
Lehrbriefe für das Fachschul - Fernstudium

Herausgeber: Institut für Fachschul-Fernstudium, Dresden

H. BEINHOFF

Mathematik IV

Höhere Mathematik

LEHRBRIEF 5

Integralrechnung 2

Nur für den internen Gebrauch im Fachschul-Fernstudium

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
Teil III: Integralrechnung (Fortsetzung)	1
4. Kapitel: Numerische und mechanische Integration	1
1 Numerische Integration. Die Simpsonsche Regel	1
2 Mechanische Integration. Das Polarplanimeter .	5
Zusammenfassung	11
5. Kapitel: Anwendungen der Integralrechnung	11
3 Bogenlänge	11
a) Die Kurve ist durch eine Funktion in expliziter Darstellung gegeben	11
b) Die Kurve ist durch eine Funktion in Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben ...	13
c) Die Kurve ist durch Polarkoordinaten gegeben $r = r(\varphi)$	16
4 Schwerpunkt	21
a) Schwerpunkt eines Kurvenbogens	23
b) Schwerpunkt einer Fläche	26
5 Trägheitsmoment	34
a) Flächenträgheitsmoment	35
b) Massenträgheitsmoment	45
Zusammenfassung [3] bis [5]	50
6 Inhalt von Körpern	51
7 Mantelfläche von Rotationskörpern	55
8 Weitere Anwendungen der Integralrechnung in Physik und Technik	62
Zusammenfassung [6] bis [8]	71
6. Kapitel: Erweiterung der Integralrechnung	71
9 Das Linienintegral	71
Zusammenfassung [9]	83
10 Mehrfache Integrale	84
11 Mittelwertsatz der Integralrechnung	93
Zusammenfassung [10] und [11]	96
Antworten und Lösungen	97
Formelzusammenstellung	101

Teil III: Integralrechnung (Fortsetzung)

4. Kapitel: Numerische und mechanische Integration

[1] **Numerische Integration. Die Simpsonsche Regel.** Unter der numerischen Integration versteht man die angenäherte zahlenmäßige Berechnung des bestimmten Integrals

$$J = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx,$$

wenn die Werte $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, \dots $y_n = f(x_n)$ des Integranden nur zahlenmäßig gegeben sind (empirische Funktion) oder eine formelmäßige Integration nicht möglich bzw. graphische Integration zu ungenau ist.

Aus der Vielzahl der Formeln zur numerischen Integration sollen Sie nur die Simpsonsche Regel kennenlernen, die 1743 von dem Engländer TH. SIMPSON aufgestellt wurde. Sie zeichnet sich gleichzeitig durch Einfachheit und große Genauigkeit aus.

Prinzipiell gehen Sie bei der numerischen Integration folgendermaßen vor:

Sie teilen das Integrationsintervall $x_0 \leq x \leq x_n$ durch Einschieben der Punkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in n -gleiche Teilintervalle der Breite h (Bild 1). Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ ersetzen Sie jetzt durch den Streckenzug $P_0 \dots P_n$. Die Flächeninhalte der unter den Sehnen $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ entstehenden kleinen Trapeze können Sie leicht erkennen. Ihre Summe ergibt die unter dem Streckenzug

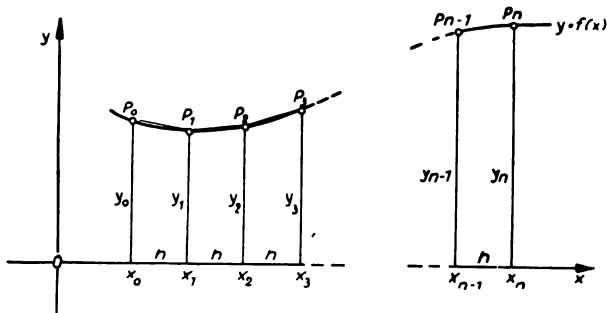


Bild 1

liegende Fläche, also angenähert das Integral $\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$. Je kleiner Sie die Streifenbreite h wählen, desto genauer wird das Ergebnis.

Da aber mit größer werdender Anzahl der Streifen auch der Arbeitsaufwand immer größer werden würde, werden Sie versuchen, die Sehnen durch andere begrenzende Kurven zu ersetzen, die dem Kurvenverlauf von $f(x)$ näher kommen. Die unter diesen Kurven liegende Fläche muß dann auch den genauen Flächeninhalt (das Integral) besser annähern. Sie teilen jetzt das Intervall $x_0 \leq x \leq x_n$ in eine gerade Anzahl von Streifen mit der Breite h und fassen je zwei benachbarte Streifen zu einem Doppelstreifen zusammen. Den Kurvenbogen über jedem Doppelstreifen ersetzen Sie durch eine Parabel zweiten Grades

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Um die Fläche F_1 des ersten Doppelstreifens zu berechnen (Bild 2), denken Sie sich jetzt einmal den Nullpunkt auf der x -Achse an die Stelle $x_1 = x_0 + h$ verschoben. Die Parabel soll durch die Punkte P_0 , P_1 und P_2 hindurchgehen; das

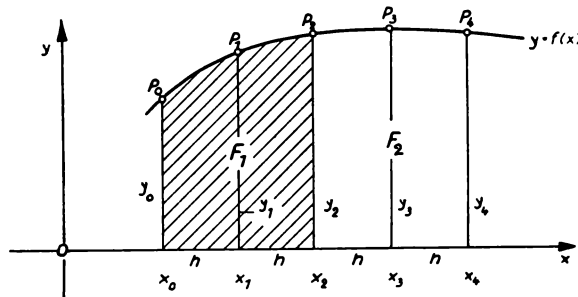


Bild 2

wären im gedachten Koordinatensystem die Punkte $(-h; y_0)$, $(0; y_1)$ und $(h; y_2)$. Setzen Sie die Koordinaten dieser Punkte in $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ein, so erhalten Sie

$$y_0 = a_0 - a_1 h + a_2 h^2,$$

$$y_1 = a_0,$$

$$y_2 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$$

und hieraus

$$a_0 = y_1$$

$$a_1 = \frac{1}{2h} (y_2 - y_0)$$

$$a_2 = \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2)$$

Die Fläche des Doppelstreifens unter der Parabel $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ist

$$\int_{-h}^{+h} (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = \left(a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-h}^{+h} = 2a_0h + 2a_2 \frac{h^3}{3}$$

Für a_0 und a_2 setzen Sie die oben berechneten Werte ein und erhalten damit in guter Annäherung den Flächeninhalt des ersten Doppelstreifens.

$$F_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (1)$$

Wenden Sie nun Formel (1) auf den zweiten Doppelstreifen an, so haben Sie y_0 durch y_2 , y_1 durch y_3 und y_2 durch y_4 zu ersetzen. Es wird dann

$$F_2 = \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Der Inhalt der gesamten Fläche F (und damit das bestimmte Integral

$J = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$) ergibt sich als Summe der (insgesamt $\frac{n}{2}$) Doppelstreifen zu

$$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Zur besseren zahlenmäßigen Anwendung schreiben Sie diese Gleichung, die als die **allgemeine Simpsonsche Regel** bezeichnet wird, in der Form

$$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1})] \quad (2)$$

Die einfachere Form (1) der Simpsonschen Regel gilt genau, wenn die Kurvengleichung höchstens vom dritten Grade ist. Wird die Begrenzungskurve durch eine Funktion höheren als dritten Grades, durch eine gebrochene rationale oder durch eine transzendente Funktion dargestellt, so liefert Formel (2) den Wert des bestimmten Integrals in sehr guter Annäherung.

Weist der Kurvenverlauf von $f(x)$ Ecken oder gar Sprünge auf, so dürfen Sie keinesfalls über diese hinweg integrieren, sondern Sie müssen die Teilung dann so wählen, daß diese Stellen mit Anfang oder Ende eines Doppelstreifens zusammenfallen.

Zur Erläuterung und damit Sie das Schema des Rechenganges kennenlernen, soll jetzt die Simpsonsche Regel auf ein einfaches Beispiel angewendet werden.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie das Integral $J = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ mit Hilfe der Simpsonschen Regel!

Lösung:

Sie haben das Intervall $1 \leq x \leq 2$ in eine gerade Anzahl von Streifen einzuteilen. Wählen Sie hierzu $h = 0,1$. Die Berechnung kann dann nach dem folgenden Schema erfolgen:

y_0	$\frac{1}{1,0}$	1,000000
y_{10}	$\frac{1}{2,0}$	0,500000

y_2	$\frac{1}{1,2}$	0,833333
y_4	$\frac{1}{1,4}$	0,714286
y_6	$\frac{1}{1,6}$	0,625000
y_8	$\frac{1}{1,8}$	0,555556
Σ_1		2,728175

y_1	$\frac{1}{1,1}$	0,909091
y_3	$\frac{1}{1,3}$	0,769231
y_5	$\frac{1}{1,5}$	0,666667
y_7	$\frac{1}{1,7}$	0,588235
y_9	$\frac{1}{1,9}$	0,526316
Σ_2		3,459540

$y_0 + y_{10}$	1,500000
$2 \Sigma_1$	5,456350
$4 \Sigma_2$	13,838160
Σ	20,794510

$$J = \frac{h}{3} \cdot \Sigma = \underline{\underline{0,693150}}$$

Das Ergebnis können Sie mit der exakten Lösung vergleichen. Es ist

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 = 0,693147$$

Sie sehen, daß die Simpsonsche Regel sehr gute Näherungswerte liefert.

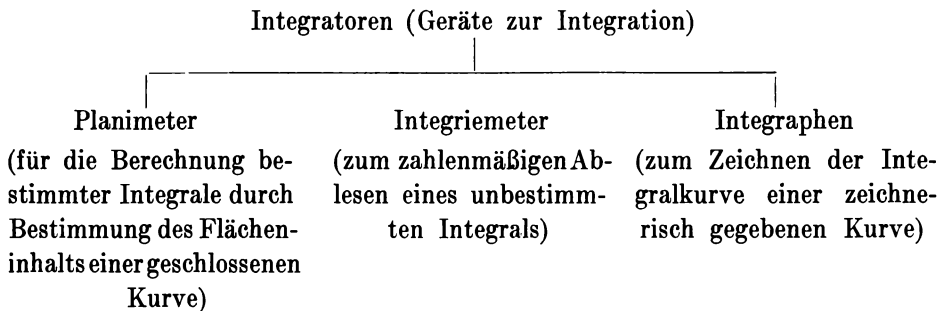
Übungen

1. Berechnen Sie das Integral des Lehrbeispiels 1 mit Hilfe der einfacheren Form (1) der Simpsonschen Regel! Welchen relativen Fehler (in Prozent) erhalten Sie? Vergleichen Sie diesen Fehler mit dem des Ergebnisses von Lehrbeispiel 1 (der relative Fehler des Ergebnisses von Lehrbeispiel 1 ist vorher zu berechnen)!
2. Berechnen Sie mit Hilfe der Simpsonschen Regel das Integral $J = \int_0^2 \sqrt{x^3 + x + 1} dx$ auf drei Dezimalen. Wählen Sie $h = 0,2$ als Schrittweite, und stellen Sie ein Rechenschema auf!

[2] Mechanische Integration. Das Polarplanimeter

Hinweis: Es ist als Ergänzung und zum besseren Verständnis dieses Abschnittes erforderlich, daß den Fernschülern (soweit für ihre Fachrichtung das Studium dieses Abschnittes vorgesehen ist) in der Konsultation am Konsultationspunkt oder im Lehrgang an der Fachschule ein Polarplanimeter vorgeführt wird.

Neben den Ihnen bekannten Methoden der numerischen und graphischen Integration wurden (den Bedürfnissen der Praxis entsprechend) Methoden entwickelt, um den Integrationsvorgang zu mechanisieren. Diese haben den Vorteil, bei größtmöglicher Genauigkeit zeitsparend zu arbeiten. Diese Art der Integration wird als mechanische oder instrumentelle Integration bezeichnet. Einen Überblick über die einzelnen Integrationsgeräte gibt Ihnen folgende Übersicht:



Für Sie als Techniker ist das wichtigste von all den heutzutage existierenden Geräten das **Polarplanimeter**, das erstmalig im Jahre 1854 von dem Mechaniker

JACOB AMSLER (Schaffhausen) gebaut wurde. Dieses allein soll deshalb im folgenden besprochen werden¹.

Um das Prinzip des Polarplanimeters zu erkennen, betrachten Sie bitte Bild 3a und 3b!

In Bild 3a sehen Sie die wichtigsten Bestandteile des Polarplanimeters schematisch dargestellt. Es sind dies:

Der Fahrarm AB von der Länge l , der in B gelenkig mit dem ruhenden Pol P durch den Polarm BP verbunden ist. Damit der Fahrstift A knapp über der

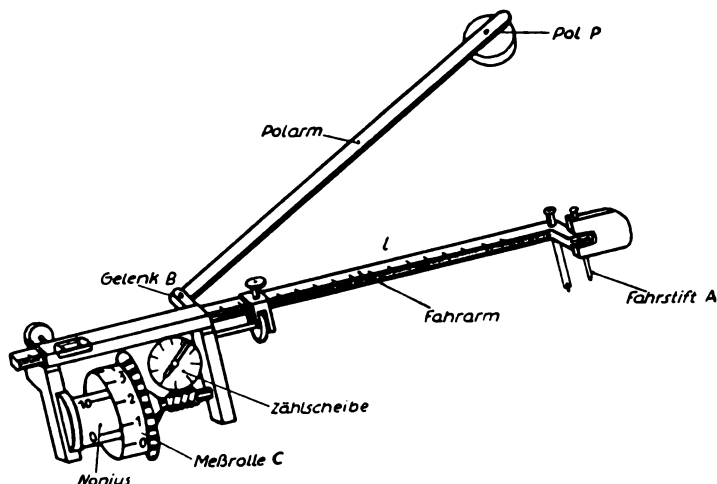


Bild 3 a

Kurve der zu integrierenden Funktion geführt werden kann, befindet sich dicht neben ihm (auf dem Bilde links vom Fahrstift) ein Stift mit einem kleinen Führungsrädchen.

Am Fahrarm ist eine Meßrolle C befestigt, deren Achse parallel zum Fahrarm liegt. Diese ist mit einem Nonius versehen. Die Anzahl der Umdrehungen der Meßrolle zeigt das auf dem Bilde rechts von der Meßrolle befindliche Zählwerk auf einer Zählscheibe an. Das gesamte Meßwerk (Meßrolle mit Nonius, Zählwerk mit Zählscheibe) kann auf dem Fahrarm verschoben werden. Durch Klemmschrauben (in Bild 3a ebenfalls angedeutet) wird das Meßwerk in der jeweils gewünschten Stellung auf dem Fahrarm festgehalten. Die Länge l des Fahrarms kann also (der jeweiligen Aufgabe entsprechend) eingestellt werden.

¹ Weitere Geräte zur Integration finden Sie in den Büchern: FR. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1950; FR. A. WILLERS, Mathematische Instrumente, Berlin 1951; W. MEYER ZUR CAPELLEN, Mathematische Instrumente, Leipzig 1949.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes F (= Berechnung des bestimmten Integrals) geschieht folgendermaßen (vgl. Bild 3b):

Der Fahrstift A wird auf dem Umfang der Fläche geführt (durchläuft hierbei die Stellungen A, A_1, A_2, \dots in Bild 3b). Der Gelenkpunkt B bewegt sich dadurch zwangsläufig auf einem Kreis (Leitkreis) um den Pol P (daher der Name Polarplanimeter). Nach vollständigem Umfahren von F , wenn Sie also wieder im Ausgangspunkt A angelangt sind, können Sie von Zähl-scheibe und Meßrolle den Flächeninhalt ablesen.

Die Meßrolle, der Hauptbestandteil, hat auf ihrem wulstartigen Rand eine feine Riffelung, so daß sie bei jeder Bewegung des Fahrstiftes (und damit des Fahrarmes) kleine Umdrehungen ausführt, die proportional der Bewegungsrichtung sind. Bei einer Bewegung senkrecht zum Fahrarm dreht sich die Rolle vollständig (reines Rollen), bei Bewe-

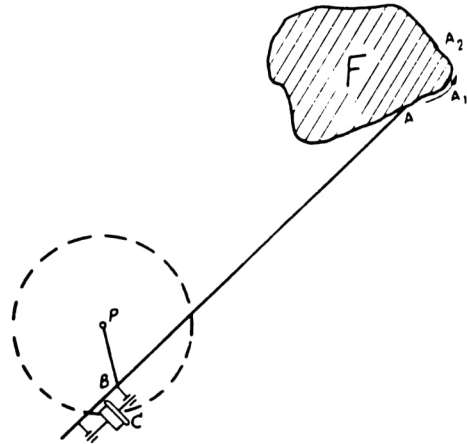


Bild 3 b

gung in Richtung des Fahrarmes gleitet die Rolle. Auf der Zähl-scheibe kann die Anzahl der Umdrehungen der Meßrolle abgelesen werden. Die Ablesung kann mit Hilfe des Nonius auf Tausendstel einer Umdrehung genau erfolgen. Bild 4a und Bild 4b zeigen Ihnen die praktische Ausführung eines Polarplanimeters und getrennt für sich die Planimetermeßrolle mit Nonius und Zähl-scheibe.

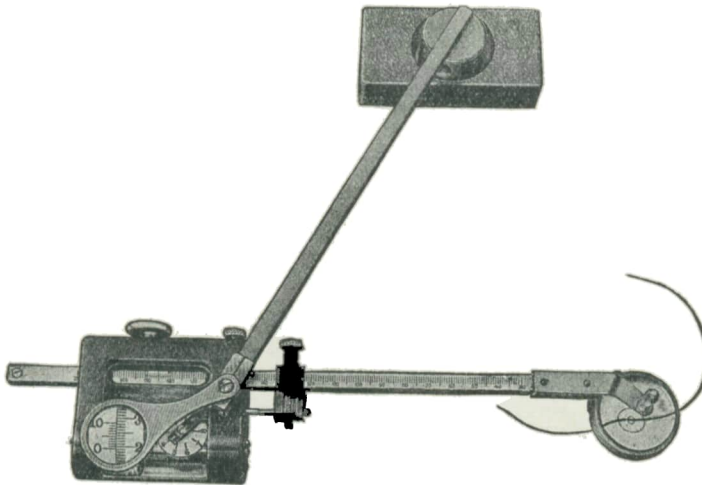


Bild 4 a

Wie Sie in Bild 4b weiterhin erkennen, erfolgt auch die Einstellung der Fahrarmlänge mittels eines Nonius auf Zehntelmillimeter genau. Die in Bild 4b eingestellte Fahrarmlänge ist 160,0 mm (Ablesung unter dem rechten Begrenzungsstrich des Nonius). Auf Zählscheibe, Meßrolle und Nonius lesen Sie in Bild 4b z.B. 7,250 Umdrehungen ab.

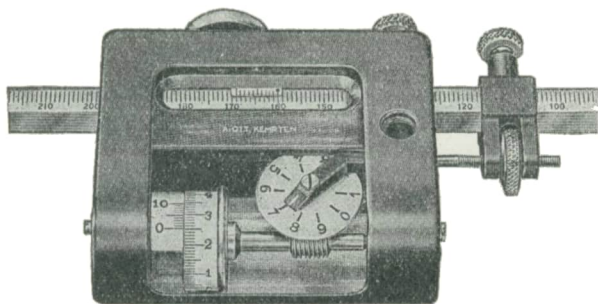


Bild 4 b

Um nicht nur das Polarplanimeter gebrauchen zu können, sondern um auch die Wirkungsweise zu verstehen, sollen Ihnen jetzt die Gedankengänge vermittelt werden, auf denen diese Vorrichtung beruht.

Sie betrachten hierzu die Elementarbewegungen, aus denen sich jede Bewegung des Polarplanimeters zusammensetzt (Bild 5a).

Bewegen Sie eine Stange der Länge l zwischen zwei Begrenzungskurven AA_2 und BB_2 von einer Anfangslage AB in eine beliebige Endlage A_2B_2 , so können Sie die von der Stange überstrichene Fläche F folgendermaßen berechnen:

Sie denken sich die Bewegung in Teil- (Elementar-) Bewegungen zerlegt. Um z. B. von der Anfangslage AB in eine benachbarte Lage A_1B_1 zu kommen, verschieben Sie zuerst die Stange parallel zu sich um die kleine Höhe Δh aus der Lage AB in die Lage $A_1'B_1$. Dann drehen Sie die Stange um B_1 in die gewünschte Lage A_1B_1 , wobei der kleine Winkel $\Delta\varphi$ überstrichen wird. Wenn Sie diese Teilbewegungen — wie in Bild 5a angedeutet — bis zur gewünschten Endstellung A_2B_2 fortsetzen, so unterscheidet sich die bei diesen Elementarbewegungen überstrichene Fläche von der wahren Fläche nur durch die kleinen Segmente und Dreiecke. Diese Abweichungen werden aber um so kleiner, je mehr Zwischenlagen eingeschaltet werden. Im Grenzfall (Zahl der Zwischenlagen strebt gegen Unendlich) erhalten Sie aus

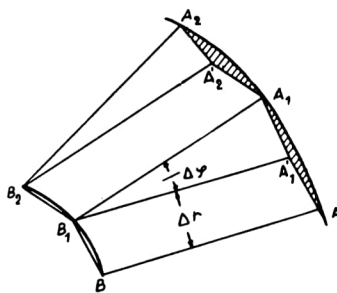


Bild 5 a

$$\text{Fläche jedes Teilparallelogramms} = l \cdot \Delta h \quad \text{und}$$

$$\text{Fläche jedes Teilspektors} = \frac{1}{2} l^2 \Delta\varphi \quad (\Delta\varphi \text{ im Bogenmaß gemessen})$$

für die überstrichene Gesamtfläche

$$F = \lim \sum \left(l \cdot \Delta h + \frac{1}{2} l^2 \Delta \varphi \right) = l \int dh + \frac{1}{2} l^2 \int d\varphi$$

Der Richtungssinn der Bewegung wird durch die Vorzeichen von dh und $d\varphi$ angegeben; und zwar sind alle Drehungen gegen den Uhrzeigersinn und alle Verschiebungen dh in Richtung des wachsenden $d\varphi$ positiv zu zählen, entgegengesetzte negativ.

Fallen Endlage und Anfangslage zusammen, z. B. wenn Sie eine geschlossene Kurve umfahren, und führt dabei die Stange keine volle Umdrehung um 360° aus, so ist die Summe aller Drehungen Null, also $\int d\varphi = 0$.

Wie Sie aus Bild 5 b ersehen können, überstreicht der Fahrarm l bei einem vollen Umfahren des Kurvenzuges $A, A_1, A_2, \dots A$ die vom Kurvenzug eingeschlossene Fläche F nur einmal, während die zwischen der zu messenden Fläche F und der

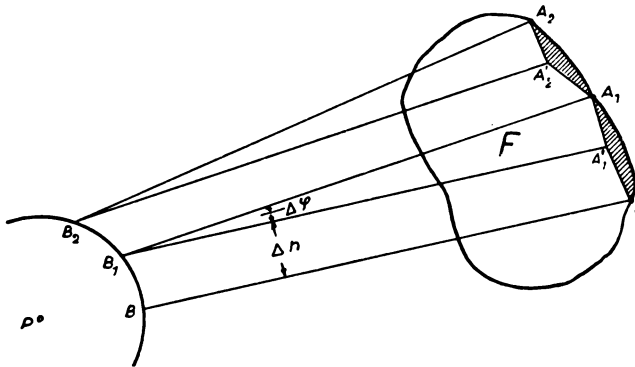


Bild 5 b

Leitkurve $B, B_1, B_2 \dots B$ liegende Fläche vom Fahrarm zweimal, einmal im positiven und einmal im negativen Sinne, überstrichen wird. Sie liefert deshalb (vgl. auch Lbf. IV/4, [12] und Lbf. IV/4, Bild 22) keinen Beitrag. Als Summe aller überfahrenen Flächen bleibt also nur die vom Kurvenzug $A, A_1, A_2, \dots A$ eingeschlossene Fläche F erhalten:

$$F = l \int dh$$

Sie erkennen in dem eben Dargelegten die Grundlagen der Konstruktion von AMSLER. Die Fläche F wird vom Fahrstift A umfahren. Dabei bewegt sich zwangsläufig der Fahrarm $AB = l$, mit dem im Gelenk B der Polarm BP verbunden ist. Das Gelenk B beschreibt als Leitkurve einen Kreis um den festliegenden Pol P .

Legen Sie den Pol P außerhalb der Fläche F , so kann der Fahrarm AB keine volle Umdrehung um 360° ausführen. Bei Erreichen der Endlage, die der Ausgangslage entspricht, ist dann $\int d\varphi = 0$.

$\int d h$ wird mittels der Meßrolle gemessen. Bezeichnen Sie den Umfang der Meßrolle mit U , so entspricht jedem abgewickelten Stück $d h$ dieses Umfanges die Umdrehungszahl $d n = \frac{d h}{U}$. Hieraus folgt $d h = U d n$. Setzen Sie diesen Wert

für $d h$ in den obenstehenden Ausdruck $F = l \int d h$ ein, so erhalten Sie für die zu messende Fläche

$$F = l \int U \cdot d n = U l \int d n$$

Hierin ist $\int d n$ die gesamte Umdrehungszahl N , die am Meßwerk abgelesen werden kann. Da U und l Konstanten des Gerätes sind, können Sie noch $U l$ gleich k setzen. Dann lautet die Formel für den Flächeninhalt der mittels Polarplanimeter berechneten Fläche

$$\boxed{F = k N} \tag{3}$$

Noch einige Hinweise zur praktischen Verwendung des Polarplanimeters:

Es wäre zeitraubend, wollten Sie vor jeder Messung das Meßwerk immer erst auf die Nullstellung drehen (was bei der Ablesegenauigkeit von Tausendstel einer Umdrehung nicht einfach wäre). Sie lesen deshalb N als Differenz der Endstellung N_2 (2. Ablesung) und der Anfangsstellung N_1 (1. Ablesung) ab. Formel (3) bekommt dann die Gestalt

$$\boxed{F = k (N_2 - N_1)} \tag{3 a}$$

(F in mm^2 , wenn U und l in mm gemessen wurden).

Die Konstante U wird bei Fertigung des Planimeters angegeben, meist liegt dem Planimeter eine Wertetabelle $k = f(l) = U l$ bei. Sie können aber auch k durch Umfahren einer bekannten Fläche (z. B. Kreisfläche) ermitteln. Nach (3 a) ist

$$k = \frac{F}{N_2 - N_1}$$

Voraussetzung für die Anwendung von Formel (3) bzw. (3 a) ist, daß der Fahrarm keine volle Umdrehung macht, d. h., der Pol muß außerhalb der zu messenden Fläche liegen. Ist die Fläche zu groß (auch bei maximal genommener Fahrarmlänge l), so zerlegen Sie diese derart in Teilflächen, daß jetzt der Pol außerhalb der Teilflächen zu liegen kommt.

Um Meßfehler zu kompensieren, die dadurch auftreten können, daß die Achse der Meßrolle nicht genau parallel zum Fahrarm steht, führt man eine zweite Messung durch, nachdem man vorher Polarm und Fahrarm um das Gelenk B nach der entgegengesetzten Seite durchgeschlagen hat (aus dem spitzen Winkel ABP in Bild 3a würde z. B. ein überstumpfer Winkel werden).

Soll eine möglichst große Genauigkeit erzielt werden, so führt man die Messung nochmals (eventuell auch im entgegengerichteten Umfahrungssinn) durch und bildet den (arithmetischen oder gewogenen) Mittelwert.

Das Umfahren einer Fläche dürfen Sie nicht allzu langsam durchführen; denn bei schwingvollem, zügigem Durchfahren kompensieren sich erfahrungsgemäß Abweichungen von der Kurve besser.

Spezielle Anwendungen des Polarplanimeters mit Hilfe der verstellbaren Fahrarmlänge l sind ebenfalls möglich. Stellen Sie z. B. bei einem Diagramm l auf die Breite des Diagramms ein, so ist die vom Meßrollenumfang aufgenommene Strecke UN die mittlere Höhe des flächengleichen Rechtecks mit der Grundlinie l (auf diese Weise kann z. B. der mittlere Dampfdruck aus einem vorgelegten Indikatordiagramm schnell ermittelt werden). Auch andere Werte, wie statische Momente, Trägheitsmomente usw., können mit Hilfe von Planimetern heutzutage berechnet werden.

Zusammenfassung

Ist die Berechnung eines Integrals auf analytischem Wege nicht möglich und der Integrand nur zahlenmäßig (als empirische Funktion) gegeben, so kann die Simpson'sche Regel angewendet werden.

Als Instrument zur mechanischen Integration lernten Sie das Polarplanimeter kennen. Es dient zur Bestimmung des Flächeninhalts einer geschlossenen Kurve.

5. Kapitel: Anwendungen der Integralrechnung

[3] Bogenlänge

a) Die Kurve ist durch eine Funktion in expliziter Darstellung gegeben

Im Lehrbrief IV/3, [5], haben Sie gelernt, daß die Länge eines Bogenstückes durch die Sehne mit der Länge

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

angenähert werden kann (Bild 6). Dabei ist die Annäherung um so besser, je kleiner Δx gewählt ist.

Setzen Sie nun diese Sehnen zu einem Streckenzug (Bild 7) zusammen, so ist dessen Länge

$$\sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

wobei die Summe über den gesamten Streckenzug zu erstrecken ist, also über alle Δx , in die das Intervall $a \leq x \leq b$ eingeteilt ist. Lassen Sie jetzt die Breite Δx aller Elemente gegen Null streben, d. h., bilden Sie den Grenzwert der Summe.

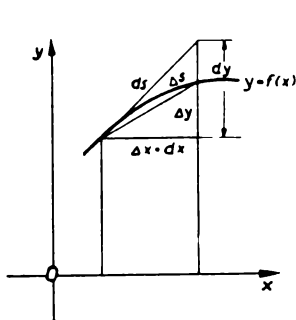


Bild 6

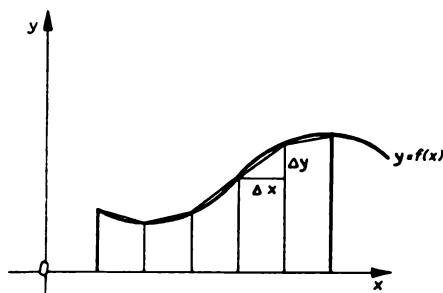


Bild 7

Auf Grund der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe erhalten Sie für die Länge der durch die Funktion $y = f(x)$ gegebenen Kurve zwischen $x = a$ und $x = b$:

$$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4)$$

Sie sehen, daß bei dieser Grenzwertbildung gleichzeitig aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = y'$ hervorgegangen ist.

Der ursprüngliche Ausdruck $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$ hat dabei die Form $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ angenommen. Wir nennen diesen Ausdruck ds und wollen uns nun über seine Bedeutung als *Bogendifferential* Klarheit verschaffen:

Zunächst aber wollen wir ihm eine andere Form geben:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Sie erkennen sofort, daß sich ds als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten dx und dy darstellen läßt. Betrachten Sie dazu noch einmal Bild 6. Das Bogendifferential ist nichts anderes als das Tangentenstück über dem Bogenstück Δs .

Von dieser Tatsache ausgehend, könnte man den Ansatz der Formel (4) folgendermaßen gestalten: Wir nähern die Länge des Bogenstückes Δs durch das Tan-

gentenstück $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ an. Diese Annäherung ist um so besser, je kleiner dabei $\Delta x = dx$ gewählt wird. Die gesamte Länge erhalten Sie dann als Integral über das Bogendifferential

$$s = \int_s ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4a)$$

Seien Sie sich bei der letztgenannten Form des Ansatzes aber immer klar darüber, daß dieser Annäherung stets ein Grenzprozeß zugrunde liegt.

Lehrbeispiel 2

Wie groß ist die Länge eines Viertelkreises mit dem Radius r ?

Lösung:

Der Kreis ist durch die Ihnen aus der analytischen Geometrie bekannte Funktion

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

gegeben. Benutzen Sie den im I. Quadranten liegenden Viertelkreis, so haben Sie das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

Sie berechnen zunächst

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und hiermit

$$s = \int_{a=0}^{b=r} \sqrt{1 + y'^2} dx = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$s = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r$$

$$= r(\arcsin 1 - \arcsin 0)$$

$$s = r \frac{\pi}{2}$$

b) Die Kurve ist durch eine Funktion in Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben

Auch diesen Fall haben Sie bereits in Lehrbrief IV/3 [5] kennengelernt. Sie hatten dort für das Bogendifferential erhalten (vgl. Lbf. IV/3, Formel 3a):

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Die Integration ergibt

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (5)$$

Lehrbeispiel 3

Es ist die Länge eines vollen Zykloidenbogens zu bestimmen. Der Zykloidenbogen wird dabei durch

$$x = r(t - \sin t) \quad y = r(1 - \cos t)$$

beschrieben, wenn t das Intervall von 0 bis 2π durchläuft.

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r(1 - \cos t) & \dot{y} &= r \sin t \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 2r^2(1 - \cos t) & [\cos^2 t + \sin^2 t &= 1] \end{aligned}$$

Gehen Sie jetzt schon zur Integration über, so bekommen Sie ein Integral mit einem irrationalen Integranden

$$s = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

Zur Lösung dieses Integrals müssen Sie zuerst die Irrationalität beseitigen. Formen Sie dazu vor der Integration mit Hilfe der aus der Trigonometrie bekannten Formel

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

um zu

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Dann ist

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2r \sin \frac{t}{2} dt$$

Dabei ist die Wurzel mit positivem Vorzeichen zu ziehen, weil mit wachsendem t , also $dt > 0$, auch ds positiv sein soll.

Damit die Zykloide einmal beschrieben wird, muß t die Werte von 0 bis 2π durchlaufen.

$$s = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$\text{Substitution: } u = \frac{t}{2}$$

$$dt = 2 du$$

$$\text{Untere Grenze: } t = 0 \rightarrow u = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } t = 2\pi \rightarrow u = \pi$$

$$\begin{aligned}
s &= 4r \int_0^{\pi} \sin u \, du \\
&= -4r \cos u \Big|_0^{\pi} = -4r(\cos \pi - \cos 0) = -4r(-1 - 1) \\
\underline{\underline{s}} &= \underline{\underline{8r}}
\end{aligned}$$

Die Länge des Zykloidenbogens ist demnach gleich dem vierfachen Durchmesser des abrollenden Kreises.

Lehrbeispiel 4

Welchen Weg hat ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 waagrecht geworfener Körper in der Zeit T zurückgelegt?

Lösung:

Zerlegen Sie die Bewegung des Körpers in zwei Teilbewegungen (Bild 8):

- a) waagrecht: gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 ,
- b) lotrecht: freie, d. h. gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung.

Nach der beliebigen Zeit t hat der Körper zurückgelegt:

- a) waagrecht: $x = v_0 t$,
- b) lotrecht: $y = \frac{1}{2} g t^2$

Damit haben Sie die Parameterdarstellung des waagerechten Wurfes. Die parabolische Form der Flugbahn erkennen Sie sofort, wenn Sie die beiden Funktionsgleichungen zu einer expliziten Funktion zusammenfassen, indem Sie x nach t auflösen und das dann in y einsetzen. Die entstehende Funktion hat die Form $y = ax^2$ ($a = \text{konst.} > 0$). Da in diesem Beispiel die positive y -Achse nach unten orientiert wurde, ist die Parabel nach unten geöffnet.

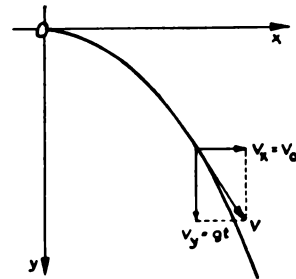


Bild 8

Zur Berechnung des Weges müssen Sie nun die beiden Ableitungen \dot{x} und \dot{y} bilden. Da der Parameter t hier gleich der verstrichenen Zeit ist, stellen \dot{x} und \dot{y} nichts anderes als die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y dar, während

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = v dt$$

ist, wobei v die Größe der augenblicklichen Geschwindigkeit wiedergibt.

$$\dot{x} = v_0$$

$$\dot{y} = g t$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$s = \int_0^T \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} dt$$

Substitution: $u = g t$

$$dt = \frac{1}{g} du$$

Untere Grenze: $t = 0 \rightarrow u = 0$

Obere Grenze: $t = T \rightarrow u = g T$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{gT} \sqrt{v_0^2 + u^2} du$$

Dieses Integral haben Sie in Lehrbrief IV/4 [8] d, β berechnet. Sie haben lediglich x durch den Buchstaben u und a durch v_0 zu ersetzen.

$$s = \frac{1}{g} \left[\frac{v_0^2}{2} \ln(u + \sqrt{v_0^2 + u^2}) + \frac{u}{2} \sqrt{v_0^2 + u^2} \right] \Big|_0^{gT}$$

$$s = \frac{1}{g} \left[\frac{v_0^2}{2} \ln(gT + \sqrt{v_0^2 + g^2 T^2}) + \frac{gT}{2} \sqrt{v_0^2 + g^2 T^2} - \frac{v_0^2}{2} \ln v_0 \right]$$

$$s = \frac{1}{2g} \left[v_0^2 \ln \frac{gT + \sqrt{v_0^2 + g^2 T^2}}{v_0} + gT \sqrt{v_0^2 + g^2 T^2} \right]$$

c) Die Kurve ist durch Polarkoordinaten gegeben: $r = r(\varphi)$

Sie können diesen Fall sofort auf Fall b zurückführen, wenn Sie bedenken, daß zwischen den kartesischen Koordinaten x , y und den Polarkoordinaten r , φ der Zusammenhang

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

besteht. Bilden Sie daraus die Differentiale von $x = F(r, \varphi)$ (vgl. Lbf. IV/3, Formel (8)):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

und von $y = F(r, \varphi)$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Mit diesen Differentialen wird dann

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi \quad (6)$$

Durch Integration erhalten Sie hieraus

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (7)$$

Zum gleichen Ergebnis können Sie auch auf geometrischem Wege kommen. Ziehen Sie dazu Bild 9 heran. Den Punkt Q erhalten Sie als Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius $r = \overline{OP}$ und dem Radiusvektor OP_1 . Ist der Öffnungswinkel $d\varphi$ (im Bogenmaß gemessen), so hat der Bogen PQ die Länge $r d\varphi$. Die Kurventangente an den Punkt P treffe die Verlängerung von $\overline{OP_1}$ im Punkte P_1' .

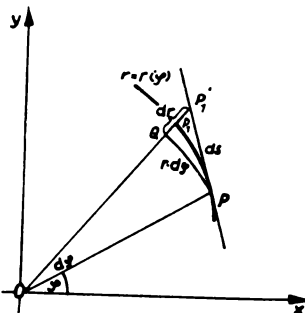


Bild 9

Während $\overline{QP_1}$ den wahren Zuwachs Δr des Radiusvektors bei Vergrößerung des Argumentes um $\Delta \varphi = d\varphi$ darstellt, ergibt sich $\overline{QP_1'} = dr$ als „Zuwachs“ der Tangente, die im Punkt P an die Kurve gelegt ist. Da für kleine Winkel $d\varphi$ das Dreieck PQP_1' als nahezu rechtwinklig angesehen werden kann, gilt unter Anwendung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

$$\begin{aligned} \overline{PP_1'} &= \sqrt{(r d\varphi)^2 + dr^2} \\ &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \end{aligned}$$

Das aber ist nicht anderes als unser oben aufgestelltes Bogendifferential.

Lehrbeispiel 5

Wie groß ist die Bogenlänge der Archimedischen Spirale, deren Gleichung im Lehrbrief IV/4, [11] hergeleitet wurde?

Lösung:

Wir haben in Lehrbrief IV/4, [11] für die Spirale gefunden

$$r = \frac{c}{\omega} \varphi$$

Damit ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c}{\omega}$$

und

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \varphi^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2} = \frac{c}{\omega} \sqrt{\varphi^2 + 1}$$

Für eine Drehung von φ_1 bis φ_2 haben Sie dann bei der Integration diese Werte als Grenzen einzusetzen.

$$\begin{aligned} s &= \frac{c}{\omega} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1} \, d\varphi \\ &= \frac{c}{\omega} \left[\frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) + \frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} \right] \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ s &= \frac{c}{\omega} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2^2 + 1}}{\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 1}} + \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{\varphi_2^2 + 1} - \frac{\varphi_1}{2} \sqrt{\varphi_1^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

Für eine volle Umdrehung haben Sie $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$ einzusetzen.

$$s = \frac{c}{\omega} \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) + \pi \sqrt{4\pi^2 + 1} \right]$$

Lehrbeispiel 6

Eine logarithmische Spirale wird durch die Funktion $r = r_0 e^{a\varphi}$ gegeben. Wie groß ist die Länge der Spirale zwischen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$?

Lösung:

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{a\varphi} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= r_0 a e^{a\varphi} \\ \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} &= r_0 e^{a\varphi} \sqrt{1 + a^2} \end{aligned}$$

Nach Formel (7) ist

$$s = r_0 \sqrt{1 + a^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi} \, d\varphi$$

Substitution: $u = a\varphi$

$$d\varphi = \frac{1}{a} \, du$$

Untere Grenze: $\varphi = \varphi_1 \rightarrow u = a\varphi_1$

Obere Grenze: $\varphi = \varphi_2 \rightarrow u = a\varphi_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{r_0}{a} \sqrt{1 + a^2} \int_{a\varphi_1}^{a\varphi_2} e^u \, du \\ &= \frac{r_0}{a} \sqrt{1 + a^2} (e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}) \end{aligned}$$

Dem Ergebnis können Sie noch eine andere Form geben, wenn Sie beachten, daß $r_1 = r_0 e^{a\varphi_1}$ und dementsprechend $r_2 = r_0 e^{a\varphi_2}$ ist.

$$s = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (r_2 - r_1)$$

Die Bogenlänge der logarithmischen Spirale ist demnach der Differenz der Radiusvektoren proportional.

Die Eigenart dieser Kurve besteht darin, daß sie alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel φ schneidet. Wir wollen diese Tatsache beweisen (Bild 10a).

Zunächst haben wir den Richtungsfaktor der Tangente in einem beliebigen Berührungspunkt P und den Richtungsfaktor des zugehörigen Radiusvektors zu bestimmen.

Der Richtungsfaktor m_1 der Tangente wird bekanntlich durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ gegeben. Nun haben Sie aber die Kurve in der Polarkoordinatenform. Die analytische Geometrie gibt uns aber wie schon in Abschnitt [3]c das Hilfsmittel, um von den Polarkoordinaten r, φ zu den kartesischen Koordinaten x, y überzugehen:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi.$$

Da in unserem Beispiel $r = r_0 e^{a\varphi}$ ist, erhalten Sie daraus für die logarithmische Spirale

$$\begin{aligned} x &= r_0 e^{a\varphi} \cos \varphi & y &= r_0 e^{a\varphi} \sin \varphi \\ \frac{dx}{d\varphi} &= \dot{x} = r_0 e^{a\varphi} (a \cos \varphi - \sin \varphi) \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \dot{y} = r_0 e^{a\varphi} (a \sin \varphi + \cos \varphi) \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Differentialquotienten berechnen Sie m_1 zu:

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a \sin \varphi + \cos \varphi}{a \cos \varphi - \sin \varphi}$$

Dividieren Sie nun noch Zähler und Nenner durch $\cos \varphi$, so wird

$$m_1 = \frac{a \operatorname{tg} \varphi + 1}{a - \operatorname{tg} \varphi}$$

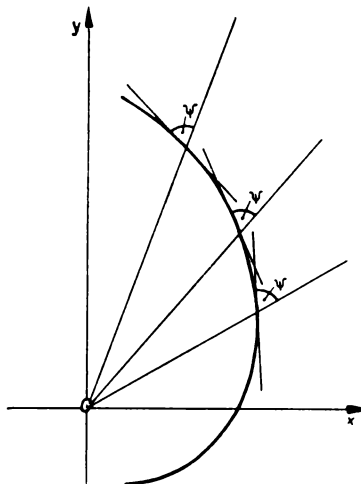


Bild 10 a

Der Richtungsfaktor des Radiusvektors ist durch die Bedeutung des Winkels φ gegeben als

$$m_2 = \operatorname{tg} \varphi$$

Bereits in der analytischen Geometrie haben Sie den Schnittwinkel bzw. den Tangens des Schnittwinkels zweier Geraden mit den Richtungsfaktoren m_1 und m_2 nach der Formel

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

bestimmt. Setzen Sie für m_1 und m_2 die gefundenen Werte ein, dann erhalten Sie nach kurzer Umrechnung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{a} \quad \text{oder} \quad a = \operatorname{ctg} \psi$$

Da a eine die Form der Spirale bestimmende Konstante ist, ist auch der Winkel ψ konstant, wie oben behauptet wurde. Wenn Sie nun noch beachten, daß

$$\sqrt{1 + a^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi} = \frac{1}{\sin \psi}$$

ist, können Sie das umseitig stehende Ergebnis für die Bogenlänge der logarithmischen Spirale umformen zu

$$s = \frac{r_2 - r_1}{\cos \psi}$$

Ist speziell $\varphi_1 = 0$, also $r_1 = r_0$ und $\varphi_2 = \varphi$ (dementsprechend $r_2 = r$), dann nimmt s die einfache Form

$$s = \frac{r - r_0}{\cos \psi}$$

an. Mit Hilfe dieser Beziehung können Sie leicht die Länge einer logarithmischen Spirale zeichnerisch bestimmen.

Betrachten Sie dazu in Bild 10b das Dreieck PQR . Der Punkt Q entsteht als Schnittpunkt des Kreisbogens vom Radius r_0 (Mittelpunkt im Ursprung) mit dem Radiusvektor im Ursprung $OP = r$. Der Punkt R ist der Schnitt-

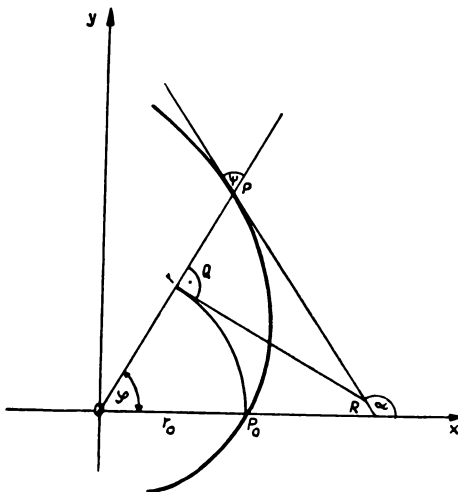


Bild 10 b

punkt der Senkrechten zu \overline{OP} im Punkt Q mit der in P angelegten Tangente. Im Dreieck PQR gilt

$$\cos \psi = \frac{QP}{PR} = \frac{r - r_0}{\overline{PR}}$$

$$\overline{PR} = \frac{r - r_0}{\cos \psi} = s$$

Die Strecke PR hat also die gleiche Länge wie der Kurvenbogen P_0P .

In der Technik findet die Tatsache, daß der Schnittwinkel der logarithmischen Spirale mit allen Radiusvektoren konstant ist, vielfache Anwendung (z. B. bei der Blechschere, beim Fräser usw.).

Übungen

3. *Wie lang ist der Bogen der Kettenlinie $y = m \operatorname{Co}f \frac{x}{m}$ von ihrem tiefsten Punkt bis zum Punkt $(x_1; y_1)$?*
4. *Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kreisevolvente, die bei der Abwicklung eines Halbkreises (Radius r) entsteht!*
(Kreisevolvente: $x = r(\cos t + t \sin t)$,
 $y = r(\sin t - t \cos t)$!).
5. *Welche Länge hat der volle Bogen der Kardioide $r = 2a(1 - \cos \varphi)$?*

[4] Schwerpunkt. Bereits in den Lehrbriefen der Physik haben Sie den Begriff des Schwerpunktes kennengelernt. Wir wollen hier noch einmal kurz die wesentlichen Grundsätze behandeln und daraus Formeln für die Ermittlung des Schwerpunktes eines gegebenen Kurvenstückes und einer Fläche aufstellen. Betrachten Sie ein System von n in einer Ebene gelegenen Massenpunkten. Die Massen seien mit m_1, m_2, \dots, m_n , ihre Abstände von der x -Achse mit y_1, y_2, \dots, y_n bezeichnet.

Multiplizieren Sie nun jede Masse mit ihrem Abstand und addieren Sie alle diese Produkte zu

$$T_x = \sum m_i y_i = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$

Diese Summe wird das **statische Moment des Punktsystems bezüglich der x -Achse** genannt. Dividieren Sie T_x noch durch die Gesamtmasse M , wobei

$$M = \sum m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

ist, so ergibt dieser Quotient die **Ordinate des Schwerpunktes**.

$$y_s = \frac{T_x}{M}$$

(8 a)

Analog erhalten Sie bei Betrachtung der Abstände x_i der Massen das **statische Moment bezüglich der y -Achse**.

$$T_y = \sum m_i x_i = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

Die **Abszisse des Schwerpunktes** ist dann

$$x_S = \frac{T_y}{M} \quad (8 \text{ b})$$

Jetzt wollen wir nun von den einzelnen Massenpunkten zu einer auf einem geometrischen Gebilde (Kurvenstück, Fläche) gleichmäßig verteilten Masse übergehen. Die Massendichte auf der Kurve bzw. Fläche sei konstant gleich μ mit der Dimension Masseneinheit/Längeneinheit bzw. Masseneinheit/Flächeneinheit.

Denken Sie sich die Masse aus kleinen Massenelementen Δm zusammengesetzt. Mit dieser Überlegung können Sie jetzt den Fall der stetigen Massenverteilung in der gleichen Art wie bei den vorangestellten Betrachtungen über n -Massenpunkte behandeln. Zunächst erhalten Sie eine Annäherung für das statische Moment, wenn Sie die Massenelemente Δm mit ihrem (mittleren) Abstand von der Bezugsachse multiplizieren und dann diese Produkte wieder addieren. Zum genauen Wert kommen Sie aber erst, wenn Sie den Grenzwert aufsuchen, dem diese Summe zustrebt, wenn die Elemente Δm immer kleiner gewählt werden.

$$T_x = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum y \Delta m = \int_m y \, dm \quad (9 \text{ a})$$

$$T_y = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum x \Delta m = \int_m x \, dm \quad (9 \text{ b})$$

Das m unter dem Integralzeichen soll andeuten, daß das Integral über das gesamte Gebilde erstreckt werden soll. Wie das im einzelnen zu geschehen hat, werden Sie von Fall zu Fall in den Lehrbeispielen erkennen.

Die Gesamtmasse ergibt sich entsprechend aus

$$m = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum \Delta m = \int_m dm \quad (10)$$

Zur Berechnung der Schwerpunktskoordinaten verwenden Sie wieder die Formeln (8a und b).

Nehmen Sie die Massendichte gleich der Einheit an, so können Sie dm jeweils durch dx bzw. dF und m durch s bzw. F ersetzen, je nachdem Sie das statische Moment eines Kurvenbogens oder einer Fläche zu berechnen haben.

a) *Schwerpunkt eines Kurvenbogens*

Aus den soeben gewonnenen Erkenntnissen ergeben sich als statische Momente

$$T_x = \int_s y ds \quad (11 a)$$

$$T_y = \int_s x ds \quad (11 b)$$

Ist der Kurvenbogen durch die Funktion $y = f(x)$ gegeben, so setzen Sie wieder $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, so daß (11a und b) die Form

$$T_x = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{und} \quad T_y = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

annehmen. Die Schwerpunktskoordinaten berechnen sich damit zu

$$x_s = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{s} \quad (12 a)$$

$$y_s = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{s} \quad (12 b)$$

wobei

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ist.

Lehrbeispiel 7

Wo liegt der Schwerpunkt der Strecke P_1P_2 , wenn $P_1(2; 3)$ und $P_2(6; 11)$ gegeben sind?

Lösung:

Zunächst stellen Sie die Funktionsgleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Geraden nach der Zweipunktgleichung auf.

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{11 - 3}{6 - 2}$$
$$. y = 2x - 1$$

Daraus berechnen Sie

$$y' = 2$$
$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{5}$$

und damit die statischen Momente

$$T_x = \sqrt{5} \int_2^6 (2x - 1) dx$$
$$T_y = \sqrt{5} \int_2^6 x dx$$
$$T_x = \sqrt{5} (x^2 - x) \Big|_2^6$$
$$T_y = \frac{\sqrt{5}}{2} x^2 \Big|_2^6$$
$$T_x = 28\sqrt{5}$$
$$T_y = 16\sqrt{5}$$

Die Länge der Strecke beträgt

$$s = \sqrt{5} \int_2^6 dx = \sqrt{5} x \Big|_2^6 = 4\sqrt{5}$$

Sie kommen mit der Formel für die Streckenlänge der analytischen Geometrie zum gleichen Ergebnis.

Aus den statischen Momenten und der Streckenlänge ergeben sich dann die Schwerpunktskoordinaten zu

$$x_s = \frac{16\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 4$$
$$y_s = \frac{28\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 7$$

Zu diesem Ergebnis können Sie ebenfalls mit den Mitteln der Elementarmathematik kommen. Sie erkennen, daß in diesem Fall der Schwerpunkt genau in der Mitte der Strecke liegt.

Für das folgende Beispiel ist aber die Verwendung der Integralrechnung unbedingt erforderlich, denn es handelt sich dabei um eine krumme Linie.

Lehrbeispiel 8

Es ist der Schwerpunkt eines Kreisbogens mit dem Öffnungswinkel 2α und dem Radius r zu ermitteln (Bild 11).

Lösung:

Sie wählen das Koordinatensystem wie in Bild 11. Da der Mittelpunkt des Kreises im Ursprung liegt, wird der Kreis durch die Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dargestellt. Achten Sie dabei darauf, daß die Wurzel positiv und negativ zu ziehen ist, und zwar gilt für die obere Hälfte des Kreises das positive, für die untere das negative Vorzeichen.

Da die x -Achse für den Kreisbogen Symmetrieachse ist, entfällt die Berechnung von y_s , denn der Schwerpunkt muß immer auf einer Symmetrielinie liegen:

$$y_s = 0.$$

Verfahren Sie nach Möglichkeit immer so, daß Sie als die eine Koordinatenachse eine erkennbare Symmetrielinie wählen, entfällt doch dadurch die Berechnung einer Schwerpunktskoordinate.

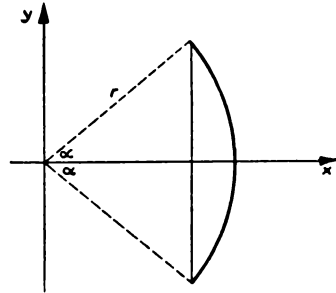


Bild 11

Jetzt müssen Sie sich noch Klarheit über die Wahl der Integrationsgrenzen verschaffen. Aus Bild 11 lesen Sie ab:

$$\text{untere Grenze: } x_1 = r \cos \alpha, \quad \text{obere Grenze: } x_2 = r.$$

Anstatt nun T_y für den Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel 2α zu berechnen, nehmen Sie das Zweifache des statischen Momentes der oberen Hälfte (Öffnungswinkel α).

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ \sqrt{1 + y'^2} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ T_y &= 2r \int_{r \cos \alpha}^r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= -2r \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_{r \cos \alpha}^r \\ &= -2r(0 - \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) \\ \underline{\underline{T_y}} &= \underline{\underline{2r^2 \sin \alpha}} \end{aligned}$$

Die Bogenlänge beträgt, wenn α im Bogenmaß angegeben wird,

$$s = r 2\alpha.$$

Damit erhalten Sie für den Schwerpunkt:

$$\underline{\underline{x_s = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}}} \quad \underline{\underline{y_s = 0}}$$

Ist speziell der Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu ermitteln, so setzen Sie $2\alpha = \pi$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die gefundene Formel ein.

$$x_s = \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi} = \underline{\underline{0,6366r}}$$

$$\underline{\underline{y_s = 0}}$$

b) Schwerpunkt einer Fläche

Die statischen Momente einer Fläche bezüglich der x -Achse und y -Achse ermitteln Sie analog denen eines Kurvenbogens mit Hilfe der Integrale

$$T_x = \int_F y \, dF \tag{13 a}$$

$$T_y = \int_F x \, dF \tag{13 b}$$

In der vorstehenden Form können Sie diese Integrale mit den Ihnen bisher bekannten Mitteln noch nicht auswerten. Sie werden im Abschnitt [10] erkennen, daß es sich eigentlich um Doppelintegrale handelt.

Für einige besonders gelegene Flächen können aber die statischen Momente und damit die Schwerpunkte mit einfachen Integralen berechnet werden. Dazu wählen Sie die Flächenelemente ΔF in Form schmaler, zur Bezugsachse paralleler Streifen. Diese Wahl ist insofern zweckmäßig, als Sie damit gleichzeitig alle Flächenteile erfassen, die den gleichen Abstand von dieser Bezugsachse haben. Das Produkt von Flächenelement und Abstand ist aber bei der Berechnung der statischen Momente zu bilden.

Wie Sie bei den späteren Lehrbeispielen erkennen werden, müssen diese meist schwer zu berechnenden Streifen ΔF durch einfachere Streifen dF angenähert werden. Bedingung für diese Annäherung muß selbstverständlich sein, daß der dabei begangene Fehler mit verschwindender Streifenbreite ebenfalls gegen Null strebt. Sie haben dieses „Ersetzen“ schon mehrfach kennengelernt. Halten Sie sich diese wichtigen Überlegungen noch einmal klar vor Augen. Sehen Sie sich dazu noch einmal die Ausführungen in Lehrbrief IV/4, [2], sowie die Bilder 2 und 4b des Lehrbriefes IV/4 an. Dort wurde die zu berechnende Fläche Φ zunächst einmal in Streifen zerlegt. Den wahren Inhalt eines solchen Streifens wollen wir mit $\Delta\Phi$ bezeichnen.

Sie werden inzwischen schon gemerkt haben, daß diese echten Teilstücke immer durch ein vorgesetztes Δ gekennzeichnet werden. So bezeichnet z. B. Δy in der Differentialrechnung den Ordinatenzuwachs bei Änderung der Abszisse um $\Delta x = dx$. Bei der Bestimmung der Bogenlänge war Δs ein Teilstück der gesamten Länge s .

So ein Flächenelement $\Delta \Phi$ wurde durch ein Rechteck angenähert. Kennzeichnen Sie diese Annäherung durch ein vorgesetztes d als $d\Phi = f(x) dx$. Aus diesem $d\Phi$ gewinnen Sie den Inhalt der Gesamtläche durch Integration. Denken Sie aber dabei daran, daß dieser Operation ein Grenzübergang, nämlich der Übergang von der Treppenfläche Φ_n zur wirklichen Fläche Φ bzw. der Übergang von der Summe zum Integral zugrunde liegt. Vergleichen Sie in diesem Sinne noch einmal die Ausführungen des Abschnittes [3] dieses Lehrbriefes!

Die Kennzeichnung der „Ersatzgröße“ durch den Buchstaben d haben Sie auch bereits schon in der Differentialrechnung kennengelernt, war doch dort das Differential dy der „lineare Anteil“ des Kurvenzuwachses Δy , d. h. der Zuwachs der Tangente bei Änderung des x um $\Delta x = dx$.

Wir wollen nun fortan beim Ansatz immer gleich zu den „Ersatzgrößen“ und dann direkt zur Integration übergehen. Sie müssen sich aber klar darüber sein, daß eigentlich ein Grenzübergang stattfinden müßte.

Lehrbeispiel 9

Wo liegt der Schwerpunkt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ?

Lösung:

Sie erkennen in den beiden Mittellinien zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrielinien und könnten deshalb in ihrem Schnittpunkt den Schwerpunkt feststellen. Wir wollen aber die Berechnung mit Hilfe der neuen Erkenntnisse durchführen und dazu das Koordinatensystem so legen, daß die beiden Achsen mit zwei anstoßenden Seiten des Rechtecks zusammenfallen (Bild 12).

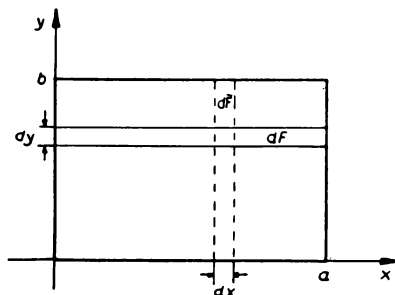


Bild 12

Die Bezugsachse sei die

$$\begin{aligned}
 & x\text{-Achse:} \\
 \Delta F &= dF = a \, dy \\
 T_x &= \int_F y \, dF \\
 &= a \int_0^b y \, dy \\
 &= \frac{a b^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y\text{-Achse:} \\
 \Delta \bar{F} &= d\bar{F} = b \, dx \\
 T_y &= \int_F x \, d\bar{F} \\
 &= b \int_0^a x \, dx \\
 &= \frac{a^2 b}{2}
 \end{aligned}$$

Den Inhalt der Fläche können Sie entsprechend der verschiedenartigen Wahl von dF bzw. $d\bar{F}$ auf zwei Wegen berechnen.

Sie erhalten mit

$$dF = a \, dy$$

und Integration längs der y -Achse

$$F = a \int_0^b dy = a b$$

$$d\bar{F} = b \, dx$$

und Integration längs der x -Achse

$$F = b \int_0^a dx = a b$$

Der Schwerpunkt fällt, wie Sie bereits wissen, mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks zusammen.

Die Schwerpunktskoordinaten sind

$$\underline{\underline{x_s = \frac{T_y}{F} = \frac{a}{2}}}$$

$$\underline{\underline{y_s = \frac{T_x}{F} = \frac{b}{2}}}$$

Lehrbeispiel 10

Es soll der Schwerpunkt eines Dreiecks ermittelt werden.

Lösung:

Hier wählen Sie zweckmäßig das Koordinatensystem so, daß der Ursprung mit einer Dreiecksecke und die x -Achse mit der zugehörigen Höhe zusammenfällt. Die y -Achse, die senkrecht auf der x -Achse steht, liegt dann parallel zur gegenüberliegenden Dreieckseite (Bild 13).

Ermitteln Sie zunächst das statische Moment bezüglich der y -Achse. Dazu wählen Sie den Streifen ΔF parallel zu dieser Achse. Diesen schmalen Streifen mit dem Abstand x und der Breite dx nähern Sie durch das Rechteck $DEF'G'$ an. Für diese Annäherung gilt

$$\Delta F \approx dF = \overline{DE} \cdot dx$$

Unter Anwendung des Strahlensatzes gewinnen Sie aus Bild 13 die Beziehung:

$$\overline{DE} : x = a : h$$

oder

$$\overline{DE} = \frac{a}{h} x$$

Damit ist

$$dF = \frac{a}{h} x \, dx$$

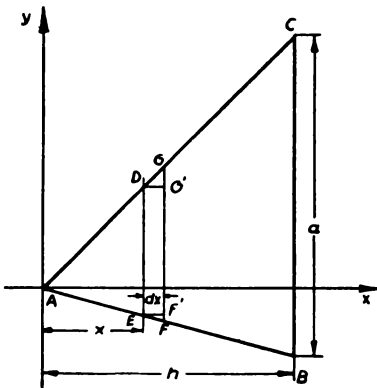


Bild 13

Eine Bestätigung für die Gültigkeit der Annäherung erhalten Sie, wenn Sie daraus die Gesamtfläche des Dreiecks berechnen.

$$F = \int_{\tilde{F}} dF = \frac{a}{h} \int_0^h x dx = \frac{ah}{2}$$

Dieses Ergebnis ist Ihnen aus der Elementarmathematik bekannt.

Nun ist

$$T_y = \int_{\tilde{F}} x dF = \frac{a}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{ah^2}{3}$$

Mit $F = \frac{ah}{2}$ wird
$$\underline{\underline{x_s = \frac{T_y}{F} = \frac{2}{3} h}}$$

Das Ergebnis sagt Ihnen, daß der Schwerpunkt auf einer Parallelen zur Dreieckseite BC im Abstand $\frac{2}{3} h$ von der gegenüberliegenden Ecke A bzw. $\frac{h}{3}$ von dieser Seite liegen muß.

Die Berechnung von y_s erübrigt sich, denn in bezug auf die beiden anderen Dreieckseiten gilt Entsprechendes. Der Schwerpunkt muß also der Schnittpunkt der Parallelen zu den drei Dreieckseiten im Abstand von $\frac{1}{3}$ der jeweils zugehörigen Höhe sein. Sie wissen bereits, daß dieser Punkt mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden zusammenfällt.

Wir wollen jetzt die Schwerpunktsformeln für den Fall umarbeiten, daß der Schwerpunkt einer Fläche zu ermitteln ist, die durch die Kurve $y = f(x)$, die beiden Ordinaten zu $x = a$ und $x = b$ und die x -Achse begrenzt ist (Bild 14).

Dazu genügt die Zerlegung der Fläche in zur y -Achse parallele Streifen ΔF , wie im Bild 14 gezeigt. Diese Streifen werden durch Rechtecke dF mit der Höhe y und der Breite $\Delta x = dx$ angenähert. Aus dem Lehrbeispiel 9 wissen Sie, daß der Schwerpunkt eines solchen Rechtecks die Höhe $\frac{y}{2}$ über der x -Achse haben muß. Denken Sie

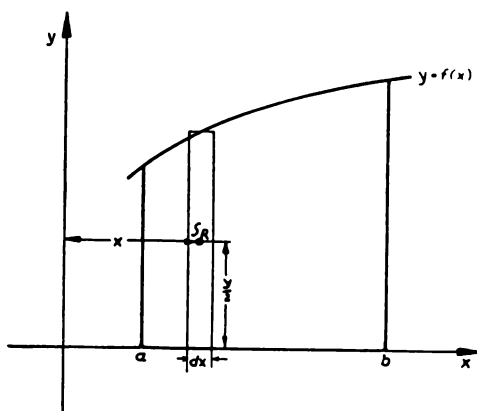


Bild 14

sich die Fläche dF in diesem Punkt vereinigt, dann hat dF das statische Moment

$$dT_x = \frac{y}{2} dF$$

bzw. mit $dF = y dx$

$$dT_x = \frac{1}{2} y^2 dx$$

Für die gesamte Fläche F wird das statische Moment bezüglich der x -Achse

$$T_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dy \quad (14 a)$$

In bezug auf die y -Achse hat der Schwerpunktsstreifen den Abstand x und damit das statische Moment den Wert

$$\begin{aligned} dT_y &= x dF \\ &= x y dx \end{aligned}$$

Daraus folgt für das statische Moment der gesamten Fläche (bezüglich der y -Achse)

$$T_y = \int_a^b x y dx \quad (14 b)$$

Die Fläche selbst ist

$$F = \int_a^b y dx$$

Mit Hilfe der Formeln (8a) und (8b) ergeben sich die Schwerpunktskoordinaten zu

$$x_s = \frac{\int_a^b x y dx}{F} \quad (15 a)$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{F} \quad (15 b)$$

Lehrbeispiel 11

Es soll der Schwerpunkt unter der Parabel $y = a x^2$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x_1$ ermittelt werden.

Lösung:

y -Achse:

$$T_y = a \int_0^{x_1} x^3 dx = \frac{1}{4} a x_1^4$$

Aus $y = a x^2$ folgt für $x = x_1$ als Ordinate $y_1 = a x_1^2$.

y_1 für $a x_1^2$ eingesetzt, ergibt

$$T_y = \frac{1}{4} x_1^2 y_1$$

x -Achse:

$$T_x = \frac{a^2}{2} \int_0^{x_1} x^4 dx = \frac{1}{10} a^2 x_1^5$$

Aus $y_1 = a x_1^2$ folgt für $y_1^2 = a^2 x_1^4$.

y_1^2 für $a^2 x_1^4$ eingesetzt, ergibt

$$T_x = \frac{1}{10} x_1 y_1^2$$

In Lehrbrief IV/4, [5], Lehrbeispiel 13, berechneten Sie für die Fläche unter der Parabel

$$F = \frac{1}{3} x_1 y_1$$

Damit wird

$$\underline{\underline{x_s = \frac{T_y}{F} = \frac{3}{4} x_1}}$$

$$\underline{\underline{y_s = \frac{T_x}{F} = \frac{3}{10} y_1}}$$

Lehrbeispiel 12

Es sind die Schwerpunktskoordinaten des in Bild 11 dargestellten Kreissektors mit dem Öffnungswinkel 2α und dem Radius r zu berechnen (Winkel α im Bogenmaß gemessen).

Lösung:

x -Achse: Da die Fläche durch die x -Achse in zwei symmetrische Teile zerlegt wird, muß der Schwerpunkt auf der x -Achse selbst liegen. Es haben also T_x und damit y_s den Wert 0.

y -Achse: Infolge der oben erwähnten Symmetrie ist das statische Moment der Gesamtfläche doppelt so groß wie das Moment des über der x -Achse gelegenen Teiles. Diese Halbfäche wird nun durch zwei Kurven nach oben begrenzt:

1. zwischen $x = 0$ und $x = r \cos \alpha$ durch die Gerade $y_1 = x \operatorname{tg} \alpha$.

Der Index 1 bei y soll hier die Begrenzungsfunktion des 1. Teiles kennzeichnen.

2. zwischen $x = r \cos \alpha$ und $x = r$ durch den Kreisbogen $y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Das statische Moment der Halbfäche ist dann gleich der Summe der statischen Momente der beiden Teilflächen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_y &= \int_0^{r \cos \alpha} x y_1 dx + \int_{r \cos \alpha}^r x y_2 dx \\ &= \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 dx + \int_{r \cos \alpha}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Substitution für das Integral $\int x \sqrt{r^2 - x^2} dx$:

$$\begin{aligned} u &= r^2 - x^2 \\ du &= -2x dx & x dx &= -\frac{1}{2} du \end{aligned}$$

Umrechnung der Grenzen:

Obere Grenze: $x = r \rightarrow u = r^2 - r^2 = 0$

Untere Grenze: $x = r \cos \alpha \rightarrow u = r^2 - r^2 \cos^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha$

$$\frac{1}{2} T_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{r \cos \alpha} - \frac{1}{2} \int_{r^2 \sin^2 \alpha}^0 \sqrt{u} du$$

Vertauschen Sie im rechten Integral die Grenzen (Vorzeichenwechsel!)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_y &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \cdot x^3 \Big|_0^{r \cos \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{r^2 \sin^2 \alpha} u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha x^3 \Big|_0^{r \cos \alpha} + \frac{1}{3} \sqrt{u^3} \Big|_0^{r^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{3} [\operatorname{tg} \alpha r^3 \cos^3 \alpha + \sqrt{(r^2 \sin^2 \alpha)^3}] \\ &= \frac{1}{3} r^3 (\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha) \\ &= \frac{r^3}{3} \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \frac{1}{2} T_y &= \frac{r^3}{3} \sin \alpha \end{aligned}$$

Das statische Moment für die Gesamtfläche hat danach den Wert

$$T_y = \frac{2r^3}{3} \sin \alpha$$

Der Inhalt des gesamten Kreissektors mit dem Bogen b ergibt sich aus

$$F = \frac{1}{2} b r \quad \text{und} \quad b = r 2 \alpha$$

zu

$$F = r^2 \alpha$$

Damit erhalten Sie

$$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$y_s = 0$$

Wollen Sie daraus den Schwerpunkt eines Halbkreises bestimmen, so müssen Sie $2\alpha = \pi$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ einsetzen.

$$x_{sH} = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244r$$

$$y_{sH} = 0$$

Übungen

6. Wie lauten die Formeln zur Ermittlung eines Kurvenschwerpunktes, wenn die Kurve in der Parameterdarstellung

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

gegeben ist?

7. Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines vollen Zyklidenbogens! (Zykloide: $x = r(t - \sin t)$; $y = r(t - \cos t)$.)

8. Berechnen Sie den Schwerpunkt des in Bild 15 dargestellten gleichschenkligen Trapezes!

9. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes? Benutzen Sie dazu Bild 11!

10. Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des in Bild 16 dargestellten Kreisringstückes?

Anleitung: Die Fläche des Kreisringstückes entsteht als Differenz zweier Kreissektoren mit den Radien R und r . Das statische Moment des Ringstückes ist gleich der Differenz der statischen Momente der beiden Sektoren.

11. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der oberen Halbellipse (Halbachsen a und b)! Welche Schlußfolgerung können Sie aus dem Fehlen von a in der Endformel ziehen?
12. Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die durch die erste Halbperiode der Sinuslinie und die x -Achse begrenzt wird?

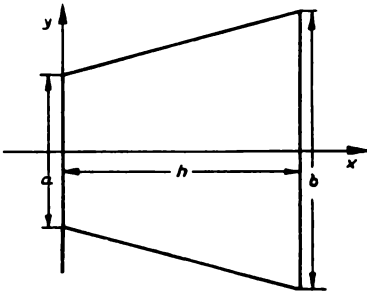


Bild 15

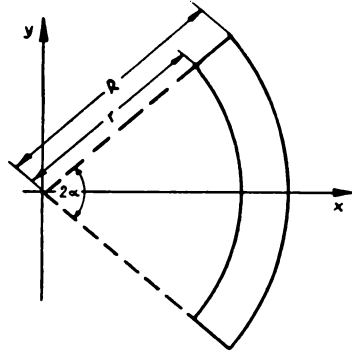


Bild 16

[5] Trägheitsmoment. In „Festigkeitslehre“, Lehrbrief 2, [43], haben Sie das Flächenträgheitsmoment und in „Physik“, Lehrbrief 3, das Massenträgheitsmoment kennengelernt.

In beiden Ausdrücken sind die einzelnen Flächen- bzw. Massenelemente mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Bezugsachse multipliziert und dann addiert. Beide Trägheitsmomente unterscheiden sich also jeweils nur in dem Faktor ΔF bzw. Δm .

Mit den beiden Summenformeln können Sie nun aber bei der praktischen Berechnung von Trägheitsmomenten nicht viel anfangen. Sie haben das bereits an dem im Lehrbrief „Physik 3“, [11], durchgerechneten Beispiel gemerkt. Das liegt daran, daß die Formel $J = m r^2$ nur für einen Massenpunkt und $s = \sum r^2 \Delta m$ für ein System von einzelnen Massenteilchen Δm gilt. Bilden diese Massenteilchen einen sich stetig erstreckenden Körper, so kommt man wie bei der Berechnung des statischen Momentes dadurch zum Ziel, daß man den Grenzwert der Summe, d. h. das Integral, bildet.

Sie schreiben deshalb für das **Flächenträgheitsmoment**

$$J = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sum l^2 \Delta F = \int_F l^2 dF \quad (16 a)$$

und für das **Massenträgheitsmoment**

$$J = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum l^2 \Delta m = \int_m l^2 dm \quad (16b)$$

a) **Flächenträgheitsmoment**

Je nach der Lage der Bezugsachse haben Sie grundsätzlich zwei verschiedene Trägheitsmomente zu unterscheiden:

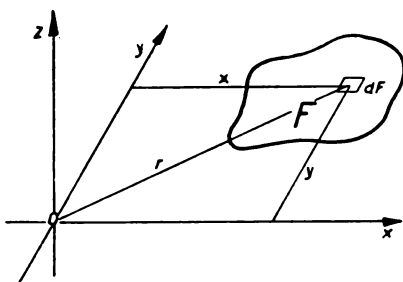
a₁) die Bezugsachse liegt in der Ebene der Fläche: äquatoriales (axiales) Trägheitsmoment.

Alle Flächenelemente werden mit dem Quadrat ihres Abstandes von dieser Achse multipliziert.

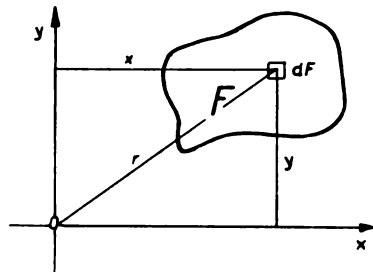
a₂) die Bezugsachse steht senkrecht auf der Fläche: polares Trägheitsmoment.

Alle Flächenelemente werden mit dem Quadrat ihres Abstandes vom Durchstoßpunkt der Achse (vom Pol) multipliziert.

Betrachten Sie zur Bestimmung des Zusammenhanges zwischen äquatorialem und polarem Trägheitsmoment Bild 17a und b.



a



b

Bild 17 a und b

Die Fläche F liege in der xy -Ebene. Die x - und y -Achse stellen dann zwei äquatoriale Bezugsachsen dar, die aufeinander senkrecht stehen. Die durch den Ursprung gehende und auf der xy -Ebene senkrecht stehende z -Achse wählen Sie als polare Achse.

Mit diesen Achsen bilden Sie die Trägheitsmomente

äquatorial

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad (17a)$$

polar

$$J_z = J_p = \int_F r^2 dF \quad (17b)$$

Da x - und y -Achse nach Voraussetzung aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$r^2 = x^2 + y^2$$

und damit

$$\begin{aligned} J_p &= \int_{\bar{F}} r^2 dF = \int_{\bar{F}} (x^2 + y^2) dF \\ &= \int_{\bar{F}} x^2 dF + \int_{\bar{F}} y^2 dF \end{aligned}$$

$$J_p = J_y + J_x$$

(17c)

Das polare Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier äquatorialer Trägheitsmomente, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen und durch den Pol (Durchstoßpunkt) der polaren Achse gehen.

Wollen Sie nun praktisch Trägheitsmomente von gegebenen Flächen berechnen, so fassen Sie alle Punkte mit gleichem Abstand von der Bezugsachse zu einem Flächenstreifen dF zusammen und multiplizieren sie mit dem Quadrat des Abstandes. Das Trägheitsmoment eines solchen Streifens sei fortan mit dJ bezeichnet. J selbst erhalten Sie durch Bilden des Integrals in den durch die Ausdehnung der Fläche vorgeschriebenen Grenzen.

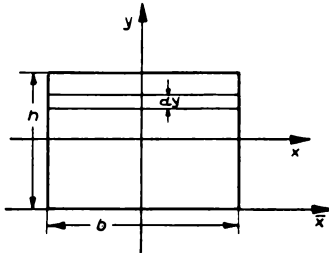


Bild 18

Lehrbeispiel 13

Es sind die Trägheitsmomente J_x , J_y , J_p und $J_{\bar{x}}$ der im Bild 18 dargestellten Rechtecksfläche zu berechnen.

Lösung:

a) Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse:

Wahl der Flächenelemente: rechteckige Streifen parallel zur x -Achse mit der Länge b und der Breite dy . Mit $dF = b dy$ ist dann

$$dJ_x = y^2 dF = b y^2 dy.$$

Die Flächenstreifen sind von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ zu erstrecken. Sie erhalten mit diesen Grenzen für das Trägheitsmoment der gesamten Fläche

$$J_x = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, können Sie dafür schreiben

$$J_x = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} b h^3$$

β) Trägheitsmoment bezüglich der y -Achse:

Wählen Sie die Streifen jetzt parallel zur y -Achse, dann ist

$$dJ_y = x^2 dF \quad \text{und} \quad dF = h dx$$

und damit

$$J_y = h \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx = 2h \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} h b^3$$

Sie hätten auch aus der Kenntnis des vorher berechneten J_x zu diesem Ergebnis kommen können. Sie brauchen in J_x nur die Buchstaben x mit y , b mit h und h mit b zu vertauschen, denn was die Rechteckseiten b und h für die x -Achse darstellen, stellen h und b für die y -Achse dar.

Sind h und b in cm angegeben, so haben die Trägheitsmomente die Dimension cm^4 .

γ) Polares Trägheitsmoment:

Mit Hilfe der Formel (17c) ergibt sich das polare Trägheitsmoment für die im Punkt 0 auf der Fläche senkrecht stehende Achse.

$$J_p = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} b h (h^2 + b^2)$$

δ) Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse:

Wie bei α, wählen Sie die Flächenstreifen parallel zur x -Achse.

$$dJ_x = y^2 dF \quad dF = b dy$$

Doch erstrecken sich jetzt die Flächenelemente von $y = 0$ bis $y = h$.

$$J_x = b \int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3} b h^3$$

Wie Sie aus Lehrbrief „Festigkeitslehre 2“, [43], wissen, können Sie die Ergebnisse von α) und δ) ineinander überführen, da parallele Achsen vorliegen. Sie müssen dazu den Satz von STEINER anwenden.

In der gleichen Art wie im angeführten Lehrbrief können Sie den Steinerschen Satz mit Hilfe der Integralrechnung ableiten. Im Bild 19 sei die x -Achse parallel zur \bar{x} -Achse und gehe durch den Schwerpunkt der Fläche F .

Auf Grund der gegenseitigen Lage dieser beiden Achsen ist

$$\bar{y} = y + b$$

Für die beiden Achsen existieren die äquatorialen Trägheitsmomente:

x - (Schwerpunkts-) Achse:

$$J_x = J_s = \int_F y^2 dF$$

\bar{x} -Achse:

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF$$

Zwischen beiden besteht nun ein Zusammenhang, den Sie jetzt aufstellen sollen.

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}} &= \int_F \bar{y}^2 dF = \int_F (y + b)^2 dF \\ &= \int_F (y^2 + 2by + b^2) dF \\ &= \int_F y^2 dF + 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF \\ J_{\bar{x}} &= J_s + 0 + b^2 F \end{aligned}$$

Sie müssen sich jetzt noch Klarheit darüber verschaffen, warum das Integral $\int_F y dF$ den Wert 0 hat. Zunächst erkennen Sie in diesem Integral das statische

Moment T_x der Fläche F . Die Voraussetzung, die x -Achse sei Schwerpunktsachse, besagt, daß die Ordinate des Schwerpunktes

$$y_s = \frac{T_x}{F} = 0$$

sein muß. Daraus folgt aber

$$T_x = \int_F y dF = 0$$

Sie erhalten so den Ihnen bekannten **Satz von STEINER**:

$$J_{\bar{x}} = J_x + b^2 F$$

(18 a)

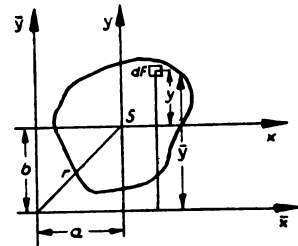


Bild 19

und entsprechend (vgl. Bild 19)

$$\boxed{J_{\bar{y}} = J_y + a^2 F} \quad (18 b)$$

Ist J_x bzw. J_y das Trägheitsmoment einer Fläche in bezug auf eine Achse durch den Flächenschwerpunkt, so erhält man das Trägheitsmoment $J_{\bar{x}}$ bzw. $J_{\bar{y}}$ in bezug auf eine beliebige parallele Achse, indem man zum ersteren das Produkt aus Fläche und Quadrat des Achsenabstandes addiert.

Ziehen Sie hierzu noch Formel (17 c) heran, so können Sie den Satz von STEINER auch auf die polaren Trägheitsmomente anwenden.

Es sei $J_p \doteq J_x + J_y$ das polare Trägheitsmoment mit dem Schwerpunkt als Pol, während der Schnittpunkt der \bar{x} - und y -Achse der Pol für das Trägheitsmoment $J_{\bar{p}} = J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}$ sein soll (Bild 19). Dann ist

$$\begin{aligned} J_{\bar{p}} &= J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}} \\ &= J_x + b^2 F + J_y + a^2 F \\ &= J_x + J_y + (a^2 + b^2) F \end{aligned}$$

$$\boxed{J_{\bar{p}} = J_p + r^2 F} \quad (18 c)$$

Hierbei bedeutet r die Entfernung der beiden parallelen Polachsen. Wie Sie aus den Formeln (18 a) bis (18 c) erkennen, besitzt das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Flächenschwerpunkt gehende Achse von allen möglichen Trägheitsmomenten den kleinsten Wert.

Es ist also immer

$$J_x \leq J_{\bar{x}} \quad J_y \leq J_{\bar{y}} \quad J_p \leq J_{\bar{p}}$$

Lehrbeispiel 14

Es sind $J_{\bar{x}}$ und J_x für das in Bild 20 dargestellte Dreieck zu berechnen.

Lösung:

a) Trägheitsmoment bezüglich der Grundlinie (\bar{x} -Achse)

Teilen Sie das Dreieck in Streifen parallel zur Bezugsachse auf. Nähern Sie diese Flächenelemente durch Rechtecke mit der Seite s und der Breite dy an. Ein derartiges Flächenelement dF ist in Bild 20 schraffiert gezeichnet. Die Länge s ist aber mit dem Abstand \bar{y} des Flächenelementes von der Bezugsachse veränderlich.

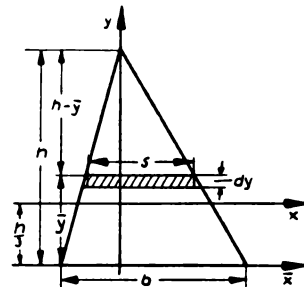


Bild 20

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen s und \bar{y} ?

Wenden Sie den Strahlensatz an. Sie erhalten

$$s : b = (h - \bar{y}) : h$$

oder

$$s = \frac{b}{h} (h - \bar{y})$$

Für das Trägheitsmoment gilt

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF \qquad dF = s dy = \frac{b}{h} (h - \bar{y}) dy$$

$$J_{\bar{x}} = \frac{b}{h} \int_0^h (h - \bar{y}) \bar{y}^2 dy$$

Multiplizieren Sie den Integranden aus und führen Sie die Integration durch.

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}} &= b \int_0^h \bar{y}^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h \bar{y}^3 dy \\ &= \frac{b h^3}{3} - \frac{b h^3}{4} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{J_{\bar{x}} = \frac{b h^3}{12}}}$$

β) Trägheitsmoment J_x bezüglich der zur Grundlinie parallelen Schwerpunktsachse

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand $a = \frac{h}{3}$ (vgl. Lehrbeispiel 10).

Auf Grund des Satzes von STEINER muß gelten

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}} &= J_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F & F &= \frac{1}{2} b h \\ &= J_x + \frac{b h^3}{18} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} J_x &= J_{\bar{x}} - \frac{b h^3}{18} \\ &= \frac{b h^3}{12} - \frac{b h^3}{18} \\ J_x &= \underline{\underline{\frac{b h^3}{36}}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 15

Es sind das polare und das äquatoriale Flächenträgheitsmoment des Kreises mit dem Radius R zu berechnen (Bild 21).

Lösung:

a) Polares Flächenträgheitsmoment

Alle vom Pol (Mittelpunkt des Kreises) gleichweit entfernten Flächenpunkte liegen auf einem Kreisring mit dem (mittleren) Radius ϱ und der Breite $d\varrho$. Der Inhalt des Flächenelementes ist damit

$$dF = 2\pi\varrho d\varrho$$

und das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \int_F \varrho^2 dF = 2\pi \int_0^R \varrho^3 d\varrho$$

$$\underline{\underline{J_p = \frac{1}{2} \pi R^4}}$$

β) Äquatoriales Trägheitsmoment

Sind die äquatorialen Bezugsachsen zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, so muß die Summe der dazugehörigen Trägheitsmomente gleich dem polaren Trägheitsmoment J_p sein. Aus Symmetriegründen müssen aber weiterhin die beiden äquatorialen Trägheitsmomente gleich sein. Somit ist $J_p = 2 J_x$, oder

$$\underline{\underline{J_x = \frac{1}{2} J_p = \frac{1}{4} \pi R^4}}$$

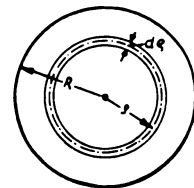


Bild 21

Für den Fall, daß nicht ein voller Kreis, sondern ein Kreisring mit dem Innenradius r und dem Außenradius R vorliegt, sind die Grenzen des Integrals r und R , so daß Sie erhalten

$$J_p = 2\pi \int_r^R \varrho^3 d\varrho = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$$

bzw.

$$J_x = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4)$$

Nachdem Sie nun einige spezielle Trägheitsmomente von Flächen berechnet haben, soll der allgemeine Fall untersucht werden, daß die Fläche durch die Kurve $y = f(x)$, die beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ und die x -Achse begrenzt wird.

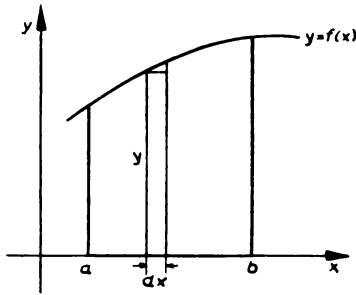


Bild 22

Betrachten Sie hierzu Bild 22. Die Fläche ist in Streifen parallel zur y -Achse geteilt (in Bild 22 nur ein Streifen eingezeichnet). Diese Streifen können Sie durch Rechtecke mit der Breite dx , der Höhe y und dem Flächeninhalt $dF = y dx$ annähern. Unter Verwendung des Ergebnisses aus Lehrbeispiel 13 δ) erhalten Sie für das Trägheitsmoment eines solchen Streifens

$$dJ_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$

und daraus für die ganze Fläche

$$J_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx \quad (19a)$$

Bezüglich der y -Achse hat der betrachtete Streifen den Abstand x und daher das Trägheitsmoment

$$dJ_y = x^2 dF = x^2 y dx,$$

während für die gesamte Fläche

$$J_y = \int_a^b x^2 y dx \quad (19b)$$

ist.

Lehrbeispiel 16

Wie groß sind die äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y für das im Bild 23 dargestellte Trapez?

Lösung:

a) Aufstellung der Funktion der begrenzenden Geraden

Die Gerade durchläuft die beiden Punkte $(0; 3)$ und $(2; 7)$. Für diese Punkte erhalten Sie mit Hilfe der „Zweipunktegleichung“

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{2 - 0} (x - 0)$$

$$y = 2x + 3$$

β) Berechnung von J_x

Benutzen Sie die Formel (19a), so erhalten Sie für die Trapezfläche

$$J_x = \frac{1}{3} \int_0^2 (2x + 3)^3 dx$$

Substitution: $u = 2x + 3$

$$dx = \frac{1}{2} du$$

obere Grenze: $x = 2 \rightarrow u = 7$

untere Grenze: $x = 0 \rightarrow u = 3$

$$J_x = \frac{1}{6} \int_3^7 u^3 du$$

$$J_x = \frac{1}{24} u^4 \Big|_3^7 = \frac{290}{3} = \underline{96,6} \text{ (Längeneinheiten)}^4$$

γ) Berechnung von J_y

Hierfür verwenden Sie die Formel (19b).

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^2 x^2 (2x + 3) dx \\ &= \int_0^2 (2x^3 + 3x^2) dx \end{aligned}$$

$$J_y = \left(\frac{1}{2} x^4 + x^3 \right) \Big|_0^2 = 16 \text{ (Längeneinheiten)}^4$$

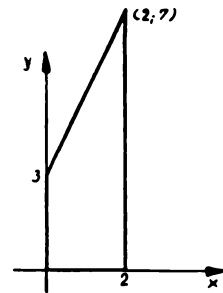


Bild 23

Lehrbeispiel 17

Wie groß ist das Trägheitsmoment für den in Bild 11 dargestellten Kreissektor bezüglich der y -Achse?

Lösung:

In Lehrbeispiel 12 haben Sie für diese Fläche bereits das statische Moment bezüglich der y -Achse berechnet. Für die Aufteilung der Fläche und die Wahl der dazugehörigen Grenzen gelten selbstverständlich wieder die gleichen Überlegungen. Danach ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_y &= \int_0^{r \cos \alpha} x^2 y_1 dx + \int_{r \cos \alpha}^r x^2 y_2 dx \\ &= \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^3 dx + \int_{r \cos \alpha}^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Das rechte Integral haben Sie nach den Gesichtspunkten zu lösen, die wir im Lbf. IV/4, [8] d, behandelt haben. Es liegt hier der Typ α vor, also müssen Sie eine neue Veränderliche mit Hilfe der Sinus- oder Kosinusfunktion einführen. Da die untere Grenze $\cos \alpha$ enthält, wählen Sie zweckmäßig $x = r \cos u$.

$$\begin{aligned} \text{Substitution: } \quad x &= r \cos u \\ dx &= -r \sin u \, du \\ \text{untere Grenze: } \quad x &= r \cos \alpha \rightarrow r \cos \alpha = r \cos u \rightarrow u = \alpha \\ \text{obere Grenze: } \quad x &= r \rightarrow r = r \cos u \rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} J_y = \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx - r^4 \int_{\alpha}^0 \cos^2 u \sin^2 u \, du$$

Da im rechten Integral die obere Grenze kleiner als die untere ist, vertauschen Sie die Grenzen unter Änderung des Vorzeichens des Integrals.

$$\frac{1}{2} J_y = \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx + r^4 \int_0^{\alpha} \cos^2 u \sin^2 u \, du$$

Formen Sie das rechte Integral mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ um, und zerlegen Sie es in zwei Teilintegrale.

$$\frac{1}{2} J_y = \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx + r^4 \left(\int_0^{\alpha} \cos^2 u \, du - \int_0^{\alpha} \cos^4 u \, du \right)$$

Mit Hilfe der Formel (32) des Lehrbriefes IV/4 bekommen Sie dann

$$\frac{1}{2} J_y = \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx + r^4 \left(\int_0^{\alpha} \cos^2 u \, du - \frac{1}{4} \sin u \cos^3 u \Big|_0^{\alpha} - \frac{3}{4} \int_0^{\alpha} \cos^2 u \, du \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_y &= \operatorname{tg} \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx + \frac{r^4}{4} \left(\int_0^{\alpha} \cos^2 u \, du - \sin u \cos^3 u \Big|_0^{\alpha} \right) \\ &= \operatorname{tg} \alpha \frac{x^3}{3} \Big|_0^{r \cos \alpha} + \frac{r^4}{4} \left[\frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) - \sin u \cos^3 u \right] \Big|_0^{\alpha} \\ &= \frac{r^4}{4} \left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^4 \alpha + \frac{1}{2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - \sin \alpha \cos^3 \alpha \right] \\ \frac{1}{2} J_y &= \frac{r^4}{8} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

Für den gesamten Kreissektor erhalten Sie als Trägheitsmoment

$$J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha) \quad \text{oder mit} \quad 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

Um wiederum das äquatoriale Trägheitsmoment des Vollkreises zu bekommen, haben Sie $\alpha = \pi$ zu setzen:

$$J_y = \frac{r^4}{8} (2\pi + \sin 2\pi) = \frac{1}{4} \pi r^4$$

(Vergleichen Sie hierzu auch das Ergebnis von Lehrbeispiel 14 β .)

b) Massenträgheitsmoment

Wie schon erwähnt, unterscheiden sich Flächen- und Massenträgheitsmoment im Ansatz nur durch die Glieder dF bzw. dm (bedenken Sie auch noch, daß Massenträgheitsmomente für räumliche Körper berechnet werden).

Die hierzu verwendete allgemeine Formel (16b) war

$$J = \int_m l^2 dm$$

Der für die Flächenträgheitsmomente aufgestellte Satz von STEINER gilt sinngemäß hier wieder. Sie haben lediglich F durch m und dF durch dm zu ersetzen.

Lehrbeispiel 18

Es sind das polare und das axiale Massenträgheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe mit dem Radius R , der Dicke h und der Wichte γ zu berechnen. Im Bild 24 sind die dazugehörigen Achsen dargestellt.

Lösung:

a) Polares Massenträgheitsmoment

Zum Ansatz haben Sie wie im Lehrbeispiel 15 zu verfahren.

Zur Ermittlung von dm multiplizieren Sie dF zunächst mit der Dicke h und erhalten das Volumen dV . Die weitere Multiplikation mit dem spezifischen Gewicht γ ergibt das Gewicht dG des Massenelementes. Da nun allgemein die Masse eines Körpers mit seinem Gewicht durch die Beziehung $m \cdot g = G$ ($g = \text{Erdbeschleunigung} = 9,81 \text{ m/s}^2$) Größenmäßig verknüpft ist, bekommen Sie nach Division durch g aus dG die geforderte Größe dm .

$$dm = dFh \frac{\gamma}{g} = 2\pi \rho d\rho h \frac{\gamma}{g}$$

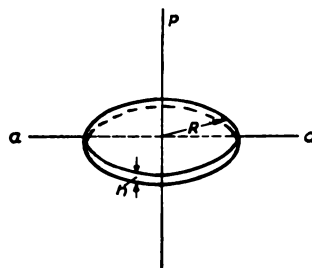


Bild 24

Dann ist

$$J_p = 2 \pi \frac{\gamma}{g} h \int_0^R \varrho^3 d\varrho = \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma}{g} h R^4$$

Nun ist aber die Gesamtmasse $m = R^2 \pi h \frac{\gamma}{g}$. Berücksichtigen Sie das in dem Ausdruck für J_p , so können Sie endgültig schreiben

$$J_p = \frac{1}{2} m R^2$$

Diese Formel gilt unbeschränkt für alle Werte von h , also auch für Kreiszyylinder.

β) Axiales Massenträgheitsmoment

Handelt es sich um eine dünne Kreisscheibe, ist also die Dicke h klein gegenüber dem Radius R , so können Sie hier die Überlegungen aus dem Lehrbeispiel 15 entsprechend anwenden.

$$J_a = \frac{1}{2} J_p = \frac{1}{4} m R^2 \quad (h \ll R)$$

Verschaffen Sie sich jetzt noch Klarheit über die Dimension des Massenträgheitsmomentes. Wird R in $[m]$ gemessen, und bedenken Sie, daß auf Grund der Beziehung $m = \frac{G}{g}$ der Masse m die Dimension $\left[\frac{\text{kp s}^2}{\text{m}} \right]$ zukommt, so hat das Massenträgheitsmoment die Dimension

$$[\text{kp m s}^2]$$

Lehrbeispiel 19

Wie groß ist das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h , dem Grundkreisradius R und dem spezifischen Gewicht γ bezüglich der Figurenachse?

Lösung:

Denken Sie sich den Kegel in dünne Scheiben der Dicke dx zerlegt. In Bild 25 ist eine solche Scheibe eingezeichnet. Stellt y den (mittleren) Radius dar, so können Sie diese Scheibe bei genügend kleinem dx durch eine Kreisscheibe mit der Masse

$$dm = \pi y^2 dx \frac{\gamma}{g}$$

ersetzen. Das Trägheitsmoment dieser Scheibe hat dann auf Grund des Ergebnisses von Lehrbeispiel 18a den Wert

$$dJ_x = \frac{1}{2} y^2 dm = \frac{1}{2} \pi y^4 dx \frac{\gamma}{g}$$

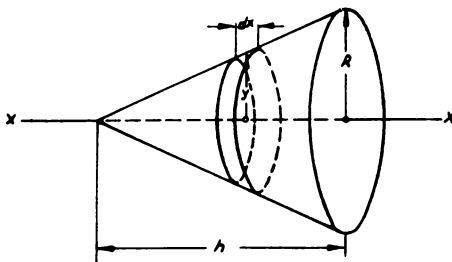


Bild 25

Jetzt haben Sie noch den von Kreisscheibe zu Kreisscheibe veränderlichen Radius y durch x auszudrücken, denn das „ dx “ gibt an, daß die Integrationsveränderliche x ist. Aus Bild 26, das den Schnitt des Kegels darstellt, lesen Sie ab

$$\frac{y}{x} = \frac{R}{h} \quad \text{also} \quad y = \frac{R}{h} x$$

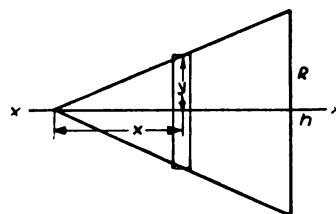


Bild 26

Damit erhalten Sie dann

$$J_x = \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma}{g} \frac{R^4}{h^4} \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{10} \pi \frac{\gamma}{g} \frac{R^4}{h^4} h^5 = \frac{1}{10} \pi \frac{\gamma}{g} R^4 h$$

Nun ist aber die Gesamtmasse des Kegels nach Formel (10)

$$m = \int_m dm = \pi \frac{\gamma}{g} \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi \frac{\gamma}{g} R^2 h$$

Setzen Sie das wieder in J_x ein, so bekommen Sie als Endergebnis

$$J_x = \frac{3}{10} m R^2$$

Lehrbeispiel 20

Gesucht ist das Massenträgheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R . Die Achse soll dabei durch den Mittelpunkt gehen, sie soll also ein Durchmesser sein (x -Achse).

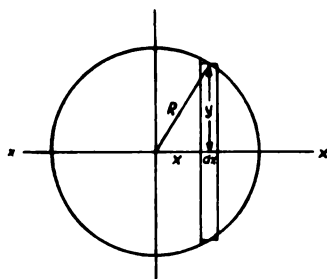


Bild 27

Lösung:

Bild 27 stellt einen Schnitt durch die Kugel dar. Denken Sie sich wieder die Kugel in Scheiben senkrecht zur x -Achse zerlegt bzw. eine solche Scheibe aus der Kugel herausgeschnitten. Die dünne Scheibe wird wieder durch eine Kreisscheibe mit der Masse

$$dm = \pi y^2 dx \frac{\gamma}{g}$$

und dem Trägheitsmoment

$$dJ_x = \frac{1}{2} y^2 dm = \frac{1}{2} \pi y^4 dx \frac{\gamma}{g}$$

ersetzt.

Nun ist

$$y^2 = R^2 - x^2$$

und damit

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma}{g} \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \frac{\gamma}{g} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \frac{\gamma}{g} \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \frac{\gamma}{g} \left(R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{8}{15} \pi \frac{\gamma}{g} R^5 \end{aligned}$$

Da aber die Gesamtmasse $m = \frac{4}{3} \pi \frac{\gamma}{g} R^3$ ist, ergibt sich als Endformel

$$\underline{\underline{J_x = \frac{2}{5} m R^2}}$$

Auch hier können Sie die Gesamtmasse ermitteln, indem Sie nach Formel (10)

$$m = \int_m dm$$

bilden.

Lehrbeispiel 21

Wie groß ist das Massenträgheitsmoment der in Bild 28 dargestellten dünnen Kreisscheibe bezüglich der \bar{y} -Achse?

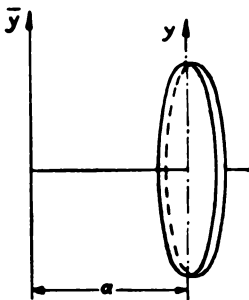


Bild 28

Lösung:

In bezug auf die zur \bar{y} -Achse parallele y -Achse (Schwerpunktachse) hat die Kreisscheibe nach Lehrbeispiel 18 β das Trägheitsmoment

$$J_y = \frac{1}{4} m R^2$$

Mit Hilfe des Steinerschen Satzes erhalten Sie für die \bar{y} -Achse

$$J_{\bar{y}} = J_y + a^2 m$$

$$\underline{\underline{J_{\bar{y}} = \frac{1}{4} m R^2 + a^2 m}}$$

Lehrbeispiel 22

Welches Massenträgheitsmoment hat der in Lehrbeispiel 19 behandelte Kreiskegel in bezug auf eine Achse, die senkrecht zur Figurenachse durch die Kegelspitze läuft?

Lösung:

Denken Sie sich wieder den Kegel in Scheiben zerlegt. Eine solche Scheibe mit dem Radius y , der Masse $dm = \pi \frac{\gamma}{g} y^2 dx$ und dem Abstand x von der Drehachse hat nach Lehrbeispiel 21 das Massenträgheitsmoment

$$\begin{aligned} dJ_y &= \frac{1}{4} y^2 dm + x^2 dm & y &= \frac{R}{h} x \\ J_y &= \frac{\pi \gamma R^4}{4 g h^4} \int_0^h x^4 dx + \frac{\pi \gamma R^2}{g h^2} \int_0^h x^4 dx \\ &= \frac{\pi \gamma R^4 h}{20 g} + \frac{\pi \gamma R^2 h^3}{5 g} & m &= \frac{\pi \gamma R^2 h}{3 g} \\ &= \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 \\ J_y &= \frac{3}{20} m (R^2 + 4 h^2) \end{aligned}$$

Übungen

- Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente J_a , J_S , J_b und J_h des in Übung 8 berechneten Trapezes?
Erläuterung: Die Achse für J_S sei die Parallele zur Trapezseite a durch den Schwerpunkt.
- Stellen Sie die Formeln für die Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Kurve auf, die in der expliziten Form gegeben ist!
- Wie groß ist das Trägheitsmoment des in Bild 11 dargestellten Kreisbogens in bezug auf die y -Achse?
- Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment des in Bild 16 dargestellten Kreisringstückes in bezug auf die zur y -Achse parallele Schwerpunktachse! Vergewissern Sie sich dazu noch einmal Lehrbeispiel 17 und Übung 10!
- Ein dünner Stab mit dem Querschnitt q , der Länge l und der Wichte γ rotiere um die zur Stabachse senkrechte Mittelachse. Wie groß ist sein Massenträgheitsmoment?

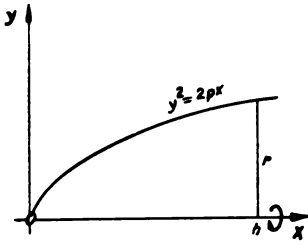


Bild 29

18. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Paraboloides in bezug auf seine Figurenchse, das durch Rotation der in Bild 29 dargestellten Parabel entsteht $\left(m = \frac{1}{2} r^2 \pi h \frac{\gamma}{g} \right)$?

Zusammenfassung [3] bis [5]

Im Verlauf der Abschnitte [3] bis [5] haben Sie die ersten geometrischen Anwendungen der Integralrechnen kennengelernt. So wurden behandelt:

- Bogenlänge,
- Schwerpunkt von Kurven und Flächen,
- Flächen- und Massenträgheitsmomente.

Grundsätzlich sind die Ansätze zu diesen verschiedenen Anwendungen stets nach den gleichen Gesichtspunkten durchzuführen:

1. Herausgreifen eines Teilstückes. Kennzeichnung dieses wahren Teilstückes durch ein vorgesetztes Δ ,
2. Annäherung des wahren Teilstückes durch eine elementar zu berechnende Ersatzgröße. Kennzeichnung der Ersatzgröße durch ein vorgesetztes d ,
3. Integration über die Ersatzgrößen.

Sie müssen aber dabei bedenken, daß dieser so einfach erscheinende Übergang von den Δ -Größen zu den d -Größen und zur Integration nicht so selbstverständlich ist. Wie Sie bei den ersten Anwendungen gesehen haben, muß eigentlich zunächst über die Teilgrößen summiert werden. Dann haben Sie anschließend den Grenzwert der Summe, das Integral zu bilden.

Als dringendes Zugeständnis an die Praxis aber wollen wir weiterhin den vereinfachten Weg beibehalten.

Verfallen Sie jedoch nicht auf den alten Fehler, die Differentiale als unendlich kleine Größen anzusehen, hervorgegangen aus den zugehörigen Differenzen. So wird nicht etwa aus Δy das dy , wenn Δx gegen Null strebt. In älteren Lehrbüchern finden Sie zuweilen diese irriige Auffassung. Ziehen Sie noch einmal zur Erläuterung den analytischen Zusammenhang des Differenzen- und Differentialquotienten heran. Es war

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

und das ist so zu deuten, daß die beiden (endlichen) Größen Δy und dy , das ist der wahre Kurvenzuwachs und der Tangenzuwachs, für kleine $\Delta x = dx$ nahezu gleich sind.

[6] Inhalt von Körpern. In Formel (10) und in den Lehrbeispielen 18 und 19 haben Sie neben der Berechnung von Trägheitsmomenten noch die Ermittlung von Massen bzw. Rauminhalten kennengelernt.

Wir wollen uns nun speziell mit diesem Problem beschäftigen. So wie Sie im vorigen Lehrbrief den Inhalt einer Fläche durch das Integral über die Flächenelemente berechnet haben, können Sie das Volumen von Körpern durch das Integral über die Volumenelemente bestimmen.

$$V = \int_V dV \quad (20 \text{ a})$$

Leider läßt sich dieses einfache Integral nicht für alle Körper verwenden. Es helfen dann meist nur die sogenannten „mehrfachen Integrale“, die später in [8] behandelt werden.

Zunächst aber wollen wir die Formel (20 a) noch etwas umformen. Betrachten Sie Bild 30. Es stellt einen Querschnitt eines Körpers dar, den Sie sich räumlich vorzustellen haben. Aus diesem wird wiederum eine dünne Scheibe von der Dicke dx herausgeschnitten. Der (mittlere) Querschnitt der Scheibe habe den Flächeninhalt Q . Ist dx genügend klein, so werden sich die benachbarten Schnittflächen nur sehr wenig in Gestalt und Größe von Q unterscheiden, so daß Sie das Volumen der Scheibe durch

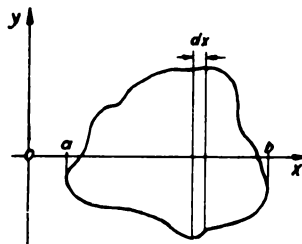


Bild 30

$$dV = Q dx$$

angeben können. Dabei ist Q abhängig davon, an welcher Stelle x die Scheibe herausgeschnitten ist. Es ist also Q eine Funktion von x , d. h. $Q = Q(x)$. Das Gesamtvolumen wird dann durch das Integral (Grenzwert der Summe der Volumenelemente!)

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (20 \text{ b})$$

angegeben.

Lehrbeispiel 23

Wie groß ist das Volumen einer Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche G und der Höhe h ?

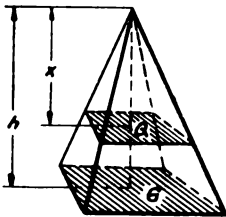


Bild 31

Lösung:

Um das Integral (20b) auswerten zu können, müssen Sie zunächst wissen, wie die Größe Q der Querschnittsfläche von der Schnitthöhe x abhängt. Dabei soll x von der Spitze der Pyramide aus gemessen werden, so daß für $x = 0$ $Q = 0$ und für $x = h$ $Q = G$ sein muß. Aus Bild 31 lesen Sie die Beziehung

$$Q : G = x^2 : h^2$$

ab (nicht $Q : G = x : h$, denn bei Veränderung der Schnitthöhe ändert sich Q in beiden Dimensionen!).

Es ist also

$$Q = \frac{G}{h^2} x^2$$

Damit wird

$$V = \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{1}{3} Gh$$

Wie Sie schon wissen, hat diese Formel nicht nur für rechteckige Grundflächen Gültigkeit. So gilt beispielsweise für den Kegel mit $G = \pi R^2$:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Sehr gut bewährt sich die Formel (20b) bei Rotationskörpern. Diese Körper entstehen durch Rotation einer Fläche um eine Achse. Im Bild 32 ist die x -Achse die Rotationsachse und die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ als „Erzeugende“ angenommen worden. Die so entstehenden Rotationskörper zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Querschnitte Q Kreisflächen mit dem Radius y sind, wobei die Mittelpunkte dieser Kreise alle auf der Drehachse liegen.

So können Sie sofort für alle Körper dieser Art allgemein die Größe des Querschnittes Q angeben als

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

In Verbindung mit Formel (20b) erhalten Sie als Formel für das Volumen von Rotationskörpern (als Drehachse die x -Achse)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

(21)

Die Anwendung der Formel (21) soll an dem obenstehend berechneten Kegel gezeigt werden. Bild 33 stellt die erzeugende Fläche als Dreieck unter der Geraden $y = \frac{R}{h} x$ zwischen $x = 0$ und $x = h$ dar.

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

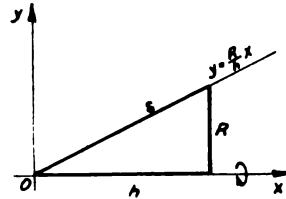


Bild 33

Lehrbeispiel 24

Berechnen Sie den Inhalt eines Paraboloides!

Die erzeugende Fläche liegt unter der Parabel $y^2 = 2px$. Die Höhe des Paraboloides sei h , der Grundkreis habe den Radius r (vgl. Bild 29).

Lösung:

Sie setzen für y^2 den Wert $2px$ in Formel (21). Die Grenzen sind $x = 0$ und $x = h$.

$$V = 2\pi p \int_0^h x dx = \pi p h^2$$

Aus Bild 29 erkennen Sie, daß r die zu $x = h$ gehörige Ordinate ist. Folglich besteht zwischen r und h (gemäß der Parabelgleichung $y = 2px$) der Zusammenhang

$$r^2 = 2ph \quad \text{bzw.} \quad ph = \frac{r^2}{2}$$

$\frac{r^2}{2}$ für ph in den oberstehenden Wert für V eingesetzt, ergibt

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

Das Ergebnis sagt Ihnen, daß der Inhalt des Paraboloides gleich der Hälfte des Inhalts des umgebenden Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist.

Lehrbeispiel 25

Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschicht mit der Dicke h , die im Abstand a vom Mittelpunkt aus einer Kugel mit dem Radius r herausgeschnitten worden ist.

Wie in Bild 34 angegeben, sollen dabei die entstehenden Schnittkreise die Radien r_1 bzw. r_2 haben.

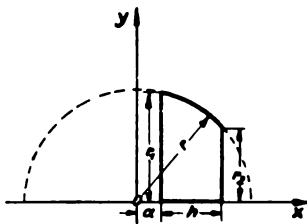


Bild 34

Lösung:

Die erzeugende Fläche liegt unter der Kurve $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$. Die Grenzen sind $x = a$ und $x = a + h$.

Die Anwendung von Formel (21) liefert

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^{a+h} (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{3} [3r^2(a+h) - (a+h)^3 - 3r^2a + a^3] \end{aligned}$$

Lösen Sie die runden Klammern auf. Die Glieder a^3 und $3r^2a$ fallen heraus. Klammern Sie dann noch h aus, so erhalten Sie

$$V = \frac{\pi h}{3} [3(r^2 - a^2) - 3ah - h^2]$$

Da in diesem Ausdruck noch die Größe a auftritt, die Sie nicht unmittelbar an der Kugelschicht messen können, müssen Sie noch weiter umformen. Lesen Sie dazu aus Bild 34 folgende Beziehungen ab (Lehrsatz des PYTHAGORAS):

$$\begin{aligned} (a+h)^2 &= a^2 + 2ah + h^2 = r^2 - r_2^2 \\ a^2 &= r^2 - r_1^2 \end{aligned}$$

Ziehen Sie beide Gleichungen voneinander ab, so erhalten Sie

$$\begin{aligned} 2ah + h^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\ ah &= \frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2 - h^2) \end{aligned}$$

Setzen Sie diesen Wert für ah in den oben gewonnenen Ausdruck für V ein, und berücksichtigen Sie noch, daß $r^2 - a^2 = r_1^2$ ist, so können Sie der Formel für das Volumen der Kugelscheibe die endgültige Gestalt

$$V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

geben.

Setzen Sie zur Probe $r_1 = r_2 = 0$ und $h = 2r$, so müssen Sie das Volumen der Vollkugel erhalten.

Vergleichen Sie doch jetzt einmal die Formel (21) und die bei der Bestimmung der Flächenschwerpunkte benutzte Formel (15b) miteinander. Versuchen Sie, ehe Sie weiterlesen, einen Zusammenhang zu erkennen.

Nach Formel (15b) war

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{F}$$

oder

$$\int_a^b y^2 dx = 2 y_s F$$

Setzen Sie diesen Wert in Formel (21) ein, so erhalten Sie

$$V = 2 \pi y_s F \quad (22)$$

Sie haben damit einen Beweis für die Ihnen bekannte 2. Guldinsche Regel für die Ermittlung der Volumina von Rotationskörpern gefunden. Achten Sie darauf, daß es sich bei y_s um die Schwerpunktsordinate der erzeugenden Fläche handelt. Die entsprechende Formel für die Mantelflächen werden Sie im nächsten Abschnitt vorfinden.

Übungen

19. Wie verhalten sich die Volumina eines Zylinders, einer Halbkugel, eines Rotationsparaboloiden und eines Kreiskegels zueinander, wenn alle Körper gleichen Grundkreisradius und gleiche Höhe haben?
20. Welches Volumen hat der Körper, der aus der in Übung 12 behandelten Fläche durch Rotation um die x -Achse entsteht? Prüfen Sie das Ergebnis mit der 2. Guldinschen Regel nach!
21. Welches Volumen hat das
 - a) gestreckte Rotationsellipsoid,
 - b) abgeplattete Rotationsellipsoid,
 das durch Rotation der
 - a) oberen Halbellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die x -Achse,
 - b) rechten Halbellipse um die y -Achse
 entsteht?
22. Welches Volumen hat das in Bild 35 dargestellte einschalige Rotationshyperboloid?

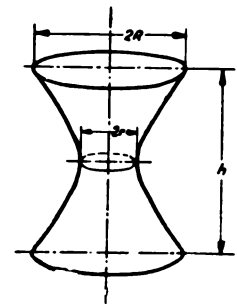


Bild 35

Anleitung: Stellen Sie zunächst die Funktion der Hyperbel auf, die die erzeugende Fläche nach rechts begrenzt.

[7] Mantelfläche von Rotationskörpern. Auch die Mantelflächen von Rotationskörpern lassen sich leicht mit einfachen Integralen berechnen. Denken Sie sich wieder den Körper in Scheiben zerlegt. Die Mantelfläche einer solchen Scheibe wird bei der Rotation durch das Bogenelement der Kurve $y = f(x)$ erzeugt

(Bild 36). Denken Sie sich diesen „Reifen“ auseinandergeschnitten. Seine Länge können Sie bei kleinem dx durch $2\pi y$ und seine Breite durch dx angeben, so daß das Mantelflächenelement die Größe

$$dF_M = 2\pi y ds$$

und die gesamte Mantelfläche die Größe

$$F_M = 2\pi \int_s y ds \quad (23)$$

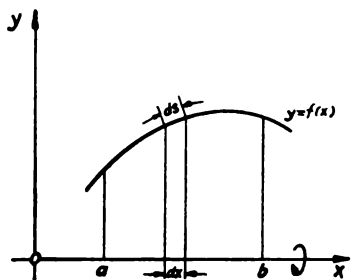


Bild 36

hat, wobei das Integral über das Kurvenstück s zu erstrecken ist, das die Mantelfläche erzeugt.

Ist die Kurve in der expliziten Form $y = f(x)$ gegeben, so können Sie nach Abschnitt [3], Formel (4a), schreiben:

$$F_M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (23a)$$

Die Formel (23) enthält die Ihnen aus der Stereometrie bekannte 1. Guldin'sche Regel.

Setzen Sie nämlich in der für die Berechnung der Schwerpunktsordinate eines Kurvenbogens aufgestellten Formel (12b)

$$y_s = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{s}$$

die aus Formel (4a) folgende Beziehung

$$\sqrt{1 + y'^2} dx = ds$$

ein, so erhalten Sie

$$y_s = \frac{\int y ds}{s}$$

und hieraus

$$\int y ds = y_s s$$

Das Glied $\int_s y \, ds$ ist aber in Formel (23) enthalten, der Sie unter Verwendung der vorstehenden Beziehung die Form der 1. Guldinschen Regel

$$\boxed{F_M = 2\pi y_s s} \quad (24)$$

geben können.

Achten Sie darauf, daß y_s (im Gegensatz zu Formel (22)) die Ordinate des Schwerpunktes der erzeugenden *Kurve* darstellt!

Lehrbeispiel 26

Es ist die Mantelfläche des in Lehrbeispiel 19 und 22 behandelten Kegels zu berechnen (vgl. Bild 33).

Lösung:

Erzeugende Kurve:

$$y = \frac{R}{h} x \quad y' = \frac{R}{h}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{h} \sqrt{R^2 + h^2} = \frac{s}{h}$$

$$\begin{aligned} F_M &= 2\pi \frac{R s}{h^2} \int_0^h x \, dx \\ &= \pi \frac{R s}{h^2} h^2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{F_M = \pi R s}}$$

Lehrbeispiel 27

Wie groß ist die Mantelfläche der in Lehrbeispiel 25 behandelten Kugelschicht (Kugelzone)?

Lösung:

Erzeugende Kurve:

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$F_M = 2\pi r \int_a^{a+h} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$F_M = 2\pi r \int_a^{a+h} dx$$

$$\underline{\underline{F_M = 2\pi r h}}$$

Im Endwert ist weder a noch r_1 bzw. r_2 zu finden. Die Mantelfläche ist also nur von der Dicke h der Schicht abhängig, ganz gleich, an welcher Stelle sie herausgeschnitten ist.

Setzen Sie auch hier wieder $h = 2r$, so erhalten Sie die Oberfläche der Vollkugel: $F_0 = 4\pi r^2$.

Lehrbeispiel 28

Wie groß ist die Oberfläche eines gestreckten Rotationsellipsoids? (Das gestreckte Rotationsellipsoid entsteht durch Rotation der durch die Funktion $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ gegebenen Halbellipse um die x -Achse.)

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Erzeugende Kurve: } \quad y &= +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} & y' &= -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \\ 1 + y'^2 &= \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

Aus dem Lehrbrief „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ wissen Sie, daß bei der Ellipse $a^2 - b^2 = e^2$ ist. Lesen Sie dort noch einmal über die geometrische Bedeutung von e nach!

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \\ F_0 &= \frac{2\pi b}{a^2} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - e^2 x^2} dx \end{aligned}$$

Prüfen Sie nach, ob der Integrand wirklich eine symmetrische Funktion ist und so die Änderung der Grenzen gerechtfertigt ist. Das Integral lösen Sie durch Einführung einer neuen Veränderlichen.

$$\begin{aligned} \text{Substitution: } \quad u &= ex & dx &= \frac{1}{e} du, \\ \text{untere Grenze: } \quad x &= 0 \rightarrow u = 0, \\ \text{obere Grenze: } \quad x &= a \rightarrow u = ea, \end{aligned}$$

$$F_0 = \frac{4\pi b}{a^2 e} \int_0^{ea} \sqrt{a^4 - u^2} du$$

Verwenden Sie die in Lehrbrief IV/4, [8d], a), hergeleitete Formel

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Sie müssen für unsere Aufgabe das a^2 der Formel durch a^4 und das x durch u ersetzen. Dann wird

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{4\pi b}{a^2 e} \left(\frac{a^4}{2} \arcsin \frac{u}{a^2} + \frac{u}{2} \sqrt{a^4 - u^2} \right) \Big|_0^{ea} \\ &= \frac{2\pi b a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} + \frac{2\pi b}{a} \sqrt{a^4 - e^2 a^2} \end{aligned}$$

Nun ist aber $\sqrt{a^4 - e^2 a^2} = a \sqrt{a^2 - e^2} = ab$ und damit

$$\underline{\underline{F_0 = \frac{2\pi b a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} + 2\pi b^2}}$$

Lehrbeispiel 29

Es ist die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit zu berechnen.

Lösung:

Bild 37 zeigt Ihnen den Schnitt durch ein um die Mittelachse rotierendes, gefülltes Gefäß. Zweckmäßigerweise legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel der Kurve.

a) Aufstellung der Kurvengleichung.

Betrachten Sie einen beliebigen Punkt $P(x; y)$ der Kurve. Überlegen Sie sich zuerst einmal, welche Kräfte an dem Flüssigkeitsteilchen mit der Masse m im Punkt P angreifen.

Da sind: 1. das durch die Erdanziehung hervorgerufene Gewicht mg ,
2. die infolge der Rotation auftretende Zentrifugalkraft $m \omega^2 x$ ($\omega =$ Winkelgeschwindigkeit).

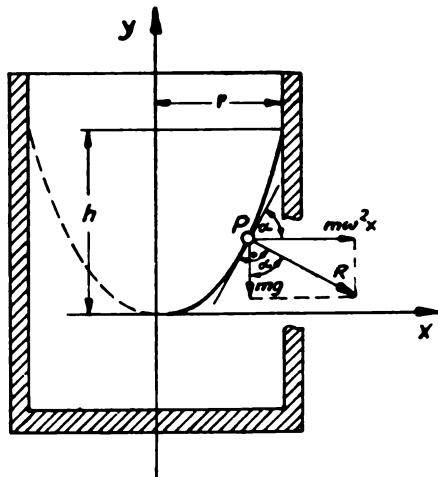


Bild 37

Beide Kräfte werden zur Resultierenden R vereinigt. Aus der Physik wissen Sie, daß sich die Oberfläche einer Flüssigkeit stets senkrecht zu der auf sie einwirkenden Kraft einstellt. Das heißt in diesem Fall, daß die Tangente an die zu bestimmende Kurve im Punkt P senkrecht zu R stehen muß.

Bezeichnen Sie den Winkel zwischen der Tangente und der Horizontalen mit α . Diesen Winkel finden Sie noch einmal zwischen der Kraft mg und der Resultierenden R wieder. Führen Sie selbst den Beweis über die Gleichheit dieser beiden Winkel. Aus Bild 37 können Sie dann unmittelbar ablesen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \omega^2 x}{m g} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Nun ist aber andererseits

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d y}{d x}, \quad \text{also} \quad \frac{d y}{d x} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$\text{oder} \quad d y = \frac{\omega^2}{g} x d x$$

Durch Integration finden Sie schließlich

$$\int d y = \frac{\omega^2}{g} \int x d x$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

Da die Kurve durch den Ursprung des gewählten Koordinatensystems geht, muß die Integrationskonstante $C = 0$ sein. Damit ist endgültig

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

Diese Funktion sagt Ihnen, daß die Flüssigkeitsoberfläche die Form eines Paraboloids annimmt.

β) Ermittlung der Oberfläche.

Warum können Sie auf dieses Beispiel nicht unmittelbar die Formel (23a) anwenden? Während wir bei der Aufstellung der Formel die x -Achse als Drehachse festgelegt haben, ist jetzt hier die y -Achse Drehachse. Die Umstellung der Formel ist nicht weiter schwierig. Sie brauchen nur die Buchstaben x und y gegenseitig zu vertauschen, so daß jetzt y die Integrationsveränderliche ist. Selbstverständlich müssen dann die Grenzen des Integrals ebenfalls y -Werte sein:

$$F_0 = 2\pi \int_0^h x \sqrt{1 + x'^2} d y$$

Hierin ist $x' = \frac{d x}{d y}$ der Differentialquotient der Umkehrfunktion. Es war nach

a) $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$, daraus ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\omega^2}{g} x \quad \text{bzw.} \quad \frac{d x}{d y} = \frac{1}{\frac{d y}{d x}} = \frac{g}{\omega^2 x}$$

$$\sqrt{1+x'^2} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$x\sqrt{1+x'^2} = \sqrt{x^2 + \frac{g^2}{\omega^4}}$$

Nun hatten wir aber festgestellt, daß y die Integrationsveränderliche ist, also muß noch x durch y ausgedrückt werden.

$$x^2 = \frac{2gy}{\omega^2}$$

$$x\sqrt{1+x'^2} = \sqrt{\frac{2gy}{\omega^2} + \frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2g}}{\omega} \sqrt{y + \frac{g}{2\omega^2}}$$

Setzen Sie noch zur Abkürzung $a = \frac{g}{2\omega^2}$ und fügen Sie dies in die Oberflächenformel ein:

$$F_0 = 2\pi \frac{\sqrt{2g}}{\omega} \int_0^h \sqrt{y+a} \, dy$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2g}}{3\omega} \left[\sqrt{(y+a)^3} \right]_0^h$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2g}}{3\omega} [\sqrt{(h+a)^3} - a\sqrt{a}]$$

Aus der Kurvenfunktion ergibt sich der Zusammenhang $h = \frac{\omega^2}{2g} r^2$ und damit nach kurzer Umrechnung

$$F_0 = \frac{2\pi}{3g\omega^4} [\sqrt{(\omega^4 r^2 + g^2)^3} - g^3]$$

Dabei ist a wieder durch $\frac{g}{2\omega^2}$ ersetzt worden.

Übungen

23. Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie aus Übung 3 um die x -Achse entsteht!
24. Wie lauten die Formeln für die Ermittlung der Mantelfläche und des Volumens für Rotationskörper, bei welchen die y -Achse Drehachse sein soll?

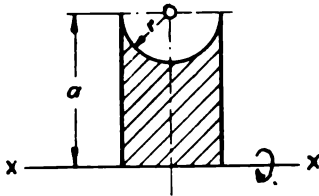


Bild 38

25. Eine Seilrolle soll durch Rotation eines Halbkreises mit dem Radius r um eine Achse entstehen, die vom Kreismittelpunkt den Abstand $a > r$ hat. Wie groß sind Mantelfläche und Volumen (Bild 38)?

[8] Weitere Anwendungen der Integralrechnung in Physik und Technik. Wenn Sie bisher gelernt haben: Arbeit = Kraft · Weg, so gilt das nur, so-

lange die Kraft längs des Weges konstant ist. Ist nun aber die Kraft veränderlich, dann denken Sie sich den Weg in kleine Wegstücke dx zerlegt. Längs eines solchen kleinen Stückes können Sie die Kraft P als konstant ansehen. Die Arbeit, die diese Kraft dort verrichtet, ist

$$dA = P dx$$

Die Summe aller dieser Arbeitselemente nähert sich um so genauer A an, je feiner die Unterteilung, je kleiner dx ist. Die Arbeit erhalten Sie exakt, wenn Sie den Grenzwert der Summe, also das Integral bilden:

$$A = \int_a^b P(x) dx \quad (25)$$

Im vorigen Lehrbrief haben Sie das bestimmte Integral als Inhalt einer Fläche kennengelernt. Nun ist jetzt die Arbeit durch ein bestimmtes Integral zu berechnen. Welche Schlußfolgerungen können Sie aus diesen beiden Aussagen ziehen? Die Arbeit muß sich als Inhalt einer Fläche darstellen lassen. Stellen

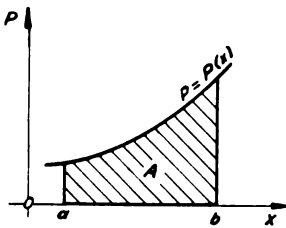


Bild 39

Sie das Kraft-Weg-Gesetz in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Die horizontale Achse muß dabei die Weg-Achse, die vertikale die Kraft-Achse sein. Die Arbeit wird dann durch die in Bild 39 schraffiert gezeichnete Fläche dargestellt.

Arbeit bei der Ausdehnung einer Schraubenfeder. Eine Schraubenfeder soll um die Länge l gedehnt und die hierbei zu verrichtende Arbeit berechnet werden.

Bei einer Schraubenfeder ist die aufzuwendende Zugkraft der Verlängerung x proportional

$$P = kx$$

Der Proportionalitätsfaktor k (Federkonstante) ist ein Maß für die „Härte“ der Feder. Die Dimension bestimmt sich aus $k = \frac{P}{x}$ zu $\frac{kp}{m}$, wenn P in kp und x in m gemessen wird.

Für $x = 1$ m wird P dem Betrage nach gleich k . Damit haben Sie die physikalische Bedeutung der Konstanten k . Sie besitzt den Betrag der Kraft, mit der die Feder nach einer Dehnung um 1 m festgehalten werden muß.

Für die Ausdehnungsarbeit erhalten Sie durch Einsetzen von $P = kx$ in Formel (25)

$$A = k \int_0^l x \, dx = \frac{1}{2} k l^2$$

Um die Feder in dieser Stellung festzuhalten, müssen Sie die Kraft $P_l = kl$ aufwenden. Damit können Sie k in der obenstehenden Gleichung ersetzen, und Sie erhalten als Endresultat

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2} P_l l}}$$

Stellen Sie sich ein Schaubild des Vorganges her, und berechnen Sie aus diesem die Arbeit als Fläche!

Ausdehnungsarbeit eines Gases

In einem Zylinder mit beweglichem Kolben (Querschnitt F) sei ein Gas eingeschlossen. Das Gas habe in dem im Bild 40 festgehaltenen Zustand den Druck p und das Volumen V .

Das Gas soll nun mit der Kraft $P = pF$ den Kolben um das kleine Stück dx herausdrücken. Den Druck können Sie bei genügend kleinem dx als konstant ansehen. Die freiwerdende Arbeit ist

$$dA = pF \, dx.$$

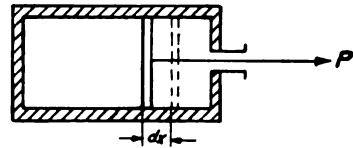


Bild 40

Der Kolben gibt durch diese Verschiebung das Volumen

$$dV = F \, dx$$

frei. Unter Verwendung der letzten Beziehung wird, wenn Sie mit V_1 das Anfangs- und mit V_2 das Endvolumen bezeichnen,

$$dA = p \, dV$$

und

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

Zur Auswertung dieses Integrales müssen Sie nun die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen kennen, denn V ist ja die Integrationsveränderliche. Es gibt ver-

schiedene Möglichkeiten der Abhängigkeit des Druckes vom Volumen. Wir wollen hier den Fall der isothermen Zustandsänderung annehmen, die Sie bereits im Lehrbrief „Physik 5“ kennengelernt haben.

Für die isotherme Zustandsänderung gilt

$$pV = p_1V_1 = p_2V_2$$

Daraus erhalten Sie die gesuchte Abhängigkeit

$$p = \frac{p_1V_1}{V} \quad (\text{Gesetz von BOYLE-MARIOTTE})$$

Die Arbeit ist

$$A = p_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1V_1(\ln V_2 - \ln V_1) = \underline{\underline{p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

Arbeit eines Wechselstromes

Der durch eine Leitung fließende Wechselstrom läßt sich durch die Funktionen

$$u = U \sin \omega t \quad \text{und} \quad i = I \sin (\omega t + \varphi)$$

darstellen. Dabei ist u die Momentan- und U die Maximalspannung, i die Momentan- und I die Maximalstromstärke. φ stellt den Phasenwinkel zwischen Spannung und Stromstärke dar. Das Produkt $u i$ gibt die Leistung N des Wechselstromes zur Zeit t an:

$$N = u i = U I \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi)$$

Die Arbeit dA , die dieser Strom während der kurzen Zeit dt verrichtet, ist gleich dem Produkt aus N und dt :

$$dA = N dt = U I \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) dt$$

Jetzt ist es nun unsere Aufgabe, die Arbeit zu ermitteln, die der Strom während einer Periode verrichtet. Die Dauer einer Periode sei T . Die Zeit T können Sie aus der Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

berechnen.

$$A = UI \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) dt$$

Zur Lösung dieses Integrals verfahren Sie wie bei dem letzten in Lehrbrief IV/4, [8a], behandelten Integral $\int \sin mx \sin nx dx$.

Setzen Sie

$$\omega t = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{und} \quad \omega t + \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also $\alpha = 2\omega t + \varphi$ und $\beta = \varphi$

Es ist dann

$$\sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

und

$$A = \frac{UI}{2} \left[\cos \varphi \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right]$$

Lösen Sie das 2. Integral mit Hilfe der Substitution $u = 2\omega t + \varphi$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{UI}{2} \left[t \cos \varphi \Big|_0^T - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi) \Big|_0^T \right] \\ &= \frac{UI}{2} \left[T \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + \varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

Aus $2\omega T = 4\pi$ folgt $\sin(4\pi + \varphi) = \sin \varphi$. Damit heben sich das 2. und das 3. Glied der eckigen Klammer gegenseitig auf. Das Endergebnis ist dann

$$A = \frac{UI}{2} T \cos \varphi$$

Die durchschnittliche Leistung des Wechselstromes während dieser Zeit ist

$$\bar{N} = \frac{A}{T} = \frac{UI}{2} \cos \varphi,$$

oder mit $U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ und $I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

$$\bar{N} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$

Im folgenden sollen Sie sich mit zwei Anwendungsbeispielen aus dem Gebiet der *Festigkeitslehre* vertraut machen.

Ausdehnung eines Balkens infolge Eigengewicht

Bild 41a soll einen herabhängenden Balken (Seil) mit der Länge l , dem Querschnitt F und der Wichte γ darstellen.

Es ist nun nach der Verlängerung λ gefragt, die der Balken infolge Belastung durch sein Eigengewicht erfährt. Denken Sie sich den Balken im Abstand x

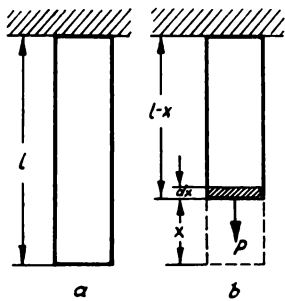


Bild 41

von seinem unteren Ende abgeschnitten (Bild 41 b) und das abgeschnittene Stück durch eine äußere Kraft P ersetzt. Damit diese Kraft an dem verbliebenen Balkenstück die gleiche Wirkung hinterläßt wie das abgeschnittene Stück, muß sie gleich dem Gewicht dieses Stückes sein.

$$P = F \gamma x$$

Betrachten Sie nun die im Bild 41 b schraffiert gezeichnete dünne Scheibe mit der Dicke dx . Durch die angreifende Kraft P wird diese Scheibe gedehnt. Die relative Dehnung ε beträgt nach dem Hookeschen Gesetz

$$\varepsilon = \frac{P}{F E} = \frac{\gamma x}{E} \quad (E = \text{Elastizitätsmodul})$$

Daraus berechnet sich die absolute Verlängerung der Scheibe zu

$$d\lambda = \varepsilon dx = \frac{\gamma x}{E} dx$$

Nun denken Sie sich den gesamten Balken aus derartigen Scheiben zusammengesetzt. Alle diese Scheiben werden nach dem gleichen Gesetz ausgedehnt. Dabei werden die in der Nähe der Einspannstelle gelegenen Scheiben entsprechend ihres großen Abstandes x vom unteren Ende des Balkens stärker verlängert als die weiter unten gelegenen. Die Gesamtverlängerung des Balkens erhalten Sie wieder als Summe bzw. Grenzwert der Summe (gleich Integral) der Einzelverlängerungen.

$$\lambda = \int_0^l \varepsilon dx = \frac{\gamma}{E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Setzen Sie noch das Gesamtgewicht $G = \gamma l F$ ein, so erhalten Sie als Endergebnis

$$\lambda = \frac{Gl}{2EF}$$

Denken Sie sich den Balken gewichtslos und am unteren Ende eine Kraft der Größe $P = G$ angesetzt, so würde der Balken auf Grund des Hookeschen Gesetzes eine Verlängerung

$$\lambda = \frac{Gl}{EF}$$

erfahren. Vergleichen Sie diese beiden Aussagen, so erkennen Sie, daß die Verlängerung des Balkens infolge des Eigengewichtes halb so groß ist, als beim Zug unter der Einwirkung einer am unteren Ende des Balkens angreifenden äußeren Kraft $P = G$.

Träger gleicher Festigkeit

Welche Form muß einem Träger gegeben werden, damit in jedem horizontalen Querschnitt die Spannung σ die gleiche ist, wenn der Träger durch eine an seinem oberen Ende angreifende Kraft P_0 und sein Eigengewicht auf Druck beansprucht wird (Bild 42). Die Wichte des Trägers sei γ .

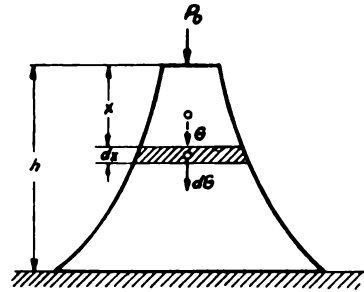


Bild 42

a) Ermittlung des oberen Querschnittes F_0

Zwischen der Kraft P_0 , dem oberen Querschnitt F_0 und der vorgegebenen Spannung σ muß die Ihnen aus der Festigkeitslehre bekannte Beziehung

$$\frac{P_0}{F_0} = \sigma \quad \text{oder} \quad F_0 = \frac{P_0}{\sigma}$$

bestehen.

β) Ermittlung des Querschnittes F im beliebigen Abstand x vom oberen Ende

Es soll zunächst die Kraft P bestimmt werden, die im Querschnitt F im beliebigen Abstand x vom oberen Ende wirkt. Ist G das Gewicht des Trägers oberhalb von F , so muß

$$P = P_0 + G$$

sein. Analog zur Fläche F_0 muß dann F so groß sein, daß die Bedingung

$$F = \frac{P}{\sigma} \quad \text{oder} \quad \sigma F = P_0 + G$$

erfüllt ist. Denken Sie sich nun den Schnitt um dx nach unten verlegt. Da die auf diesem neuen Querschnitt liegende Last gegenüber der Last auf dem alten Querschnitt um das Gewicht der dünnen Scheibe vergrößert ist, muß auch der neue Querschnitt größer sein. Ersetzen wir das Gewicht der konischen Scheibe durch das einer zylindrischen Scheibe mit dem Querschnitt F und der Dicke dx , also durch $dG = F \gamma dx$. Die dadurch bedingte Querschnittsvergrößerung sei dF . Es muß dann gelten

$$\begin{aligned} \sigma(F + dF) &= P_0 + dG, \\ \sigma F + \sigma dF &= P_0 + F \gamma dx \end{aligned}$$

Ziehen Sie davon die weiter oben für F gefundene Beziehung ab. Damit erhalten Sie die Differentialgleichung für den Träger

$$\sigma dF = F \gamma dx$$

Im Lehrbrief über Differentialgleichungen werden Sie lernen, daß man diese Art Gleichungen löst, indem man die beiden Veränderlichen (hier sind es F und x) auf je eine Seite der Gleichung bringt:

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$$

Da wir wissen wollen, welche Größe der Querschnitt an jeder beliebigen Stelle x haben muß, integrieren wir auf der rechten Seite von 0 bis x bzw. auf der linken Seite entsprechend von F_0 bis F

$$\int_{F_0}^F \frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} \int_0^x dx$$

$$\ln \frac{F}{F_0} = \frac{\gamma}{\sigma} x$$

Lösen Sie nach F auf und setzen Sie $F_0 = \frac{P_0}{\sigma}$ ein, so erhalten Sie als Ergebnis der gestellten Aufgabe

$$F = \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

Für den unteren Querschnitt erhalten Sie mit $x = h$ speziell

$$F_h = \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} h}$$

Sollen die Querschnitte des Trägers Kreisform haben, so muß

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} \quad \text{bzw.} \quad d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{P_0}{\sigma \pi}} e^{\frac{\gamma}{2\sigma} x}$$

sein.

Dabei gilt für den oberen Durchmesser

$$F_0 = \frac{d_0^2 \pi}{4} = \frac{P_0}{\sigma} \quad \text{oder} \quad d_0 = 2 \sqrt{\frac{P_0}{\sigma \pi}}$$

Zu diesem Ergebnis gelangen Sie auch, wenn Sie im oben berechneten Ausdruck für d die Bedingung $x = 0$ einsetzen.

Anschließend soll noch ein Beispiel aus der Physik behandelt werden.

Ausflußzeit von Flüssigkeiten bei veränderlicher Druckhöhe

Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäß mit dem konstanten Querschnitt F soll am Boden eine Ausflußöffnung mit der Größe f haben. Der Wasserspiegel

habe dabei anfänglich die Höhe h . Welche Zeit verstreicht, bis sich der Wasserspiegel auf die Höhe h_1 gesenkt hat (Bild 43)?

Nehmen Sie an, der Wasserspiegel sei schon auf die Höhe x abgesunken. Nach TORICELLI (vgl. Physik, Lbf. 4) ist dann die theoretische Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gx}$$

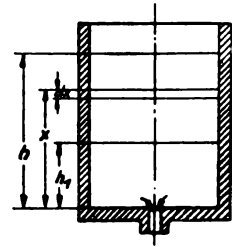


Bild 43

In Wirklichkeit liegt die Geschwindigkeit infolge der Reibung etwas niedriger. Sie kommen der wahren Geschwindigkeit nahe, wenn Sie v noch mit einem Faktor μ multiplizieren ($0 < \mu < 1$). Die Größe des Faktors μ ist u. a. von der Art der Flüssigkeit abhängig. Wir sehen also als wirkliche Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \mu \sqrt{2gx}$$

an.

Während einer kurzen Zeit dt können Sie die Geschwindigkeit v als konstant ansehen. Innerhalb dieser Zeit dt fließt die Wassermenge

$$dQ = f v dt = f \mu \sqrt{2gx} dt$$

aus der unteren Öffnung aus. Dabei senkt sich der Wasserspiegel im Gefäß um $-dx$, und damit nimmt die Flüssigkeit im Gefäß um

$$dQ = -F dx$$

ab. Das Minuszeichen soll ausdrücken, daß es sich um eine Verminderung handelt. Selbstverständlich müssen die auf verschiedene Weise ermittelten Werte von dQ gleich sein. Aus dieser Gleichheit ergibt sich die Differentialgleichung

$$f \mu \sqrt{2gx} dt = -F dx$$

oder nach Trennung der Veränderlichen x und t

$$dt = - \frac{F}{f \mu \sqrt{2g}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Zur nachfolgenden Integration legen Sie für die Wahl der Integrationsgrenzen fest:

$$\left. \begin{array}{l} \text{zur Zeit } t = 0 \quad \text{Füllhöhe: } x = h \\ \text{zur Zeit } t = t_1 \quad \text{Füllhöhe: } x = h_1 \end{array} \right\} h_1 < h$$

$$\int_0^{t_1} dt = - \frac{F}{f \mu \sqrt{2g}} \int_h^{h_1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Vertauschen Sie rechts die Grenzen (das bedeutet eine Vorzeichenänderung!):

$$\int_0^{t_1} dt = \frac{F}{f \mu \sqrt{2g}} \int_{h_1}^h x^{-\frac{1}{2}} dx$$

Sie erhalten

$$t_1 = \frac{2F}{f \mu \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})$$

Soll das Gefäß völlig leerlaufen, so brauchen Sie lediglich $h_1 = 0$ zu setzen und schon erhalten Sie

$$T = \frac{2F}{f \mu \sqrt{2g}} \sqrt{h}$$

Setzen Sie in diesen Ausdruck noch die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = \mu \sqrt{2g h}$ ein, so nimmt die rechte Seite die Form

$$T = \frac{2Fh}{f v_0}$$

an. Interessant ist hier ein Vergleich der Zeit t_1 , die zur Senkung des Flüssigkeitsspiegels auf die halbe Höhe (Halbwertszeit) und der Zeit t_2 , die von da ab bis zur völligen Entleerung benötigt wird.

$$t_1 = \frac{2F}{f \mu \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{h}{2}} \right)$$

und

$$t_2 = T - t_1 = \frac{2F}{f \mu \sqrt{2g}} \sqrt{\frac{h}{2}}$$

Bilden Sie den Quotienten beider Zeiten

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{\frac{h}{2}}}{\sqrt{\frac{h}{2}}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$$

$$\underline{t_1 \approx 0,4 t_2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{t_2 \approx 2,5 t_1}.$$

Das gefundene Ergebnis ist unabhängig von h . Die Zeit, die für die erste Hälfte der Entleerung gebraucht wird, ist noch nicht einmal halb so groß wie die Zeit, die für die zweite Hälfte benötigt wird. Dieser Sachverhalt war zu erwarten, denn für die zweite Hälfte sind ja die Ausflußgeschwindigkeiten und damit die

sekundlich ausfließenden Flüssigkeitsmengen kleiner als während der ersten Hälfte.

Auch die Entleerungszeit T läßt sich mit der aufgestellten Halbwertszeit in Beziehung setzen:

$$T = t_1 + t_2 \approx t_1 + 2,5 t_1$$

$$\underline{\underline{T \approx 3,5 t_1}}$$

Übungen

26. Der in Lehrbeispiel 34 behandelte Träger soll einen rechteckigen Querschnitt besitzen (Bild 44), dabei soll die Dicke b konstant bleiben. Wie ist in diesem Fall die halbe Breite in Abhängigkeit von x zu wählen?

27. Ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß habe die Form eines Kegelstumpfes (Trichter) mit dem oberen Radius R , dem unteren Radius r und der Höhe h . In welcher Zeit leert sich das Gefäß?

Anleitung: Denken Sie sich zunächst zur Bestimmung der Abhängigkeit des Querschnittes F vom Wasserstand x den Kegelstumpf zum vollständigen Kegel ausgezogen. Bezeichnen Sie die Höhe der angesetzten Spitze mit a , so daß die Gesamthöhe des Kegels gleich $a + h$ ist. Drücken Sie a durch R , r und h aus!

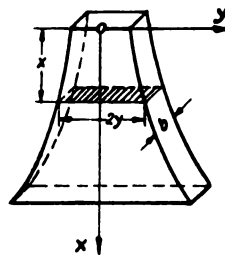


Bild 44

Zusammenfassung [6] bis [8]

In Abschnitt [6] und [7] lernten Sie die Verwendung der Integralrechnung zur Volumen- und Mantelberechnung von Körpern kennen. Die Verwendbarkeit des einfachen Integrals beschränkt sich dabei im wesentlichen auf Körper, die durch Rotation einer Fläche um eine Achse entstehen.

In Verbindung mit den Formeln zur Schwerpunktsberechnung konnten die beiden Regeln von GULDIN allgemein bewiesen werden.

Der Abschnitt [8] diente der Anwendung der Integralrechnung auf verschiedene physikalische und technische Probleme. Besonders wichtig ist die Berechnung der Arbeit bei veränderlicher Größe der Kraft mit Hilfe eines Integrals.

6. Kapitel: Erweiterung der Integralrechnung

[9] **Das Linienintegral.** Im Abschnitt [8] des vorigen Kapitels haben wir u. a. das bestimmte Integral zur Berechnung der Arbeit bei veränderlicher Kraft verwendet. Dabei waren Kraft und Weg längs der x -Achse gleichgerichtet. Erinnern Sie sich beispielsweise an das Beispiel „Ausdehnungsarbeit eines Gases“ in [8].

Dort lagen die Kolbenbewegung und die durch den Gasdruck hervorgerufene Kraft in einer Geraden, in einem eindimensionalen „Raum“.

Was wird nun aber, wenn Kraft und Weg nicht gleichgerichtet sind, und wenn zudem die Bewegung längs einer (zweidimensionalen) Kurve erfolgt?

Nehmen Sie an, daß jedem Punkt der xy -Ebene eine Kraft $S(x, y)$ mit den Komponenten $P(x, y)$ in der x -Richtung und $Q(x, y)$ in der y -Richtung zugeordnet sei, so daß $S^2 = P^2 + Q^2$ ist.

Diese Kraft soll mit ihren beiden Komponenten längs einer Kurve C wirken, die die beiden Punkte P_1 und P_2 miteinander verbindet. Denken Sie sich wiederum den Weg längs der Kurve C in kleine Schritte dx und dy jeweils parallel zu den Koordinatenachsen zerlegt, dann sehen Sie sofort ein, daß die Arbeit durch das Linienintegral (verschiedentlich auch Kurvenintegral genannt)

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad (26)$$

oder kurz

$$\int_C (P dx + Q dy)$$

dargestellt wird. Sie können sehr leicht erkennen, daß in diesem Linienintegral unser bisheriger Arbeitsbegriff enthalten ist. Wie schon gesagt, fand bei den Beispielen des Abschnittes [8] die Bewegung nur in einer Dimension, auf einer Geraden statt. Das bedeutet, daß die Veränderliche y nicht existiert und dementsprechend $dy = 0$ ist. Die Kurve C , der Integrationsweg, fällt mit der x -Achse zusammen. Damit reduziert sich hier das Linienintegral auf das einfache, bestimmte Integral

$$\int_a^b P(x) dx$$

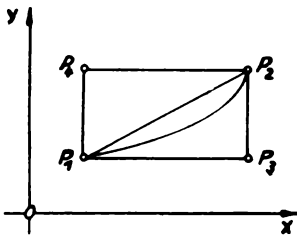


Bild 45

Die Anwendung des Linienintegrals beschränkt sich nicht nur auf die obengenannte Anwendung zur Ermittlung der mechanischen Arbeit. Die Anwendbarkeit erstreckt sich vielmehr auf die verschiedensten Gebiete, wie Wärmelehre, Elektrizitätslehre usw.

Wir wollen zunächst einmal an einem einfachen Beispiel die Auswertung des Linienintegrals kennenlernen.

Es sei $P = y$, $Q = x$. Das Integral soll von P_1 nach P_2 geführt werden. Aus den unendlich vielen Möglichkeiten, um von P_1 nach P_2 zu kommen, sollen die in Bild 45 angedeuteten Wege herausgewählt werden, und zwar

- a) von P_1 über P_3 nach P_2 ,
- b) von P_1 über P_4 nach P_2 ,
- c) von P_1 längs der Diagonalen nach P_2 ,
- d) von P_1 längs der Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ nach P_2 .

Wir wollen jetzt den Wert des Integrals über diese verschiedenen Wege ermitteln.

Weg a)

Wir unterteilen den Weg zunächst in die beiden Teile P_1P_3 und $\overline{P_3P_2}$. Dabei ist $y_3 = y_1$ und $x_3 = x_2$.

Für $\overline{P_1P_3}$ ist $y = y_1 = \text{konstant}$ und demnach $dy = 0$. Dann ist aber auch $P = y = y_1 = \text{konstant}$, so daß damit das Linienintegral die Form

$$\int_{x_1}^{x_2=y_1} y_1 dx = y_1 x \Big|_{x_1}^{x_2} = y_1(x_2 - x_1)$$

annimmt.

Für $\overline{P_3P_2}$ ist nun aber, da der Weg parallel zur y -Achse verläuft, $x = x_3 = x_2 = \text{konstant}$ und $dx = 0$. Für diese Teilstrecke vereinfacht sich damit das Linienintegral zu

$$\int_{y_1}^{y_2} a dy = a y \Big|_{y_1}^{y_2} = a(y_2 - y_1)$$

Fassen wir beides zusammen:

$$\begin{aligned} \int_{P_1, \overline{P_3P_2}} (P dx + Q dy) &= \int_{P_1, P_3} (P dx + Q dy) + \int_{P_3, P_2} (P dx + Q dy) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx + \int_{y_1}^{y_2} a dy \\ &= y_1(x_2 - x_1) + a(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Weg b)

Hier können wir wieder in die zwei Teilwege $\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_4P_2}$ zerlegen. Teilweg $\overline{P_1P_4}$: $x = x_1 = x_4 = \text{konstant}$, also $dx = 0$

$$\int_{y_1}^{y_4=y_2} a dy = a(y_2 - y_1)$$

Teilweg $\overline{P_4P_2}$: $y = y_4 = y_2 = \text{konstant}$, also $dy = 0$

$$\int_{x_4=x_1}^{x_2} y_2 dx = y_2(x_2 - x_1)$$

Zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \int_{P_1P_4P_2} (P dx + Q dy) &= \int_{P_1P_4} (P dx + Q dy) + \int_{P_4P_2} (P dx + Q dy) \\ &= \int_{y_1}^{y_2} a dy + \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx \\ &= a(y_2 - y_1) + y_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Weg c)

Der Integrationsweg ist hier eine Gerade, deren Gleichung Sie mit Hilfe der Zweipunktgleichung aufstellen können.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

Es ändern sich längs dieses Weges sowohl x als auch y gleichzeitig. Zwischen dx und dy besteht die Beziehung

$$dy = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} dx \quad \text{oder} \quad dx = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} dy$$

die Sie durch Differentiation der Geradengleichung gewinnen. Betrachten wir nun wieder das Linienintegral selbst.

$$\int_{P_1P_2} (P dx + Q dy) = \int_{P_1P_2} (y dx + a dy) = \int_{x_1}^{x_2} y dx + \int_{y_1}^{y_2} a dy$$

Entweder drücken Sie nun im ersten Integral der rechten Seite y durch x oder dx durch dy bei entsprechender Umrechnung der Grenzen aus. Die zweite Möglichkeit ist hier einfacher. Für $x = x_1$ ergibt sich $y = y_1$ und entsprechend für $x = x_2$ der Wert $y = y_2$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{P_1P_2} (P dx + Q dy) &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} y dy + a \int_{y_1}^{y_2} dy \\ &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} + a(y_2 - y_1) \\ &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (y_2 + y_1) + a(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Prüfen Sie selbst die andere Möglichkeit nach, Sie müssen zum gleichen Ergebnis kommen.

Weg d)

Nehmen Sie an, die stetige Kurve, die in der Parameterdarstellung durch die differenzierbaren Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben ist, würde ebenfalls die beiden Punkte P_1 und P_2 verbinden. Für $t = t_1$ sollen dabei x und y die Werte $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ und für $t = t_2$ die Werte $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$ annehmen, so daß für alle Werte t im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ die Kurve durchlaufen wird.

In diesem Fall gestaltet sich die Lösung des Linienintegrals mit

$$dx = \dot{x}(t) dt \quad \text{und} \quad dy = \dot{y}(t) dt$$

in der Form

$$\int_{P_1 P_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)] \dot{x}(t) + Q[x(t), y(t)] \dot{y}(t)\} dt$$

(26 a)

Das heißt, daß Sie einfach das rechts stehende gewöhnliche, bestimmte Integral mit der Integrationsveränderlichen t zu lösen haben.

Wie Sie bei den durchgerechneten Fällen schon gemerkt haben, ist der Wert des Linienintegrals außer von der Lage des Anfangs- und Endpunktes noch vom Weg abhängig.

Lehrbeispiel 30

Es sei $P(x, y) = x + y$ und $Q(x, y) = xy$. Das Linienintegral ist über die Kurve $x = 2t$, $y = 4t$ von $P_1(0,0)$ bis $P_2(2,4)$ zu erstrecken.

Lösung:

Bestimmung der Parameterwerte für die beiden Punkte P_1 und P_2 :

$$P_1(0,0) : t_1 = 0 \quad P_2(2,4) : t_2 = 1$$

Mit $x = 2t$, $y = 4t$ und hieraus folgend $dx = 2 dt$, $dy = 4 dt$ gestaltet sich das Linienintegral nach Formel (26 a) zu

$$\int_{P_1 P_2} [(x + y) dx + xy dy] = \int_0^1 (12t + 32t^2) dt = \frac{50}{3}$$

Sehen Sie sich einmal den durch die Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegebenen Integrationsweg näher an. Eliminieren Sie den Parameter t , dann kommen Sie zur expliziten Funktion $y = 2x$.

Diese Funktion stellt nichts anderes als die Verbindungsgerade der Punkte P_1 und P_2 dar. Dieselbe Gerade können Sie auch durch die Parameterdarstellung $x = t$, $y = 2t$ kennzeichnen, allerdings muß dann dieser Parameter t das Intervall

$0 < t < 2$ durchlaufen. Führen Sie mit dieser neuen Parameterdarstellung oder auch mit der expliziten Funktion derselben Geraden noch einmal die Rechnung durch, so werden Sie wieder zum gleichen Ergebnis kommen.

Allgemein läßt sich der Satz beweisen:

Der Wert eines Linienintegrals ist unabhängig von der Lage des Koordinatensystems und der Art der Parameterdarstellung der Kurve.

Wir wollen hier den verhältnismäßig einfachen Beweis nicht durchführen, wie überhaupt auch im folgenden teilweise auf eine streng mathematische Beweisführung verzichtet werden soll.

Ohne weiteres ist auch der Satz zu verstehen, den Sie schon in ähnlicher Fassung bei den einfachen Integralen kennengelernt haben:

Wird der Integrationsweg in umgekehrter Richtung durchlaufen, so ändert der Wert des Linienintegrals nur sein Vorzeichen:

$$\int_{P_1 P_2} (P dx + Q dy) = - \int_{P_2 P_1} (P dx + Q dy) \quad (27)$$

Zum Beweis brauchen Sie lediglich auf die Darstellung des Linienintegrals als gewöhnliches Integral in (26a) zurückzugehen. Die Umkehrung des Durchlaufungssinns bewirkt hier lediglich die Vertauschung der Integrationsgrenzen t_1 und t_2 .

Integration längs einer geschlossenen Kurve

Bei gegebenem $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ können Sie zunächst wie im anfänglichen Beispiel den Wert des Linienintegrals über den Integrationsweg C_1 von P_1 über P_3 nach P_2

$$\int_{C_1} (P dx + Q dy)$$

und zum anderen über die Kurve C_2 von P_1 über P_4 ebenfalls nach P_2

$$\int_{C_2} (P dx + Q dy)$$

berechnen (Bild 46).

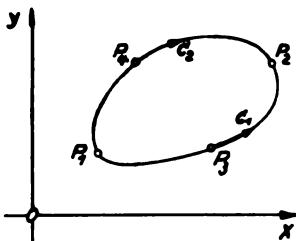


Bild 46

Kehren Sie nun für das zweite Integral den Durchlaufungssinn um, erstrecken Sie also das Linienintegral über die Kurve $P_2 P_4 P_1$.

Wir wollen dieses umgekehrte Durchlaufen von C_2 durch $-C_2$ kennzeichnen. Auf Grund des zuletzt

angeführten Satzes ist dann

$$\int_{-C_2} (P dx + Q dy) = - \int_{C_2} (P dx + Q dy)$$

Das Linienintegral über die geschlossene Kurve C , zusammengesetzt aus den Kurven C_1 und $-C_2$ von P_1 über P_3, P_2, P_4 nach P_1 zurück, ist danach gleich der Differenz der Linienintegrale, erstreckt über die beiden Integrationswege C_1 und C_2 von P_1 nach P_2 .

$$\begin{aligned} \int_C (P dx + Q dy) &= \int_{C_1} (P dx + Q dy) + \int_{-C_2} (P dx + Q dy) \\ &= \int_{C_1} (P dx + Q dy) - \int_{C_2} (P dx + Q dy) \end{aligned}$$

Derartige Linienintegrale über geschlossene Kurven, bei denen das Innere zur Linken liegt, wenn der Integrationsweg durchlaufen wird, werden allgemein durch \oint gekennzeichnet.

Sie haben, ohne daß Sie es wußten, schon mit solchen Linienintegralen gerechnet. Es sei $P = -y$ und $Q = +x$, während die geschlossene Kurve durch die Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben ist. Das Linienintegral

$$\oint (P dx + Q dy) = \int_{y_1}^{y_2} (\dot{y} x - y \dot{x}) dt$$

ist dann nichts anderes als der doppelte Inhalt der Fläche, die von der Kurve eingeschlossen wird. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit Formel (34a) in Lbf. IV/4, [12].

Integration über ein vollständiges Differential

Im ersten Beispiel hatten wir festgestellt, daß der Wert des Linienintegrals unter anderem auch von der Wahl des Integrationsweges abhängt. Diese Vermutung wird noch gefestigt durch den zuletzt angeführten Hinweis auf die Verwendbarkeit des Linienintegrals zur Bestimmung von Flächeninhalten.

Sind jedoch die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ die partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion $F(x, y)$, dann ist der Wert des Linienintegrals von der Wahl des Integrationsweges unabhängig, oder — was dasselbe besagt — der Wert des Linienintegrals über eine geschlossene Kurve ist Null.

Nach Voraussetzung ist also in diesem Fall

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{und} \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

und damit der Integrand des Linienintegrals

$$P dx + Q dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Die rechts stehende Summe ist aber das totale Differential der Funktion $F(x, y)$, so daß Sie schreiben können

$$P dx + Q dy = dF(x, y)$$

Wenn P und Q aber die partiellen Ableitungen von F sein sollen, dann müssen sie mit ihren Ableitungen nach y bzw. x dem *Satz von Schwarz*

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y \partial x}$$

genügen, es muß also

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sein.

Fassen wir zunächst den Sachverhalt noch einmal in einem Satz zusammen:

Sind $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ die partiellen Ableitungen einer Funktion $F(x, y)$ und erfüllen sie demnach die Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

so ist $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dF(x, y)$ das totale Differential der Funktion $F(x, y)$. In diesem Fall ist der Wert des Linienintegrals von der Wahl des Integrationsweges unabhängig und hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Für einen geschlossenen Integrationsweg nimmt das Linienintegral den Wert Null an.

Der Beweis läßt sich leicht führen durch

$$\begin{aligned} \int_{P_1 P_2} (P dx + Q dy) &= \int_{P_1 P_2} dF(x, y) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dF[x(t), y(t)] \end{aligned}$$

Dieses Integral kann gelöst werden, ohne daß Näheres über den durch die Funktion $x = x(t)$, $y = y(t)$ beschriebenen Integrationsweg bekannt ist. Es wird

$$\begin{aligned} \int_{P_1 P_2} (P dx + Q dy) &= F[x(t), y(t)] \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= F[x(t_2), y(t_2)] - F[x(t_1), y(t_1)] \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage über den Wert des Linienintegrals bei geschlossenem Integrationsweg läßt sich mit Hilfe der Erkenntnisse beweisen, die in diesem Abschnitt für die Integration längs einer geschlossenen Kurve hergeleitet wurden. Es war

$$\oint (P dx + Q dy) = \int_{c_1}^j (P dx + Q dy) - \int_{c_2}^j (P dx + Q dy)$$

Da nun aber

$$\int_{c_1}^j (P dx + Q dy) = \int_{c_2}^j (P dx + Q dy)$$

ist, wird

$$\oint (P dx + Q dy) = 0$$

Lehrbeispiel 31

Berechnen Sie $\int_{P_1, P_2} (P dx + Q dy)$, wenn $P = y$ und $Q = x$ sowie der Anfangspunkt $P_1(x_1; y_1)$ und der Endpunkt $P_2(x_2; y_2)$ gegeben sind!

Lösung:

Die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist mit $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ erfüllt. Wie Sie erkennen können, sind P und Q die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y) = xy$,

$$\int_{P_1, P_2} (y dx + x dy) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} d(xy) = \underline{\underline{x_2 y_2 - x_1 y_1}}$$

Das Integral konnte ohne Angabe eines besonderen Weges gelöst werden, d. h., der Wert ist unabhängig vom Integrationsweg.

Der obenstehende Satz über den Wert des Linienintegrals bei geschlossenem Integrationsweg läßt sich auch umkehren:

Ist $\oint (P dx + Q dy) = 0$, so muß $P dx + Q dy$ ein vollständiges Differential einer Funktion $F(x, y)$ sein. $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ sind dann die partiellen Ableitungen dieser Funktion $F(x, y)$ und erfüllen die Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Wir wollen auch hier auf den Beweis verzichten.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß P und Q die partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ seien und demzufolge die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ erfüllen. Es erhebt sich die Frage, ob dieser Satz auch umgekehrt gilt, d. h. ob die Erfüllung der so-

genannten Integrabilitätsbedingung die Schlußfolgerung zuläßt, daß dann P und Q als partielle Ableitungen einer Funktion F angesehen werden können. Die Umkehrung des Satzes ist zulässig; den Beweis dafür wollen wir hier nicht mit aufnehmen. Sie finden in jedem ausführlicheren Lehrbuch die Beweisführung in verständlicher Form.

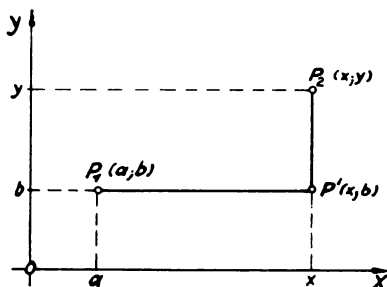


Bild 47

Wir wollen hier aber noch zeigen, wie man verfahren muß, um aus einem totalen Differential die ursprüngliche Funktion, die Stammfunktion, zurückzugewinnen. Wie bei den gewöhnlichen Integralen ist das wiederum nur bis auf eine additive Konstante möglich.

Das Linienintegral $\int (P dx + Q dy)$ soll über den in Bild 47 dargestellten Weg von $P_1(a; b)$ über $P'(x; b)$ nach $P_2(x; y)$ erstreckt werden.

Für den ersten Teilweg P_1P' ist $y = b$ und $dy = 0$.

Für den zweiten Teilweg ist dagegen x konstant und damit $dx = 0$.

$$\int_{P_1P} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_a^x P(x, b) dx + \int_b^y Q(x, y) dy$$

Bei veränderlichem Endpunkt ist das Linienintegral damit eine Funktion der Koordinaten x und y des Endpunktes, und das ist die **Stammfunktion** $F(x, y)$, deren **totales Differential** gegeben ist.

$$F(x, y) = \int_a^x P(x, b) dx + \int_b^y Q(x, y) dy \quad (28)$$

Lehrbeispiel 32

Die partiellen Ableitungen einer Funktion $F(x, y)$ sind

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = 2xy^2 - 2y - 3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = 2x^2y + 2y - 2x$$

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x, y)$!

Lösung:

Prüfen Sie zunächst die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung nach

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - 2$$

Die Bedingung ist erfüllt. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_a^x (2b^2x - 2b - 3) dx + \int_b^y (2x^2y + 2y - 2x) dy \\
 &= (b^2x^2 - 2bx - 3x) \Big|_a^x + (x^2y^2 + y^2 - 2xy) \Big|_b^y \\
 &= b^2x^2 - 2bx - 3x - b^2a^2 + 2ba + 3a + x^2y^2 + y^2 - 2xy \\
 &\quad - x^2b^2 - b^2 + 2xb \\
 F(x, y) &= \underline{\underline{x^2y^2 + y^2 - 2xy - 3x + C}}
 \end{aligned}$$

Im Endergebnis sind alle Glieder, die nur die willkürlich gewählten Konstanten a und b (die Koordinaten des Anfangspunktes P_1) enthalten, zur willkürlichen Integrationskonstanten C zusammengefaßt.

In den Anwendungen stellt sich heraus, daß $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ manchmal erst durch Multiplikation mit einem ebenfalls von x und y abhängenden Faktor $M(x, y)$ zu partiellen Ableitungen einer Funktion $F(x, y)$ werden. Man nennt diese Funktion $M(x, y)$ den *integrierenden Faktor*. Wir wollen uns hier nicht weiter damit beschäftigen. Sie werden an gegebener Stelle in den Lehrbriefen der speziellen Fachwissenschaften darauf hingewiesen werden.

Anfänglich haben Sie das Linienintegral in seiner Anwendbarkeit zur Berechnung der Arbeit kennengelernt. Sind bei dieser Anwendung $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ als Komponenten des Kraftfeldes die partiellen Ableitungen von $F(x, y)$, dann nennt man diese Funktion $F(x, y)$ das *Potential* der Kraft. Die verrichtete Arbeit ist in diesem Fall gleich der Potentialdifferenz $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$, wobei $x_1; y_1$ die Koordinaten des Anfangspunktes und $x_2; y_2$ die des Endpunktes der Bewegung sind.

Lehrbeispiel 39

Berechnen Sie das Potential einer Kraft, die in jedem Punkt der Ebene wirkt, zum Ursprung des Koordinatensystems gerichtet und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes r vom Ursprung ist.

Dieser Fall liegt beispielsweise im Gravitationsfeld der Erde (Newtonsches Gravitationsgesetz) und bei der Anziehung magnetischer Pole oder elektrischer Ladungen vor (Coulombsches Gesetz).

Lösung:

Setzen Sie den Proportionalitätsfaktor gleich k , so gilt für die Kraft S

$$S = -\frac{k}{r^2}$$

Das Minuszeichen besagt, daß die Kraft zum Ursprung hin, also in Richtung abnehmender Werte r gerichtet ist.

Aus Bild 48 folgt mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$P = S \cos \varphi$$

$$= - \frac{k}{r^2} x$$

$$= - k \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$Q = S \sin \varphi$$

$$= - \frac{k}{r^2} \frac{y}{r}$$

$$= - k \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

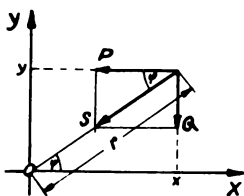


Bild 48

Überzeugen Sie sich, daß die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3k \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$$

erfüllt ist.

Nach Formel (28) ist dann, wenn $P_1(x_1; y_1)$ der Anfangs- und $P(x; y)$ der Endpunkt der Bewegung ist

$$F(x, y) = - k \int_{x_1}^x \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y_1^2)^3}} dx - k \int_{y_1}^y \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy$$

Bedenken Sie, daß im rechten Integral x konstant ist. Die beiden Integrale können Sie leicht mit Hilfe der Substitution

$$u = x^2 + y_1^2 \quad \text{bzw.} \quad v = x^2 + y^2$$

und

$$du = 2x dx \quad dv = 2y dy$$

lösen.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{k}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} \Big|_{x_1}^x + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y_1}^y \\ &= \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{k}{r} + C \end{aligned}$$

Es ist allgemein üblich, den Ausdruck $\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{r}$ als Potential dieser Kraft zu bezeichnen. Wird der Anfangspunkt $P_1(x_1; y_1)$ immer weiter vom Ursprung entfernt gewählt, so wird $C = - \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ immer kleiner und verschwindet

schließlich für einen unendlich fernen Anfangspunkt. Sie können daher für ein derartiges Kraftfeld sagen: Das Potential ist die Arbeit, die längs eines beliebigen Weges von einem unendlich fernen Punkt bis zu dem betreffenden Endpunkt aufgewendet werden muß.

Zwischen den Punkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ besteht dann die Potentialdifferenz

$$A = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) = \frac{k}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} - \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = k \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Liegen die Punkte in gleicher Entfernung vom Ursprung ($r_1 = r_2$), so ist $A = 0$. Es haben alle Punkte auf einem Kreis um den Ursprung dasselbe Potential. Man nennt deshalb im vorliegenden Fall den Kreis eine Äquipotentiallinie.

Linienintegrale im Raum.

Sie können, ohne dabei besondere neue Überlegungen anzustellen, das Linienintegral auf die drei Dimensionen des Raumes ausdehnen. Das räumliche Linienintegral hat dann die Form

$$\int_C [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz]$$

und ist über eine räumliche Kurve C in der Parameterdarstellung

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

zu erstrecken. Alle bisher aufgestellten Sätze gelten hierfür sinngemäß.

Zusammenfassung [9]

Im Abschnitt [9] wurden Sie mit einer ersten Erweiterung der Integralrechnung, der Einführung des Linienintegrals, vertraut gemacht. Dieses Integral ist im zweidimensionalen Bereich bei gegebenen Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ über eine ebenfalls vorgegebene Kurve zu erstrecken. Im allgemeinen Fall ist der Wert des Integrals vom Integrationsweg sowie von der Lage des Anfangs- und des Endpunktes der Integration abhängig. Die Integration über eine geschlossene Kurve wird durch das Integralzeichen \oint gekennzeichnet. Sind speziell P und Q die Ableitungen einer Funktion $F(x, y)$ (Potential), dann ist das Linienintegral vom Weg unabhängig, während die Integration über eine geschlossene Kurve den Wert Null ergibt.

Anwendung finden die Linienintegrale beispielsweise zur Berechnung der Arbeit.

Übungen

28. Es sei $P(x, y) = x - y$ und $Q(x, y) = x$. Welchen Wert nimmt das Linienintegral an, wenn die Punkte $P_1(0; 0)$ und $P_2(1; 1)$ verbunden werden durch
- die Verbindungsgerade der beiden Punkte,
 - die Parabel $x = t^2$, $y = t$ ($y^2 = x$) und
 - die Sinuslinie $y = \sin \frac{\pi}{2} x$.
29. Prüfen Sie, ob das Linienintegral mit $P(x, y) = 4x(x + y)$ und $Q(x, y) = 2(x^2 + 2y^2)$ vom Wege abhängig ist. Berechnen Sie das Linienintegral vom Punkt $(0; 0)$ bis zum Punkt $(2; 1)$ längs eines beliebigen von Ihnen zu wählenden Weges.

Anleitung: Im Integrand des rechten Integrals muß für das konstante x der Wert 2 eingesetzt werden. Sehen Sie sich hierzu noch einmal Bild 47 an.

[10] **Mehrfache Integrale.** Im Abschnitt [9] haben Sie bereits eine erste Erweiterung des Integralbegriffes, das Linienintegral, kennengelernt. Jetzt soll nun die Integration in einer anderen Weise ausgedehnt werden; Sie sollen die mehrfachen Integrale studieren. Wir wollen uns zunächst ein Problem stellen, dessen

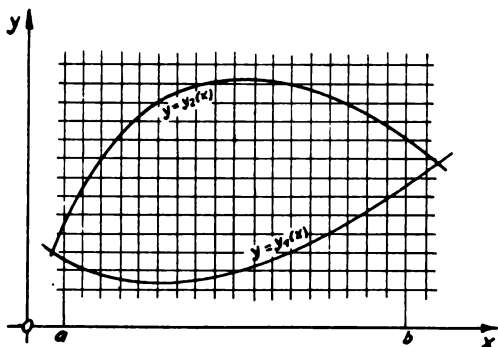


Bild 49

Lösung unmittelbar mit den bisher vermittelten Kenntnissen nachgeprüft werden kann.

Im Bild 49 ist eine Fläche dargestellt, die von den Kurven $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ begrenzt wird. Aufgabe ist es, den Flächeninhalt zu berechnen.

Bedecken Sie die Fläche mit einem Netz von Geraden $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ (etwa durch Auflegen von transparentem Milli-

meterpapier), so kommen Sie zu einem angenäherten Ergebnis, wenn Sie die Anzahl der innerhalb der Fläche gelegenen Felder ermitteln. Lassen Sie dabei die angeschnittenen Quadrate fort, so wird der ermittelte Flächeninhalt zu klein ausfallen, zählen Sie diese dagegen mit, dann erhalten Sie einen zu großen Flächeninhalt. Der wahre Inhalt wird demnach zwischen diesen beiden Annäherungen liegen. Weiterhin wird die Annäherung um so genauer sein, je feiner das Netz gewählt wird, denn dann wird beispielsweise die Summe der bei der einen Rechnung nicht mit erfaßten Flächenteile der angeschnittenen Quadrate immer kleiner werden. Gleichfalls wird das Zuviel bei der anderen Annäherung immer kleiner werden. Sie erkennen sicher schon die Analogie zu den Ausführungen im Abschnitt [5] des Lehrbriefes IV/4.

Der Abstand der parallelen Netzlinien sei Δx bzw. Δy , dann hat ein Feld den Flächeninhalt $\Delta x \Delta y$.

Wir wollen nun den Inhalt eines Netzstreifens parallel zur y -Achse berechnen. Dazu geben wir x einen festen Wert x_i zwischen a und b . Der Inhalt des Streifens wird dann angenähert durch

$$\Sigma \Delta x \cdot \Delta y = \Delta x \Sigma \Delta y,$$

wobei die Summe über die zu dem gewählten x_i gehörenden, übereinanderliegenden Δy zwischen $y_1(x_i)$ und $y_2(x_i)$ zu erstrecken ist. Je nach dem gewählten x_i werden also mehr oder weniger Δy dazu gehören.

Die Fläche selbst besteht doch nun aus einer Summe derartiger Streifen. Sie erhalten also die Annäherung des Inhaltes mit

$$F \approx \Sigma \Sigma \Delta x \Delta y = \Sigma \Delta x (\Sigma \Delta y).$$

Die äußere Summe erstreckt sich über alle Streifen zwischen $x = a$ und $x = b$.
 Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt bis zum wahren Flächeninhalt. Nach
 den vorher angestellten Überlegungen ist

(29)

$$F = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \iint_{\tilde{F}} dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right)$$

Dabei stellt das ganz rechts stehende **Doppelintegral** die praktische Arbeitsanweisung für die Auswertung des symbolisch geschriebenen Doppelintegrals $\iint_{\tilde{F}} dx dy$ dar. Es ist also der bisher mit $f(x)$ bezeichnete Integrand des gewöhnlichen Integrals schon ein Integral, das zunächst einmal gelöst werden muß, ehe Sie mit der zweiten Integration einsetzen können. Auseinandergelogen sieht das so aus

$$F = \int_a^b f(x) dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$$

Die Auswertung des inneren Integrals ergibt

$$f(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = y_2(x) - y_1(x),$$

und damit ist

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx \\ &= \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx \end{aligned}$$

An dieser Auswertung erkennen Sie die Richtigkeit unserer bisherigen Überlegungen. Die Fläche erscheint damit als Differenz der Flächen „unter“ der Kurve $y = y_2(x)$ und der Kurve $y = y_1(x)$.

Ist speziell $y_2(x) = 0$ (x -Achse) und $y_1(x) = f(x)$, so erhalten Sie mit

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

das Ihnen bekannte gewöhnliche Integral.

Lehrbeispiel 34

Welchen Inhalt hat die im I. Quadranten liegende Fläche, die von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$ eingeschlossen wird?

Lösung:

Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind $(0; 0)$ und $(1; 1)$.

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x dx dy = \int_{x=0}^1 dx \left(\int_{y=x^2}^x dy \right) & \int_{y=x^2}^x dy = y \Big|_{x^2}^x = x - x^2 \\
 &= \int_{x=0}^1 dx (x - x^2) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

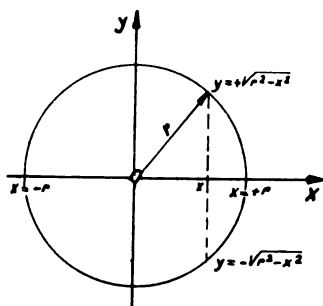


Bild 50

$$F = \frac{1}{6}$$

Lehrbeispiel 35

Welchen Inhalt hat die Kreisfläche mit dem Radius r ?

Lösung:

Betrachten Sie zur Festlegung der Grenzen Bild 50!

$$F = \int_{x=-r}^{+r} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dx dy$$

Infolge der Symmetrie können Sie dafür schreiben

$$\begin{aligned}
 F &= 4 \int_{x=0}^{+r} dx \left(\int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) & \int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \sqrt{r^2-x^2} \\
 &= 4 \int_{x=0}^{+r} \sqrt{r^2-x^2} dx = 4 \left[\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2-x^2} \right] \Big|_0^r
 \end{aligned}$$

$$F = r^2 \pi$$

Im Fall, daß die Grenzen für beide Integrale konstant sind, ist es gleichgültig, ob Sie zuerst nach y und dann nach x integrieren oder umgekehrt. Dies ist im folgenden Lehrbeispiel der Fall.

Lehrbeispiel 36

Der Inhalt des in Bild 51 dargestellten Rechtecks ist durch ein Doppelintegral zu berechnen.

Lösung:

Es ist

$$F = \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx dy$$

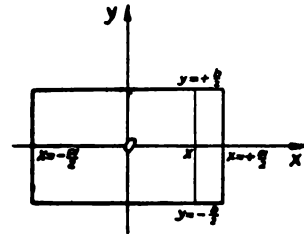


Bild 51

Da die Grenzen der Veränderlichen x nicht von y abhängen und die der Veränderlichen y nicht von x , können Sie entweder zuerst die Integration über dy ausführen oder zuerst die über dx .

$$F = 4 \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx \left(\int_{y=0}^{\frac{b}{2}} dy \right)$$

$$F = 4 \int_{y=0}^{\frac{b}{2}} dy \left(\int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx \right)$$

$$= 4 \frac{b}{2} \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx$$

$$= 4 \frac{a}{2} \int_{y=0}^{\frac{b}{2}} dy$$

$$\underline{\underline{F = ab}}$$

$$\underline{\underline{F = ab}}$$

Sind die Begrenzungskurven der Fläche in der Form $x = x_1(y)$ und $x = x_2(y)$ gegeben, so führen vollkommen gleiche Überlegungen zu

$$F = \int_{y=\alpha}^{\beta} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} dx dy = \int_{y=\alpha}^{\beta} dy \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} dx \right)$$

Merksatz:

Bei der Auflösung mehrfacher Integrale ist zunächst über die Veränderliche zu integrieren, in deren Grenzen die andere Integrationsveränderliche mit vorkommt. Bei konstanten Grenzen ist die Reihenfolge der Integrationen beliebig.

Wir wollen nun die Doppelintegrale noch erweitern. Es sei $z = z(x, y)$ eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y . Sie können dann ohne weiteres einsehen, daß

$$F = \int \int_F z(x, y) dx dy \quad (30)$$

nichts anderes als das Volumen des Körpers, der durch die Fläche $z = z(x, y)$, dem Zylindermantel und der Grundfläche F in der xy -Ebene begrenzt wird (Bild 52). Den Integranden bezeichnet man allgemein als Volumenelement $dV = z(x, y) dx dy$.

In Bild 52 erkennen Sie die Zweckmäßigkeit dieser Bezeichnung, stellt doch dV nichts anderes als das Volumen der Säule über dem Flächenelement $dF = dx dy$ mit der (mittleren) Höhe $z = z(x, y)$ dar, wobei der Fußpunkt $(x; y)$ dieser mitt-

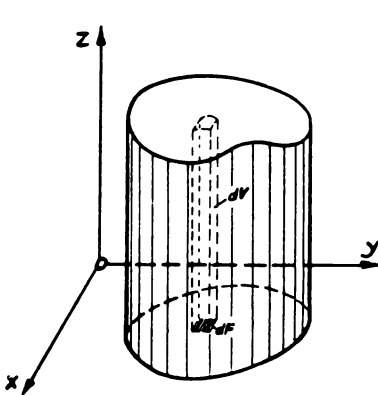


Bild 52

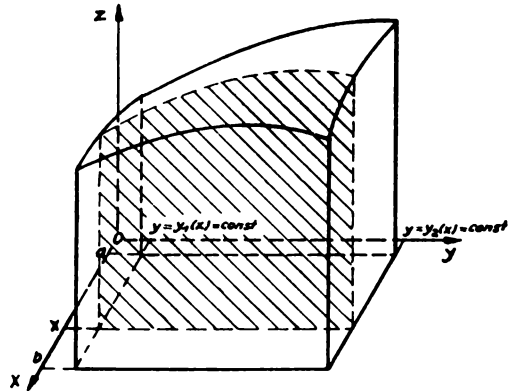


Bild 53

leren Höhe innerhalb dF liegt. Zur Auswertung eines derartigen Integrals müssen wir uns noch kurz einige Gedanken machen. Nehmen Sie an, die Grundfläche werde durch die Funktionen $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ begrenzt. Die x -Werte sollen von a bis b variieren. Dann ist

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dx dy = \int_{x=a}^b dx \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dy \right)$$

Das innere Integral stellt bei festgehaltenem x nichts anderes als den Inhalt einer zur yz -Ebene parallelen Querschnittsfläche Q dar (in Bild 53 schraffiert gezeichnet). Wir ziehen daraus für die Auswertung des inneren Integrals

$$\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dy = Q(x)$$

die Folgerung, daß bei der Integration x als Konstante anzusehen und nur über die Veränderliche y zu integrieren ist. Nach Durchführung sind dann für y die Grenzen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in der bekannten Weise einzusetzen. Damit ergibt diese

erste Teilintegration eine Funktion von x . Wir wollen sie, da sie als Querschnitt aufgefaßt werden kann, mit $Q(x)$ bezeichnen. Das Volumen ist dann

$$V = \int_{x=a}^b Q(x) dx$$

Sie erkennen die im Abschnitt [6] aufgestellte Formel (20b).

Lehrbeispiel 37

Bestimmen Sie das Volumen zwischen der im I. Quadranten liegenden Viertelkreisfläche des Kreises mit dem Radius $r = 1$ und dem darüberliegenden Stück der Sattelfläche $z = xy$ (die Grundfläche ist in Bild 54 dargestellt).

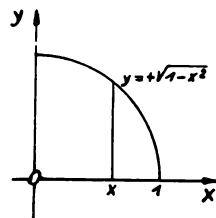


Bild 54

Lösung:

Sie können aus Bild 54 für die Grenzen ablesen:

Bei festgehaltenem x muß y zwischen 0 und $\sqrt{1-x^2}$ laufen, x selbst ist dann von 0 bis 1 zu erstrecken.

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) \end{aligned}$$

Den bei der Berechnung des inneren Integrals als konstant zu betrachtenden Faktor x können Sie vor das innere Integral setzen.

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^1 x \, dx \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) \quad \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} (1-x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (1-x^2) x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (x - x^3) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ \underline{\underline{V}} &= \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 38

Wie groß ist der Inhalt einer Halbkugel mit dem Radius r ?

Lösung:

Funktionsgleichung der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Halbkugel: $z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$$V = \int_{x=-r}^{+r} dx \left(\int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy \right)$$

$$= 4 \int_{x=0}^r dx \left(\int_{y=0}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy \right)$$

Inneres Integral:

$$\int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy$$

Setzen Sie zur Abkürzung für das konstante Glied $r^2 - x^2 = a^2$

$$= \int_{y=0}^a \sqrt{a^2-y^2} dy$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} + \frac{y}{2} \sqrt{a^2-y^2} \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \frac{a^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (r^2 - x^2)$$

$$V = \pi \int_{x=0}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Selbstverständlich können Sie die zweifachen Integrale in verschiedenen Anwendungen gebrauchen. So können sie beispielsweise zur Berechnung von Schwerpunkten oder Trägheitsmomenten herangezogen werden.

Wie schon angedeutet, stellen die Formeln (13) und (16) schon Doppelintegrale dar. Wir können jetzt beispielsweise die Formeln (13) für die statischen Momente in der Form

$$T_x = \iint_{\bar{F}} y dx dy \quad \text{und} \quad T_y = \iint_{\bar{F}} x dx dy$$

schreiben.

Bei den Trägheitsmomenten ist entsprechend x^2 bzw. y^2 einzusetzen.

Lehrbeispiel 39

Berechnen Sie den Schwerpunkt der im Lehrbeispiel 34 berechneten Fläche zwischen den Kurven $y = x$ und $y = x^2$.

Lösung:

$$T_x = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x y \, dx \, dy = \int_{x=0}^1 dx \left(\int_{y=x^2}^x y \, dy \right) \quad \int_{y=x^2}^x y \, dy = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$T_x = \frac{1}{15}$$

$$T_y = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x x \, dx \, dy = \int_{x=0}^1 x \, dx \left(\int_{y=x^2}^x dy \right)$$

$$= \int_{x=0}^1 (x^2 - x^3) \, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$T_y = \frac{1}{12}$$

Nach Lehrbeispiel 34 ist $F = \frac{1}{6}$ und damit

$$x_s = \frac{T_y}{F} = \frac{1}{2} \qquad y_s = \frac{T_x}{F} = \frac{2}{5}$$

Bei der Aufstellung der Formel (19a) wurde stillschweigend eine zweifache Integration durchgeführt, indem wir das vorher durch Integration berechnete Trägheitsmoment eines Rechtecks mit verwendeten. Mit Doppelintegralen nimmt die Rechnung folgende Form an:

$$dJ_x = y^2 \, dF = y^2 \, dx \, dy$$

$$J_x = \int_{x=a}^b \int_{y=0}^{f(x)} y^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_{x=a}^b dx \left(\int_{y=0}^{f(x)} y^2 \, dy \right)$$

$$\int_{y=0}^{f(x)} y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = \frac{1}{3} [f(x)]^3$$

$$J_x = \frac{1}{3} \int_{x=a}^b [f(x)]^3 \, dx$$

Ein vollkommen analoger Schritt wie vom einfachen zum zweifachen Integral führt Sie nun vom zweifachen zum dreifachen Integral.

Dem Flächenintegral

$$F = \iint_F dx dy$$

stellt sich das Volumenintegral

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

zur Seite. Mit Hilfe dieses Integrals können Sie die Volumina von Körpern berechnen, die von zwei Flächen gebildet werden. Veranschaulichen Sie sich das am Beispiel einer im xyz -Raum schwebenden Kugel, die Sie sich aus zwei Halbkugeln gebildet denken können. Die beiden Raumfunktionen seien $z = z_1(x, y)$ und $z = z_2(x, y)$. Die Projektion dieses räumlichen Gebildes auf die xy -Ebene sei durch die Kurven $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ begrenzt, dann ist das Volumen des Körpers

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx dy dz \quad (31)$$

$$V = \int_{x=a}^b dx \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right) \right]$$

$$V = \int_{x=a}^b dx \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \{z_2(x, y) - z_1(x, y)\} dy \right] \quad (31 a)$$

Sie haben wieder von innen nach außen zu integrieren. Es gilt wieder der weiter vorn aufgestellte Merksatz über die Reihenfolge der Integrationen. Der Satz ist hier noch durch den Vorsatz zu erweitern: Zuerst über die Veränderliche integrieren, in deren Grenzen die beiden anderen Veränderlichen vorkommen.

Mit der in (31 a) durchgeführten Auflösung des innersten Integrals ist das dreifache Integral wieder auf ein zweifaches Integral zurückgeführt. Die Formel (30) erscheint als Spezialfall mit $z_2(x, y) = z(x, y)$ und $z_1 = 0$ (xy -Ebene).

Lehrbeispiel 40

Es ist das Massenträgheitsmoment eines Rechtecks mit den Seiten a, b, c in bezug auf die zur Kante a parallele Schwerpunktsachse zu ermitteln.

Lösung:

Bild 55 zeigt einen Schnitt des Rechtecks parallel zur yz -Ebene.

Das Massenelement $dm = \frac{\gamma}{g} dx dy dz$ hat den Abstand $\sqrt{y^2 + z^2}$ von der mit x bezeichneten Schwerpunktsachse, deren Durchstoßpunkt in der Mitte des Rechtecks zu erkennen ist.

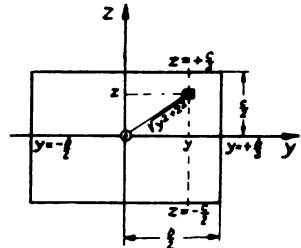


Bild 55

$$J_x = \frac{\gamma}{g} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Da die Integranden jeweils symmetrische Funktionen sind und das Integrationsintervall durch den Koordinatenursprung halbiert wird, können Sie für J_x schreiben [vgl. Lbf. IV/4, Formel (25)]:

$$\begin{aligned} J_x &= 8 \frac{\gamma}{g} \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx \left[\int_{y=0}^{\frac{b}{2}} dy \left(\int_{z=0}^{\frac{c}{2}} (y^2 + z^2) dz \right) \right] \\ &= 8 \frac{\gamma}{g} \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx \left[\int_{y=0}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{c}{2} y^2 + \frac{c^3}{24} \right) dy \right] = \frac{\gamma}{g} \frac{cb}{6} \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} (b^2 + c^2) dx \\ &= \frac{\gamma}{g} \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) \quad \text{Da } m = \frac{\gamma}{g} abc \text{ ist, wird} \\ J_x &= \underline{\underline{\frac{1}{12} m(b^2 + c^2)}} \end{aligned}$$

Übungen

30. Berechnen Sie das Integral $\int_{x=1}^2 \int_{y=1}^{x^2} \frac{x}{y} dx dy$! Verschaffen Sie sich vorher durch eine Skizze Klarheit über den Integrationsbereich!
31. Bestimmen Sie die Trägheitsmomente für die beiden anderen Achsen des in Lehrbeispiel 40 behandelten Rechtecks!

[11] **Mittelwertsatz der Integralrechnung.** Im Intervall $a \leq x \leq b$ habe die überall positive Funktion $y = f(x)$ den kleinsten Wert m und den größten Wert M .

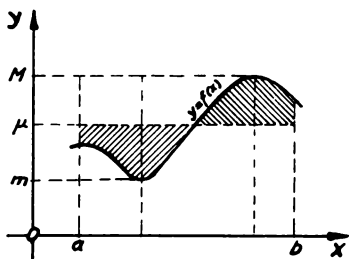


Bild 56

Aus der Deutung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt können Sie an Hand des Bildes 56 die Ungleichung

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

aufstellen.

Dabei stellt $m(b-a)$ ein zu kleines und $M(b-a)$ ein zu großes Rechteck mit der gleichen Grundlinie dar.

Zwischen diesen beiden Werten m und M muß dann aber eine Konstante μ existieren, so daß damit

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx \quad (32)$$

oder

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (33)$$

ist. Dabei ist $\mu = f(\xi)$, wobei ξ einen festen Wert aus dem Intervall $a \leq \xi \leq b$ darstellt.

Man nennt μ den (arithmetischen) Mittelwert des Integrals und (32) den „**Mittelwertsatz der Integralrechnung**“.

Die geometrische Bedeutung der Konstanten $\mu = f(\xi)$ können Sie leicht als Höhe des flächengleichen Rechtecks mit der Grundseite $b-a$ finden.

Lehrbeispiel 41

Welchen Wert hat μ für das Integral $\int_0^\pi \sin x dx$?

Lösung:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

Es hat also das Rechteck mit der Grundseite π und der Höhe $\frac{2}{\pi}$ den gleichen Inhalt wie die Fläche zwischen dem Sinusbogen und der x -Achse.

Von größerer technischer Bedeutung ist das geometrische Mittel des Integrals. Dieses wird durch

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad (34)$$

definiert.

Lernen Sie nun noch eine Anwendung des geometrischen Mittels des Integrals aus der Elektrotechnik kennen.

Unter dem Effektivwert der Spannung u_{eff} bzw. der Stromstärke i_{eff} eines Wechselstromes versteht man den geometrischen Mittelwert, erstreckt über eine volle Periode.

Die Spannung eines Wechselstromes ist durch

$$u = U \sin \omega t$$

gegeben. Die Zeit für den Ablauf einer Periode bezeichnen wir wieder mit T .

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \\ &= U \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} && \text{Substitution: } x = \omega t \\ &= U \sqrt{\frac{1}{\omega T} \int_0^{\omega T} \sin^2 x dx} && \omega T = 2\pi \\ &= U \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} \\ &= U \sqrt{\frac{1}{4\pi} (x - \sin x \cos x) \Big|_0^{2\pi}} \\ \underline{\underline{u_{\text{eff}}}} &= \underline{\underline{\frac{U}{\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

Analog bekommen Sie für die Stromstärke $i_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

Zusammenfassung [10] und [11]

Die zweite Erweiterung der Integralrechnung brachte die Einführung der mehrfachen Integrale. Das zweifache Integral erstreckt sich über die zwei Dimensionen der Ebene, während das dreifache Integral als Raumintegral angesehen werden kann.

Die mehrfache Integration ist nichts anderes als eine Schachtelung von einfachen Integrationen über die verschiedenen Veränderlichen. Im Innern steht immer das Integral, in dessen Grenzen die übrigen Veränderlichen vorkommen. Bei der Auflösung ist dann von innen nach außen zu integrieren. Mit den mehrfachen Integralen lassen sich auch die räumlichen Probleme lösen, bei denen die gewöhnliche, einfache Integration versagt bzw. im Ansatz auf zu große Schwierigkeiten stößt.

Weiterhin wurde der Mittelwert der Integralrechnung behandelt. Das hierin auftretende arithmetische Mittel kann als Höhe eines Rechtecks gedeutet werden, das inhaltsgleich der durch das Integral $\int_a^b f(x) dx$ berechenbaren Fläche ist, wobei die beiden Flächen die gleiche Breite ($b - a$) haben. Alle die Angaben, wie „mittlere Temperatur“, „mittlerer Barometerstand“ usw. beruhen auf diesem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Die Erfordernisse der Technik, besonders die der Elektrotechnik, bewirkten die Einführung eines weiteren, des quadratischen Mittelwertes eines Integrals.

Wir wollen damit die Anwendungen und Ausweitungen der Integralrechnung abschließen. Wie Sie sicher gemerkt haben, ließen sich die Anwendungsbeispiele noch auf die verschiedenartigsten Gebiete ausdehnen. In den beiden Lehrbriefen über Integralrechnung sollten Sie aber nur die Lösung von Integralen und einige grundsätzliche Eigenschaften und Anwendungen kennenlernen. In den Lehrbriefen der speziellen Fachwissenschaften werden Sie noch weitere, Ihr besonderes Fachgebiet betreffende Verwendungsmöglichkeiten erkennen. Aber auch der noch folgende Lehrbrief über Differentialgleichungen setzt zu seinem Verständnis die Beherrschung der Differential- und Integralrechnung voraus.

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

1. Relativer Fehler des Ergebnisses von Lehrbeispiel 1: $\frac{|\Delta J|}{J} \approx 0,00045 \%$.

Nach Formel (1) wird $F = \frac{25}{36} = 0,694444$.

Relativer Fehler $\frac{|\Delta F|}{F} \approx 0,187 \%$.

Er beträgt das 416fache des relativen Fehlers in Lehrbeispiel 1.

2.

y_0	$\sqrt{1}$	1,000
y_{10}	$\sqrt{11}$	3,317

y_2	$\sqrt{1,464}$	1,210
y_4	$\sqrt{2,312}$	1,521
y_6	$\sqrt{3,928}$	1,982
y_8	$\sqrt{6,696}$	2,588
Σ_1		7,301

y_1	$\sqrt{1,208}$	1,099
y_3	$\sqrt{1,816}$	1,348
y_5	$\sqrt{3}$	1,732
y_7	$\sqrt{5,144}$	2,268
y_9	$\sqrt{8,632}$	2,938
Σ_2		9,385

$y_0 + y_{10}$	4,317
$2 \Sigma_1$	14,602
$4 \Sigma_2$	37,540
Σ	56,459

$$\int_0^2 \sqrt{x^3 + x + 1} \, dx = \underline{\underline{3,7706}}$$

3. $s = m \sin \frac{x_1}{m} = \sqrt{m^2 \cos^2 \frac{x_1}{m} - m^2} = \sqrt{y_1^2 - m^2}$

4. $s = \frac{r \pi^2}{2}$

5. $s = 16a$

$$6. \quad T_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad T_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt; \quad x_s = \frac{T_y}{s}; \quad y_s = \frac{T_x}{s}$$

$$7. \quad x_s = \pi r; \quad y_s = \frac{4}{3} r$$

$$8. \quad x_s = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}; \quad y_s = 0$$

$$9. \quad x_s = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}; \quad y_s = 0$$

$$10. \quad x_s = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{2}{3} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \frac{\sin \alpha}{a}; \quad y_s = 0$$

$$11. \quad x_s = 0; \quad y_s = \frac{4b}{3\pi}$$

Alle Ellipsen mit gleicher kleiner Halbachse b und beliebiger Halbachse a haben denselben Schwerpunkt, so u. a. auch der Halbkreis mit $a = b = r$.

$$12. \quad x_s = \frac{\pi}{2}; \quad y_s = \frac{\pi}{8}$$

$$13. \quad J_a = \frac{h^3}{12} (a + 3b) \quad J_s = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$$

$$J_b = \frac{h^3}{12} (3a + b) \quad J_h = \frac{h}{48} \frac{b^4 - a^4}{b - a} = \frac{h}{48} (b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)$$

$$14. \quad J_x = \int_s y^2 ds = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$J_y = \int_s x^2 ds = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$15. \quad J_y = \frac{r^3}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$16. \quad J_y = \frac{1}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha) (R^4 - r^4)$$

$$J_s = J_y - \frac{4}{9} \frac{(R^3 - r^3)^2 \sin^2 \alpha}{R^2 - r^2}$$

$$17. \quad dm = q dx \frac{y}{g} \qquad J = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dm = \frac{1}{12} m l^2$$

Bei dickeren Stäben (Zylinder) müssen Sie analog zum Lehrbeispiel 22 verfahren.

$$18. \quad J = \frac{1}{3} m r^2$$

$$19. \quad V_{\text{Zyl.}} = \pi r^3; \quad V_{\text{Halbk.}} = \frac{2}{3} \pi r^3; \quad V_{\text{Parab.}} = \frac{1}{2} \pi r^3$$

$$V_{\text{Keg.}} = \frac{1}{3} \pi r^3$$

$$V_{\text{Zyl.}} : V_{\text{Halbk.}} : V_{\text{Parab.}} : V_{\text{Keg.}} = 6 : 4 : 3 : 2$$

$$20. \quad V = \frac{\pi^2}{2}$$

$$21. \quad \text{a) } V = \frac{4}{3} \pi a b^2; \qquad \text{b) } V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$22. \quad \text{Hyperbel: } x^2 = r^2 + \frac{4(R^2 - r^2)}{h^2} y^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + 2r^2)$$

$$23. \quad V = \frac{1}{2} \pi m^3 \left(\frac{x_1}{m} + \text{Cos} \frac{x_1}{m} \text{Sin} \frac{x_1}{m} \right) \\ = \frac{1}{2} \pi m (m x_1 + y_1 \sqrt{y_1^2 - m^2})$$

$$F_M = \pi m^2 \left(\frac{x_1}{m} + \text{Cos} \frac{x_1}{m} \text{Sin} \frac{x_1}{m} \right) \\ = \pi (m x_1 + y_1 \sqrt{y_1^2 - m^2})$$

$$24. \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 dy$$

$$F_M = 2\pi \int_s x ds = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy$$

Dabei ist $x = \varphi(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$.

$$25. \quad F_M = 2\pi^2 r a - 4\pi r^2; \quad V = 2\pi r a^2 + \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi^2 r^2 a$$

$$26. \quad F = 2 y b = \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \quad y = \frac{P_0}{2 b \sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

$$27. \quad t = \frac{2\sqrt{h}}{15 r^2 \mu \sqrt{2g}} (8 r^2 + 4 R r + 3 R^2)$$

$$28. \quad \text{a) } \frac{1}{2}; \quad \text{b) } \frac{1}{6}; \quad \text{c) } \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}$$

$$29. \quad F(x, y) = \frac{4}{3} x^3 + 3 x^2 y + \frac{4}{3} y^3$$

Das Linienintegral ist vom Weg unabhängig und besitzt den Wert 20.

$$30. \quad 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$31. \quad J_y = m \frac{c^2 + a^2}{12} \quad J_z = m \frac{a^2 + b^2}{12}$$

Bildquellenverzeichnis

MEYER ZUR CAPELLEN, Mathematische Instrumente, 3. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, K.-G., Leipzig 1949: Bild 4a und 4b.

Formelzusammenstellung

Formel-Nr.	Formel	Seite
1	$F_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2)$	3
2	$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1})]$	3
3	$F = k N$	10
3a	$F = k (N_2 - N_1)$	10
4	$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$	12
4a	$s = \int_s ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$	13
5	$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$	14
6	$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$	17
7	$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$	17
8a	$y_s = \frac{T_x}{M}$	21
8b	$x_s = \frac{T_y}{M}$	22
9a	$T_x = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum y \Delta m = \int_m y dm$	22
9b	$T_y = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum x \Delta m = \int_m x dm$	22
10	$m = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum \Delta m = \int_m dm$	22

Formel-Nr.	Formel	Seite
11 a	$T_x = \int_s y \, ds$	23
11 b	$T_y = \int_s x \, ds$	23
12 a	$x_s = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{s}$	23
12 b	$y_s = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{s}$	23
13 a	$T_x = \int_F y \, dF$	26
13 b	$T_y = \int_F x \, dF$	26
14 a	$T_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dy$	30
14 b	$T_y = \int_a^b x y \, dx$	30
15 a	$x_s = \frac{\int_a^b x y \, dx}{F}$	30
15 b	$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{F}$	30
16 a	$J = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sum l^2 \Delta F = \int_F l^2 \, dF$	34
16 b	$J = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum l^2 \Delta m = \int_m l^2 \, dm$	35

Formel-Nr.	Formel	Seite
17 a	$J_x = \int_{\bar{F}} y^2 dF; \quad J_y = \int_{\bar{F}} x^2 dF$	35
17 b	$J_z = J_p = \int_{\bar{F}} r^2 dF$	35
17 c	$J_p = J_y + J_x$	36
18 a	$J_{\bar{x}} = J_x + b^2 F$	38
18 b	$J_{\bar{y}} = J_y + a^2 F$	39
18 c	$J_{\bar{p}} = J_p + r^2 F$	39
19 a	$J_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx$	42
19 b	$J_y = \int_a^b x^2 y dx$	42
20 a	$V = \int_{\bar{V}} dV$	51
20 b	$V = \int_a^b Q(x) dx$	51
21	$V = \pi \int_a^b y^2 dx$	53
22	$V = 2 \pi y_S F$	55
23	$F_M = 2 \pi \int_s y ds$	56
23 a	$F_M = 2 \pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$	56
24	$F_M = 2 \pi y_S s$	57
25	$A = \int_a^b P(x) dx$	62

$$26 \quad \int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad 72$$

$$26a \quad \int_{P_1 P_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)] \dot{x}(t) + Q[x(t), y(t)] \dot{y}(t)\} dt \quad 75$$

$$27 \quad \int_{P_1 P_2} (P dx + Q dy) = - \int_{P_2 P_1} (P dx + Q dy) \quad 76$$

$$28 \quad F(x, y) = \int_a^x P(x, b) dx + \int_b^y Q(x, y) dy \quad 80$$

$$29 \quad F = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \int_F dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx dy \\ = \int_a^b dx \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right) \quad 85$$

$$30 \quad F = \iint_F z(x, y) dx dy \quad 87$$

$$31 \quad V = \int_{x=a}^b \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z=z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy dz \quad 92$$

$$31a \quad V = \int_{x=a}^b dx \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \{z_2(x, y) - z_1(x, y)\} dy \right] \quad 92$$

$$32 \quad \mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx \quad 94$$

$$33 \quad \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad 94$$

$$34 \quad \bar{\mu} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad 95$$

Als Manuskript gedruckt!

Nur für das Fachschul-Fernstudium bestimmt

**Veröffentlicht unter der Druckgenehmigungs-Nr. Ag. 239/55/DDR des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik · 1. Auflage · Verantwortlicher Herausgeber: Institut für Fachschul-Fernstudium, Dresden, im Auftrage des Staatssekretariats für Hochschulwesen, HA Fachschulwesen · Satz und Druck: Druckerei „Magnus Poser“
Jena**