nämlich  $a_n$  durch  $n$  teilbar und positiv, also ist  $b_n$  eine positive ganze Zahl. Da für jedes  $n$  eine der  $n+1$  aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen  $a_n + 1, \dots, a_n + n + 1$  durch  $n+1$  teilbar sein muss, ist  $a_n + 1 \leq a_n + n + 1$ , also

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} \leq \frac{a_n}{n+1} + 1 < \frac{a_n}{n} + 1 = b_n + 1$$

Da links und rechts dieser Ungleichung ganze Zahlen stehen, folgt  $b_{n+1} \leq b_n$ . Damit ist  $(b_n)$  eine monoton fallende Folge positiver ganzer Zahlen; diese muss irgendwann konstant werden. Es gibt also positive ganze Zahlen  $k$  und  $N$  derart, dass  $b_n = k$  für alle  $n \geq N$  ist. Wir wählen das kleinstmögliche  $N$ , für welches dies gilt.

Angenommen, es wäre  $N \geq k + 1$ . Dann gilt insbesondere  $N - 1 \geq k \geq 1$  und  $b_{N-1}$  ist definiert. Wir wissen bereits, dass  $b_{N-1} \geq b_N = k$  gilt, und da  $N$  minimal gewählt war, haben wir sogar  $b_{N-1} \geq k + 1$ . Dann gilt

$$a_{N-1} = (N-1) \cdot b_{N-1} \geq (N-1) \cdot (k+1) = N \cdot k + N - k - 1 \geq N \cdot b_N = a_N,$$

da  $N - k - 1 \geq 0$  gilt.

Laut Aufgabenstellung gilt aber  $a_N > a_{N-1}$ , womit die Annahme widerlegt ist.

*Lösungsvariante:* Es sei  $N = a_0 > 0$ . Wir verwenden die Ungleichung  $a_{n+1} \leq a_n + n + 1$  für alle  $n \geq 1$ . Wir haben damit insbesondere die Abschätzung

$$a_{2N} \leq a_0 + 1 + 2 + \dots + 2 \cdot N = N + \frac{2 \cdot N(2 \cdot N + 1)}{2} = 2N^2 + 2N \leq (2N)^2$$

Es existiert somit ein minimales  $k$  mit  $a_n \leq k^2$ . Wegen  $a_0 > 0$  gilt  $k > 0$  und  $a_{k-1} > (k-1)^2$ . Für  $k-1 > 0$  ist dabei  $a_{k-1} - 1$  durch  $k-1$  teilbar und es folgt  $a_{k-1} \geq k \cdot (k-1)$ , während für  $k-1 = 0$  die Abschätzung  $a_{k-1} \geq k(k-1) = 0$  offensichtlich ist. Da  $a_k > a_{k-1} - 1 \geq k \cdot (k-1)$  gilt und  $a_k$  durch  $k$  teilbar ist, folgt  $a_k \geq k^2$  und somit  $a_k = k^2$ .

Mit vollständiger Induktion folgt abschließend  $a_n = k \cdot n$  für alle  $n \geq k$ . Der Fall  $n = k$  wurde soeben bewiesen. Für den Induktionsschritt sei  $a_n = k \cdot n$  bereits bekannt. Es gilt dann

$$k \cdot (n+1) = k \cdot n + k > a_n = k \cdot n > k \cdot n + k - n - 1 = (k-1) \cdot (n+1),$$

womit sich  $a_{n+1} = k \cdot (n+1)$  als kleinstes Vielfaches von  $n+1$ , welches größer ist als  $a_n$ , ergibt.  $\square$

## Technische Universität Chemnitz wird 190

Am 2. Mai 1836 wurde die Königliche Gewerbeschule zu Chemnitz in den Räumen der hiesigen Lateinschule gegründet. Dr. FRANK GÖRING, wissenschaftlicher Mitarbeiter der Professur Algorithmische und Diskrete Mathematik (Prof. CHRISTOPH HELMBERG) und sachsenweit für sein Engagement für die Verbindung der Fakultät für Mathematik mit Schulen bekannt, spielt im Jubiläumsjahr der TU Chemnitz mit der Zahl 190. In einem Beitrag<sup>4</sup> der TUC erläutert er: „Treffen sich 20 Leute auf einer Party und jeder begrüßt jeden mit Handschlag, so ergeben sich genau 190 Handschläge“, und fügt schmunzelnd hinzu: „Man kann natürlich auch mit Sekt anstoßen und nachzählen, wie oft die Gläser klingen.“

Weiter setzt er die Zahlenspielereien fort: 190 ist auch eine „freundliche“ Zahl. So werden Zahlen genannt, die Summe mehrerer aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sind. Das geht bei 190 auf verschiedene Weisen:

$$190 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$

$$190 = 36 + 37 + 38 + 39 + 40$$

$$190 = 46 + 47 + 48 + 49$$

Eine besondere Eigenschaft ist außerdem, dass 190 die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist:  $190 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$ .

Mathematisch korrekt ist auch, dass die Zahl 190 durch ihre Quersumme teilbar ist. „Das ist aber nicht so ungewöhnlich“, sagt Dr. GÖRING. „Sicher finden pffiffige Menschen noch mehr Berührungspunkte zur diesjährigen Uni-Jubiläumzahl.“ Wer

<sup>4</sup> <https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/13375>

Ideen hat, kann seine Vorschläge gern unter [frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de](mailto:frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de) melden. Die Pressestelle sagt jedenfalls 190-mal „Danke!“ für diese kleine rechnerische Spielerei.

Zur Jubiläumszahl passt auch die März-Aufgabe aus dem Monatsrätsel<sup>5</sup> von Dr. FRANK GÖRING. „Bei der Suche nach besonderen Eigenschaften der Alterszahl unserer Universität als Bildungseinrichtung kann man auch die eine oder andere KI befragen. Eine interessante Antwort war, dass 190 unberührbar ist. Dazu wurde von der KI die Folge der unberührbaren Zahlen zitiert und auch ausschnittsweise angegeben -- mit 190 zwischendrin. Folgte man zur Quelle des Zitats (*Online Enzyklopädie der ganzzahligen Folgen*), stellte man überrascht fest, dass dort die 190 nicht in der Folge vorkam!

Wie ist die Eigenschaft einer natürlichen Zahl, unberührbar zu sein, eigentlich definiert? Nun, eine Zahl  $s$  ist berührbar, wenn es eine natürliche Zahl  $n$  so gibt, dass  $s$  die Summe aller echten Teiler von  $n$  ist. Dabei ist ein echter Teiler  $t$  von  $n$  eine natürliche Zahl  $t$  kleiner als  $n$  derart, dass  $n$  ein Vielfaches von  $t$  ist. So ist beispielsweise die Summe der echten Teiler von 190 gleich 170, die 170 also berührbar. Addiert man die echten Teiler einer Primzahl, erhält man immer 1, die 1 ist also auch berührbar. Addiert man die echten Teiler einer zusammengesetzten Zahl, erhält man immer mehr als 2, da in der Summe 1 und mindestens eine Primzahl auftauchen. Damit ist 2 also nicht berührbar. Die Zahlen, die nicht berührbar sind, heißen unberührbar. Was ist nun in Bezug auf 190 richtig?

### **Märzfrage: Ist 190 unberührbar? Wieso?**

Natürlich wollen wir hier keine Diskussion der Vertrauenswürdigkeit der KI oder der Online-Enzyklopädie der ganzzahligen Folgen, sondern eine eigene logisch korrekte Begründung.“

### **In alten Mathebüchern geblättert**

Das Induktionsprinzip ist schon lange bekannt. Bereits bei EUKLID VON ALEXANDRIA (um 300 v. Chr.) in seinen Elementen finden wir diesen Ansatz, jedoch ohne einen Beweis. RICHARD DEDEKIND (1831 – 1916) prägte schließlich 1888 den Begriff „vollständige Induktion“, wie wir ihn auch heute noch verwenden.

## **Was sind und was sollen die Zahlen<sup>6</sup>**

---

<sup>5</sup> <https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/raetsel/>

<sup>6</sup> Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt. Digitalisiert zugänglich unter <https://archive.org/details/wassindundwasso00dedegoog/page/XVI/mode/2up>

Von  
**Richard Dedekind**  
Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig  
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn  
Braunschweig, 1893.

§. 4.

Abbildung eines Systems in sich selbst

...

59. Satz der vollständigen Induction. Um zu beweisen, daß die Kette  $A_0$  Theil irgend eines Systems  $\Sigma$  ist = mag letzteres Theil von  $S$  sein oder nicht =, genügt es zu zeigen,

(1) daß  $A \ni \Sigma$ , und

(2) daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von  $A_0$  und  $\Sigma$  ist.

Beweis ...

60. Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der vollständigen Induction (des Schlußes von  $n$  auf  $n + 1$ ) bekannt Beweisart, und er kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden: Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette  $A_0$  eine gewisse Eigenschaft  $E$  besitzen (oder daß ein Satz  $S$ , in welchem von einem unbestimmten Dinge  $n$  die Rede ist, wirklich für alle Elemente  $n$  der Kette  $A_0$  gilt), genügt es zu zeigen:

(1) daß alle Elemente  $a$  des Systems  $A$  die Eigenschaft  $E$  besitzen (oder daß  $S$  für alle  $a$  gilt), und

(2) daß dem Bilde  $n'$  jedes solchen Elementes  $n$  von  $A_0$ , die Eigenschaft  $E$  besitzt, dieselbe Eigenschaft  $E$  zukommt (oder daß der Satz  $S$ , sobald er für ein Element  $n$  von  $A_0$ , gilt, gewiß auch für dessen Bild  $n'$  gelten muß).

In der That, bezeichnet man mit  $S$  das System aller Dinge, welche die Eigenschaft  $E$  besitzen (oder für welche der Satz  $S$  gilt), so leuchtet die vollständige Übereinstimmung der jetzigen Ausdrucksweise des Satzes mit der in 59 gebrauchten unmittelbar ein.

...

§. 6.

Einfach unendliche Systeme. Reihe der natürlichen Zahlen.

...

80. Satz der vollständigen Induction (Schluß von  $n$  auf  $n'$ ).

Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen  $n$  einer Kette  $m_0$  gilt, genügt es zu zeigen,

(1) daß er für  $n = m$  gilt, und

(2) daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl  $n$  der Kette  $m_0$  stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl  $n'$  folgt.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeinen Satze 59 oder 60. Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo  $m = 1$ , also  $m_0$  die volle Zahlenreihe  $\mathbb{N}$  ist.

...

§. 7.  
Größere und kleinere Zahlen

81. Satz. Jede Zahl  $n$  ist verschieden von der auf sie folgende Zahl  $n'$ .

Beweis durch vollständige Induction (80). Wenn (1) der Satz ist wahr für die Zahl  $n = 1$ , weil sie nicht in  $\mathcal{N}'$  enthalten ist (71), während die folgende Zahl  $1'$  als Bild der in  $\mathcal{N}$  enthaltenen Zahl  $1$  Element von  $\mathcal{N}'$  ist.

(2) Ist der Satz wahr für eine Zahl  $n$ , und setzt man die folgende Zahl  $n' = p$ , so ist  $n$  verschieden von  $p$ , woraus nach 26 wegen der Ähnlichkeit (71) der ordnenden Abbildung  $\varphi$  folgt, daß  $n'$ , also  $p$  verschieden von  $p'$  ist. mithin gilt der Satz auch für die auf  $n'$  folgende Zahl  $p$ , w. z. b. w.

**Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2026**

Man untersuche, ob es für  $n = 2$  und für  $n = 3$  jeweils positive natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  gibt, so dass

$$\sum_{k=0}^n (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2$$

gilt!

*Lösungshinweise:* Eine solche Fragestellung wird durch geeignete Beispiele für  $n = 2$  und  $n = 3$  vollständig beantwortet. Mit folgenden Beispielen können wir die Frage also positiv beantworten:

$$\begin{aligned} n = 2, a = 25, b = 21: & 25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030 = 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 \\ n = 3, a = 41, b = 36: & 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 7230 \\ & = 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 \end{aligned}$$

Natürlich bleibt eine solche Lösung unbefriedigend, denn die erforderliche systematische Suche könnte so aufwendig sein, dass das Finden der Parameter nicht effektiv durchführbar erscheint. Wir wollen deshalb eine Lösung erarbeiten.

Wenn wir  $n = 2$  setzen, sind also Parameter  $a$  und  $b$  gesucht mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 (a+k)^2 &= a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 3 \cdot a^2 + 6 \cdot a + 5 = 3 \cdot (a+1)^2 + 2, \\ \sum_{k=0}^3 (b+k)^2 &= b^2 + (b+1)^2 + (b+2)^2 + (b+3)^2 = 4 \cdot b^2 + 12 \cdot b + 14 \\ &= (2 \cdot b + 3)^2 + 5. \end{aligned}$$

Somit soll gelten

$$3 \cdot (a + 1)^2 + 2 = (2 \cdot b + 3)^2 + 5$$

$$3 \cdot (a + 1)^2 - (2 \cdot b + 3)^2 = 3$$

Offensichtlich muss  $2 \cdot b + 3$  und damit auch  $b$  selbst durch 3 teilbar sein. Also gibt es eine ganze Zahl  $c$  mit  $b = 3c$ . Setzen wir nun  $x = a + 1$  und  $y = 2c + 1$ , so erhalten wir die PELLsche Gleichung

$$x^2 - 3 \cdot y^2 = 1.$$

Im Thema 35.2 über DIOPHANTISCHE Gleichungen<sup>7</sup> haben wir eine rekursive Bildungsvorschrift für alle Lösungen dieser Gleichung diskutiert. Wir probieren entsprechend nacheinander:

$$(x; y) = (2; 1) \Rightarrow a = x - 1 = 1, b = 3 \cdot c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = 0: \text{ entfällt, weil } b \text{ nicht positiv ist.}$$

$$(x; y) = (7; 4) \Rightarrow a = x - 1 = 6, b = 3 \cdot c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = \frac{9}{2}: \text{ entfällt, weil } b \text{ nicht ganzzahlig ist.}$$

$$(x; y) = (26; 15) \Rightarrow a = x - 1 = 25, b = 3c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = 21: \text{ ergibt die oben angegebene Lösung.}$$

Wenn wir  $n = 3$  setzen, sind also Parameter  $a$  und  $b$  gesucht mit

$$\sum_{k=0}^3 (a + k)^2 = a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 + (a + 3)^2 = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 14$$

$$= (2 \cdot a + 3)^2 + 5,$$

$$\sum_{k=0}^4 (b + k)^2 = b^2 + (b + 1)^2 + (b + 2)^2 + (b + 3)^2 + (b + 4)^2$$

$$= 5 \cdot b^2 + 20 \cdot b + 30 = 5 \cdot (b + 3)^2 + 10.$$

und folglich

$$(2 \cdot a + 3)^2 + 5 = 5 \cdot (b + 2)^2 + 10,$$

$$(2 \cdot a + 3)^2 - 5 \cdot (b + 2)^2 = 5.$$

Offensichtlich muss  $2 \cdot a + 3$  durch 5 teilbar sein. Also gibt es eine ganze Zahl  $c$  mit  $2a + 3 = 5c$ , d.h. wir schreiben die Gleichung um zu

$$25c^2 - 5 \cdot (b + 2)^2 = 5$$

$$(b + 2)^2 - 5 \cdot c^2 = -1.$$

Setzen wir nun  $x = b + 2$  und  $y = c$ , so erhalten wir die PELLsche Gleichung

<sup>7</sup> s. Heft 01/2026

$$x^2 - 5 \cdot y^2 = -1$$

Auch für diese Gleichung finden wir eine rekursive Bildungsvorschrift für alle Lösungen. Wir probieren nacheinander:

$$(x; y) = (2; 1) \implies b = x - 2 = 0, a = \frac{1}{2} \cdot (5c - 3) = \frac{1}{2} \cdot (5y - 3) = 1:$$

entfällt, weil  $b$  nicht positiv ist.

$$(x; y) = (38; 17) \implies b = x - 2 = 36, a = \frac{1}{2} \cdot (5c - 3) = \frac{1}{2} \cdot (5y - 3) = 41:$$

ergibt die oben angegebene Lösung.

Nachträglich fällt uns auf, dass mit  $5^2 = 3^2 + 4^2$  auch eine Lösung für  $n = 0$  existiert. Wir untersuchen deshalb auch den Fall  $n = 1$ . Dann soll also gelten:

$$\begin{aligned} a^2 + (a + 1)^2 &= b^2 + (b + 1)^2 + (b + 2)^2, \\ 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 1 &= 3 \cdot b^2 + 6 \cdot b + 5, \\ 2 \cdot a \cdot (a + 1) &= 3 \cdot (b + 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung offenbar nicht durch 3 teilbar ist, darf weder  $a$  noch  $a + 1$  durch 3 teilbar sein. Deshalb gibt es eine ganze Zahl  $c$  mit  $a = 3 \cdot c + 1$ . Setzen wir dies ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot c + 1) \cdot (3 \cdot c + 2) &= 2 \cdot (9 \cdot c^2 + 9 \cdot c + 2) = 18 \cdot (c^2 + c) + 4 \\ &= 3 \cdot (b + 1)^2 + 1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 18 \cdot (c^2 + c) &= 3 \cdot (b + 1)^2 - 3 \\ 6 \cdot (c^2 + c) &= (b + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

Durch systematisches Probieren finden wir für  $n = 1$  mit  $b = 10$  und  $c = 4$ , also  $a = 3 \cdot c + 1 = 13$ , eine Lösung:

$$13^2 + 14^2 = 365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$$

Auffällig erscheint bei den gefundenen Lösungen, dass die verwendeten Quadratzahlen die Quadrate einer lückenlosen Folge von natürlichen Zahlen darstellen. Deshalb vermuten wir

**Satz.** Für jede natürliche Zahl  $n \geq 0$  existiert eine positive ganze Zahl  $b$ , so dass für  $a = b + n + 2$  die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^n (a + k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b + k)^2$$

*Beweis:* Unter Verwendung der bekannten Summenformeln  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  und  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}$  finden wir nach (aufwendigen) äquivalenten Umformungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (b+n+2+k)^2 &= \sum_{k=0}^n ((b+n+2)^2 + 2 \cdot (b+n+2) \cdot k + k^2) \\ &= (n+1) \cdot (b+n+2)^2 + 2 \cdot (b+n+2) \cdot \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= (n+1) \cdot b^2 + (n+1) \cdot (3n+4)b + (n+1) \cdot \frac{14 \cdot n^2 + 37 \cdot n + 24}{6}, \\ \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2 &= \sum_{k=0}^{n+1} (b^2 + 2 \cdot b \cdot k + k^2) \\ &= (n+2) \cdot b^2 + 2 \cdot b \cdot \sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \\ &= (n+2) \cdot b^2 + (n+1) \cdot (n+2) \cdot b + (n+1) \cdot \frac{2 \cdot n^2 + 7 \cdot n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Differenz

$$\sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2 - \sum_{k=0}^n (b+n+2+k)^2 = \dots = (b+(n+1)) \cdot (b-(n+1)(2n+3))$$

Da der linke Faktor stets positiv ist, sind beide Summen genau dann gleich groß, wenn  $b = (n+1)(2n+3)$  erfüllt ist.  $\square$

### Monatsaufgabe 04/2026<sup>8</sup>

Es ist zu untersuchen, ob es Quadrupel  $(x, y, z, a)$  positiver ganzer Zahlen gibt, für die die Eigenschaft (1) oder (2) erfüllt ist. Man beweise die entsprechenden Vermutungen.

- (1)  $x^2 + y^2 = 10 \cdot (z^2 + a^2)$ ,
- (2)  $x^2 + y^2 = 11 \cdot (z^2 + a^2)$ .

<sup>8</sup> Lösungseinsendungen an [bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de) sind bis 31.05.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

## Termine

**Finale des 61. Bundeswettbewerbs „Jugend forscht“**, 28. bis 31. Mai 2026, Herzogenaurach, Freistaat Bayern (Bundespatre: Schaeffler AG)

**Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade**, 07. bis 10 Juni 2026, Hamburg.

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Quadratische Gleichungen .....	3
Methode der vollständigen Induktion .....	8
Technische Universität Chemnitz wird 190 .....	16
In alten Mathebüchern geblättert.....	17
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2026 .....	19
Monatsaufgabe 04/2026.....	22
Termine.....	23

## Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe <sup>9</sup>	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021 MO650921 MO561013 MO451044 MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023 MO450924 MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich  
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz  
 E-Mail: [bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de)  
[www.kzm-sachsen.de](http://www.kzm-sachsen.de)

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

<sup>9</sup> Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage ([bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de)) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.