



POPULÄRE KYBERNETIK

3.1415926

$\pi$

$\times$

$\ln x$

$x^2$

sin

$\sqrt{x}$

$\div$

$\lg x$

$1/x$

cos

%

+

$e^x$

$y^2$

tan

Mein  
Taschenrechner  
Csákány



---

**POPULÄRE KYBERNETIK**

---

# **Mein Taschenrechner**

**Antal Csákány**



**VEB VERLAG TECHNIK BERLIN**

Übersetzung aus dem Ungarischen und Bearbeitung der deutschsprachigen Ausgabe:

Dr. oec. Dipl.-Ing. *Walter Großmann*, Dresden

Titel der Originalausgabe:

© CSÁKÁNY ANTAL, 1978

Mit tud a zsebszámológép?

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Die Herausgabe der Reihe POPULÄRE KYBERNETIK ist in Moskau auf der VII. Internationalen Konferenz der technischen Verlage der sozialistischen Länder beschlossen worden.

Die beteiligten Verlage sind:

VEB Verlag Technik, Berlin

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

SNTL-Nakladatelstvi technické literatury, Praha

Sovetskoe radio, Moskvá

40 Bilder, 11 Tafeln

1. Auflage

Deutschsprachige Ausgabe: © VEB Verlag Technik, Berlin, 1980

Lizenz 201 · 370/58/80

DK 681.31-181.4 · LSV 3059 · VT 3/5490-1

Lektor: *Karl Belter*

Einbandgestaltung: *Kurt Beckert*

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 5820 Bad Langensalza

Bestellnummer: 552 848 2

DDR 7,— M

---

## Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe

---

Viele Werktätige, besonders aber Schüler und Studenten, besitzen Taschenrechner der verschiedensten Typen. Die teilweise vorhandenen Bedienungsanleitungen können aber nur als ein Teil des zu erwerbenden Wissens angesehen werden, um den Taschenrechner effektiv zu nutzen. Meist kann der Taschenrechner mehr, als man ihm zutraut oder als der Nutzer an Kommunikation mit dem Taschenrechner erreicht. Die vorliegende Broschüre ist eine interessante Lektüre und ein Nachschlagewerk zugleich. Der Autor war bemüht, populärwissenschaftlich zu schreiben, um einen großen Leserkreis anzusprechen. Dabei gleitet er keinesfalls ins Triviale ab, sondern stellt trotzdem an seine Leser Ansprüche. Die Ausführungen über den Aufbau und die Wirkungsweise der Taschenrechner, mit einem Blick in die Zukunft, lassen den Schluß zu, daß die Leser nicht nur ihren vorhandenen Taschenrechner weiter schätzenlernen, sondern künftig auch auf Besonderheiten achten werden. Gleichermäßen wichtig erscheinen die Ausführungen über die Auswahl von Taschenrechnern. Viel Wissenswertes wird über die einfachen, aber auch über die sog. wissenschaftlichen Taschenrechner vermittelt. Der Anteil an programmierbaren Taschenrechnern wird künftig zunehmen und läßt Wünsche nach dieser Gruppe von Taschenrechnern wach werden.

Empfohlen wird, möglichst viele Aufgaben und Beispiele mit dem eigenen Taschenrechner durchzurechnen. Somit lassen sich seine Möglichkeiten noch besser einschätzen. In dieser Hinsicht können auch die Spiele und Aufgaben gesehen werden, sie dienen einerseits der Freizeitgestaltung und andererseits dem Kennenlernen des Taschenrechners.

Dresden

*Walter Großmann*

---

## Aus dem Vorwort der Originalausgabe

---

Der Gegenstand dieses Buches ist ein Gerät, das heutzutage in die Tasche oder auf den Schreibtisch von immer mehr Menschen gelangt: der Taschenrechner. Er wird ständig beliebter und erschließt neue Anwendungsgebiete.

Taschenrechner bieten Möglichkeiten, die bis heute ohne Beispiel sind: Die Rechenarbeit ist individuell, die Tastenbedienung ist leicht, die Rechnung erfolgt schnell und genau. Es ist verständlich, daß die Bedeutung der Taschenrechner (wie bei jeder neuen Sache) unterschiedlich bewertet wird. Manche meinen, Taschenrechner werden in einigen Jahren ebenso in Schulbänke eingebaut sein wie einst Tintenfüßer. Andere meinen, daß Schüler, die Taschenrechner benutzen, groß werden, ohne daß sie ihre Finger zusammenzählen können, weil sie sich das selbständige Denken abgewöhnt haben. Die unterschiedlichen Meinungen beweisen i. allg. nur die Bedeutung der Taschenrechner.

Diese Broschüre möchte Kenntnisse vermitteln und Hilfe leisten sowie den Nutzern von Taschenrechnern die effektive Verwendung ihrer Geräte zeigen. Es werden Ratschläge zur Auswahl der Gerätetypen gegeben, die Leistungsfähigkeit wird bewertet. An einfachen und komplizierten Anwendungsbeispielen werden Einsatzmöglichkeiten und Grenzen demonstriert. Es werden Gesellschaftsspiele und Aufgaben erläutert, deren Durchführung bzw. Lösung ohne Taschenrechner einigermaßen kompliziert wäre.

Um den Stoff dieses Buches zu verstehen, sind keine besonderen Kenntnisse auf den Gebieten der Elektronik und der Rechentechnik erforderlich. In vielerlei Hinsicht benötigt man jedoch mathematische Kenntnisse, die dem Niveau des Abschlusses der Polytechnischen Oberschule entsprechen. Selbstverständlich ist, daß mathematische Grundlagen vom Nutzer eines Taschenrechners verlangt werden können, um den Rechner entsprechend zu bedienen. Ein Taschenrechner ist natürlich nicht in der Lage, seinem Nutzer die Grundlagen z. B. der trigonometrischen oder logarithmischen Funktionen beizubringen.

Da es heute kaum eine Aufgabe gibt, die keine rechentechnische Bearbeitung verlangt, sind die verschiedenen Rechenverfahren nicht auf Berufszweige zugeschnitten worden. Es ist vielmehr Anliegen dieser Broschüre, verallgemeinerte Ideen und Methoden zu vermitteln, die vielseitig verwendet werden können. Dem Leser muß dabei überlassen werden, diese Ideen in der täglichen Arbeit selbständig anzuwenden. Im Literaturverzeichnis wurden Quellen angegeben, die für die weitere Qualifizierung der Leser geeignet sind.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1. Einführung</b> .....	7
1.1. Was ist ein Taschenrechner? .....	7
1.2. Entwicklungsgeschichte .....	10
<b>2. Aufbau und Wirkungsweise der Taschenrechner</b> .....	13
2.1. Bauelemente, mechanischer Aufbau .....	13
2.2. Ziffernanzeige .....	16
2.3. Anpassung des Tastenfelds .....	22
2.4. Die Seele des Geräts — der großintegrierte Schaltkreis .....	24
2.5. Wirkungsweise des Taschenrechners .....	27
<b>3. Wer braucht welchen Taschenrechner?</b> .....	35
3.1. Gruppeneinteilung der Taschenrechner .....	35
3.2. Was muß beim Kauf beachtet werden? .....	39
3.3. Besondere Taschenrechner .....	42
<b>4. Mit dem Taschenrechner Bekanntschaft machen</b> .....	45
4.1. Genauigkeit und Fehler .....	47
4.2. Verborgene Ziffern .....	50
4.3. Zahlenbereich .....	50
4.4. Illegale Operationen .....	54
4.5. Innere Organisation .....	54
4.6. Kettenoperationen und wiederholte Operationen .....	58
4.7. Speicher .....	61
4.8. Operationen mit vorzeichenbehafteten Zahlen .....	63
4.9. Verwendung von Klammern, Hierarchie der Operationen .....	64
4.10. Funktionen .....	64
4.11. Vergleich von Taschenrechnern .....	70
<b>5. Wie und wozu benutzt man Taschenrechner?</b> .....	71
5.1. Allgemeine Regeln zur Anwendung von Taschenrechnern .....	71
5.2. Alltägliche Aufgaben für Taschenrechner .....	77
5.3. Kompliziertere Rechnungen .....	79

<b>6. Algorithmen zur Berechnung komplizierter Funktionen mit einfachen Taschenrechnern . . . .</b>	<b>92</b>
6.1. Erhöhung der Genauigkeit bei Multiplikationen und Divisionen	94
6.2. Wurzelziehen . . . . .	95
6.3. Exponentialfunktionen . . . . .	97
6.4. Logarithmische Funktionen	100
6.5. Winkelfunktionen . . . . .	101
<b>7. Programmierbare Taschenrechner</b>	<b>107</b>
7.1. Betriebsarten und Befehle . . . . .	109
7.2. Aufstellen der Programme, Lösen von logischen Aufgaben . . . . .	114
7.3. Programmpakete . . . . .	119
<b>8. Wartung, Reparatur, technische Ergänzungen . . . . .</b>	<b>121</b>
8.1. Wartung . . . . .	121
8.2. Reparatur . . . . .	123
8.3. Technische Ergänzungen . . . . .	124
8.3.1. Anfertigung eines Adapters . . . . .	124
8.3.2. Anfertigung eines Zählers . . . . .	125
<b>9. Spiele und Aufgaben . . . . .</b>	<b>127</b>
9.1. Spiele . . . . .	128
9.1.1. Wörter . . . . .	128
9.1.2. Entweder — Oder . . . . .	129
9.1.3. Ausgeben von Karten und Zahlen . . . . .	130
9.1.4. Suchen von Wegen . . . . .	130
9.1.5. Wettbewerb . . . . .	131
9.1.6. Das Ziel ist die Null . . . . .	131
9.1.7. 1980 . . . . .	132
9.1.8. Füchse und Hasen . . . . .	132
9.2. Aufgaben	134
<b>Anhang</b>	<b>140</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>142</b>

---

# 1. Einführung

---

## 1.1. Was ist ein Taschenrechner?

Eine genaue Definition der Taschenrechner ist keine leichte Aufgabe, da Taschenrechner nach verschiedenen Zielstellungen und mit unterschiedlichen Funktionen hergestellt werden. Dies wollen wir uns jetzt der Reihe nach ansehen. Die Taschenrechner sind:

- 1. ein technisch-ökonomisches Wunder.** Den sehr komplizierten Aufbau der Taschenrechner verwirklicht man mit elektronischen Mitteln. Die Entwicklung und Produktion der „Elektronik“ ist aber außerordentlich kostspielig, woraus man schlußfolgern kann, daß auch elektronische Taschenrechner sehr teuer sind. Im Lauf der Jahre erfolgte aber eine starke Verringerung der Preise der elektronischen Endprodukte, der Kauf von Taschenrechnern ist kostenmäßig akzeptabel geworden. Aber noch etwas ist interessant: Der ständig komplexere Aufbau der elektronischen Geräte vergrößerte keinesfalls die Abmessungen, das Gegenteil trat ein. Wir sind damit heute in der Lage, einen Rechner in die Tasche zu stecken, der mindestens die vier Grundrechenarten durchführen kann. Demgegenüber erforderten früher entsprechende Funktionstabellen viel Platz in einer Bibliothek. Die ersten voluminöseren Rechner hatten eine geringere Leistungsfähigkeit als heutige Taschenrechner in der Größe einer Zigarrettschachtel. Neuartige Produktionen von Taschenrechnern realisieren das, was sich über Jahrhunderte und Jahrtausende als Rechenhilfsmittel entwickelt hat.
- 2. ein hervorragendes Arbeitsmittel.** Bei der Benutzung von Taschenrechnern wird eine Beschleunigung der Arbeit bei ökonomischen Berechnungen, technischen Untersuchungen usw. erreicht. Der Taschenrechner ermüdet nicht, nutzt sich nicht ab und irrt sich auch nicht (freilich kann er Bedienungsfehler nicht ausbessern). Energie wird kaum umgesetzt, für die Lösung einer Aufgabe wird nur wenig Zeit benötigt; der Taschenrechner arbeitet geräuschlos und ist stets arbeitsbereit. Es ist eine nicht zu unterschätzende Eigenschaft, daß die Ergebnisse direkt abgelesen werden können; dabei ist zu beachten, daß bei den meisten Taschenrechnern die Ergebnisse nur von einer einzigen Person ohne Verzerrung erkannt werden. Hat man sich an einen Taschenrechner gewöhnt, so arbeitet man nur ungern mit einem anderen Taschenrechner. Man verborgt ihn nicht gern. Der Taschenrechner ist damit der „Vertraute“ seines Besitzers. Bei den vielen ausgezeichneten Eigenschaften ist der Taschenrechner nicht nur ein Arbeitsmittel, sondern im übertragenen Sinn ein Arbeitskollege des ihn benutzenden Menschen.

**3. ein Unterrichtshilfsmittel oder Lehrmittel.** Mit dieser Feststellung sollte man schon vorsichtiger umgehen. Vor einigen Jahren wurde angenommen, daß die Reklame zur Qualität der Taschenrechner in verschiedenen Ländern nur aus geschäftlichen Gründen der Herstellerfirmen erfolgte. Es zeigte sich aber eine Kontinuität in der Qualitätsentwicklung der Taschenrechner. Lehrer — besonders Mathematiklehrer — sträubten sich gegen die allgemeine Einführung der Taschenrechner in den Grundschulen, weil das „Knöpfchen-drücken“ Einseitigkeit im Denken bringen kann. Dieses Argument ist nicht von der Hand zu weisen, denn es geht nicht darum, die Multiplikation  $11 \cdot 12$  nur mit einem Taschenrechner zu bewältigen.

Ein anderer Fall ist es, wenn Taschenrechner nicht allgemein von Schulkindern, sondern von Oberschülern und Studenten benutzt werden. Sie verwenden ihn zweifellos mit der entsprechenden Überlegung und zur Zeitersparnis. Damit bleibt die Möglichkeit erhalten, die Aufgaben ihrem Wesen nach zu erfassen und sich den Lehrinhalt anzueignen. Die Verbreitungsmöglichkeit der Taschenrechner setzt traditionsgemäß mathematische Kenntnisse voraus. Aber auch neuartige Auffassungen bilden sich heraus (z. B. zu Genauigkeitsproblemen, Approximationen von Funktionen, algorithmischen Rechnungen, speziellen Problemen der Zahlentheorie usw.).

**4. ein Spielzeug.** Im wahrsten Sinn des Wortes kann ein Taschenrechner auch ein Spielzeug sein. Das betrifft jedoch nicht den Rechner selbst, sondern das Spiel entsteht durch die praktische Nutzung des Rechners. Mit dem Taschenrechner lassen sich sehr viele interessante Tricks zeigen, spezielle Rechnungen ausführen oder Partnerspiele durchführen. Der Leser wird in dieser Broschüre auch zu Spielen mit dem Taschenrechner animiert, da diese Spiele die Freizeit interessant gestalten und Entspannung bringen. Dadurch werden neue Kenntnisse vermittelt, und es entstehen Taschenrechnerroutinen.

**5. ein erster Schritt in Richtung Rechentechnik.** Gewiß ist die Feststellung richtig: Durch Verwendung von Taschenrechnern erhält man einen Eindruck von den Rechengeschwindigkeiten und Möglichkeiten eines Großrechners. Wenn verschiedene mathematische Operationen bei den Taschenrechnern fehlen, so kann dies aber durch gute Rechenorganisation und zweckmäßige Programmierung wieder ausgeglichen werden. Zur Abarbeitung eines Programms mit einem Taschenrechner muß man einige einfache Handgriffe erlernen, meist solche, wie sie teilweise auch bei Großrechnern erforderlich sind. Ein kompliziertes mathematisches Problem kann man sich mit einem Taschenrechner „stückweise“ verdeutlichen und lernt dabei die wichtigsten Merkmale der Programmierung.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß keine direkte Festlegung über die Zugehörigkeit des Taschenrechners zu einer bestimmten Rechnergruppe getroffen werden kann. Der Taschenrechner ist hinsichtlich seiner Entstehung und seinen Funktionen sehr vielschichtig.

Im Wort *Taschenrechner* ist der Begriff *Rechner* enthalten. Rechner haben in den letzten Jahrzehnten eine sehr schnelle Entwicklung durchgemacht und führten zum Aufblühen ganzer Industriezweige.

Im Bild 1.1 sind die verschiedenen Beziehungen zwischen Rechnern dargestellt. Taschenrechner und Tischrechner gehören beide zur Gruppe der Kalkulatoren. In den letzten Jahren wurden Mikrorechner entwickelt und produziert. Sie

bilden eine Brücke zwischen Kalkulatoren und universellen Rechenautomaten. Großrechner werden unter Verwendung komplizierter Technologien hergestellt, sie sind sehr teuer, allerdings auch vielseitiger anwendbar.

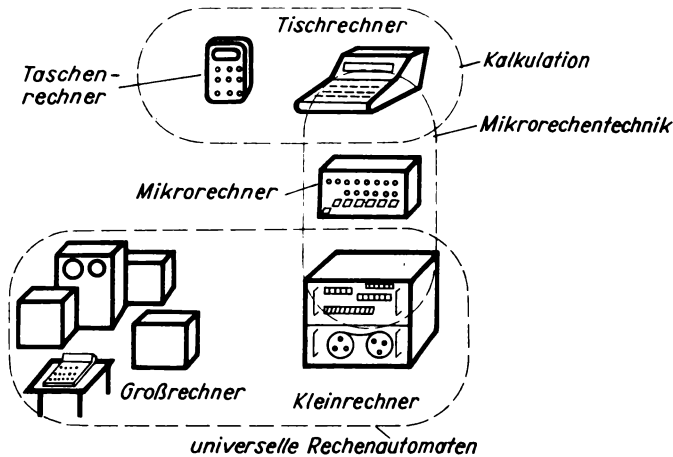


Bild 1.1. Zuordnung der Taschenrechner

Der Taschenrechner, als jüngstes Mitglied der Rechnerfamilie, hat viele nützliche Eigenschaften von den „Älteren“ geerbt. Ohne diese Erfahrungen könnte er nicht existieren. Besonders eng waren die Beziehungen bei der Entwicklung von Kalkulatoren und Mikrorechnern, beide nutzen gegenseitig ihre Vorteile. Die jeweiligen Anwendungsgebiete haben sich herausgebildet und stabilisiert. Dabei haben auch die Taschenrechner ihren Platz gefunden. Die Anwendungsgebiete der Taschenrechner sind dort zu finden, wo mit anderer Rechentechnik nur schwer und unbequem Eingang gefunden werden kann. Beispielsweise benötigen Großrechner in den Rechenzentren auch für kleinere Aufgaben einen erheblichen organisatorischen Aufwand. Deshalb haben die dort tätigen Mitarbeiter oft einen Taschenrechner, um einfache Aufgaben effektiver zu lösen.

Wenn man sehr gründliche und vielseitige Kenntnisse über den Taschenrechner erwerben will, sollte man die Elektronik und die Rechentechnik beherrschen. Weiterhin sind entsprechende mathematische Kenntnisse erforderlich.

Für Taschenrechnernutzer ist es aber i. allg. nicht notwendig, umfassende Kenntnisse der Schaltungstechnik oder der numerischen Mathematik zu besitzen. Taschenrechner sind so konstruiert, daß eine Nutzung ohne spezielle Vorkenntnisse möglich ist. Jedoch kann der Nutzen der Taschenrechneranwendung recht verschieden sein. Vergleichen wir das mit einem Getränk, welches von einem ungeübten Mann mit einer Küchenmaschine hergestellt wird, es schmeckt nicht so, wie das Getränk, welches von einer erfahrenen und phantasievollen Hausfrau zubereitet wurde.

## 1.2. Entwicklungsgeschichte

Längeres Arbeiten mit den vier algebraischen Grundrechenarten *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* und besonders mit vielstelligen Zahlen ist sehr ermüdend. Es können bei manueller Rechnung Fehler entstehen, ohne daß man es will. Es überrascht deshalb nicht, daß man seit Jahrhunderten versuchte, zur schnellen und fehlerfreien Rechnung eine Rechenmaschine zu konstruieren.

Erste Versuche führten verständlicherweise zu mechanischen Gebilden mit Zahnrädern, Gestängen und Bedienelementen aus Holz und Metall. 1623 entwickelte *Wilhelm Schickard* aus solchen Teilen eine Maschine mit automatischem Zehnerübertrag. Leider blieb sie für uns nicht erhalten, man konnte nur an Hand von Skizzen Rekonstruktionen durchführen. Diese Maschine war aus heutiger Sicht ungenau und kompliziert.

1641 baute der große Mathematiker *Blaise Pascal* eine Maschine mit ähnlicher Zielstellung. Er wollte damit seinem Vater, der Steuereinnahmer war, die Arbeit erleichtern. Diese Konstruktion genügte den Forderungen auch noch nicht voll.

1673 stellte *Gottfried Wilhelm Leibniz* einen Rechner für die vier Grundrechenarten vor. Dieser Rechner war zwar nicht voll funktionsfähig, stellte jedoch eine wesentliche Weiterentwicklung gegenüber den genannten Vorläufern dar [3].

Weitere Untersuchungen, mit mechanischen Mitteln Rechner aufzubauen, wurden lange Zeit nicht weitergeführt. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, besonders zum Ende des Jahrhunderts, kamen mechanische Maschinen auf, deren Arbeitsprinzipien noch heute gültig sind. Unabhängig voneinander wurden sie in Frankreich, in den USA und in der Schweiz hergestellt.

Eine Massenproduktion der mechanischen Rechner begann 1930 in der deutschen Firma „Rheinmetall“. Für die schwer bedienbaren Geräte begann eine große Karriere. In verschiedenen Teilen der Welt nahmen viele große Firmen die Lizenzproduktion auf. Die letzten elektromechanischen Rechner wurden von der italienischen Firma „Olivetti“ in den fünfziger Jahren konstruiert. Außer den vier Grundrechenarten konnten diese Rechner die Ergebnisse ausdrucken, deshalb waren sie für das Geschäftsleben sehr wichtig.

Damit war die Entwicklung des mechanischen Rechners beendet. Ein neuer und starker Rivale kam mit dem elektronischen Rechner. Die Massenproduktion und Verbreitung entstand im Ergebnis der allgemeinen Forderung, mehr als nur die vier Grundrechenarten mit einem Rechner durchführen zu können. Mit dem elektronischen Rechner können Millionen von Operationen in relativ kurzer Zeit durchgeführt werden. Wofür man früher Stunden brauchte, benötigt man mit einem elektronischen Rechner nur noch Minuten oder Sekunden. Diese Rechner waren anfangs enorm teuer.

Mit dem Transistor wurde eine Wende im elektronischen Gerätebau erreicht. Mit seiner Hilfe konnten schnellere und kompliziertere elektronische Geräte hergestellt werden, als das mit mechanischen Mitteln überhaupt möglich gewesen wäre. Der erste elektronische Rechner mit Transistoren wurde im Geschäftsleben eingesetzt. Er wurde 1962 von einer englischen Firma produziert, war so groß wie eine Schreibmaschine und enthielt mehrere gedruckte Schaltungen, in denen einige tausend Transistoren eingesetzt waren. In den USA und in Japan wurde

diese Maschine in Lizenz hergestellt. Sie bereitete die sog. *Kalkulatorexpllosion* vor. Die damaligen elektronischen Rechner unterschieden sich von den heutigen kleinvolumigen Rechnern dadurch, daß sie relativ groß und störanfällig waren. Unsicherheiten entstanden durch die nicht voll ausgereiften Technologien in der Herstellung; mehrere tausend Transistoren und andere Bauelemente mußten eingelötet werden, und nicht alle Lötstellen waren fehlerfrei.

Am Ende der sechziger Jahre waren elektronische Rechner nicht mehr selten. Jedoch war noch ein letzter Entwicklungsschritt erforderlich: Die Rechner mußten in das Gedankengut vieler Menschen aufgenommen werden und auch in der Tasche der Nutzer Platz finden. Die Herstellung von Taschenrechnern war notwendig und in dieser Zeit auch auf Grund der vorhandenen Technologien möglich.

Natürlich wollte man früher auch die Rechner verkleinern, denn besonders im Geschäftsleben waren kleine Rechner wichtig. So kamen kleine mechanische Rechner zum Einsatz, mit denen man *addieren* und *subtrahieren* konnte. Sie waren bereits so klein, daß sie bequem in eine Tasche paßten. Das Rechen-

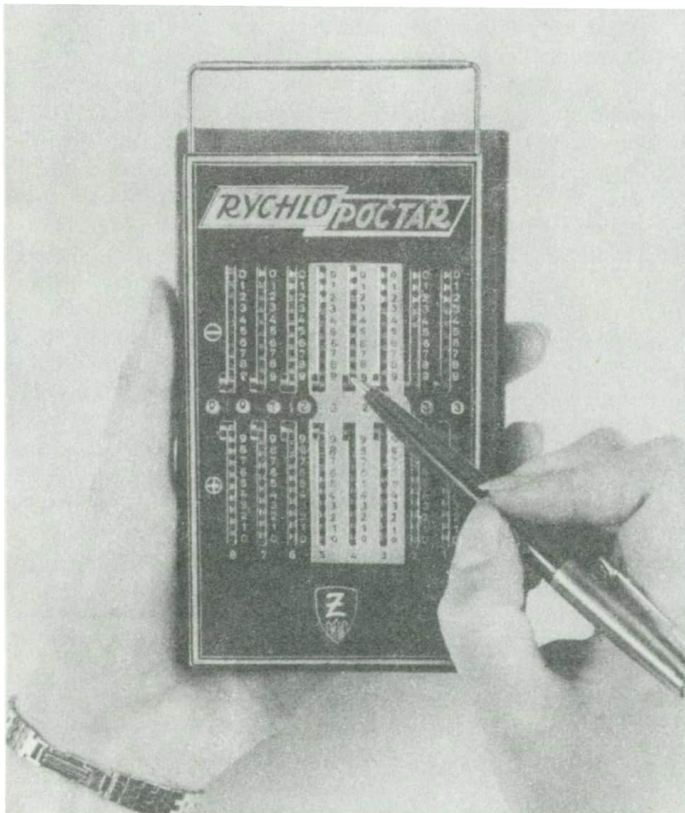


Bild 1.2. Vorgänger des heutigen Taschenrechners

prinzip bestand darin, daß bewegliche Stäbchen, auf denen Ziffern angegeben waren, auf einer Skale bewegt wurden. Eine Nutzung dieses Geräts war bereits nach geringer Übung möglich. Diese unglaublich einfach hergestellten Geräte konnten gut angewendet werden. Für die Verschiebung der beweglichen Ziffernstäbchen genügte bereits ein Kugelschreiber. In manchen Schreibwarengeschäften der DDR sind ähnliche Rechengeräte Typ REKORD gegenwärtig erhältlich. Einen am Ende der fünfziger Jahre entwickelten mechanischen Rechner zeigt Bild 1.2.

Die echte Herausbildung des elektronischen Taschenrechners erfolgte auf der Basis von funktionssicheren und stabilen elektronischen Bauelementen, ähnlich, wie das auch bei Großrechnern der Fall war. Die großintegrierten Schaltkreise, auch LSI-Schaltkreise genannt (LSI: large scale integration), wurden geboren. Sie sind sehr klein und enthalten auf einem kleinen Siliziumplättchen Tausende von Transistoren und anderen für die Schaltung erforderlichen Bauelementen. Diese Plättchen wurden so entwickelt, daß sie Schaltungen eines elektronischen Rechners enthalten. Das hat den großen Vorteil, daß viele fehleranfällige und teure Lötstellen entfallen. In genügendem Maße kleine und billige LSI-Schaltkreise sind eine Voraussetzung zur Massenproduktion von Taschenrechnern. Am Ende der sechziger und zum Anfang der siebziger Jahre begann die Massenerstellung der für Taschenrechner benötigten LSI-Schaltkreise. Die amerikanische Firma Compometer, die japanische Firma Omron und die kanadische Firma Commodore waren die ersten, die billige Taschenrechner in größeren Stückzahlen produzierten. Bereits 1971 verwendete die amerikanische Firma Bowmar Leuchtdioden zur Ziffernanzeige. Mit dieser Lösung war im wesentlichen der heute verwendete Taschenrechner fertig. Die Jahre 1970/71 sind damit die Anfangsjahre des eigentlichen Taschenrechners, mit dem wir uns beschäftigen. In der DDR, der VR Bulgariens und der UdSSR werden integrierte Schaltkreise produziert, die zur Herstellung von Taschenrechnern genutzt werden, z. B.

DDR: Reihe konkret oder MR 410/411/610

VR Bulgariens: Reihe elka

UdSSR: Reihe B 3.

Der Taschenrechner hat als selbständiges Produkt seinen eroberten Platz behauptet. Gegenwärtig ist noch nicht abzusehen, ob die weitere Entwicklung und Verbreitung des Mikrorechners zu einer teilweisen Verdrängung des Taschenrechners führt.

---

## 2. Aufbau und Wirkungsweise der Taschenrechner

---

Es ist vorteilhaft, wenn man den Aufbau und die Wirkungsweise von den Gegenständen kennt, mit denen man täglich arbeitet. Das gilt natürlich auch für Taschenrechner. In diesem Abschnitt wird kurz auf prinzipielle Lösungen des Aufbaus und der Wirkungsweise und deren gebräuchlichste Varianten eingegangen. Elektronische Bauelemente und Schaltkreise werden nicht ausführlich beschrieben. Die verschiedenen elektronischen Schaltkreise einfacher und komplizierten Art sind in einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen erläutert, z. B. in [5] [7]. Leser, die sich speziell mit diesen Schaltkreisen befassen wollen, können in der einschlägigen Literatur ihren Kenntnisstand auffrischen und erweitern. Auch die Grundprinzipien der Digitalrechner sind in populärwissenschaftlichen Büchern und Zeitschriften dargelegt [8]. Unser Ziel ist es, die speziellen Lösungen des Aufbaus und der Wirkungsweise bei Taschenrechnern aus den allgemeinen Aussagen bei Digitalrechnern hervorzuheben.

Bild 2.1 zeigt in einfachster Form die Kommunikation zwischen Mensch und Taschenrechner.

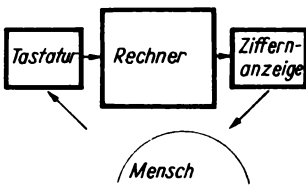
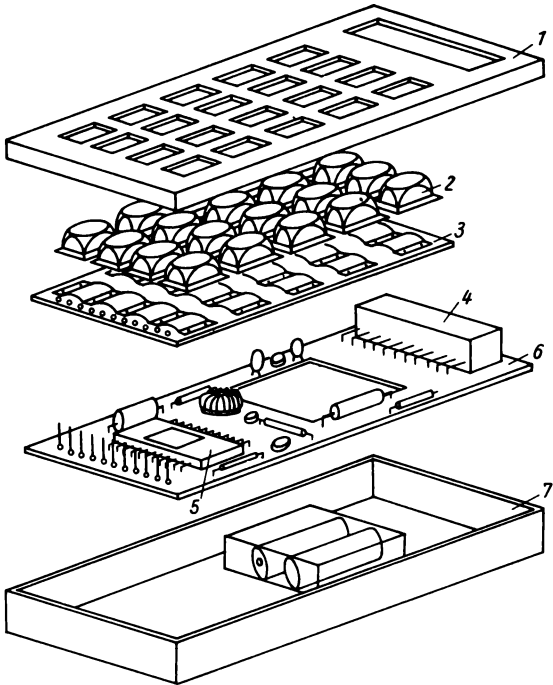


Bild 2.1. Kommunikation zwischen Mensch und Rechner

Die Kommunikation zwischen Mensch und Taschenrechner erfolgt durch die im Taschenrechner enthaltenen Eingabe- und Ausgabemöglichkeiten. Eingangsseitig ist es die Tastatur und ausgangsseitig die Ziffernanzeige mit einer bestimmten Stellenzahl. Die Eingabe erfolgt mechanisch durch Tastendruck, die Ausgabe optisch. Beide Baugruppen sind auf der Oberseite (Frontplatte) des Taschenrechners angeordnet.

### 2.1. Bauelemente, mechanischer Aufbau

Bild 2.2. zeigt den mechanischen Aufbau, wie er bei den meisten Taschenrechnern zu finden ist. Die Teile 1 und 7 werden durch Schraubverbindungen zusammengehalten. Beide Teile bestehen aus Kunststoff. Das Öffnen dieser Schraubverbindungen ist nicht für den Nutzer des Taschenrechners vorgesehen,



*Bild 2.2. Mechanischer Aufbau des Taschenrechners*

- 1 Kunststoffgehäuse (Oberteil)
- 2 Tastatur
- 3 Platte mit Kontaktstreifen
- 4 Ziffernanzeige
- 5 integrierter Schaltkreis
- 6 Leiterplatte
- 7 Kunststoffgehäuse (Unterteil)

sondern nur für den Garantie- bzw. Reparaturdienst. Die Schraubverbindungen befinden sich im Regelfall auf der Rückseite des Taschenrechners. Sie werden von der Herstellerfirma zur Sicherung gegen unbefugten Eingriff während der Garantiezeit mit einem Firmenschild überklebt oder durch Farbanstrich gekennzeichnet.

Zwischen den Teilen 1 und 7, also im Kunststoffgehäuse, befinden sich die Teile 2 und 3 (Bestandteile der Tastatur), 6 (Leiterplatte mit den elektronischen Bauelementen und LSI-Schaltkreisen) und 4 (Ziffernanzeige). Die Anordnung dieser Teile erfolgt nach funktioneller Zweckmäßigkeit. Auf der Rückseite des Kunststoffgehäuses kann sich ein leicht zugänglicher Schieber befinden, hinter dem sich ein vom inneren Aufbau des Taschenrechners räumlich unabhängiges Fach befindet. Hier können bei Batteriebetrieb die erforderlichen Trockenbatterien aufgenommen werden. Ist der Taschenrechner mit einem aufladbaren Akkumulator versehen, braucht dieser für den Nutzer nicht zugänglich zu sein.

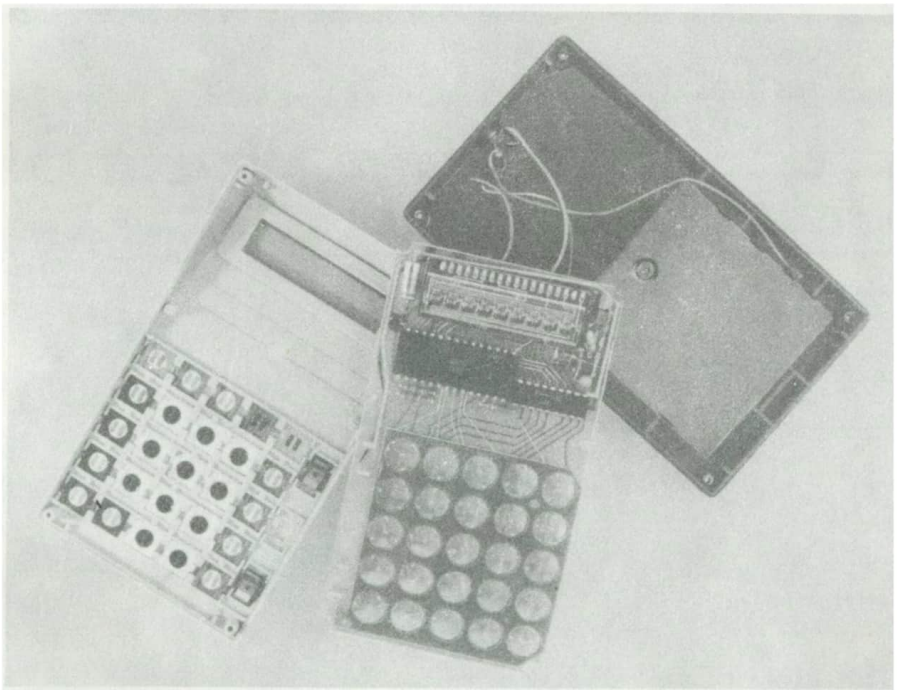
Die Tastatur ist mechanisch relativ einfach aufgebaut. Durch das Drücken der Tasten wird über kleine elastische Metallstreifen eine leitende Verbindung zur elektronischen Schaltung erreicht. Es gibt verschiedene Typen von Tastaturen, mit oder ohne Druckpunkt. Man kann auch von Tasten sprechen, die mit oder ohne Geräusch beim Drücken arbeiten. Wird bei den Tasten mit Druckpunkt das Geräusch wahrgenommen, ist das ein Ausdruck dafür, daß die Wirkung der Tasten erreicht ist, d. h., daß die Tasteninformation von der elektronischen Schaltung übernommen wurde. Man kann hier einen Vergleich anstellen: Die

Tastatur ohne Druckpunkt (und damit ohne Geräusch) ist mit einem Klingelknopf an einer Gartentür zu vergleichen. Beim Drücken des Klingelknopfs kann man nicht feststellen, ob die Klingel im Haus tatsächlich anspricht, man nimmt es aber an. Die Tastatur mit Druckpunkt (und damit mit Geräusch) ist mit einem kippbaren Lichtschalter in einem Zimmer zu vergleichen, beim Kippen des Schalters leuchtet die Lampe auf.

Mitunter sind die metallischen Kontaktstreifen der Tastatur einseitig mit dünner Kunststoffolie überzogen. Dann nennt man diese Taschenrechner „kognak- und kaffeesicher“, d. h., daß sie gegen Feuchtigkeitseinflüsse geschützt sind.

Es gibt auch besondere Taschenrechner, bei denen die Tasten von außen mit kleinen Gummikappen überzogen sind. Sie gewährleisten einen noch besseren Schutz. Das kann so weit gehen, daß man diese Taschenrechner auch unter Wasser benutzen kann.

Auf der Leiterplatte sind die notwendigen elektronischen Bauelemente und auch die LSI-Schaltkreise angebracht. Betrachten Sie dazu das Bild 2.3. Der LSI-Schaltkreis für die Verarbeitung ist von der gesamten Elektronik des Taschenrechners am wichtigsten. Es können durchaus mehrere Verarbeitungsschaltkreise im Taschenrechner sein, neuere Geräte enthalten aber nur einen, jedoch mit dem notwendigen Integrationsgrad. Die Anzahl ist u. a. vom Integrationsgrad der



*Bild 2.3. Geöffneter Taschenrechner*

Links: Tastatur von hinten; Mitte: Leiterplatte, integrierter Schaltkreis und Ziffernanzeige; rechts: Innenseite des Gehäusebodens

Schaltung und von den realisierten Funktionen des Taschenrechners abhängig. Neben dem Verarbeitungsschaltkreis können weitere Schaltkreise vorhanden sein, die der Speicherung von Programm- oder Verarbeitungsdaten dienen. Meist ist auf der Leiterplatte auch die Ziffernanzeige angeordnet, wie man das im Bild 2.2 sehen kann. Zur Ziffernanzeige werden auch optische Elemente verwendet, z. B. Vergrößerungslinsen, farbige durchsichtige Glasplatten. Oft findet man auf der Leiterplatte eine Spule und Transistoren. Sie sind erforderlich, wenn sich die Spannungswerte des integrierten Schaltkreises oder der Ziffernanzeige von denen der Batterie oder des Akkumulators unterscheiden. Sie dienen der Spannungsanpassung.

## 2.2. Ziffernanzeige

Das Ergebnis (Endergebnis oder Zwischenergebnis) des Rechenvorgangs mit dem Taschenrechner kann mit der Ziffernanzeige für den Nutzer lesbar gemacht werden. Ziffernanzeigen sind fast ohne Ausnahme sog. **Siebensegmenttypen**. Mit sieben Segmenten (drei waagerechte und vier senkrechte) können die arabischen Ziffern 0...9 zusammengesetzt werden. Betrachten Sie dazu Bild 2.4. Die so dargestellten Ziffern sehen etwas anders aus als die gewöhnlich geschriebenen oder gedruckten Ziffern aus, da sie stilisiert sind. Jedoch ist die Darstellung der Ziffern durchaus so, daß sie von allen Nutzern richtig in ihrer Bedeutung erkannt werden.

Die einfachste Methode zur Darstellung der Ziffern besteht darin, daß von den



Bild 2.4. Ziffernanzeige, bestehend aus sieben Segmenten

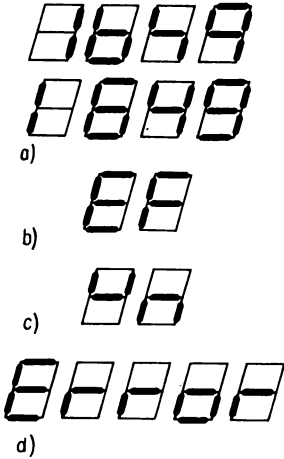


Bild 2.5. Verwendung der sieben Segmente

a) Möglichkeiten zur Darstellung gleicher Ziffern; b) Darstellung ausgewählter Buchstaben; c) Darstellung von Symbolen; d) Textdarstellung

sieben Segmenten diejenigen aufleuchten, die das Ziffernbild ergeben, während die anderen dunkel bleiben.

Die Verwendung der sieben Segmente zur Ziffernanzeige erfolgt nicht einheitlich. Im Bild 2.5a sind verschiedene Varianten der Zifferndarstellung enthalten: Die Ziffern 1, 4, 6 und 9 können unterschiedlich hergestellt werden.

Mit dem gewählten Darstellungsprinzip können nicht nur Ziffern, sondern auch in beschränktem Maße Buchstaben dargestellt werden. Oft verwendet man zur Anzeige eines Fehlers den Buchstaben E, bzw. man benutzt zur Kennzeichnung einer mathematischen Funktion den Buchstaben F (aus dem Englischen: error — Fehler bzw. function — Funktion). Die Art der Darstellung dieser beiden Buchstaben ist im Bild 2.5b zu sehen. Mit Hilfe des beschriebenen Darstellungsprinzips ist es über Ziffern und Buchstaben hinaus auch möglich, weitere Symbole anzuzeigen. Im Bild 2.5c sind zwei solcher Symbole gezeigt, die z. B. dann in der Ziffernanzeige dargestellt werden, wenn die mögliche Stellenzahl beim Rechenvorgang überschritten wird oder eine Unterschreitung des zulässigen Zahlenbereichs vorliegt. Ausführlich wird darüber noch im Abschn. 4. geschrieben.

Spezielle Taschenrechner können auch Text (alphanumerische Darstellung) anzeigen, wie das im Bild 2.5 d mit dem Wort *Error* zu sehen ist.

Neben der Siebensegmentanzeige existiert auch die **Mosaikanzeige**. Dabei werden aus z. B.  $7 \times 5$  Punkten in einem Rechteck (für jede Stelle) diejenigen Punkte ausgewählt, die die entsprechende Ziffer (aber auch verschiedene Buchstaben und Symbole) darstellen. Diese Punkte leuchten dann auf.

Bei Taschenrechnern herrschen meist zwei verschiedene technische Realisierungsmöglichkeiten der Ziffernanzeige vor:

- Elektrolumineszenzanzeige und
- Fluoreszenzanzeige.

Kenntnisse über Aufbau und Wirkungsweise der Ziffernanzeige sind bei der Auswahl eines Taschenrechnertyps sinnvoll. Auch für eine gute wirtschaftliche Ausnutzung des Rechners sollte man über die Ziffernanzeige Bescheid wissen.

**Elektrolumineszenzanzeigen** (oft benutzt man dazu Leuchtdioden LED — aus dem Englischen light emitting diode) sind spezielle Halbleiterdioden, die bei Stromdurchfluß ein spezifisches farbiges Licht abgeben. Häufig ist dies rotes Licht an der Ziffernanzeige, es gibt aber auch Leuchtdioden mit den Farbarten gelb, orange und grün. Diese Halbleiterdioden haben sehr kleine Abmessungen, die Leuchtsegmente haben je Diode ungefähr 1 mm Länge. Damit die Ziffern gut abgelesen werden können, sind über den Leuchtdioden durchsichtige Vergrößerungslinsen (meist aus Kunststoff) angebracht. Dadurch erreicht man eine Zifferngröße von 5...10 mm. Leider ist durch diese optische Lösung der Sichtwinkel für die Ablesbarkeit sehr verkleinert. Nur unter einem ganz bestimmten Sichtwinkel sind die Ziffern richtig zu erkennen. Wenn zwei Personen gleichzeitig vom Taschenrechner Ergebnisse ablesen wollen, so ist das nur möglich, wenn sich ihre Köpfe Wange an Wange befinden.

Über die lichtabgebende Anzeige und über die durchsichtigen Vergrößerungslinsen wird noch eine durchsichtige Abdeckplatte geklebt, die die gleiche Farbe hat wie die Anzeige selbst. Damit kann der Kontrast weiter verbessert werden.

Die Leuchtdiodenanzeige wird bereits mit Spannungen von einigen Volt arbeitsfähig. Die Lebensdauer der Leuchtdioden ist im Prinzip unbegrenzt, sie sind schlagfest, die Lichtstärke ist ausreichend — also eine ideale Anzeige für den Taschenrechner.

**Fluoreszenzanzeigen** sind nicht neu, zu ihren Vorfahren gehört die Katodenstrahlröhre (Oszilloskopröhre, Fernsehbildröhre, magisches Auge eines Rundfunkgeräts). Aus einer beheizten Katode treten Elektronen aus, die beschleunigt auf eine fluoreszierende Schicht, die auf einer Glasplatte aufgebracht ist, auftreffen. Dadurch tritt auf der fluoreszierenden Schicht ein Leuchteffekt ein. Die Fluoreszenzanzeige ist eine klassische Form der Anzeige: mit Elektronenröhre (Katode, Gitter, Anode). Die Darstellung der Ziffern auf der fluoreszierenden Schicht erfolgt ebenfalls mit sieben Segmenten. Diese Anzeige ist fast immer grün. Die Größe der darstellbaren Ziffern beträgt i. allg. 8...15 mm, also größere Ziffern als bei der Leuchtdiodenanzeige. Das abgegebene Licht ist intensiver. Eine optische Vergrößerung ist nicht erforderlich, auch kann die Ablesentfernung größer gewählt werden. Aber diese Vorteile müssen entsprechend bezahlt werden: Zur Anzeige braucht man einen Heizstrom von 20 . . . 50 mA, manchmal neben 10-V-Anodenspannung eine Stromstärke je Segment von 1...5 mA. Dadurch ist die Leistungsaufnahme sehr viel größer als bei der Leuchtdiodenanzeige. Bei der Fluoreszenzanzeige wird die Batteriebenutzung entsprechend teuer.

Die Fluoreszenzanzeige besitzt Glaskörper mit dem notwendigen Vakuum. (An den Glaskörpern ist diese Art der Ziffernanzeige zu erkennen.) Auf die Glaskörper ist sehr zu achten, da sie leicht zerbrechen und anfällig gegen Schwingungen und Erschütterungen sind. Beim Herunterfallen eines solchen Taschenrechners ist ein Defekt zu erwarten, der nicht mehr reparabel ist. Der Taschenrechner wird dadurch wertlos.

Beachtet werden muß, daß die Leuchtintensität im Laufe der Zeit geringer wird. Die Erfahrungen lehren, daß solche Taschenrechner viel schneller durch andere Defekte (z. B. Herunterfallen) unbrauchbar werden als durch das *Blindwerden der Vakuumröhren*.

Einige Bemerkungen zur erwähnten Leuchtintensitätsverringering: Wenn ein Taschenrechner eingeschaltet wird, erscheint an der Ziffernanzeige (rechts oder links) z. B. eine 0. Da sich dieser Vorgang oft wiederholt, werden die für die Ziffer 0 erforderlichen Segmente auch am meisten beansprucht. Nach ein- bis zweijähriger Benutzung des Taschenrechners erscheint bei Darstellung der Ziffer 8 an dieser Stelle das Segment für den Mittelstrich wesentlich intensiver als bei den anderen Segmenten, da der Mittelstrich weniger benutzt wurde als die Segmente, die sonst zur Darstellung der 0 benötigt werden.

Es ist ganz natürlich, daß die Leistungsaufnahme der Siebensegmentanzeige an den verschiedenen Stellen der Ziffernanzeige unterschiedlich sein kann. Die Gesamtleistungsaufnahme der Ziffernanzeige ist davon abhängig, wieviel Ziffern leuchten bzw. welche Ziffern benutzt werden. Die maximale Leistungsaufnahme wird dann erreicht, wenn in der gesamten Ziffernanzeige alle Stellen mit der Ziffer 8 belegt sind, da die Ziffer 8 alle sieben Segmente erfordert. Wenn wir mit der Energie der Batterien bzw. des Akkumulators sparsam umgehen wollen, dürfen wir nur die notwendigen Ziffern und nur in der unbedingt erforderlichen Zeit aufleuchten lassen. Bei modernen Taschenrechnern verlöscht deshalb die Ziffernanzeige nach einer bestimmten Zeit. Durch Druck einer Taste ist der Nutzer aber in der Lage, die anzuzeigenden Ziffern wieder sichtbar zu machen. Mit dieser Methode kann man Energie einsparen. Beim Drücken der Taste *Löschen* verlischt die Ziffernanzeige, es leuchtet nur noch eine 0 (als Beweis dafür, daß der Taschenrechner noch eingeschaltet ist).

Nun werden wir noch kurz zwei weitere Bauelemente zur Ziffernanzeige vorstellen:

**Gasentladungsröhren**, die ebenfalls mit sieben Segmenten wirken. Durch eine lokale Gasentladung wird Licht erzeugt (sog. Minihalogenlampen). Taschenrechner mit dieser Ziffernanzeige sind selten. Erkennen kann man das Verfahren am Verschwimmen der Grenzlinien der Segmente.

Das andere Verfahren ist für Taschenrechner wichtiger. **Flüssigkeitskristallanzeigen** arbeiten nach dem Prinzip der Änderung der Lichtdurchlässigkeit bei einem Flüssigkeitskristall durch Anlegen eines elektrischen Feldes zwischen zwei Elektroden (zwischen denen sich das Flüssigkeitskristall befindet). Dieses Verfahren wirkt ebenfalls mit sieben Segmenten. Bei Lichteinfall von außen erfolgt eine Lichtreflexion derjenigen Segmente, die elektrisch angesteuert werden. Dadurch entsteht der Effekt des Leuchtens. Die anderen Segmente reflektieren das Licht nicht und bleiben dunkel. Solche Anzeigen zeichnen sich durch eine sehr geringe Leistungsaufnahme aus, deshalb verwendet man sie vor allem in Digitalarmbanduhren. 1 bis 2 Jahre können solche Uhren ohne notwendige Energiezuführung von außen auskommen. Selbstverständlich sind die Flüssigkeitskristallziffernanzeigen auch für Taschenrechner anwendbar.

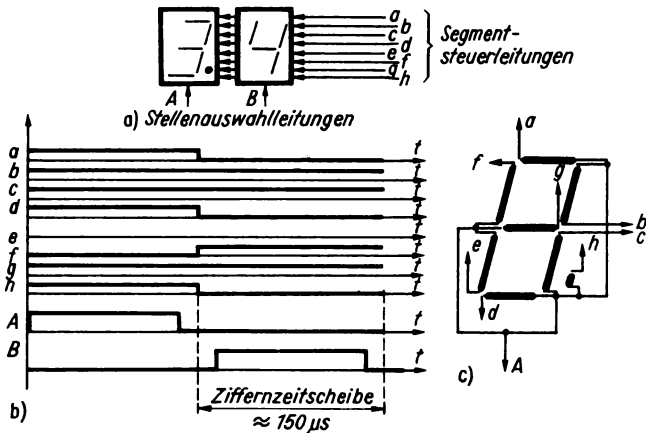
Es wird angestrebt, die Ziffernanzeigen so zu gestalten, daß sie ebensolange halten wie die Recheneinheit des Taschenrechners. Die Ziffernanzeige sollte also nicht zum primären Grund eines Rechnerausfalls führen. Künftig kann es durchaus möglich werden, bei äußerst geringer Leistungsaufnahme der Taschenrechner gänzlich auf einen Ein- und Ausschalter zu verzichten und damit den Taschenrechner immer betriebsbereit zu haben. Versucht wird auch, die Lebensdauer der eingesetzten Batterien auf 10 bis 15 Jahre zu bringen. Gegenwärtig ist die Lebensdauer der Flüssigkeitskristallanzeige noch auf 1 bis 10 Jahre begrenzt, die Gründe für den Ausfall der Flüssigkeitskristallanzeige können dabei unterschiedlich sein.

Die z. Z. verwendeten Ziffernanzeigen mit Leuchtdioden oder mit Fluoreszenzanzeige haben eine wichtige Eigenschaft, sie sind trägheitslos wiederholbar. Damit kann ein Arbeitsprinzip der Ziffernanzeige aufgebaut werden, das sich *Zeitscheibenverfahren*, eine *Zeitmultiplexlösung*, nennt.

Auf der Ziffernanzeige der Taschenrechner sind i. allg. 6 bis 12 Stellen für die Zifferndarstellung angeordnet. Je Stelle sind acht Segmente erforderlich. Bisher wurden für die Zifferndarstellung nur sieben Segmente erwähnt. Ein Zusatzsegment ist erforderlich, um hinter jeder Stelle einen Punkt anzeigen zu können, der als Dezimalpunkt bzw. Komma verwendet wird. Die Stellung dieses Dezimalpunkts ist natürlich unterschiedlich. Dementsprechend wären für die Ziffernanzeige bei 6 bis 12 Ziffern mit je acht Segmenten 48 bis 96 Leitungen zur Ansteuerung erforderlich. Bei einer solchen großen Anzahl von Leitungen ist die Fehlermöglichkeit relativ groß, außerdem sind die Herstellungskosten dieser Teileinrichtung hoch. Eine interessante Realisierungsmöglichkeit besteht darin, daß die 7 (+1) Segmentsteuerleitungen für alle Stellen zusammengefaßt werden. Damit sind nicht mehr für jede Stelle 7 (+1) Leitungen erforderlich, sondern nur noch 7 (+1) Leistungen für alle Stellen der Ziffernanzeige. Die genannten 6 bis 12 Stellen, einschließlich des Dezimalpunkts, erfordern nur noch insgesamt acht Segmentsteuerleitungen. Bei diesem Verfahren sind allerdings Stellenauswahlleitungen für die einzelnen Stellen notwendig. Bei z. B. 9 anzeigbaren Stellen auf der

Ziffernanzeige sind damit  $(7+1)+9 = 17$  Leitungen erforderlich. Das beschriebene Verfahren ist im Bild 2.6 dargestellt. Das menschliche Auge kann, wenn sich Bilder auf einer Anzeige laufend schnell verändern, die Einzelbilder nicht mehr wahrnehmen, sondern nur noch die Bildfolge, wie man das vom Kino oder vom Fernsehen kennt. Wenn auf der Ziffernanzeige eines Taschenrechners die Darstellung jede  $1/1000$  Minute (min) erscheint und für jeweils 100 Mikrosekunden ( $\mu s$ ) bestehen bleibt, kann das menschliche Auge die Pausen, in denen nicht ausgeleuchtet wird, nicht mehr wahrnehmen; die Darstellung erscheint in jeder Stelle als stehende Ziffer. Bei diesem Verfahren leuchten die Segmente nur, wenn die erforderlichen Segmentsteuerleitungen und zusätzlich die Stellenauswahlleitung mit einem Impuls versehen werden. Im Bild 2.6a ist gezeigt, daß die acht Segmentsteuerleitungen für alle darstellbaren Stellen (im Bild zwei) zuständig sind. Die Art der Anschaltung der acht Segmentsteuerleitungen innerhalb einer Stelle zeigt Bild 2.6c. Bild 2.6b läßt den Impulsverlauf erkennen. Zu beachten ist, daß die Stellenauswahlleitungen *A* und *B* zur Zifferndarstellung innerhalb der Stelle *A* und *B* führen, jedoch zeitlich hintereinander. Es wird auf der Ziffernanzeige 3.4 sichtbar. Jede einzelne Ziffer und der Dezimalpunkt leuchten nur in der Zeit, in der die betreffende Stellenauswahlleitung wirkt. Zwischen den Ansteuerungen der einzelnen Ziffern sind kleine Pausen. Sind alle anzuzeigenden Ziffern dargestellt, erfolgt von vorn beginnend eine Wiederholung des Vorgangs.

Das durch dieses Verfahren erzeugte *Blinken* läßt sich auch für das menschliche Auge sichtbar machen, wenn man den Taschenrechner schnell hin und her bewegt. Ansonsten ist bei der normalen Nutzung des Taschenrechners, wenn dieser z. B. auf dem Tisch liegt, das Blinken nicht zu erkennen, für den Menschen erscheint ein stabiles Bild auf der Ziffernanzeige.

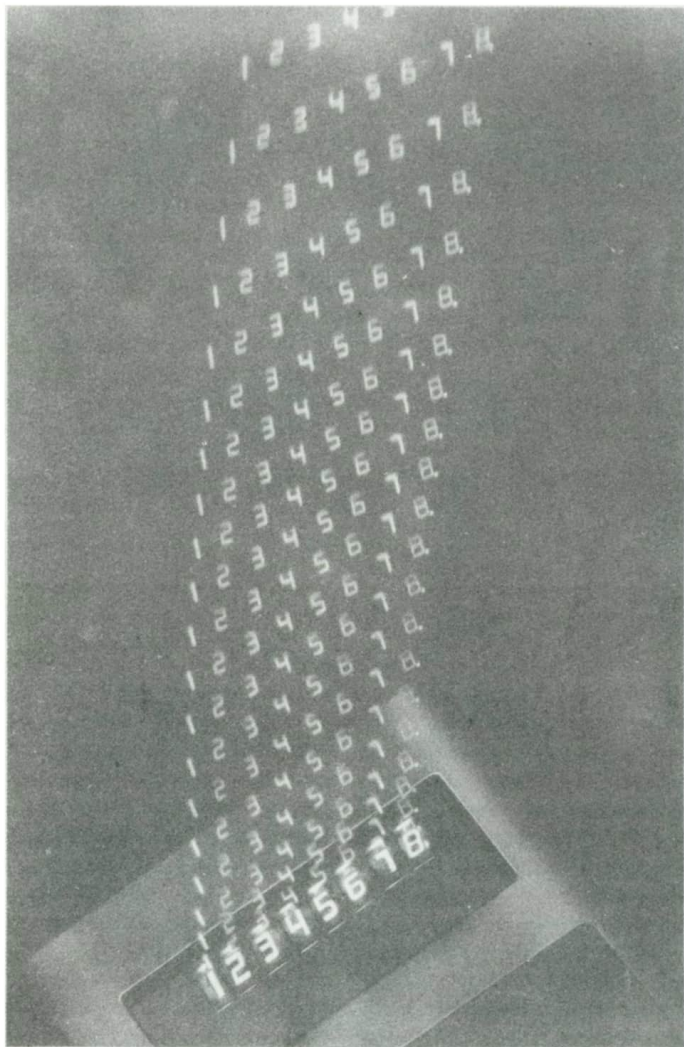


**Bild 2.6. Zeitscheibenverfahren bei der Ziffernanzeige des Taschenrechners**

Die Segmentsteuerleitungen gelten für alle Stellen der Ziffernanzeige, jede Stelle wird mit einer besonderen Stellenauswahlleitung angesteuert.

- a) Ansteuerung der Ziffern mit den gemeinsamen Segmentsteuerleitungen und den Stellenauswahlleitungen;
- b) Zeitdiagramm; c) Segmente einer Ziffernstelle mit den zugehörigen Anschlüssen

Die Fotoaufnahme eines schnell bewegten Taschenrechners ist im Bild 2.7 dargestellt. Aus dem Bild ist recht gut zu erkennen, daß die Ziffern nicht immer leuchten und Pausen zwischen dem Ausleuchten der einzelnen Stellen bestehen.



*Bild 2.7. Foto eines schnell bewegten Taschenrechners*

### 2.3. Anpassung des Tastenfelds

Die Eingabe- und Ausgabemöglichkeiten in Form von Tastatur und Ziffernanzeige benötigen eine große Anzahl von Leitungen zur Verbindung mit den elektronischen Schaltungen des Rechners. Wir haben schon festgestellt, daß die Verwendung des Zeitscheibenprinzips und die Zusammenfassung von Leitungen zu funktionellen Leitungsbündeln zu einer nennenswerten Verminderung der Leitungen führt. Auf den Tastaturen der Taschenrechner sind i. allg. 20 bis 50 Tasten vorhanden. Die Anzahl der Anschlüsse eines integrierten Schaltkreises im Taschenrechner beträgt maximal 30 bis 40. Diese Anschlüsse würden nicht einmal ausreichen, um alle Leitungen von den Tasten aufzunehmen. Außerdem wären dann vom integrierten Schaltkreis keinerlei weitere Verbindungen zu den anderen Baugruppen des Taschenrechners, z. B. zur Ziffernanzeige, möglich. Aus diesem Grund muß bei der Verbindung der Tastatur zum integrierten Schaltkreis ebenso eine Zusammenfassung der Leitungen erfolgen, wie wir das bei der Ziffernanzeige erkannt haben. Betrachten Sie dazu das Bild 2.8.

In diesem Bild sind die reduzierten Verbindungsleitungen zwischen Tastatur und integriertem Schaltkreis dargestellt. Auch kann man die reduzierten Verbindungsleitungen vom integrierten Schaltkreis zur Ziffernanzeige sehen, wie das bereits im Bild 2.6 dargestellt wurde. Auf den Stellenauswahlleitungen *A, B, C, ...* der Ziffernanzeige folgen nacheinander Impulse. Diese Leitungen können auch zur Auswahl je einer Tastengruppe verwendet werden. Mit dieser Methode ist es möglich, die Leitungen auch für die Tastatur wesentlich zu verringern. Entsprechend dem Bild 2.8 benötigen wir vier Tastatureingangsleitungen, außer-

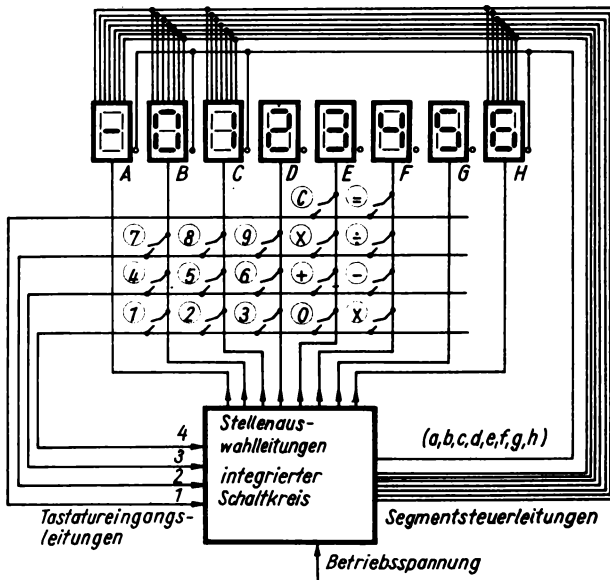


Bild 2.8. Anschluß der Tastatur an den integrierten Schaltkreis

dem werden die Stellenauswahlleitungen *B*, *C*, *D*, *E* und *F* verwendet. Eine Tastaturdekodierschaltung wertet die vier Tastatureingangsleitungen und die verwendete Stellenauswahlleitung aus. Damit ist genau ermittelbar, welche Taste gedrückt wurde. Mit einer solchen Gestaltung erhält man ein  $5 \times 4$ -Raster. Jeder Kreuzungspunkt der Tastatureingangsleitungen mit den Stellenauswahlleitungen ist mit einem Schaltkontakt versehen. Wenn z. B. die Stellenauswahlleitung *C* ausgewählt wurde und die dritte Tastatureingangsleitung einen Impuls führt, dann ist die Ziffer 5 auf der Tastatur gedrückt worden.

Beim Drücken einer Taste wird nicht sofort die Tasteninformation vom integrierten Schaltkreis übernommen. Diese Übernahme erfolgt erst dann, wenn durch die Tastaturdekodierschaltung eine systematische Abfrage der einzelnen Tastaturstellen erfolgt ist. Die Zeit zwischen dem Tastendruck und der durchgeführten systematischen Erkennung ist sehr gering und fällt nicht ins Gewicht. Die Zeitverschiebung kann unterschiedlich lang sein, je nachdem, ob nach dem Beginn der Abfrage die gedrückte Taste schnell erkannt wird oder erst am Ende der maximal möglichen Abfragezeit die entsprechende Taste ermittelt wurde. Grundsätzlich ist aber die Abfrage beendet, wenn die gedrückte Taste erkannt wurde. Falls vor Abschluß der Abfrage eine weitere Taste gedrückt wurde, so wird diese zweite Taste nicht erkannt. Demzufolge kann die Wirkung einer nachfolgenden Taste erst eintreten, wenn das Abfragen der vorhergehenden Taste beendet ist und der Grundzustand der Dekodierschaltung wiederhergestellt wurde. Das Abfragesystem setzt nicht sofort mit dem Berühren oder Drücken einer Taste ein, eine Verzögerungszeit ist wirksam. Dies ist erforderlich, weil es vorkommen kann, daß man zufällig eine Taste berührt oder kurzzeitig drückt, die eigentlich nicht gedrückt werden sollte. Dieses Fehldrücken ist um so häufiger, je kleiner die Tasten, je enger die Tastatur und je größer die Fingerkuppen des Nutzers sind. Die Verzögerungszeit ist natürlich recht gering. Nach dem Kennenlernen seines Taschenrechners weiß der Nutzer genau, nach welcher Zeit die Tastatur anspricht. Würde das Abfragesystem bereits beim Berühren oder beim kurzzeitigen Druck einer Taste reagieren, dann wären die Fehlermöglichkeiten relativ groß.

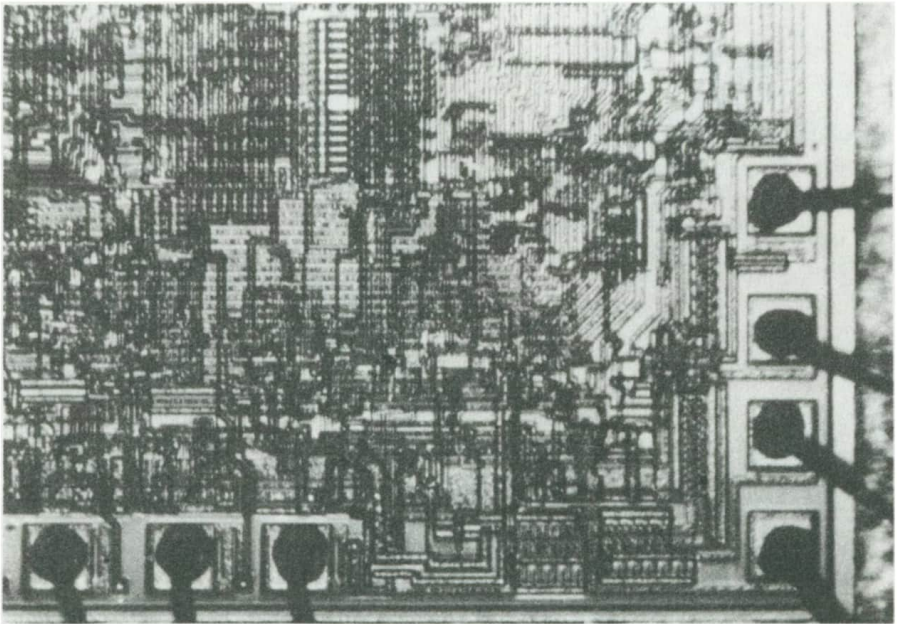
Mit dem erläuterten Abfragesystem lassen sich einige interessante Untersuchungen anstellen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen können wegen der verschiedenen Realisierungsmöglichkeiten der Taschenrechner unterschiedlich sein. Deshalb werden hier nur einige Beispiele solcher Untersuchungen angeführt:

1. Wenn wir eine Zifferntaste drücken, wird diese Ziffer auf der Ziffernanzeige dargestellt. Wir lassen diese Taste weiterhin gedrückt und drücken außerdem eine oder weitere Tasten. Anschließend werden die Tasten in unterschiedlicher Reihenfolge losgelassen. Meist ist nur die zuerst gedrückte Ziffer auf der Ziffernanzeige ablesbar.
2. Versuchen wir einmal, gleichzeitig mehrere Tasten zu drücken. Fast immer ist das Ergebnis so, wie wir es auch erwarten, nur eine Ziffer erscheint auf der Ziffernanzeige. Es ist die Ziffer, die die Tastaturdekodierschaltung zuerst erkannt hat. Dies ist deshalb so, weil kaum anzunehmen ist, daß durch den Nutzer tatsächlich bewußt zeitgleich zwei Tasten gedrückt werden. Sollte zufällig einmal zur gleichen Zeit der Tastendruck auf zwei oder mehr Tasten erfolgt sein, so entstehen ganz überraschende Darstellungen, z. B. Striche, nicht definierte Symbole oder völlig andere Ziffern (die nicht gedrückt wurden).

Dieser Effekt kann auch eintreten, wenn schon mehrere Stellen durch Drücken einer Taste richtig angezeigt wurden und erst dann das Drücken zweier oder mehrerer Tasten zur gleichen Zeit erfolgt.

## 2.4. Die Seele des Geräts — der großintegrierte Schaltkreis

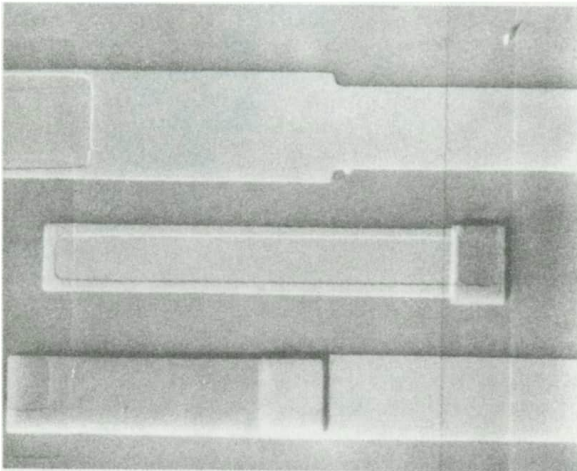
Die komplizierten Funktionen des Taschenrechners werden fast gänzlich von einem oder mehreren integrierten Schaltkreisen realisiert. Diese Schaltkreise sind selbständige Systeme, die als Einheit betrachtet werden müssen. Die Gehäuse der integrierten Schaltkreise können nicht geöffnet werden. Im integrierten Schaltkreis sind die Funktionen einer größeren Anzahl von Transistoren, aber auch von Dioden und Widerständen verwirklicht. Die Schaltkreise werden mit einer komplizierten Technologie hergestellt. Betrachten Sie dazu die Bilder 2.9 und 2.10. Bild 2.10 sieht vielleicht einfach und verständlich aus, für die Herstellung des abgebildeten Schaltkreisdetails ist jedoch ein erheblicher Aufwand erforderlich. Das hat zwei Gründe: Einerseits sind die Abmessungen sehr klein (auf einem etwa  $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$  kleinen Siliziumplättchen müssen etwa 1000 bis 10000 Transistor- und andere Bauelementefunktionen aufgebracht werden), andererseits



*Bild 2.9. Ein Ausschnitt des großintegrierten Schaltkreises*

Die realen Abmessungen betragen etwa  $0,7\text{ mm} \times 1,0\text{ mm}$ , die Verdickungen am Rand stellen die Verbindungen des Schaltkreises nach außen her

müssen die Transistorfunktionen aber noch abgeschlossene Einheiten sein. Die verwendeten Siliziumkristalle müssen so beschaffen sein, daß in den verschiedenen Kristallbereichen nur begrenzte Verunreinigungen vorhanden sind. Man kann sich vorstellen, daß die exakte Bestimmung der vorgesehenen Eigenschaften und Materialmengen, wie sie für einen integrierten Schaltkreis benötigt werden, recht kompliziert sind. Dies ist besonders wichtig, wenn man nicht nur an den gesamten integrierten Schaltkreis denkt, sondern an die einzelnen Bauelementefunktionen im Schaltkreis. Fehlerhafte Bauelementefunktionen dürfen nicht vorhanden sein, weil durch einen einzigen Fehler die Wirksamkeit des gesamten Schaltkreises fraglich ist bzw. der Schaltkreis funktionsuntüchtig wird. Schaltkreisreparaturen können nicht ausgeführt werden.



*Bild 2.10. Ein Schaltungsdetail (Inverter) des großintegrierten Schaltkreises*

Das mittlere Rechteck hat die Abmessungen  $10\ \mu\text{m} \times 10\ \mu\text{m}$

Entwurf und Herstellung von Taschenrechnerschaltkreisen erfordern das Anfertigen von sog. *Masken*. Das Anfertigen dieser Masken ist sehr zeit- und kostenintensiv. Deshalb kann nur an eine Maskenfertigung gedacht werden, wenn eine genügend große Anzahl integrierter Schaltkreise einer bestimmten Art vorgesehen ist. Damit werden die Maskenkosten auf die Anzahl der hergestellten integrierten Schaltkreise aufgeschlüsselt, die Kosten jedes einzelnen integrierten Schaltkreises werden somit geringer als bei der Herstellung nur einer geringen Anzahl von Schaltkreisen.

Taschenrechnerschaltkreise werden hauptsächlich in *pMOS-Technologie* hergestellt. Diese Technologie ist relativ einfach, auch kann die technologische Kette günstig gestaltet werden. Die Operationsgeschwindigkeiten dieser Schaltkreise sind für die Anwendung bei Taschenrechnern, die ja eine besondere Zielstellung haben, sehr zweckmäßig.

Die Arbeitsweise der verwendeten integrierten Schaltkreise ist digital — die Wirksamkeit wird über zwei stabile Zustände erreicht. Ein Wechsel der beiden Zustände kann jeweils entsprechend den Eingangsbelegungen des Schaltkreises erfolgen.

Integrierte Schaltkreise der Taschenrechner lassen sich in zwei große Gruppen einteilen:

1. **Verarbeitungs- und Steuerschaltkreise**, die die arithmetischen und logischen Funktionen, die Steuerung der Datenübertragungen und andere Steuerungen realisieren. Im integrierten Schaltkreis werden die Ziffern in binärer Form abgebildet. Die Verarbeitung von binär dargestellten Ziffern ist mit einfacher Logik möglich. Sie ist im einfachsten Fall nichts anderes als die Grundrechenart

*Addition:*

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ und Übertrag } 1.$$

Diese Schaltkreise sind schnell, die realisierte Logik ist übersichtlich.

2. **Speicherschaltkreise** für binäre Ziffern. Diese Speicher nehmen die eingetasteten Zahlen solange auf, bis eine Verarbeitung durchgeführt wird. Speicher mit der Zielstellung einer kurzzeitigen Aufbewahrung von Zahlen heißen *Register*. Speicher sind für mehrere Dezimalziffern verwendbar, wobei aber stets die interne Speicherung binär erfolgt. Mit den Speichereinhalten können einfache Operationen ausgeführt werden, z. B. Stellenverschiebungen.

Sind in einem Taschenrechner nur geringe Speichermöglichkeiten vorhanden, so kann ein separater Speicherschaltkreis eingespart werden, diese geringen Speichermöglichkeiten werden dann mit auf dem Verarbeitungs- und Steuerschaltkreis angebracht. Geringe Speichermöglichkeiten sind z. B. nur zwei Register mit je acht Dezimalziffern.

Für die Tätigkeit der Taschenrechnerschaltkreise ist ein *Taktgenerator* erforderlich. Die periodischen Taktimpulse sind für die Teileinheiten der integrierten Schaltkreise notwendig. Taktgeneratoren, die für Schaltkreise der pMOS-Technologie verwendet werden, haben eine Frequenz von einigen hundert Kilohertz (kHz), ein typischer Wert ist 250 kHz. Das bedeutet, daß im Schaltkreis während 4  $\mu$ s eine bestimmte Teiloperation durchgeführt wird.

Bei Speicherschaltkreisen der Taschenrechner sind zwei Arten zu unterscheiden:

- a) **Nur-Lese-Speicher**, auch *Festwertspeicher* oder ROM (read only memory) genannt. Sie enthalten feststehende Informationen, die für die Befehlsabarbeitung oder für unveränderliche Daten (Konstanten,  $\pi$ , e u. a.) verwendet werden. Diese Informationen werden von der Herstellerfirma in den Speicherschaltkreis eingespeichert. Die Einspeicherung erfolgt mit besonderen Masken während des Herstellungsprozesses des Speicherschaltkreises. Mit diesem Verfahren, feststehende Informationen nicht korrigierbar in den Speicher aufzunehmen, wird dem Nutzer die Anwendung des Taschenrechners erleichtert. So braucht der Nutzer z. B. zum Radizieren keine Formel aufzustellen, die nur die vier Grundrechenarten enthält (weil der Taschenrechner nur vier Grundrechenarten ausführen kann, nicht aber das direkte Radizieren). Diese Formel kann bereits im Nur-Lese-Speicher programmiert sein, der Nutzer benötigt nur die entsprechende Taste für das Radizieren. Auch die Aufnahme von konstanten Werten erleichtert die Anwendung des Taschenrechners, weil diese Werte dann nicht mehr ständig eingetastet zu werden brauchen. Welche

Konstanten im Nur-Lese-Speicher enthalten sind, kann man an den zugehörigen Tasten erkennen.

- b) **Lese-Schreib-Speicher**, auch RAM (random access memory) genannt. Diese Speicher können während der Nutzung des Taschenrechners verschiedene Zahlen aufnehmen, aufbewahren und wieder abgeben.

## 2.5. Wirkungsweise des Taschenrechners

Aufbau und Wirkungsweise der Taschenrechner sind ähnlich wie bei Großrechnern. Die Lösungsmöglichkeiten wurden modifiziert für den Taschenrechner übernommen. In vielen Dingen erfolgten Vereinfachungen, ohne jedoch die Ordnung der Arbeitsweise eines Rechners zu durchbrechen. Die Gestaltung des Taschenrechners, abgeleitet von den Prinzipien eines Großrechners, erfolgte stets unter den besonderen Zielstellungen eines Taschenrechners. Solche Zielstellungen sind:

- Im Taschenrechner können mehrstellige Zahlen in den Registern aufbewahrt werden, die Speicherung erfolgt binär, die Registerinhalte können leicht verändert werden.
- Die für einzelne Operationen benötigten Schrittfolgen (Programmschritte oder Befehle) wurden bei der Herstellung des Speicherschaltkreises in den Nur-Lese-Speicher (Programmspeicher) eingeschrieben, z. B. für das Radizieren. Die Schrittfolgen können automatisch aufgerufen werden, um die betreffende Operation auszuführen.
- Die Möglichkeiten der arithmetisch-logischen Einheit sind begrenzt, oft gibt es nur Addition und Subtraktion. In diesem Fall benötigen z. B. Multiplikation und Division auch fest eingespeicherte Programme.

Der Taschenrechner ist also nichts anderes als eine auf spezielle Aufgaben orientierte Rechenmaschine.

Im Bild 2.11 ist der innere Aufbau des Taschenrechners aus funktioneller Sicht dargestellt. Er erinnert sehr an den Aufbau eines Großrechners.

Wir werden nun Schritt für Schritt die einzelnen Funktionseinheiten kennenlernen, die im Bild 2.11 enthalten sind:

In das **Operandenregister** wird ein Operand aufgenommen (bei einer Addition der 1. Summand, bei einer Division der Dividend). Meist ist das die zuerst über die Tastatur eingegebene Zahl. Die Überführung in das Operandenregister erfolgt, wenn nach dem Eintasten der Zahl das Operationszeichen gedrückt wird.

In das **Anzeigeregister** wird der 2. Summand bei einer Addition, der Subtrahend bei einer Subtraktion, der Multiplikator bei einer Multiplikation und der Divisor bei einer Division aufgenommen. Auch das Ergebnis der durchgeführten Operation erscheint im Anzeigeregister. Die in diesem Register enthaltenen Ziffern werden in der Ziffernanzeige dargestellt.

Das **Akkumulatorregister** enthält die Teilergebnisse und kann zusammen mit dem Anzeigeregister eine Einheit bilden.

Die **arithmetisch-logische Einheit**, die z. B. addieren und subtrahieren kann, führt auch die notwendigen Teilschritte zur Ausführung z. B. einer Multiplikation oder einer Division durch.

Das **Adreßregister** enthält jeweils die Adresse desjenigen Programmspeicherplatzes, auf dem der nächste programmierte Teilschritt zur Durchführung einer Operation zu finden ist.

In den **Programmspeicher** werden die Programmschritte aufgenommen, die zur Ausführung der möglichen verschiedenen Operationen benötigt werden (Grundrechenarten, Überlauferkennung und -anzeige, Fehlersignale, Vorzeichenbehandlung usw.).

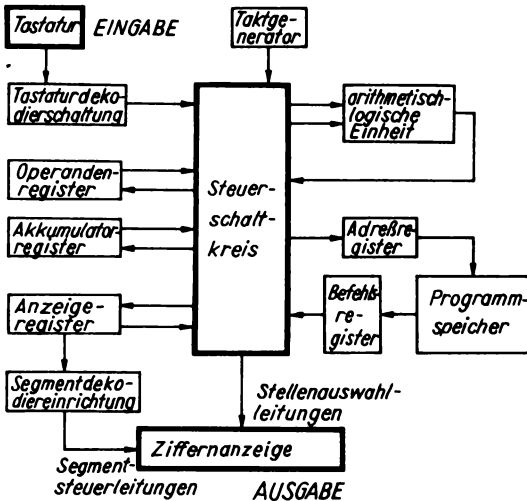


Bild 2.11. Blockschaltbild eines Taschenrechners

In das **Befehlsregister** werden die aus dem Programmspeicher entnommenen Befehle aufgenommen, die zur Durchführung der Operationen erforderlich sind. Der Inhalt des Befehlsregisters bleibt solange erhalten, bis der Befehl ausgeführt ist und ein neuer Befehl aus dem Programmspeicher übernommen wurde.

Der **Steuerschaltkreis** steuert die gesamte Arbeit im Taschenrechner.

Bevor wir uns mit der Wirkungsweise des Taschenrechners bekannt machen, muß noch kurz die Zifferndarstellung vorgestellt werden. Außerdem werden wir auch die Art der Datenübertragung und die Verarbeitung der Registerinhalte erläutern. Die Schaltkreise sind für eine binäre Arbeitsweise aufgebaut, d. h., sie können zwei Zustände auseinanderhalten. Dezimalziffern können also nicht in der uns gebräuchlichen Darstellung im Taschenrechner aufgenommen und verarbeitet, sondern müssen erst in die binäre Darstellung gebracht werden. Für die einzelnen Dezimalziffern 0 bis 9 benötigen wir vier Binärstellen (das entspricht einer Tetrade), jede einzelne Binärstelle entspricht einer Information von 1 bit (binary digit). Die Verwendung eines standardisierten Codes ist dabei zweckmäßig. Dies ist i. allg. der **BCD-Kode** (binary coded decimal), der binär kodierte Dezimalcode. Er wird am häufigsten verwendet, um Dezimalziffern binär darzustellen. Bei Taschenrechnern ist der BCD-Kode vorherrschend, teilweise verwendete andere Codes haben eine völlig untergeordnete Bedeutung. Dezimalziffern werden wie folgt im BCD-Kode dargestellt:

Dezimalziffer	entsprechende BCD-Darstellung
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Unsere gewohnten Dezimalziffern muß der Taschenrechner umformen. Die binäre Speicherung und Verarbeitung ist recht günstig, weil mit Binärziffern eine schnelle Verarbeitung in der arithmetisch-logischen Einheit möglich ist. Beispielsweise erfolgt bei der Addition von 3 + 5 die Darstellung:

$$\begin{array}{r}
 3 \qquad \qquad 0011 \\
 +5 \qquad \qquad +0101 \\
 \hline
 =8 \qquad \qquad =1000
 \end{array}$$

Das Beispiel wurde so gewählt, daß bei der Addition das Ergebnis in binärer Form bereits endgültig ist, d. h. der zugelassenen Darstellung im BCD-Kode entspricht. Der aufmerksame Leser wird aber feststellen, daß bei der Addition von 5 + 7 das Ergebnis zwar auch in binärer Form dargestellt werden kann, jedoch eine unmittelbare Weiterverwendung des Ergebnisses nicht möglich ist:

$$\begin{array}{r}
 5 \qquad \qquad 0101 \\
 +7 \qquad \qquad +0111 \\
 \hline
 =12 \qquad \qquad =1100
 \end{array}$$

1100 ( 12 ) entspricht nicht der BCD-Darstellung. Die Zahl 12 müßte anders geschrieben werden:  
0001 0010.

Der Fehler ist relativ einfach zu beseitigen, wenn die Regeln der Ziffernaddition im BCD-Kode beachtet werden. Danach darf das Ergebnis einer Tetradenaddition nicht größer als 9 sein. Falls dies aber doch der Fall ist, muß sofort eine Korrekturaddition durchgeführt werden. Der Korrektursummand ist dabei 0110 ( 6 ). Diese Korrekturaddition mit 0110 bezieht sich auf das reine Additions-ergebnis der zwei zu addierenden Tetraden, das größer als 9 ist.

In unserem Fall wird addiert:

$$\begin{array}{r}
 1100 \\
 +0110 \\
 \hline
 =0001 \ 0010 ,
 \end{array}$$

dies ist das brauchbare Ergebnis in der BCD-Darstellung. Beide Tetraden des Ergebnisses sind jetzt nicht größer als 9.

Die Datenübertragung zwischen den Registern erfolgt wie im Bild 2.12 dargestellt. Zur Zahl 1976 soll die Zahl 26513 addiert werden. Zuerst wird das Ein-

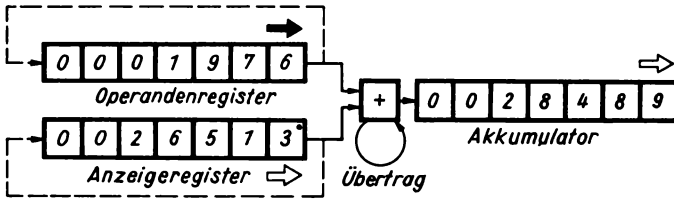


Bild 2.12. Die in den Registern gespeicherten Zahlen werden zur Ergebnisbildung verschoben

tasten der Zahl 1976 durchgeführt und in das Anzeigeregister aufgenommen. Gleichzeitig wird der Inhalt des Anzeigeregisters in der Ziffernanzeige sichtbar. Nach dem Drücken der Operationstaste für die Addition wird die Zahl 26513 eingetastet. Mit dem Drücken der Additionstaste wird der Inhalt des Anzeigeregisters in das Operandenregister übernommen, aber außerdem bleibt die Zahl im Anzeigeregister und somit in der Ziffernanzeige erhalten. Das Eintasten der ersten Ziffer der Zahl 26513 führt zum Löschen des Anzeigeregisters, und damit ist die Zahl 1976 auch in der Ziffernanzeige verschwunden. Die neue Zahl 26513 wird ins Anzeigeregister und in die Ziffernanzeige übernommen. Danach stehen beide Zahlen zur Addition bereit. Diese wird ausgeführt, indem stellenweise die Ziffern in binärer Darstellung in das Addierwerk geschoben werden. Die fertigen stellenweisen Teilergebnisse werden in den Akkumulator eingeschrieben. Zu beachten ist aber, daß der Akkumulator nach der erwähnten Regel der Ziffernaddition nur Teilergebnisse (Tetraden) aufnimmt, die nicht größer als 9 sind. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird im Addierwerk eine Korrekturaddition ausgeführt. Die beiden zu addierenden Zahlen werden im Operandenregister und im Anzeigeregister nach rechts durchgeschoben, um systematisch die Addition zu ermöglichen. Es besteht auch die Möglichkeit, beim Herausschieben der Ziffern aus den Registern diese Ziffern gleich wieder von der anderen Seite stellenweise aufzunehmen. Im Bild 2.12 ist das durch die gestrichelten Linien angedeutet. Dieser Vorgang heißt *Rotation nach rechts*, im Vergleich zum einfachen Herausschieben, das *Verschiebung nach rechts* heißt. Nach durchgeführter Addition stehen die Registerinhalte des Operandenregisters und des Anzeigeregisters wieder in diesen zur Verfügung, sie gehen bei der Addition trotz Ergebnisbildung nicht verloren. Etwas anders verhält es sich, wenn Akkumulatorregister und Anzeigeregister eine Einheit darstellen. Dabei wird das Ergebnis in das kombinierte Akkumulator-/Anzeigeregister eingeschrieben, der ursprüngliche Inhalt des Anzeigeregisters wird überschrieben und ist anschließend nicht mehr nutzbar. Der Inhalt des Operandenregisters kann allerdings wiederverwendet werden. Darüber Näheres im Abschn. 4.

In Tafel 2.1 ist der Additionsvorgang nach dem Verfahren des Bildes 2.12 in Einzelschritten dargestellt, und zwar als Schema für eine Addition mehrstelliger Zahlen. Es ist ersichtlich, wie die einfach aussehende Aufgabe eine Reihe von Einzelschritten erfordert. Diese notwendigen Schritte, das **Programm**, müssen im Taschenrechner gespeichert sein. Diese Speicherung erfolgt im Programmspeicher. Während der Aufgabenlösung der Addition werden die einzelnen Programmschritte aus dem Programmspeicher aufgerufen und ausgeführt. Zu beachten ist aber, daß nicht bei jeder Addition die gleiche Programmschrittzahl auszu-

Tafel 2.1. Schema für die Addition mehrstelliger Zahlen

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Additionsschritte
0000	1000	1000	0010	882 im Operandenregister
0000	0110	1001	0101	695 im Anzeigeregister
			0111	In der kleinsten Stelle (Einer) werden die einzelnen Bitstellen addiert. Die Summe ist nicht größer als 9, eine Korrektur ist nicht erforderlich, das Ergebnis kann in das Akkumulatorregister übernommen werden.
		0001		In der nächsten Stelle werden die einzelnen Bitstellen addiert.
		0110		Die Summe ist größer als 9, deshalb muß eine Korrektur erfolgen.
	1	0111		Das Ergebnis kann in das Akkumulatorregister eingeschrieben werden, der Übertrag wird in die nächste Stelle (Hunderter) übernommen.
	1111			In der nächsten Stelle (Hunderter) werden die einzelnen Bitstellen addiert. Die Summe ist größer als 9, eine Korrektur muß erfolgen.
	0110			
1	0101			Das Ergebnis kann in das Akkumulatorregister eingeschrieben werden, der Übertrag wird in der nächsten Stelle (Tausender) aufgeführt.
0001				In der höchsten Stelle (Tausender) werden die einzelnen Bitstellen addiert, die Summe ist nicht größer als 9, eine Korrektur ist nicht erforderlich. Das Ergebnis kann in das Akkumulatorregister eingeschrieben werden.
0001	0101	0111	0111	Das Akkumulatorregister enthält 1577.

führen ist. Auch ist die Additiondurchführung von Zwischenresultaten abhängig (größer oder nicht größer als 9). Eine weitere Einflußgröße besteht in der Anzahl der zu addierenden Tetraden.

Ist bereits die Addition im Ablauf kompliziert, so sind die Abläufe bei den anderen Grundrechenarten keinesfalls einfacher. Die Subtraktion wird ebenfalls wie die Addition in Teilschritten ausgeführt. Bei der Subtraktion müssen auch sinngemäß Überträge beachtet werden. Korrekturen sind in bestimmten Fällen auszuführen. Die Multiplikation ist schon viel schwerer, weil im Sinne einer schnellen Durchführung der Multiplikation keine volle Rückführung auf die Addition möglich ist. Bei den meisten Taschenrechnern wird die Multiplikation so durchgeführt, wie das vom manuellen Multiplizieren mit Papier und Bleistift bekannt ist. Das „kleine Einmaleins“ wird in Form einer Multiplikationstabelle in den Speicher (ROM) des Taschenrechners aufgenommen. Die notwendigen Ergebnisse können unter Verwendung der beiden zu multiplizierenden Ziffern dem Speicher entnommen werden. Die Steuerung des Programmablaufs organisiert dabei den richtigen Zugriff zum Speicher und die Ausführung der Teilmultiplikationen (richtiges Untereinanderschreiben der Teilergebnisse usw.). Die Division ist ähnlich, sie ist in Tafel 2.2 dargestellt. Die Division läuft wie folgt ab:

Vom Dividenden ziehen wir das Hundertfache, später das Zehnfache und dann das Einfache des Divisors ab, bis wir jeweils ein negatives Ergebnis bei den Subtraktionen erhalten. Beim Vorliegen eines negativen Ergebnisses wird anschließend einmal das Hundertfache bzw. Zehnfache bzw. Einfache des Divisors addiert, damit wieder ein positiver Rest vorhanden ist. Sehen Sie sich bitte Tafel 2.2 an und führen Sie die Division nach dem dort angegebenen Algorithmus schrittweise aus.

Zur Beschleunigung der Division verwenden manche Taschenrechner auch Hilfstafeln, ähnlich wie bei der Multiplikation. Diese Tafeln sind ebenfalls im Speicher des Taschenrechners (ROM) enthalten. Sie geben darüber Auskunft, wievielfach der Divisor im Dividenden enthalten ist. Das geht natürlich nicht für alle vorkommenden Möglichkeiten. Deshalb ist die Quotientenauswahltafel so gestaltet, daß jeweils mit den ersten beiden Stellen des Dividenden und mit einer Stelle des Divisors festgestellt wird, wievielfach dieser einstellige Divisor im zweistelligen Dividenden enthalten ist. Das ist nur ein grober Schätzwert, der nicht genau stimmen muß, wenn die weiteren Stellen von Dividend und Divisor beachtet werden. Jedoch ist das Verfahren schneller als das der Tafel 2.2.

Unser Beispiel bezieht sich auf ganzzahlige Operanden. Sind jedoch komma-behaftete Zahlen vorhanden und die Stellenzahl nach dem Komma bei beiden Zahlen unterschiedlich, so ist das auch bei der betreffenden Operation zu beachten. Bei der Ergebnisdarstellung erwarten wir natürlich das Komma an der richtigen Stelle.

Wir können feststellen, daß die Durchführung der Grundrechenarten recht einfach aussieht, aber innerhalb des Taschenrechners doch kompliziert ist. Allerdings merkt der Nutzer nichts von den inneren Vorgängen, er tastet die Operationsart und die Operanden ein und erwartet nach der Rechnung das richtige Ergebnis auf der Ziffernanzeige.

Beeinflußt wird die Rechenorganisation auch dadurch, daß bestimmte *Genauig-*

Tafel 2.2. Ausführliche Durchführung einer Division

Divisionsschritte (mit der Rückstellmethode)	
1 8 4 6 5 9	Dividend im Operandenregister
7 8 9	Divisor im Anzeigeregister
(-) 7 8 9 0 0	Der Divisor wird mit 100 multipliziert (Verschiebung um zwei Stellen nach links) und vom Dividenten subtrahiert
— 1 0 5 7 5 9	Das Zwischenergebnis lautet $Q = 100$
(-) 7 8 9 0 0	
2 6 8 5 9	$Q = 200$
(-) 7 8 9 0 0	
— 5 2 0 4 1	Der Rest ist negativ, also rückstellen!
(+ ) 7 8 9 0 0	
2 6 8 5 9	$Q = 200$
(-) 7 8 9 0	
— 1 8 9 6 9	$Q = 210$
(-) 7 8 9 0	
— 1 1 0 7 9	$Q = 220$
(-) 7 8 9 0	
— 3 1 8 9	$Q = 230$
(-) 7 8 9 0	
— 4 7 0 1	Der Rest ist negativ, also rückstellen!
(+ ) 7 8 9 0	
3 1 8 9	$Q = 230$
(-) 7 8 9	
— 2 4 0 0	$Q = 231$
(-) 7 8 9	
— 1 6 1 1	$Q = 232$
(-) 7 8 9	
— 8 2 2	$Q = 233$
(-) 7 8 9	
— 3 3	$Q = 234$
(-) 7 8 9	
— 7 5 6	Der Rest ist negativ, also rückstellen!
(+ ) 7 8 9	
3 3	
Das Ergebnis lautet: $Q = 234$ Rest 33	

keitsforderungen gestellt werden. Der Taschenrechner muß demzufolge z. B. bei einer Division eine Reihe Ergebnisstellen nach dem Komma bilden. Entsprechend unserem Wunsch und seinen Möglichkeiten wird das Ergebnis in der Ziffernanzeige dargestellt, die letzte Stelle kann dabei gerundet sein. Insgesamt ist der Algorithmus für die Beachtung der Kommas der eingegebenen Zahlen und des Ergebnisses kompliziert. Interessant und aufwendig wird es, wenn eine halblogarithmische Zahlendarstellung vorliegt, bei der der Rechner mit Mantissen und Exponenten rechnen muß. Dazu werden wir im Abschn. 4. noch Ausführungen lesen können.

Kurz zusammengefaßt, arbeitet der Taschenrechner nach folgender Methode: Einschreiben des 1. Operanden über die Tastatur in das Anzeigeregister, die Operationstaste ist zu drücken — damit wird der 1. Operand in das Operandenregister übernommen. Dabei bleibt aber der 1. Operand noch im Anzeigeregister

und in der Ziffernanzeige erhalten. Nach dem Drücken der Operationstaste kann der 2. Operand eingetastet werden. Er wird im Anzeigeregister aufgenommen und in der Ziffernanzeige dargestellt. Das Zeichen = wird auf der Tastatur gedrückt und die Durchführung der Operation ausgelöst, indem die einzelnen erforderlichen Programmschritte abgearbeitet werden. Die hergestellten Teilergebnisse werden im Akkumulatorregister zusammengefaßt. Die Anzeige des 2. Operanden in der Ziffernanzeige verlischt, das Ergebnis wird nunmehr angezeigt. Der Inhalt des Operandenregisters bleibt erhalten und steht für weitere Operationen zur Verfügung. Nähere Ausführungen sind im Abschn. 4. enthalten.

Einfache arithmetische Operationen werden bereits aus einer größeren Anzahl von Programmschritten zusammengesetzt. Die Addition bzw. Subtraktion benötigt etwa 200 bis 400 Programmschritte. Die Multiplikation und Division erfordern wesentlich mehr Programmschritte. Die Durchführung komplizierter Aufgaben mit vielen Programmschritten wirkt sich natürlich auf die Operationszeit aus, sie steigt proportional mit der Anzahl der Programmschritte.

Die folgenden Durchschnittsoperationszeiten sind vom Taschenrechner, von der Stellenzahl bei der Operation und der Art der Operation (Zahl der Programmschritte) abhängig:

Additionszeit	10 ... 20 ms,
Subtraktionszeit	10 ... 20 ms,
Multiplikationszeit	60 ... 100 ms,
Divisionszeit	80 ... 120 ms,
Radizierzeit	100 ... 200 ms.

Bei komplizierten Operationen ist die benötigte Zeit entsprechend größer. Operationszeiten von 1 ... 5 s sind keine Seltenheit. Die Operationszeiten für die Grundrechenarten (einschließlich Radizieren) kann der Nutzer nicht auseinanderhalten. Deshalb hat es den Anschein, als erscheine das Ergebnis sofort auf der Ziffernanzeige. Operationen im oben angegebenen Bereich von 1 ... 5 s sind z. B.  $e^x$ ,  $n!$  und  $y^x$ .

---

## 3. Wer braucht welchen Taschenrechner?

---

Taschenrechner gehören zu den langlebigen Gebrauchsgegenständen, da die integrierten Schaltkreise und auch die meisten anderen Bauteile kaum altern und während der Nutzung nicht verbraucht werden. Deshalb kann der Käufer seinen Taschenrechner über lange Jahre hinweg verwenden. Es erscheint sinnvoll, im folgenden Abschnitt etwas ausführlicher den Gebrauchswert der Taschenrechner zu untersuchen. Wir beleuchten diesen Zusammenhang auch deshalb, weil der Käufer natürlich an den Taschenrechner ganz bestimmte Forderungen stellt. Die Gesichtspunkte bei der Auswahl eines Taschenrechners können aber unterschiedlich sein.

### 3.1. Gruppeneinteilung der Taschenrechner

Auf dem Weltmarkt ist das Angebot der verschiedenen Typen sehr groß. Bei 500 bis 800 verschiedenen Taschenrechnertypen, die gegenwärtig angeboten werden, ist eine Reduzierung auf bestimmte Gruppen möglich. Mit dieser Gruppeneinteilung erhält man die Möglichkeit, das internationale Taschenrechnerangebot wesentlich besser zu überschauen. Über die Leistungsfähigkeit und die Funktionen der Taschenrechner erfolgen ausführliche Beschreibungen im Abschn. 4.

**Die wichtigsten Funktionen der Taschenrechner sind:**

- vier Grundrechenarten,
- Prozentrechnung,
- Speicherung (zusätzlich zu den erwähnten Registern ein oder mehrere Register, deren Inhalte bei der Rechnernutzung erhalten bleiben — ähnlich einem Notizbuch),
- einfache Operationen (dazu gehören  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ),
- komplizierte Operationen (exponentielle und trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen):  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $10^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $x^y$  und  $n!$ ,
- Programmierbarkeit
  1. Speicherung und Wiederholbarkeit von Programmen (der Taschenrechner speichert die Folge des Tastendrucks der Operationstasten und kann die Programme mit anderen Zahlenwerten ausführen),
  2. Speicherung und Abarbeitung von Programmen mit verzweigtem Ablauf. Die Verzweigungen ermöglichen die wahlweise Fortsetzung des Programms an bestimmten Punkten der Programmabarbeitung auf zwei verschiedenen

Wegen, je nachdem, ob die Verzweigungsbedingung erfüllt oder nicht erfüllt wird. Der Vergleich erfolgt zwischen einem im Programm festgelegten Prüfwert und einem Zwischenresultat. Auch zyklische Programme sind möglich. Zyklen entstehen bei wiederholter Abarbeitung gleicher Programme. Die Anzahl der Durchläufe durch den Zyklus wird entweder vorher festgelegt (es erfolgt laufend die Abfrage, ob die Anzahl der vorgesehenen Durchläufe durch den Zyklus schon erreicht ist) oder richtet sich nach der Erfüllung einer vorher gestellten Bedingung (z. B. Erreichung einer Genauigkeitsschranke, nach der der Durchlauf durch den Zyklus nicht mehr erforderlich ist). Im letzteren Fall ist allgemein nicht bekannt, wie oft der Zyklus durchlaufen wird.

In Tafel 3.1 ist eine Einteilung der Taschenrechner in Gruppen vorgenommen worden, um eine erste Hilfestellung für die Übersicht und Auswahl zu geben. Selbstverständlich gibt es noch weitere Unterteilungsmöglichkeiten. Beispielsweise können Taschenrechner für wissenschaftliche Zwecke unterteilt werden (in Taschenrechner für statistische, ingenieurtechnische, geodätische Zwecke usw.). Programmierbare Taschenrechner können weiter unterteilt werden in Taschenrechner, die die Programme auf Magnetkarten, auf Magnetbändern usw. speichern.

Zur Auswahl der Taschenrechner hilft auch folgende Aufstellung. Die Funktionen werden mit Punkten bewertet, sie geben dann eine Hilfestellung über den relativen Wert von zwei zu vergleichenden Taschenrechnern:

<b>Funktion</b>	<b>Punkte</b>
Grundrechenarten	8
$1/x$	2
$x^2$	2
$\sqrt{x}$	2
Speicherung	5
sin, cos, tan, arc	8
$\ln x, e^x$	4
$\lg x, 10^x$	3
hyperbolische Funktionen	4
Klammerrechnung	3 ... 8
$x^y$	5
$x!$	2
$\pi$ (als Festwert)	1
Grad- und Bogenmaß	2
%	2

Diese Punktziffern haben nicht nur einen fachlichen Wert, um die Funktionsbedeutung einzuschätzen, sondern können auch als Anhaltspunkt bei der Einschätzung des Kaufpreises dienen.

Die Aufstellung läßt also einen Vergleich zwischen der Leistungsfähigkeit und dem Preis der Taschenrechner zu, besonders aus der Sicht der Käufer. Der Montagepreis der Taschenrechner ist im wesentlichen unabhängig von der Art der realisierten Funktionen. Die Herstellung der Schaltkreise für den komplizierten Taschenrechner (z. B. für wissenschaftliche Zwecke) ist zwar teurer als für den einfachen Taschenrechner, die Montagetechnologie ist aber ähnlich. Außerdem

Tafel 3.1. Gruppeneinteilung der Taschenrechner

Taschenrechnergruppen	Fähigkeiten						
	Grundrechenarten	Prozentrechnung	Speicher	Verteilungsfunktionen (einfach)	Verteilungsfunktionen (kompliziert)	programmierbar 1	programmierbar 2
einfach	X						
ökonomisch	X	X	M				
erweitert	X	X	M	X			
wissenschaftlich	X	M	X	X	X		
programmierbar 1	X		X	X	X	X	
programmierbar 2	X		X	X	X	X	X

M: Möglichkeit der Zuordnung; X: Zuordnung

bestimmen die Schaltkreise nur zu einem gewissen Teil den Preis des Taschenrechners. Die anderen Bestandteile sind aber bereits fast kostengleich, z. B. Gehäuse und Ziffernanzeige.

Untersuchen wir einmal die mittlere Gruppe der Taschenrechner (für wissenschaftliche Zwecke) hinsichtlich der Kostenanteile für die Herstellung. Betrachten Sie dazu Tafel 3.2. Die Kostenanteile beziehen sich auf eine Massenproduktion, nicht aber auf Einzelfertigung oder Herstellung von Ersatzteilen.

Unter der Voraussetzung vertretbarer Einzelhandelspreise lohnt sich die Herstellung in Kleinserien nicht. Während vor einigen Jahren international noch versucht wurde, die defekten Taschenrechner unter Verwendung von Ersatzteilen zu reparieren, besteht jetzt i. allg. nicht mehr die Möglichkeit, Ersatzteile zu kaufen. Die Gründe liegen ebenfalls in der Notwendigkeit der Massenherstellung kompletter Taschenrechner.

Tafel 3.2. Kostenanteile bei der Herstellung von Taschenrechnern

	in Prozent
Schaltkreise	35
Halbleiterbauelemente	5
Ziffernanzeige	13
Akkumulator	13
Adapter	10
Tastatur	10
Leiterplatte	3
Gehäuse	3
Montage	8

Beträchtliche Teile des Preises von Großrechnern entstehen durch Prüfung des Rechners vor der Auslieferung. Taschenrechner sind bei weitem nicht so komplizierte Systeme, es gibt jedoch innerhalb der Massenproduktion gegenüber Großrechnern weniger Möglichkeiten der Funktionskontrolle.

Wir erwarten, daß ein zum Kauf angebotenes Rundfunkgerät, das z. B. aus sechs Funktionsgruppen besteht, vom Hersteller geprüft wurde. Der Zeitaufwand dazu ist noch vertretbar. Bei einem Taschenrechner ist das aber etwas anders. Es ist dem Hersteller nicht möglich, alle Funktionen des Taschenrechners zu erproben. Die Auswirkungen auf den Einzelhandelspreis wären erheblich. Bei der Montage wird erwartet, daß die Funktionsgruppen wie Tastatur, Ziffernanzeige, Schaltkreise usw. in Ordnung sind. Bei ordentlicher Montage muß und kann damit vorausgesetzt werden, daß der Taschenrechner funktionsfähig ist. Stichprobenkontrollen werden jedoch bei den Funktionsgruppen vor der Montage ebenso ausgeführt wie bei den fertigen Taschenrechnern. Natürlich werden auch die Erfahrungen im Lauf der Herstellung beachtet und auch offensichtliche Defekte (z. B. am Gehäuse, an der Tastatur oder an der Ziffernanzeige) führen nicht zur Auslieferung des montierten Taschenrechners. Nach diesen Ausführungen können wir nun auch verstehen, warum Taschenrechner ohne Garantie in manchen Ländern nur etwa halb soviel kosten, wie Taschenrechner mit Garantie. Bei Garantie ist im Einzelhandelspreis bereits eine Kostenpauschale für bestimmte durchschnittlich zu erwartende Garantieleistungen enthalten. Wenn wir die Preisgestaltung der Taschenrechner untersuchen und dabei die zeitliche Entwicklung verfolgen, so können wir feststellen, daß international

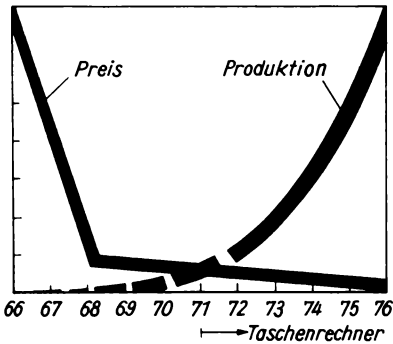


Bild 3.1. Entwicklung der Produktion und Preise der einfachen Taschenrechner in den vergangenen Jahren

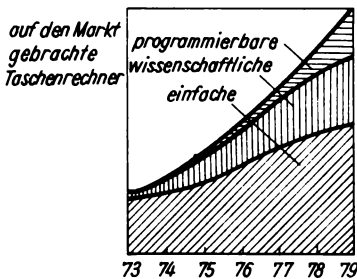


Bild 3.2. Anteile der Taschenrechnergruppen

eine allgemeine Preisverringerung eingetreten ist. Bild 3.1 zeigt die Preistendenz, die bei Taschenrechnern mit vier Grundrechenarten zu verzeichnen ist. Im Jahre 1966 war ein transistorisierter Tischrechner für vier Grundrechenarten ohne Speicher noch sehr teuer. Die Aufgaben von mehreren tausend Transistoren wurden 1968 von etwa zehn integrierten Schaltkreisen übernommen, dabei ging der Preis für die genannten Rechner stark zurück. Von 1971 an können wir im Weltmaßstab von der eigentlichen Taschenrechnerära sprechen.

Die Preisverringerung ist in Abhängigkeit vom erreichten Stand des wissenschaftlich-technischen Fortschritts zu sehen. Die jährlich auf den Markt gebrachte Taschenrechneranzahl wuchs ständig. Aus Bild 3.2 ist die Grundtendenz auf dem Taschenrechnermarkt ersichtlich.

### **3.2. Was muß beim Kauf beachtet werden?**

Wir haben festgestellt, daß zwischen der Leistungsfähigkeit und dem Preis von Taschenrechnern bestimmte Zusammenhänge bestehen. Es ist ein selbstverständliches Prinzip der Sparsamkeit, daß nur solche Taschenrechner gekauft werden, die möglichst voll ausgenutzt werden können. Taschenrechner, deren Leistungsfähigkeit weit über der vom Nutzer benötigten liegt, sind vom Käufer überbezahlt, ohne daß ein entsprechender Effekt eintritt. Es lohnt sich auch nicht, einen Taschenrechner zu kaufen, der zwar billig ist, aber dessen Leistungsfähigkeitsgrenzen bald erreicht sind. Wir wollen zu diesem Problem einige allgemeine Regeln aufstellen:

1. Wir kaufen keinen Taschenrechner, dessen Funktionen wir nicht sinnvoll ausnutzen können. Beispielsweise sind die möglichen trigonometrischen Funktionen auf dem Taschenrechner überflüssig, wenn der Nutzer nicht die erforderlichen mathematischen Kenntnisse in der Trigonometrie hat.
2. An einen Taschenrechner gewöhnt man sich systematisch. Ständig werden immer mehr Anwendungsmöglichkeiten genutzt. Solche Eigenschaften des Taschenrechners, die beim Kauf noch überflüssig erscheinen, können u. U. später unbedingt notwendig werden. Soll ein Taschenrechner von einer ganzen Familie genutzt werden, so muß der Rechner all die Funktionen lösen können, die insgesamt benötigt werden.
3. Wenn mit verketteten Funktionen nur selten gerechnet wird, dann kann auch ein einfacher Taschenrechner ausreichend sein. Die verketteten Funktionen werden dann unter Verwendung des einfachen Taschenrechners in eine größere Anzahl einfacher Funktionen aufgelöst. Der Rechengang ist dann jedoch zeitaufwendiger.
4. Wir können auch nicht vom teuersten programmierbaren Taschenrechner erwarten, daß er alle vorkommenden Aufgaben lösen kann. Die Lösungen von größeren Gleichungssystemen, von Differentialgleichungen usw. sind auch mit programmierbaren Taschenrechnern schwer erreichbar und nur in einfachen Fällen möglich. Ein Taschenrechner kann ein ausgezeichnetes Hilfsmittel sein, wenn bei der Arbeit eines Großrechners gewisse Kontrollrechnungen oder Zwischenrechnungen erforderlich sind.

5. Die Taschenrechnernutzung ist einfach, das Einarbeiten erfordert keinen großen Aufwand. Man muß sich natürlich an einen Rechner heranwagen und eine gewisse Zeit der Gewöhnung voraussetzen. Die richtige Kenntnis des eigenen Taschenrechners ist notwendig, um alle Möglichkeiten, die er bietet, auch richtig und zweckmäßig ausnutzen zu können.

Neben diesen allgemeinen Gesichtspunkten müssen aber auch die zu lösenden Aufgaben beachtet werden. Diesen Zusammenhang sollten wir auch bei der Auswahl eines Taschenrechners sehen. Die folgende Aufstellung enthält eine Beschreibung, zu welchen Aufgaben welche Gruppe der Taschenrechner zu empfehlen ist (siehe auch Tafel 3.1). Diese Aufstellung kann aber nur ein unvollständiger Hinweis sein, da i. allg. wesentlich mehr Aufgaben und Anwendungsbereiche vorkommen.

### Aufgaben

- Unterricht und Studium:
  - allgemeinbildende Schule
  - Mittelstufenunterricht
  - Oberstufenunterricht
- Fachaufgaben:
  - Haushalt
  - Handelsaufgaben
  - Wirtschaftsrechnung Grundstufe
  - Wirtschaftsrechnung auf höherer Stufe
  - Produktionsarbeit, Laboratorium
  
  - Ingenieurarbeit
  - geodätische Berechnungen
  
  - Auswertung statistischer Daten (Arzt, Biologe, Statistiker)
  - Funktionstafeln
  - spezielle Funktionen und Aufgaben

### Taschenrechnergruppe

- einfach
- erweitert
- wissenschaftlich
  
- einfach
- einfach
- ökonomisch
- ökonomisch (mit wissenschaftlicher Zielstellung)
- wissenschaftlich (u. U. mit speziellen Funktionen)
- wissenschaftlich
- wissenschaftlich (mit Winkel-funktionen und großer Genauigkeit)
- wissenschaftlich (für Sofortauswertungen)
- programmierbar 1
- programmierbar 2

Zur Auswahl der Taschenrechner sind weiterhin die aus den einzelnen Operationen entstehenden Daten bzw. deren Eigenschaften zu beachten. Das kann die Anzeige, die Notwendigkeit der Speicherung oder eine vorgesehene Weiterverarbeitung betreffen.

Sehen wir uns noch einige Parameter des Taschenrechners an, die man beim Kauf beachten sollte:

**Anzahl der angezeigten Stellen.** Taschenrechner, die weniger als acht Stellen anzeigen können, sollte man nicht kaufen, da die Anwendungsmöglichkeiten begrenzt sind. Viele Aufgaben erfordern sogar zehn, manchmal auch zwölf verwertbare (anzeigbare) Stellen. Diejenigen Taschenrechner, deren Ziffernanzeige vier (oder auch sechs) Stellen anzeigen und die mit besonderem Tastendruck weitere vier (oder auch sechs) Stellen anzeigen können, sind veraltet. Diese Form der Ziffernanzeige ist unbequem und schwerfällig, da ein Ergebnis nur stückweise angezeigt werden kann.

**Anzeigetyp** (wurde bereits im Abschn. 2. beschrieben). Intensiveres Licht erfordert i. allg. auch eine größere Leistungsaufnahme. Die Lichtstärke kann im Lauf der Zeit geringer werden, dies sollte bereits beim Kauf beachtet werden (s. Abschn. 2.2.).

**Batterien.** Es sollten solche Taschenrechner gekauft werden, deren erforderliche Batterien auch im Handel erhältlich sind.

**Leistungsaufnahme.** Hat der Taschenrechner einen Adapter (Netzgerät), der ans Netz angeschlossen werden kann, dann ist das auf jeden Fall vorteilhaft. Der Taschenrechner ist zwar bei Adapteranschluß an die Steckdose gebunden, Kosten für Batterien entstehen aber nicht. Die Taschenrechnernutzung mit Adapter ist wesentlich billiger als die mit Batterien.

**Abmessungen.** Bei sehr kleinen Taschenrechnern sind auch die Tastatur und die Ziffernanzeige entsprechend klein. Die Bedienung einer solchen kleinen Tastatur ist ermüdend, eine hohe Konzentration ist erforderlich.

**Gewicht.** Es steht im direkten Verhältnis zum Volumen des Taschenrechners. Man sollte weder einen federleichten noch einen schweren Taschenrechner auswählen. Beachtet werden muß, daß der Taschenrechner, wenn er auf einer glatten Oberfläche liegt, nicht so leicht verrutschen soll. Deshalb sind oft an der Unterseite des Rechners mehrere Gummistopfen angebracht, die ein Verrutschen verhindern. Das wirkt sich positiv auf den Rechenablauf aus, da wir den Taschenrechner dann mit einer Hand bedienen können und ihn nicht immer festhalten müssen.

**Anzahl der Tasten.** Vor allem bei komplizierten Taschenrechnern entstehen Probleme, da die große Anzahl von Funktionen auch zu einer großen Tastenanzahl führt. Eine Möglichkeit zur Verringerung der Tastenanzahl besteht darin, daß einzelne Tasten mehrfache Bedeutungen bekommen. Diese Tasten haben dann eine erste und eine zweite Bedeutung. Eine Auswahl Taste oder ein Auswahl schalter legt im Einzelfall fest, ob die erste oder die zweite Bedeutung verwendet wird. Es ist so möglich, daß bei zwei verschiedenen wissenschaftlichen Taschenrechnern mit der gleichen Anzahl von Funktionen die Tastenanzahl unterschiedlich ist. Wenn aber zu wenige Tasten vorhanden sind und jeweils die Auswahl Taste beachtet werden muß, dann sind auch Fehlermöglichkeiten vorhanden, da schnell übersehen wird, ob die richtige Auswahl der ersten oder der zweiten Bedeutung erfolgte. Andererseits läßt die Übersichtlichkeit nach, wenn jede Taste nur einer Funktion dient. Es muß ein entsprechender Kompromiß gefunden werden, der im Zusammenhang mit der vertretbaren Tastenanzahl, der guten Übersichtlichkeit der Tastatur und der Vermeidung von Fehlern steht.

**Farbe der Tasten.** Vorteilhaft ist es, wenn zu verschiedenen Funktionsgruppen verschiedenfarbige Tastengruppen gehören. Der Überblick ist damit einfacher, und Fehlermöglichkeiten werden gesenkt.

**Garantie und Reparatur.** Taschenrechner werden bei vorschriftsmäßiger Verwendung kaum arbeitsunfähig. Einige einfache Fehler kann man mit allgemeinen elektrotechnischen Kenntnissen beheben (siehe dazu auch Abschn. 8.). Während der Garantiezeit sollten Taschenrechner sehr häufig benutzt werden, um Fehler zu erkennen, die nicht offen ersichtlich sind und erst durch verschiedenartige Benutzung entdeckt werden können.

### 3.3. Besondere Taschenrechner

Neben den allgemein bekannten gibt es auch noch einige besondere Taschenrechner. Die Besonderheit ist natürlich eine zeitabhängige Größe, da Rechner, die in der heutigen Zeit als Besonderheit angesehen werden, morgen bereits gewöhnliche Taschenrechner sein können oder auch schon vergessen sind.

Es ist ein Mangel der Taschenrechner, daß die Ergebnisse zwar auf der Ziffernanzeige dargestellt und abgelesen werden können, aber i. allg. noch kein automatischer Ergebnisausdruck erfolgt. Vor allem im Handel wäre das sehr vorteilhaft, wenn die Ergebnisse sofort auf einer Papierrolle (sog. Kassensstreifen) erscheinen würden. Die Lösung dieses Problems ist kompliziert, da der Zifferndruck zu robusten Geräten mit großem Volumen führt. Auch die Leistungsaufnahme dieser Drucker ist relativ groß. Für Taschen- bzw. Tischrechner mußte man einen besonderen Zifferndrucker entwickeln, der kleine Abmessungen hat, geräuscharm ist und dessen Leistungsaufnahme vertretbar klein ist. Gute Erfahrungen lagen bei *thermischen Druckern* für größere Rechner vor. Das Verfahren des thermischen Drucks wurde als Basis für zielstrebige Untersuchungen zur Entwicklung eines Druckers für Taschen- und Tischrechner verwendet. Sehen wir uns die Wirkungsweise eines solchen Druckers an:  $5 \times 7 = 35$  Punktpositionen sind für eine Ziffernstelle vorhanden. Mit diesen 35 Punkten können verschiedene Ziffern zusammengesetzt werden (Bild 3.3).

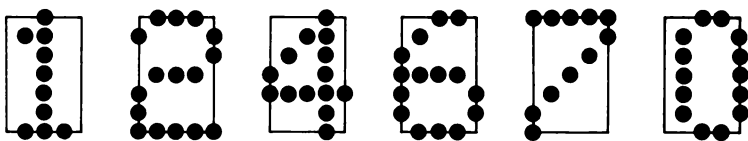


Bild 3.3. Aus  $5 \times 7$  Punkten zusammengesetzte Ziffern

(Hier sei der Hinweis gegeben, daß auch einige Taschenrechner mit diesen 35 Punkten die optische Anzeige der Ziffern realisieren und nicht mit den erläuterten sieben bzw. acht Segmenten.) Aus den 35 Punkten werden die für die Ziffern erforderlichen Punkte elektronisch ausgewählt. Durch kurzzeitiges Erhitzen der Punktposition wird auf dem verwendeten wärmeempfindlichen Spezialpapier die Ziffer sichtbar. Der Druckkopf ist im Bild 3.4 dargestellt.

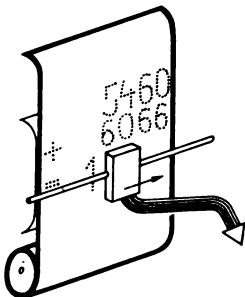


Bild 3.4. Vereinfachte Darstellung des Druckkopfs

Je Zeichenposition sind im Druckkopf sieben waagerechte und fünf senkrechte (also sieben Zeilen und fünf Spalten) Punktpositionen vorhanden. Je Punktposition ist ein Spezialwiderstand vorhanden. Der Druck einer Ziffer erfolgt parallel, d. h., die erforderlichen Punkte für die Ziffer werden gleichzeitig hergestellt. Dazu erfolgt die Auswahl der erforderlichen Widerstände mit anschließendem Erhitzen. Man kann also auch vom *Einbrennen* der Punkte einer Ziffer in das Spezialpapier sprechen. Der Druckkopf bewegt sich zeilenweise hin und her. Die Ziffern einer Zeile werden damit seriell hergestellt. Nach Fertigstellung einer Zeile wird das Papier weitergeschoben. In dieser Zeit bewegt sich auch der Druckkopf wieder an den Zeilenanfang, eine neue Zeile kann gedruckt werden. Zum Ausdruck einer Zeile mit ungefähr 20 Ziffern benötigt man etwa 1 Sekunde. Der mit dem Taschenrechner verbundene Drucker wird zum Festhalten der Endergebnisse ggf. auch der Teilergebnisse verwendet. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß bei programmierbaren Taschenrechnern das geschriebene und eingegebene Programm *aufgelistet* werden kann. Dadurch besteht eine sehr gute Kontrolle über den Programmablauf. Außerdem kann das betreffende Programm, wenn im Taschenrechner eine Programmlösung erfolgte, bei Bedarf schnell wieder anhand der ausgedruckten Programmliste neu eingegeben werden.

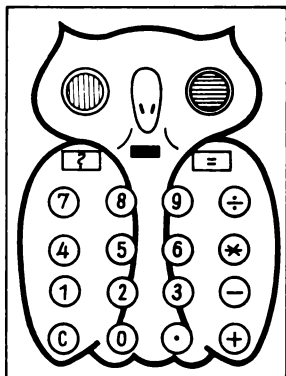
Da der Drucker relativ teuer ist, muß auf eine hohe Auslastung geachtet werden, sonst ist die Anschaffung unökonomisch. Als Prinzip kann man fordern, daß Taschenrechner, die mit einem Drucker versehen sind, programmierbar sein sollen. Die Herstellungskosten derartiger Taschenrechner sind gegenwärtig noch relativ hoch.

Zu den besonderen Rechnern gehören Taschenrechner, die nach dem Ausschalten das gespeicherte Programm und die in den Speicherplätzen enthaltenen Zahlenwerte (Operanden bzw. Ergebnisse) festhalten. Die Vorteile sind offensichtlich. Voraussetzung sind Speicherelemente, deren Leistungsaufnahme so gering ist, daß bei ausgeschaltetem Gerät der Akkumulator oder die Batterie zum Ermöglichen des Speicherns nur unmerklich belastet wird. Der Rechner kann die einmal aufgenommenen Programme über Monate hinweg speichern, wobei dies natürlich von der Notwendigkeit der Speicherung abhängt. Programme müssen oft länger gespeichert werden als Operanden oder Ergebnisse. Werden der Akkumulator oder die Batterien nur kurzzeitig aus dem Rechner entfernt, ist die Speicherung natürlich hinfällig. Es tritt bereits eine völlige Löschung ein, wenn die Stromversorgungsanlage keine leitende Verbindung zum Speicher mehr hat.

Es werden auch Taschenrechner hergestellt, die das Ergebnis akustisch ausgeben. Verschiedene Tonfrequenzen werden für die Ausgabe kurzer Pfeiftöne verwendet. Die akustische Ausgabe ist abhängig vom Inhalt des Anzeigeregisters oder auch vom Drücken bestimmter Tasten. Ein solches Gerät ist für Personen gedacht, die schlecht sehen oder völlig blind sind. Das Eintasten der Ziffern macht keinerlei Schwierigkeiten, da die Tastenstellung leicht erlernbar ist. Auch das Auseinanderhalten der verschiedenen Pfeiftöne, die den Ziffern entsprechen, ist nur eine Sache der Übung.

Nun kurz zu etwas Ausgefallenem: Digitalarmbanduhren lassen sich auch mit einer Tastatur und einem Taschenrechnerschaltkreis ergänzen. Für die Armbanduhr ist bereits die digitale Anzeige (also die Ziffernanzeige) vorhanden. Der

entsprechende Schaltkreis ist sehr klein und hat in der Armbanduhr bequem Platz. Die Tastatur muß allerdings stark verkleinert werden. Eine Bedienung der Tastatur ist mit einem Spezialstift oder auch mit einer Kugelschreiberspitze möglich. Die Abmessungen eines solchen Rechners sind auch nicht größer als herkömmliche Armbanduhren. Der gesamte Rechner ist einfach, die funktionellen Möglichkeiten sind begrenzt, gehen also über die vier Grundrechenarten kaum hinaus. Der Anwendungswert ist relativ klein, jedoch kann der Besitzer sagen, daß er einen exklusiven Rechner besitzt. Diese Rechner, die man auch Uhrenrechner nennt, sind häufig in einem Goldgehäuse eingebaut. Dadurch ist diese technische Spielerei auch entsprechend teuer.



*Bild 3.5. Taschenrechner für den Mathematikunterricht in unteren Klassen*

Bild 3.5 zeigt einen Taschenrechner, dessen Frontplatte als Eule gestaltet ist. Er ist für fünf- bis achtjährige Kinder bestimmt, um einige Grundlagen der Mathematik zu erlernen. Neben der einem Spiel ähnelnden Form sind Eingabetasten (Ziffern- und Operationstasten) vorhanden, eine Ziffernanzeige fehlt aber. Zusätzlich ist eine Taste mit einem ? vorhanden. Das Kind erhält die Aufgabe in schriftlicher oder mündlicher Form gestellt. Soll das Kind ermitteln, wieviel z. B.  $13 + 27$  ist, so hat es die Ziffern 1 und 3 einzutasten, danach das + und dann die Ziffern 2 und 7. Nach dem Tastendruck = muß das Kind selbständig das von ihm angenommene Ergebnis eintasten. Nun wird die Taste ? gedrückt. War das eingegebene Ergebnis richtig, erscheint im rechten Auge der Eule ein grünes Licht. War das Ergebnis jedoch falsch, so blinkt das linke Auge der Eule böseartig rot.

---

## 4. Mit dem Taschenrechner Bekanntschaft machen

---

In diesem Abschnitt werden wir uns die wichtigsten Eigenschaften der Taschenrechner ansehen. Die Herstellerfirmen vermitteln i. allg. keine ausführlichen Beschreibungen mit technischen Details und vielen Anwendungsbeispielen. Deshalb muß sich der Nutzer des Taschenrechners selbst systematisch in seinen Rechner einarbeiten, er muß die Eigenschaften und damit die möglichen Anwendungsgebiete kennenlernen. Im folgenden werden einfache Beispiele und auch überraschende Ergebnisse erläutert, um den Nutzern zu helfen, die Einarbeitungsphase kurz zu halten bzw. dem eingearbeiteten Nutzer weitere Hinweise zu geben. Das ist auch deshalb erforderlich, weil die Beschreibungen der Herstellerfirmen nur begrenzt zur vollen Nutzung der Taschenrechner führen.

In unseren Ausführungen begrenzen wir uns nicht auf einen konkreten Taschenrechner, sondern beziehen uns auf Wirkungsweisen und Eigenschaften, die Taschenrechnern unterschiedlicher Herstellerfirmen eigen sind. Anders ausgedrückt, wir erarbeiten Hinweise und Testhilfen für die Operationsarten, die bei vielen Taschenrechnern häufig vorkommen.

Die Testhilfen sind sehr verschiedenartig, deshalb besteht durchaus die Möglichkeit, daß für einige spezielle Taschenrechner andere Wirkungen eintreten. Die Erläuterung aller konkret vorkommenden Taschenrechner übersteigt aber unser Anliegen und unsere Möglichkeiten.

Die folgenden Aufgaben, Lösungen und Texte sind nicht nur zum Lesen gedacht. Das richtige Verständnis erfordert aktive Mitarbeit und Mitdenken bei den angegebenen Aufgaben. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, daß beim Durcharbeiten des Stoffes ein Taschenrechner danebengelegt wird und die Aufgaben durchgerechnet werden. Dabei können Sie gleichzeitig feststellen, welchen Wert Ihr Taschenrechner hat und welche Möglichkeiten andere Taschenrechner gegenüber Ihrem haben. Mit dieser Methode ergibt sich ein weiterer Vergleich der verschiedenen Arten der Taschenrechner.

In diesem Abschnitt haben wir zur Ausarbeitung der Beispiele folgende Eigenschaften der Taschenrechner verwendet:

- Fließkomma, achtstellige Ziffernanzeige, Rundung, keine verborgenen Ziffern;
- algebraische Logik, eingebaute Vorzeichenregeln;
- automatische Konstantenspeicherung, Kettenoperationen, Möglichkeit der Wiederverwendung von Operanden;
- ein Speicher ist vorhanden, zwischen dem Anzeigeregister und dem Speicher besteht die Möglichkeit des Austauschs.

Mit diesen Angaben haben wir einen allgemeinen Taschenrechner ausgewählt. Es muß aber betont werden, daß bei der Kontrolle der berechneten Ergebnisse

mit Ihrem Taschenrechner (wegen der abweichenden Eigenschaften der Rechner) trotz gleicher eingegebener Werte leicht unterschiedliche Ergebnisse entstehen können (obwohl im Rechenalgorithmus keine Fehler sind).

Zur Lösung der in dieser Broschüre enthaltenen Aufgaben werden evtl. auf Ihrem Taschenrechner nicht alle mathematischen Funktionstasten vorhanden sein. Wir benötigen sie aber für die Programme, die zur Lösung der Aufgaben erforderlich sind. Die Programme bestehen aus einer Folge von Operationen (Folge von gedrückten Operationstasten). Zur Erläuterung solcher Programme haben wir in diesem Abschnitt meist triviale mathematische Darstellungsweisen verwendet.

Rot werden die Operationen dargestellt, die mit Hilfe der Tastatur des Taschenrechners eingeleitet werden können. In vielen Fällen müssen wir entscheiden, welche mathematische Symbolik wir anwenden, weil beim doppelten Eintasten Operationen auch mehrfach ausgeführt werden. So wird z. B. durch die Tastenfolge  $5 \div = =$  der Reziprokwert von 5 gebildet, nämlich  $1/5$ . Die Verwendung von  $= =$  ist in der konventionellen Mathematik sinnlos, weil mehrere Gleichheitszeichen nacheinander im mathematischen System nicht verwendbar sind.

Rot geben wir auch die mit der Tastatur eingegebenen Ziffern an. Es sind die Ziffern, die auf der Tastatur dargestellt sind. Im Gegensatz dazu werden erst im Rechner hergestellte Ergebnisse, die auf der Ziffernanzeige sichtbar werden, schwarz gedruckt. Während der Operationsdurchführung werden auf der Ziffernanzeige auch Zwischenergebnisse angezeigt. In unseren Beispielen haben wir uns dazu entschieden, nur die Endergebnisse anzugeben, da sonst die Übersichtlichkeit der entsprechenden Aufgaben etwas verlorengeht.

**Beispiel:**  $5 + 3 * 8 = 64$ .

Diesen Ablauf wollen wir uns ausnahmsweise genauer ansehen. Die rot angegebenen Ziffern und Operationen werden eingetastet, die schwarz angegebenen Ziffern werden auf der Ziffernanzeige dargestellt:

$$5 \ 5 + 5 \ 3 \ 3 * 8 \ 8 \ 8 = 64 .$$

Würden wir also zu jedem Beispiel die zum Tastendruck gehörige Änderung der Ziffernanzeige darstellen, dann wäre die Erläuterung der Programme unübersichtlich.

Lange Programme werden in mehreren Zeilen angegeben. Dazu benutzen wir folgende Festlegung: Das am Ende einer Zeile erhaltene Ergebnis ist gleichzeitig der Anfang der nächsten Zeile. Es werden also keine Symbolwiederholungen aufgeführt, wenn bei einem Programm die nächste Zeile beginnt.

**Beispiel**  $5 + 3$   
 $* 8 = 64$ .

Die Anzahl der in den Beispielen benutzten Operationstasten ist bewußt niedrig gehalten, um damit die Übersichtlichkeit zu erhöhen. Wir vereinbaren:

- + Benutzung der Additionstaste,
- Benutzung der Subtraktionstaste,
- \* Benutzung der Multiplikationstaste,
- ÷ Benutzung der Divisionstaste,
- = Gleichheitstaste (zur Ergebnisanzeige),
- $\sqrt{\quad}$  Taste für das Wurzelziehen,

- M bezieht sich auf Operationen, die mit dem Speicher ausgeführt werden,
- M: Eingabe in den Speicher,
- MR Aufruf des Speicherinhalts,
- MC Löschen des Speicherinhalts
- ⇒M Tausch der Inhalte des Anzeigeregisters und des Speichers.

## 4.1. Genauigkeit und Fehler

Elementarfehler entstehen bei der Operationsausführung mit dem Taschenrechner nicht, die arithmetischen Regeln werden immer beachtet. Voraussetzung ist natürlich eine richtige Bedienung. In mehrfacher Beziehung sind aber Genauigkeitsprobleme zu beachten.

Untersuchen wir zuerst das Verhältnis zwischen Genauigkeit und Anzahl der angezeigten Stellen in der Ziffernanzeige. Am meisten werden acht- bis zehnstellige Ziffernanzeigen benutzt. Wann und zu welchem Zweck benötigt man aber so viele Stellen? Sind acht oder zehn Stellen viel oder wenig?

Der Äquator ist ungefähr 40000 km lang, in Metern ausgedrückt: 40000000. Diese Ziffern können noch bei einem Taschenrechner angezeigt werden, der mit acht Stellen in der Ziffernanzeige versehen ist. Nehmen wir an, in der letzten Stelle würde statt 0 eine andere Ziffer stehen. Damit wäre immer noch die Metergenauigkeit gewahrt. Allerdings könnten wir nicht mehr 1,67 m hinzu addieren, das Ergebnis wäre 40000001 m. Die 67 cm können nicht mehr angezeigt werden, da nur acht Stellen in der Ziffernanzeige vorhanden sind. Wären zehn Stellen vorhanden, hieße das Ergebnis 40000001,67.

Wenn zwischen Dresden und Berlin-Pankow eine Entfernung von 210 km besteht, dann entspricht das im Verhältnis zum Äquator  $40000/210 \approx 190 = 2 \cdot 95$ .

95mal von Dresden nach Berlin-Pankow und zurück entspricht also der Äquatorlänge. Diese Entfernung können wir noch in Metergenauigkeit mit einer achtstelligen Ziffernanzeige darstellen.

Die Bedeutung dieser acht Stellen läßt sich auch gut erkennen, wenn die größte darstellbare ganze Zahl als Basis verwendet wird:  $(99\ 999\ 999 = 10^8 - 1)$ . Welche Zeit wird zur Herstellung dieser größten darstellbaren ganzen Zahl benötigt, wenn wir von 0 beginnend in jeder Sekunde den Wert von 1 addieren? Wir bekommen ein Ergebnis von

$$(10^8 - 1)/24 \cdot 60 \cdot 60 = 1157,4073 \text{ Tage.}$$

Dies bedeutet, daß ungefähr drei Jahre erforderlich wären. Eine Sekundengenauigkeit ist aber dabei eingehalten.

Mit den acht Stellen ist eine relativ große Genauigkeit möglich. Manuell mit dieser erreichbaren Genauigkeit zu messen ist bekanntlich sehr schwer und auch entsprechend teuer. Wozu dann aber diese große Genauigkeit?

Betrachten wir ein anderes Beispiel: Beträgt der Preis eines Produkts 98,76 Mark und werden davon 1234 Stück produziert, dann haben wir für  $1234 \cdot 98,76$  Mark = 121 869,84 Mark Produkte hergestellt. Zur Anzeige dieses Ergebnisses benötigen wir unsere acht Stellen. Wenn die produzierte Stückzahl allerdings 12345 beträgt, dann ist das Ergebnis 1219192,2 Mark. Die Zehnpfennigbeträge werden noch angezeigt, nicht aber die Pfennigbeträge. Die erreichbare Genauigkeit ist die Zehnpfennigenauigkeit. Da im Handels- oder Wirtschaftsleben solche Auf-

gaben sehr häufig sind, müssen deshalb in diesem Bereich die Taschenrechner mindestens acht anzeigbare Stellen haben. Die bisherigen Beispiele haben schon gezeigt, daß das auf der Ziffernanzeige dargestellte Ergebnis nicht absolut genau sein kann, wenn für das erforderliche absolut genaue Ergebnis nicht die notwendigen Stellen verfügbar sind.

Neben der Ursache der Ungenauigkeit, die im Rechnersystem bzw. in seiner Anzeige zu suchen ist, spielen auch die Ausgangsdaten eine gewisse Rolle hinsichtlich der Ergebnisgenauigkeit. Sehen wir uns das an einem Beispiel an:

Für ein 4 m breites und 5 m langes Zimmer soll die Fußbodenfläche berechnet werden. Wir haben die Messungen mit Zentimetergenauigkeit durchgeführt. Unsere Fläche berechnet sich aus:

$$A_{\max} = 4,01 \cdot 5,01 = 20,0901 = (20 + 0,0901) \text{ m}^2,$$

$$A_{\min} = 3,99 \cdot 4,99 = 19,9101 = (20 - 0,0899) \text{ m}^2.$$

Unsere Ausgangsdaten haben einen absoluten Fehler von  $\pm 1$  cm. Durch die Rechenoperationen kann ein absoluter Fehler von  $\pm 0,09 \text{ m}^2 = 9,0 \text{ dm}^2$  auftreten. Der relative Fehler der Länge beträgt

$$1 \text{ cm}/400 \text{ cm} = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

der relative Fehler der Fläche bereits

$$0,09 \text{ m}^2/20 \text{ m}^2 = 4,5 \cdot 10^{-3}.$$

Wenn das Zimmervolumen berechnet werden soll und die Höhe des Zimmers  $300 \pm 1$  cm beträgt, dann ergibt sich ein Volumen von

$$V_{\max} = 60,471201 = (60 + 0,471201) \text{ m}^3,$$

$$V_{\min} = 59,531199 = (60 - 0,468801) \text{ m}^3$$

Der relative Fehler für das Volumen ist ungefähr

$$0,47 \text{ m}^3/60 \text{ m}^3 \approx 7,8 \cdot 10^{-3}.$$

Weil die Werte, mit denen wir die Rechnung ausgeführt haben, eine begrenzte Genauigkeit in der Messung hatten, deshalb wird das im Taschenrechner berechnete Ergebnis wieder begrenzt genau sein. Eine Vergrößerung des Fehlers ist also vom Rechenprozeß bzw. von der Art der Rechnung abhängig. Der Fehler kann während der Rechnung vergrößert werden, mitunter können sehr ungenaue Ergebnisse entstehen, ohne daß sich der Rechner geirrt hat. Die Vergrößerung des Fehlers ist natürlich von der Art der Operation abhängig. Sie wird bei einer Längenberechnung nicht so groß sein wie bei einer Flächenberechnung, und bei einer Flächenberechnung wird der Fehler nicht so groß sein wie bei einer Berechnung des Volumens, wie wir das am Beispiel gesehen haben.

Das Endergebnis kann aber auch bei genauen Ausgangsdaten ungenau werden, wenn unser gewählter Lösungsalgorithmus gewisse Genauigkeitsgrenzen hat. Exponentielle, trigonometrische und ähnliche Funktionen können auf verschiedenen Wegen berechnet werden, d. h., es existieren verschiedene Algorithmen. Meist sind es Näherungsverfahren, und damit ist das Ergebnis mit einem Fehler behaftet, der unterschiedlich groß sein kann. Sie können dazu auch die entsprechenden Aufgaben des Abschnitts 6. betrachten, bei denen zu verschiedenen Funktionen näherungsweise Lösungen angegeben sind.

Während der Rechnung können auch solche Teilergebnisse entstehen, die wegen ihrer Länge nicht voll in die Register aufgenommen werden können. Dadurch

entstehen Folgefehler, die sich natürlich auf das Endergebnis auswirken. Eine interessante Rechnung kann man durchführen, um den Fehler, der durch fehlende Stellen in den Registern bzw. in der Anzeige entsteht, festzustellen. Wenn der Reziprokwert der Ziffer 7 gebildet wird, entsteht  $1/7 = 0,1428571$ . Berechnen wir von diesem Ergebnis wieder den Reziprokwert, so erwarten wir das Ergebnis 7, angezeigt wird jedoch  $1/0,1428571 = 7,0000001 \neq 7$ .

Es scheint so, als ob unser Rechner den Zusammenhang nicht genau erkennt, der durch zweimalige Herstellung des Reziprokwerts vorhanden ist. Die Ursache besteht darin, daß der Bruch  $1/7$  ein unendlicher Bruch ist und noch mehr Ziffern angezeigt werden müßten, um die Genauigkeit zu erhöhen, z. B.

$$1/7 = \underline{0,142857}1428571428571\dots$$

Der Taschenrechner kann aber nur die unterstrichenen Ziffern anzeigen, da er eine Ziffernanzeige mit acht Stellen hat. Die nach der Unterstreichung angegebenen Stellen können nicht angezeigt werden, sie werden einfach abgestrichen. Diese Methode nennen wir *Abstreichmethode*, dagegen nennen wir einen Vorgang *Rundungsmethode*, wenn eine Rundung in der letzten Stelle erfolgt. Die Rundung der letzten anzeigbaren Stelle erfolgt in Abhängigkeit von der nachfolgenden (also der ersten nicht anzeigbaren) Stelle. Ist dies eine 0, 1, 2, 3, 4, dann wird die letzte anzeigbare Stelle belassen. Ist es aber eine 5, 6, 7, 8, 9, so wird die letzte anzeigbare Stelle im Ziffernwert um 1 erhöht. Bei unserer Aufgabe  $1/7$  würden wir, wenn zehn Stellen angezeigt werden könnten, das Ergebnis  $0,142857143$  nach der durchgeführten Rundung erhalten. Offenbar sind Fehler durch die begrenzte Anzeige geringer, wenn der Taschenrechner die Rundung durchführt und nicht einfach die nicht anzeigbaren Stellen abstreicht. Die Rundung selbst entspricht im Rechner einer logischen Operation. Das Runden ist mit einem entsprechenden Aufwand verbunden und macht auch den Rechner geringfügig teurer. Die Rundungsmethode findet man bei den besseren Taschenrechnern.

Wollen wir bei einem Taschenrechner prüfen, ob er nach der Abstreich- oder der Rundungsmethode arbeitet, so führen wir folgende Aufgabe aus: Bei der Division  $2/3$  erhalten wir ein Ergebnis, welches

$$0,6666666 \text{ oder } 0,6666667$$

sein kann. Im ersten Fall erfolgt keine Rundung, im zweiten ist die Rundung an der letzten angezeigten Ziffer 7 zu erkennen.

Bei der Ergebnisanzeige können wir überraschende Resultate erhalten, wenn die erläuterten Genauigkeitsprobleme bewußt in die Rechnung einbezogen werden. Nehmen wir dazu eine einfache Aufgabe:

$$2 \div 3 * 1,5 = 0,9999999 \neq 1.$$

Wichtig ist es, auch in diesem Fall zu betonen, daß der Taschenrechner keinen Fehler gemacht, sondern das Ergebnis ermittelt hat, das entsprechend unserem Programm erzeugt werden muß. Der Fehler beträgt  $1 \cdot 10^{-7}$ . Wird dieser Fehler zum angezeigten Ergebnis addiert, erhalten wir den genauen Wert von 1. Das ist der Beweis dafür, daß die Genauigkeit sehr von der Zahlendarstellung abhängt. Untersuchen wir nach der gleichen Methode jetzt die Division  $2/5$ . Hierbei erhalten wir ein genaues Ergebnis, weil kein unendlicher, sondern ein endlicher Bruch vorliegt, der mit acht Stellen der Ziffernanzeige darstellbar ist.

$$2 \div 5 * 2,5 = 1.$$

## 4.2. Verborgene Ziffern

Um die Genauigkeit der Taschenrechner zu erhöhen, erhalten mitunter die Register ein, zwei oder drei Stellen mehr als mit der Ziffernanzeige dargestellt werden können. Eine Weiterverarbeitung ist dann mit erhöhter Stellenzahl möglich, obwohl das Endergebnis auf der Anzeige wieder in der darstellbaren Form erfolgt. Jedoch erscheint uns das Ergebnis genauer, da die verborgenen Ziffern mit in den Rechengang einbezogen wurden. Wie können wir nun erfahren, ob unser Taschenrechner mit verborgenen Ziffern arbeitet? Nehmen wir dazu den folgenden Quotienten:

$$13 \div 11 = 1,1818181.$$

Wenn wir einen Taschenrechner mit verborgenen Ziffern haben, dann sind diese Ziffern: zuerst 8, dann 1 usw. Multiplizieren wir den Quotienten mit 2, dann können wir zwei verschiedene Ergebnisse erhalten:

$$2,3636362 \text{ (es gibt keine verborgenen Ziffern)}$$

$$2,3636363 \text{ (es gibt verborgene Ziffern)}.$$

Hat der Taschenrechner verborgene Ziffern, dann möchten wir natürlich wissen, wie viele es sind. Um das festzustellen, müssen wir eine Zahl darstellen, von der wir die nicht anzeigbaren Ziffern in der richtigen Reihenfolge kennen. Nehmen wir z. B.

$$10/7 = 1,4285714(28571 \dots).$$

Die nicht darstellbaren Ziffern stehen in der Klammer. Wenn wir von der dargestellten Zahl den Wert 1,428 subtrahieren, erhalten wir

$$0,0005714(28571 \dots).$$

Dieses Ergebnis wird nun mit 1000 multipliziert. Das entstehende Ergebnis ist von der Anzahl der verborgenen Ziffern abhängig. Folgende Ergebnisse sind möglich:

Ergebnis	verborgene Ziffern
0,5714	0
0,57142	1
0,571428	2
0,5714285	3
...	...

Ebenso können wir die Zahl  $\pi$  eingeben und anzeigen lassen. Davon subtrahieren wir 3,141 und multiplizieren mit 1000. Das entstehende Ergebnis wird nach der Ziffernfolge untersucht. Erscheinen weitere Ziffern (außer 0), die nach dem Eintasten von  $\pi$  noch nicht angezeigt wurden, so können wir mit Hilfe dieser neuen Ziffern auf die Anzahl der verborgenen Ziffern schließen. Die Probe hinsichtlich der verborgenen Ziffern erfolgt bei der Benutzung der Taste  $\pi$  schneller als bei der durchzuführenden Division  $10/7$ .

## 4.3. Zahlenbereich

Bei achtstelligen Taschenrechnern ist die größte absolute Zahl 99999999, die kleinste 0,0000001. Wenn diese Zahlen mit sich selbst multipliziert werden, dann erhält man einen **Überlauf** bzw. eine **Unterschreitung** des zugelassenen Zahlenbereichs. Selbstverständlich können Überlauf oder Unterschreitung auch mit

anderen Operanden bzw. anderen Operationen eintreten. Die meisten Taschenrechner führen die vorgesehene Operation auch dann noch durch, wenn Überlauf bzw. Unterschreitung entsteht, jedoch erscheint auf der Ziffernanzeige ein entsprechendes *Überlauf-* bzw. *Unterschreitungszeichen*. Dies kann ein besonderes Zeichen sein, es kommt aber vor, daß innerhalb der angezeigten Ziffernfolge an zwei oder an allen Stellen Kommas erscheinen (bzw. Dezimalpunkte). Wenn trotzdem mit dem Ergebnis weitergerechnet werden soll, so muß das Überlaufzeichen gelöscht werden. Mit dem angezeigten Überlaufzeichen sind keine weiteren Operationen möglich. Ein Weiterrechnen mit angezeigter Unterschreitung ist ebenfalls nicht möglich. Das Löschen des Unterschreitungszeichens kann zwar möglich sein, jedoch ist ein Weiterrechnen unzweckmäßig, da offensichtlich mit 0 weitergerechnet wird. Zum Löschen von Überlauf- bzw. Unterschreitungszeichen werden besondere Tasten benutzt (z. B. CE-Taste), aber auch durch einmaliges Drücken der Gesamtlösch Taste verschwindet die Überlauf- bzw. Unterschreitungsanzeige. Bei vielen Taschenrechnern wird die Unterschreitung nicht angezeigt, demnach kann z. B. 0,0001 durchaus quadriert werden, das Ergebnis ist dann 0, eine Unterschreitung wird bei diesen Taschenrechnern nicht angezeigt.

Viele Taschenrechner haben eine **Fließkommadarstellung**. Das bedeutet, daß während des Eintastens einer Zahl (oder bei der Ergebnisdarstellung nach einer Operation) das Komma nicht wie bei der Festkommadarstellung an einer definierten Stelle bleibt, sondern nach jeder angezeigten Ziffer erscheinen kann. So stehen z. B. nach der Multiplikation

$$3,42 \cdot 6,51 = 22,2642$$

vier Stellen nach dem Komma, während nach der Multiplikation

$$342 \cdot 65,1 = 22264,2$$

nur eine Stelle nach dem Komma vorhanden ist. Bei der Fließkommadarstellung rechnet der Taschenrechner so, wie wir es bei der manuellen Rechnung gewohnt sind.

Dagegen ist bei Taschenrechnern mit **Festkommadarstellung** das Komma immer an einer festen Stelle. Das Komma muß dabei nicht ganz rechts stehen (dies wäre eine Rechnung mit ganzen Zahlen), sondern steht meist so, daß zwei Stellen nach dem Komma anzeigbar sind, dort steht das Komma aber dann immer. Taschenrechner mit einer solchen Festkommadarstellung sind bei Handels- oder Wirtschaftsrechnungen recht nützlich, bei denen nach dem Komma aus der Art der Rechnung heraus (Geldrechnungen) zwei Stellen erforderlich sind. Vor dem Komma können die Markbeträge, nach dem Komma die Pfennigbeträge angegeben werden. Unter Verwendung der oben angegebenen Multiplikationen erhalten wir bei Taschenrechnern mit Festkommadarstellung und zwei Stellen hinter dem Komma folgende Ergebnisse:

$$3,42 \cdot 6,51 = 22,26;$$

$$342 \cdot 65,1 = 22264,20.$$

Aus diesen Beispielen ist zu erkennen, daß auch die Möglichkeit einer unterschiedlichen Kommasetzung bei Operanden besteht, das Ergebnis jedoch mit zwei Stellen nach dem Komma dargestellt wird. Für allgemeine Rechenaufgaben mit unterschiedlicher Kommasetzung bei Operanden, Zwischen- und Endergebnissen ist ein solcher Taschenrechner mit Festkommadarstellung nur schwer verwendbar, es sei denn, wir betrachten die Kommasetzung der Operanden, der

Zwischen- und Endergebnisse völlig separat in manueller Form; der Rechner führt dann nur Operationen mit ganzen Zahlen aus. Die Fehlermöglichkeiten werden bei einem solchen Verfahren hoch.

Zwischen reinen Festkomma- und Fließkommadarstellungen gibt es solche Rechner, die mit beiden Darstellungsarten arbeiten. Dabei kann die Komma-  
stellung frei gewählt werden (im Sinne der Fließkommadarstellung), oder das Komma bleibt beim Ergebnis einer Operation an einer festen Stelle (im Sinne der Festkommadarstellung). Besondere Schalter, z. B. 2-F, ermöglichen die Wahl der Darstellung. In Stellung 2 werden die Ergebnisse auf der Ziffernanzeige mit zwei Stellen nach dem Komma angezeigt (auch wenn die Operanden wesentlich mehr Stellen nach dem Komma hatten). in der Stellung F gilt die Fließkommadarstellung in der beschriebenen Form.

Wissenschaftliche Taschenrechner haben fast ohne Ausnahme die **Gleitkommadarstellung** einer Zahl  $z$  (zusätzlich zu der Fließkomma- und/oder Festkommadarstellung). Wir werden diese Darstellungsform im weiteren Verlauf *halblogarithmische Darstellung* nennen. Für die darzustellende Zahl  $z$  gilt:

$$z = m \cdot 10^e$$

$m$  = Mantisse,  
 $10$  = Basis,  
 $e$  = Exponent zur Basis 10.

Vom Taschenrechner erfolgt für diese Zahlendarstellung eine Normierung, indem das Komma z. B. hinter die erste Mantissenstelle gesetzt wird und der Exponent den erforderlichen Wertausgleich berücksichtigt. So wird z. B. die Zahl

$$z = 1976,2 \quad \text{als} \quad z = 1,9762 \cdot 10^3$$

dargestellt. Auf die Angabe der Basis 10 kann in der Ziffernanzeige verzichtet werden, da die Basis immer gleich bleibt. Sehen Sie sich dazu Bild 4.1 an.

Taschenrechner mit halblogarithmischer Darstellung haben meist einen Exponentenbereich von  $-99$  bis  $+99$ , d. h., es werden zwei Stellen für die Exponentenanzeige benötigt. Dazwischen kann mit allen vorkommenden Exponenten gerechnet werden. Wenn der zugelassene Exponentenbereich über- bzw. unterschritten wird, erfolgt eine Fehleranzeige, weitere Operationen werden dadurch verhindert. Die Beispielzahl  $z$  wird auf der Ziffernanzeige in der Form

1,9762 03 angezeigt.

Für die Vorzeichenangabe bei der Mantisse und dem Exponenten ist eine besondere Darstellungsmöglichkeit auf der Ziffernanzeige erforderlich.

Zur Ausnutzung des großen Zahlenbereichs, der durch die halblogarithmische Zahlendarstellung ermöglicht wird, sollte man die Taschenrechnerbeschreibung gut studieren und dazu die angegebenen Beispiele auf dem Taschenrechner ausprobieren. Das Feststellen und Ausnutzen der halblogarithmischen Zahlendarstellung ohne Beachtung der Taschenrechnerbeschreibung erfordert viel Zeit,

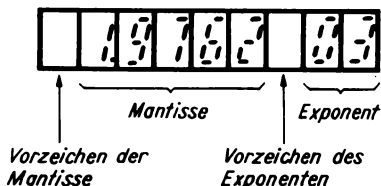


Bild 4.1. In halblogarithmischer Darstellung angezeigte Zahl ( $1,9762 \cdot 10^3 = 1976,2$ )

um zur richtigen Erkenntnis zu kommen. Unabhängig davon geben wir folgende Hinweise:

1. Zuerst müssen wir natürlich wissen, ob unser Taschenrechner überhaupt für Operationen mit Zahlen in halblogarithmischer Darstellung geeignet ist. Um das festzustellen, gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Die Zahl 0,00001 ist in den Taschenrechner einzugeben, anschließend ist sie zu quadrieren. Erscheint als Ergebnis 0, so sind keine halblogarithmischen Zahlendarstellungen und damit auch keine Operationen mit solchen Zahlen möglich.

b) Die Aufschriften auf der Tastatur werden untersucht. Wenn hier z. B. Tastaturaufschriften EXP, EEX, CHNOT (s. a. Anhang) zu finden sind, dann beziehen sie sich auf die halblogarithmische Zahlendarstellung. In diesem Fall schreiben wir

- die Mantisse (z. B. 1,976),

- drücken die Taste EXP, EEX oder EX,

- schreiben das Vorzeichen des Exponenten mit Hilfe der Vorzeichentaste (auch Vorzeichenwechseltaste genannt) oder einer speziellen Negativ-Vorzeichentaste,

- schreiben die Exponentenziffern (dabei müssen wir darauf achten, in welcher Reihenfolge der Rechner die Exponentenziffern aufnimmt: Die Tastenfolge 1, 2 kann den Exponenten 12, bei anderen Rechnern aber 21 ergeben).

Dieser erläuterte Ablauf ist nicht einheitlich. Es gibt auch Rechner, bei denen mit der Kommataste das Mantissenkomma an die richtige Stelle gesetzt wird. Erfolgt zum zweiten Male das Drücken der Kommataste, entspricht das der Ankündigung, daß nun die Exponentenziffern folgen. Wird die Kommataste zum dritte Male gedrückt, wird das Exponentenvorzeichen gewechselt.

2. Zum Kennenlernen der besonderen Eigenschaften des Taschenrechners können zur Übung einfache Operationen durchgeführt werden. Eine Kontrollrechnung ist mit Papier und Bleistift oder im Kopf erforderlich. Die Ergebnisse werden dann verglichen.

Beispielaufgaben:

$$1,2 \cdot 10^{13} - 1,3 \cdot 10^{-12};$$

$$1,3 \cdot 10^{-12} - 1,2 \cdot 10^{-13};$$

$$(0,4 \cdot 10^{-21}) \cdot (2,5 \cdot 10^3);$$

$$(7,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (-78,216 \cdot 10^{-15}).$$

Es empfiehlt sich auch, in der Nähe der oberen und unteren Grenze des Zahlenbereichs Rechnungen durchzuführen. Es kommt durchaus vor, daß manche Taschenrechner in der Nähe der oberen oder unteren Grenze des Zahlenbereichs unregelmäßig wirken. Es sollte genau untersucht werden, welche die beim speziellen Taschenrechner absolut größte und absolut kleinste Zahl ist. So können wir z. B. schrittweise einen bestimmten Wert zu  $1,1 \cdot 10^{99}$  addieren, um festzustellen, an welcher Stelle das Fehlerzeichen wegen Überlauf erscheint. Auch kann schrittweise  $2 \cdot 10^{-99}$  mit 0,9 multipliziert werden, um festzustellen, an welcher Stelle die Unterschreitung des zulässigen Zahlenbereichs eintritt, d. h., das Unterschreitungszeichen angezeigt wird. Die größte und kleinste absolute Zahl können wir anschließend daraufhin untersuchen, ob sie zueinander reziprok sind.

## 4.4. Illegale Operationen

Können wir vom Taschenrechner auch sinnlose Operationen verlangen? Selbstverständlich können wir das versuchen, der Taschenrechner (auch der einfachste) reagiert aber darauf mit einer Fehleranzeige. Diese kann sehr verschieden sein: blinkende Null, Buchstabe E, Anzeige des Wortes Error, gleichzeitige Anzeige mehrerer Kommas, Verlöschen aller Stellen (außer der Betriebsanzeige). Das angezeigte Fehlerzeichen läßt sich in der Regel mit der Taste C (clear – Löschen) beseitigen.

Zur Probe können wir das Fehlerzeichen am einfachsten mit dem Divisor 0 provozieren, d. h.  $0/0$ ;  $1976/0$  usw. Alle diese unsinnigen Aufgaben führen zum Fehlerzeichen. Wir bekommen ebenfalls eine Fehleranzeige, wenn wir uns außerhalb des Definitionsbereichs einer Funktion befinden, d. h., wenn wir versuchen, mit Werten der unabhängigen Variablen zu rechnen, die bei der betreffenden Funktion nicht definiert sind. Solche Aufgaben sind z. B.:

$$\sqrt{-2}; \lg(-3); \ln 0; \arcsin 3; \arccos(-2); (-2,6)^{-4,1}; 1,6!$$

Der entstehende Fehlertyp ist unabhängig vom Taschenrechner. Die Fehleranzeige bedeutet, daß der Nutzer bei der Aufgabenstellung einen Fehler gemacht hat und *nicht* der Taschenrechner.

## 4.5. Innere Organisation

Taschenrechner haben drei verschiedene Organisationsformen der Operationsdurchführung:

- algebraisch (häufig vorkommende Organisationsform, z. B. bei dem bulgarischen Taschenrechner *elka 130*),
- arithmetisch (vereinzelt anzutreffende Organisationsform, z. B. beim Taschenrechner *MR 201* aus der DDR),
- mit Kellerspeicher (z. B. beim Taschenrechner *konkret 600* aus der DDR).

Diese drei verschiedenen Organisationsformen sind an bestimmten Tasten zu erkennen. Bei **algebraisch** arbeitenden Taschenrechnern sind die Tasten für die vier Grundrechenarten und die Taste = vorhanden. Bei **arithmetisch** arbeitenden Taschenrechnern gibt es Doppelfunktionstasten (Tasten, die eine Beschriftung mit zwei Bedeutungen haben). Dies sind z. B. die Tasten  $+ =$  und  $=$ . Die mit **Kellerspeichern** arbeitenden Taschenrechner haben keine Taste =, jedoch die Tasten ENTER,  $\uparrow$ , STEP u. a.

In Tafel 4.1 ist dargestellt, wie die gleiche Aufgabe mit den drei verschiedenen Organisationsformen gelöst wird. Bei der algebraischen Logik erfolgt die Operationsdurchführung so wie bei der Rechnung mit Papier und Bleistift. Die üblichen mathematischen Symbole sind auf der Tastatur vorhanden. Die Anwendung der arithmetischen Logik ist schon komplizierter, wie aus der Tafel 4.1 ersichtlich ist. Rechner mit arithmetischer Logik sind seltener. Mechanische Rechner, die im Bereich des Handels eingesetzt wurden, hatten eine solche Logik. Taschenrechner mit arithmetischer Logik sind nicht in der Lage, zwei negative Zahlen zu multiplizieren.

Taschenrechner mit Kellerspeicher wollen wir uns etwas genauer ansehen. Andere

Tafel 4.1. Lösung einer Aufgabe mit drei verschiedenen Organisationsformen

**Algebraische Logik**            Aufgabe:  $(5 - 3) \cdot 4 = 8$

Y            0 5 5 0 2 0

X            5 5 3 2 4 8

Eingabe    5 - 3 \* 4 =

**Arithmetische Logik**            Aufgabe:  $(5 - 3) \cdot 4 = 8$

Y            0 5 5 0 2 2 0

X            5 5 3 2 2 4 8

Eingabe    5  $\pm$  3  $\equiv$  \* 4  $\pm$

**Kellerspeicher**            Aufgabe:  $(5 - 3) \cdot 4 = 8$

Y            0 5 5 0 2 0

X            5 5 3 2 4 8

Eingabe    5  $\uparrow$  3    4 \*

X: Anzeigeregister; Y: Operandenregister

Namen für Kellerspeicher sind: Stackspeicher, Sackspeicher, LIFO-Speicher (last in — first out). Die Arbeitsweise ist so, daß Gegenstände, die zuerst in den Keller bzw. in den Sack gelangt sind, zuletzt herausgenommen werden. Nachfolgende Gegenstände verdecken die zuerst hineingelangten Gegenstände und können früher wieder herausgeholt werden. Auch ein Patronenmagazin wirkt nach diesem Prinzip. Beim Taschenrechner sind die Gegenstände hinsichtlich des Kellerspeichers natürlich Zahlen (Operanden, Teil- oder Endergebnisse). In Tafel 4.2 sind Beispiele enthalten, die sich auf einen dreistufigen Kellerspeicher beziehen (d. h. auf drei Register, die nach dem genannten Prinzip arbeiten), wie das auch beim Taschenrechner *konkret 600* der Fall ist. Das Drücken der Taste  $\uparrow$  hebt die eingeschriebenen Zahlen jeweils auf ein höheres Niveau (bzw. schiebt sie immer tiefer in den Keller). Das Drücken einer Operationstaste senkt die eingeschriebenen Zahlen auf ein niederes Niveau (bzw. holt sie wieder um eine Stufe aus dem Keller heraus). Aus den Beispielen der Tafel 4.2 ist ersichtlich, daß die Operationsdurchführung immer mit den Inhalten der Register X und Y erfolgt und das Ergebnis immer im X-Register erscheint. Ein mehrstufiger Kellerspeicher hat für die Operationsdurchführung nennenswerte Vorteile, die sehr gut im zweiten Beispiel der Tafel 4.2 zum Ausdruck kommen. Das Ergebnis der Aufgabe  $(ab + cd)$  ist relativ einfach herzustellen. Kellerspeicher

Tafel 4.2. Beispiele mit dreistufigem Kellerspeicher

Aufgabe:  $(4 + 2) \cdot 3 = 18$

Z	0	0	0	3	3	0	0
Y	0	3	3	2	2	3	0
X	3	3	2	2	4	6	18
Eingabe	3	↑	2	↑	4	+	*

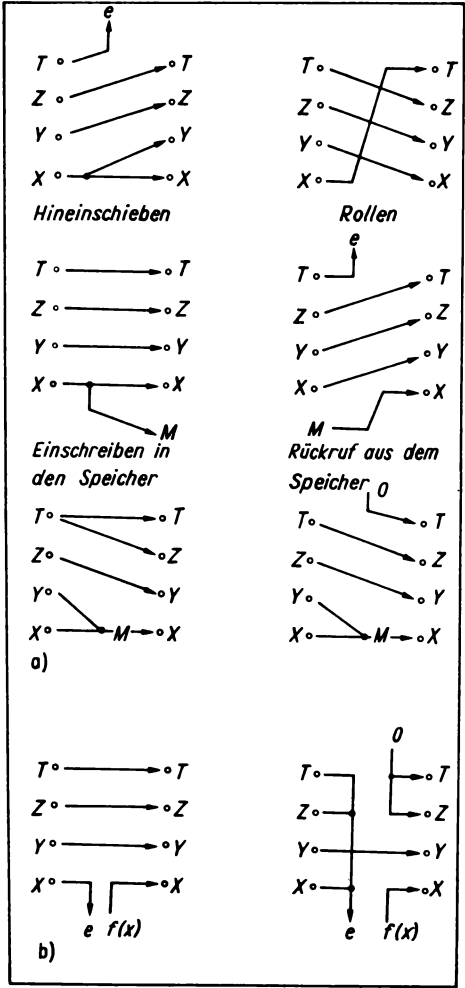
Aufgabe:  $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$

Z	0	0	0	0	0	6	6	0	0
Y	0	2	2	0	6	4	4	6	0
X	2	2	3	6	4	4	5	20	26
Eingabe	2	↑	3	*	4	↑	5		+

sind zur Durchführung von Kettenoperationen besonders nützlich, um schnell zum Ergebnis zu gelangen. Trotzdem erscheint die Verwendung eines Kellerspeichers ungewohnt, weil die Operationsdurchführung immer im Kopf verfolgt werden muß. Man muß stets wissen, welche Operanden oder Teilergebnisse in welchem Register sind. Der Inhalt des X-Registers wird durch Drücken der Taste ↑ in das Y-Register gebracht, wie das auch aus Bild 4.2 hervorgeht. Wie bereits erwähnt, bleibt trotzdem die Anzeige des Inhalts des X-Registers erhalten, bis eine neue Zahl eingetastet wird. Das Überführen des Inhalts des X-Registers in das Y-Register geschieht mit allen im X-Register enthaltenen Stellen. Bei verschiedenen Taschenrechnern erscheint auf der Anzeige e, wenn ein Registerinhalt verschwindet, weil z. B. keine tiefere Stufe im Keller vorhanden ist. Das Verschieben der Registerinhalte erfolgt systematisch, d. h., beim Verschieben des Inhalts des X-Registers in das Y-Register wird vorausgesetzt, daß vorher der Inhalt des Y-Registers in das Z-Register gebracht wurde. Sind neben dem Kellerspeicher noch weitere Speicher vorhanden (sog. **Konstantenspeicher**), so ändern sich die Inhalte dieser Konstantenspeicher nicht, wenn mit dem Kellerspeicher Verschiebungen durchgeführt werden. Transportiert man aus dem Kellerspeicher einen Registerinhalt in den Konstantenspeicher, so wird natürlich der vorherige Inhalt des Konstantenspeichers überschrieben. Operationen, die mit zwei Variablen ausgeführt werden, benötigen die Inhalte des X- und des Y-Registers. Das Ergebnis erscheint im X-Register. Bei Operationen mit einer Variablen wird der Wert dieser Variablen aus dem X-Register entnommen, das Ergebnis erscheint ebenfalls im X-Register und überschreibt damit den Wert der Variablen. Die Darstellung in den Bildern 4.2a und b zeigen verschiedene Möglichkeiten von Taschenrechnern mit Kellerspeichern bei Operationen mit einer bzw. mit zwei Variablen. Weitere Lösungen sind denkbar. Die Nutzer von Taschenrechnern mit Kellerspeicher, die sich an diese Organisationsform gewöhnt haben, können sehr effektiv komplizierte Aufgaben lösen.

Hier bedeutet effektiv, daß mit relativ wenig Tastenbedienungen die Operationen durchgeführt werden. Die mit Kellerspeicher ausgerüsteten Taschenrechner sind meist zwischen den Gruppen der wissenschaftlichen und der besonderen Taschenrechner zu finden.

Erwähnt werden soll hier, daß Taschenrechner mit Kellerspeicher auch als Rechner bezeichnet werden, die mit der „Umgekehrt Polnischen Notation“ versehen sind (RPN: reversed polish notation, nach dem polnischen Mathematiker *Lukasiewicz*). Diese Methode hat bei Großrechnern hinsichtlich der inneren Organisation eine besondere Bedeutung. Auf diese Probleme wird hier nicht weiter eingegangen.



**Bild 4.2.** Änderung der Inhalte der Speicherplätze bei vierstufigen Kellerspeichern für verschiedene Operationen  
a) Operationen mit zwei Variablen (+, -, \*, /)  
b) Operationen mit einer Variablen ( $\sqrt{x}$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\sin x$ , usw.)

## 4.6. Kettenoperationen und wiederholte Operationen

Zur Lösung einer Aufgabe sind oft zusammengesetzte Ausdrücke notwendig, einfache Additionen, Multiplikationen usw. reichen nicht aus. Deshalb ist es erforderlich, daß Teilergebnisse zu Operanden erklärt werden, mit denen dann weitere Operationen ausgeführt werden. Die in der Tafel 4.1 gezeigten Beispiele sind solche zusammengesetzten Ausdrücke. Die Aufgabe  $(5 - 3) \cdot 4$  erfordert eine Kettenoperation. Allgemein verlangen wir von Taschenrechnern, daß die Ergebnisse vorheriger Operationen ohne Neueintasten der erhaltenen Werte wieder verwendbar sein müssen.

### Beispiele

$$\frac{(4 + 8) \cdot 13}{27};$$

$$\frac{(6 - 9) \cdot 7 + 48}{2} \cdot 3;$$

$$\frac{\frac{8 + 5}{3} + 2}{2} + 7 \cdot 3,1415926.$$

### Lösungsvorgänge

$$4 + 8 * 13 \div 27 = 5,7777777;$$

$$6 - 9 * 7 + 48 \div 2 * 3 = 40,5;$$

$$8 + 5 \div 3 + 2 \div 2 + 7 \div 4 * 3,1415926 = 7,9848806.$$

Einige billige Taschenrechner haben nicht diese Möglichkeit, nach der beschriebenen Methode zu arbeiten, sie sind jedoch selten.

In Tafel 4.1 wurde bei der algebraischen Logik bereits auf die Möglichkeit der Verwendung von Teilergebnissen hingewiesen. Tafel 4.3 enthält ebenfalls ein Beispiel zur Verwendung von Teilergebnissen für weitere Operationen. Allerdings ist dieses Beispiel bereits auf einer höheren Stufe, wie Sie das beim Durchrechnen feststellen können. Es erfolgt mehrfach der gleiche Tastendruck  $\equiv$ . Nach Ausführung einer Operation ist das Operandenregister (Y-Register) nicht 0, sondern behält den eingeschriebenen Wert. Dadurch können wir die gerade ausgeführte Operation erneut ausführen. Benutzt werden wiederum für die Operation das X- und das Y-Register. Dieser Vorgang kann so oft ausgeführt werden, wie es erforderlich ist. Auf den möglichen Überlauf sollte allerdings

Tafel 4.3. Beispiel zur Verwendung von Teilergebnissen

Aufgabe:  $(5 - 3)^3 \cdot 4 = 32$

Y	0	0	5	5	2	2	2	2	2
X	0	5	5	3	2	4	8	16	32
Eingabe	5	3	*	4	=	=	=		



Anhand der Ergebnisse kann man bei unseren Aufgaben feststellen, daß bei der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division der zweite eingeebene Zahlenwert als *Konstante* für die weitere Rechnung verwendet wird. Selbstverständlich ist, daß, abhängig vom Rechnertyp, die verschiedenen Hersteller auch unterschiedliche Verfahren der Konstantenspeicherung verwenden. Mit dem oben erläuterten Verfahren wollen wir uns noch einige Aufgaben ansehen:

1. Zu den Zahlen 1526; 17 und 8,3 soll 1976 addiert werden!

$$\begin{aligned} 0 + 1976 &= 1976 \\ 1526 &= 3502 \\ 17 &= 1993 \\ 8,3 &= 1984,3 \end{aligned}$$

2. Von den Zahlen 7; 1001 und 59 sollen 81 abgezogen werden!

$$\begin{aligned} 0 \quad 81 &= -81 \\ 7 &= -74 \\ 1001 &= 920 \\ 59 &= -22 \end{aligned}$$

3. Die Zahlen 16; 99 und 0,03 sollen durch 3 dividiert werden!

$$\begin{aligned} 3 \div 3 &= 1 \\ 16 &= 5,3333333 \\ 99 &= 33 \\ 0,03 &= 0,01 \end{aligned}$$

(für die Multiplikation haben wir keine besonderen Aufgaben gestellt).

Unter Verwendung des Konstantenspeichers können Kettenoperationen, auch bei komplizierten Ausdrücken, in einem Rechengang gelöst werden. Dazu rechnen wir folgende Aufgabe:

$$\frac{\left(\frac{2-3}{5} + 4\right)^3}{2,8^4}.$$

### Lösung

$$2 \quad 3 \div 5 + 4 * = = \div 2,8 = = = = 0,8927269$$

Wir empfehlen, daß die Leser folgende Aufgaben selbständig lösen:

$$\frac{(2^5 + 3)^4}{3^7};$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{47} + 2\right)^3};$$

$$\frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{3}}}}.$$

## 4.7. Speicher

In den meisten Taschenrechnern finden wir „Speicher“. Wir haben deshalb das Wort Speicher in Anführungsstriche gesetzt, weil hier Speicherungsmöglichkeiten gemeint sind, die über die Speicherung im Operandenregister oder im Anzeigeregister hinausgehen. Die Speicherung im Operandenregister und im Anzeigeregister ist bei jedem Taschenrechner erforderlich, darüber erfolgten in den vorherigen Abschnitten entsprechende Aussagen. Die hier gemeinten Speicher können Zahlen aufnehmen, die über eine gewisse Zeit aufgehoben werden, unabhängig davon, welche Tätigkeit mit dem Operandenregister bzw. mit dem Anzeigeregister erfolgt. Unser Speicher wirkt also wie ein Notizbuch, in dem eine Zahl steht, die wir so lange aufheben können, wie wir es wünschen. Benötigen wir irgendwann diese Zahl, dann haben wir sie zur Verfügung, können mit ihr rechnen, ohne daß die Zahl selbst im Notizbuch verschwindet. Falls wir keinen Bedarf für die Speicherung der Zahl mehr haben, können wir sie löschen bzw. im Notizbuch wegradieren. Taschenrechner haben die unterschiedlichsten Möglichkeiten der Verwendung von Speichern. Wir werden hier die häufigsten verwendeten Aufgaben dieser Speicherung und deren zugehörige Zeichen auf der Tastatur erläutern:

**Einspeicherung** (M:, STO, MW, LM). Die im Anzeigeregister befindliche Zahl wird in den Speicher transportiert. War vor dieser Operation im Speicher bereits eine Zahl enthalten, so wird diese überschrieben, es steht nach dem Einspeichern der aktuelle Zahlenwert im Speicher.

**Speicheraufruf** (MRC, RCL, MR). Die im Speicher befindliche Zahl wird in das Anzeigeregister übertragen, der Inhalt des Anzeigeregisters wird dadurch überschrieben. Der Inhalt des Speichers bleibt weiterhin erhalten und kann beliebig oft aufgerufen werden.

**Löschen** (CL, MC). Die im Speicher befindliche Zahl wird gelöscht. Sind diese beiden genannten Tasten nicht vorhanden, so können wir den Speicher mit einem anderen Verfahren löschen: Es wird eine 0 in das Anzeigeregister gebracht (Eintasten einer 0), anschließend wird der Inhalt des Anzeigeregisters durch einen Einspeichervorgang in den Speicher gebracht und ist damit gelöscht.

**Tausch der Inhalte des Speichers und des Anzeigeregisters** ( $X \rightleftharpoons M$ ). Die beiden Inhalte werden einfach ausgetauscht. Erfolgt diese Operation zweimal, dann sind die alten Inhalte wieder im Speicher und im Anzeigeregister enthalten.

**Adresse des Speichers.** In komplizierten Taschenrechnern sind mehrere Speicherplätze vorhanden. Diese müssen natürlich bei den einzelnen Operationen auseinandergehalten werden. Dies geschieht meist so, daß nach dem Drücken der Tasten M:, STO, MW oder LM eine Zifferntaste gedrückt wird. Diese Ziffer entspricht der Adresse des Speicherplatzes. Ziffern und Reihenfolge der Speicherplätze entsprechen einander. Das Adressieren des Speicherplatzes ist beim Einspeichern ebenso erforderlich wie beim Speicheraufruf, beim Löschen oder beim Tausch von Inhalten bestimmter Speicherplätze mit dem Anzeigeregister.

### Beispiel

STO 3, MW 1, LM 4.

Teilweise sind die Adressen der Speicherplätze mit auf den Speicherfunktionstasten enthalten. Damit erspart man sich das Eintasten der Speicherplatzadresse,

jede STO-Taste gilt dann aber nur für *einen* Speicherplatz. Die Tastenanzahl kann durch dieses Verfahren vergrößert werden, dies ist ein Nachteil. Man verwendet diese kombinierten Tasten nur beim Vorhandensein weniger Speicherplätze.

### Beispiele

M1, STO 4.

**Für Operationen verwendbare Speicher ( $M^+$ ,  $M^-$ ).** Mit den Tasten  $M^+$  und  $M^-$ , die relativ häufig bei Taschenrechnern mit Speichern zu finden sind, können Operationen mit den Speicherplatzinhalten ausgelöst werden. Das Anzeigeregister ist an dieser Operation beteiligt. Nach Ausführung einer solchen Operation ( $M^+$ : zum Inhalt des Speicherplatzes wird der Inhalt des Anzeigeregisters addiert,  $M^-$ : vom Inhalt des Speicherplatzes wird der Inhalt des Anzeigeregisters subtrahiert) ist der Inhalt des Speicherplatzes geändert. Beträgt z. B. der Inhalt eines Speicherplatzes 117 und der Inhalt des Anzeigeregisters 21, dann erhalten wir bei Ausführung der Operation mit  $M^+$  im Speicher 138. Wird anschließend  $M^-$  gedrückt, so ist der Speicherplatzinhalt wieder 117 und nach nochmaliger Betätigung der Taste  $M^-$  96. Sind mehrere Speicherplätze vorhanden, dann muß natürlich auch die Speicherplatzadresse angegeben werden. Dies kann wiederum so erfolgen, daß entweder nach  $M^+$  bzw.  $M^-$  die Speicherplatzadresse eingetastet wird, oder es sind Tasten vorhanden, die die Operationsart mit bestimmten Registern angeben, z. B.  $M1^+$ ,  $M2^-$ . Es gibt auch solche Taschenrechner, bei denen die Multiplikation und die Division mit den Speicherplatzinhalten möglich sind.

Nun einige Beispiele zur Nutzung von Speicherplätzen:

$$2 * 3 = M: 4 * 5 = + MR = M: 5 * 6 = + MR = 56$$

Ohne Speicher könnten wir die Ergebnisse der Teilmultiplikationen nicht weiterverarbeiten, sondern müßten uns jeweils die Teilergebnisse herausschreiben. Zum Schluß wären noch die Teilergebnisse zu addieren. Sie sehen, daß einfache Speichermöglichkeiten bereits die Nutzung von Papier und Bleistift ersetzen. Die oben angeführte Aufgabe kann auch anders geschrieben werden:

$$2 * 3 = M^+ 4 * 5 = M^+ 5 * 6 = M^+ MR = 56.$$

In diesem Fall können wir gleich mit dem Speicherplatzinhalt rechnen (Addition), die Durchführung der Aufgabe wird noch schneller. Am Anfang muß aber der Speicherplatzinhalt 0 sein. Auch bei komplizierten Aufgaben kann man den Speicher gut nutzen:

$$\frac{228 - 347}{512 + 63} = ?$$

$$512 + 63 = M: 228 - 347 = \div MR = -0,2069565.$$

Bei der Lösung einiger Aufgaben können wir den Rechengang abkürzen, wenn wir die Inhalte von Anzeigeregister und Speicher tauschen. Nehmen wir z. B. an, daß der  $y$ -Wert der folgenden Aufgabe berechnet werden soll und für  $x = 1,2345678$  eingesetzt wird:

$$y = \frac{3 + x}{5 + x}.$$

Unangenehm ist bei dieser Rechnung, daß der  $x$ -Wert zweimal eingetastet werden muß (zweimal erfolgen acht Tastendrucke mit den dabei bestehenden

Fehlermöglichkeiten beim Eintasten). Dies können wir vermeiden, wenn wir wie folgt verfahren:

$$1.2345678 M : + 5 = \Rightarrow M + 3 \div MR = 0,6792079 .$$

Wir schlußfolgern daraus, daß der Speicher eine sehr nützliche Einrichtung ist. Wir müssen allerdings immer wissen, was im Speicher eingetragen ist, da ja der Speicherinhalt nicht sichtbar ist (z. B.  $\pi$  mit acht Stellen).

Einige Taschenrechner haben weitere Zusatzeinrichtungen, z. B. Anzeige eines Symbols, wenn der Speicherinhalt ungleich 0 ist. Dieses Symbol darf natürlich nicht den normalen Ablauf der Operationen behindern.

Bei der Behandlung des Speichers möchten wir noch einmal auf den Kellerspeicher verweisen, da er nach ähnlichen Prinzipien arbeitet. Dort waren, wie bereits beschrieben, keine Adressen erforderlich, da jeweils ein Verschieben der Registerinhalte fallend oder steigend im Kellerspeicher erfolgt. Die Anwendung des Kellerspeichers erfordert einige Erfahrungen. Dazu werden wir noch Beispiele in der Tafel 7.1 bringen.

## 4.8. Operationen mit vorzeichenbehafteten Zahlen

Operationen mit vorzeichenbehafteten Zahlen sind möglich, da die Vorzeichenregeln relativ einfach sind. Bei Taschenrechnern, die keine Vorzeichen verarbeiten können, merkt sich der Nutzer die Stellung und Veränderung der Vorzeichen. Die meisten Taschenrechner können jedoch mit vorzeichenbehafteten Zahlen rechnen. Die entsprechenden Regeln werden z. B. bei der Multiplikation in der Art angewendet, daß aus zwei negativen Zahlen eine positive Zahl entsteht. Die Anwendung der Vorzeichenregeln setzt voraus, daß das Vorzeichen an einer definierten Stelle der Zahlendarstellung vorhanden ist. Für das Setzen des Vorzeichens werden die Tasten  $+/-$  bzw. CHS, CS oder SIGN bedient. Die für den Nutzer bequemste Lösung ist die Eingabe des Vorzeichens vor oder nach Eintasten des Betrags der Zahl. Relativ oft werden bei bestimmten Taschenrechnertypen besondere Regeln zur Vorzeicheneingabe angegeben, z. B. Vorzeichenwechsel nach Eintasten des Betrags der Zahl, also nicht schlechthin Eingabe von  $+$  oder  $-$ . Wir empfehlen, die Beschreibung des entsprechenden Taschenrechners genau zu studieren, um die Forderungen an die Vorzeicheneingabe einhalten zu können. Wir wollen zur Übung einige Aufgaben lösen, die Sie separat im Kopf oder mit Papier und Bleistift lösen können. Der anschließende Vergleich der Ergebnisse ermöglicht die Kontrolle. Die Kontrollen sollen sich hier aber vornehmlich auf die Vorzeichen beziehen, die Zahlenrechnungen sind trivial.

$$\begin{array}{ll} 3 + (-4) = & ; 2 \cdot (-3) = ; \\ 6 \div (-3) = & ; -3 + (-6) = ; \\ (-18) \div (-9) = & ; -6 - (-4) = ; \\ (-6) \cdot 7 = & ; (-36) \div 6 = . \end{array}$$

Haben Taschenrechner keine Vorzeichentasten, so können wir negative Zahlen darstellen, indem wir die Beträge dieser Zahlen von 0 subtrahieren. Dabei können allerdings die genannten Aufgaben nicht in einem Rechengang gelöst werden, sondern die Rechnung wird etwas umständlicher.

## 4.9. Verwendung von Klammern, Hierarchie der Operationen

Wir haben bereits gesehen, daß Kettenoperationen möglich sind und typische Aufgaben wie

$$2 + 3 * 4$$

in einem Rechengang gelöst werden können. Wir erhalten das Ergebnis so, als wenn der Taschenrechner  $(2 + 3) \cdot 4$  ausgerechnet hätte, also nach den uns bekannten Klammerregeln. Das hat aber nur den Schein, denn einfache Taschenrechner arbeiten die Aufgabe nach der Reihe der einzelnen Operationen ab. Ein Teil der wissenschaftlichen Taschenrechner enthält auch Tasten für Klammern ( ) oder hat Möglichkeiten, die den Wirkungen der Klammern gleichkommen.

### Beispiele

$$5 \cdot (4 + 3) \cdot 2 = 70,$$

$$5 \cdot (4 + 3 \cdot 2) = 50.$$

Der Wert innerhalb der Klammern wird getrennt berechnet, wenn diese Klammern dem Taschenrechner mitgeteilt werden. Wenn innerhalb der Klammern weitere Klammern stehen oder unterschiedliche Operationsarten auftreten, stellt der Taschenrechner fest, in welcher Reihenfolge eine Abarbeitung zu erfolgen hat. Dazu ist die **Hierarchie der Operationen** zu beachten. Allgemein gilt folgende Reihenfolge der Operationen:

- Funktionen mit einer Variablen,
- Potenzieren und Radizieren,
- Multiplizieren und Dividieren,
- Addieren und Subtrahieren,
- Gleichheitszeichen (alle Operationen sind beendet).

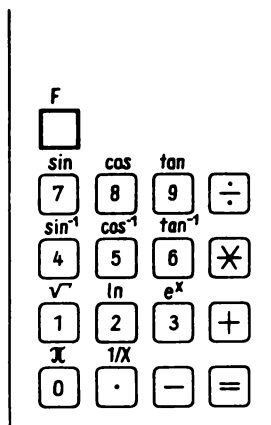
Die Klammernverwendung ist recht unterschiedlich, das betrifft das Setzen und das Schachteln von Klammern. Man sollte die Beschreibung seines Taschenrechners beachten, um Möglichkeiten und Grenzen der Verwendung von Klammern festzustellen. Auch Übungen sind dazu zweckmäßig.

## 4.10. Funktionen

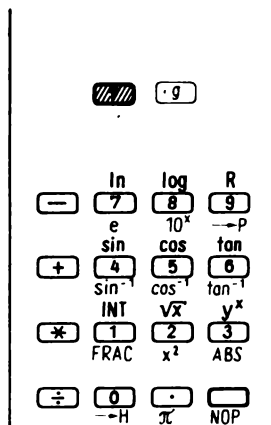
Mit dem Tastendruck, der einer Funktion entspricht, läßt sich der Funktionswert berechnen. Die Anzahl der verwendeten Funktionen beträgt i. allg. 10 bis 20. Die Begrenzung hat verschiedene Ursachen. Bei einer Erhöhung der Funktionen wird die Tastatur unübersichtlich, auch müssen die Tasten kleiner werden, um gewisse Abmessungen der Frontplatte nicht zu überschreiten. Ein Kompromiß besteht in der Zuordnung von zwei oder auch drei Funktionen zu einer Taste. Die Festlegung, welche Funktion bei Doppel- oder Dreifachbelegung einer Taste gültig ist, erfolgt durch besondere Wechseltasten oder Schalter.

### Beispiel

Auf einer Taste ist eine Funktion aufgetragen. Wird diese Taste gedrückt, erfolgt die zugehörige Operationsausführung. Außerdem sei über (oder unter) der Taste eine zweite Funktion angegeben. Diese Funktion gilt nur, wenn vor dem Tastendruck eine separate Taste (z. B. F) gedrückt wird. Sehen Sie sich dazu



a)



b)

Bild 4.3. Beispiele für Taschenrechnertastaturen

a) Tastenfeld mit Zweifachfunktionen  
 b) Tastenfeld mit Dreifachfunktionen

Bild 4.3a an. Bei dem dargestellten Taschenrechner werden mit dem Tastendruck Ziffern eingegeben. Wird vor dem Tastendruck die Taste F gedrückt, so gilt die über den Tasten aufgeführte Funktion.

Im Bild 4.3b ist ein Taschenrechner dargestellt, der dreideutige Tasten besitzt. Der Tastendruck entspricht der Zifferneingabe. Wird jedoch vor einem Tastendruck die Taste f gedrückt, so gilt die über den Tasten stehende Funktion. Sinngemäß bedeutet das Drücken der Taste g und anschließender Tastendruck einer Zifferntaste, daß die unter den Tasten stehende Funktion gilt.

Allgemein ist das Drücken einer Taste f oder g nur für die folgende Funktion zuständig. Es gibt jedoch auch Taschenrechner, bei denen die gedrückte Taste f oder g solange gültig bleibt, bis ein Rückstellen in den Grundzustand erfolgt (z. B. nochmaliges Drücken von f oder g).

Die am häufigsten verwendeten **Funktionen** sind:

1.  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $y^x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $\lg x$ ,  $10^x$

Die Verwendung dieser Funktionen ist verständlich, nur bei  $y^x$  müssen wir untersuchen, ob zuerst der  $x$ -Wert oder der  $y$ -Wert eingegeben werden muß. Beachten wir dies nicht, so sind z. B. für  $2y^x - 8$  zwei Ergebnisse denkbar. Taschenrechner führen das Potenzieren mit Hilfe logarithmischer Operationen durch, deshalb brauchen wir uns nicht zu wundern, wenn in einem trivialen Fall nicht das erwartete Ergebnis angezeigt wird:  
 $9^2 = 80,999998$ .

## 2. Trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen

Häufig finden wir in der Bedienungsanleitung Hinweise dafür, ob die Argumente im Gradmaß (360 oder 400 Grad) oder im Bogenmaß einzusetzen sind. Beim Ergebnis muß man beachten, in welcher Maßeinheit vorher die Argumente eingesetzt wurden. Es gibt auch Taschenrechner, die in Grad- und Bogenmaß rechnen können, wobei eine Umstelltaste die erforderliche Festlegung trifft. Denkbar sind auch solche Varianten, daß beim Einschalten des Taschenrechners im Gradmaß gerechnet wird und erst eine Umstellung eine Rechnung im Bogenmaß ermöglicht. Besonders bequem ist es natür-

lich, wenn der Taschenrechner eine Umrechnung von Radiant in Grad, Minuten und Sekunden (und umgekehrt) ermöglicht.

Einige Taschenrechner lassen nur eine Berechnung zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  zu, andere nur zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$ . Bei vielen Typen kann der gesamte Zahlenbereich zur Berechnung von trigonometrischen Funktionen verwendet werden.

Wenn Funktionswerte von komplizierten Funktionen berechnet werden, kann es passieren, daß die letzten Ziffern nicht ganz genau sind. Wird auf eine hohe Genauigkeit geachtet, so ist es zweckmäßig, gleich den entsprechenden Taschenrechner zu verwenden, der den Forderungen an die Genauigkeit gerecht wird. Es lohnt sich auch einmal, seinen Taschenrechner mit einem komplizierten Taschenrechner zu vergleichen. Dies kann in der Form erfolgen, daß die Berechnung von verschiedenen Funktionswerten und für verschiedene Funktionen mit beiden Taschenrechnern durchgeführt wird. Hinsichtlich Operationszeit und Genauigkeit kann man dabei Schlüsse ziehen und wird seinen Taschenrechner besser einschätzen können.

Mit komplizierten Algorithmen lassen sich auch anspruchsvolle Funktionen berechnen. Dabei entstehen dann entsprechend lange Operationszeiten. Trigonometrische oder exponentielle Funktionswertermittlungen benötigen mitunter 2 ... 5 Sekunden, im Gegensatz zu den arithmetischen Grundoperationen, die einige hundertstel Sekunden dauern. Die Berechnung von  $x^2$ ,  $1/x$  oder  $\sqrt{x}$  dauert nur unwesentlich länger als arithmetische Grundoperationen.

Zweckmäßig ist es, wenn man sich allmählich eine gewisse Übung zur Lösung komplizierter Aufgaben aneignet, einschließlich entsprechender Ausdrücke mit Funktionen.

Bei Kenntnis verschiedener funktioneller Zusammenhänge (z. B. der Beziehungen zwischen Funktionen mit gleichem Winkel) kann man mitunter zu verblüffend einfachen Lösungswegen gelangen.

### Beispiele

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ;$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} .$$

Die Anwendung solcher Formeln kann man im folgenden Beispiel sehen:

$$\ln \frac{e^{\sqrt{(2 \sin^2 x + 1 + \cos 2x)/2}}}{e} = 0 .$$

Ohne Kenntnis der Vereinfachungen benötigt man zur Lösung der Aufgabe schon einige Übung. Auch hier kann bei ausführlicher Berechnung durch die eingeschränkte Genauigkeit ein etwas anderes Ergebnis entstehen.

Neben den oben beschriebenen sog. *Standardfunktionen* gibt es oft weitere Funktionen, und die folgenden sind in einigen Fachgebieten besonders wichtig:

### ABS (x)

Von der im Anzeigeregeister befindlichen Zahl wird der Absolutbetrag gebildet, also Wegfall des vorhandenen Vorzeichens.

INT (x)

Das Anzeigeregister zeigt den ganzen Teil einer Zahl an. Beispiel: aus 12,376 wird 12.

FRAC (x)

Hier tritt das Gegenteil von INT (x) ein, es wird nur der echte Bruch einer Zahl angezeigt.

SH, CH, ASH, ACH

Sie beziehen sich auf hyperbolische Funktionen und ihre Umkehrungen.

$\Sigma x$ ,  $\Sigma x^2$

Bei Taschenrechnern mit mehreren Speicherplätzen kann eine automatische Summierung der Inhalte von adressierbaren Speicherplätzen erfolgen. Diese Funktionen werden bei statistischen Aufgaben recht oft benötigt.

DEG – RAD; RAD – DEG

Umrechnung von Grad- in Bogenmaß bzw. umgekehrt.

DEC – DMS; DMS – DEC

Ein in Zehntelgrad angegebener Wert wird in Minuten und Sekunden umgerechnet bzw. umgekehrt.

Beispiele:  $45,5^\circ = 45^\circ 30' 00''$ ;

$71^\circ 42' 36'' = 71,71^\circ$

Genau diese Umrechnung ist auch für Stunden, Minuten und Sekunden, also für Zeitrechnungen, brauchbar.

Polar-Rechteck-Koordinatentransformation

Bei Kenntnis von  $A$  und Winkel  $\alpha$  können die  $X$ - und  $Y$ -Koordinaten ausgerechnet werden bzw. umgekehrt. Der Sachverhalt ist im Bild 4.4 dargestellt.

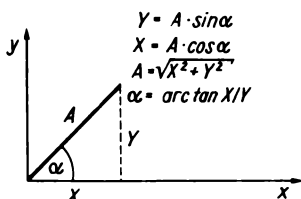


Bild 4.4. Zusammenhang bei der Polar- und Rechteck-Koordinatentransformation

Wert des letzten x

Mit Hilfe dieser Taste kann man den Inhalt des Anzeigeregisters abspeichern und damit sichern. Falls eine fehlerhafte Operation durchgeführt wurde, besteht die Möglichkeit, den Wert des letzten x (also den Inhalt des Anzeigeregisters) wieder aus dem Speicher zu rufen und dann die richtige Operation auszuführen. Bei bewußter Anwendung dieser Möglichkeit tritt eine weitere Rationalisierung des Rechenablaufs ein. Die Grenzen der Nutzung der Taste *Wert des letzten x* sind aus den Beschreibungen der Taschenrechner zu entnehmen.

Natürlich könnten wir noch weitere nichtstandardisierte Funktionen und Operationen aufführen, jedoch würden wir kaum eine Grenze erreichen, weil spezielle Taschenrechner noch eine Fülle weiterer Tasten haben.

Parameter	MEMORY —4	FACIT (10)	COM. SR 7919	konkret 600	PTK 1023	HP —25
Zahldarstellung						
Festkomma	x	x	x	x	x	x
Fließkomma			x	x	x	x
halblogarithmisch			x	x	x	x
gerundet			x			
verkürzt	x	x		x	x	x
verborgene Ziffern	0	0	2	0	0	
anzeigbare Stellen	8	8	8 + 2	7 + 2	8 + 2	8 + 2
Operationen						
Vorzeichenregeln/-wechsel	x		x	x	x	x
Kettenoperationen	x	x		x	x	x
Konstantenspeicher	x	x		x	x	x
mit konstanten Werten					$\pi$	$\pi$
Umwandlungen:						
Grad- in Bogenmaß						x
Funktionen						
$\frac{0}{\circ}$	x	x				
$\sqrt{x}$			x	x	x	x
$1/x$	x		x	x	x	x
$x^2$			x			x
trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen }			x	x	x	x
$\ln x, e^x, \lg x$			x	x	x	x
$10^x$			x	x	x	x
$1^x$ bzw. $x^y$			x	x	x	x
$n!$						
$\Sigma x^2$						x
Speicher						
Anzahl	1	1	1	1	1	8
Operationsausführung	x	3*	x	X $\neq$ Y	X $\neq$ Y	x
Tausch	x		X — Y		x	
Überlaufanzeige	x					
Löschung	x					
Kellerspeicher				3	4	x 4

Anzahl der Tasten	25	22	19	20	35	30
Anzahl der Fehlersymbole	1	1	2	2	1	2
Trockenbatterien	x	x	x			
Adapter	x		x			
aufladbarer Akkumulator				x	x	x
Fluoreszenzanzeige	x					
Leuchtdiodenanzeige		x	x	x	x	x
Anzahl der Schritte					100	49
Betriebsart:						
learn — run					x	x
check						x
step					x	x
Befehle:						
START, STOP, HALT					x	x
LABEL, GOTO						x
IF						
GOSUB — RETURN						
PAUSE						x
Magnetbandspeicher						
besondere Eigenschaften	1*	2*	2*	2*	4*	4*

1\* Auch aus negativen Zahlen wird die Wurzel gezogen.

2\* Nach 15 s erfolgt automatisches Abschalten der Anzeige.

3\* Negative Zahlen können nicht gespeichert werden.

4\* Auch nach dem Ausschalten des Rechners bleibt das Programm erhalten.

## **4.11. Vergleich von Taschenrechnern**

Nun wollen wir verschiedene Taschenrechner hinsichtlich ihrer Eigenschaften vergleichen. In Tafel 4.4 sind einige Eigenschaften von Taschenrechnern angegeben. Diese Angaben sind den Bedienungsanleitungen entnommen bzw. durch eigene Untersuchungen ergänzt worden. Nach dem in dieser Broschüre bisher Erwähnten können wir diese Eigenschaften verstehen und auch richtig einordnen.

Die ersten beiden Taschenrechner gehören zur einfachen bzw. erweiterten Taschenrechnergruppe. Der COMMODE-RECHNER SR 7919 vertritt die wissenschaftlichen Taschenrechner. Der konkret 600 ist ein Beispiel eines in der DDR hergestellten Taschenrechners. Die Rechner PTK 1023 und HP-25 vertreten die programmierbaren Taschenrechner.

Beachten Sie, daß die sechs ausgewählten Taschenrechner in den verschiedenen Positionen voneinander abweichen und unterschiedliche Eigenschaften haben.

---

## 5. Wie und wozu benutzt man Taschenrechner?

---

### 5.1. Allgemeine Regeln zur Anwendung von Taschenrechnern

In diesem Abschnitt werden Rechenalgorithmen zur Lösung von Aufgaben empfohlen. Damit möchten wir größere Rechenarbeit vermeiden helfen. Diese Problemstellung schließt auch Hinweise für die zweckmäßige Verwendung der Taschenrechner ein. Unser Ziel ist es, die Rechenarbeiten zu vereinfachen und trotzdem die Genauigkeit der Rechnung zu erhöhen.

Bei der Verwendung von Taschenrechnern können Fehler entstehen, die auf das falsche Bedienen (Drücken falscher Tasten) oder auf das Eingeben falscher Zahlenwerte zurückzuführen sind. Einen Teil dieser Fehler kann man feststellen und deshalb Berichtigungen durchführen, teilweise werden die Fehler aber nicht bemerkt. Bei einem falschen Endergebnis ist es nicht gleichgültig, ob der Fehler durch eine falsche Operation oder durch einen falschen Zahlenwert entstanden ist.

Für die weiteren Betrachtungen nehmen wir an, daß überwiegend einfache, erweiterte oder wissenschaftliche Taschenrechner verwendet werden. Programmierbare Taschenrechner haben auf Grund ihrer besonderen Eigenschaften teilweise andere Rechenalgorithmen.

Die Häufigkeit der Fehler, die durch falsche Tastenbedienungen entstehen, ist von vielen Faktoren abhängig. Durchschnittlich tritt nach 20 bis 150 Tastenbedienungen ein Tastenbedienungsfehler auf, den wir merken oder der uns unbemerkt durchschlüpft. Bei Rechenalgorithmen sollte man deshalb anstreben, möglichst wenige Tastendrücke auszuführen. Die Fehleranzahl ist natürlich von der Person abhängig, die den Taschenrechner bedient (nervös, müde, Konzentrationsvermögen, Bildungsgrad, Gewöhnung an den Taschenrechner, Arbeitsgeschwindigkeit usw.). Sehr wichtig ist es deshalb, laufend Rechenkontrollen einzuschleiben bzw. Methoden zu erkunden, mit denen man Fehler sehr schnell erkennt.

Bei der Vielschichtigkeit der Rechenaufgaben ist es unmöglich, Rezepte in allgemeiner Form für ein effektives Rechnen zu vermitteln. Das, was in einem Fachgebiet effektiv ist, kann in einem anderen Fachgebiet vielleicht schon ineffektiv sein. Wir werden uns deshalb mit einem Querschnitt von Algorithmen befassen, wobei diese Algorithmen erweiterungsfähig sind. Damit legen wir uns nicht auf ein Fachgebiet fest, sondern geben allen Nutzern der Taschenrechner Hinweise.

Die vorgestellten Rechenalgorithmen werden nicht so sehr konventionelle Probleme betreffen, für die die Mathematik umfassende Lösungsverfahren bereithält. Wir werden uns vielmehr damit befassen, wie die Lösungsverfahren der Mathematik in bezug auf den Taschenrechner angewendet werden können.

## Einige allgemeine Regeln und Empfehlungen

1. Wollen wir mit dem berechneten Ergebnis weiterrechnen, dann empfiehlt es sich, das Ergebnis nochmals durch eine Wiederholung der Rechnung zu prüfen. Die Zeitspanne zwischen der Rechnung und der Kontrollrechnung sollte ausreichend groß sein, dabei läßt sich für die Kontrollrechnung ein anderer Rechenalgorithmus verwenden, z. B.:

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 56$$

und die Kontrollrechnung mit der umgeformten Aufgabe

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 56.$$

Sie werden gemerkt haben, daß die Kontrolle durch den zweiten Rechengang erst dann mit diesen scharfen Bedingungen ausgeführt werden sollte, wenn die Aufgaben tatsächlich sehr kompliziert sind, und nicht, wie es bei der Beispielaufgabe der Fall ist.

Zu beachten ist, daß das gleiche Ergebnis noch nicht bedeutet, daß das Ergebnis richtig sein muß. Es können in beiden Rechnungen Fehler sein, die aber zum gleichen Ergebnis führen.

2. Wir benutzen den Taschenrechner mit der linken Hand, um mit der rechten Hand den Bleistift zu halten, mit dem wir Teil- und Endergebnisse aufschreiben. Das ist besonders dann notwendig, wenn erforderliche Speicher im Taschenrechner nicht vorhanden sind. Aber auch beim Vorhandensein von Speichern lohnt sich das Aufschreiben von Teilergebnissen. Die meisten Taschenrechner sind so konstruiert, daß eine Bedienung mit der linken Hand vorausgesetzt wird. Die Tasten machen also nicht nur eine Bedienung durch die linke Hand möglich, sondern provozieren dies auch.
3. Bei größeren Rechnungen sollten die Schritte des Rechenalgorithmus bzw. die Teilergebnisse aufgelistet werden. Beim Spaltenaufbau dieser Listen ist darauf zu achten, daß

- Operationen, die mit Konstanten durchgeführt werden, gruppiert sind. Dies führt zu Vereinfachungen der Rechnung und auch zum vereinfachten Aufschreiben der Teilergebnisse;
- bei Kettenoperationen eine entsprechende Auswahl der zusammenfaßbaren Teilergebnisse erfolgt und diese dann in die Liste eingetragen werden;
- bei längeren Kettenoperationen nicht über fünf bis sieben Operationen hinausgegangen wird, sonst steigt die Fehlermöglichkeit. Bereits in dieser Größenordnung sind Wiederholungen der Rechnung angebracht.

Die Unterteilung der Rechenalgorithmen in auflistbare Schritte bzw. Teilergebnisse lohnt sich, da diese Schritte wiederholbar und damit kontrollierbar sind. Rechenalgorithmen und Fehlermöglichkeiten müssen immer im Zusammenhang gesehen werden.

4. Wir sollten die Rechenaufgabe so aufbereiten, daß der verwendete Taschenrechner dieser Aufgabe bestmöglichst gerecht wird.

Die hier dargestellten Regeln und Empfehlungen können selbstverständlich nicht auf alle Rechenprozesse bezogen sein, sondern sind differenziert für die speziellen Aufgaben zu sehen. Auch die Unterschiedlichkeit der Taschenrechner muß mit ins Kalkül gezogen werden.

Weitere Hinweise, die unter einem anderen Aspekt geordnet sind:

- a) Für die Nutzung des Taschenrechners lassen sich keine einheitlichen Regeln hinsichtlich der Vereinfachung mathematischer Ausdrücke geben.

**Beispiel:**  $\sqrt[3]{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$ .

Aus 27 läßt sich die Wurzel einfach ziehen, auch  $3 \cdot \sqrt{3}$  ist nicht kompliziert und trotzdem gibt es Unterschiede.  $\sqrt[3]{27}$  und  $\sqrt{3}$  ergeben irrationale Zahlen mit der gleichen relativen Genauigkeit, jedoch ist nach  $\sqrt[3]{27}$  das Ergebnis fertig, nach  $\sqrt{3}$  muß noch mit 3 multipliziert werden.

Wir wollen damit feststellen, daß unser Taschenrechner die Vereinfachung von Ausdrücken nicht überflüssig macht, und trotzdem sind effektive Rechenalgorithmen, schnelle Rechnungen, eine Erhöhung der Genauigkeit anzustreben.

Ein anderes **Beispiel:**  $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2$ .

Die Berechnung der Aufgabe, wie sie hier geschrieben ist, bringt ein Ergebnis von 17,999999. Man kann natürlich ahnen, daß hier ein Genauigkeitsfehler vorhanden ist. Unter Anwendung des Binoms erhalten wir nach Umformung der Aufgabe:

$$(8 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2) = 18.$$

Sie sehen, daß bei einem „unrunden“ Ergebnis der Gedanke zur Rundung nahe liegt und auch akzeptabel ist. Damit haben wir das Wesentliche solcher häufig vorkommenden Aufgaben gezeigt.

- b) Die mögliche Genauigkeit unseres Taschenrechners ist entsprechend auszunutzen. Bei einem Taschenrechner ohne halblogarithmische Zahlendarstellung gibt es nennenswerte Genauigkeitsverluste, wenn das Ergebnis  $< 1$  ist.

**Beispiel:**  $1/117 = 0,0085470$ .

Rechnen wir  $1000/117$ , dann erhalten wir 8,5470085. Sie sehen, daß wir im zweiten Fall mehr gültige Ziffern erhalten und demzufolge genauer rechnen. Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß wir die 1 mit 1000 multipliziert haben, dies muß dann im Laufe der weiteren Rechnung durch eine Division durch 1000 wieder rückgängig gemacht werden. Wenn wir viel mit Teilergebnissen weiterrechnen, sollten wir grundsätzlich vermeiden, Teilergebnisse zu erhalten, die  $< 1$  sind. Es könnte sonst passieren, daß irgendwann das Ergebnis 0 wird, ohne daß wir es wollen. Die Begründung für dieses mögliche Ergebnis 0 müssen wir in der Wiederverwendung von Teilergebnissen suchen, die ungenau waren und die eine Vergrößerung des Fehlers ergaben.

- c) Zweckmäßige Umformungen von Formeln und Ausdrücken führen oft zu vorteilhaften Algorithmen. Nehmen wir zur Erläuterung eine vielfach benutzte Aufgabe: Eine Zahlenfolge soll addiert werden! Bei Taschenrechnern ohne Speicher müssen wir bei komplizierten Gliedern die Teilergebnisse aufschreiben, und zum Schluß erhalten wir durch Addition der Teilergebnisse das abschließende Ergebnis. Es ist durchaus möglich, daß wir auch ohne Speicher zu diesem Ergebnis kommen, wobei eine kleine Zusatzoperation erforderlich ist.

**Beispiel**

$$A \cdot B + C \cdot D = \left( \frac{A \cdot B}{C} + D \right) \cdot C.$$

Wir können also mit Kettenoperationen flüssiger rechnen. Selbstverständlich kann diese Methode erweitert werden:

$$A \cdot B + C \cdot D + E \cdot F = \left\{ \left[ \left( \frac{A \cdot B}{C} + D \right) \cdot C \right] \cdot \frac{1}{F} + E \right\} \cdot F.$$

Also:

$$A * B \div C + D * C \div F + E * F = \dots$$

Es lohnt sich, diese Methode hin und wieder anzuwenden. Das gilt für die Taschenrechner ohne Speicher, aber auch für wissenschaftliche Taschenrechner, die zwar Speicher enthalten, deren Speicher aber während der Rechnung für andere Zahlen benötigt werden.

- d) Bei den meisten Rechenalgorithmen wird der Speicher zum Engpaß. Deshalb sollte immer sehr sorgfältig überlegt werden, was im Speicher aufgenommen werden muß und was anders untergebracht werden kann. Zweckmäßig ist es, solche Zahlen zu speichern,
- die aus anderen Rechnungen entstanden sind und sich nicht leicht merken lassen;
  - die öfter für Operationen benötigt werden.

Kurze, aus nur wenigen Stellen bestehende Zahlen muß man nicht unbedingt speichern, deren erneute Eingabe ist unproblematisch. Die Speicher hält man dann besser für Teilergebnisse oder Operanden frei, die mehrstellig sind. Für Operationen mit konstanten Zahlen greifen wir auf den Konstantenspeicher des Taschenrechners zurück, sofern ein solcher vorhanden ist. Notwendige Zugriffe zum Konstantenspeicher sind gruppenweise zusammenzufassen, um den Konstantenspeicher nach gewisser Zeit wieder zur Aufnahme anderer Konstanten frei zu machen.

Speicher können vielseitig verwendet werden. Zweckmäßig sind sie auch, wenn Klammerausdrücke vorhanden sind. Das Auflösen der Klammern erfolgt von innen nach außen. Dabei können wir die Regeln der Kettenoperationen anwenden.

### Beispiel

$$0,27 \{9 - \sqrt{3} [7 + (6,3 - 17)^2]\}.$$

Wir beginnen mit der Lösung der Aufgabe nicht bei  $0,27 \cdot 9$ , sondern bei  $6,3 - 17$ .

Die anzustrebende wirtschaftliche Ausnutzung des Speichers wird durch das folgende Beispiel illustriert:

Häufig sind Polynomwerte auszurechnen, z. B.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Wird  $x = 12,435678$  angenommen und  $a, b, c$  und  $d$  sind bekannte Koeffizienten, dann erfolgt die Rechnung (wenn wir ohne Überlegung beginnen) wie folgt:

- Berechnung von  $x^3$ ,
- Multiplikation mit  $a$ ,
- Speicherung von  $ax^3$ ,
- Berechnung von  $x^2$ ,
- Multiplikation mit  $b$ ,
- Addition von  $bx^2$  zum gespeicherten Wert von  $ax^3$  usw.

Dieser Algorithmus ist zu lang und fehleranfällig. Auch muß der  $x$ -Wert dreimal eingegeben werden. Einfacher ist es, den  $x$ -Wert einzuspeichern und dann folgende Schritte auszuführen:

1.  $x \cdot a$ ,
  2.  $x \cdot a + b$ ,
  3.  $(x \cdot a + b) \cdot x$ ,
  4.  $(x \cdot a + b) \cdot x + c$ ,
  5.  $[(x \cdot a + b) \cdot x + c] \cdot x$ ,
  6.  $[(x \cdot a + b) \cdot x + c] \cdot x + d$ ,
- d. h.  
 $x M: * a + b * MR + c * MR + d = y$ .

- e) Der eigene Taschenrechner wird vom Nutzer oft auf weitere Rationalisierungsmöglichkeiten der Rechnung hin untersucht. Für solche Untersuchungen gibt es einfache und aussagekräftige Aufgaben.

### Beispiel

$37,6^\circ$  soll von Gradmaß in Bogenmaß umgerechnet werden. Es sei auf dem Taschenrechner keine unmittelbare Möglichkeit zur Umrechnung von Grad in Bogenmaß vorhanden. Dafür finden wir aber eine Wechseltastatur, die die Berechnung von Winkelfunktionen in Grad- oder Bogenmaß zuläßt. Wir stellen zuerst auf Grad ein und berechnen  
 $37.60 \text{ SIN } 0,61014$ .

Nun bedienen wir die Wechseltastatur (Bogenmaß) und führen die Operation umgekehrt aus:

$\text{ARC SIN } 0,65624$ ,

dies entspricht dem Wert von  $37,6^\circ$  in Bogenmaß.

Nun ein häufig vorkommendes Beispiel: Von zwei verschiedenen Waren werden zwei verschiedene Mengen ( $P_1$  und  $P_2$ ) verkauft. Der Einheitspreis wird mit  $q_1$  und  $q_2$  angegeben. Der Endpreis ergibt sich, indem unter Beachtung von  $q_1$  und  $q_2$  und der Mengen  $P_1$  und  $P_2$  ein Teilpreis gebildet wird. Der Teilpreis wird um 25% erweitert, und außerdem erfolgt ein konstanter Preiszuschlag. Der Endpreis ergibt sich also aus der Formel:

$$P = (P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2) \cdot 1,25 + K.$$

Bei einem solchen Aufgabentyp ist zu erwarten, daß die Aufgabe vielfach wiederholt werden muß, allerdings mit jeweils anderen Zahlen. Aus diesem Grund sollte der Rechenalgorithmus sorgfältig geplant werden. Auch Kontrollmöglichkeiten sind mit einzubeziehen. Dazu stellen wir uns eine Liste her (Papier und Bleistift müssen wieder einmal herhalten). Sehen wir uns dies in Tafel 5.1 an.

In jeder Zeile der Tafel sind verschiedene  $P_1$ - und  $P_2$ -Werte angegeben. Da  $q_1$  und  $q_2$  sowie  $K$  als fest bei beiden untersuchten Waren angenommen werden, erhalten wir am Ende jeder Zeile den Endpreis. Die zweite und vierte Spalte sind zweckmäßig mit Hilfe einer Multiplikation mit den Konstanten  $q_1$  und  $q_2$  zu berechnen, d. h., wir rechnen nicht zeilenweise bis zum Ende durch, sondern füllen die Spalten 2 und 4 von oben nach unten aus. Die Situation ändert sich aber, wenn wir an die Berechnung der weiteren Spalten denken. Hier können wir nicht spaltenweise von oben nach unten ausfüllen, da die jeweils in den Spalten 2 und 4 berechneten Werte im

Tafel 5.1. Beispiel für einen Rechenalgorithmus

1	2	3	4	5	6	7
$P_1$	$P_1q_1$	$P_2$	$P_2q_2$	$P_1q_1 + P_2q_2$	$1,25(P_1q_1 + P_2q_2)$	$1,25(P_1q_1 + P_2q_2) + K$
22.5	366,75	18,2	1392,30	1759,05	2198,81	2331,31
36.9	601,47	9.1	696,15	1297,62	1622,03	1754,53
7.8	127,14	1.2	91,80			
16.0	260,80	79.5	6081.75			
	(4)		(4)	(12)	(5)	(7)
<hr/>						
$q_1 =$	$16,3q_2 =$	$76,5 =$	$132,50$			
<hr/>						
22,5		18,2			2198,81	2331,31
36,9		9,1			1622,02	1754,52
					(18)	(5)

$$q' = 4,6932515; q'' = 20,375$$

Rechner gelöscht wären und laufend wieder neu eingegeben werden müßten. Wir wählen einen Kompromiß: Mit Konstantenspeicherung ( $q_1$  und  $q_2$ ) rechnen wir die Spalten 2 und 4 aus, rechnen aber mit jedem ermittelten Wert gleich zeilenweise bis zum Endpreis nach rechts durch. Die Teilergebnisse, die das Anzeigeregister enthält, werden in die Liste eingetragen. In der letzten Zeile der Tafel (oberer Teil) ist in Klammern die Anzahl der Tastendrucke zur Ermittlung der jeweiligen Ergebnisse angegeben. Für das Endergebnis sind also je Zeile insgesamt 32 Tastendrucke erforderlich.

Die Ermittlung des Endergebnisses kann weiter rationalisiert werden, wenn der Taschenrechner einen Speicher hat. Dazu müssen wir unseren Algorithmus etwas ändern. Wir benötigen die Spalten 2, 4 und 5 nicht, d. h., der Endpreis ergibt sich aus

$$P = (P_2 \cdot q' + P_1) \cdot q'' + K,$$

$$\text{mit } q' = \frac{q_2}{q_1} \text{ und } q'' = q_1 \cdot 1,25.$$

$q_1$  wird im Speicher aufgenommen, und die Operationen werden nach Tafel 5.1 (unterer Teil) ausgeführt. Dies erfolgt zeilenweise. Jetzt benötigen wir zur Herstellung eines Endergebnisses nur noch 23 Tastendrucke. Mit diesem Algorithmus haben wir ungefähr 30% der Rechenarbeit gespart und gleichzeitig Fehlermöglichkeiten gesenkt.

Die Anzahl der Tastendrucke ist immer noch relativ hoch. Wenn für die unabhängigen Variablen verschiedene Werte eingesetzt werden und eine Tabelle aufgestellt wird, dann wird entsprechend viel Zeit benötigt, obwohl der Algorithmus innerhalb der Aufgaben gleich bleibt. Hier gibt es zwei Ratio-

nalisierungsmöglichkeiten: Entweder der Algorithmus wird weiter verbessert (sofern das noch möglich ist), oder es werden programmierbare Taschenrechner verwendet.

## **5.2. Alltägliche Aufgaben für Taschenrechner**

Wir werden uns nun einige Beispiele ansehen, wie wir den Taschenrechner für alltägliche Aufgaben nutzen und welche Anforderungen wir dabei an ihn stellen können. Die Möglichkeiten der Anwendungsbeispiele sind natürlich enorm groß, auch die Anwendungsgebiete sind verschieden. Es geht in diesem Abschnitt weniger um die Vollzähligkeit, sondern vielmehr um das Verständlichmachen einiger ausgewählter Beispiele. Die Leser sollten die Beispiele und auch einige Aufgaben üben, um eine gewisse Fertigkeit zu erhalten.

Zu den Anwendungsmöglichkeiten geben wir keine Formeln und Zusammenhänge an, denn diese sind einfach zusammenstellbar.

### **Haushalt und Freizeit**

#### **Kontrolle von Rechnungen**

Im Haushalt erhalten wir monatlich mehrere verschiedene Rechnungen (Elektroenergie-, Gas-, Heizungsabrechnungen, Ratenrückzahlung eines Kredits oder nach Teilzahlungsbedingungen usw.). Die Kontrolle dieser Rechnungen sollte nicht nur erfolgen, um ggf. reklamieren zu können. Vielmehr geht es bei diesen Kontrollen um eine bessere Überwachung unserer mehr oder weniger großen Haushaltsmittel und die dabei auftretenden Relationsänderungen. Wir können bei der Verwendung von Taschenrechnern zwar direkt keine finanziellen Mittel einsparen, jedoch können wir unseren „Sparplan“ besser überwachen und vielleicht auch einhalten. Bei der Kontrolle der Ratenrückzahlung ist jedoch Vorsicht geboten, denn die auftretenden Zinsen kommen zu dem zurückzuzahlenden Betrag hinzu. Zinssatz und Art der Zinsrechnung (Zeiträume, Rundung usw.) müssen bekannt sein, sonst bekommen wir keine exakten Ergebnisse unserer Kontrollrechnungen.

#### **Kostenrechnungen und deren Beziehungen**

Für unsere Rechnungen müssen wir einen Bezugszeitraum wählen (zweckmäßig ist ein Monat). Für diesen Zeitraum können wir alle Einnahmen und Ausgaben entsprechend erfassen, summieren sowie Einnahmen und Ausgaben miteinander vergleichen. Auch eine Prozentrechnung über Ausgabearten kann man aufstellen, um über die Anteile von Kleidung, Lebensmitteln, Genußmitteln, Miete, Kultur, Sport usw. an den Gesamtausgaben Bescheid zu wissen. Eine laufende Statistik dieser Art über Monate hinweg wird recht aussagekräftig, denn wir erkennen Veränderungen der Prozentsätze der genannten Ausgabenkategorien (positiver oder negativer Art). Entsprechende Schlußfolgerungen für weitere Ausgaben können gezogen werden (ggf. auch nur gute Vorsätze). Somit sind wir unter Nutzung des Taschenrechners in der Lage, Einnahmen und Ausgaben miteinander zu vergleichen und zielstrebig an der Realisierung des vorgesehenen Sparens zu wirken.

## **Mengenberechnungen bei Kochrezepten**

Die in Kochbüchern angegebenen Mengen, die für verschiedene Speisen benötigt werden, sind normiert. Es ist meist erforderlich, daß wir diese Mengen auf unseren Bedarf umrechnen. Aber auch aus alten oder ausländischen Kochbüchern können die ungewohnten oder wenig bekannten Maßeinheiten auf gebräuchliche Maßeinheiten umgerechnet werden. Diese Aussagen treffen natürlich auch auf diverse Getränke zu, bei denen die Anzahl der Gäste und deren Trinkgewohnheiten eine wesentliche Rolle spielen. Erhalten wir Besuch, können wir auch mit dem Taschenrechner vorher bilanzieren, wieviel Nahrungs- und Genußmittel u. a. entsprechend der Gästeanzahl benötigt werden.

## **Berechnung von Reiserouten**

Auch bei dieser Aufgabe können wir uns gut des Taschenrechners bedienen. So lassen sich Teilentfernungen in verschiedenen Varianten addieren, anschließend vergleichen und schließlich unter Beachtung möglicher Besonderheiten eine Auswahl treffen. Auch die Berechnung von Benzinkosten und anderen Fahrtkosten sind bequem zu erfassen, um so eine Entscheidung zu treffen. Die verschiedensten Problemstellungen können durch leichte und genaue Rechnungen mit dem Taschenrechner unterstützt werden.

## **Hilfe für Gewichtsreduzierungen**

Verschiedentlich wird das Ziel gestellt, das Körpergewicht zu reduzieren. Die Gründe dafür interessieren hier nicht. Es geht aber um Hinweise, wie der Taschenrechner zu diesem — manchmal nicht leichten — Unternehmen beitragen kann. Oft sind im Handel Kalorientabellen<sup>1)</sup> über die einzelnen Nahrungs- und Genußmittelarten vorhanden. Damit kann man unter Verwendung des Taschenrechners die aufgenommene Kalorienmenge bestimmen. Dagegengesetzt werden muß der Kalorienverbrauch, der sich aus unserer Lebensweise, aus der Art der durchzuführenden Arbeit, aus dem täglichen Anteil des Sports u. a. ergibt. Aufgenommene und abgegebene Kalorien sind dann zu vergleichen. Bei der Gewichtsreduzierung muß über längere Zeit hinweg die Menge der abgegebenen Kalorien größer sein als die Menge der aufgenommenen. Es ist uns klar, daß diese Rechnungen mit dem Taschenrechner keine genaue Kalorienbilanzierung ergeben können, jedoch sind verwendbare Ergebnisse möglich. Allein die Nutzung des Taschenrechners bringt natürlich noch keine Gewichtsreduzierung, das Bemühen, weniger zu sich zu nehmen, dürfte entscheidend sein (vor allem, wenn es eingehalten wird).

## **Ein Spielzeug in unserer Freizeit**

Für die Freizeitgestaltung kann unser Taschenrechner ebenfalls recht nützlich sein. Es existieren bereits viele Spiele mit dem Taschenrechner, die allein, mit zwei oder mehreren Personen durchgeführt werden können. Sehen Sie sich dazu die Aufgaben im Abschn. 9. an.

<sup>1)</sup> Die Wärmeeinheit Kalorie (cal) ist nach dem „Internationalen Einheitensystem“ (SI) durch die Einheit Joule (J) zu ersetzen. 1 Kalorie (cal) = 4,19 Joule (J).

## **Vereinfachung der Planung von Haushaltarbeiten**

Beispiele solcher Berechnungen sind vorgesehene Tapezierarbeiten, Verlegen von Rohren, Setzen einer neuen Wand usw. Bei richtigen Messungen können sich unmittelbar Berechnungen mit dem Taschenrechner anschließen, wieviel Tapete, welche Rohrlängen und wieviel Ziegelsteine erforderlich sind. Wer bereits für solche Regelungen einen Taschenrechner zu Hilfe genommen hat, wird künftig immer diesen Weg beschreiten. Nichts ist problematischer, als z. B. beim Tapezieren zu wenig Tapete gekauft zu haben (da ggf. ein Nachkauf mit dem gleichen Muster oder Farbton nicht möglich oder gerade Sonntag ist). Aber auch zu viel gekaufte Tapete ist unzweckmäßig, da unsere Geldbörse unnütz belastet wird.

## **Arbeitsplatz und Büro**

Die vielfältigen Möglichkeiten der Taschenrechneranwendung, die am Arbeitsplatz bestehen, können hier nicht alle aufgezählt werden.

Bereits mit einem einfachen Taschenrechner sind folgende Rechnungen möglich:

- bei bekanntem Stückpreis und bekannter Menge kann der Gesamtpreis berechnet und kontrolliert werden;
- Zusammenfassung von Teilpreisen zu Gesamtpreisen oder deren Kontrolle;
- Berechnungen für das Kassenhauptbuch oder Kontrollrechnungen;
- Lohn- und Gehaltsberechnungen;
- Kalkulationen verschiedenster Art;
- Basisdatenverarbeitung in kleinem Umfang;
- Arbeitszeitbilanzierungen;
- Berechnung von Mischungsverhältnissen;
- Preisindexberechnungen;
- Durchschnittsberechnungen;
- Geldwechselrechnungen;
- Flächen- und Volumenberechnungen;
- Umrechnungen zwischen spezifischem Gewicht, Volumen und Gewicht;
- Berechnung von Umdrehungszahlen und Übersetzungsverhältnissen;
- Berechnung von Schraubverbindungen;
- Zahnradberechnungen;
- auf verschiedenen Fachgebieten unterschiedlichste Additionen, Multiplikationen, Dreisatzrechnungen und Rechnungen mit einfachen Formeln.

## **5.3. Kompliziertere Rechnungen**

Im folgenden werden für einige komplexe Aufgaben die Zusammenhänge dargestellt sowie Methoden und Möglichkeiten zu deren Lösung untersucht. Je komplizierter die Aufgaben sind, um so mehr ergibt sich die Notwendigkeit, einen Taschenrechner mit besseren Möglichkeiten (z. B. wissenschaftlichen Taschenrechner statt eines einfachen Taschenrechners) zu verwenden. Sind diese Aufgaben oft zu wiederholen, dann besteht die Forderung nach einem programmierbaren

Taschenrechner, da entsprechende Speicher vorhanden sind, das Programm für wiederholte Rechnungen gespeichert und die Anzahl der verwendbaren Funktionen relativ hoch ist. Aber auch nichtprogrammierbare Taschenrechner, vornehmlich wissenschaftliche Taschenrechner, können Aufgaben mit entsprechendem Schwierigkeitsgrad lösen.

Einfache Taschenrechner sind in der Lage, einen Teil der komplizierten Aufgaben zu lösen. Das Verhältnis zwischen Aufgabe und Möglichkeit des Rechners ist aber vom Nutzer stets zu beachten. Bei den komplizierten Aufgaben, gleich welcher Taschenrechner benutzt wird, ist ein zweckmäßiger Algorithmus anzuwenden.

Eine Ableitung von Formeln und die genaue Erläuterung der Algorithmen kann nicht unsere Aufgabe sein, dazu existieren entsprechende Fachbücher. Wir werden uns auf die Anwendung von Formeln und Algorithmen mit dem Taschenrechner konzentrieren. Anders ausgedrückt: Wir untersuchen die Anwendbarkeit von Formeln und Algorithmen mit Taschenrechnern. Dabei lernen wir gleichzeitig die Anwendungsgrenzen der Taschenrechner kennen und können uns einen Begriff von den Möglichkeiten größerer Rechner machen.

Nun zu einigen Aufgaben.

## Kalender

Es ist zu ermitteln, auf welchen Wochentag ein beliebiger Kalendertag fällt. Außerdem soll berechnet werden, wieviel Tage zwei Daten voneinander entfernt sind. Der hierfür verwendete Algorithmus eignet sich für Daten zwischen dem 1. März 1900 und dem 28. Februar 2100 (es lassen sich aber durch Veränderungen am Algorithmus die Grenzen auch noch weiter verschieben).

Folgende Formel wird verwendet:

$$Y = [365,25 \cdot A] + [30,6 \cdot B] + T - 694066,$$

mit den Werten für  $A$  und  $B$  aus Tafel 5.2.  $J$  ist die Jahreszahl des Datums,  $M$  der Monat und  $T$  der Tag.

Tafel 5.2. Zur Ermittlung eines Kalendertages

$M$	1. Jan.	2. Febr.	3. März	4. April	5. Mai	6. Juni	7. Juli	8. Aug.	9. Sept.	10. Okt.	11. Nov.	12. Dez.
$A$	$J - 1$	$J - 1$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$	$J$
$B$	14	15	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

## Beispiel

19. Januar 1978 mit  $J = 1978$ ;

$$M = 1;$$

$$T = 19.$$

Zur Berechnung von  $Y$  multiplizieren wir zuerst innerhalb der eckigen Klammern, von diesen Teilprodukten verwenden wir aber nur jeweils den ganzen Teil, der gebrochene Teil der Teilprodukte in den eckigen Klammern wird abgetrennt.

Wenn wir nun wissen wollen, wieviel Tage zwei gegebene Daten voneinander entfernt sind, dann berechnen wir für diese Daten die  $Y$ -Werte. Die Differenz beider  $Y$ -Werte ist die Anzahl der vergangenen Tage.

### Beispiel

19. Januar 1978 und 4. September 1978.

$$Y_1 = [365,25 \cdot 1977] + [30,6 \cdot 14] + 19 - 694066;$$

$$Y_2 = [365,25 \cdot 1978] + [30,6 \cdot 10] + 4 - 694066;$$

$$Y_1 = 722099, (25) + 428, (4) + 19 - 694066;$$

$$Y_2 = 722464, (50) + 306, (0) + 4 - 694066;$$

$$Y_1 = 28480; \quad Y_2 = 28708;$$

$$Y = Y_2 - Y_1 = 228 \text{ Tage.}$$

Um den Wochentag eines Kalendertags zu ermitteln, benötigen wir den  $Y$ -Wert. Wir haben

- den  $Y$ -Wert durch 7 zu dividieren;
- von Quotienten nur den gebrochenen Teil zu verwenden, der ganze Teil wird abgestrichen;
- diesen gebrochenen Teil mit 7 zu multiplizieren;
- festzustellen, welche Ziffer zwischen 0 und 6 dem zuletzt entstandenen Produkt am nächsten ist.

Es gilt:

0 Sonntag,

1 Montag,

2 Dienstag,

3 Mittwoch,

4 Donnerstag,

5 Freitag,

6 Sonnabend.

### Beispiele

19. Januar 1978,

$$Y = 28480$$

$$28480/7 = 4068,57 \dots$$

$$0,57 \cdot 7 = 3,99$$

Der Tag war ein Donnerstag.

4. September 1978,

$$Y = 28708$$

$$28708/7 = 4101,14 \dots$$

$$0,14 \cdot 7 = 0,98$$

Der Tag war ein Montag.

### Zufallszahlen

Wird ein Geldstück hochgeworfen, dann können wir nach dem Herunterfallen entweder Wappen oder Zahl sehen. Dieses Ergebnis ist zufällig. Es ist auch zufällig, wenn wir würfeln und eine der sechs möglichen Ziffern gewürfelt haben. Der Taschenrechner ist nicht geeignet, um exakte Zufallszahlen zu berechnen. Allerdings ist der Nutzer eines Taschenrechners auch nicht in der Lage, auf Anhieb festzustellen, ob eine vom Taschenrechner berechnete Zahlenfolge Zusammenhänge enthält oder nicht. Mit bestimmten Algorithmen ermittelte Zahlenfolgen wollen wir eine Folge scheinbarer Zufallszahlen (*Pseudozufallszahlen*) nennen. Zur Ermittlung solcher Folgen geben wir einige Formeln an:

- a) Die gleichmäßig verteilten Pseudozufallszahlen zwischen 0 und 1 ermitteln wir nach

$$n_{k+1} = \{(n_k + \pi)^5\}$$

mit  $k = 0, 1, 2, \dots$

Vom entstehenden Ergebnis wird nur der gebrochene Teil verwendet, der nun zwischen 0 und 1 liegen muß. Dies ist durch die geschweiften Klammern angegeben. Als  $n_0$  können wir einen beliebigen echten Bruch verwenden, z. B.  $n_0 = 1/2$ . Daraus ergeben sich die Pseudozufallszahlen 0,40799; 0,49023; 0,86326; 0,22630; ...

Der angegebene Algorithmus ist einfach, jedoch sind die entstandenen Pseudozufallszahlen nicht mit exakten mathematischen Mitteln erreicht worden.

- b) Zwischen 0 und 199017 wollen wir gleichmäßig verteilte Pseudozufallszahlen ermitteln.

Wir verwenden

$$n_{k+1} = (a \cdot n_k + c) \bmod m$$

$$\text{mit } c = 99991; \quad m = 199017; \quad a = 24298.$$

$\bmod m$  bedeutet, daß der in den Klammern stehende Wert durch  $m$  zu dividieren ist und der Rest als Pseudozufallszahl verwendet wird. Die Ermittlung des Restes ist dabei etwas umständlich.  $n_0$  ist ein wählbarer Ausgangswert. Für diesen Algorithmus benötigen wir einen Taschenrechner, der mindestens zehn Stellen anzeigen kann.

## Statistische Rechnungen

### Oft verwendete einfache Formeln

*Arithmetisches Mittel* von  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

*Zweites Moment*

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

*Varianz*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right].$$

Taschenrechner, die für statistischen Rechnungen geeignet sind, haben meist Möglichkeiten, um die statistischen Daten automatisch in verschiedenen Speicherplätzen aufzunehmen. Dabei erfolgt ein laufender Aufbau von Teilergebnissen bis zum Endergebnis für  $n$ ,  $\Sigma x_i$  und  $\Sigma x_i^2$ . Mit der Aufnahme eines neuen  $x$ -Wertes können die genannten drei Teilergebnisse aktualisiert werden.  $\Sigma x_i$  und  $\Sigma x_i^2$  sind damit relativ einfach zu berechnen, für ihre Berechnung brauchen die  $x$ -Werte nicht nochmals separat eingegeben zu werden. Operationen mit Speicherplätzen sind dabei erforderlich.

*Kovarianz* (zu den Punktpaaren  $x_i$  und  $y_i$ )

$$k = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

### Normalverteilung

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$$

$$\approx 1 - e^{-x^2} (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3),$$

$$\text{mit } a_1 = 0,348042; \quad a_2 = -0,0958798;$$

$$a_3 = 0,7478556;$$

$$t = \frac{1}{1 + 0,47047 \cdot x}.$$

Es wird eine Genauigkeit von etwa  $2 \cdot 10^{-5}$  erreicht.

### Anpassungsuntersuchungen

Das Maß der **Anpassungsgüte** geben wir an mit:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(h_k - p_k)^2}{p_k}.$$

$h_k$  empirische Häufigkeit,

$p_k$  theoretische Häufigkeit,

$r$  Anzahl der Klassen.

Die  $\chi^2$ -Werte können statistischen Büchern entnommen werden.

### Werte für Fakultäten

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (2)(1).$$

Ist  $n$  sehr groß, dann besteht die Näherungslösung

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right).$$

### Lineare Regression (Trendanalyse)

Gegeben sind  $n$  Punkte mit den Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$ . Zu diesen Punkten ist die am besten geeignete Gerade (die Regressionsgerade) zu ermitteln (siehe Bild 5.1). Die Gleichung der Geraden lautet:

$$y = mx + b;$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Wenn die Abstände zwischen den  $x_i$ -Werten gleich sind, also eine gleiche Schrittweite haben, dann gilt:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n iy_i - (n+1) \sum_{i=1}^n y_i}{\frac{n(n^2-1)}{6}};$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{n+1}{2} \cdot m.$$

Die angegebenen Formeln sind in vielen Fachgebieten anwendbar, z. B. in der Wirtschaft als Trendberechnung, in der Technik als Auswertung von Meßergebnissen. Es wird bei einfachen Taschenrechnern etwas umständlich sein, mit diesen Formeln zu rechnen, doch möglich ist es auch. Es gibt auch Spezialtaschenrechner, die die zu den Formeln gehörenden Programme enthalten. Dabei müssen die notwendigen Koordinaten der Punkte eingegeben werden, anschließend genügt ein einziger Tastendruck, um die Regressionsgerade zu berechnen und anzuzeigen.

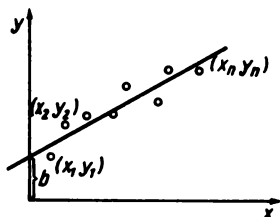


Bild 5.1. Lineare Regression

### Kurvenanpassung — exponentielle Kurve

Gegeben sind  $n$  Punkte mit den Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$ . Gesucht ist die zu den Punkten am besten angepaßte exponentielle Kurve bzw. deren Parameter.

$$y = a \cdot e^{bx}$$

$$b = \frac{\sum x_i \ln y_i - \frac{1}{n} (\sum x_i) (\sum \ln y_i)}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2},$$

$$a = e^z; \quad z = \frac{\sum \ln y_i}{n} - b \frac{\sum x_i}{n}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

### Numerische Verfahren

#### Newton-Raphson-Verfahren

Oft treffen wir Aufgaben an, bei denen Wurzeln zu ermitteln sind. Unter Beachtung des Bildes 5.2 wollen wir eine Wurzel bestimmen. Das Newton-Raphson-Verfahren konvergiert relativ schnell, d. h., die Wurzel ist mit einer

bestimmten geforderten Genauigkeit bald ermittelt. Das Verfahren baut auf Elementen der Differentialrechnung auf. An einer geschätzten Stelle  $x_0$  wird durch die erste Ableitung zur gegebenen Funktion die Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  gebildet. Durch Schnitt dieser Tangente mit der  $x$ -Achse ergibt sich ein leicht berechenbares  $x_1$  (ein verbesserter Näherungswert). Das Verfahren wird mit der Ermittlung von  $x_2, x_3$  usw. fortgesetzt, bis uns der Wert ausreichend genau erscheint. Diese Genauigkeit läßt sich berechnen.

Allgemein gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Beispiel**

Wir wollen die Wurzel von  $e^x + 2x = 10$  ermitteln.

Wir formen um und erhalten

$$f(x) = e^x + 2x - 10.$$

Der geschätzte Wert sei  $x_0 = 3$ .

Es folgt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_1 = 2,271671.$$

Nach diesem Verfahren erhalten wir weiter

$$x_2 = 1,909;$$

$$x_3 = 1,8444.$$

Schritt für Schritt nähern wir uns der Nullstelle, die 1,842828 ist.

Ist  $f'(x)$  schwer berechenbar, dann verwenden wir

$$x_{n+1} = x_n - \delta_n \left[ \frac{f(x_n + \delta_n)}{f(x_n)} - 1 \right]^{-1} \quad \delta_n = 10^{-5} \cdot x_n$$

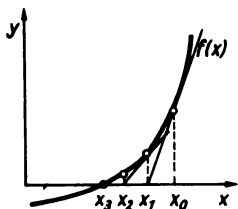


Bild 5.2. Wurzelberechnung mit dem Newton-Raphson-Verfahren

**Wurzelberechnung mit einem Iterationsverfahren**

Die Aufgabe, eine Wurzel zu berechnen, kann manchmal vereinfacht werden. Wenn z. B. von

$$\sqrt{x + 5} - x = 0$$

eine Wurzel berechnet werden soll, dann können wir umformen

$$x = \sqrt{x + 5} = \varphi(x).$$

Im Bild 5.3 ist das Herangehen anschaulich dargestellt. Der Schnittpunkt von

$$y_1 = x \quad \text{und} \quad y_2 = \sqrt{x + 5}$$

läßt das Ablesen der Wurzel auf der  $x$ -Achse zu. Benutzen wir aber zum Wurzelziehen den Taschenrechner, so lösen wir die Aufgabe schrittweise. Mit einem angenommenen Wert für  $x_0$  wird  $\varphi(x_0) = \sqrt{x_0 + 5} = x_1$  berechnet. Dieser Näherungswert  $x_1$  ist besser als der angenommene Wert  $x_0$ . Gleichermaßen berechnen wir aus  $x_1$  den Wert  $x_2$ . Im Bild 5.3 ist ersichtlich, daß eine gute Konvergenz vorhanden ist. Wenn z. B.  $x_0 = 0$  angenommen wird, ergibt sich

$$\varphi(x_0) = x_1 = 2,236 ;$$

$$\varphi(x_1) = x_2 = 2,6899 ;$$

$$\varphi(x_2) = x_3 = 2,7730 ;$$

Wir nähern uns schrittweise dem Wert 2,7912844, dem zu ermittelnden Wurzelwert.

Dieser erläuterte Algorithmus erfordert aber etwas Vorsicht, denn eine Divergenz ist nicht auszuschließen. Es ist ratsam, vor der näherungsweise Lösung mit dem Taschenrechner eine ungefähre grafische Darstellung für die beiden Funktionen anzufertigen, ohne gleich eine exakte grafische Lösung anzustreben.

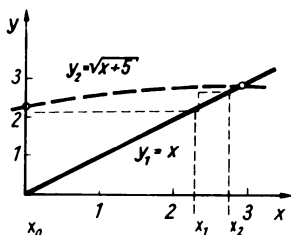


Bild 5.3. Wurzelberechnung mit schrittweiser Näherung

### Integration (Simpson-Regel)

Sind von einer Funktion die Werte für  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (in gleichen Abständen auf der  $x$ -Achse) bekannt, dann kann diese Funktion mit der Simpson-Regel integriert werden.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$h$  ist die Schrittweite auf der  $x$ -Achse,  $n$  die Anzahl der Intervalle 2, 4, 6, ...

### Numerische Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung

Bei solchen Aufgaben ist die Grenze der Taschenrechner erreicht. Taschenrechner können nur zu einfachen numerischen Lösungen beitragen:

$$y' = f(x, y).$$

Wenn  $x_0$  und  $y_0$  die Anfangswerte sind, dann sind folgende Verfahren anwendbar:

a) Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] ;$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) ,$$

$h$  muß entsprechend zweckmäßig gewählt werden.

b) Runge-Kutta-Verfahren (numerische Lösung dritter Ordnung)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3 ;$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \cdot h ;$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h ;$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \cdot h .$$

Das Runge-Kutta-Verfahren führt zu einem genaueren Ergebnis, jedoch sind zur Lösung mehrere Operationen erforderlich.

**Geldrechnungen**

Bei Geldrechnungen gibt es unterschiedliche Arten. Taschenrechner, die für spezielle Geldrechnungen vorgesehen sind, haben meist die dafür notwendigen Tasten. Bei programmierbaren Taschenrechnern werden häufig zweckmäßige Programme für Geldrechnungen vom Hersteller mitgeliefert.

**Ratenrückzahlung**

Im Bild 5.4 ist dargestellt, wie ein entsprechender Geldbetrag in gleichen Teilen und gleichen Zeitabständen zurückgezahlt wird. Am Ende eines Zeitraums kann man jeweils feststellen, wieviel Geld noch zurückzuzahlen ist. Davon werden aber noch die Zinsen berechnet und dem noch zurückzuzahlenden Betrag zugeschlagen. Aus Bild 5.4 ist zu erkennen, daß am Anfang zu dem ausgeliehenen Betrag die Zinsen addiert werden müssen.

Es gilt:

$$T_n = T(1 + k)^{n+1} - R \left\{ (1 + k) \frac{(1 + k)^n - 1}{k} \right\} ,$$

mit  $T$  als Anfangsbetrag, der zurückzuzahlen ist,  $T_n$  als jeweils noch fälligem Betrag, wenn bereits  $n$  Raten gezahlt wurden.

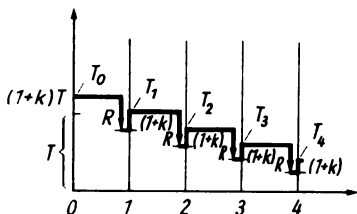


Bild 5.4. Ratenrückzahlungen mit jeweils einer Rate  $R$

Soll ermittelt werden, wann die Rückzahlung beendet ist, also  $T_n = 0$ , dann gilt:

$$T = R \frac{1 - (1 + k)^{-n}}{k} \text{ bzw. } R = T \frac{k}{1 - (1 + k)^{-n}};$$

$$n = - \frac{\ln(1 - kT/R)}{\ln(1 + k)}$$

$T$  ausgeliehene Summe,

$R$  jeweils zurückgezahlter Betrag (die Rate),

$k$  Zinssatz,

$n$  Anzahl der Rückzahlungen.

Sind von diesen vier Parametern drei bekannt, kann der vierte berechnet werden. (Zu beachten ist, daß Sparkassen etwas anders rechnen und daß bei unseren Gegenrechnungen kleinere Differenzen auftreten können.)

### Zinseszinsrechnungen

Wenn ein Geldbetrag  $P$  bei einem Zinssatz von  $k$  gegeben ist, dann erhalten wir nach  $n$  Perioden einen Betrag  $B$ :

$$B = P(1 + k)^n \text{ bzw.}$$

$$n = \frac{\ln B/P}{\ln(1 + k)}; \quad P = B(1 + k)^{-n}.$$

Ähnliche Aufgaben ergeben sich, wenn der Betrag ermittelt werden soll, der nach  $n$  Perioden vorhanden ist. Dabei soll periodisch die Geldsumme  $R$  eingezahlt werden. Der Zinssatz ist  $k$ .

$$B = \frac{R}{k} [(1 + k)^{n+1} - (1 + k)],$$

bzw.

$$n = \frac{\ln \left[ \frac{B}{R} k + (1 + k) \right]}{\ln(1 + k)} - 1;$$

$$R = \frac{Bk}{(1 + k)^{n+1} + (1 + k)}.$$

### Geometrische Rechnungen

Taschenrechner für wissenschaftliche Zwecke haben meist umfangreiche Möglichkeiten für trigonometrische Berechnungen und sind gut für geometrische Vermessungsrechnungen und andere Rechnungen geeignet. Die Eigenschaft des Taschenrechners, daß er tragbar ist, führt bei Vermessungsarbeiten zu einem großen Zeitgewinn, da unmittelbar bei der Vermessung notwendige Zwischenrechnungen ausgeführt werden können. Genauigkeit und Übersichtlichkeit der Vermessungen werden dadurch positiv beeinflusst. Berechnungen im Büro sind dann auf ein entsprechendes Mindestmaß reduzierbar.

Die in der Praxis vorkommenden Aufgaben sind sehr unterschiedlich. Es ist deshalb erforderlich, die Algorithmen für solche Rechnungen zweckmäßig auf-

zubereiten. Meist verwendet man zusammengefaßte Formeln, die eine große Genauigkeit erfordern und oft die verschiedenartigsten Operationen notwendig machen. Dies wollen wir uns an zwei Beispielen ansehen.

### Vieleckberechnungen

Nach Bild 5.5 sind die Entfernungen zwischen den Punkten des Vielecks und die Winkel  $\alpha_i$  gegeben. Sind die Koordinaten eines Punktes (z. B.  $X_1, Y_1$ ) bekannt, dann können die Koordinaten aller Punkte und die Vieleckfläche berechnet werden.

$$Y_{i+1} = Y_i + H_i \sin \alpha_i ;$$

$$X_{i+1} = X_i + H_i \cos \alpha_i ;$$

mit  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$$A = \frac{1}{2} [(Y_2 + Y_1)(X_2 - X_1) + (Y_3 + Y_2)(X_3 - X_2) + \\ + (Y_n + Y_1)(X_1 - X_n)].$$

(Selbstverständlich besteht auch die Möglichkeit, die von den Seiten eingeschlossenen Winkel zu messen und von diesen Winkeln auszugehen. Das Beispiel soll eine von mehreren Lösungsmöglichkeiten angeben.)

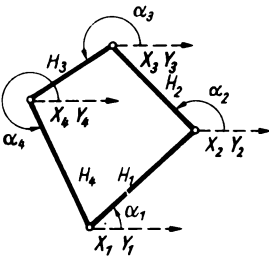


Bild 5.5. Vieleckberechnungen

### Dreieckberechnungen

Wenn gemäß Bild 5.6 von einem Dreieck zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, dann können die übrigen Größen (eine Seite und zwei Winkel) berechnet werden.

$$\gamma = \arcsin \frac{C \sin \beta}{B} ;$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) ;$$

$$A = \frac{B \sin \alpha}{\sin \beta} .$$

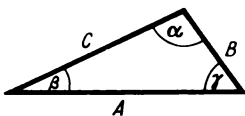


Bild 5.6. Dreieckberechnungen

## Algebra

In den Programmspeichern der Taschenrechner befinden sich die verschiedensten Programme, die jeweils durch die Funktionstasten aufgerufen werden. Das sind z. B. Programme zur Lösung von Aufgaben mit komplexen Zahlen, von Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten. Es wäre müßig, Erläuterungen nach dem Vollständigkeitsprinzip anzufangen. Es werden deshalb nur einige typische, oft benötigte Aufgaben mit Beispielcharakter angegeben.

### Zahlenkonvertierung

Ganze Zahlen können mit dem folgenden Algorithmus aus dem Dezimalsystem in das Dualsystem konvertiert werden.

**Beispiel**  $(431)_{10} = (x)_2$

Die gegebene Dezimalzahl wird schrittweise durch 2 dividiert. Enthält der Quotient einen Bruch (0,5), so wird dieser Bruch subtrahiert, und wir schreiben dafür an einer bestimmten Stelle der Dualzahl eine 1. Entsteht im Quotienten kein Bruch, so schreiben wir eine 0 an die entsprechende Stelle der Dualzahl.

431		
215,5	−0,5	1
107,5	−0,5	1
53,5	−0,5	1
26,5	−0,5	1
13		0
6,5	−0,5	1
3		0
1,5	−0,5	1
0,5	−0,5	1

Das Ergebnis ist

$$(431)_{10} = 110101111_2 .$$

Soll ein echter Dezimalbruch in das Dualsystem konvertiert werden, so multiplizieren wir den Bruch schrittweise mit 2. Ist jeweils das Teilprodukt wieder ein echter Bruch, so verwenden wir die Dualziffer 0; ist es ein unechter Bruch (es kann als ganze Zahl nur die 1 vorkommen), so subtrahieren wir die 1 und verwenden diese 1 für die Dualzahl an der betreffenden Stelle.

### Beispiel

$(0,321)_{10} = (x)_2$		
0,642		0
1,284	−1	1
0,568		0
1,136	−1	1
0,272		0
0,544		0
1,088	−1	1

...

Das Ergebnis lautet

$$(0,321)_{10} = 0,0101001 \dots_2 .$$

Werden gemischte Dezimalzahlen konvertiert, so sind nach der angegebenen Vorschrift der ganze und der echt gebrochene Teil getrennt zu konvertieren.

Beim Rekonvertieren (Dualzahlen in Dezimalzahlen umwandeln) wird ein ähnliches Verfahren verwendet:

$$(101101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

also:

$$((( (2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = 45.$$

Sinngemäß:

$$(0,01101)_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

also:

$$\left( \left( \left( \left( \frac{1}{2} + 0 \right) \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} + 0 \right) \cdot \frac{1}{2} = 0,40625.$$

### Größter gemeinsamer Teiler

Ist von zwei Zahlen der größten gemeinsame Teiler zu ermitteln, so kann der Algorithmus nach *Euklid* angewendet werden. Es erfolgt die Division beider Zahlen, der entstehende Rest wird weiterverwendet, indem die kleinere der gegebenen Zahlen durch den entstehenden Rest dividiert wird, usw. Der größte gemeinsame Teiler entsteht, wenn ein Rest von 0 erreicht ist.

#### Beispiel

Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 1551 und 611!

#### Lösung

$$1551 : 611 = \dots \text{ Rest } 329 ;$$

$$611 : 329 = \dots \text{ Rest } 282$$

$$329 : 282 = \dots \text{ Rest } 47$$

$$282 : 47 = \dots \text{ Rest } 0$$

Der größte gemeinsame Teiler ist 47.

Wenn die beiden gegebenen Zahlen in der Größenordnung annähernd gleich sind, dann ermitteln wir den Rest nicht mit dem angegebenen Algorithmus, sondern subtrahieren wiederholt, bis die Differenz kleiner ist als der Subtrahend.

#### Beispiel

$$1551 : 611 = 2,538461$$

Daräus ergibt sich, daß wir von 1551 zweimal 611 subtrahieren und

$$1551 - 611 - 611 = 329 \text{ erhalten.}$$

### Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Zur Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen wird erst der größte gemeinsame Teiler berechnet, damit wird dann das Produkt der beiden Zahlen dividiert. Von 1551 und 611 ist das kleinste gemeinsame Vielfache (den bereits berechneten größten gemeinsamen Teiler verwenden wir):

$$\frac{1551 \cdot 611}{47} = 20163.$$

---

## 6. Algorithmen zur Berechnung komplizierter Funktionen mit einfachen Taschenrechnern

---

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit solchen Algorithmen beschäftigen, deren Anwendung die Möglichkeiten der einfachen Taschenrechner erhöht.

- Wir wollen zeigen, wie mit entsprechenden Algorithmen ohne großen Aufwand Funktionswerte berechnet werden können, die ausreichend genau sind. Dies ist bereits mit einfachen Taschenrechnern möglich.
- Wir wollen zeigen, was sich hinter dem Tastendruck eines wissenschaftlichen Taschenrechners verbirgt. Dies können wir deutlich machen, indem wir das gleiche Problem algorithmisch aufbereiten und einem einfachen Taschenrechner anvertrauen. Dabei wird die Anzahl der Tastendrucke natürlich größer sein als bei einem wissenschaftlichen Taschenrechner.

Bei trigonometrischen oder exponentiellen Funktionen benötigen wir zur Funktionswertberechnung mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner nicht nur schlechthin die entsprechende Taste für die genannten Funktionen. Auch hierbei wird ein vorgeschriebener Algorithmus abgearbeitet. Dieser ist im Programmspeicher des Rechners enthalten. Er wird durch den Tastendruck der Funktion aufgerufen und dann automatisch abgearbeitet. Nach außen hin hat es den Anschein, als wenn direkt mit dem Tastendruck die Anzeige des Funktionswerts erfolgt, auch wenn manchmal dafür Zeiten von 1 bis 2 Sekunden erforderlich sind. Die im Programmspeicher enthaltenen Algorithmen sind nicht löschar, sie sind fest im Taschenrechner enthalten. Anders ist das bei einem einfachen Taschenrechner. Dieser hat nicht die *vielen* eingespeicherten Algorithmen wie ein wissenschaftlicher Taschenrechner. Natürlich sind auch alle diejenigen Algorithmen enthalten, die zu den angegebenen Tasten gehören, weitere Algorithmen fehlen jedoch. Der Nutzer des einfachen Taschenrechners muß, um komplizierte Funktionen lösen zu können bzw. deren Funktionswerte zu berechnen, ein eigenes *Programm* (den Algorithmus) aufstellen. Zur Abarbeitung des Algorithmus sind dann mehrere Tasten zu drücken. Der Nutzer muß sich dabei natürlich wesentlich mehr konzentrieren, um Fehler beim Algorithmus, bei der Eingabe von Werten und auch hinsichtlich der Genauigkeit der Rechnung auszu-schließen. Die Berechnung von Funktionswerten dauert dann selbstverständlich länger.

Die vorgestellten Algorithmen sind hinsichtlich der Genauigkeit von der Wahl des Wertes der unabhängigen Variablen, dem Argument, abhängig. Es werden bei den erläuterten Aufgaben Hinweise über das mögliche Argument gegeben. Die Fehler sind meist dann am größten, wenn das Ende des möglichen Bereichs des Arguments erreicht ist. Bei Werten in der Mitte des Bereichs sind entsprechend kleine Fehler zu erwarten. Diese Aussagen treffen in der Regel zu, es gibt

allerdings auch Ausnahmen. Es ist auch logisch, daß Fehler bei Näherungsverfahren größer sind als Genauigkeitsverluste (z. B. durch Rundungen) bei exakten Berechnungen. Beachten müssen wir weiter, daß Vereinfachungen im Algorithmus zu größeren Ungenauigkeiten führen. Ein gewisser Kompromiß ist nicht auszuschließen. Zusammenfassend läßt sich sagen: Wenn wir genaue Ergebnisse brauchen, müssen wir auch genau rechnen — wenn wir mit *vereinfachten Algorithmen* (nach Näherungsverfahren) rechnen, so müssen wir *Genauigkeitsverluste* in Kauf nehmen.

Eine Gruppe von Näherungsverfahren baut auf Polynomen bzw. gebrochen rationalen Funktionen auf. Dabei wird die unabhängige Variable eingegeben, und es erfolgt die entsprechende Rechnung (s. Abschn. 5.2.). Bei einer anderen Gruppe von Näherungsverfahren werden sog. *rekursive Formeln* verwendet. Bei dieser Methode werden die gegebenen Formeln mehrfach nacheinander angewendet, mit jedem Durchrechnen der Formel steigt die Genauigkeit. Dieses Verfahren nennt man auch *Iteration*. Ein klassisches Beispiel dafür ist das Radizieren, wobei nur die vier Grundrechenarten verwendet werden und die Genauigkeit beliebig gesteigert werden kann (natürlich in Abhängigkeit von der Anzahl der anzeigbaren Ziffern).

Wir sehen uns nun eine Iterationsformel zur Bildung eines Quotienten an, ohne daß die Rechenart Division verwendet wird. Es soll der Reziprokwert von  $x$ , also  $1/x$ , ohne Verwendung der Division hergestellt werden:

$$y_{n+1} = y_n(2 - x \cdot y_n),$$

$$\text{wenn } y_{n+1} \approx y_n, \text{ dann ist } y_{n+1} \approx \frac{1}{x}.$$

Wir bilden z. B. von 7 den Reziprokwert, also  $1/7$ . Zuerst ist zu schätzen, welches Ergebnis erwartet wird. Je genauer der Schätzwert ist, je schneller erhalten wir das Endergebnis, es werden weniger Iterationsschleifen durchlaufen. Ist unser Schätzwert schlecht, dann kommen wir zwar auch zum Ziel, jedoch ist die benötigte Rechenzeit größer, es werden mehr Iterationsschleifen durchlaufen. Wenn wir  $y_n = 0,1428571$  schätzen würden, dann erhielten wir sofort  $y_{n+1} = 0,1428571$  und unser Ergebnis wäre fertig. Als Schätzwert ist ein Dezimalbruch zu verwenden, nicht ein gemeiner Bruch.

Schätzen wir  $y_0 = 0,125$  ( $1/8$ ), dann folgt

$$y_1 = 0,125(2 - 7 \cdot 0,125) = 0,140625,$$

$$y_2 = 0,1428222,$$

$$y_3 = 0,1428571,$$

$$y_4 = 0,1428571$$

Ein Weiterrechnen bringt keinen Gewinn mehr, wir würden immer wieder das gleiche Ergebnis erhalten. Anders wäre es bei einem Taschenrechner, der zehn Stellen anzeigt.

Noch eine wichtige Aussage, bevor wir mit den Beispielen beginnen: Wir nehmen an, daß die Leser trigonometrische und exponentielle Funktionen kennen, einschließlich deren Anwendungsmöglichkeiten. Die folgenden Algorithmen setzen diese Vorkenntnisse voraus. Auch hier gilt wieder, daß bei wissenschaftlichen Taschenrechnern nur die Funktionstasten gedrückt zu werden brauchen. Bei einfachen Taschenrechnern sind Einzelschritte entsprechend dem gewählten Algorithmus erforderlich.

Die erläuterten Aufgaben verbinden sinnvoll das Anliegen der Algorithmen mit zweckmäßig gewählten Verarbeitungsdaten. Damit werden auch Formeln verständlicher, z. B.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Bei den trigonometrischen Funktionen ist das Anliegen ähnlich, denn die verwendeten Algorithmen verdeutlichen die Eigenschaften der Funktionen.

## 6.1. Erhöhung der Genauigkeit bei Multiplikationen und Divisionen

### Algorithmus 1

Es gibt Aufgaben, bei denen die durch den Taschenrechner anzeigbaren Stellen nicht ausreichen. Ursachen dafür können beim Taschenrechner (zu wenige anzeigbare Stellen) oder bei der Aufgabe (ist z. B. eine sehr hohe Genauigkeit gefordert) liegen. In diesem Fall ist der Algorithmus so zu gestalten, daß ein Kompromiß entsteht, etwa in der Form, daß genügend Stellen berechnet und auch angezeigt werden, wobei jedoch die Rechenzeit bzw. die Anzahl der notwendigen Tastendrucke steigt.

Bei der Multiplikation zweier  $n$ -stelliger Zahlen kann das Ergebnis maximal  $2n$  Stellen haben. Diese  $2n$  Stellen setzen wir gleich der Anzahl der anzeigbaren Stellen des Taschenrechners. Damit dürfen die Faktoren der Multiplikation nur maximal je  $n$  Stellen (also die Hälfte der anzeigbaren Stellen) haben. Natürlich können wir die Faktoren auch kleiner wählen, da dann das Multiplikationsergebnis anzeigbar ist. Ist nun ein Ergebnis mit mehr Stellen zu erwarten, als es die Ziffernanzeige zuläßt, dann zerlegen wir die Multiplikation in Teilschritte, ähnlich wie bei der Multiplikation mit Papier und Bleistift.

Es soll z. B. das Quadrat von 4321 gebildet werden! Wir zerlegen die Aufgabe in vier Teilschritte, wobei jeweils die Faktoren nur noch zweistellig sind.

$$4321 \cdot 4321$$

04 41	(21 · 21)
09 03	(21 · 43)
09 03	(43 · 21)
18 49	(43 · 43)

$$18\ 67\ 10\ 41 \quad (\text{Endergebnis}).$$

Die Teilergebnisse müssen wir uns aufschreiben, am Schluß werden die vier Teilergebnisse manuell zum Endergebnis addiert. Bei diesem Beispiel braucht unser Taschenrechner nur vier anzeigbare Stellen. Kann er acht Stellen anzeigen, dann sparen wir uns natürlich diesen aufwendigen Lösungsweg und verwenden ihn nur, wenn entsprechend mehr Stellen zu erwarten sind.

Gehen wir davon aus, daß übliche Taschenrechner acht anzeigbare Stellen haben, dann kommen wir bei der nächsten Aufgabe in Schwierigkeiten. Sehen

wir uns noch dieses Beispiel an: Die beiden Faktoren haben je acht Stellen, deshalb kann ein 16stelliges Ergebnis entstehen.

$$\begin{array}{r}
 1234\ 5678 \cdot 8765\ 4321 \\
 \hline
 2453\ 4638 \\
 0533\ 2114 \\
 4976\ 7670 \\
 1081\ 6010 \\
 \hline
 \end{array}$$

1082 1520 2237 4638 (Endergebnis).

In ähnlicher Weise können wir eine astronomische Genauigkeit beim Dividieren erhalten. Auch hier kann die bekannte Papier-Bleistift-Methode angewendet werden, wobei wir auch Zifferngruppen (im folgenden Beispiel sind es Zifferngruppen mit je drei Ziffern) verwenden.

$$\begin{array}{r}
 123\ 456 : 456 = 270,\ 736\ 842\ 105\ 263 \\
 -123\ 120 \qquad \qquad \qquad (456 \cdot 270) \\
 \hline
 336\ 000 \\
 -335\ 616 \qquad \qquad \qquad (456 \cdot 736) \\
 \hline
 384\ 000 \\
 -383\ 952 \qquad \qquad \qquad (456 \cdot 842) \\
 \hline
 048\ 000 \\
 -047\ 880 \qquad \qquad \qquad (456 \cdot 105) \\
 \hline
 120
 \end{array}$$

(Möglichkeit der Fortsetzung besteht).

Wenn in den Zifferngruppen mehr Ziffern sind, wird das Ergebnis schneller erreicht, weil weniger Zwischenschritte erforderlich sind.

## 6.2. Wurzelziehen

### Algorithmus 2a: Quadratwurzelziehen (Speicher ist erforderlich)

Das Prinzip dieser Aufgabe besteht darin, daß vor Beginn der Rechnung der Wert der Wurzel geschätzt wird. Mit diesem Schätzwert wird dann die Rechnung durchgeführt, die zu einem neuen Wert (der näher an der eigentlichen Lösung liegt) führt. Mit diesem neuen Wert wird die Rechnung wiederholt, ein weiterer Wert wird ermittelt. Das Verfahren kann so oft wiederholt werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist oder bis der Taschenrechner auf Grund der Anzahl der anzeigbaren Stellen keine Verbesserung des Ergebnisses erkennen läßt.

Der Radikand wird mit  $R$  bezeichnet,  $n$  gibt die Anzahl der Näherungen an,

$x_n$  ist der Näherungswert. Wenn wir  $x_n$  in die Formel einsetzen, so ermitteln wir  $x_{n+1}$ . Wir schreiben:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x_n} + x_n \right);$$

wenn  $x_{n+1} \approx x_n$ , dann ist  $x_{n+1} \approx \sqrt{R}$ .

### Beispiel

Die Wurzel aus 2 ist zu ziehen. Schätzen wir am Anfang  $x_0$  mit 1,5, dann erhalten wir

$$x_1 = \underline{1,4166666}.$$

Weiterhin:

$$x_2 = \underline{1,4142156}$$

$$x_3 = \underline{1,4142135}$$

$$x_4 = \underline{1,4142135}$$

Es ist ersichtlich, daß bereits die dritte Näherung ausreichend ist. Ein genaueres Ergebnis ist mit einem achtstelligen Taschenrechner nicht erreichbar.

Unterstrichen wurden die Ziffern, die sich nicht weiter verändern, also Bestandteil der exakten Lösung sind.

Die Anzahl der Durchläufe durch die Iterationsschleife ist abhängig vom gewählten Schätzwert, wenn man ein gleiches abschließendes Ergebnis voraussetzt. Das wird deutlich, wenn wir einmal als Schätzwert  $R$  setzen ( $x_0 = R$ ). Bei diesem Vorgehen brauchen wir uns keine Gedanken über den Schätzwert zu machen, jedoch wird die Rechnung länger als bei der zweckmäßigen Wahl eines Schätzwerts. Mit  $x_0 = R$  (bei  $R = 2$ ) erhalten wir:

$$x_1 = \underline{1,5000000}$$

$$x_2 = \underline{1,4166666}$$

$$x_3 = \underline{1,4142156}$$

und weiter wie bei der obigen Aufgabe. Es ist also nur ein Näherungswert (ein zusätzlicher Durchlauf durch die Iterationsschleife) dazugekommen.

Es bleibt dem Leser überlassen, ob der bequeme Weg gewählt wird, der mit  $x_0 = R$  beginnt, oder ein besserer Schätzwert eingesetzt wird. Das Schätzen der ersten Ziffer beim Quadratwurzelziehen ist nicht kompliziert. Auch das Schätzen der zweiten Ziffer ist möglich, wenn interpoliert wird. Wenn der Wert von  $\sqrt{70}$  berechnet werden soll, dann wissen wir, daß

$$\sqrt{81} > \sqrt{70} > \sqrt{64},$$

also  $\sqrt{70}$  zwischen 9 und 8 liegt. Damit ist für den Schätzwert die erste Ziffer mit 8 festgelegt. Da 70 wesentlich näher an 64 als an 81 liegt, können wir den Schätzwert z. B. mit 8,25 annehmen.

Die Rechnung mit  $x_0 = 8,25$  ergibt

$$x_1 = \underline{8,367424} \text{ und}$$

$$x_2 = \underline{8,3666000}.$$

Bereits die Ermittlung von  $x_1$  ergibt drei exakte Stellen.

Dieser schnell erlernbare Algorithmus hat einen kleinen Schönheitsfehler, der darin besteht, daß wir zweimal  $x_n$  eintasten müssen, um  $x_{n+1}$  zu berechnen:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x_n} + x_n \right),$$

wobei das nicht nur für den Schätzwert, sondern für jede Iterationsschleife gilt. Dies ist bei vielstelligen Teilergebnissen etwas kompliziert, weil dadurch die gesamte Rechenzeit verlängert wird und Fehlermöglichkeiten durch Eintastfehler entstehen. Außerdem ist zu empfehlen, daß die jeweiligen  $x_n$ -Werte aufgeschrieben werden, um diese Fehler zu vermeiden. Selbstverständlich kann ein Speicher eine große Hilfe sein. Unter Verwendung des Speichers lautet der Lösungsgang:

$$x_n \text{ M} : R \div MR + MR \div 2 = x_{n+1} .$$

### Algorithmus 2b: Berechnung der $k$ -ten Wurzel

(Speicher ist erforderlich)

Es besteht auch die Möglichkeit, mit einem ähnlichen Algorithmus wie beim Quadratwurzelziehen die  $k$ -te Wurzel zu ziehen. Dazu benutzen wir folgenden Algorithmus:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[ \frac{R}{x_n^{k-1}} + (k-1) \cdot x_n \right];$$

wenn

$$x_{n+1} \approx x_n, \text{ dann gilt } x_{n+1} \approx \sqrt[k]{R}.$$

Die Ermittlung der einzelnen Näherungswerte ist bei diesem Algorithmus un bequem, deshalb sollte man bei größeren Werten für  $k$  besser mit Hilfe der Logarithmenrechnung zur Lösung kommen. Der Algorithmus für die Kubikwurzel ist jedoch auch mit dem angegebenen Verfahren möglich:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left[ \frac{R}{x_n^2} + 2x_n \right].$$

### Beispiel

Wie groß ist der Wert von  $\sqrt[3]{30}$ ?

$$x_0 = 3,1,$$

$$x_1 = 3,1072493,$$

$$x_2 = 3,1072324.$$

Unter Verwendung des Speichers erfolgt das schrittweise Ausrechnen (die Ermittlung des nächstfolgenden Näherungswerts):

$$x_n \text{ M} : R \quad MR = = \div 2 + MR * 2 \div 3 = x_{n+1}$$

## 6.3. Exponentialfunktionen

Zur Berechnung von Werten der Exponentialfunktionen gibt es bekanntlich sehr viele Algorithmen. Wir wollen uns einige ansehen, wobei Definitionsbereich und Genauigkeit besonders wichtig sind. Die exponentiellen Funktionen haben

unter dem Aspekt der Berechnung mit dem Taschenrechner eine Reihe günstiger Eigenschaften. Bei unseren Algorithmen werden wir die eine oder andere günstige Eigenschaft nutzen.

**Algorithmus 3: Verwendung von Funktionstabeln**

(Speicher ist erforderlich)

Stehen folgende Funktionswerte aus einer Funktionstafel zur Verfügung

$$\begin{aligned}
 e^{-1} &= 0,3678794, \\
 e^{-0.1} &= 0,9048374, \\
 e^{-0.01} &= 0,9900498, \\
 e^{-0.001} &= 0,9990005
 \end{aligned}$$

und wird bei  $x < 0,001$  mit der Näherung

$$e^x \approx 1 + x \text{ gerechnet, so können wir beliebige } e^x\text{-Werte berechnen.}$$

**Beispiel**

Zu ermitteln ist der Wert von  $e^{2,513306}$ .

Die Aufgabe wird zerlegt in:

$$e^2 \cdot e^{5 \cdot 0.1} \cdot e^{1 \cdot 0.01} \cdot e^{3 \cdot 0.001} \cdot e^{0,000306}$$

Der Wert des letzten Faktors wird mit der oben angegebenen Näherungsformel ermittelt, die anderen Werte werden der Funktionstafel entnommen. Die Anpassung der Vorzeichen der Exponenten kann durch Bildung der Reziprokwerte erreicht werden.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 1,000306 \div 0,9990005 &= = = \div 0,9900498 = \div 0,9048374 \\
 &= = = = = \div 0,3678794 = = = 12,345677.
 \end{aligned}$$

**Algorithmus 4: Fortlaufende Multiplikation**

(Speicher ist nicht erforderlich)

Der nun erläuterte Algorithmus ist nicht so genau wie der vorhergehende.

Bekannt sei nur

$$e^{0.1} = 1,1051709 \text{ (der Funktionstafel entnommen).}$$

Zu berechnen ist  $e^{2.3}$ .

$$e^{2.3} = (e^{0.1})^{23},$$

d. h., wir zerlegen den Exponenten. Dieser Schritt ist trivial, jedoch entsteht der Nachteil, daß die Ergebnistaste = insgesamt 22mal gedrückt werden muß:

$$1,1051709 * = = = \dots = \dots = 9,9741758.$$

1 2 3 i 22

**Algorithmus 5: Näherungsverfahren mit Polynomen**

(Speicher ist erforderlich)

a)  $0 < x < \ln 2$

$$e^{-x} \approx 1 + a_1x + a_2x^2$$

b)  $0 < x < \ln 2$

$$e^{-x} \approx 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

maximaler Fehler:

$$F_{\max} = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$a_1 = -0,9664$$

$$a_2 = 0,3536$$

$$F_{\max} = 3 \cdot 10^{-6}$$

$$a_1 = -0,9998684$$

$$a_2 = 0,4982926$$

$$a_3 = -0,1595332$$

$$a_4 = 0,0293641$$

Unter Verwendung der Polynome erhalten wir ein genaueres Ergebnis. Die Anwendung der Polynome mit dem Taschenrechner ist allerdings etwas schwieriger als die Lösung mit den Algorithmen 1 bis 4.

### Algorithmus 6: Näherungsverfahren mit gebrochenen Funktionen

(Speicher ist erforderlich)

a)  $-0,5 < x < 0,5$

$$F_{\max} = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$e^x \approx \frac{2+x}{2-x}$$

b)  $-0,5 < x < 0,5$

$$F_{\max} = 4 \cdot 10^{-5}$$

$$e^x \approx \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

Für eine zweckmäßige Rechnungsdurchführung formen wir um:

$$e^x \approx \frac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$$

Diese leicht zu merkende Formel kann im Prinzip stets genutzt werden.

#### Beispiel

Welchen Wert erhalten wir für  $e^{1,75}$ ?

Weil die angegebene Näherungsformel nur für den Bereich  $-0,5 < x < 0,5$  verwendbar ist, wird die Aufgabe vor Beginn der Rechnung umgeformt, wir erhalten

$$e^{1,75} = e^2 \cdot e^{-0,25}$$

Beide Faktoren können nun ausgerechnet werden.  $e^2$  kann aus einer Funktionstafel entnommen werden bzw. ist mit einem Taschenrechner direkt berechenbar,  $e^{-0,25}$  liegt im zulässigen Bereich der angegebenen Näherungsformel.

c)  $-1 < x < +1$

$$F_{\max} = 1 \cdot 10^{-5}$$

$$e^x \approx \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$$

Auch bei Näherungsverfahren mit Brüchen erhalten wir genauere Ergebnisse, jedoch ist die Berechnung mit den angegebenen Formeln unter Verwendung eines Taschenrechners etwas zeitaufwendig und kompliziert (auch Fehlermöglichkeiten durch eine falsche Reihenfolge der Tastenbedienungen sind gegeben).

### Algorithmus 7: Gemischte Näherungsverfahren

a) Für die Berechnung von exponentiellen Funktionen können wir folgende Formel anwenden:

$$e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

$m$  wird so eingesetzt, daß, von einer natürlichen Zahl (z. B. 2) ausgehend, ständig eine Verdoppelung bei den nächsten Gliedern erfolgt. Damit ergibt sich das Näherungsverfahren:

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \quad \text{mit } m = 128, 256, 512, 1024.$$

Wenn wir z. B.  $e^1$  ( $x = 1$ ) ausrechnen wollen und mit  $m$  bis 256 gehen, dann erhalten wir

$$1 \div 256 + 1 = * = * = * = * = * = * = * = * = * = * = 2,7129225 .$$

$$( \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 )$$

Die eingeklammerten Zahlen geben den jeweils aktuellen Wert des Exponenten an. Das angegebene Verfahren eignet sich nicht für Routinerechnungen.

b)  $0 < x < 1$   $F_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$

$$e^x \approx \left( \frac{2,122 \cdot x}{8,469 - x} + 1 \right)^4$$

c)  $0 < x < 0,5$   $F_{\max} = 2 \cdot 10^{-5}$

(Speicher und Quadratwurzelfunktion sind erforderlich)

Mit dem ersten Schritt rechnen wir  $y$  aus:

$$y = \frac{1}{12} [(x^2 + 6)^2 - 12] .$$

Mit diesem ermittelten  $y$  rechnen wir weiter:

$$e^x \approx \frac{1}{2} (y + \sqrt{y^2 - 4}) .$$

d)  $0 < x < 2$

$$e^x \approx ( \dots ( ( (x \div (N) + 1) x \div (N - 1) + 1) \\ x \div (N - 2) + 1) \dots x \div (1) + 1 )$$

$N$  ist zweckmäßigerweise relativ groß zu wählen.

### Beispiel

Mit dem angegebenen Verfahren wollen wir den Wert von  $e$  bestimmen. Für  $N$  wird 10 angesetzt.

$$1 \div 10 + 1 \div 9 + 1 \div 8 + 1 \div 7 + 1 \div 6 + 1 \div 5 + 1 \\ \div 4 + 1 \div 3 + 1 \div 2 + 1 \div 1 + 1 = 2,7182818 .$$

Dieses genaue Ergebnis erhalten wir als Belohnung für den aufwendigen Rechengang. Wenn  $x \neq 1$  ist, dann verwenden wir den Speicher, weil das ständige Eintasten sonst zu viele Fehlerquellen ergibt.

## 6.4. Logarithmische Funktionen

Natürliche und dekadische Logarithmen können mit ähnlichen Algorithmen berechnet werden. Zuerst wollen wir uns die Berechnung der natürlichen Logarithmen ansehen.

### Algorithmus 8: Näherungsverfahren mit Polynom

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 1$$

$$\ln(1 + x) \approx a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \quad F_{\max} = 10^{-5}$$

$$a_1 = 0,9994956$$

$$a_2 = -0,4919090$$

$$a_3 = 0,2894748$$

$$a_4 = -0,1360628$$

$$a_5 = 0,03215845$$

Dies ist ein relativ schwieriges zu berechnendes Verfahren.

### Algorithmus 9: Näherungsverfahren mit Polynom

(Verwendung von Mittelwerten; Speicher ist zweckmäßig)

$$0,6 < x < 1,6$$

$$F_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$z = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\ln x \approx (0,70225 z^2 + 1,99938) \cdot z$$

### Algorithmus 10: Gemischte Algorithmen

(Speicher ist zweckmäßig, Quadratwurzelfunktion ist erforderlich)

a)  $0,6 < x < 1,6$

$$F_{\max} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$y = x + \frac{1}{x},$$

$$\ln x \approx \sqrt{\sqrt{12(1+y)} - 6}.$$

b)  $0,6 < x < 1,6$

$$F_{\max} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$z = x + \frac{1}{x},$$

$$y_{n+1} = (z - 2) - \frac{1}{12} y_n^2,$$

wenn  $y_{n+1} \approx y_n$ , dann  $\ln x \approx \sqrt{y_n}$ .

Bei der letztgenannten Formel ist es vorteilhaft, daß nur am Ende der Rechnung einmal die Wurzel gezogen werden muß. Allerdings wird dies durch einen Nachteil aufgehoben, da bis zur Erreichung der Zielstellung ( $y_{n+1} \approx y_n$ ) eine iterative Berechnung erfolgen muß (mit dem dazugehörigen Aufwand an Zeit und Tastendrücken).

### Beispiel

$$x = e^{1/4}$$

$$z = 2,0628254$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 0,0628254$$

$$y_2 = 0,0624964$$

$$y_3 = 0,0624999$$

$$\ln x = 0,2499997$$

### Algorithmus 11: Dekadische Logarithmenfunktionen

$$10^{-1/2} < x < 10^{1/2}$$

$$F_{\max} = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$z = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\lg x \approx (0,36415 z^2 + 0,86304) \cdot z$$

## 6.5. Winkelfunktionen

Zur Berechnung von Winkelfunktionen werden oft exponentielle Reihenentwicklungen verwendet. Die folgenden Algorithmen ergeben eine Verkürzung der ausführlichen Reihenentwicklungen und liefern nur für einen begrenzten Defini-

tionsbereich ausreichend genaue Ergebnisse. Es besteht jedoch bei den trigonometrischen Funktionen durch kleine Kunstkniffe die Möglichkeit, die Definitionsbereiche zu erweitern. Dies werden wir uns in den folgenden Beispielen noch genauer ansehen.

## Berechnung von Sinuswerten

### Algorithmus 12

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < \pi/2$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$a_2 = -0,16605$$

$$a_4 = 0,00761$$

### Algorithmus 13

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{120} [(x^2 - 10)^2 + 20]$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$$

Im Prinzip sind die Algorithmen 12 und 13 gleicher Art.

Der Vorteil des Algorithmus 13 besteht aber darin, daß die Konstanten leichter zu merken sind. Auch werden die Fehler durch das Eintasten geringer sein.

Die Genauigkeit der Algorithmen 12 und 13 hängt natürlich von der Wahl der  $x$ -Werte ab. Wird z. B.  $x = \pi/4$  ( $45^\circ$ ) gewählt, so ist der Fehler nur  $5 \cdot 10^{-5}$  bzw. bei  $x = 0,5$  verringert sich der Fehler sogar auf  $3 \cdot 10^{-6}$ .

### Algorithmus 14

(Speicher ist erforderlich)

$$0^\circ < y < 45^\circ$$

$$\sin y \approx y' \{[(0,6061 y')^2 - 1,206]^2 + 0,29089\}$$

$$F_{\max} = 1 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{mit } y' = \frac{y}{100}$$

Dies ist eine Veränderung gegenüber dem Algorithmus 13, da hier das Argument in Grad eingesetzt werden muß. Bei  $90^\circ$  erhalten wir einen Fehler von  $5 \cdot 10^{-3}$ .

### Algorithmus 15

(Speicher nicht erforderlich, Quadratwurzelfunktion notwendig)

$$0 < x < 0,25$$

$$\sin x \approx \sqrt{\frac{9 - (2x^2 - 3)^2}{12}}$$

$$F_{\max} = 8 \cdot 10^{-5}$$

Für diesen geringen Definitionsbereich werden wir aber entschädigt, indem während der gesamten Rechnung nur einmal der  $x$ -Wert einzutasten ist.

## Berechnung von Kosinuswerten

### Algorithmus 16

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 0,5$$

$$F_{\max} = 3 \cdot 10^{-5}$$

$$\cos x \approx \frac{1}{24} [(x^2 - 6)^2 - 12]$$

Dieser Algorithmus ähnelt dem Algorithmus 13.

### Algorithmus 17

(Speicher ist erforderlich)

Gegenüber dem Algorithmus 16 treten hier Änderungen ein:

$$0 < x < \pi/2$$

$$F_{\max} = 9 \cdot 10^{-4}$$

$$\cos x \approx 1 + a_2x^2 + a_4x^4$$

$$a_2 = -0,49670$$

$$a_4 = 0,03705$$

## Berechnung von Tangenswerten

Die folgenden Algorithmen haben einen sehr geringen Definitionsbereich, außerdem sind die berechneten Werte relativ ungenau. Es empfiehlt sich deshalb, mit dem gegebenen Argument die Sinus- und Kosinuswerte zu berechnen und daraus den Tangens zu bilden. Trotzdem werden zwei Algorithmen vorgestellt, um die Möglichkeiten einer Näherung im angegebenen Definitionsbereich zu zeigen.

### Algorithmus 18

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < \pi/4$$

$$F_{\max} = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tan x}{x} \approx 1 + a_2x^2 + a_4x^4$$

$$a_2 = 0,31755$$

$$a_4 = 0,20330.$$

### Algorithmus 19

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 0,25$$

$$F_{\max} = 1 \cdot 10^{-5}$$

$$\tan x \approx \frac{x}{120} [(4x^2 + 5)^2 + 95].$$

## Berechnung von Arcusfunktionen

### Algorithmus 20

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 1$$

$$F_{\max} = 9 \cdot 10^{-3}$$

$$\arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - (1 - x)^{1/2} \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$$

$$a_0 = 1,5707288$$

$$a_1 = -0,2121144$$

$$a_2 = 0,0742610$$

$$a_3 = -0,0187293.$$

### Algorithmus 21

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 0,7$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$y = \arcsin x$$

$$y_{n+1} = x + \frac{1}{6} y_n^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{20} y_n^2\right),$$

wenn  $y_{n+1} \approx y_n$ , dann  $y_{n+1} \approx \arcsin x$ .

Die aufeinanderfolgenden  $y_n$ -Werte werden iterativ berechnet.

#### Beispiel

$$x = 0,2$$

$$y_0 = 0$$

(Dies ist ein trivialer Anfang, selbstverständlich können wir  $y_0$  auch schätzen und dann in die Formel einsetzen.)

$$y_1 = 0,2$$

$$y_2 = 0,2013306$$

$$y_3 = 0,2013573$$

$$y_4 = 0,2013579.$$

Dieser Algorithmus ist relativ genau, jedoch ist der Rechenaufwand auch relativ groß.

### Algorithmus 22

(Speicher ist erforderlich)

$$0 < x < 0,7$$

$$F_{\max} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$y = \arcsin x \approx \{[(1,671 x)^2 + 1,561]^2 + 54,89\} x$$

Das Ergebnis erhalten wir in Grad.

Wenn  $x = 1/\sqrt{2}$  ist, dann erhalten wir  $y = 44,996431^\circ$ .

Der Fehler beträgt dabei 13 Winkelsekunden.

### Algorithmus 23

(Speicher ist nicht erforderlich, Quadratwurzelfunktion ist notwendig)

$$0,7 < x < 1$$

$$F_{\max} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$y = \arccos x \approx \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{\frac{1+2x}{3}}\right)}.$$

### Algorithmus 24

$$0 < x < 1$$

$$F_{\max} = 8 \cdot 10^{-3}$$

$$y = \arctan x \approx \frac{x}{1 + 0,28x^2}$$

Dieser Algorithmus ist einfach, jedoch ungenau.

### Algorithmus 25

(Speicher ist nicht erforderlich)

$$0 < x < 1$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$y = \arctan x \approx \left(\frac{67,44}{x^2 + 1,897} + 21,73\right) x.$$

Das Ergebnis erhalten wir in Grad.

Wenn mit einem einfachen Taschenrechner Aufgaben gelöst werden, für die wissenschaftliche Taschenrechner üblich sind, so sind die in der folgenden Aufstellung angegebenen Algorithmen zweckmäßig. Allerdings ist entsprechende Übung erforderlich, um ohne große Mithilfe von Papier und Bleistift die Aufgaben flott lösen zu können.

Aufgabentyp	Algorithmus
Quadratwurzel	2a
exponentielle Funktion	6b
logarithmische Funktion	9, 11
$\sin x$ bzw. $\cos x$	13 bzw. 16
$\arcsin x$	22, 23

Selbstverständlich kann man auch mit anderen Algorithmen arbeiten, jedoch sind die aufgeführten Algorithmen einfacher und unter dem Aspekt der Genauigkeit zu empfehlen.

Im folgenden werden einige Anwendungsbeispiele aufgeführt.

### Beispiel 1

Wie groß ist der Wert von  $78^\circ 35' 42''$  ?

Zuerst rechnen wir von Grad- in Bogenmaß um.

$$42 \div 60 + 35 \div 60 + 78 * 3,1415926 \div 180 = 1,3717414 .$$

Nun können wir zwei verschiedene Wege beschreiten.

a) Es wird der Algorithmus 16 angewendet.

Zuvor müssen wir aber beachten, daß

$$\cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ ist.}$$

$$\pi \div 2 - 1,3717414 * = - 6 * = - 12 \div 24 = 0,9802539 .$$

b) Nach Algorithmus 13 können wir den Sinus des Halbwinkels berechnen und dann das eigentliche Ergebnis ermitteln. Dabei gilt

$$\sin 2x = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} .$$

Der Lösungsweg lautet:

$$1,3717414 \div 2 = M : * = 10 * = + 20 \div 120 * MR = 0,6333611 \text{ MC M :}$$

$$* = - 1 * (-1) = \sqrt{*} 2 = * MR = 0,980261 .$$

### Beispiel 2

Der Wert von  $e^{2,765}$  ist unter Verwendung des Algorithmus 6b zu berechnen!

$$e^{2,765} = e^3 \cdot e^{2,765 - 3} = e^3 \cdot e^{-0,235}$$

Rechengang

$$0,235 \text{ M : } + 3 * = + 3 = \rightleftharpoons \text{M} \quad 3 * = + 3 \div = * \text{MR}$$

$$= \text{MC M : } 2,7182818 * = * \text{MR} = 15,879056 .$$

### Beispiel 3

Unter Verwendung des Algorithmus 10 ist der Wert von  $\ln 19$  auszurechnen!

Die Zahl 19 liegt nicht mehr im Definitionsbereich des Algorithmus 10 (Teil a), deshalb muß die Zahl 19 in  $e^n \cdot k$  umgewandelt werden, wobei  $n$  eine ganze Zahl und  $k$  ein Faktor ist, der die Gleichheit von

$$19 = e^n \cdot k \text{ herstellt.}$$

Der Faktor  $k$  muß im zulässigen Definitionsbereich liegen. Die gegebene Zahl 19 wird zur Ermittlung von  $k$  so oft durch  $e$  dividiert, bis der Quotient im

Definitionsbereich liegt. Wir müssen uns allerdings dabei merken, wievielmals dividiert wurde.

$$19 \div 2,7182828 = = = 0,9459543, \text{ d. h.}$$

$$19 = e^3 \cdot 0,9459543.$$

Ein wesentlicher Teil der Aufgabe besteht nun im Ausrechnen von  $\ln k$ . Für

$$y = k + \frac{1}{k}$$

erhalten wir

$$0,9459543 M: \div = = + MR = MC M: 2,0030868.$$

Der  $y$ -Wert befindet sich jetzt im Speicher, damit erfolgt die Fortsetzung der Rechnung.

$$+ 1 * 12 = \sqrt{\quad} - 6 = \sqrt{\quad} 0,0555598.$$

Unser Ergebnis lautet:

$$\ln 19 = 3 - 0,0555598 = 2,9444402.$$

#### Beispiel 4

Das im Beispiel 3 berechnete Ergebnis können wir weiterverwenden, wenn wir

$$\sqrt[7]{19} \text{ berechnen wollen.}$$

Da der Wert von  $\ln 19$  bekannt ist, formen wir um in

$$e^{1/7 \cdot \ln 19}$$

$$2,9444402 \div 7 = 0,4206343.$$

Mit dem Algorithmus 7c rechnen wir weiter:

Dazu wird  $y$  berechnet

$$* = + 6 * = - 12 = \div 12 = 2,1795419$$

$$M : * = - 4 = \sqrt{\quad} + MR \div 2 = 1,522899.$$

Das erhaltene Ergebnis können wir relativ einfach kontrollieren, indem wir die 7. Potenz bilden:

$$1,522899 * = = = = = 18,997552.$$

Den Ausgangswert haben wir nicht genau zurückerhalten, dies war anzunehmen.

Der relative Fehler beträgt ungefähr

$$2,4 \cdot 10^{-3} / 19 \approx 1,2 \cdot 10^{-4},$$

das ist bei einer großen Anzahl von Aufgaben ein akzeptabler relativer Fehler.

---

## 7. Programmierbare Taschenrechner

---

Im Laufe der Jahre wurden Taschenrechner immer leistungsfähiger. Die leistungsfähigste Gruppe sind programmierbare Taschenrechner. Bei diesen Rechnern verstehen wir unter Programmierbarkeit, daß sie in der Lage sind, die Reihenfolge der Bedienung der Funktionstasten zu speichern. Diese so entstandenen Programme können dann beliebig oft mit unterschiedlichen Verarbeitungsdaten (variablen Werten) abgearbeitet werden. Die Reihenfolge der Funktionen, die vom Nutzer eingetastet wird, kann in einem Speicherschaltkreis (RAM) gespeichert werden und ist vom Nutzer wieder aufrufbar. Dies erfolgt über die im Nur-Lese-Speicher (ROM) enthaltenen Programmschritte, die den Funktionstasten entsprechen, hinaus. Es sind also für die Programme ROM- und RAM-Speicherschaltkreise vorhanden. Die vom Nutzer eingegebenen Programme können im Speicherschaltkreis nicht ohne weiteres verändert werden. Auf Besonderheiten der Programmierung kommen wir noch. Auch besteht nicht die Möglichkeit, mehrere eingegebene Programme zu verbinden. Wir wollen unter **Programmierung** also das Eintasten und die Speicherung der eingegebenen Programme in Speicherschaltkreisen verstehen, die bei Bedarf aufgerufen und abgearbeitet werden können. Die in den Abschnitten 5. und 6. erläuterten Algorithmen und Beispiele stellen jeweils ein Programm dar, das jedoch auf einem einfachen Taschenrechner erarbeitet wurde. Die rot geschriebenen Folgen sind die **Programmbeschreibungen**.

Unter dem Aspekt der Programmierbarkeit sind die Taschenrechner in zwei große Gruppen einteilbar. Die einfachen programmierbaren Taschenrechner speichern die Programme, die mit verschiedenen Werten abgearbeitet werden können. Bei der zweiten Gruppe der programmierbaren Taschenrechner gibt es auch die Möglichkeit der **Programmverzweigung**. Darunter ist zu verstehen, daß in Abhängigkeit von einem erreichten Teilergebnis die Fortsetzung des Programms auf zwei verschiedenen Wegen möglich ist. Beide Programmzweige führen dann nach Durchführung der vorgesehenen Operationen zum Programmende. Programmverzweigungen können auch mehrfach auftreten. Weiterhin muß ein Programmzweig nicht unbedingt zum Ende des Programms führen, sondern kann durch einen Einsprung wieder in das sog. *Hauptprogramm* führen. Mit dieser zweiten Gruppe lassen sich kompliziertere Programme aufbauen.

Die Vorteile von programmierbaren Taschenrechnern liegen auf der Hand: Schwierige Aufgaben können bei nur einmaliger Programmaufstellung wiederholt gelöst werden. Dies kann Routineaufgaben betreffen, Funktionstabellen können aufgestellt oder eine große Anzahl von Werten einer komplizierten Funktion kann berechnet werden. Die Fehlerwahrscheinlichkeit wird bei Verwendung der programmierbaren Taschenrechner verringert, da ein richtig aufgestelltes Pro-

gramm alle Berechnungen mit dem gleichen Algorithmus ausführt. Auch die Rechenzeiten werden verkürzt, weil nicht bei jeder neuen Berechnung die einzelnen Programmschritte neu eingetastet werden müssen.

Leider hat die Programmierbarkeit auch einige negative Seiten, die nicht unerwähnt bleiben sollen. Zuerst stellen wir fest, daß der Kaufpreis im Vergleich zu den nichtprogrammierbaren Taschenrechnern relativ hoch ist. Daraus ergeben sich natürlich einige Schlußfolgerungen und Überlegungen. Weiterhin dauert die Aufstellung eines lauffähigen Programms allgemein lange, da die vorgeschriebenen Regeln strikt einzuhalten sind. Da ein eingespeichertes Programm oft wiederholt abgearbeitet werden kann, muß dieses Programm exakt richtig sein. Demzufolge ist bei der Programmaufstellung und beim Eintasten eine große Konzentration notwendig. Bevor man ein solches Programm als lauffähig und richtig bezeichnet, sollte man es mit überschaubaren Verarbeitungsdaten und bekannten Ergebnissen kontrollieren bzw. testen. Ein solcher einfacher Test kann mitunter noch verborgene Fehler des Programms zeigen. Zu beachten ist, daß bei vielen programmierbaren Taschenrechnern die eingeschriebenen Programme sehr schwer oder überhaupt nicht verbesserbar sind. Entweder werden zugelassene Arbeitsgänge zur Verbesserung eines Programms (bei Notwendigkeit) eingehalten, oder ein fehlerhaftes Programm wird nach der Verbesserung völlig neu eingetastet. Dieser letzte Weg ist Anfängern zu empfehlen, sonst entstehen durch die unsachgemäße Verbesserung eines eingeschriebenen Programms weitere Fehler. Probleme entstehen auch hinsichtlich der Anzahl der Programme, die vom Speicherschaltkreis (RAM) gespeichert werden können. Mitunter besteht nur die Möglichkeit, ein Programm aufzunehmen. Mit diesem Programm kann dann solange gearbeitet werden, bis die Notwendigkeit der Speicherung eines anderen Programms besteht. Dadurch wird das erste Programm gelöscht. Um diesen Nachteil zu beheben, wurden verschiedene programmierbare Taschenrechner mit einer Magnetkarteneinheit versehen. Auf diesen kleinen Magnetkarten lassen sich Einzelprogramme magnetisch aufzeichnen. Da die Anzahl der verwendeten Magnetkarten nicht begrenzt ist, können damit geläufige Programme, die immer einmal benötigt werden, gespeichert werden. Mit der *Magnetkarteneinheit* können die Magnetkarten (und damit die Programme) zur Abarbeitung in den Speicherschaltkreis übernommen werden. Im Speicherschaltkreis befindet sich dann immer nur das aktuelle Programm, ohne daß Programme selbst verlorengehen, da sie auf Magnetkarten aufgezeichnet sind. Diese Lösungsvariante mit der Magnetkarteneinheit ist effektiv, jedoch auch relativ teuer. Es entsteht die Frage, ob sich Einzelpersonen überhaupt einen programmierbaren Taschenrechner mit Magnetkarteneinheit leisten können. Daraus ergibt sich wiederum eine Aussage über die für den Hersteller erforderliche Massenproduktion.

Die Programmierung eines Taschenrechners erfolgt nach bestimmten festen Regeln. Man kann durchaus feststellen, daß die Programmierung für einen programmierbaren Taschenrechner regelrecht erlernt werden muß; die Hersteller liefern dazu in der Regel sog. *Programmierhandbücher*. Ohne Kenntnis der Programmierung ist es unzumutbar, mit einem programmierbaren Taschenrechner zu arbeiten, der finanzielle Aufwand würde in keinem günstigen Verhältnis zum Nutzen stehen.

Nutzer können den Rechner sehr effektiv ausnutzen, wenn schon andere Programmierkenntnisse vorhanden sind (etwa in maschinenorientierten oder problem-

orientierten Programmiersprachen). Diese Programmiersprachen sind jedoch nicht gleichzusetzen mit den Programmieraufgaben bei programmierbaren Taschenrechnern, sie sind anderer Art. Bemerken möchten wir aber auch, daß Nutzer ohne Kenntnisse in anderen Programmiersprachen ebenfalls nach einiger Übung mit ihrem Taschenrechner effektiv und richtig umgehen können, Vorkenntnisse sind also nicht Bedingung, sondern erleichtern nur die Einarbeitung.

Die Praxis zeigt, daß Nutzer von programmierbaren Taschenrechnern, die über sehr gute Kenntnisse in den Programmiersprachen für Großrechner verfügen, mit dem begrenzten Vermögen der Taschenrechner recht häufig unzufrieden sind. Hier muß man aber die Aufgabenteilung der Rechner und die Zielstellung der programmierbaren Taschenrechner beachten.

### 7.1. Betriebsarten und Befehle

Zur Programmeinspeicherung und Programmabarbeitung werden bei programmierbaren Taschenrechnern besondere Tasten oder Schalter verwendet. Die folgenden Betriebsarten sind dabei möglich:

#### Programmeinspeicherung (learn, load)

In dieser Betriebsart werden die Einzelschritte des geschriebenen Programms in den Programmspeicher aufgenommen bzw. eingetastet (s. Bild 7.1). Das fertige und auf Papier geschriebene Programm wird unter Verwendung der Tasten (meist in der Reihenfolge der Abarbeitung) in den Programmspeicher eingeschrieben. Die Kapazität des Programmspeichers ist begrenzt, häufig sind es 20 bis 150 Schritte (Tastendrucke).

#### Programmabarbeitung (run, program)

Das im Programmspeicher befindliche Programm wird abgearbeitet. Programmstart und Programmstop haben in der Regel gesonderte Tasten (START, STOP). Die Taste STOP ist für ein Anhalten des in der Abarbeitung befindlichen Programms erforderlich. Die Gründe dafür können unterschiedlich sein. Ansonsten wird das eingeschriebene Programm durch Programmierung des Programmendes anhalten.

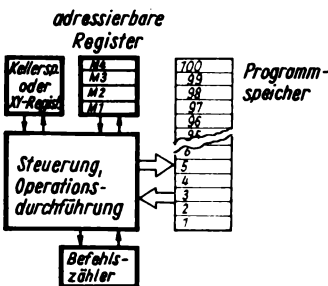


Bild 7.1. Blockschema eines programmierbaren Taschenrechners

## **Programmkontrolle**

In dieser Betriebsart ist eine Kontrolle des eingeschriebenen Programms möglich. Dies erfolgt in der Art, daß auf der Ziffernanzeige der Befehlszählerstand (entspricht der Adresse eines Befehls im Programmspeicher) und der Befehlscode (Art der auszuführenden Operation) angezeigt werden. Durch einen entsprechenden Tastendruck schaltet der Befehlszähler um eine Adresse weiter, und damit wird auch der nächste Befehlscode angezeigt. Der Befehlscode ist so aufgebaut, daß eine leichte Kontrolle möglich ist. Die Hersteller liefern in der Regel auch Tabellen mit, in denen die Bedeutungen der einzelnen Befehlscodes enthalten sind. Nach einiger Zeit benötigt man diese Tabellen nicht mehr, da die begrenzte Anzahl möglicher Befehle und damit Befehlscodes leicht zu merken ist. Es ist außerdem möglich, daß der Befehlscode aus zwei Ziffern besteht. Die erste Ziffer kennzeichnet die Zeile der Tastatur, die zweite die Spalte der Tastatur. Damit kennzeichnet der Befehlscode genau die Tastenposition. Man kann sehr leicht im Tastenfeld die Kontrolle durchführen und mit dem aufgeschriebenen Programm vergleichen.

Nehmen wir an, daß bei der Programmkontrolle auf der Ziffernanzeige 13 51 angezeigt wird. Dies kann also heißen, daß der 13. Programmschritt den Befehlscode 51 hat (der Schnittpunkt der 5. Zeile und der 1. Spalte liefert uns die entsprechende Funktion).

Mitunter besteht auch die Möglichkeit, das Programm nicht nur vorwärts, sondern auch rückwärts zu kontrollieren. Das hat eine Reihe von Vorteilen, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Selbstverständlich ist aber, daß dadurch die Fehlersuche und die Programmverbesserung einfacher werden.

## **Befehlsänderungen, Programmlöschung**

Durch diese Betriebsart ist es möglich, Teile des gespeicherten Programms zu ändern oder das gesamte Programm zu löschen. Die Befehlsänderung kann einen oder mehrere Befehle betreffen. Zuerst wird eine Löschung des zu ändernden Befehls oder Programmteils durchgeführt. Anschließend erfolgt an den gelöschten Stellen das Neueinspeichern eines oder mehrerer Befehle. Die Löschung kann auch das gesamte Programm betreffen, ohne daß ein Neueinspeichern erfolgt. Besonderheiten entstehen, wenn die Anzahl der gelöschten Befehle geringer bzw. größer ist als die Anzahl der neu einzuspeichernden Befehle. Die Verfahrensweise ist aus den jeweiligen Programmierhandbüchern zu entnehmen.

## **Schrittweise Programmabarbeitung**

Bei der schrittweisen Programmabarbeitung werden nicht, wie unter *Programmkontrolle* erläutert, Befehlszählerstand und Befehlscode angezeigt, sondern die aktuellen Teilergebnisse nach Abarbeitung eines jeden Befehls. Daraus ergibt sich, daß die schrittweise Programmabarbeitung die Eingabe von Verarbeitungsdaten erforderlich macht. Eine vorhandene Taste (STEP) wird gedrückt, sie löst die Abarbeitung genau eines Befehls aus. Demzufolge ist diese Schritttaste genauso oft zu drücken, wie Befehle im Programm enthalten sind. Es kann nach jedem Befehl kontrolliert werden, ob der Befehl richtig ist und zu dem erwarteten Ergebnis führt. Die schrittweise Programmabarbeitung eignet sich deshalb besonders gut für den Programmtest mit Verarbeitungsdaten. Die Kontrolle kann

natürlich auch einfacher erfolgen, wenn unsere Verarbeitungsdaten leicht überschaubar sind und auch Teilergebnisse bzw. Endergebnis durch Kopfrechnen verfolgt werden können.

### Einspeichern und Lesen der Programme

Diese Betriebsart ist selbstverständlich nur dann möglich, wenn der programmierbare Taschenrechner ein besonderes Speichermedium (genannt waren die Magnetkarten) zur Programmspeicherung benutzt und ein entsprechendes Gerät mit dem Taschenrechner koppelbar ist. Die benutzten Magnetkarten (ungefähr 7 cm × 1 cm × 1 mm) sind eine echte Leistungssteigerung für den Taschenrechner und erlauben eine Einspeicherung bzw. ein Lesen der Programme. Es gibt aber auch Lösungen, die mit Kassettenmagnetband arbeiten. Die Magnetbänder sind in der Lage, nicht nur ein Programm, sondern eine größere Anzahl von Programmen aufzunehmen. Üblich sind 1/8 Zoll breite Magnetbänder, wie sie auch bei Tonbandgeräten verwendbar sind.

Programmierbare Taschenrechner haben neben arithmetischen Befehlen noch zusätzliche Befehle (Organisations- oder Regiebefehle). Diese haben folgende Aufgaben zu erfüllen:

**START, STOP.** Programmschritte, die den Anfang bzw. das Ende des Programms angeben. Bei manchen Taschenrechnern sind START bzw. STOP auch als Marken verwendbar (Marken werden noch erläutert).

**HALT, CONTINUE.** Das Programm bleibt beim Befehl HALT stehen, die Steuerung wird an den Nutzer des Taschenrechners übergeben. Dies ermöglicht das Eintasten einer Zahl. Danach wird das Programm mit CONTINUE fortgesetzt.

**GOTO, LABEL.** Mit GOTO wird ein unbedingter Sprung im Programm angewiesen. Der Sprung erfolgt an die Stelle, die mit einer Marke (LABEL) gekennzeichnet ist (s. Bild 7.2). Der GOTO-Befehl führt also nicht zur Abarbeitung des nächstfolgenden Befehls. Die Marke, die angesprungen wird, kann eine Zahl oder auch ein Buchstabe sein, z. B. 18 GOTO 27. Der 18. Befehl ist der unbedingte Sprungbefehl, danach folgt stets der Befehl mit der Marke 27; dies kann der 27. Befehl sein, wenn die Nummer des Befehls als Marke verwendet wird. Für die zugelassenen Marken gibt es meist besondere Ausführungen in den Programmierhandbüchern.

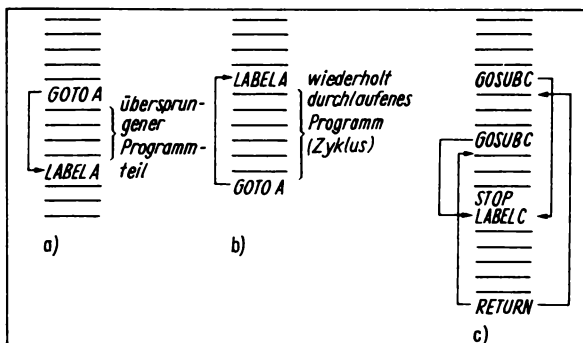


Bild 7.2. Beispiele von Programmstrukturen mit Sprungbefehlen

- a) Überspringen eines Programmteils
- b) wiederholt durchlaufener Programmteil (Zyklus)
- c) das Unterprogramm zwischen LABEL C und RETURN kann wiederholt genutzt werden

Auch folgendes Programmstück ist möglich:

```
MR 6
+
MR 7
=
LABEL A
1/X
.
```

### GOTO A

Dieses Programmstück wird bis zum Befehl GOTO A abgearbeitet. Es wird die Marke A gesucht, und dort erfolgt die Fortsetzung der Abarbeitung. Nach der Marke A wird der Reziprokwert des Inhalts des X-Registers gebildet, der dann weiterverarbeitet werden kann.

Mit den unbedingten Sprungbefehlen und unter Verwendung von Marken kann im Programm entsprechend der Notwendigkeit gesprungen werden. Würden die Programme ohne Sprungbefehle und ohne Marken geschrieben, dann müßten sog. *Geradeausprogramme* verwendet werden, die erheblich länger würden. Wie aus Bild 7.2 ersichtlich, kann mit dem GOTO-Befehl in einem Programm vorwärts oder rückwärts gesprungen werden. Man kann mit diesen Befehlen *Programmschleifen* bzw. -zyklen aufbauen, die entweder in einer bestimmten Anzahl durchlaufen oder solange durchlaufen werden, bis eine entsprechende Endebedingung erfüllt ist. Diese Endebedingung kann eine sog. *Genauigkeitschranke* sein, wie wir dies bei den Iterationsformeln kennengelernt haben. Bei den Iterationsformeln werden die Programmzyklen solange durchlaufen, bis z. B.  $y_{n+1} \approx y_n$  ist und damit weitere Zyklendurchläufe keine Ergebnisverbesserung bringen.

**IF (Bedingung).** Dies ist ein bedingter Sprungbefehl, der für verzweigte Programme relativ häufig benötigt wird. Es werden meist die Inhalte von zwei Registern verglichen. Vom Ergebnis des Vergleichs ist dann die Fortsetzung des Programmablaufs abhängig. Beispielsweise wird bei Nichterfüllung der Bedingung der nächste Befehl abgearbeitet, bei Erfüllung der Bedingung wird eine bestimmte Anzahl von Befehlen übersprungen. Auch ist es möglich, daß bei Erfüllung der Bedingung eine bestimmte Marke angesprungen wird.

Folgende Vergleichsbedingungen sind möglich: = ; < ; > ; ≠ (gleich, kleiner, größer, ungleich). Alle vier Vergleichsbedingungen sind bei einem programmierbaren Taschenrechner nicht erforderlich, es reicht bereits aus, wenn ein oder zwei Bedingungen geprüft werden können. Die verbleibenden drei oder zwei Bedingungen kann man durch eine entsprechende Programmgestaltung mit den vorhandenen Bedingungen herstellen.

#### Beispiel für eine Vergleichsbedingung

```
16 IF X > M6
17 GOTO 3
18 X2
19 +
```

Der Befehl 16 ist ein bedingter Sprungbefehl. Wenn der Inhalt des X-Registers größer ist als der Inhalt des Speicherplatzes M6, dann wird das Quadrat

des Inhalts des X-Registers gebildet, d. h., es wird der Befehl 17 übersprungen. Wird die Bedingung nicht erfüllt, so wird der Befehl 17 aufgerufen, der einen unbedingten Sprung darstellt. Der nächste abzuarbeitende Befehl ist der Befehl 3, zu dem gesprungen wird.

**GOSUB (Marke), RETURN.** Diese Befehle werden verwendet, um aus einem Programm zu einer *Subroutine* (einem Unterprogramm) zu springen. GOSUB ist der Auftrag, die Marke gibt den Namen der Subroutine an. Nach Abarbeitung der Subroutine wird mit RETURN wieder in das eigentliche Programm zurückgesprungen, zum nächsten Befehl, der dem Aufrufbefehl der Subroutine folgt. Subroutinen sind kleine Unterprogramme, die innerhalb eines Programms oder in verschiedenen Programmen mehrfach durchlaufen werden können. Geübte Programmierer haben einen entsprechenden Vorrat von Subroutinen zur Verfügung, die dann in die einzelnen Programme einzubauen sind. Im Bild 7.2 sind die Abspangstellen (GOSUB C), der Beginn der Subroutine (gekennzeichnet mit LABEL C) und der Rücksprungbefehl (RETURN) zu sehen. Es ist ersichtlich, daß von mehreren Stellen des Programms aus zur Subroutine gesprungen werden kann und daß der Rücksprungbefehl immer zur Programmfortsetzung zu dem Befehl führt, der der Unterbrechungsstelle folgt. Man kann natürlich auch mehrere verschiedene Subroutinen mit verschiedenen Namen verwenden.

**PAUSE, DISPLAY.** Eine zeitlich definierte Unterbrechung können wir mit dem Befehl PAUSE erreichen. Die Unterbrechungszeit einer Pause ist in der Regel 1 s, bei mehrfach hintereinander programmierten Pausen demnach  $n \cdot 1$  s. Während dieser Unterbrechung kann ein berechnetes Teilergebnis als Inhalt des Anzeigeregisters abgelesen werden (Befehl DISPLAY). Es hängt vom Ablesevermögen des Nutzers ab, wieviel Zeit zum Ablesen vorgesehen wird. Diese Regelung ist sehr zeitsparend, da ein erneuter Programmbeginn bzw. eine Programmfortsetzung nicht vom Drücken der START-Taste abhängt, sondern zeitlich festliegt und automatisch erfolgt. Mit einem solchen Verfahren kann man z. B. Funktionstafeln aufstellen; die Pause liegt stets nach Berechnung eines Funktionswerts, danach beginnt ein neuer Rechenzyklus.

**FLAG SET, FLAG RESET.** Unter FLAG versteht man ein Identifizierungskennzeichen. Mit dem Befehl FLAG SET kann ein Kontroll- oder Steuerregister eingestellt werden. Dabei wird in der Regel für JA eine 1, für NEIN eine 0 verwendet. Mit dem Befehl FLAG RESET wird die Löschung des Kontroll- oder Steuerregisters durchgeführt.

Die Anwendung dieser Befehle erfolgt vielseitig. Ein einfaches **Beispiel** sei zum Verständnis erläutert: Wenn während des Programmablaufs der Vergleich zweier Registerinhalte mit dem IF-Befehl erfolgt, dann wird vorausgesetzt, daß in beiden Registern Zahlen sind. Als Ergebnis des Vergleichs interessiert uns eigentlich nur, ob die Bedingung erfüllt ist oder nicht. Demzufolge können wir in das Kontroll- oder Steuerregister für JA eine 1, für NEIN eine 0 übernehmen, die verglichenen Zahlen können anschließend mit anderen Werten in den betreffenden Registern überschrieben werden.

**PRINT.** Sofern der Taschenrechner eine Druckvorrichtung hat, erzeugt der Befehl PRINT den Ausdruck des Inhalts des X-Registers. Es wird dem Programmierer überlassen, ob er mit der Anzeige von Teil- oder Endergebnissen zufrieden ist oder ob die Teil- oder Endergebnisse ausgedruckt werden.

Komplizierte programmierbare Taschenrechner können weitere Befehlsarten ent-

halten und haben zusätzlich noch die Möglichkeit einer indirekten Speicheradressierung. Diese Abarbeitung mit indirekten Speicheradressen ist sehr effektiv. Bei der Programmaufstellung werden die notwendigen Arbeiten vereinfacht, und der Bereich der lösbaren Aufgaben wird vergrößert.

Allgemein gilt: Je mehr verschiedene Befehlsarten bei Taschenrechnern möglich sind, je kürzer und effektiver werden die Programme. Dadurch wird die Rechenzeit verkürzt. Jedoch ist immer die preisliche Seite der Rechneranschaffung zu beachten.

## 7.2. Aufstellen der Programme, Lösen von logischen Aufgaben

Das Aufstellen von Programmen kann man wie folgt durchführen:

- Die Programmierung geschieht mit speziellen Programmiersprachen, die auf einem mehr oder weniger hohen Niveau stehen. Dazu sind Kenntnisse der Rechentechnik erforderlich, auch praktische Erfahrungen in der Programmierung sind zweckmäßig.
- Rechentechnische Kenntnisse sind nicht erforderlich, die Programmierung läßt sich Schritt für Schritt erlernen.

Beide Arten der Programmierung haben entsprechende Vor- und Nachteile. Diejenigen Nutzer, die keine Vorkenntnisse in der Rechentechnik besitzen, sollten mit der letztgenannten Programmierung beginnen. Für diese Leser sind auch die nachstehenden Ausführungen gedacht:

- Die beim Taschenrechner möglichen Befehle sind genau zu studieren; Verwendungsmöglichkeiten und Wirkungen der Befehle müssen vom Programmierer des Taschenrechners verstanden worden sein.
- Eine vorhandene Betriebsanweisung bzw. das Programmierhandbuch ist genau zu studieren, enthaltene Beispiele sind exakt durchzuarbeiten, damit das Verständnis erreicht wird. Man sollte noch nicht zufrieden sein, wenn man *überblicksmäßig* die enthaltenen Ausführungen verstanden hat. Ein genaues Verstehen der Befehle und Beispiele ist erforderlich, da zwischen den Befehlen und Programmbeispielen ganz bestimmte Zusammenhänge bestehen. Das Ziel späterer Programmierung muß es sein, daß effektive Programme aufgestellt werden, die weder überflüssige Befehle enthalten noch Fehler ergeben, weil Befehle fehlen.
- Zur Vorbereitung effektiver Programme muß man sich Kenntnisse und Fertigkeiten bei der Aufstellung von Programmablaufplänen erwerben. Nach einer gewissen Zeit kann man dann im Sinne der Programmablaufpläne denken. Ein Beispiel für einen Programmablaufplan ist im Bild 7.4 zu sehen. Die zu verwendenden Symbole sind im TGL-Standard 22451 enthalten. Sie sind leicht erlernbar.
- Es ist eine Tabelle für die Speicherplatzbelegung aufzustellen. In diese Tabelle sind alle notwendigen Register- und Speicherplatzbelegungen einzutragen. Für jeden Befehl wird ermittelt, wieviel und welche Register- bzw. Speicherplätze mit welchen Inhalten belegt sind oder werden. Damit weiß man, welche Plätze in Registern oder im Speicher wieder frei werden und neu vergeben werden können. Die richtig aufgestellte Tabelle der Speicherplatzbelegung garantiert,

daß Verarbeitungsdaten, Teil- oder Endergebnisse nicht ungewollt verloren gehen. Besonders wichtig ist es, bei Taschenrechnern mit *Kellerspeichern* auf die Speicherplatzbelegung zu achten, da Kellerspeicher nach dem bereits beschriebenen Prinzip (zuletzt hinein — zuerst heraus) wirken.

- Die Aufstellung des Programmablaufplans erfordert eine große Konzentration, das logische Denken spielt dabei eine wesentliche Rolle. Bei einem großen Geräuschpegel im Arbeitsraum oder bei Überarbeitung des Programmierers sollten keine Programmablaufpläne oder Speicherplatzbelegungstabellen aufgestellt werden, weil ggf. notwendige Korrekturen kompliziert und zeitaufwendig sind. Teilweise ist es dann sinnvoller, einen Programmablaufplan oder eine Speicherplatzbelegungstabelle gleich neu aufzustellen, als umfassende Änderungen mit Verringerung der Übersichtlichkeit vorzunehmen.

Es sei daran erinnert, daß Programme für Großrechner i. allg. nicht von einer einzelnen Person aufgestellt werden, sondern von einem Kollektiv von Fachleuten. Eine zielstrebige Einarbeitung in die Programmierung durch Nichtfachleute der Rechentechnik bringt bestimmt recht bald Erfolgserlebnisse, die wiederum Ansporn für weitere Arbeiten auf diesem Gebiet sind. Es ist z. B. ein Erfolgserlebnis, wenn ein Nutzer eines Taschenrechners ein Programm aufstellt, das zwar funktionsfähig ist, jedoch 47 Schritte (Befehle) enthält, und wenn beim Durchdenken eine Kürzung auf 29 Schritte erreicht wird. Mit diesen 29 Schritten ist das Programm gleichermaßen funktionsfähig, jedoch wird Rechenzeit eingespart. Der erreichte Erfolg spornt an. Auch die gegenseitige Beratung und vielleicht auch die Programmierung des gleichen Problems durch zwei oder mehr Personen, zur Feststellung, welches Programm am effektivsten ist, lohnt. Eine Maßzahl des Niveaus des aufgestellten Programms ist die Anzahl der erforderlichen Schritte, wobei das effektivste Programm die beste Lösung ist.

Es werden nur zwei einfache Beispiele erläutert, um die Grundkenntnisse zu zeigen, die zum Aufstellen der Programmablaufpläne erforderlich sind. Die Programmablaufpläne werden dabei nicht speziell für einen Taschenrechner aufgestellt. Das Ziel besteht vielmehr darin, das Prinzipielle zu vermitteln.

### Beispiel 1

Es ist ein Programmablaufplan für die Lösung einer Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten (quadratische Gleichung) aufzustellen. Die beiden Lösungen  $p_1$  und  $p_2$  sind zu ermitteln!

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a \neq 0,$$
$$b \neq 0,$$
$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad c \neq 0.$$

Diese Formeln sehen recht einfach aus, da nur die Werte für  $a$ ,  $b$ , und  $c$  eingesetzt zu werden brauchen. Das Radizieren wird jedoch problematisch, wenn  $b^2 - 4ac < 0$  ist. In diesem Fall wird keine Lösung erreicht, der Taschenrechner zeigt an, daß ein Fehler entstanden ist. Aus diesem Grund verwenden wir einen etwas anderen Algorithmus. Wenn der Radikand negativ ist, multiplizieren wir diesen mit  $-1$  und rechnen weiter. Wir wollen annehmen, daß die Werte

Tafel 7.1.  
 Programm und Speicherplatzbelegung zur Berechnung der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades

Schritte	X	Y	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
								a	b	c	
START											
MR 7	b							a	b	c	
÷	b	b						a	b	c	
MR 6	a	b						a	b	c	
=	b/a							a	b	c	
÷	b/a	b/a						a	b	c	
2	2	b/a						a	b	c	
=	b/2a							a	b	c	
CHS	-b/2a							a	b	c	
M: 4	-b/2a					-b/2a		a	b	c	
X <sup>2</sup>	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>					-b/2a		a	b	c	
M: 5	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>					-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
MR 8	c	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>				-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
+	c	c				-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
MR 6	a	c				-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
=	c/a					-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
CHS	-c/a					-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
+	-c/a	-c/a				-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
MR 5	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	-c/a				-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
=	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup> - (c/a)					-b/2a	b <sup>2</sup> /4a <sup>2</sup>	a	b	c	
M: 5	g					-b/2a	g	a	b	c	
IF <sub>x</sub> < M5	g					-b/2a	g	a	b	c	
GOTO LABEL A	g					-b/2a	g	a	b	c	
√	√g					-b/2a	g	a	b	c	



für  $a$ ,  $b$  und  $c$  in die Speicherplätze M6, M7 und M8 bereits vor dem Programmablauf eingeschrieben wurden. Weiter nehmen wir an, daß die beiden Lösungen, sofern sie reell sind, in die Speicherplätze M1 und M2 eingeschrieben werden. Liegen zwei konjugiert komplexe Lösungen vor, so wird der reelle Teil in den Speicherplatz M2, der imaginäre Teil in den Speicherplatz M3 eingeschrieben. Nach Ablauf des Programms müssen also die drei Speicherplätze M1, M2 und M3 auf ihren Inhalt hin untersucht werden. Bei dieser Untersuchung ist leicht festzustellen, ob zwei reelle oder zwei konjugiert komplexe Lösungen vorliegen. Im ersten Fall ist in M3 der Inhalt 0, im letzteren Fall in M1. Die Verzweigung erfolgt durch den Vergleich der Inhalte des X-Registers und des Speicherplatzes M5. Die Speicherplätze M4 und M5 verwenden wir als Arbeitsspeicher, um Teilergebnisse abzuspeichern. Der hier erläuterte Programmablaufplan ist im Bild 7.3 enthalten. In der Tafel 7.1 kann der Ablauf des Programms verfolgt werden. Dort ist auch die Speicherbelegungstabelle aufgeführt.

Wir stellen fest, daß zu einer relativ einfach erscheinenden Aufgabe die Aufstellung des Programmablaufplans für einen Anfänger eine durchaus schwierige Arbeit ist. Diese Arbeit lohnt sich aber, wenn das Programm nach der Aufstellung häufig benutzt wird, da dann der spezifische Aufstellungsaufwand von Programmablaufplan und Programm geringer wird, wobei wir dies auf die Einzelberechnungen beziehen.

**Beispiel 2**

Es ist ein Programmablaufplan aufzustellen, um  $n!$  (Fakultät) zu ermitteln.  $n$  ist als positive ganze Zahl über die Tastatur einzugeben, das Ergebnis soll im Anzeigeregister dargestellt werden. Zur Lösung der Aufgabe ist im Programmablaufplan eine Schleife aufzubauen (s. Bild 7.4). Bei jedem Durchlauf der Schleife wird mit einem neuen Wert multipliziert. Aus der Schleife springen

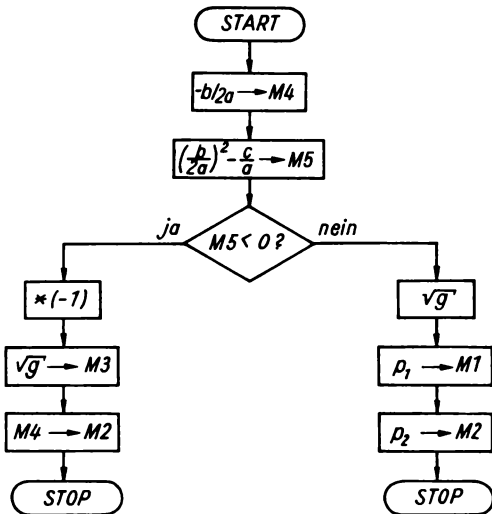


Bild 7.3. Programmablaufplan zur Bestimmung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung

wir unter Verwendung eines bedingten Sprungs heraus, wenn die letzte notwendige Multiplikation (mit  $n$ ) erfolgt ist.

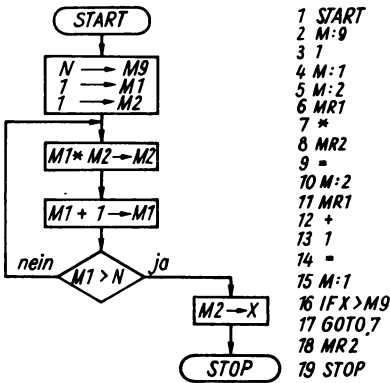


Bild 7.4. Programmablaufplan und Programm zur Berechnung von Fakultäten

### 7.3. Programmpakete

Die Hersteller von programmierbaren Taschenrechnern liefern sehr häufig gleich verschiedene Programme auf Magnetkarten, sog. **Programmpakete**, mit. Diese umfassen wissenschaftliche Programme oder Programme für verschiedene Fachgebiete, also Programme, die vom Nutzer sehr häufig benötigt werden. Damit sich die Leser ein Bild von den Programmpaketen machen können, erfolgen einige Bemerkungen zu deren Inhalten.

#### Statistische Programme

Allgemeine statistische Berechnungen, Reihenauswertungen, Permutationen, Kombinationen, Mittelwerte, Momente, Zufallszahlen, Normalverteilung, Chi-Quadrat-Verteilung, t- und F-Verteilung, Binomial- und Poissonverteilung, Kurvenanpassung, Korrelationsuntersuchungen.

#### Mathematische Programme

Fakultätsberechnung, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, arithmetische und geometrische Reihen, Polynome, lineare Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten, Koordinatentransformation, Nullstellenbestimmung, Zahlenkonvertierung, Algebra komplexer Zahlen, hyperbolische Funktionen, Vektormultiplikationen, Integralformeln, Besselfunktion, verschiedene spezielle Polynome.

#### Medizinische Programme

Maßeinheitenumrechnungen, Vitalkapazitätsberechnungen, Ermittlung des partiellen arteriellen CO<sub>2</sub>-Drucks, Blutuntersuchungsberechnungen, Auswertung physiologischer Reaktionen, Auswertung kardiologischer Signale, Berechnung von Kontraktionen, Herzfunktionsberechnungen, Berechnung des Sauerstoffgehalts der Atemluft.

## **Elektrotechnische Programme**

Transformation von Sternschaltungen in Dreieckschaltungen, Planung aktiver Netzwerke, Berechnung von Resonanzkreisen, Berechnung von Induktivitäten und Kapazitäten, Transformatorberechnungen, Skineneffekt, Vorspannung und Arbeitspunkteinstellung, Berechnung von Fourierkomponenten.

Die Programmpakete enthalten in der Regel noch mehr Programme als hier angegeben. Für den Nutzer sind die Programmpakete sehr vorteilhaft, weil damit die **Programmbibliothek** ohne große Eigenprogrammierung weiter ausgebaut werden kann. Lohnend ist es, wenn Nutzer ein Problem selbst programmieren und dann mit dem zur Aufgabe passenden Programm des Programmpakets vergleichen. Die daraus entstehende Aussage dürfte für den Nutzer sehr wichtig sein, da er das Niveau seiner eigenen Programmierung bewerten kann. Zweckmäßig ist es auch, wenn durch die Nutzer eigene Programmpakete als Bestandteil der Programmbibliothek geschrieben und abgespeichert werden. Der Austausch von eigenen Programmen und Programmpaketen zwischen verschiedenen Nutzern des gleichen Taschenrechnerstyps ist zu empfehlen und läßt in kurzer Zeit die Programmbibliothekserweiterung zu.

Programmpakete müssen nicht unbedingt auf Magnetkarten oder Magnetbändern vom Hersteller mitgeliefert sein. Es reicht schon aus, wenn die Programme gedruckt vorliegen. In diesem Fall braucht der Nutzer das ausgewählte Programm nur noch einzutasten, er kann auf die Erarbeitung eines Programmablaufplans und die Aufstellung des Programms verzichten.

---

## 8. Wartung, Reparatur, technische Ergänzungen

---

### 8.1. Wartung

Für Taschenrechner ist keine besondere Wartung erforderlich. Die Lebensdauer sowie die Sicherheit der Wirkungsweise des Taschenrechners können aber unter Beachtung der folgenden Hinweise erhöht werden.

- Der Taschenrechner sollte nicht der direkten Sonnenbestrahlung oder direkten Hitze von Ofen oder von Zentralheizung ausgesetzt werden. Besonders das dunkle Gehäuse kann sich sehr stark erwärmen, wobei die elektronischen Teile (insbesondere die Schaltkreise) bis zur Wirkungslosigkeit leiden können. Wenn sich der Taschenrechner warm anfühlt, sollte er nicht eingeschaltet werden, sondern erst abkühlen.
- Der Taschenrechner ist vor Staub- und Schmutzeinflüssen zu schützen. Durch die kleinen Öffnungen können kleine Staubteile in das Innere des Taschenrechners eintreten und eine Gefahr für die sichere Wirksamkeit der Kontakte darstellen.
- Der Taschenrechner ist vor Flüssigkeiten und hoher Luftfeuchtigkeit zu schützen. Meist sind Taschenrechner nicht wasserdicht, deshalb können Regen, Bier, Kaffee, Milch u. a. erheblichen Schaden anrichten.
- Plötzliche Stöße sind für den Taschenrechner schädlich. Das bezieht sich ganz besonders auf die Ziffernanzeige. Wenn der Taschenrechner vom Tisch fällt, kann mit der Zerstörung gerechnet werden.
- Der Druck auf die Tasten ist in Grenzen zu halten, um keine Deformationen oder Zerstörungen zu verursachen. Drücke an anderen Stellen des Taschenrechners sind zu vermeiden. Liegen auf den Tasten Bücher oder andere Gegenstände, so sind wahrscheinlich alle Tasten gedrückt, und die Kontakte verlieren dadurch mit der Zeit an Elastizität. Unsichere Kontakte ergeben aber eine unsichere Wirksamkeit des gesamten Taschenrechners.
- Wird der Taschenrechner über längere Zeit hinweg außer Betrieb gesetzt, so sind die Batterien zu entfernen. Durch ein mögliches Auslaufen der Batterien entstehen Schäden, die nur mit großem Zeit- und Kostenaufwand beseitigt werden können.

Für den Betrieb mit Batterien sind einige Hinweise angebracht. Die aufgeführten Maßnahmen sind unkompliziert und helfen, die Sicherheit des Taschenrechners zu erhöhen. Sehr wichtig ist es, die Batterien in bestimmten Zeitabständen auszuwechseln, da Spannungsabfälle der Batterien zu Unsicherheiten bei der Rechnungsausführung führen.

Taschenrechner arbeiten mit Spannungen von 3 bis 9 Volt (V). Die Einhaltung

der jeweils vorgeschriebenen Betriebsspannung ist sehr wichtig. Meist sind auf dem Plastgehäuse der Taschenrechner symbolische Anzeigen über die notwendige Spannung vorhanden. Oft liegen auch Angaben über die Art der zu verwendenden Batterien vor, dabei ist die Bedienungsanleitung zu beachten. Falls doch einmal diese Angaben fehlen, ist Vorsicht geboten. Es empfiehlt sich in diesem Fall, die vom Hersteller oder vom Verkäufer eingesetzten Batterien auf Spannungswert und Batterieart hin zu untersuchen. Sollte auch das nicht möglich sein, dann ist von einem Fachmann die Betriebsspannung bestimmen zu lassen. Hüten Sie sich vor unsachgemäßen Untersuchungen, dadurch können Sie den gesamten Taschenrechner funktionsunfähig machen.

Die Stromaufnahme beträgt allgemein 100 bis 200 Milliampere (mA) während der Tätigkeit des Taschenrechners. Diese Werte können sehr streuen, wie das bereits bei der Erläuterung der Ziffernanzeige erklärt wurde. Es bestehen gewisse Wechselwirkungen zwischen der Stromaufnahme und der möglichen Betriebsstundenzahl mit Batterien. Drei Trockenbatterien (Mignonzellen je 1,5 Volt) haben ungefähr 4 bis 6 Stunden und eine Taschenlampenbatterie (4,5 Volt) ungefähr 8 bis 12 Stunden Betriebsdauer. Diese Angaben gelten für den Betrieb des Taschenrechners hintereinander, also ohne längere Ausschaltphasen. Die wirkliche Anzahl der Betriebsstunden, die die Batterien ermöglichen, hängt von einer Reihe von Faktoren ab. So ist beispielsweise der Herstellungstermin der Batterien wichtig, da durch die Lagerung eine Teilentladung der Batterien eintritt (3 bis 6 Monate alte Batterien verlieren ungefähr 25% ihrer Wirksamkeit).

Die Stromaufnahme des Taschenrechners ändert sich ständig, insbesondere die Ziffernanzeige hat eine hohe Stromaufnahme. Eine Verdopplung der Betriebsstunden ist möglich, wenn nach der Anzeige von Teil- oder Endergebnissen der Taschenrechner solange ausgeschaltet wird, bis weitergerechnet wird, oder wenn die Anzeige sich auf 1 bis 2 Ziffern beschränkt.

### **Wann sind Batterien auszuwechseln?**

- Wenn nach dem Einschalten des Taschenrechners nicht der gewohnte Anzeigergrundzustand vorhanden ist oder
- wenn während der Anzeige die Ziffern flimmern oder
- wenn eine 8 angezeigt wird und die Leuchtkraft allmählich nachläßt oder
- wenn eine besondere Anzeige aufleuchtet, die die Notwendigkeit des Batteriewechsels signalisiert.

### **Was ist beim Batteriewechsel zu beachten?**

- Der Taschenrechner muß während des Batteriewechsels ausgeschaltet sein.
- Die im Batteriefach angegebene Polarisierung muß genau eingehalten werden. Erfolgt dies nicht, treten Defekte auf.
- Wenn mehrere Batterien einzulegen sind, dann ist nach dem Einlegen die Polarisierung zu kontrollieren, bevor der Taschenrechner eingeschaltet wird.
- Alle Batterien sollten gleichzeitig gewechselt werden. Es wird am falschen Fleck gepart, wenn das Wechseln einzelner Batterien erfolgt.

Falls einmal die Batterien gerade in dem Augenblick aussetzen, wenn man keine Ersatzbatterien zur Hand hat und noch einige dringliche Rechnungen durch-

führen will, kann man folgendes probieren: Die Batterien werden herausgenommen und auf den Ofen oder die Zentralheizung gelegt. Ein gründliches Durchwärmen auf 40 bis 45 °C hilft vielleicht. Beim Wiedereinlegen ist festzustellen, daß unser Taschenrechner weiterhin für eine kurze Zeit betriebsbereit ist. Die Lebensdauer der Batterien kann mit diesem Verfahren um 5 bis 15 Minuten erhöht werden. Das Verfahren wird natürlich versagen, wenn dieser Trick mehrmals durchgeführt wird.

Manche Taschenrechner haben **Netzadapter**. Die Adapter ermöglichen einen Energiebezug aus der Steckdose. Taschenrechner, die mit Batterien arbeiten, haben stündliche Betriebskosten von ungefähr 0,20 bis 0,50 Mark. Bei Anwendung eines Adapters sind die Betriebskosten weit geringer als 1 Pfennig je Stunde. Neben der ökonomischen Seite besteht der Vorteil auch darin, daß bei Verwendung eines Adapters keine Wartung der Batterien erforderlich ist und Spannungsabfälle nicht vorkommen. Allerdings kostet ein solcher Adapter einen nennenswerten Betrag. Man kann mit einer kleinen Rechnung leicht ermitteln, nach welcher Betriebsstundenzahl ein Adapter rentabler als Batteriebetrieb ist.

Auch mit einem aufladbaren **Akkumulator** (insbesondere Nickel-Kadmium-Zellen) und mit einem **Ladegerät** sind viele Taschenrechner ausgerüstet. Bei der Verwendung von Akkumulator und Ladegerät ist das Studium der Bedienungsanleitung unabdingbar. Akkumulatoren entladen sich während der Arbeit des Taschenrechners. Deshalb sind die Festlegungen zum Ladevorgang, zu den Ladezeitpunkten und den Ladezeiten zu beachten. Während des Aufladevorgangs kann i. allg. mit dem Taschenrechner gerechnet werden. Besonders gute Taschenrechner, die mit Akkumulator und Ladegerät ausgerüstet sind, verfügen über Laderegler, die ein Überladen des Akkumulators ausschließen. Zu beachten ist weiter, daß vor Inbetriebnahme jeweils erst der Adapter mit dem Taschenrechner verbunden wird, dann eine Verbindung des Adapters mit dem Netz und erst dann das Einschalten des Taschenrechners erfolgt.

## 8.2. Reparatur

Bei Taschenrechnern bestehen weniger Reparaturmöglichkeiten, als das bei anderen elektronischen Konsumgütern der Fall ist. Insbesondere Defekte an den Schaltkreisen sind nichttrivialer Art. Defekte Schaltkreise können prinzipiell nicht repariert werden. Betriebsfremdes Reparaturpersonal verfügt auch nicht über die erforderlichen Schaltpläne der Taschenrechner. Bei notwendigen Reparaturen sind deshalb die zuständigen Reparaturstellen oder Vertragswerkstätten zu befragen.

Elektronikamateure, Techniker oder ähnliche Personen können natürlich bei Vorhandensein entsprechender Werkzeuge und Meßgeräte eine geringe Anzahl von Fehlern beheben. Behebbarer Fehler, die oft auftreten können, sind:

1. Fehler an der Tastatur, die ggf. schon mit entsprechenden feinmechanischen Werkzeugen und dem erforderlichen Geschick behoben werden können. Oft passiert es, daß beim Druck auf eine Taste gleich mehrere Ziffern auf der Anzeige erscheinen (vornehmlich gleiche Ziffern). Ursache ist das sog. *Weglaufen* der Tasten. Tasten, elastische Kontaktblättchen und deren Kontaktpunkte sind hier zu untersuchen. Der Schaden kann i. allg. behoben werden.

Sind zur Fehlerbeseitigung Kunststoffteile leicht zu verformen, so kann dieses unter Wärmeeinwirkung mit einem Haarfön oder LötKolben (Vorsicht!) erfolgen.

- In vielen Fällen können Fehler an den Verbindungsstellen entstehen. Mit etwas Geschick und Glück lassen sich vorhandene Fehler eingrenzen und diagnostizieren. Fehlerstellen sind dabei oft: Akkumulator, Batterien und deren Kontakte, Ein- und Ausschalter, Verbindungen zwischen den Schaltkreisen und den übrigen elektronischen Teilen, insbesondere die zur Anzeige führen. Mit dem LötKolben ist vorsichtig umzugehen, da mögliche Überhitzungen benachbarter Teile bis zur Zerstörung führen können. Die Überhitzung kann direkt vom LötKolben ausgehen oder sich über die erhitzten Lötstellen fortpflanzen. Reparaturen am Adapter sind nur vom Fachmann ausführen zu lassen, da bei Geräten mit 220-V-Netzspannung besondere Sicherheitsbestimmungen zu beachten sind.

### 8.3. Technische Ergänzungen

Es gibt Personen, die das Basteln als großes Hobby ansehen. Das gilt natürlich auch für Taschenrechnerbasteleien. Nach dem Erscheinen der ersten Taschenrechner entwickelten Bastler entsprechende Ideen zu technischen Veränderungen und Ergänzungen an den Taschenrechnern. Teilweise wurden sehr interessante Lösungen erreicht. Zu diesen Lösungen erfolgen nun einige Ausführungen, um gesammelte Erfahrungen zu vermitteln.

#### 8.3.1. Anfertigung eines Adapters

Netzteile verschiedener elektronischer Geräte sind auch als Adapter für Taschenrechner zu verwenden. Es muß jedoch darauf geachtet werden, daß die für den Taschenrechner notwendige Spannung genau eingehalten wird. Außerdem sind die notwendigen Sicherheitsbestimmungen zu beachten. Im Bild 8.1 sind Schaltungen für ein nichtstabilisiertes und ein stabilisiertes Netzteil enthalten. Zur Auswahl der notwendigen Bauelemente sind die geforderten Taschenrechnerdaten zu verwenden. Außerdem sind zur Anfertigung eines Netzteils spezielle Kenntnisse der Elektrotechnik/Elektronik erforderlich. Auch kann versucht wer-

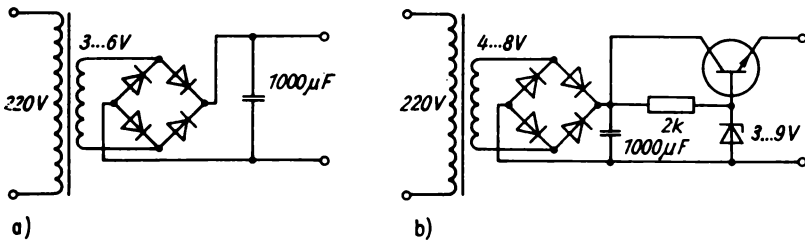


Bild 8.1. Adapter für Taschenrechner

- nichtstabilisiertes Netzteil
- stabilisiertes Netzteil

den, das Netzteil eines Rundfunkgeräts oder eines Tonbandgeräts so umzubauen, daß es als Adapter für den Taschenrechner verwendbar ist. Für einen erfahrenen Bastler wird dieser Umbau unkompliziert sein. Laien sollten sich aber nicht daran versuchen, sonst kann neben dem vorgesehenen Adapter auch der vielleicht neugekaufte Taschenrechner völlig funktionsuntüchtig werden.

### 8.3.2. Anfertigung eines Zählers

Bei vielen Taschenrechnern sind Wiederholungen von Operationen durch Druck der Taste = möglich. So können wir z. B. in der Ziffernanzeige jeweils durch Druck der Taste = die Ziffer 1 addieren. Damit haben wir eine Kontrolle, wie viele Male die Taste = gedrückt wurde.

Die Operationsgeschwindigkeit der Taschenrechner (wenn dabei keine Tastendrucke erfolgen) beträgt 5 bis 15 Operationen je Sekunde. Selbstverständlich kann diese Operationsgeschwindigkeit nicht erreicht werden, wenn mit der Hand jede einzelne Operation ausgelöst wird. Ausgehend von dieser Feststellung wurde nach einem Kompromiß gesucht: Wir führen beide Leitungen, die von der Taste = zum Schaltkreis führen (s. Seite 126), aus dem Taschenrechner heraus. Damit können wir auf das Drücken der Taste = verzichten und dies funktionell von außen erreichen, indem beide Leitungen entsprechend kurzgeschlossen werden. Mit dieser Lösung sind vielseitige Anwendungen möglich. Durch mechanisches oder elektrisches Kurzschließen der herausgeführten Leitungen können wir nun im Taschenrechner die Anzahl der Kurzschlüsse zählen. (Das Herausführen der Leitungen ist ungefährlich, trotzdem ist der Umbau nur einem versierten Bastler und nur bei einem einfachen und billigen Taschenrechner zu empfehlen, da die Gefahr von auftretenden Schäden doch nennenswert ist. Sämtliche Umbauten, auch bei einfachsten Taschenrechnern, führen natürlich sofort zum Verlust der Garantie, auch das sollte beachtet werden.)

Die herausgeführten Leitungen können mit einer Signalanlage, ggf. eine optische Einrichtung, verbunden werden. Dabei kann man diese separate Einrichtung vom Taschenrechnerschaltkreis potentialunabhängig gestalten. Sehen Sie sich dazu Bild 8.2 an. Natürlich ist auch ein Mikroschalter verwendbar.

Der Taschenrechner läßt sich nach diesen Veränderungen wie folgt verwenden:

- Zusammenschaltung lichtempfindlicher Bauelemente oder anderer Detektorelemente für *Ereigniszählungen* (wieviel Personen öffnen eine Tür, wieviel Arbeitsgegenstände sind durchgelaufen usw.).
- Verbindung mit einem einfachen Taktgenerator zur Bildung eines *Zeitmessers* (Stoppuhr). Wenn die Frequenz des Taktgenerators 1 Hz beträgt, dann erhalten wir eine 1-Sekunden-Genauigkeit, bei 10 Hz 0,1-Sekunden-Genauigkeit. In Abhängigkeit von der Frequenz gibt es eine breite Palette von Taktgeneratoren. Angaben darüber sind der elektronischen Fachliteratur oder der Hobbyliteratur zu entnehmen.

Der Leuchtzustand der Ziffernanzeige kann mit einem lichtempfindlichen Bauelement (z. B. Fotodiode oder Fototransistor) festgestellt werden. Das entsprechende Signal wird verstärkt und einem Kopfhörer oder einem Lautsprecher zugeführt (s. Bild 8.3).

Komplizierte Schaltungen entstehen, wenn Fotodioden oder Fototransistoren für mehrere Stellen der Ziffernanzeige verwendet werden. Bereits bei Verwendung einer Fotodiode oder eines Fototransistors können Grenzwertsignalanlagen aufgebaut werden: Wir geben über die Tastatur Werte einer Meßreihe ein. Mit diesen Werten können Berechnungen erfolgen. Die Ergebnisse werden in der Ziffernanzeige dargestellt. Besteht nun der Grenzwert darin, daß das Ergebnis z. B. unter 100 sein muß, dann verbinden wir das lichtempfindliche Bauelement mit der Hunderterstelle der Ziffernanzeige. Ist der berechnete Wert unter 100, dann erhält unsere Kontrolleinrichtung das Signal 0, wird die 100 erreicht oder überschritten, wird 1 gemeldet. Dies kann zur optischen oder akustischen Meldung führen. Selbstverständlich können Grenzwertmeldungen durch alle Stellen der Ziffernanzeige erfolgen, je nachdem, welche Stelle wir auswählen.

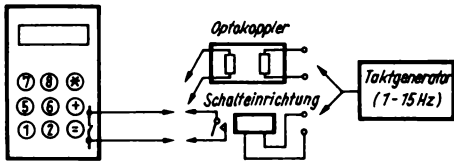


Bild 8.2. An einen Taschenrechner anschließbare Schaltung

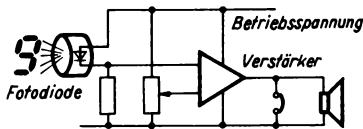


Bild 8.3. Verbindungsschema zwischen einer leuchtenden Ziffer und einem Lautsprecher

Die Möglichkeiten der externen Anzeige mit verschiedenen technischen Ergänzungen führen zu interessanten Aufgaben bzw. deren Lösungen. Dabei müssen natürlich die entstehenden Kosten ins Verhältnis zum Nutzen gesetzt werden.

Der Sinn solcher technischen Ergänzungen besteht einerseits darin, das Leistungsvermögen des Taschenrechners zu erhöhen, andererseits kann der Bastler seinen Taschenrechner wesentlich besser kennenlernen.

---

## 9. Spiele und Aufgaben

---

Die hier erläuterten Spiele dienen der sinnvollen Freizeitgestaltung. Einige Spiele sind auf den vier Grundrechenarten aufgebaut, andere sind so gestaltet, daß sie Patienzen oder Gesellschaftsspielen gleichkommen. Das Spiel über die Füchse und Hasen hat einen tieferen mathematischen Hintergrund, da Ähnlichkeiten zu Stimulationsaufgaben bestehen. Beim Spiel selbst ist dies natürlich nur im weiteren Sinne erkennbar.

Die bei den einzelnen Aufgaben vorhandenen Problemstellungen sollen dazu führen, daß die Taschenrechnernutzer sich in der Tätigkeit mit dem Taschenrechner üben und damit bei echten mathematischen Aufgaben schneller zum Ziel kommen. Außerdem wird durch diese Art von Übung erreicht, daß sich die Nutzer Gedanken über das *Wie* der Lösungen machen. Bei den folgenden Aufgaben werden die Lösungen erklärt, um die genannten Effekte zu erreichen. Die Aufgabenreihenfolge entspricht nicht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben. Ob die Aufgaben leicht oder schwer sind, soll hier nicht eingeschätzt werden, weil diese Begriffe relativ sind und vom Wissens- und Fertigungsstand der Nutzer abhängen.

### Unsere Lesern empfehlen wir

1. Der Abschnitt sollte nicht nur gelesen, sondern unter Verwendung eines Taschenrechners erprobt werden, bis die Problemstellungen und die Algorithmen verstanden wurden. Wenn ein Spiel für den einen oder anderen Leser zu uninteressant ist (oder ein Leser versteht einzelne Aufgaben trotz Versuche nicht), dann sollte zur nächsten Aufgabe übergegangen werden.
2. Wenn ein großer Teil oder alle Aufgaben erprobt und verstanden wurden, dann empfehlen wir den Lesern, einige Bücher der unterhaltsamen logischen und arithmetischen Mathematik (s. Literaturverzeichnis) in die Hand zu nehmen und zu versuchen, die Aufgaben mit dem Taschenrechner selbständig zu lösen. Es werden sich bestimmte Erfolge einstellen. Aber auch eine andere Feststellung werden die Leser dann treffen: Das Finden eines zweckmäßigen Algorithmus bei Verwendung eines Taschenrechners erfordert doch einige Überlegungen und wird vielleicht auch zu falschen Wegen führen, bis das Ziel endlich erreicht wird. Dadurch wird sich jedoch die Verbindung zu mathematischen Aufgaben mit dem Taschenrechner festigen.

## 9.1. Spiele

### 9.1.1. Wörter

Taschenrechner sind für Rechnungen mit Zahlen bestimmt. Universelle Rechenautomaten können über Zahlenrechnen hinaus u. a. auch Texte auf Druckern ausdrucken oder auf Bildschirmgeräten sichtbar machen. Wenn wir mit einem Taschenrechner auch Buchstaben oder Wörter darstellen wollen, so können wir dies mit einem kleinen Trick verwirklichen.

Rechnen Sie aus:

$$16^2 + 1141^2 + 6000^2 - 3 = 37302134.$$

Nun drehen wir den Taschenrechner um  $180^\circ$ , so daß die Anzeige auf dem Kopf steht. Wenn wir jetzt ablesen, stellen wir fest, daß ein Wort entstanden ist:

hEIZOELE.

Wir erkennen, daß einige Ziffern, wenn sie auf dem Kopf stehen, als Buchstaben gelesen werden können. Im Bild 9.1 sind diese Ziffern dargestellt. Relativ leicht erkennbar sind die Buchstaben O, L, S, Z, I und E. Der Buchstabe h ist nur klein geschrieben darstellbar, das reicht aber aus. Im Prinzip sind auch die Buchstaben B und G vorhanden, diese können jedoch nur im Zusammenhang mit anderen Buchstaben leicht gelesen werden. Umlaute sind mit unserem Buchstabenvorrat nicht darstellbar. Aus den genannten acht Buchstaben lassen sich viele Wörter herstellen:

LIEGE,	LIEBLOS,	OLEG,	ZEISS,
ZIEL,	HEBEL,	HEISS,	GEIZ,
ZOLL,	HOSE,	BELIEBIG,	BILLIG.

Das Bilden von Wörtern kann als Gesellschaftsspiel aufgefaßt werden, indem in einer vorgegebenen Zeit die Anzahl der gebildeten Wörter gezählt wird.



Bild 9.1. Umgekehrte Ziffern, die als Buchstaben erkannt werden können

Das Herstellen der Wörter muß aber mit dem Taschenrechner erfolgen, denn das Aufschreiben der Wörter auf ein Stück Papier wäre zu einfach, da nur die genannten acht Buchstaben zusammengesetzt zu werden brauchen. Mit dem Taschenrechner kann ein kleines Rechenprogramm ablaufen, wenn das einfache Eintasten der Ziffern, die den Buchstaben entsprechen, nicht genehmigt wird. Solche Rechenaufgaben sind:

- Das Alter eines Mitspielers wird eingetastet ( $x$  soll dabei zweistellig sein),
- es wird  $(x^2 - 1)$  berechnet,
- anschließend erfolgt die Division durch  $(x - 1)$ ,
- danach multiplizieren wir mit 38317,

- Division durch  $(x + 1)$ ,
- das Ergebnis kann abgelesen werden, indem die Anzeige auf den Kopf gestellt wird (Ablesen des entstandenen Wortes).

### 9.1.2. Entweder — Oder

Von einem französischen Spielkartensatz werden die Joker herausgenommen [7]. Nach dem Mischen der Karten werden zehn Karten verdeckt auf den Tisch gelegt, wie aus Bild 9.2 zu erkennen ist. Die Lage jeder dieser Karten entspricht einer bestimmten Taste (0 ... 9). Das Spiel besteht aus zehn auszuführenden Schritten. Bei jedem Schritt wird entweder eine Karte oder eine Taste ausgewählt. Wird die Karte ausgewählt, dann kann sie aufgedeckt werden und der darauf enthaltene Wert wird verwendet. Entscheidet sich aber der Spieler für die Taste, so liegt der Wert der Taste mit seiner Wahl bereits fest. Ein kleiner Hinweis für Sie: Bei der Taste 0 ist es offensichtlich besser, die Karte umzudrehen, während es bei der Taste 9 nicht klar ist, ob wir aus der umgedrehten Karte mehr Punkte als die 9 der Taste erhalten können.

Die bei jedem Schritt erreichten Punkte werden addiert. Gewinner ist derjenige, der nach den 10 Schritten das höchste Punktergebnis erreicht hat.

50 Punkte stellen bereits ein gutes Ergebnis dar,

70 Punkte sind ausgezeichnet.

Das Spiel kann allein ausgeführt werden, es können sich auch mehrere Spieler (mit einem Taschenrechner oder jeder hat seinen eigenen Taschenrechner) beteiligen.

Ein ähnliches Spiel ist mit zwei Spielern möglich. Einer wählt bei jedem Schritt zwischen Karte oder Taste, der andere muß nehmen, was der erste Spieler nicht gewählt hat. Wählt also ein Spieler die Karte, gilt für ihn der Kartenwert, der andere Spieler muß dann automatisch den Tastenwert notieren. Das nächste Spiel erfolgt dann umgekehrt, um gleiche Chancen des Gewinnens zu ermöglichen. Nach einer vorher ausgemachten Anzahl von Spielen wird erst der Gewinner festgestellt. Die Anzahl muß aber gerade sein. Das laufende Addieren der erreichten Werte kann gleich mit dem Taschenrechner erfolgen. Hat jeder Spieler seinen eignen Taschenrechner, so ist die laufende Addition leicht auszuführen und ermöglicht ständig einen Überblick. Wird nur ein Taschenrechner für die Addition benutzt, so ist das auch möglich, indem die achtstellige Anzeige genutzt wird. Ein Spieler nutzt die rechte Hälfte, der andere die linke Hälfte der

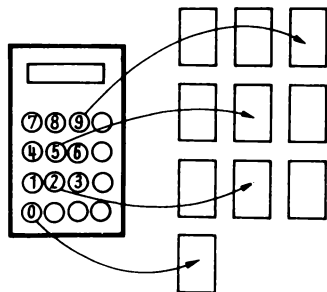


Bild 9.2. Spielkarten und Zuordnung der Tasten

Anzeige. Wenn z. B. die Punktergebnisse beim ersten Spiel im ersten Schritt 9 (Spieler A) und 8 (Spieler B), im zweiten Schritt 7 und 2 sind, so erhalten wir auf der Anzeige:

erster Schritt: 9000008  
zweiter Schritt 7000002  
Ergebnis: 16000010.

Die Gesamtpunktzahl ist stets ablesbar. Sie sehen an unserem Beispiel, daß sogar ein dritter Spieler seine Ergebnisse mit darstellen kann.

### 9.1.3. Ausgeben von Karten und Zahlen . . .

Wir nehmen wiederum einen französischen Spielkartensatz, von dem wir die Joker und Bilder entfernen. Nach dem Mischen werden drei Kartenstöße mit je sieben Karten gebildet. Die restlichen Karten werden später verwendet. Je Stoß wird nun die obere Karte aufgedeckt. Die abgelesenen Zahlenwerte werden mit dem Taschenrechner multipliziert (z. B.  $3 \cdot 10 \cdot 9 = 270$ ). Nun werden von den Restkarten zwei aufgedeckt. Es wird versucht, die Zahl 270 durch den Wert der einen Karte, dann durch den Wert der anderen Karte zu dividieren. Gewünscht wird als Quotient in beiden Fällen eine positive ganze Zahl.

#### Beispiel

Sind auf beiden gezogenen Karten die Werte 6 und 7 enthalten, dann gilt  
 $270:6 = 45$ ;       $270:7 = 38,57$ .

Mit den gezogenen Karten waren wir nicht erfolgreich, es werden zwei neue Karten gezogen und 270 wird erneut als Dividend verwendet. Sind bei beiden Karten jedoch als Quotienten positive ganze Zahlen entstanden, dann werden die drei aufgedeckten Karten und die beiden gezogenen Karten abgelegt.

#### Beispiel

Die gezogenen Karten sind 2 und 6, dann erhalten wir:  
 $270:2 = 135$ ;       $270:6 = 45$ .

Abgelegt werden also die Karten mit den Werten 3, 10, 9, 2 und 6. Von den drei Stößen werden drei neue Karten aufgedeckt, das Spiel geht weiter. Die Patience geht nicht auf, wenn nicht solche Karten aus dem Reststoß gefunden werden, die die Division nach der angegebenen Regel ermöglichen.

### 9.1.4. Suchen von Wegen

Sehen Sie sich für dieses Spiel Bild 9.3 an [7]. Das Spiel beginnt am START, und das Ziel ist auf dem kürzesten Wege zu erreichen. Bei jedem Knoten können wir entscheiden, welchen Weg wir gehen wollen. Das Ziel ist auf verschiedenen Wegen erreichbar. Jede Strecke zwischen den Knoten darf nur einmal besritten werden. Laufend werden die angegebenen Entfernungen zwischen den Knoten (auf dem besrittenen Weg) multipliziert. Ziel ist es, den gesamten Weg mit einem Minimalergebnis (Produkt der Teilstrecken) zurückzulegen.

Falls nach mehrfachem Spiel der Algorithmus so verstanden wurde, daß stets ein Minimalergebnis erreicht wird, kann man sich ein Schema mit neuen Entfernungen zwischen den Knoten aufstellen, und das schwierige Problem beginnt von neuem. Der Taschenrechner ist bei diesem Spiel ein wertvoller Helfer.



Der Dezimalpunkt darf bei diesem Spiel nicht verwendet werden. Brüche dürfen weder auftreten noch benutzt werden. Probieren Sie dieses Spiel! Sie werden sich schon freuen können, wenn Sie die Null nach fünf oder sechs Schritten erreichen. Nach einiger Übung und besonders viel Überlegungen läßt sich das Verfahren dann auch auf vier Schritte reduzieren. Lohnend ist es, wenn Sie sich gründlich mit den mathematischen Zusammenhängen beschäftigen und eine Formel aufstellen, um dann doch einfacher das Ziel der Null in vier Schritten zu erreichen.

### 9.1.7. 1980

Bei diesem Spiel benötigen wir neben dem Taschenrechner auch zwei Würfel. Nach dem Würfeln entscheiden wir uns, indem eine Ziffer als Operand und die andere Ziffer als Operation benutzt wird. Für die Operation gilt:

- 1 und 6: Addition,
- 2 und 5: Multiplikation,
- 3: Subtraktion,
- 4: Division.

Es wird versucht, systematisch als Ergebnis die Jahreszahl 1980 (oder eine andere vereinbarte Zahl) zu erreichen. Am Anfang dürfte die Wahl des Operanden und der Operation noch leicht sein, je mehr wir uns aber 1980 nähern, je komplizierter wird die Situation. Eine Überschreitung der vereinbarten Zahl gilt als verloren. Man kann das Spiel auch so durchführen, daß Rechenschritte ausgelassen werden dürfen, jedoch ist in diesem Fall derjenige Sieger, der zuerst die vereinbarte Zahl erreicht hat.

Statt der beiden Würfel können auch mit dem Taschenrechner Pseudozufallszahlen aufgestellt werden, wie das auf Seite 81 erläutert wurde.

### 9.1.8. Füchse und Hasen

In einem geschlossenen Gehege leben Füchse und Hasen. Grünpflanzen sind so viele vorhanden, daß sich die Hasen ausreichend ernähren und vermehren könnten, wenn nicht die Füchse Hasen fressen würden. Die Füchse würden jedoch sterben, wenn nicht genügend freßbare Hasen vorhanden wären. Wenn sich nun die Hasen zu stark vermehren, können die Füchse viele Hasen fressen und sich ebenfalls stark vermehren. Ähnliche Problemstellungen lassen sich auch aus anderen Bereichen nennen. Hier sind gründliche mathematische Untersuchungen angebracht, aber auch mit Nahrungsformeln können die natürlichen Vorgänge ausreichend beschrieben werden.

#### Beispiel

$$\frac{dh}{dt} = ah - bhf,$$

$$\frac{df}{dt} = -cf + bhf,$$

mit  $h$  und  $f$  als Anzahl der Hasen und Füchse;  $t$  als Zeit;  $a$ ,  $b$  und  $c$  als Konstanten des Prozesses ( $a$  gehört zum Hasenwachstum,  $c$  zum Aussterben

der Füchse, und  $b$  bezieht sich auf beide Tierarten — die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Hasen und Füchsen, für die Hasen tragisch und für Füchse erfolgreich).

Das aufgestellte Gleichungssystem kann bis auf das Niveau des Taschenrechners vereinfacht werden. Es wird folgende Näherungsformel empfohlen:

$$H_{k+1} = H_k (1,15 - 0,001 F_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_{k+1} = F_k (0,9 + 0,001 H_k).$$

Diese beiden Gleichungen stellen Iterationsformeln dar. Aus angenommenen  $H_k$ - und  $F_k$ -Werten können die folgenden Angaben (z. B. nach einem Monat) als  $H_{k+1}$  bzw.  $F_{k+1}$  berechnet werden. Diese Werte sind dann wieder Basis für die folgende Berechnung, indem  $H_{k+1}$  zu  $H_k$  und  $F_{k+1}$  zu  $F_k$  erklärt werden.

Das hier beschriebene Verfahren ermöglicht ein weiteres interessantes Spiel. Wir beginnen mit  $H_0$  und  $F_0$  (zweckmäßig Werte zwischen 50 und 400), dabei brauchen  $H_0$  und  $F_0$  keine gleichen Werte zu sein. Nun werden mit der Iterationsformel jeweils die neuen Hasen- und Fuchszahlen berechnet. Die Änderungen der Ergebnisse können aussagekräftig in eine grafische Darstellung gebracht werden, wie das im Bild 9.4 der Fall ist. Es ist ersichtlich, daß das zahlenmäßige Wachstum der Füchse zu einer Verringerung der Hasen führt. Da irgendwann nicht mehr genügend freißbare Hasen vorhanden sind, wird sich auch die Anzahl der Füchse verringern. Dies ist aber wieder eine Möglichkeit zum Anwachsen der Hasen usw. Das offensichtlich einfach erläuterte Modell zeigt eine Reihe von Zusammenhängen in einem gewählten System, vornehmlich in der Natur.

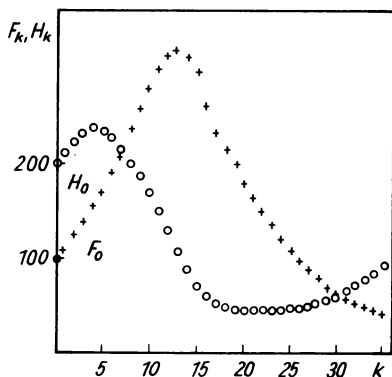


Bild 9.4. Entwicklung der Anzahl der Füchse und Hasen in Abhängigkeit der Zeit

Das Spiel ist mit verschiedenen angenommenen  $H_0$ - und  $F_0$ -Werten interessant, es ist für zwei Personen gedacht. Es sollten zwei Taschenrechner verwendet werden. Mit einem Taschenrechner ist das Spiel zwar auch möglich, jedoch dauert es länger und bringt einige Schwierigkeiten bei der Berechnung. Während des Spiels können die Ergebnisse gerundet werden, Brüche werden nicht beachtet. Die Wahl des Zeitraums ist uninteressant, da die Ergebnisse der Rechnung nicht anders werden. Sieger des Spiels ist derjenige Spieler, der die größere Anzahl von Tieren aufzuweisen hat, wenn  $k$  vorher festgelegt wurde.

Zu beachten ist, daß bei der Berechnung der Anzahl vorhandener Hasen stets auch die Anzahl vorhandener Füchse berechnet werden muß. Nur eine Tierzahl auszurechnen und mit der anderen vorher vorhandenen Tierzahl zu vergleichen ist unrichtig.

## 9.2. Aufgaben

1. In den Taschenrechner wird die Zahl 98765432 eingetastet. Nach dem Dividieren durch 8 erhalten wir 12345679. Es ist die umgekehrte Reihenfolge der eingetasteten Zahl, jedoch ist die 8 verschwunden, dafür steht jetzt eine 1 in der Reihe. Versuchen Sie, die durch andere Ziffern dividierte Ausgangszahl bezüglich der Ergebnisziiffernfolge auf Zusammenhänge zu untersuchen!
2. Wenn eine vorhandene Lieblingsziffer mehrfach nebeneinander angezeigt werden soll, dann gibt es dazu verschiedene Möglichkeiten:
  - a) 12345679 wird mit dem 9fachen der Lieblingsziffer multipliziert;
  - b) 15873 wird mit dem 7fachen der Lieblingsziffer multipliziert;
  - c) 3367 wird mit dem 33fachen der Lieblingsziffer multipliziert.
3. In den Taschenrechner wird eine dreistellige Zahl eingetastet (z. B. 432). Die gleiche Zahl schreiben wir daneben (432 432). Nun dividieren wir hintereinander
  - durch 13 (es entsteht kein Rest), anschließend
  - durch 11 (es entsteht kein Rest), anschließend
  - durch 7 (wir erhalten die dreistellige Zahl, die eingetastet wurde, zurück).Suchen Sie die Erklärung für das erhaltene Ergebnis! Dabei können Sie auch einmal eine dreistellige Zahl mit dem Produkt von 13, 11 und 7 multiplizieren!
4. Wir dividieren  $10^6 - 1$  durch 7. Wenn der Quotient mit 2 bzw. 3, 4, 5 oder 6 multipliziert wird, dann erhalten wir als Ergebnis:  
285714, 428571, 571428, ...  
Es handelt sich stets um die gleichen Ergebnisziiffern, auch die Reihenfolge stimmt überein, nur die Anfangsziiffern sind unterschiedlich. Man nennt diesen Vorgang auch Rotation.
5. Es ist die Division  $10:17$  auszuführen. Dabei soll eine große Genauigkeit erreicht werden, indem wir mindestens 18 Stellen nach dem Komma berechnen. Wir benutzen das Verfahren auf Seite 95.  
Als Ergebnis erhalten wir:  
0, 588 235 294 117 647 ...  
Dieses Verfahren hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem der Aufgabe 4. Um dies zu erkennen, multiplizieren Sie bitte das erhaltene Ergebnis der Reihe nach erst mit 1, dann mit 2, 3, ..., 16.
6. Wir schreiben zwei zweistellige Zahlen auf. Nun stellen wir eine Zahlenfolge in der Weise zusammen, daß jeweils die Summe zweier vorstehender Zahlen die nächste Zahl ergibt. Die Folge ist fertiggestellt, wenn die letzte Zahl gerade noch in die Anzeige des Taschenrechners hineinpaßt.

### Beispiel

22, 36, 58, 94, , 6020698, 9741694  
(22 + 36 = 58);  
(36 + 58 = 94);  
usw.

Wenn wir von je zwei nebeneinanderstehenden Zahlen die Quotienten bilden (z. B. 22:36 und 36:22), so erhalten wir folgende Ergebnisse:

0, <u>6</u> 111111	bzw.	1, <u>6</u> 363636 ;
0, <u>6</u> 206896	bzw.	1, <u>6</u> 111111 ;
0, <u>6</u> 170212	bzw.	1, <u>6</u> 206896 ;
0, <u>6</u> 18421	bzw.	1, <u>6</u> 170212 ;
	...	
0, <u>6</u> 180339	bzw.	1, <u>6</u> 180339.

Die Ziffernfolgen der Brüche werden allmählich gleich. Unterstrichen wurden diejenigen Ziffern, die gleich sind.

Diese Aufgabe stellt eine gute Anwendung der Tauschoperationen zwischen Speicher und Ziffernanzeige dar. Erarbeiten Sie sich für den Lösungsalgorithmus einen Programmablaufplan, der Zyklen und Abspünge gemäß Bedingungen usw. enthält. Stellen Sie danach aus anderen Ausgangszahlen eine Folge auf.

- Wir nehmen eine beliebige Zahl und ziehen daraus mehrfach hintereinander die Quadratwurzel. Es ist leicht zu erkennen, daß das jeweils entstehende Teilergebnis immer mehr dem Wert 1 zustrebt.  
Welcher Grenzwert entsteht aber, wenn jeweils nach dem Wurzelziehen das Teilergebnis mit 2 multipliziert wird?  
Welcher Grenzwert entsteht, wenn jeweils nach dem Wurzelziehen das Teilergebnis mit  $k$  multipliziert wird?  
Welcher Grenzwert entsteht, wenn nicht die Quadratwurzel, sondern die  $n$ -te Wurzel gezogen wird?
- Wie kann man mit den wenigsten Tastendrücken erreichen, daß irgendeine Ziffer auf allen Stellen der Ziffernanzeige erscheint? Als Tasten gelten dabei sowohl die Zifferntasten als auch die Operationstasten.
- Aus den Ziffern 0, 1, . . . , 9 berechnen wir
  - zwei fünfstellige Zahlen und
  - fünf zweistellige Zahlen,wobei jede Ziffer bei a) bzw. bei b) nur einmal erscheinen darf, deren Produkt [bei a) bzw. bei b)] maximal ist.
- Zwei Zahlen werden addiert, die Summe ist 256. Welche beiden Zahlen haben wir addiert? Bedingung ist, daß das Produkt der beiden Zahlen maximal ist!
- Stellen Sie an einigen Beispielen dar, daß die Summe zweier Kubikzahlen keine neue Kubikzahl ergibt!  
**Beispiel:**  $16^3 + 43^3 = 83603 \approx 43,717^3$
- Mit den gegebenen Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

auszurechnen, ohne daß die Teilergebnisse erneut eingetastet werden bzw. der Speicher des Taschenrechners benutzt wird.

13. Die folgenden Teilaufgaben sind zu berechnen! Dabei ist zu kontrollieren, ob jeweils der linke Term dem rechten Term gleichgesetzt werden kann. Für  $n$  wird 10 angenommen.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1);$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

14. Wenn in den folgenden Reihenentwicklungen das  $n$  immer weiter vergrößert wird, nähern wir uns den angegebenen Grenzwerten immer mehr. Teilergebnisse sollten aufgeschrieben werden, weil die Reihen unterschiedlich rasch konvergieren. Diese Unterschiedlichkeit kann man sich mit Hilfe der Beispiele gut verständlich machen.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e;$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \pm \dots = \frac{1}{e};$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \pm \dots = \ln 2;$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2;$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \pm \frac{1}{2n-1} \pm \dots = \frac{\pi}{4};$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6};$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90};$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{n^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945};$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots + \frac{1}{n^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Die Grenzwerte von  $e$  bzw.  $\pi$  werden mit achtstelliger Genauigkeit errechnet.

15. Berechnen Sie gemäß folgender Formeln (unendliche Multiplikation) Funktionswerte des Sinus bzw. des Kosinus. Die Ausführung der Rechnung kann dabei, wie im Abschn. 6. erläutert wurde, vorgenommen werden.

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{z}{k \cdot \pi} \right)^2 \right] = z \left[ 1 - \left( \frac{z}{\pi} \right)^2 \right] \\ \times \left[ 1 - \left( \frac{z}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{3\pi} \right)^2 \right] \cdot \dots$$

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{2z}{\pi(2k-1)} \right]^2 \right\}.$$

16. Zwischen den folgenden Ausdrücken bestehen Unterschiede hinsichtlich der zu erreichenden Ergebnisse und der möglichen Genauigkeit. Teilweise können die genauen Ergebnisse in der Ziffernanzeige dargestellt werden, teilweise nicht. Abhängig ist das vom verwendeten Taschenrechner.

$$222^2; 2^{2^2^2}; 22^{2^2}; 22^{22}; 2^{2^{22}}; 2^{22^2}; 2^{2^{22}}$$

17. Eine 10 m lange Leine sei waagrecht so angebracht, daß sie nicht durchhängt. Ein genau in der Mitte angebrachtes Gewicht wird die Leine etwas nach unten ziehen. Die Leine soll sich dadurch 1 mm gedehnt haben. Berechnen Sie, um wieviel mm die Leine in der Mitte durchhängt.
18. Mit welchen  $n$  Werten erhalten wir auf einem Taschenrechner mit achtstelliger Ziffernanzeige ein genaues Ergebnis für  $2^n$ ? Das Ergebnis darf weder gerundet noch verkürzt sein.
19. Wie groß kann  $x$  gewählt werden, damit bei der Berechnung von  $e^x$  noch kein Überlauf angezeigt wird?
20. Wie groß ist der Winkel (in Gradmaß), zu dem der Tangenswert dieses Winkels wertgleich ist ( $x_{\text{grad}} = \tan x$ )? Die Aufgabe kann man algorithmisch untersuchen und damit lösen, oder man erhält Lösung durch Probieren. Die Lösung ist erreicht, wenn zu einem eingetasteten Wert (in Grad) die Tangenstaste gedrückt wird und der angezeigte Wert gleich dem eingetasteten ist.
21. Wie heißen die Zahlen, deren Kehrwerte die gleichen Ziffernfolgen ergeben, jedoch der Dezimalpunkt eine andere Stellung hat?
22. Berechnen Sie, für wieviel Mark Lottoscheine gekauft werden müßten, um mit beliebigen fünf Zahlen garantiert einen „Fünfer“ zu erhalten.

#### Lösungsnachweis

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Zu beachten ist, daß eine genau bestimmte Reihenfolge der Rechnung einzuhalten ist.

23. Nach der Erzählung, daß der Erfinder des Schachspiels seinem König das Spiel mit der Maßgabe einer Belohnung anvertraute, können wir eine Rechnung anstellen. Die Belohnung sollte darin bestehen, daß auf das erste Feld des Schachspiels *ein* Weizenkorn gelegt wird, auf das zweite *zwei*, auf das dritte *vier* usw. (immer Verdoppelung der Anzahl der Weizenkörner). Rechnen Sie aus, wieviel Weizenkörner der König hätte geben müssen! Das Ergebnis soll genau ermittelt werden.
24. Unter Verwendung der nachstehend aufgeführten Näherungsformel für  $e$  soll  $n$  laufend verändert werden. Die erreichten Näherungswerte sind zu ver-

gleichen.  $n$  wird mit 2, 4, 8, 16, 32, ... , 1024, 2048, ... angesetzt. Für die Lösung der Aufgabe soll die Taste  $x^y$  möglichst nicht benutzt werden, d. h., es ist eine Umstellung der Formel erforderlich. Es wird beim Vergleich der erhaltenen Ergebnisse festgestellt, daß trotz wachsendem  $n$  ab einem bestimmten Wert keine Änderung des Ergebnisses der Näherung von  $e$  eintritt. Es ist nun zu erklären, warum dies bei Benutzung eines Taschenrechners so ist. Es gilt die Formel

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ wenn } n \rightarrow \infty.$$

(Diese Formel wurde auf Seite 99 erläutert.)

25. Wie groß muß  $m$  gewählt werden, damit  $\sqrt[m]{m}$  ein maximaler Wert wird?
26. Eine Zahl wird eingetastet. Danach drücken wir hintereinander verschiedene Funktionstasten, ohne weitere Zahlen einzutasten. Das Ziel besteht darin, daß eine möglichst große Anzahl von Funktionstasten gedrückt wird, ohne daß eine Fehleranzeige erscheint. Notieren Sie sich die Reihenfolge der Tasten und die eingetastete Zahl, damit Sie nach Fehlversuchen einen geeigneten Weg erreichen.
27. In einem Betrieb werden von einem bestimmten Produkt in einem Halbjahr monatlich folgende Stückzahlen hergestellt: 209, 310, 325, 350, 345, 355. Es ist zu diesen Angaben die Regressionsgerade zu berechnen. Gleichzeitig ist der Faktor der Produktionssteigerung anzugeben. Die gleiche Aufgabe ist zu wiederholen, jedoch sind nur die letzten drei Monatsstückzahlen zu verwenden. Vergleichen Sie die Ergebnisse für die Regressionsgeraden mit den Faktoren der Produktionssteigerung. Mit den berechneten Werten kann für die nächsten drei Monate durch Extrapolation die monatlich zu erwartende Produktionsstückzahl berechnet werden. Wie weichen die zu erwartenden Stückzahlen ab, wenn für die Regressionsgerade sechs bzw. drei Monate als Basis verwendet wurden?
28. Mit den gleichen Ausgangszahlen (Produktionsstückzahlen) der Aufgabe 27 wollen wir die Regressionsgerade ausrechnen, jedoch sind die Stückzahlen der beiden letzten Monate auszutauschen. Wie wirkt sich dies auf die Extrapolation für die folgenden drei Monate aus?
29. Die auf Seite 81 enthaltenen Ausführungen über die Zufallszahlenermittlung (unter a)) sind recht kurz abgehandelt. Beweisen Sie, daß es auch solche Dezimalbrüche gibt, die unter Verwendung einer Iterationsformel zu  $n_{k+1} = n_k$  führen. Es ist mindestens eine solche Zahl  $n$  festzustellen.
30. Es ist zu beweisen, daß  $a^p + b^p$  durch  $a + b$  dividiert werden kann, ohne daß ein Rest entsteht.  $p$  ist eine ungerade natürliche Zahl.

#### Beispiele

- $2^{15} + 3^{15}$  ist durch 5 zu dividieren,
- $6^7 + 7^7$  ist durch 13 zu dividieren,
- $21^5 + 16^5$  ist durch 37 zu dividieren.

31. Zur Ermittlung eines Näherungswerts für  $\pi$  kann man gut die Aufgabe 355/113 verwenden. Die Division ergibt: 3,1415929. Außer der letzten Stelle sind alle Ziffern genau. Beweisen Sie, daß es außer 355/113 und

710/226 kein weiteres dreistelliges Zahlenpaar gibt, welches so genau den Wert  $\pi$  annähert.

**32.** Prüfen Sie, welche natürlichen Zahlen  $n$ , die in die Formel

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

eingesetzt werden, wieder natürliche Zahlen als Ergebnis bringen!

---

# Anhang

---

## Bedeutung der Tastenaufschriften

Im folgenden werden die auf den Tasten der Taschenrechner am häufigsten vorkommenden Aufschriften (Abkürzungen) erläutert. Die Einbeziehung der gebräuchlichen mathematischen Aufschriften ist dabei nicht erforderlich, da diese international sind und auch bei Taschenrechnern keine ausgefallenen anderen Bezeichnungen haben.

Die Tastaturaufschriften bestehen in der Mehrzahl aus englischen Wörtern oder Abkürzungen. Oftmals handelt es sich um mehrere oder zusammengefaßte Wörter, die als Kurzfassungen mit zwei bis drei Buchstaben dargestellt werden (hier gibt es keine einheitliche Regelung). Mit Hilfe des Anhangs wird man mit etwas Findigkeit alle die Tastaturaufschriften herausfinden, die gewisse Ähnlichkeiten mit den aufgeführten Wörtern haben. So ist z. B. unter M (memory) der Speicher aufgeführt. Wenn wir nun wissen, daß ein Taschenrechner mit einem Speicher versehen ist, dann lassen sich weitere Tastaturaufschriften aus dem M ableiten. So bedeuten Tastaturaufschriften  $M^+$ ,  $M^-$ , MR, MC, daß mit den Speicherinhalten addiert und subtrahiert, daß der Speicherinhalt gelesen (memory read) und gelöscht werden kann (memory clear).

## Nichtprogrammierbare Taschenrechner

<b>ABS</b>	absolute (value)	absolut (Betrag)
<b>C, CE, C/E</b>	clear (entry)	löschen
<b>CH, CHG</b>	change	Tausch
<b>CHS, CHSIGN</b>	change sign	Vorzeichenwechsel
<b>DEC</b>	decimal	dezimal
<b>D, DISP</b>	display	Anzeige
<b>DEG</b>	degree	Grad
<b>D.M.S.</b>	degree, minute, second	Grad, Minute, Sekunde
<b>E, EX, EEX</b>	exponential	exponentiell
<b>ENG</b>	engineering (notation)	technische Zahlendarstellung
<b>EN, ENTER</b>	enter	Eingabe
<b>EXCH</b>	exchange	Austausch
<b>F, FUNC</b>	function	Funktion
<b>FIX</b>	fix (point)	Festkomma
<b>FLOAT</b>	floating (point)	Gleitkomma
<b>FRAC</b>	fraction	Bruch
<b>GRAD</b>	grad	Grad
<b>H.M.S.</b>	hour, minute, second	Stunde, Minute, Sekunde
<b>INT</b>	integer	ganzzahlig

<b>K</b>	constant	konstant
<b>LAST X</b>	last x	Wert des letzten x
<b>M</b>	memory	Speicher
<b>MEAN</b>	mean	mittlere
<b>NOT</b>	notation	Zahlendarstellung
<b>ON</b>	on	ein
<b>OFF</b>	off	aus
<b>P, POL</b>	polar (coord.)	Polarkoordinate
<b>PROD</b>	product	Produkt
<b>RAD</b>	radian	Radian
<b>RAN, RAND</b>	random (number)	Zufallszahl
<b>RC, RCL</b>	recall	Rückruf
<b>R, READ</b>	read	lesen
<b>R, RECT</b>	rectangular (coord.)	Rechteckkoordinate
<b>R, REG</b>	register	Register
<b>RES, RESET</b>	reset	löschen
<b>ROLL</b>	roll	rollen
<b>SCI</b>	scientific	wissenschaftlich
<b>SIGN</b>	sign	Vorzeichen
<b>SET</b>	set	setzen
<b>SQR</b>	square root	Quadratwurzel
<b>STACK</b>	stack	Kellerspeicher
<b>ST, STORE</b>	store	Speicher
<b>SUM</b>	sum	Summe
<b>W, WRITE</b>	write	schreiben

### **Programmierbare Taschenrechner**

<b>BACK</b>	back	zurück
<b>BEG, BEGIN</b>	begin	Anfang
<b>CONT</b>	continue	Fortsetzung
<b>END</b>	end	Ende
<b>EXEC</b>	execution	Ausführung
<b>FLAG</b>	flag	Kennzeichen
<b>GTO, GOTO</b>	go to	Sprung nach
<b>HALT</b>	halt	Halt
<b>IF</b>	if	wenn
<b>LBL, LABEL</b>	label	Marke
<b>LD, LOAD</b>	load	laden
<b>NOP</b>	no operation	keine Operation
<b>PAUSE</b>	pause	Pause
<b>RUN</b>	run	Lauf, Betrieb
<b>RET, RETURN</b>	return	zurück
<b>SAVE</b>	save	speichern
<b>SGL, SINGLE</b>	single	einfach
<b>STEP</b>	step	Schritt
<b>START</b>	start	Start
<b>STOP</b>	stop	Stopp
<b>TAPE</b>	tape	Band

---

# Literaturverzeichnis

---

## Abschn. 1.

- [1] *Angelov, Sz.*: Elektronni Kalkulatori (Elektronische Rechner). S. 467. Sofia: Technika 1976.
- [2] *Csákány; Vajda*: Mikroszámítógépek (Mikrorechner). Abschn. 6. Budapest: Műszaki Könyvkiado 1976.
- [3] *Glade, H.; Manteuffel, K.*: Am Anfang stand der Akabus. Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag 1973.
- [4] *Rolfe, S.*: Calculators. *Electronic Engineering* 48 (1976) Februar, S. 65—67.
- [5] *Valéry, N.*: Calculators take the fuss out of computing. *New Scientist* 61 (1974) 7. Februar, S. 326—332.

## Abschn. 2.

- [1] *Bergt, Walter*: Optoelektronische Anzeigeeinheiten. *Elektronik* 25 (1976) 4, S. 36—42.
- [2] The calculator explosion (Beitragsreihe). *New Scientist* 62 (1975) 13. November, S. I—XVI.
- [3] *Cook; Fichter; Whicker*: Inside the new pocket calculators. *HP Journal* 27 (1975) 3, S. 8—12.
- [4] *Elliot, G.*: Recent developments in liquid crystals and other new display techniques. *The Radio and Electronic Eng.* 46 (1976) 6, S. 281—295.
- [5] *Eckhardt, D.; Konrad, E.; Leupold, W.*: Hochintegrierte digitale Schaltungen und ihre Anwendung. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 184. Berlin: VEB Verlag Technik 1978.
- [6] *Jennings, B.*: Displays. *Electronic Engineering* 47 (1976) Juli, S. 49—53.
- [7] *Kanton, D.*: Mikroprozessorsysteme in der Automatisierungstechnik. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 183. Berlin: VEB Verlag Technik 1978.
- [8] Digitale Informationsverarbeitung (Beitragsreihe). rfe ab 19 (1970) H. 19.
- [9] *Reszler, A.*: Hogyan működnek a zsebszámológépek? (Wie arbeiten Taschenrechner?) *Természet Világa* 107 (1976) 11, S. 516—520.
- [10] *Schmid, H.*: BCD logic of many uses (Beitragsreihe). *Electronic Design* 13 (1973) 21. Juni, S. 90—95.
- [11] *Whitney, T.*: The design and impact of pocket calculators. *Proc. IFIP Congress 74; Information processing*, S. 39—43.
- [12] *Mc Whorter, E.*: The small electronic calculator. *Scientific American* 234 (1976) 3, S. 88—98.

## Abschn. 3.

- [1] *Göbller, R.*: Taschenrechner. *Elektronik* 24 (1975) 2, S. 54—60.
- [2] *Mannie, D.*: The big round up of small calculators. *IEEE Spectrum* 11 (1974) 4, S. 34—41.
- [3] *Musch; Taggart*: Portable scientific calculator has built-in printer. *HP Journal* 28 (1976) 3, S. 9—18.
- [4] *Neff; Tillman*: Three new pocket calculators: smaller, less costly, more powerful. *HP Journal* 27 (1975) 3, S. 2—7.
- [5] *Valéry, N.*: The electronic slide-rule comes of age. *New Scientist* 62 (1975) 27. Februar, S. 507—511.

#### **Abschn. 5.**

- [1] *Ambrizy; Jávor*: Mérésadatok kiértékelése (Meßdatenauswertung). Budapest: Műszaki Könyvkiadó 1976.
- [2] *Birtwistle, C.*: The electronic calculator in business, home and school. Manchester: Nicholls & Company Ltd. 1976.
- [3] *Boyd, R.*: HP-25 program yields values of network transfer functions. Electronics 50 (1977) 20. Januar, S. 113 u. 114.
- [4] *Crowley; Rodé*: A poket-sized answer machine for business and finance. HP Journal 24 (1973) 9, S. 1—8.
- [5] *Giemsa, E.*: Verarbeiten von komplexen Zahlen mit Taschenrechnern. Elektronik 24 (1975) 1, S. 68—70.
- [6] Hewlett-Packard: Application programs. HP ed. USA 1975.
- [7] How to use COMUCORP micro scientist (Serie 320). CDC ed. Los Angeles 1975.
- [8] *Killingbeck, J. P.*: The use of pocket electronic calculators in scientific work. Contemp. Phys. 17 (1976) 2, S. 145—168.
- [9] *Neff; Tillmann*: Three new pocket calculators. HP Journal 27 (1975) 3, S. 1—3.
- [10] Taschenrechner ELKA-135. rfe 25 (1976) 1, S. 30 u. 31.
- [11] *Wilcox, A.*: Program analyses spectrum of oscilloscope waveforms. Electronics 50 (1977) 3. Februar, S. 119—121.
- [12] *Kreul, H.*: Was kann mein Taschenrechner? Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979.

#### **Abschn. 6.**

- [1] *Bácskay*: Közeliítő számítások (Approximationsrechnungen). Budapest: Tankönyvkiadó 1972.
- [2] *Kiss; Kovács*: Numerikus módszerek (Numerische Methoden). Budapest: Műszaki Könyvkiadó 1973.
- [3] *Korn; Korn*: Matematikai kézikönyv műszakiaknak (Mathematisches Handbuch für Techniker). Budapest: Műszaki Könyvkiadó 1975.
- [4] *Lind; Penstone*: Transcendental functions from a five-function calculator. Electronic Engineering 47 (1975) Januar, S. 29—31.
- [5] *Maron, I.*: Computational mathematics. Moskau: MIR 1974.
- [6] *Mattera, L.*: Calculator algorithms. Electronics 47 (1974) 4. April, S. 142—146.
- [7] *Obádovics*: Gyakorlati számítási eljárások (Praktische Rechenverfahren). Budapest: Gondolat 1972.
- [8] *Papp, G.*: Numerikus módszerek (Numerische Methoden). Budapest: BME Továbbképző Int. 1973.
- [9] *Walther, J. S.*: A unified algorithm for elementary functions. AFIPS Conf. Proc. 1971, Spring Joint Computer Conf., S. 379—385.

#### **Abschn. 7.**

- [1] *Dickinson; Egbert*: A pair of programcompatible personal programmable calculators. HP Journal 28 (1976) 3, S. 2—8.
- [2] Hewlett-Packard HP-25. Owner's handbook ed. USA 1975.
- [3] HP-65. „Personal computer“. HP Journal 26 (1974), S. 2—20.
- [4] SR-56. Operating instructions. Texas ed. USA.
- [5] *Wieland, E.*: Der programmierbare Taschenrechner in der Praxis. Elektronik 24 (1975) 1, S. 80—82.
- [6] Scientific programmable. Operating instructions. London: Sinclair ed. 1975.

#### **Abschn. 8.**

- [1] *Hummer; Burns*: Interface for a hand calculator and a digital power supply. Rev. Sci. Instrum. 47 (1976) 8, S. 221—223.

- [2] *Grüter, H.*: Taschenrechner als digital anzeigendes Strahlungsmeßgerät. *Elektronik* 25 (1976) 12, S. 65 u. 66.
- [3] *Martin, T.*: SR-56 sequence timer gives audible alarm. *Electronics* 50 (1977) 17. Februar, S. 114 u. 115.
- [4] *Sutphen, S.*: Four function calculators time Chess matches. *Electronics* 49 (1976) 13, S. 119 u. 120.

**Abschn. 9.**

- [1] *Gardner, M.*: Fun and serious business with the small electronic calculator. *Scientific American* 235 (1976) 1, S. 126—131.
- [2] *Schlossberg; Brockman*: The pocket calculator game book. London: Transword Publishers Ltd. 1976.
- [3] *Gilde; Altrichter*: Mehr Spaß mit dem Taschenrechner. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978.

**Der Taschenrechner erfreut sich immer größerer Beliebtheit und gewinnt zunehmend als Rationalisierungsmittel an Bedeutung. Die vorliegende Broschüre bietet einen umfassenden Überblick über die Wirkungsweise und sachgemäße Handhabung von Taschenrechnern. Es werden viele Hinweise vermittelt, deren Kenntnis eine optimale Ausnutzung des Taschenrechners ermöglicht. Die Broschüre ist für diejenigen Leser bestimmt, die sich für Taschenrechner interessieren, aber noch nicht über das erforderliche Grundwissen verfügen. Darüber hinaus ist die Thematik so angelegt, daß auch Fortgeschrittene Nutzen aus dem dargebotenen Stoff ziehen werden. Die Broschüre wird bei allen Interesse finden, die gern mehr über ihren Taschenrechner wissen wollen als in der kurzen Bedienungsanleitung steht.**