KARL STUMPFF

HIMMELSMECHANIK

BAND III

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON ROBERT ROMPE UND ERNST SCHMUTZER

BAND 41

HIMMELSMECHANIK

BAND III

ALLGEMEINE STÖRUNGEN

VON

KARL STUMPFF †

Dr. phil., a. o. emer. Professor
für Sphärische Astronomie, Bahnbestimmung und Himmelsmechanik
an der Georg-August-Universität zu Göttingen

unter Mitwirkung von Dr. JEAN MEFFROY
a. o. Professor an der Faculté des Sciences der Universität Montpellier

MIT 21 ABBILDUNGEN

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1974

Berichtigungen

Seite	statt	lies
201, Formel (XXVIII; 6c)	$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \cdots$	$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \cdots .$
289, Formel (XXX; 19), 2. Zeile	$\varphi^1 + a_1\varphi + \cdots$	$\varphi' + a_1\varphi + \cdots$
305, 4. Zeile v. o.	$x' = \dot{r}x$	$x' = r\dot{x}$
325, Formel (XXXI; 11), 2. Zeile	$f(a) = \cdots$	$f^{\mathrm{I}}(a)$
376, 10. Zeile v. o.	$g' = g'' + \frac{\partial S_1'}{\partial G''}$	$g' = g'' - \frac{\partial S_1'}{\partial G''}$
384, Fußnote, 1. Zeile	Das in (XXXII; 67) eingeführte Symbol u	Das in (XXXII; 67) eingeführte Symbol n
390, 14. Zeile v. u.	... anschreiben, wo $S = \tilde{S}(\xi, y)$ ...	... anschreiben, wo $\tilde{S} = \tilde{S}(\xi, y)$ ...
392, Formel (XXXII; 89)	$\cdots = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial S_k}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial t^*} + \frac{dS_k}{d\eta_j}\frac{d\eta_j}{dt^*}\right)\cdots$	$\cdots = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial S_k}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt^*} + \frac{\partial S_k}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt^*}\right)\cdots$
475, Formel (XXXIV; 46), 3. Zeile, 4. Spalte	$\frac{-\vartheta_0}{0^2 - \vartheta_0}$	$\frac{-\vartheta_1}{0^2 - \vartheta_0}$
476, Formel (XXXIV; 17), 3. Zeile, 1. Spalte	$\frac{-\vartheta_2}{c_2 - \vartheta_0}$	$\frac{-\vartheta_2}{c^2 - \vartheta_0}$
543, 6. Zeile v. u.	$\ldots \tilde{H}_1 = H_2 + 2(H_1; W_1)\left((H_0; W_1); W_1\right)\ldots$	$\ldots \tilde{H}_1 = H_2 + 2(H_1; W_1) + \left((H_0; W_1); W_1\right)\ldots$
554, 14. Zeile v. o.	erhält man für $k = 1, 2, \ldots, n$	erhält man für $k = 1, 2, \ldots, \nu$

K. Stumpff

Karl Johann Nikolaus Stumpff

geb. am 17. 5. 1895 in Schleswig, gest. am 10. 11. 1970 in Göttingen.

> *„Die lohnenden Gegenstände der Forschung liegen nicht immer in nebelhafter Ferne. Blick um dich, und du findest auch in der vertrauten Umgebung, die du längst bis auf den Grund zu kennen glaubst, Geheimnisse und Schönheiten die Fülle.“*

Karl Stumpffs innere Einstellung zu seinem in fünfzehnjähriger, durch Krankheit oft gestörter Arbeit entstandenen Werk über Himmelsmechanik, dessen dritter und letzter Band nun vorliegt, kann nicht besser als durch seine eigenen, oben zitierten Worte beschrieben werden. Er hat sie mir Weihnachten 1949 als Widmung in das für mich bestimmte Exemplar seiner Arbeit „Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung“ geschrieben — jener Arbeit, in welcher er einem damals als abgeschlossen angesehenen Teilgebiet der Himmelsmechanik neue Impulse zuführte und deren Resultate ihn dazu ermutigten, ein modernes, umfassendes Lehrbuch der Himmelsmechanik zu schreiben.

Das Manuskript zu dem dritten Band hat Karl Stumpff wenige Wochen vor seinem Tode vollständig abschließen können. Auf seinem Sterbelager hat er mir die Verantwortung für die Herausgabe und für das Lesen der Korrekturen übertragen, die ich nach bestem Wissen und Gewissen wahrzunehmen versucht habe. Dabei hat mich Dr. Meffroy unterstützt, dem ich an dieser Stelle für seine Mitarbeit herzlich danken möchte. Die Absicht meines Vaters, die Darstellung des Stoffes im Rahmen des Möglichen noch während des Lesens der Korrekturen hier und da zu verbessern, war mir bekannt, und es wäre vielleicht möglich gewesen, den hinterlassenen Notizen entsprechende Hinweise zu entnehmen. Da ich aber wegen der Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit nicht hoffen konnte, auch nur annähernd die umfangreiche Übersicht über das Gesamtgebiet zu gewinnen, die mein Vater besaß, habe ich Dr. Meffroys Vorschlag befolgt, „das Vorrecht der Toten gegenüber den Lebenden“ zu respektieren. Demgemäß haben wir nur an solchen Stellen Korrekturen vorgenommen, wo offensichtliche Versehen im Manuskript vorzuliegen schienen.

In der schwierigen, durch den zu frühen Tod des Autors entstandenen Situation und in der Zusammenarbeit während der Indrucklegung hat der VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften ein hervorragendes, übergeordnetes Interesse an der Veröffentlichung des Werkes gezeigt. Ich möchte dem Verlag hierfür meinen herzlichen Dank aussprechen.

Bonn, im März 1971 Dr. Peter Stumpff

VORWORT

Zwischen dem Erscheinen des zweiten Bandes der „Himmelsmechanik“ und dem Abschluß der Arbeiten an diesem dritten und letzten Band ist ein halbes Jahrzehnt verflossen. Diese lange Frist ist durch mehrere Ursachen bedingt gewesen. Zunächst erfuhr die Arbeit eine Unterbrechung durch meinen Studienaufenthalt 1966/67 in den USA. Dieser Zeitverlust erwies sich allerdings auch als fruchtbar, da er mir Gelegenheit bot, neue theoretische Methoden der Störungsrechnung an der Stätte ihres Entstehens kennenzulernen, praktische Programme zur Berechnung spezieller Bahnen von künstlichen Himmelskörpern in Zusammenarbeit mit amerikanischen Kollegen selbst zu entwickeln und diese mit den schnellen Rechenanlagen des „Goddard Space Flight Center“ in Greenbelt (Maryland) zu erproben. Ferner aber haben gerade die letzten Jahre (1966—69) eine so große Fülle neuer Ideen zur Lösung alter Probleme der Himmelsmechanik gebracht, daß es geboten schien, wenigstens einige der wichtigsten unter ihnen in dieses Werk mit einzubeziehen und es dadurch, soweit wie möglich, auf den neuesten Stand zu bringen. Daß dies nicht so vollständig gelingen konnte, wie man es hätte wünschen mögen, ist ebenso verständlich wie unvermeidbar, da die Menge der Arbeiten, die auf diesem Gebiet fortlaufend erscheinen, lawinenartig anwächst, so daß ein Lehrbuch wie das nun abgeschlossene, dessen Umfang in vertretbaren Grenzen bleiben muß, neben der notwendigen Darlegung der wichtigsten klassischen Theorien der allgemeinen Störungen nur eine kleine und vom individuellen Standpunkt des Verfassers nicht unabhängige Auswahl moderner Methoden enthalten kann.

Ich habe mich bemüht, auch diesen letzten Band nach den gleichen Grundsätzen aufzubauen wie die beiden ersten, nämlich leichte Verständlichkeit anzustreben unter Verzicht auf sehr spezielle Vorkenntnisse, die dem überwiegenden Teil der Leser, insbesondere dem Studierenden, nicht zugemutet werden können. Eine Straffung des Textes um einer doch unerreichbaren Vollständigkeit willen mußte daher vermieden werden. Ich habe nur in Ausnahmefällen auf ausführliche Beweise oder Begründungen der mathematischen Schlußfolgerungen verzichtet, und zwar nur dann, wenn es die Begrenzung des verfügbaren Raumes erforderte und der Leser auf leicht zugängliche Literatur verwiesen werden konnte.

Damit die vielfach notwendigen Hinweise auf die ersten beiden Bände einfach und eindeutig möglich sind, habe ich, wie schon im zweiten Band, Kapitel und Abschnitte durchnumeriert. Dieser Band beginnt somit mit dem 23. Kapitel und dem 195. Abschnitt.

Kapitel XXIII enthält eine Vorschau auf Probleme und Formulierungen der allgemeinen Störungsrechnung, insbesondere aber, in den letzten Abschnitten, eine ausführliche Theorie der LAPLACEschen Koeffizienten und die Methoden

ihrer numerischen Berechnung. Das nächste Kapitel bietet eine kurzgefaßte Übersicht über Operatoren und ihre Anwendung zur Lösung mathematischer und dynamischer Probleme. Mit Vorrang werden die neuerdings von W. GRÖBNER wieder ins Licht gerückten LIE-Reihen behandelt, die mit Hilfe einer sehr allgemeinen Gruppe linearer Differentialoperatoren dargestellt werden und die als elegantes Hilfsmittel bei der Lösung linearer, insbesondere auch kanonischer, Differentialgleichungssysteme benutzt werden.

Nach diesen mehr der Vorbereitung dienenden Kapiteln wird in Kapitel XXV die klassische, von LAPLACE und LEVERRIER entwickelte Theorie der allgemeinen Planetenstörungen ausführlich dargelegt, während in Kapitel XXVI das schon früher (Kapitel XVI) angeschnittene Problem der säkularen Störungen gesondert und eingehend behandelt wird. Dieser wichtige Fragenkomplex wird hier breit ausgesponnen, von der Lösung der „säkularen Gleichung" durch JACOBI und HARZER über das schöne und tiefliegende GAUSSsche Theorem bis zu den Arbeiten von HALPHEN und deren geistvolle Formulierung durch P. MUSEN, der sich der modernen Hilfsmittel der Operatoren verschiedenen Typs mit eindrucksvollem Erfolg bedient.

Die nächsten beiden Kapitel (XXVII—XXVIII) bilden nicht ohne Absicht den Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt des ganzen Bandes: Sie beschreiben in detaillierter Darstellung die geniale und in ihrer Art einzig dastehende Theorie der Planetenstörungen von P. A. HANSEN, die zu den bedeutendsten Leistungen zählt, die das vorige Jahrhundert auf dem Gebiete der Himmelsmechanik aufzuweisen hat. Kapitel XXIX behandelt, ebenfalls in breiter Ausführung, die Methoden der allgemeinen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten, die in der Gegenwart immer mehr an praktischer Bedeutung gewinnen, da sie wegen der symmetrischen und algebraischen Form der Gleichungssysteme für den Gebrauch von elektronischen Rechenanlagen wie geschaffen sind. Auch hier reicht die Spannweite der Methoden von den geistreichen Ideen DZIOBEKS am Ende des vorigen Jahrhunderts, deren praktische Bedeutung seinerzeit noch nicht klar erkannt worden ist, bis zu den neuesten Arbeiten von BROUWER, BROUCKE, MUSEN und CARPENTER.

Ein sehr wichtiges Prinzip, das in der Himmelsmechanik immer größere Bedeutung gewinnt, ist das der Linearisierung und Regularisierung der Differentialgleichungen dynamischer Probleme. Seine Anwendung hat zu geschlossenen, von der Bahnform unabhängigen und von Singularitäten freien Lösungen des Zweikörperproblems geführt. Dies ist, eben im Zusammenhang mit diesem speziellen Problem, in Band I ausführlich erörtert worden. Obwohl schon zu Beginn dieses Jahrhunderts von SUNDMAN, BIRKNER, LEVI-CIVITÀ und anderen in seiner Bedeutung erkannt, sind doch erst später die in ihm vorhandenen Möglichkeiten ausgeschöpft und praktisch verwendet worden. Zu dieser Entwicklung habe ich selbst durch eine Studie aus dem Jahre 1947 beitragen können — später wurde sie, z. T. unabhängig von mir, von amerikanischen Astronomen erneut in Gang gebracht und weiter gefördert. Die Anwendung dieses Prinzips auf Störungsprobleme verdankt die Wissenschaft in erster Linie dem finnischen Astronomen P. KUSTAANHEIMO, dessen Theorie der „Spinoren" im Mittelpunkt des 30. Kapitels steht.

Das 31. Kapitel beschäftigt sich mit verschiedenen approximativen und iterativen Lösungen des Störungsproblems älteren und neueren Ursprungs. Es klingt aus in der klassischen Methode von DELAUNAY, die Lösung der kanonischen Gleichungen des Drei- und Mehrkörperproblems durch schrittweise Eliminierung der periodischen und säkularen Störungsterme zu ermöglichen. Die Theorie von DELAUNAY ist die Grundlage einer der fruchtbarsten Methoden der Störungsrechnung gewesen, die in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts von H. VON ZEIPEL entwickelt worden ist und seitdem und gerade in den letzten beiden Jahrzehnten zu interessanten Erweiterungen, Verallgemeinerungen und Verbesserungen geführt hat. Es ist mir gelungen, für die Darstellung dieser Methoden Herrn Dr. JEAN MEFFROY als Mitarbeiter zu gewinnen, der sich selbst mit diesem Problemkreis in verschiedenen Publikationen befaßt und sich als Kenner der Materie einen Namen gemacht hat. Von ihm stammt der Urtext des 32. Kapitels in französischer Sprache; ich selbst habe ihn stilistisch und sachlich überarbeitet, um ihn möglichst nahtlos in das Ganze einzufügen.

Die nächsten beiden Kapitel befassen sich mit der Theorie des Mondes, von der bereits in Band II eine erste Übersicht vorliegt, in der die Entstehung der hauptsächlichsten periodischen und säkularen Ungleichheiten der Mondbewegung mit einfachen Mitteln verständlich gemacht werden sollte. Leider reichte der noch verfügbare Raum des vorliegenden Bandes nicht aus, um wenigstens eine der klassischen Mondtheorien einigermaßen vollständig darzustellen. Ich habe mich daher darauf beschränkt, in den Kapiteln XXXIII—XXXV drei sehr verschiedene Theorien der Mondbewegung wenigstens in großen Zügen darzustellen: eine ältere von DE PONTÉCOULANT, die in besonders durchsichtiger Form ein Verfahren zeigt, das bei der Analyse dieses schwierigen Problems zum Ziele geführt hat, ferner die HILLsche Theorie, deren intermediäre Lösung, das „Variationsproblem", bereits in Band II behandelt wurde, schließlich eine moderne, auf der VON ZEIPELschen Technik aufgebaute Lösung von HORI. Die Kapitel XXXIV, XXXV und das Schlußkapitel XXXVI, das einige aktuelle Probleme und Methoden der Störungsrechnung behandelt, habe ich Herrn Dr. MEFFROY anvertraut, um den Abschluß des Manuskripts zu beschleunigen.

Es ist unmöglich, diese Übersicht abzuschließen, ohne auf die Themen hinzuweisen, die sie, bedingt durch Zeit- und Raummangel, nicht enthält. So haben die auch heute noch nicht befriedigend gelösten Fragen nach der Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik keinen Platz mehr gefunden, ebensowenig die theoretischen Probleme, die sich gerade dann ergeben, wenn die Konvergenz der Reihen versagt, so die Theorie der äußersten Satelliten der großen Planeten und die Theorie derjenigen Planetoiden, deren mittlere Bewegung mit der des Jupiters kommensurabel ist. Auch die Erfahrungen über spezielle Bahnen künstlicher Erdsatelliten und über periodische Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems, die mit Hilfe schneller Computer ständig anwachsen und von deren systematischer Auswertung wir noch weit entfernt sind, konnten hier nicht behandelt werden. Alle diese und andere Themen, wie z. B. die statistischen Probleme der Dynamik der Sternsysteme,

würden gut und gern einen weiteren Band ausfüllen, wenn man sie in befriedigender Vollständigkeit und Strenge darstellen wollte. Was das letztgenannte Thema anbetrifft, so ist es in vollständiger Form von K. F. OGORODNIKOV in seinem Lehrbuch „Dynamics of Stellar Systems" (Pergamon Press 1965; engl. Übersetzung des russischen Originals, Moskau 1958) abgehandelt worden.

Ich bin Herrn Dr. MEFFROY für seine verständnisvolle und hingebende Mitarbeit an den letzten Kapiteln dieses Bandes und für die interessanten und nützlichen Diskussionen, die ich über deren Stoff mit ihm führen konnte, sehr zu Dank verpflichtet. Dem Verlag danke ich für die Geduld, mit der er die Vollendung dieses Werkes abgewartet, und für das Interesse, das er ihm in den fünfzehn Jahren unserer Zusammenarbeit stets erwiesen hat.

Göttingen, im Mai 1970 KARL STUMPFF

INHALTSVERZEICHNIS

KARL JOHANN NIKOLAUS STUMPFF 5
Vorwort 7
Inhaltsverzeichnis 11

Kapitel XXIII: Einführung in das Problem der allgemeinen Störungen

195. Übersicht über die praktischen Aufgaben der Störungsrechnung 15
196. Differentialgleichungen der Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten. Einheitssysteme 19
197. Differentialgleichungen in Polarkoordinaten 25
198. Numerische Integration der Differentialgleichungen 30
199. Die Störungsfunktion 35
200. Die LAPLACEschen Koeffizienten 42
201. Berechnung der LAPLACEschen Koeffizienten 44
202. Die Ableitungen der LAPLACEschen Koeffizienten 54

Kapitel XXIV: Verwendung von Operatoren in der Himmelsmechanik

203. Lineare Differentialoperatoren 58
204. Die LIE-Reihen. Der Vertauschungssatz 61
205. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung 63
206. Anwendung der LIE-Reihen auf die Lösung des Zweikörperproblems 66
207. Umkehrung analytischer Funktionen 71
208. LIE-Reihen von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler 74
209. Der logarithmische Operator 77
210. Der Gradientoperator 79
211. Dyaden und Affinoren 80

Kapitel XXV: Die klassische Methode der allgemeinen Störungsrechnung

212. Entwicklung der Störungsfunktion im Problem der allgemeinen Planetenstörungen 86
213. Entwicklung des Hauptteils der Störungsfunktion 90
214. Explizite Entwicklung des Hauptteils bis zu Termen zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen 98
215. Die säkularen Terme des Hauptteils 106
216. Entwicklung des Nebenteils 109
217. Die Störungsgleichungen für die Bahnelemente 111
218. Entwicklung der Störungsfunktion nach Funktionen der wahren Anomalien . . 119

Kapitel XXVI: Säkulare Störungen

219. Die Differentialgleichungen der säkularen Störungen 125
220. Säkulare Störungen der Exzentrizitäten und Perihellängen. Die säkulare Gleichung 129
221. Säkulare Störungen der Neigungen und Knotenlängen 133

222. Lösung der säkularen Gleichung 134
223. Das Gausssche Theorem 140
224. Die Theorie von Halphen 144
225. Einführung elliptischer Integrale 148
226. Einführung der Weierstrassschen elliptischen Funktionen 154

Kapitel XXVII: Die Hansensche Theorie der allgemeinen Störungen. Grundlagen und Differentialgleichungen

227. Ideale Koordinaten 163
228. Die Grundgleichungen der Hansenschen Theorie 173
229. Die Bewegung in der instantanen Bahnebene 177
230. Die Hansensche W-Funktion 184
231. Die Bewegung der instantanen Bahnebene bezüglich der Ekliptik 187
232. Die Differentialgleichungen für Γ und s 194

Kapitel XXVIII: Die Hansensche Theorie. Integration der Bewegungsgleichungen

233. Vorbereitung der Integration 199
234. Einführung der exzentrischen Anomalie als unabhängige Variable 202
235. Entwicklung nach der Pseudozeit ε 205
236. Entwicklung des Hauptteils der Störungsfunktion und seiner ungeraden Potenzen 207
237. Integration der Differentialgleichungen 211
238. Die Integrationskonstanten 220
239. Eine Variante der Hansenschen Methode 223

Kapitel XXIX: Allgemeine Störungen der rechtwinkligen Koordinaten

240. Die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten 230
241. Die Differentialgleichungen für die Koordinatenstörungen 234
242. Integration der Differentialgleichungen 237
243. Die Dziobekschen Differentialgleichungen 241
244. Die Methode von Brouwer 246
245. Methode von Musen und Carpenter. Die Differentialgleichungen 254
246. Methode Musen—Carpenter. Integration der Differentialgleichungen 263
247. Die Integrationskonstanten 267
248. Darstellung der allgemeinen Koordinatenstörungen durch Tschebyscheffsche Reihen 275

Kapitel XXX: Linearisation und Regularisation. Spinoren

249. Lineare und regularisierte Differentialgleichungen der Zweikörperbewegung . . 284
250. Geschlossene und einheitliche Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 288
251. Einige Beispiele 290
252. Die Levi-Civitàsche Transformation 294
253. Lösung des Zweikörperproblems in Levi-Civitàschen Koordinaten 297
254. Spinoren 301
255. Das Störungsproblem in Spinorenform 306
256. Linearisierung der Störungsgleichungen 313

Kapitel XXXI: Approximative und iterative Lösungen des Störungsproblems

257. Genäherte Berechnung gestörter Bahnen in rechtwinkligen Koordinaten. Methode von STEFFENSEN—BROUCKE 319
258. Methode von K. STUMPFF und E. H. WEISS 322
259. Variation der Bewegung im Zweikörperproblem infolge kleiner Änderungen der Anfangsbedingungen 327
260. Approximative Berechnung der $\mathfrak{T}$-Matrix für gestörte Bahnen 333
261. Iterative Lösung des Störungsproblems durch LIE-Reihen 336
262. Die Exhaustionsmethode von DELAUNAY 341
263. Die intermediäre Bahn. Die DELAUNAYschen Operationen 345
264. Allgemeines Iterationsschema für die Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten 350

Kapitel XXXII: Theorie der allgemeinen Störungen auf Grund des von H. von Zeipel entwickelten Eliminationsverfahrens

265. Einführung einer erzeugenden Funktion 358
266. Der Mechanismus der VON ZEIPELschen Methode. Elimination der kurzperiodischen Terme 360
267. Elimination der langperiodischen Terme 372
268. Vektorielle Lösung des Problems durch P. MUSEN 379
269. Verallgemeinerung der VON ZEIPELschen Theorie nach HORI 388
270. Ein Beispiel 398

Kapitel XXXIII: Theorie der Bewegung des Mondes. Erster Teil: Theorie von de Pontécoulant

271. Das Hauptproblem. Die Störungsfunktion 404
272. Charakteristische Unterschiede zwischen den Theorien der Planeten und des Mondes 409
273. Die Theorie von DE PONTÉCOULANT. Die Differentialgleichungen 411
274. Intermediäre Bahnen 415
275. Die Störungsfunktion. Elliptische Terme 417
276. Ursprung und Beseitigung säkularer Terme 420
277. Entwicklung der Störungsfunktion 428
278. Ableitung und Eigenschaften der Ausdrücke für die störenden Kräfte 432
279. Berechnung der Terme, die nur von m abhängen 437
280. Berechnung der Terme, die m und die erste Potenz von e enthalten 441
281. Berechnung der von der ersten Potenz der Neigung abhängigen Terme 446
282. Theorie von DE PONTÉCOULANT. Technik und Übersicht 450

Kapitel XXXIV: Theorie der Bewegung des Mondes. Zweiter Teil: Theorie von Hill

283. Schwächen der klassischen Mondtheorien und ihre Umgehung durch die Theorie von HILL 456
284. Die Gleichungen des Variationsproblems und ihre Lösung 458

285. Der Variationsbahn benachbarte Lösungen. Die HILLsche Gleichung 462
286. Reduzierte Form der HILLschen Gleichung 466
287. Berechnung der Funktion Θ 467
288. Die HILLschen Reihen 470
289. Einführung einer unendlichen Determinante 473
290. Berechnung der Bewegung des Perigäums 476
291. Berechnung der unendlichen Determinante $\Delta_1^{(\infty)}(0)$ 480
292. Die Bewegung der Knoten 484
293. Die Methode von BROWN zur Berechnung der Knotenbewegung 487
294. Berechnung der Störungsterme, die von der Exzentrizität der Mondbahn abhängen 490

Kapitel XXXV: Theorie der Bewegung des Mondes. Dritter Teil: Theorie von Hori

295. Theorie von HORI. Die Differentialgleichungen 498
296. Elimination der kurzperiodischen Terme 501
297. Bestimmung von S_2 und F_2' 504
298. Bestimmung von S_3 und F_3' 506
299. Bestimmung von S_4, F_4' und F_5' 508
300. Berechnung der alten kanonischen Variablen als Funktionen der neuen . . . 517
301. Elimination der langperiodischen Terme 520
302. Berechnung der säkularen Störungen 528

Kapitel XXXVI: Aktuelle Probleme und Methoden der allgemeinen Störungsrechnung

303. Unterschiede älterer und neuerer Methoden der Himmelsmechanik 531
304. Die Schwächen der Methode von H. VON ZEIPEL 532
305. Kanonische Abbildungen durch LIE-Reihen 534
306. Die DEPRITschen Operatoren Δ_W und E_W 536
307. Berechnung der Koeffizienten einer DEPRITschen Transformation 538
308. Anwendung auf die Theorie der Planetenstörungen 541
309. Der Dreiecksalgorithmus von MERSMAN 544
310. Zusammenhang zwischen den Theorien von MERSMAN und DEPRIT 549
311. Zusammenhang zwischen den Theorien von DEPRIT und VON ZEIPEL 551

Anhang

Ia. Weitere Berichtigungen zu Band I 560
Ib. Berichtigungen zu Band II 560
II. Harmonische Analyse 562
III. Hauptachsentransformation homogener quadratischer Formen 565
IV. Sätze über Transformationen, insbesondere kanonische 567
V. Der LAGRANGEsche Entwicklungssatz 569
VI. Entwicklung nach TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen 572
VII. Kanonische Invarianten 575
VIII. Nach Redaktionsschluß eingegangene Zusätze 576

Literaturverzeichnis 583

Namen- und Sachregister 591

KAPITEL XXIII

EINFÜHRUNG IN DAS PROBLEM DER ALLGEMEINEN STÖRUNGEN

195. Übersicht über die praktischen Aufgaben der Störungsrechnung

Seit der Begründung der modernen Himmelsmechanik durch NEWTON haben die Astronomen, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigten, ihre wichtigste Aufgabe darin gesehen, Methoden zu entwickeln, die eine mit den Beobachtungen verträgliche Darstellung der Bewegung der Körper unseres Sonnensystems zum Ziele hatten. Dabei sind die Ansprüche an Genauigkeit der Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung um so mehr gewachsen, je exakter die Beobachtungen der Himmelskörper geworden sind und je länger der Zeitraum sich ausgedehnt hat, über den verteilt exakte Beobachtungsergebnisse zur Verfügung stehen. Gegenüber dieser wichtigen Aufgabe treten die Bemühungen der Mathematiker, das umfassendere Problem der Bewegungen beliebig vieler und beliebig großer Massen, die sich gegenseitig nach dem Gravitationsgesetz anziehen, zu lösen (oder, da es sich in seiner Allgemeinheit bisher als unlösbar erwiesen hat, einer Lösung näher zu bringen), keineswegs an Bedeutung zurück, da gerade diese theoretischen Arbeiten, wie die von LAGRANGE, HAMILTON, JACOBI, POINCARÉ und anderen, wesentliche Hilfsmittel geschaffen haben, die auch der Lösung der oben genannten praktischen Probleme zugute kommen.

Diese praktischen Aufgaben der Himmelsmechanik, denen dieser Band vornehmlich gewidmet sein wird, lassen sich in Kategorien aufteilen, die durch die Verteilung, Massen und Bahneigenschaften der im Sonnensystem vorhandenen Himmelskörper bedingt sind und sich durch die Bedeutung voneinander trennen lassen, die man den Bahnbewegungen einzelner oder Gruppen dieser Körper beimißt. Eine rohe Einteilung führt auf folgende Arten spezieller Probleme, die zu ihrer Lösung unterschiedlicher Methoden bedürfen:

1. Die Bewegung der großen Planeten. Ihre Massen sind bedeutend kleiner als die Masse der Sonne als Zentralkörper des Systems. Ihre Bahnen sind schwach oder mäßig exzentrisch, sind schwach oder mäßig gegen die Hauptebene des Systems (die UVE, s. Abschnitt 91) geneigt und durch große Zwischenräume voneinander getrennt, so daß nahe Begegnungen zwischen ihnen nicht vorkommen. Die Bahnen sind demnach durch schwache von den übrigen Planeten herrührende Anziehungskräfte gestörte KEPLERsche Ellipsen; die Abweichungen ihrer Positionen von diesen „intermediären" Bahnen, die Störungen, sind im allgemeinen klein und erreichen nur in einigen Sonderfällen größere Beträge, wenn die mittleren Bewegungen (bzw. die Umlaufszeiten) sich annähernd wie zwei kleine ganze Zahlen verhalten. Solche genäherten Kommensurabilitäten (im Falle Jupiter—Saturn 2:5) erzeugen (s. Abschnitt 135) langperiodische Störungen von beträchtlicher Amplitude, deren Bestimmung große Sorgfalt erfordert. Besondere Beachtung verdient der Umstand, daß die

meisten der großen Planeten von Satelliten umkreist werden, deren Masse zwar kleiner ist als die des Zentralplaneten, aber nicht immer gegen sie vernachlässigt werden darf. Das gilt besonders für das Massenverhältnis Mond—Erde, dessen Wert ($\approx 1/81$) alle anderen in den Satellitensystemen vorkommenden Beträge bedeutend übersteigt. Es muß also wenigstens in diesem Falle die Frage untersucht werden, ob die bei der Berechnung der Planetenbahnen meist geübte Praxis berechtigt ist, den Ort des Planeten mit dem des Schwerpunktes Planet + Satelliten zu identifizieren. Im Falle Erde—Mond ist dies sicher nicht erlaubt; wir haben aber in Abschnitt 173 festgestellt, daß der Massenmittelpunkt der beiden Körper, der zwar noch im Innern des Erdkörpers liegt, aber von dessen Zentrum merklich abweicht, eine kaum merklich gestörte KEPLERsche Ellipse um die Sonne beschreibt, wenn man die Störungen durch die anderen Planeten unbeachtet läßt.

2. Die Theorie der Kleinkörper (Planetoiden, Kometen, Meteore) um die Sonne unterscheidet sich in mehr als einer Hinsicht von der Theorie des Systems der großen Planeten. Einesteils ist sie unkomplizierter, weil die Massen dieser Körper gegen die der Planeten verschwindend klein sind. Es brauchen also weder ihre Anziehungskräfte unter sich noch diejenigen auf die störenden Planeten berücksichtigt zu werden. Daher läßt sich die Bewegung jedes einzelnen dieser Körper im Gravitationsfeld von Sonne und Planeten gesondert berechnen, vorausgesetzt, daß die unter Ziffer 1. gestellte Aufgabe vollständig oder bis zu einer für den betreffenden Fall ausreichenden Genauigkeit gelöst ist, d. h., sofern Ephemeriden der Örter derjenigen Planeten bekannt sind, deren Störungseinflüsse man zu berücksichtigen beabsichtigt. Andererseits treten aber Schwierigkeiten auf, die weit über das Maß derjenigen hinausgehen, die in der Theorie der großen Planeten eine Rolle spielen. Zwar sind die Bahnen des überwiegenden Teiles der Planetoiden, ebenso wie die der störenden Planeten selbst, schwach exzentrisch und wenig gegen die UVE geneigt, so daß man die Theorie ihrer Bewegung mehr oder weniger nach dem Schema der Planetentheorien aufbauen kann. Eine recht bedeutende Anzahl dieser Körper bewegt sich aber in Bahnen mit großer Exzentrizität und Neigung, so daß diese Schemata unzweckmäßig oder gar unbrauchbar werden. Die gleichen Schwierigkeiten treten in verstärktem Maße bei den Kometen auf, deren Bahnen oft Parabeln oder stark exzentrische Ellipsen sind und die unter Umständen einem der störenden Planeten so nahe kommen, daß die Störungskräfte die Anziehungskraft der Sonne während eines beschränkten Zeitraums übersteigen. In solchen Fällen tritt eine völlige Umgestaltung der Bahnverhältnisse ein, und es leuchtet ein, daß für sie keine Theorie brauchbar ist, die auf der Kleinheit der Störungskräfte beruht. Ein anderes Problem, das seiner Schwierigkeit wegen noch nicht befriedigend gelöst ist, betrifft diejenigen Planetoiden, deren mittlere Bewegungen mit der des Jupiters nahezu kommensurabel sind. Hier treten infolge der „kleinen Divisoren“ in den Störungstermen (s. Abschnitt 135) langperiodische Störungen auf, die sich wegen der großen Masse und verhältnismäßig geringen Entfernung des störenden Jupiters in den Konjunktionen sehr viel stärker auswirken, als das im Kommensurabilitätsfall Jupiter—Saturn zutrifft.

3. Ganz anders gelagert ist das Problem der Bewegung der Satelliten um ihren Zentralplaneten. Für unseren Standpunkt im Sonnensystem besonders interessant, aber wegen des ungewöhnlich großen Massenverhältnisses Satellit—Planet besonders schwierig ist die Theorie der Mondbewegung, mit der sich seit NEWTON bis in die jüngste Zeit fast alle namhaften Theoretiker beschäftigt haben. In der Mondtheorie gilt die Erde als Zentralkörper und die Sonne mit ihrer nahezu $^1/_3 \cdot 10^6$ größeren Masse als Störkörper, dessen störende Kraft nur infolge der großen Entfernung in so mäßigen Grenzen bleibt, daß eine „Störungstheorie" möglich ist. Die Schwierigkeiten einer genauen Mondtheorie werden durch weitere Umstände noch vermehrt. Wegen der großen Nähe des Mondes ist die zeitliche Änderung des scheinbaren Mondorts so rasch, daß sie mit geringer Mühe schon mit unbewaffnetem Auge verfolgt werden kann (z. B. beim Vorübergang des Mondes an einem hellen Fixstern). Daraus ergibt sich, daß von seiten des Beobachters außerordentlich scharfe Anforderungen an die Theorie gestellt werden, da schon geringfügige Fehler oder Vernachlässigungen in der Berechnung der Mondörter dem messenden Beobachter nicht entgehen. Aus diesem Grunde genügt es auch nicht, wie in der Theorie der Planeten, die beteiligten Massen als punktförmig bzw. als kugelförmig symmetrisch gebaute Körper zu betrachten. Die in der Mondentfernung zwar nur noch geringfügige durch die Abplattung des Erdkörpers bedingte Verzerrung des irdischen Gravitationsfeldes läßt sich nicht ganz vernachlässigen — in weit höherem Maße gilt das natürlich für die künstlichen Erdsatelliten (s. Kapitel XXII, insbesondere Abschnitt 188—189). Auch die physikalischen Wechselwirkungen zwischen Erde und Mond, die neben der reinen Anziehungskraft zwischen festen Körpern bestehen, die Meeresgezeiten, verursachen eine zusätzliche, allerdings erst in sehr langen Zeiträumen merkliche säkulare Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes (s. Abschnitt 179).

Die Theorie der Satelliten der großen Planeten, insbesondere des Jupiters und des Saturns, erfordern ähnliche Überlegungen, wenn auch der erforderliche Genauigkeitsgrad geringer ist. Große Schwierigkeiten bereiten die Bewegungen der äußersten Satelliten des Jupiters und des Saturns, insbesondere Jupiter VIII, dessen Bahn retrograd und stark gegen die Bahnebene des Planeten geneigt ist und der sich sehr nahe dem Grenzbezirk bewegt, jenseits dessen die Sonnenstörungen die vom Zentralkörper ausgehenden Attraktionskräfte überwiegen.

4. Wiederum anders geartet sind die Probleme der stellaren Himmelsmechanik. Besonders interessant, weil durch Beobachtung belegbar, ist der Fall, daß ein Fixstern in weitem Abstand ein engeres Doppelsternpaar umkreist. Hier handelt es sich um ein Dreikörperproblem mit Massen von der gleichen Größenordnung, das nur deshalb befriedigend lösbar ist, weil der Abstand des dritten Körpers sehr viel größer ist als derjenige der beiden andern. Hier kann das Modell Erde—Mond—Sonne zum Vorbild dienen. Es ergeben sich aber Schwierigkeiten besonderer Art bezüglich der Bewegungstheorie des engen Paares. Nicht nur wird man annehmen müssen, daß diese Körper von der Kugelform stark abweichen und daß relativistische Effekte (säkulare Beschleunigung der Apsidenbewegung) eine weitaus größere Rolle spielen als im Sonnensystem, sondern daß auch andere physikalische Vorgänge,

wie Gezeiten und bei großer Annäherung der beiden Sterne auch Massenaustausch, berücksichtigt werden müssen. Diese Dinge fallen aber so weit aus dem hier gesteckten Rahmen, daß wir auf sie nicht eingehen können. Auch die Probleme der Bewegungen von Fixsternen in größeren Gemeinschaften (Sternhaufen, Galaxien) können hier nicht behandelt werden.

Was die Planetentheorien anbetrifft, so liegt es nahe, für die Koordinaten oder andere charakteristische Größen, aus denen sich die Koordinaten berechnen lassen, zunächst Entwicklungen nach Potenzen der störenden Massen anzusetzen, die ja so klein sind, daß für genäherte Lösungen schon die Glieder erster Ordnung ausreichen und auch strengste Anforderungen an Genauigkeit schon durch Berücksichtigung von Termen zweiter Ordnung (eventuell auch noch einiger der dritten) erfüllt werden. Die Koeffizienten dieser Terme werden allgemein (s. Abschnitt 135) durch periodische Reihen dargestellt, die nach trigonometrischen Funktionen der mittleren, wahren oder exzentrischen Anomalien der Bahnen der beteiligten Körper fortschreiten und deren Koeffizienten sich als Potenzreihen nach kleinen Parametern, wie Exzentrizitäten und Neigungen, darstellen lassen. Die Kleinheit dieser Parameter ist also eine wesentliche Vorbedingung für die Brauchbarkeit dieser Entwicklungen, die im allgemeinen (ausgenommen in Spezialfällen wie den streng periodischen Lösungen des Drei- und Mehrkörperproblems) semikonvergent sind, also die Variablen des Problems nicht für alle Zeiten, wohl aber für mehr oder weniger beschränkte und oft auch sehr große Zeiträume, ausreichend genau ergeben.

Über die Aufteilung der Störungen in solche von der ersten, zweiten und höheren Ordnung in den störenden Massen ist im Abschnitt 135 bereits das Notwendigste ausgeführt worden. Wir werden uns im Folgenden meist mit der Ableitung der Störungsterme erster Ordnung begnügen und nur bei der Darstellung einiger der verschiedenartigen Methoden der Störungsrechnung auch auf Störungen höherer Ordnung eingehen. Diese Fälle werden genügen, um das Prinzip zu demonstrieren, nach dem verfahren wird, wenn man größtmögliche Genauigkeit anstrebt.

Im Mondproblem, dem wichtigsten der Satellitenprobleme, ist die störende Masse der Sonne so groß, daß Entwicklungen nach Potenzen dieser Größe unvorteilhaft wären. Hier wird man vielmehr das sehr kleine Verhältnis der mittleren geozentrischen Abstände des Mondes und der Sonne, das von der Größenordnung 1:400 ist, als primären Entwicklungsparameter vorziehen, während die sekundäre Entwicklung der Koeffizienten nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen, die dann auch die störende Masse mit einschließt, besondere Methoden erfordert.

In denjenigen himmelsmechanischen Problemen, in denen diese und andere Schemata versagen, bleibt als Ausweg immer noch die Methode der speziellen Störungsrechnung verfügbar, die zwar keine analytischen Ausdrücke für die Koordinaten oder die oskulierenden Bahnelemente liefert, aber immerhin gestattet, die Lösung der Bewegungsgleichungen, gleich welcher Art diese sein mögen, von speziellen Anfangsbedingungen aus durch numerische Integration für beliebig lange Zeitspannen schrittweise zu ermitteln. Diese Methode, die früher nur beschränkte Zeitintervalle durch mühsame Rechnung zu über-

brucken gestattete, läßt sich heute mit schnell arbeitenden programmgesteuerten Rechenanlagen (kurz „Computer" genannt) äußerst rasch, sicher und auch für sehr lange Zeiten durchführen, ohne aber die Bemühungen um die Entwicklung einer allgemeinen Störungstheorie überflüssig zu machen. Kombinationen beider Methoden, etwa Verfahren zur Ermittlung der Koeffizienten analytischer Störungsterme mit Hilfe besonderer Computerprogramme, haben sich in jüngster Zeit vielfach bewährt und werden sich weiterhin noch fruchtbarer auswirken.

Eine besondere Bedeutung werden in der zukünftigen Entwicklung der Himmelsmechanik zwei Aufgaben immer mehr gewinnen:

1. die Auffindung periodischer Bahnen des Drei- und Mehrkörperproblems, die als intermediäre Lösungen in komplizierteren Fällen dienen können, d. h. als Näherungen, die während relativ langer Zeiten nur kleine Störungsterme als Verbesserung erfordern. Die Konstruktion solcher periodischen Lösungen, die schon unter den sehr vereinfachten Bedingungen des eingeschränkten Dreikörperproblems (s. Kapitel XIX) in unübersehbarer Mannigfaltigkeit auftreten, ist mit Hilfe spezieller Computerprogramme schnell und genau ausführbar. Die Ergebnisse solcher Versuche zeigen sich heute schon in verwirrender Fülle; ihre Vervollständigung, Auswertung und Klassifizierung ist eine dankbare Aufgabe für die Zukunft. Ein eindrucksvolles Beispiel dafür daß solche numerischen Rechnungen tieferführende Einsichten vermitteln wo analytische Methoden bisher versagt haben, haben L. Carpenter und K. Stumpff in einem Versuch gegeben, periodische Bahnen des eingeschränkten Dreikörperproblems für Planetoiden zu errechnen, deren mittlere Bewegungen mit denen des Jupiters nahezu im Verhältnis 2:1 (Hecuba-Lücke) bzw. 3:2 (Hilda-Gruppe) stehen.[1])

2. die Einführung regularisierender und linearisierender Variabler (abhängiger wie auch unabhängiger), durch die einerseits die Form der Bewegungsgleichungen vereinfacht, andererseits die bei großer Annäherung oder gar Kollision je zweier der an der Bewegung beteiligten Massen auftretenden Schwierigkeiten der mathematischen Analyse wie der numerischen Rechnung vermindert oder aufgehoben werden.

196. Differentialgleichungen der Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten. Einheitssysteme

Die Vielfalt der Störungsprobleme, über die in Abschnitt 195 eine erste grobe und daher nicht bis in feinere Fallunterscheidungen reichende Übersicht gegeben wurde, bedingt auch eine Vielfalt der Form der Differentialgleichungssysteme, die diese Probleme mathematisch repräsentieren. Diese Gleichungen unterscheiden sich nicht nur durch die Wahl der abhängigen und unabhängigen

---

[1]) L. Carpenter und K. Stumpff, Über periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem und in der Nähe der Kommensurabilitäten vom Typus $(k+1)/k$. A.N. *291*, 25 (1969).

Variablen, sondern auch durch die Orientierung der Koordinatensysteme. Die letzteren können fest oder beweglich sein, sie werden sich aber stets auf ein „Inertialsystem“ (s. Abschnitt 19) zurückführen lassen, aus dem sie durch eine Transformation der Koordinaten hervorgehen.

In der Folge werden wir uns fast ausschließlich auf den Fall beschränken, daß die sich bewegenden Körper als Massenpunkte angesehen werden dürfen. Über die wenigen Fälle, in denen dies nicht gestattet ist, sondern Form und Massenverteilung der Himmelskörper berücksichtigt werden müssen, ist in Kapitel XXII soviel gesagt worden, wie für eine Einführung in die erst in jüngster Zeit aktuell gewordenen Bewegungsprobleme künstlicher Satelliten notwendig war.

In einem Inertialsystem, dessen Ursprung der von keinen Kräften beschleunigte Massenmittelpunkt der beteiligten Massen sei, genügen die auf diesen Ursprung bezogenen Ortsvektoren $\mathfrak{p}_i$ der Massenpunkte P_i (deren Anzahl $n+1$ sei) den Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{p}}_i = k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{XXIII;1}$$

wenn m_i die Masse von P_i und $r_{ij} = r_{ji} = |\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i|$ den Abstand zwischen P_i und P_j bezeichnet. Ist

$$U_i = k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}} \tag{XXIII;2}$$

eine Potentialfunktion, so kann man statt (XXIII;1) auch

$$\ddot{\mathfrak{p}}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \mathfrak{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \mathfrak{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \mathfrak{k} = \operatorname{grad}_i U_i \tag{XXIII;3}$$

schreiben, wenn $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen des gewählten rechtwinkligen Koordinatensystems, x_i, y_i, z_i die auf dieses System bezogenen „absoluten“ Koordinaten von $\mathfrak{p}_i$ sind und allgemein $\operatorname{grad}_i F$ den Gradienten einer skalaren Funktion $F(x, y, z)$ an der Stelle $\mathfrak{p}_i$ bedeutet. Für verschiedene Massenpunkte P_i sind die Potentialfunktionen U_i verschieden. In Abschnitt 91 ist aber gezeigt worden, daß man auch

$$m_i \ddot{\mathfrak{p}}_i = \operatorname{grad}_i U \tag{XXIII;4}$$

schreiben kann, wo nun

$$U = k^2 \sum_{k>j} \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \tag{XXIII;5}$$

eine für das ganze System gültige und $n(n+1)/2$ verschiedene Summanden enthaltende Potentialfunktion bedeutet. Die Größen $m_i U_i$ stellen dann diejenige Teilsumme von (XXIII;5) dar, deren n Summanden m_i als Faktor enthalten, während für alle übrigen Summanden die partiellen Ableitungen

nach den Koordinaten von $\mathfrak{p}_i$ verschwinden, so daß

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = m_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_i} = m_i \frac{\partial U_i}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z_i} = m_i \frac{\partial U_i}{\partial z_i}$$

ist, woraus die Identität der Formeln (XXIII;3) und (XXIII;4) folgt, denn der Faktor m_i, der auch verschwindend klein sein kann, erscheint auf beiden Seiten und fällt heraus.

Wählt man statt des Massenmittelpunkts des Systems den Ort irgendeines der $n+1$ Körper, z. B. P_0, als Koordinatenursprung eines (dann nicht mehr inertialen) Systems, dann gelten für die „relativen" Koordinaten

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die Differentialgleichungen (XI;14),

$$\text{(XXIII;6)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}}_i + k^2 \frac{m_0 + m_i}{r_{0i}^3} \mathfrak{q}_i = k^2 \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{\mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}_i}{r_{ji}^3} - \frac{\mathfrak{q}_j}{r_{0j}^3} \right).$$

Im Falle des Planetensystems wird man als den Zentralkörper P_0 zweckmäßig die Sonne wählen und ihre Masse $m_0 = 1$ setzen. In (XXIII;6) ist dann die Summe rechts von der Ordnung der Planetenmassen m_j, die gegen m_0 klein sind ($m_j < 10^{-3}$). Der Ausdruck rechts ist als „Störbeschleunigung" der Beschleunigung einer ungestörten KEPLERschen Bewegung hinzuzufügen. Diese Bewegung ist für jeden Planeten P_i die Lösung einer Differentialgleichung

$$\text{(XXIII;6a)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}}_i + k^2 \frac{m_0 + m_i}{r_{0i}^3} \mathfrak{q}_i = 0,$$

die vollständig integriert werden kann. Auch (XXIII;6) läßt sich in der Form

$$\ddot{\mathfrak{q}}_i = \operatorname{grad}_i U_i$$

schreiben, aber jetzt ist [s. auch (XI;27a)]

$$\text{(XXIII;7)} \quad U_i = \frac{k^2(m_0 + m_i)}{r_{0i}} + k^2 \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{0j}^3} \right) =$$

$$= \frac{k^2(m_0 + m_i)}{r_{0i}} + F_i$$

ein Potentialausdruck, der nun nicht mehr als Teilsumme einer für das ganze System gültigen Funktion U gedeutet werden kann. Der Störungsteil in (XXIII;7), die „Störungsfunktion" F_i, besteht aus einem „Hauptteil" von der Form (XXIII;2) und einem „Nebenteil", der durch den Übergang auf relative Koordinaten entstanden ist und der, wie in Abschnitt 137 bewiesen worden ist, nur zu periodischen Störungen Anlaß gibt, während die säkularen Störungen der Bahnelemente eines Planeten oder Planetoiden allein dem Hauptteil entstammen.

Die auf ein Inertialsystem bezogenen Differentialgleichungen (XXIII;1) bieten wegen ihres einfachen und symmetrischen Aufbaus sowohl für theoretische Überlegungen als auch für numerische Rechnungen einen besonderen Anreiz. Dennoch bevorzugt man in praxi meistens die Gleichungen (XXIII;6), da die relativen Örter $\mathfrak{q}$ unmittelbare Beziehungen zu den beobachtbaren Positionen der Himmelskörper haben, während dies für die absoluten Örter $\mathfrak{p}$ nicht der Fall ist.

Man kann übrigens den Gleichungen (XXIII;6) auch eine für manche Zwecke vorteilhafte symmetrische Form geben. Es genügt hier, den Fall eines Systems von vier Massenpunkten P_0, P_1, P_2, P_3 mit den Massen m_0, m_1, m_2, m_3 zu betrachten, von denen die eine oder andere auch verschwindend klein sein kann. Ist dann i, j, k, l irgendeine Permutation der vier Indizes und $\mathfrak{q}_{ij}$ der von P_i zu P_j führende Vektor, $r_{ij} = r_{ji} = |\mathfrak{q}_{ij}|$ sein Betrag, so läßt sich (XXIII;6) in der Form

$$\text{(XXIII;8)} \qquad \frac{1}{k^2}\ddot{\mathfrak{q}}_{ij} + \frac{m_i + m_j}{r_{ij}^3}\mathfrak{q}_{ij} = m_k\left(\frac{\mathfrak{q}_{ki}}{r_{ki}^3} + \frac{\mathfrak{q}_{jk}}{r_{jk}^3}\right) + m_l\left(\frac{\mathfrak{q}_{li}}{r_{li}^3} + \frac{\mathfrak{q}_{jl}}{r_{jl}^3}\right)$$

schreiben. Der Indexvorrat gestattet sechs wesentlich verschiedene Kombinationen i, j, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{q}_{ij} = -\mathfrak{q}_{ji}$ ist. Von diesen sechs Gleichungen sind aber nur drei voneinander unabhängig, etwa die für $\mathfrak{q}_{ij}$, $\mathfrak{q}_{ik}$, $\mathfrak{q}_{il}$, da nach Lösung dieser drei auch

$$\mathfrak{q}_{jk} = \mathfrak{q}_{ik} - \mathfrak{q}_{ij}; \qquad \mathfrak{q}_{kl} = \mathfrak{q}_{il} - \mathfrak{q}_{ik}; \qquad \mathfrak{q}_{lj} = \mathfrak{q}_{ij} - \mathfrak{q}_{il}$$

bekannt sind. Für jeden weiteren dem System hinzugefügten Körper P_m mit nicht verschwindender Masse m_m tritt auf der rechten Seite von (XXIII;8) ein Term

$$m_m\left(\frac{\mathfrak{q}_{mi}}{r_{mi}^3} + \frac{\mathfrak{q}_{jm}}{r_{jm}^3}\right)$$

hinzu, und die Zahl der unabhängigen Differentialgleichungen vermehrt sich um eine weitere für $\mathfrak{q}_{im}$.

In der Regel wird man den Index i der größten Masse des Systems zuschreiben, z. B. im Sonnensystem der Sonne, da dann auf der rechten Seite von (XXIII;8) nur mit kleinen Massen behaftete Störungsterme erscheinen. Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Planeten P_j um P_i läßt sich dann durch eine intermediäre Lösung $\bar{\mathfrak{q}}_{ij}$, $\bar{r}_{ij}$ annähern, die der integrablen Differentialgleichung

$$\frac{1}{k^2}\ddot{\bar{\mathfrak{q}}}_{ij} + \frac{m_i + m_j}{\bar{r}_{ij}^3}\bar{\mathfrak{q}}_{ij} = 0$$

genügt. Im übrigen gelten die Gleichungen (XXIII;8) für jedes Indexpaar aus dem gegebenen Vorrat. Wenn es sich z. B. um die Bewegung von Satelliten um einen Planeten handelt, wird man den Index i dem Planeten zuschreiben. Ist speziell P_i die Erde, P_j der Mond, P_k (mit $m_k = 0$) ein künstlicher Erd-

Satellit und P_l die Sonne, so wird in den Gleichungen für q_{ij}, q_{ik} rechts ein Term mit der großen Masse m_l erscheinen, dessen Größenordnung aber in mäßigen Grenzen bleibt, da die Abstände r_{il}, r_{jl}, r_{kl} sehr groß sind. In der Gleichung für q_{ij} wird rechts der Term mit $m_k = 0$ verschwinden. Ist dagegen P_k einer der großen Planeten, der die Bewegung des Mondes stört, so wird der Term mit m_k zwar nicht zu vernachlässigen sein, sein Einfluß wird aber unbedeutend bleiben, da er durch die großen Abstände r_{ik} und r_{kj} herabgedrückt wird.

Je nach Art der Bewegungsprobleme, die durch (XXIII;8) dargestellt werden, wird man die Einheiten von Länge, Zeit und Masse zweckmäßig definieren müssen. Durch die Wahl dieser Einheiten wird auch der numerische Wert der Gravitationskonstante k mitbestimmt, deren Dimension nach Abschnitt 18

$$[k] = [l^{3/2}t^{-1}m^{-1/2}] \text{ bzw. } [k^2] = [l^3t^{-2}m^{-1}]$$

ist. Der historischen Definition gemäß folgt k^2 aus dem dritten KEPLERschen Gesetz (II; 53),

$$k^2 = a^3n^2(m_0 + m_1 + m_2)^{-1},$$

wo a die mittlere große Halbachse der elliptischen Bahn bedeutet, die der Schwerpunkt Erde—Mond um die Sonne beschreibt, n die mittlere Bewegung in dieser Bahn ist und m_0, m_1, m_2 die Massen von Sonne, Erde und Mond sind. Der GAUSSsche Wert $k = 0.0172020985$ bezieht sich auf $m_0 = 1$ als Einheit der Masse, auf den mittleren Tag als Zeiteinheit, d. h. auf $n = 2\pi/T$, wo T das in mittleren Tagen ausgedrückte siderische Jahr bedeutet, und schließlich auf $a = 1$ als „Astronomische Einheit" der Länge. Aber sowohl die Massenverhältnisse m_1/m_0 und m_2/m_1 als auch die Jahreslänge und die große Halbachse der Erdbahn (deren Länge in irdischen Einheiten durch die Sonnenparallaxe und den Äquatorradius der Erde bestimmt ist) waren zu GAUSS' Zeiten weniger genau bekannt als heute. Um die fundamentale Konstante k nicht ständig der fortschreitenden Verbesserung der astronomischen Messungsergebnisse anpassen zu müssen, hat man es vorgezogen (s. auch Abschnitt 18), statt dessen das in A. E. ausgedrückte a zu ändern. Die astronomische Längeneinheit ist demnach nicht mehr durch a definiert, sondern durch die große Bahnhalbachse eines fiktiven, masselosen Körpers, der die Sonne in einer ungestörten KEPLERschen Ellipse mit der Umlaufzeit $T = 2\pi/k$ mittlere Sonnentage umkreist. Wenn man demnach für k ein für allemal den GAUSSschen Wert einsetzt, so wird

$$a^3 = k^2(1 + m_1 + m_2)\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

von der Einheit ein wenig abweichen.[1])

---

[1]) Es empfiehlt sich, den sehr instruktiven Beitrag zu lesen, den S. HERRICK über diesen Gegenstand auf dem 21. Symposium der IAU, Paris 1963, geliefert hat (in: J. KOVALEVSKY ed., Le système des constantes astronomiques. Paris 1965, S. 95ff.).

In der Theorie der Planetenstörungen ist es im allgemeinen zweckmäßig und üblich, die oben definierten Einheiten und das GAUSSsche k zu verwenden, das dann auch in den Formeln und Gleichungen der Störungsrechnung erscheint. In der Theorie der praktisch masselosen Planetoiden und Kometen ist es dagegen vorteilhaft (wie es auch in Band I und II meist geschehen ist), die Zeit in $1/k$ mittleren Tagen auszudrücken. Dann wird $k = 1$ und verschwindet aus den Formeln.

In anderen Problemen, vor allem in der Theorie der Satelliten und insbesondere der künstlichen Raumkörper, wird man andere Einheitssysteme bevorzugen, um das Auftreten sehr großer oder sehr kleiner Zahlenfaktoren zu vermeiden. Sei die Gravitationskonstante durch k, seien Länge, Masse und Zeit durch l, m, t ausgedrückt, und seien, mit den positiven Konstanten $\varkappa, \lambda, \mu, \tau$, dieselben Größen in einem anderen Einheitssystem

$$k' = \varkappa k, \quad l' = \lambda l, \quad m' = \mu m, \quad t' = \tau t,$$

so gelten die Dimensionsbeziehungen

$$[k^2 l^{-3} t^2 m] = [k'^2 l'^{-3} t'^2 m'] = 1,$$

also auch

$$\varkappa^2 \lambda^{-3} \tau^2 \mu = 1. \tag{XXIII; 9}$$

Es gibt demnach eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von Einheitssystemen, da man von den vier Konstanten drei willkürlich definieren kann, während die vierte durch (XXIII;9) mitbestimmt ist. Systeme, für die $k' = 1$ wird, pflegt man „kanonisch" zu nennen. Sie sind durch die Bedingung

$$\lambda^{-3} \tau^2 \mu = k^2$$

eingeschränkt, da dann $\varkappa = 1/k$ zu setzen ist, und es bleibt noch eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von kanonischen Einheiten. Setzt man etwa $\lambda = \mu = 1$, so ergibt sich $\tau = k$, und es besteht die Beziehung $t' = kt$, d. h., es ist, wie oben, $t' = 1$ für $t = 1/k = 58.13244$ mittlere Tage.

In der Theorie der künstlichen Erdsatelliten hat es sich als vorteilhaft erwiesen, als Längeneinheit den mittleren Äquatorhalbmesser der Erde (R) und als Masseneinheit die Erdmasse (M) zu verwenden. In den alten Einheiten (A. E. und Sonnenmasse) ist dann

$$R = \sin \pi_\odot = 1/23454; \quad M = 1/332905$$

und

$$\lambda = R^{-1} = \operatorname{cosec} \pi_\odot; \quad \mu = M^{-1}.$$

Dieses System wird kanonisch für

$$\tau = k \lambda^{3/2} \mu^{-1/2} = k (\sin \pi_\odot)^{-3/2} M^{1/2} = 107.09,$$

d. h., wenn man als Zeiteinheit τ^{-1} mittlere Tage = 13.48 Minuten einführt.

197. Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

Einfachheit und Symmetrie ist eine hervorstechende Eigenschaft der Differentialgleichungssysteme der Störungsrechnung, wenn als Variable die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten und der störenden Körper dienen. Wir werden in Kapitel XXIX auf dieses Problem der allgemeinen Störungstheorie zurückkommen, das in jüngster Zeit durch die Entwicklung neuer eleganter Methoden wieder aktuell geworden ist. Andererseits darf nicht übersehen werden, daß dem Vorzug dieser Methoden auch Nachteile gegenüberstehen, die man bei Verwendung von Polarkoordinaten vermeidet.

Führt man in irgendeinem Koordinatensystem die Transformation

$$(\text{XXIII};10) \qquad x = r\cos\beta\cos\lambda;\quad y = r\cos\beta\sin\lambda;\quad z = r\sin\beta$$

durch, so findet man die neuen Koordinaten in die lineare Distanz r und die beiden dimensionslosen Winkelgrößen β und λ aufgeteilt. In einer gleichförmigen Kreisbewegung, die im Falle der großen Planeten immer als allererste Näherung angesehen werden darf, kann man, wenn als Hauptkoordinatenebene $z = 0$ die Bahnebene gewählt wird,

$$r = \text{const};\quad \beta = 0;\quad \lambda = \lambda_0 + nt,\quad (\lambda_0 = \text{const},\ n = \text{const})$$

schreiben, eine erste intermediäre Lösung, die so viele Vorteile verspricht, daß dafür die unsymmetrische Form der Differentialgleichungen für die Polarkoordinaten gern in Kauf genommen wird.

Für die Relativbewegung eines Planeten P, die durch den Körper P_1 gestört wird, um die Sonne P_0 führen wir als Potentialfunktion gemäß (XXIII;7) den Ausdruck

$$(\text{XXIII};11) \qquad U = \frac{k^2(m_0+m)}{r} + k^2 m_1\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{xx_1+yy_1+zz_1}{{r_1}^3}\right) =$$

$$= \varkappa^2\left[\frac{1}{r} + \frac{m_1}{m_0+m}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r\cos\varphi}{{r_1}^2}\right)\right] = \varkappa^2\left(\frac{1}{r} + F\right)$$

ein, wo r, r_1 die heliozentrischen Abstände von P, P_1 bezeichnen, φ der Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren und ϱ der Abstand zwischen P und P_1 ist. Dann gelten für den gestörten Körper die Differentialgleichungen

$$(\text{XXIII};12\,\text{a}) \qquad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\beta = \dfrac{\partial U}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\beta}) + r^2\dot{\lambda}^2\sin\beta\cos\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta}, \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda}\cos^2\beta) = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} \end{cases}$$

und für seine kinetische Energie der Ausdruck

$$(\text{XXIII};12\,\text{b}) \quad T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + (r\dot{\beta})^2 + (r\dot{\lambda}\cos\beta)^2].$$

Für die ungestörte Bewegung ($F = 0$) ist

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\varkappa^2}{r^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0.$$

Die Gleichungen (XXIII;12a) gehen dann in (XI;50) über, da dort (bei passender Festsetzung der Einheiten von Masse und Zeit) $\varkappa = 1$ gesetzt war.

Um die Vorteile der Polarkoordinaten voll auszunutzen, wird man bestrebt sein, dafür zu sorgen, daß auch in der gestörten Bewegung die Aufteilung der Variablen in solche mit der Dimension einer Länge und in dimensionslose Winkelgrößen gewahrt bleibt. In vollkommener Weise gelingt eine solche Aufteilung, wenn man nicht *Koordinaten* des gestörten Körpers, sondern die gestörten *Elemente* seiner oskulierenden Bahn als abhängige Variable einführt. Gibt man diesen Variablen die kanonische Form der DELAUNAYschen Elemente (XV;72), so haben die Quadrate der Elemente L, G, H die Dimension einer Länge, während die zu ihnen konjugierten Größen l, g, h Winkel sind. In der ungestörten Bewegung sind alle diese Größen konstant bis auf die mittlere Länge l, die dann der Zeit t proportional verläuft. Um diese für den Aufbau der Störungstheorie so vorteilhaften Verhältnisse auf Methoden zu übertragen, die als Variable die Polarkoordinaten des gestörten Körpers benutzen, wird man statt der Transformationsgleichungen (XXIII;10) die Gleichungen (IV;13),

$$(\text{XXIII};13) \quad \begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i \end{cases}$$

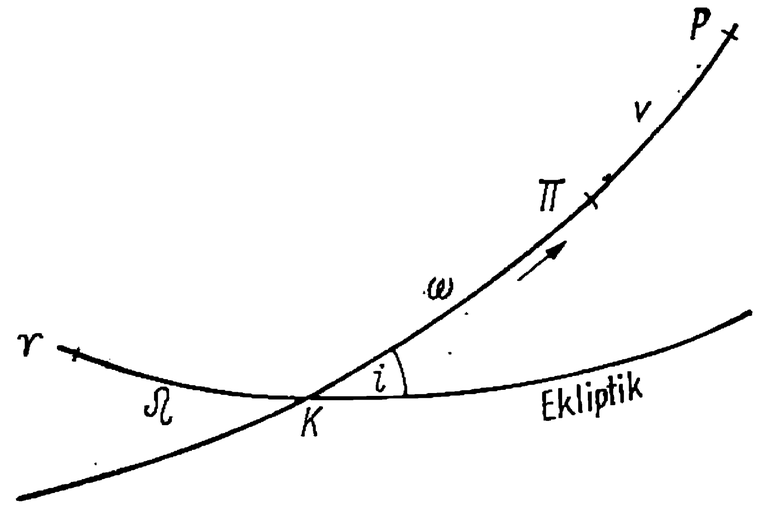

Abb. 1. Spur der oskulierenden Bahnebene eines Planeten an der heliozentrischen Sphäre

verwenden, in denen statt der Winkel β, λ, die bei beliebiger Orientierung des Koordinatensystems auch in der ungestörten Bewegung periodische Funktionen der Zeit sind, die Lagekoordinaten i, Ω der instantanen Bahnebene und, als einzige rasch mit der Zeit veränderliche Größe, das „Argument der Breite" u auftreten. Es ist aber, wenn (Abb. 1) $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ die Perihellänge, v die wahre Anomalie, $l = \tilde{\omega} + v$ die wahre Länge des Planeten in der instantanen (oskulierenden) Bahn bedeutet,

$$u = \tilde{\omega} - \Omega + v = l - \Omega.$$

Die kinetische Energie T ergibt sich aus (XXIII;12b) zu

$$(\text{XXIII};14) \quad 2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2[\dot{u}^2 + \dot{\Omega}^2(1 - \sin^2 u \sin^2 i) + \left(\frac{di}{dt}\right)^2 \sin^2 u + 2\dot{u}\dot{\Omega} \cos i - 2\frac{di}{dt}\dot{\Omega} \sin u \cos u \sin i].$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich erheblich, wenn man die Differentialgleichungen (XVIII;52b) zu Hilfe nimmt. Ist nämlich $W = (W)na/\sqrt{1 - e^2}$ diejenige Komponente der Störbeschleunigung, die in Richtung der Normale der oskulierenden Bahnebene wirkt, so gilt

$$\frac{di}{dt} = (W)\frac{r}{p}\cos u, \qquad \sin i \frac{d\Omega}{dt} = (W)\frac{r}{p}\sin u,$$

also

$$(\text{XXIII};15) \qquad \sin u \frac{di}{dt} = \sin i \cos u \frac{d\Omega}{dt}.$$

Führt man dies in (XXIII; 14) ein, so erhält man

$$2T = \dot{r}^2 + r^2(\dot{u} + \dot{\Omega} \cos i)^2$$

oder, wegen $u = l - \Omega$,

$$2T = \dot{r}^2 + r^2[\dot{l} - (1 - \cos i)\dot{\Omega}]^2.$$

Für die großen Planeten ist i, die Neigung der instantanen Bahnebene gegen die Ekliptik, durchweg sehr klein. Setzt man also

$$1 - \cos i = 2 \sin^2 \frac{i}{2} = \gamma$$

und führt den Winkel w durch

$$(\text{XXIII};16) \qquad dw = dl - \gamma d\Omega$$

ein, so unterscheidet sich w von der wahren Länge l (die, wie üblich, vom Frühlingspunkt längs der Ekliptik bis zum aufsteigenden Knoten K, von dort längs der oskulierenden Bahn bis zum Planetenort gezählt wird) nur wenig. Der Ausdruck für T nimmt dann die Form

$$(\text{XXIII};17) \qquad 2T = \dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2$$

an. Vergleicht man (XXIII; 17) mit (XXIII; 12b), so findet man Übereinstimmung, wenn man $\beta = 0$ und $\lambda = w$ setzt, d. h., w erweist sich als die wahre Länge des Planeten, gezählt in der instantanen Bahnebene, deren Lage sich mit der gestörten Bewegung des Planeten fortlaufend ändert, und von einer Anfangsrichtung („departure point") aus, die man in dieser den Planeten begleitenden und gewissermaßen auf der durch die Bewegung des Ortsvektors erzeugten gekrümmten Fläche abrollenden Ebene als fest ansehen darf. Wir werden die Größe w, die man als „wahre Länge in der gestörten Bahnebene" bezeichnen kann, in der HANSENschen Theorie der Planetenbewegung (Kapitel XXVII) wiederfinden, die unter den klassischen Methoden der Störungsrechnung in Polarkoordinaten den ersten Platz einnimmt und auch neueren Arbeiten als richtungweisendes Vorbild gedient hat.

Nach (XXIII; 11) ist die Potentialfunktion U (abgesehen von den Koordinaten des störenden Planeten, die als bekannte Funktionen der Zeit angesehen werden mögen) nur von den Größen (XXIII; 13), also von r, u, i, Ω bzw. wegen $\gamma = 1 - \cos i$ und $u = l - \Omega$ von r, l, γ, Ω abhängig, während T in der Gestalt (XXIII; 17) eine Funktion von r, $\dot r$, $\dot l$, γ, $\dot\Omega$ ist. Bezeichnet man die neuen Variablen r, l, γ, Ω mit q, so lassen sich die Bewegungsgleichungen in der LAGRANGEschen Form (XI; 48),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q},$$

schreiben, und man erhält

$$\text{(XXIII; 18)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot r}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial r} = \ddot r - r\dot w^2 = \dfrac{\partial U}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\gamma}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \gamma} = r^2 \dot w \dot\Omega = \dfrac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot l}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial l} = \dfrac{d}{dt}\,(r^2\dot w) = \dfrac{\partial U}{\partial l}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\Omega}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \Omega} = -\dfrac{d}{dt}\,(\gamma r^2 \dot w) = \dfrac{\partial U}{\partial \Omega}. \end{cases}$$

Führt man ferner als neue Variable

$$G = r^2\dot w, \quad K = -\gamma G = -\gamma r^2 \dot w$$

ein, so entsteht in

$$\ddot r - \frac{G^2}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad \dot\Omega = \frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial \gamma}, \qquad \dot w = \dot l - \gamma\dot\Omega = \frac{G}{r^2}$$

$$\dot G = \frac{\partial U}{\partial l}, \qquad \dot K = \frac{\partial U}{\partial \Omega},$$

ein System sechster Ordnung, das dem System (XXIII; 6) äquivalent ist. Man kann es leicht in eine kanonische Form überführen, wenn man etwa

$$q_1 = r, \quad q_2 = l, \quad q_3 = \Omega$$

setzt und nach dem in Abschnitt 122 beschriebenen Verfahren die zu den q_i konjugiert-kanonischen Variablen p_i bestimmt. Es ist dann, gemäß (XXIII; 14),

$$S = T + U = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{l} - \gamma\dot{\Omega})^2\right] + U(r, l, \gamma, \Omega) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2}\right) + U,$$

und man erhält

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial \dot{l}} = r^2 w = G, \quad p_3 = \frac{\partial S}{\partial \dot{\Omega}} = -\gamma r^2 w = K.$$

Es gelten dann die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

mit der HAMILTONschen Funktion $H = \sum \dot{q}_i p_i - S$. Es ist aber

$$\sum \dot{q}_i p_i = \dot{r}^2 + \dot{l}G + \dot{\Omega}K = \dot{r}^2 + G(\dot{l} - \gamma\dot{\Omega}) = \dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2},$$

also

(XXIII; 19a)
$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2}\right) - U(r, l, \Omega, G, K) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} - \frac{2\varkappa^2}{r}\right) - \varkappa^2 F(r, l, \Omega, G, K),$$

wobei zu bemerken ist, daß K und G in U und F nur in der Kombination $\gamma = -K/G$ vorkommen. Explizite lauten die Differentialgleichungen

(XXIII; 19b)
$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \dot{r}}, & \dfrac{d\dot{r}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial r}, \\ \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial G}, & \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial l}, \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial K}, & \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \Omega}. \end{cases}$$

Da l, Ω, K nur in der Störungsfunktion F vorkommen, sind Ω, G und K bis auf Terme von der Ordnung der störenden Masse konstant, und dasselbe gilt für $r^2 w = G$, aus welcher Gleichung nach Lösung des Systems (XXIII; 19b) $w(t)$ durch Quadratur erhalten wird.

198. Numerische Integration der Differentialgleichungen

Vorausgesetzt, daß für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 die Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit für alle beteiligten Körper und in bezug auf irgendein festes Koordinatensystem bekannt sind, wird es stets möglich sein, mit diesen Daten als Anfangswerten die Differentialgleichungen (XXIII; 1 bzw. 6), (XXIII; 19b) oder auch (XV; 86) mit Hilfe der numerischen Methoden zu integrieren, die in Kapitel XVII beschrieben und deren Anwendungen auf spezielle Probleme in Kapitel XVIII behandelt worden sind. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Aufgabe, rechtwinklige (absolute oder relative) Koordinaten eines, mehrerer oder aller Körper des Planetensystems als Funktionen der Zeit zu ermitteln, also deren Ephemeriden für einen mehr oder weniger ausgedehnten Zeitraum um t_0 zu berechnen, während die Frage nach der zeitlichen Änderung der Bahnformen (die Störungen der Bahnelemente) vorerst von untergeordneter Bedeutung bleiben soll. Vom mathematischen und technischen Standpunkt aus gesehen, ist dieser Spezialfall der numerischen Störungsrechnung von größtmöglicher Einfachheit, da die Differentialgleichungen (XXIII; 1, 6) in allen Variablen (x_i, y_i, z_i) gleich gebaut und von algebraischer Form sind. Das wirkt sich besonders günstig bei elektronischer Rechnung aus, für deren Programmierung ein möglichst kurzes und unkompliziertes Schema erwünscht ist. Ein weiterer Vorteil ist, daß diese Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind und keine Ableitungen erster Ordnung enthalten. In diesem Falle stehen (s. Abschnitt 152) besonders rasch fördernde Verfahren der numerischen Integration zur Verfügung.

Die praktischen Aufgaben, die in diesen Bereich fallen, sind vielgestaltig und unterscheiden sich sowohl hinsichtlich des Gegenstandes der Untersuchung selbst als auch des Umfanges und der angestrebten Genauigkeit der Rechnung. Wenn wir zunächst von Sonderfällen absehen, wie sie namentlich bei der Berechnung der Bahnen künstlicher Satelliten oder Raumsonden auftreten, so handelt es sich vornehmlich um folgende Problemkreise:

1. Es sei die Aufsuchungsephemeride für einen Planetoiden oder Kometen zu berechnen, dessen vorläufige Bahnelemente aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen während und nach der Entdeckung bekannt geworden sind. Die Anfangswerte der Bahn sind dann noch unsicher, und die mit ihnen berechnete Ephemeride wird selbst bei Berücksichtigung der Störungen um so mehr von derjenigen der wahren Bahn abweichen, je mehr Zeit seit der Ausgangsepoche verflossen ist. Es genügt dann, die Rechnung mit einer beschränkten Genauigkeit durchzuführen, die ausreicht, um die Wiederauffindung des Objekts (bei Planetoiden etwa während der nächsten Opposition) zu ermöglichen. Man wird sich bei der Berechnung der Störungen auf die Einflüsse derjenigen Planeten beschränken, die zu ihnen wesentlich beitragen — bei Planetoiden genügt es fast immer, die bei weitem überwiegenden Störungen durch Jupiter zu berücksichtigen. Bei künstlichen Satelliten wird man Störungen durch Mond und Sonne berechnen, aber auch

die Einflüsse der Abweichung der Erd- und Mondgestalt von der Kugelform nicht außer acht lassen.

Für den Handrechner bieten sich die in den Abschnitten 154—156 beschriebenen Integrationsverfahren als die geeignetsten dar. Es wird dann nur die vektorielle Differentialgleichung für die Bewegung des gestörten Körpers selbst zu lösen sein, während die Bewegung des (oder der) Störplaneten als bekannt vorausgesetzt wird. Der Rechner wird dann bei der Berechnung der Störbeschleunigung den Ort des gestörten Körpers seiner oskulierenden Bahn entnehmen, die aus den Anfangswerten des Ortes und der Geschwindigkeit nach den in Kapitel IV und V beschriebenen Methoden erhalten wird, während die Örter der Störplaneten für jeden gewünschten Zeitpunkt in den astronomischen Jahrbüchern zur Verfügung stehen. Für elektronische Rechnung ist es zwar möglich, diese Örter — für jeden Störplaneten und jeden Integrationsschritt drei Zahlenwerte — zu speichern oder der Maschine aus Lochkarten oder Magnetbändern zuzuführen. Es ist aber u. U. praktischer, auch die Örter der Störplaneten aus Anfangswerten als ungestörte Ephemeride zu berechnen. Man braucht dann für jeden dieser Körper nur sieben Zahlenwerte zu speichern, nämlich die sechs Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit zur Zeit t_0 und die Masse. Die durch die fortlaufende Berechnung intermediärer Planetenörter entstehende Verlängerung der Rechenzeit ist bei schnellen Maschinen unbedeutend und fällt gegenüber den Vorteilen dieses Verfahrens kaum ins Gewicht. Andererseits sind die Fehler, die der Ersatz wahrer Planetenörter durch intermediäre mit sich bringt, bei weitem kleiner als diejenigen, die aus der Ungenauigkeit der Anfangsbedingungen für die Bewegung des gestörten Körpers ohnehin folgen.

2. Bei der Berechnung strenger Ephemeriden des gestörten Körpers werden an die Genauigkeit der Anfangswerte große Anforderungen gestellt werden müssen, um so größere, je länger der Zeitraum vor oder nach der Epoche t_0 ist, der durch die Ephemeride überbrückt werden soll. In diesem Falle wird ein Verbesserungsverfahren zum Ziele führen, das etwa folgendermaßen abläuft: Mit provisorischen, aus einer ersten Bahnbestimmung stammenden Anfangswerten werden Störungen für einen längeren Zeitraum berechnet, aus dem beobachtete Positionen des Himmelskörpers bekannt sind. Die Abweichungen „Beobachtung minus Rechnung (B—R)“ dienen zur Ermittlung verbesserter Anfangswerte, mit denen die Rechnung wiederholt wird. Dieses Iterationsverfahren konvergiert meistens rasch. Es wird fortgesetzt, bis die restlichen B—R sich wie zufällige Fehler verhalten, deren Maß der Beobachtungsgenauigkeit entspricht. Bei der Berechnung der Störungsbeträge wird man, wenigstens in den letzten Iterationsschritten, alle Störplaneten berücksichtigen müssen, deren Einflüsse merklich sind, und an die Genauigkeit ihrer Örter ausreichende Ansprüche stellen. Es hat sich allerdings in praxi gezeigt, daß man auch hier mit Planetenstörungen auskommt, die aus intermediären Bahnen berechnet sind, falls die Störungsrechnung nur auf mäßig lange Zeiträume ausgedehnt wird. In der Tat sind die dadurch hervorgerufenen Fehler von der zweiten Ordnung in den störenden Massen und werden nur in den selten vorkommenden Fällen merk-

lich, in denen der gestörte Körper dem Störplaneten zeitweilig sehr nahe kommt.

3. Maximale Rechengenauigkeit wird erforderlich sein, wenn es sich darum handelt, die Bewegung sämtlicher Körper eines Systems über sehr lange Zeiträume hinweg zu berechnen und mit den über diese Zeit verstreuten Beobachtungen in Einklang zu bringen. Neuerdings sind solche umfangreichen Rechnungen mit schnellen Computeranlagen mehrfach durchgeführt worden. Die Aufgabe besteht dann darin, aus gegebenen Anfangswerten die Differentialgleichungen (XXIII; 1 bzw. 6) aller Körper des Systems simultan zu integrieren und die Ausgangsdaten zu verbessern, falls weit zurückliegende Beobachtungen systematische Gänge der Werte B—R ergeben. Die Verbesserung erstreckt sich in erster Linie auf die Anfangswerte der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten aller Körper selbst, aber auch auf die Massen und schließlich auf diejenigen Größen, die das Koordinatensystem definieren, vor allem die Konstante der Präzession, die hinreichend genau bekannt sein muß, wenn es gelingen soll, vor langer Zeit beobachtete Planetenörter widerspruchslos in eine Bewegungstheorie einzubauen. Eine Untersuchung dieser Art[1]) ist 1951 von W. J. Eckert, D. Brouwer und G. M. Clemence durchgeführt worden, die eine Ephemeride der fünf äußeren Planeten (Jupiter bis Pluto) im 40^d-Intervall für den Zeitraum 1653—2060 berechneten, wobei allerdings die Störungen durch die vier inneren Planeten nur insoweit berücksichtigt wurden, als die Summe ihrer Massen mit derjenigen der Sonne vereinigt und der Koordinatenursprung auf den Massenmittelpunkt des Systems Sonne + Innere Planeten verlegt wurde. Die Anfangswerte wurden durch eine sorgfältige Analyse der aus den Jahren 1780—1940 verfügbaren Beobachtungen ermittelt.

Bei der Ausführung einer simultanen Integration der Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten wird sich der Rechner für eines der Systeme (XXIII; 1 oder 6) entscheiden müssen. Obwohl die Gleichungen (XXIII; 6) an Anzahl geringer sind (bei n Planeten $3n$ skalare Gleichungen) als die des Systems (XXIII; 1), das außerdem 3 skalare Gleichungen für die Sonne enthält, haben die letzteren den Vorteil einfacheren Aufbaus, der für automatische Rechnung entscheidend sein kann. Der Übergang auf relative Koordinaten bietet ja keine Schwierigkeit, sobald die absoluten vorliegen. J. Schubart und P. Stumpff[2]) haben ein auf dieser Grundlage aufgebautes Programm zur simultanen Integration der Differentialgleichungen (XXIII; 1) eines Systems von $n \leqq 50$ Körpern mit beliebigen (endlichen oder verschwindenden) Massen an konkreten Beispielen erprobt.

4. Das letztgenannte Verfahren ist geeignet, auch alle übrigen weiter oben aufgeführten zu ersetzen. Sofern schnelle Maschinen zur Verfügung stehen,

---

[1]) W. J. Eckert, D. Brouwer und G. M. Clemence, Coordinates of the five outer planets 1653—2060. Astron. papers *12* (1951).

[2]) J. Schubart und P. Stumpff, On an N-body program of high accuracy for the computation of ephemerides of minor planets and comets. Veröffentlichungen des Astronomischen Recheninstituts Heidelberg Nr. 18, Karlsruhe 1966.

ist es erfahrungsgemäß vorteilhafter, die gestörten Ephemeriden einer größeren Zahl von Planetoiden oder Kometen mit Hilfe eines solchen n-Körper-Programms (Sonne, p Planeten, $q = n - p - 1$ masselose Körper) durch simultane Integration sämtlicher $3n$ Differentialgleichungen dieses Systems zu lösen, auch wenn im Ergebnis nur die gestörten Bahnen der q kleinen Körper interessieren, als sich auf die $3q$ skalaren Differentialgleichungen für die heliozentrischen Koordinaten dieser „interessanten" Körper zu beschränken und die Störungen, wie unter Ziffer 1 und 2, aus intermediären KEPLERschen Ellipsen zu entnehmen. Die simultane Integration liefert nicht nur strengere Ergebnisse, sondern verlangt von einer schnellen Maschine, sofern ein allgemeines Integrationsprogramm vorliegt, kaum zusätzliche Rechenzeit gegenüber einer atavistischen, dem Handrechnungsverfahren nachgebildeten Methode. Die Rechenzeit wird wesentlich bestimmt durch die Anzahl der zu ermittelnden Abstände zwischen den n Körpern des Programms und den $p + 1 = n - q$ Körpern mit endlicher Masse. Diese Anzahl ist aber

$$N = \frac{1}{2}\, p(p+1) + q(p+1).$$

Im ersten Summanden rechts steht die Zahl der Abstände zwischen den endlichen Massen selbst, in der zweiten die Zahl der Abstände zwischen den endlichen und den verschwindend kleinen Massen, während die $q(q-1)/2$ gegenseitigen Abstände zwischen den letzteren, die ja keine merklichen Anziehungskräfte aufeinander ausüben, in den Ausdrücken für die Störbeschleunigungen nicht vorkommen. Ist z. B. $p = 9$ die Zahl der großen Planeten und sieht das Rechenprogramm die simultane Berechnung der Ephemeriden von $q = 20$ masselosen Körpern vor, so ist $N = 45 + 200 = 245$; die Berechnung der „überflüssigen" Örter der großen Planeten, die ja schon aus Jahrbüchern bzw. aus den Theorien dieser Himmelskörper bekannt sind, erfordert also nur $Q = 45/N =$ rund 18% der gesamten Rechenzeit. Allgemein ist dieser Quotient $Q = p/(p + 2q)$, fällt also um so günstiger aus, je größer die Zahl der „interessanten" Objekte und je kleiner die der in die Rechnung einzubeziehenden Störplaneten ist.

Es soll nur am Rande vermerkt werden, daß man mit dem gleichen Programm, lediglich durch Eingabe der erforderlichen Daten, die meisten himmelsmechanischen Aufgaben lösen kann, sofern man nur die einzelnen Körper als Massenpunkte betrachten darf. Solche Probleme sind u. a. die Aufsuchung periodischer Bahnen, die Bahnbewegung des Mondes im „main problem" (s. Abschnitt 173) und die Bewegung von Fixsternen in einem Sternhaufen. Durch entsprechende Ergänzungen des Programms lassen sich auch spezielle Aufgaben in den Kreis der mit ihm lösbaren Probleme einbeziehen, wie die Bewegung von Satelliten oder Raumsonden um abgeplattete Planeten, von Körpern in der Nähe von Singularitäten des Gravitationsfeldes (Zusammenstößen) und in widerstehenden Medien. Auch relativistische Effekte lassen sich durch zusätzliche Details in der Programmierung berücksichtigen.

Die Erfahrungen, die bisher mit einem so allgemeinen n-Körper-Programm gemacht worden sind, waren außerordentlich günstig. Hier mögen nur zwei

auf diesen Erfahrungen beruhende Punkte hervorgehoben werden: Zunächst hat sich herausgestellt, daß das Programm auch bei ziemlich großer Annäherung zweier Körper nicht zu versagen braucht. Zwar sind in solchen Fällen wiederholte Übergänge auf andere Schrittweiten unvermeidlich, diese lassen sich aber unschwer in das Computerprogramm einbauen. P. STUMPFF[1]) hat in einer numerischen Untersuchung der Bewegung des Kometen Brooks II den sehr nahen Vorübergang an Jupiter im Jahre 1886, bei dem das Perijovium wenig mehr als einen Planetendurchmesser (0.00096 A.E.) betrug und eine zeitweilige Verkleinerung des Integrationsintervalls auf $0.^{d}001$ notwendig wurde, mühelos und ohne Übergang auf regularisierende Variable in die in heliozentrischen Koordinaten gerechnete Ephemeride einbeziehen können.

Eine andere Möglichkeit, die ein solches Programm bietet, bezieht sich auf die Verbesserung der Anfangsbedingungen für die Ausgangszeit t_0, wenn beobachtete Örter für eine weit zurückliegende Zeit t_1 bekannt sind. Durch kleine Variationen der Anfangswerte der Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit (δx_0, $\delta \dot{x}_0$, ...) erhält man, wenn man jede dieser (einen Bereich in dem die sechs Werte $x_0, \dot{x}_0, \ldots$ umgebenden Phasenraum erfüllenden) Varianten als Anfangswerte der Bahn eines individuellen Objekts in das Rechenprogramm aufnimmt, für den Zeitpunkt t_1 neben den Koordinaten $x_1, \dot{x}_1, \ldots$ auch deren Abweichungen $\delta x_1, \delta \dot{x}_1, \ldots$ von der beobachteten Position, und man kann dann durch Interpolation diejenige Variante bestimmen, die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmt. Das gleiche Verfahren läßt sich mutatis mutandis verwenden, wenn man die Ausgangswerte der Bahn eines künstlichen Raumkörpers zu verbessern sucht, von dem man erwartet, daß er nach Ablauf einer Zwischenzeit $t_1 - t_0$ eine gewünschte Endposition erreicht (s. auch Abschnitte 258—259).

Die numerische Integration der Differentialgleichungen für die Störungen der oskulierenden Kegelschnittselemente (Abschnitt 157) ist für Computer weniger geeignet als die für die Störungen rechtwinkliger Koordinaten, worauf schon in Abschnitt 160 hingewiesen wurde. Es ist aber immer ohne Schwierigkeit möglich, den Verlauf der zeitlichen Änderungen der intermediären Bahnelemente auch über große Zeiträume hinweg zu verfolgen, wenn strenge Ephemeriden der rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Himmelskörpers schon vorliegen. Für jeden gewünschten Zeitpunkt innerhalb der Ephemeride lassen sich ja auch [z. B. nach (XVII; 41)] die Koordinaten der Geschwindigkeit ermitteln; Örter und Geschwindigkeiten ergeben aber verhältnismäßig einfach, etwa nach den Formeln von S. HERRICK oder P. MUSEN (Abschnitt 160), die oskulierenden Elemente. Freilich erfordert die Ableitung genauer Differentialquotienten durch Interpolation eine erhöhte Genauigkeit der Ephemeridenwerte selbst. Da aber die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen ohne Schwierigkeiten auf eine größere Zahl von Dezimalstellen ausgedehnt werden können, als dies mit den früheren Hilfsmitteln möglich war, ist diese Forderung leicht erfüllbar.

---

[1]) P. STUMPFF, A numerical analysis of the motion of periodic comet Brooks 2, IAU Symposium Nr. 45 (Leningrad 1970). Dordrecht 1972.

199. Die Störungsfunktion

Sofern man die praktischen Aufgaben der Himmelsmechanik auf die Lösung konkreter Bewegungsprobleme beschränkt sieht, wie sie im Sonnensystem oder in fingierten Systemen vorkommen, könnte man mit den Methoden der speziellen Störungsrechnung oder, allgemeiner ausgedrückt, mit den Verfahren auskommen, die es gestatten, durch numerische Integration partikuläre Lösungen von Differentialgleichungssystemen erster oder zweiter Ordnung zu ermitteln, die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen entsprechen. Man könnte daher die Darlegung allgemeiner Störungstheorien, die eine analytische Lösung der Bewegungsgleichungen mit willkürlich wählbaren oder durch Beobachtungsergebnisse vorgeschriebenen Integrationskonstanten ermöglichen, für überflüssig halten. Das Hauptthema dieses Bandes, das Theorien dieser Art betrifft, würde dann nur noch wenig praktische Bedeutung haben, sondern bestenfalls den Historiker angehen, der sich mit der Geschichte der klassischen Astronomie befaßt, oder den Mathematiker, der in den Arbeiten, denen viele Astronomen der letzten zweihundert Jahre viel Zeit und Mühe geopfert haben, eine Fundgrube interessanter Methoden zur Lösung schwieriger analytischer Probleme entdeckt. Aber die Aufgaben der Himmelsmechanik erschöpfen sich nicht in der Herstellung genauer Ephemeriden der Örter von Planeten, Kometen und Satelliten, neuerdings auch von künstlichen Himmelskörpern, auch nicht in dem Studium von speziellen Bewegungen in konstruierten Fällen, sondern verlangen tiefere Einsichten in den Mechanismus der Störungskräfte, in deren gestaltende Wirkung auf die Bahnformen der Himmelskörper und damit letzten Endes auch in die Stabilitätseigenschaften dynamischer Systeme im Verlauf langer Zeiträume. Diese und andere Fragen, die zum Teil noch ungelöst sind, erfordern Antwort und rechtfertigen daher auch heute noch die Beschäftigung mit den klassischen Theorien der allgemeinen Störungen, insbesondere aber mit ihren modernen Varianten, die sich neuer mathematischer Methoden und Symbole bedienen, gleichwohl aber auf den früher aufgebauten Grundlagen beruhen.

Die Hauptschwierigkeit, die bei einer analytischen Lösung der Störungsgleichungen zu überwinden ist, besteht in der Entwicklung der Störungsfunktion in Reihen, deren Glieder als Funktionen der Zeit oder einer sie vertretenden Variablen einzeln integrabel sind und über deren Konvergenzeigenschaften besondere Überlegungen angestellt werden müssen. Um einen konkreten Fall im Auge zu haben, nehmen wir an, daß die Bahnelemente in der DELAUNAYschen Form (XV; 72) gegeben sind, daß ein heliozentrisches Koordinatensystem zugrunde liegt und daß die Bewegungsgleichungen dann die halbkanonische Form (XV; 71) annehmen. Mitunter ist es zwar vorteilhaft, JACOBIsche Koordinaten zu verwenden, in denen die Differentialgleichungen streng kanonisch sind, z. B. für gewisse theoretische Überlegungen allgemeiner Natur, für die Theorie des Mondes und der Satelliten oder für das stellare Dreikörperproblem. Bei der Berechnung der allgemeinen Störungen im System der großen und kleinen Planeten bieten aber heliozentrische Koordi-

naten so große praktische Vorzüge, daß dagegen die geringere Eleganz der halbkanonischen Form der Differentialgleichungen nicht ins Gewicht fällt.[1])

Es sei $\mathfrak{p}_1(x_1, y_1, z_1)$ der heliozentrische Ortsvektor des gestörten Planeten P_1, $r_1 = |\mathfrak{p}_1|$ seine heliozentrische Distanz und m_1 seine in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückte Masse, die auch verschwindend klein sein kann. Ebenso beziehen sich $\mathfrak{p}_i(x_i, y_i, z_i)$, r_i und m_i auf störende Planeten P_i ($i = 2, 3, \ldots, n$), und es seien

$$\varrho_i = |\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_1| = \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (z_i - z_1)^2}$$

die Abstände zwischen P_1 und den P_i. Schließlich sei φ_i der heliozentrische Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_i$.[2]) Die Störungsfunktion, deren partielle Ableitungen nach den Variablen des Problems auf den rechten Seiten der Störungsgleichungen auftreten, hat bei Verwendung der DELAUNAYschen (oder der POINCARÉschen) Variablen nicht mehr die Form (XXIII; 7), sondern es ist

$$F = F_0 + \sum R_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

wo F_0 nur von der großen Halbachse a_1 der Bahn des gestörten Planeten bzw. des DELAUNAYschen Elements $L_1 = \varkappa\sqrt{a_1}$ abhängt und

$$\text{(XXIII; 20)} \qquad R_i = k^2 m_i \left[\frac{1}{\varrho_i} - \frac{x_1 x_i + y_1 y_i + z_1 z_i}{{r_i}^3}\right] =$$

$$= k^2 m_i \left[\frac{1}{\varrho_i} - \frac{r_1 \cos\varphi_i}{{r_i}^2}\right] = k^2 m_i (\Psi_i - \psi_i)$$

ist. Wir erinnern daran, daß der Summand F_0, der von der nullten Ordnung in den störenden Massen ist, dadurch entstanden ist, daß die Zeit t in Gestalt der mittleren Anomalie M (oder, im System der POINCARÉschen Variablen, der mittleren Länge) in das Elementensystem einbezogen wurde.

Da sich die Störungen, ebenso wie die Summanden R_i der Störungsfunktion selbst, einfach addieren, genügt es bei den folgenden Untersuchungen, nur *einen* störenden Planeten anzunehmen, etwa P_2 mit der Masse m_2. Die Ableitung $\partial F_0/\partial a_1$ kommt nur in der Differentialgleichung für die Störung der mittleren Länge [s. (XV; 78)] oder der mittleren Anomalie [s. (XV; 71, 72)] vor. Schließen wir diesen Fall einstweilen aus, so interessieren im planetaren Dreikörperproblem (zwei Planeten P_1 und P_2) nur die Störungsausdrücke für P_1 oder P_2 als gestörten Körper,

$$\text{(XXIII; 20a)} \qquad R_2 = k^2 m_2 \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{r_1 \cos\varphi_2}{{r_2}^2}\right), \qquad R_1 = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{r_2 \cos\varphi_1}{{r_1}^2}\right),$$

---

[1]) Siehe auch Abschnitt 130, insbesondere die auf den Seiten 222—223 und 229—230 des Bandes II zu dieser Frage gemachten Bemerkungen.

[2]) Eine Verwechslung des Symbols φ mit dem Exzentrizitätswinkel $\varphi = \arcsin e$ wird nicht zu befürchten sein, da im folgenden die Exzentrizität stets durch e selbst ausgedrückt werden soll.

und man darf offensichtlich $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi$ und daher auch

$$R_j = k^2 m_j \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r_i \cos\varphi}{{r_j}^2}\right), \qquad i, j = 1, 2 \quad \text{oder} \quad 2, 1,$$

schreiben.

Der jeweilige Störungsausdruck enthält den „Hauptteil“ $\Psi = \varrho^{-1}$ und den „Nebenteil“ $\psi_j = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)\, r_j^{-3} = r_i r_j^{-2} \cos\varphi$. Der Hauptteil ist also in beiden Formeln für die Störungsfunktion identisch. Da die Ausdrücke R_j den stets kleinen Faktor m_j enthalten, ist es (vorausgesetzt, daß ϱ im Laufe der Zeit keine sehr kleinen Beträge annimmt) in erster Näherung immer gestattet, r_1, r_2 und φ aus intermediären Keplerschen Ellipsen zu berechnen. In Abschnitt 135 ist gezeigt worden, daß man R als Funktion dieser von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängigen Größen in trigonometrische Reihen entwickeln kann, die nach den Vielfachen der mittleren Längen λ oder der mittleren Anomalien M fortschreiten. Die Entwicklung des Nebenteils, der, wie in Abschnitt 137 bewiesen worden ist, nur periodische, also keine säkularen, d. h. der Zeit proportionalen, Terme enthält, ist in den Koordinaten des gestörten Körpers linear. Er macht daher weniger Schwierigkeiten als der Hauptteil, der diese Koordinaten im Nenner und unter der Quadratwurzel enthält. Beim Übergang auf inertiale Koordinaten würde der Nebenteil ganz verschwinden, da er ja erst durch die Einführung relativer Koordinaten entstanden ist.

Der Hauptteil läßt sich in der für die Reihenentwicklung geeigneten Form

$$\text{(XXIII; 21)} \qquad \varrho^{-1} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-1/2} = r_2^{-1}\left[1 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos\varphi + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

schreiben. Dieser Ausdruck ist nach dem binomischen Satz entwickelbar, falls $r_1 < r_2$ ist, die Bahn des gestörten Planeten also innerhalb der des störenden verläuft. Das ist durchweg der Fall, wenn es sich um durch Jupiter (P_2) gestörte Planetoiden (P_1) handelt. Ist $r_1 > r_2$, so kann man in (XXIII; 21) die Indizes vertauschen, ohne daß sich ϱ ändert. Die binomische Entwicklung von ϱ^{-1} ist also, solange $r_1 \neq r_2$ bleibt, immer konvergent, wenn auch unter Umständen sehr langsam.

Sofern man (bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung in der störenden Masse) die Größen r_1, r_2, φ aus ungestörten intermediären Keplerschen Ellipsen ableiten darf, findet man zunächst die beiden r_i und die wahren Anomalien v_i aus Gleichungssystemen von der Form

$$\text{(XXIII; 22)} \quad \begin{cases} E - e\sin E = M = n(t - t_0) + \varepsilon - \tilde{\omega}, \quad n = k\sqrt{1+m}\, a^{-3/2}, \\ r\cos v = a(\cos E - e), \qquad\qquad r = a(1 - e\cos E), \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E \qquad \text{oder} \qquad \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \end{cases}$$

als Funktionen der Zeit t und der oskulierenden Bahnelemente

$$a, e, \tilde{\omega}, \varepsilon .$$

Der heliozentrische Winkel φ zwischen den Ortsvektoren von P_1 und P_2 ist zwar, ebenso wie die Abstände r und die Anomalien M, E und v, von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, seine Berechnung erfordert aber die Bezugnahme auf ein solches System.

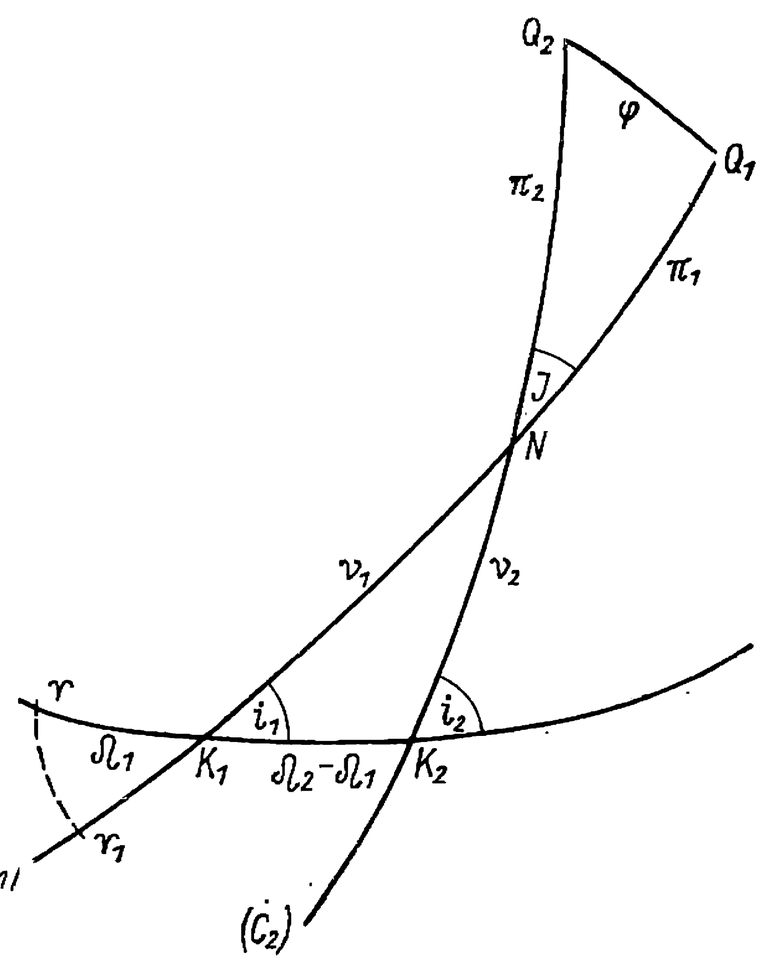

Abb. 2. Spuren der oskulierenden Bahnebenen zweier Planeten an der heliozentrischen Sphäre

(Q_1, Q_2 = Richtungen nach den Planetenörtern zur Oskulationszeit)

An der heliozentrischen Sphäre (Abb. 2) seien (C_1) und (C_2) die Spuren der oskulierenden Bahnebenen von P_1 und P_2 zu irgendeiner Oskulationsepoche t_0. Ferner seien K_1, K_2 die aufsteigenden Knoten dieser Ebenen mit der Hauptkoordinatenebene (etwa der auf eine Normalepoche bezogenen festen Ekliptik), N der aufsteigende Knoten von (C_2) bezüglich (C_1) und Q_1, Q_2 die sphärischen Örter der beiden Planeten in ihren intermediären Bahnen. Bezeichnen wir mit γ (Frühlingspunkt) die Anfangsrichtung der Längenzählung in der Hauptebene, so erhalten die Bögen und Winkel dieser Figur die in Abb. 2 angegebenen Bezeichnungen. Insbesondere seien Ω_i die Knotenlängen, i_i die Bahnneigungen, J die gegenseitige Neigung der beiden Bahnebenen und φ (der sphärische Abstand der beiden Planeten) die gesuchte Größe, deren Kosinus in beiden Teilen der Störungsfunktion auftritt.

Im sphärischen Dreieck NK_1K_2 gelten die Gaussschen Formeln

(XXIII; 23)

$$\begin{array}{l|c|c}
 & \text{I} & \text{II} \\
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{\nu_1+\nu_2}{2}=\sin\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\sin\frac{i_2+i_1}{2}, & -\sin\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2} & \cos\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2} \\
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{\nu_1+\nu_2}{2}=\cos\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\sin\frac{i_2-i_1}{2}, & \cos\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2} & \sin\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2} \\
\cos\frac{J}{2}\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}=\sin\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\cos\frac{i_2+i_1}{2}, & \sin\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2} & -\cos\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2} \\
\cos\frac{J}{2}\cos\frac{\nu_1-\nu_2}{2}=\cos\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\cos\frac{i_2-i_1}{2}, & \cos\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2} & \sin\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}
\end{array}$$

aus denen J, ν_1, ν_2 als Funktionen der Knotenlängen und Neigungen der beiden Bahnen berechnet werden können. Es sind dann, wenn $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ die im System der Ekliptik gezählten Perihellängen, v_1 und v_2 die wahren Anomalien der beiden Planeten bezeichnen,

$$l_1=\tilde{\omega}_1+v_1=\Omega_1+\nu_1+\pi_1; \qquad l_2=\tilde{\omega}_2+v_2=\Omega_2+\nu_2+\pi_2$$

deren wahre Längen. Setzt man zur Abkürzung

(XXIII; 24) $$\tau_1=\Omega_1+\nu_1; \qquad \tau_2=\Omega_2+\nu_2$$

für die längs der Ekliptik und von den Knoten aus längs (C_1) bzw. (C_2) gezählten Längen von N, so erhält man

(XXIII; 25) $$\pi_1=l_1-\tau_1; \qquad \pi_2=l_2-\tau_2,$$

und aus dem Dreieck NQ_1Q_2 ergibt sich dann

(XXIII; 26) $$\cos\varphi=\cos\pi_1\cos\pi_2+\sin\pi_1\sin\pi_2\cos J.$$

Diese Formeln sind streng und gelten für beliebige Lagen der intermediären Bahnebenen. Im System der großen Planeten sind die gegenseitigen Neigungen J der Bahnebenen klein, wenn wir Pluto, eventuell auch Merkur, ausnehmen. Dasselbe gilt mehr oder weniger auch für die überwiegende Menge der kleinen Planeten. Man wird daher statt (XXIII; 26) besser

(XXIII; 27) $$\cos\varphi=\cos(\pi_2-\pi_1)-2\sin\pi_1\sin\pi_2\sin^2\frac{J}{2}=$$

$$=\cos(\pi_2-\pi_1)\cos^2\frac{J}{2}+\cos(\pi_2+\pi_1)\sin^2\frac{J}{2}$$

schreiben und J aus Dreieck NK_1K_2 durch

$$(\text{XXIII};28)\quad \begin{cases} \cos J = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1) & \text{oder} \\ \sin^2 \dfrac{J}{2} = \sin^2 \dfrac{i_2 - i_1}{2} + \sin i_1 \sin i_2 \sin^2 \dfrac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \end{cases}$$

ausdrücken.

Multipliziert man die Gleichungen (XXIII; 23) mit den Faktoren (I) bzw. (II), so erhält man aus den ersten beiden Gleichungen durch Addition der Produkte

$$\sin \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin \frac{i_2 + i_1}{2}(\cos \Omega_2 - \cos \Omega_1) + \sin \frac{i_2 - i_1}{2}(\cos \Omega_2 + \cos \Omega_1)\right],$$

$$\sin \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin \frac{i_2 + i_1}{2}(\sin \Omega_2 - \sin \Omega_1) + \sin \frac{i_2 - i_1}{2}(\sin \Omega_2 + \sin \Omega_1)\right]$$

und aus den beiden letzten

$$\cos \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \cos^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cos \frac{i_2 - i_1}{2} + \sin^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cos \frac{i_2 + i_1}{2},$$

$$\cos \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \frac{1}{2} \sin(\Omega_2 - \Omega_1)\left(\cos \frac{i_2 - i_1}{2} - \cos \frac{i_2 + i_1}{2}\right),$$

sodann nach einfacher Reduktion die Formeln

$$(\text{XXIII};29)\quad \begin{cases} \tan \dfrac{\tau_2 + \tau_1}{2} = \dfrac{\tan \dfrac{i_2}{2} \sin \Omega_2 - \tan \dfrac{i_1}{2} \sin \Omega_1}{\tan \dfrac{i_2}{2} \cos \Omega_2 - \tan \dfrac{i_1}{2} \cos \Omega_1}, \\ \tan \dfrac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \dfrac{\tan \dfrac{i_1}{2} \tan \dfrac{i_2}{2} \sin(\Omega_2 - \Omega_1)}{1 + \tan \dfrac{i_1}{2} \tan \dfrac{i_2}{2} \cos(\Omega_2 - \Omega_1)}, \end{cases}$$

aus denen man die Größen (XXIII; 24) direkt berechnen kann. Die meist sehr kleine Differenz $\tau_2 - \tau_1$ ergibt sich dabei sehr genau, wenn die Neigungen klein sind. Nach Bd. I, S. 39, gilt, wenn eine Beziehung von der Form $\tan \zeta = k \sin \gamma/(1 + k \cos \gamma)$ mit der kleinen Konstanten k besteht, die Entwicklung (I; 12),

$$\zeta = k \sin \gamma - \frac{1}{2} k^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{3} k^3 \sin 3\gamma - \cdots.$$

Aus (XXIII; 29) folgt daher

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \tan\frac{i_1}{2}\tan\frac{i_2}{2}\sin(\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{1}{2}\tan^2\frac{i_1}{2}\tan^2\frac{i_2}{2}\sin 2(\Omega_2 - \Omega_1) + \cdots .$$

Da das zweite Glied von der Größenordnung $^1/_{32} i_1^2 i_2^2$ ist, kann es in der Störungstheorie der großen Planeten meist schon vernachlässigt werden. Andererseits ist bei kleinen und wenig verschiedenen Neigungen i_1, i_2 die Ermittlung von $\tau_1 + \tau_2$ ungenau, aber der Term in (XXIII; 27) mit $\pi_1 + \pi_2 = = l_1 + l_2 - (\tau_1 + \tau_2)$, der diese Größe enthält, ist mit dem kleinen Faktor $\sin^2(J/2)$ behaftet, der diese Unsicherheit kompensiert.

Die Formeln (XXIII; 22, 26—28), die zur Berechnung des Winkels φ und der Distanzen r_i führen, sind von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Das gilt z. B. auch für die erste Gleichung (XXIII; 22), da wohl die Längen ε_i, $\tilde{\omega}_i$, die auf der Ekliptik bis zum Knoten K_i, sodann auf der Spur (C_i) weitergezählt werden, von der Orientierung des Systems abhängen, nicht aber die Differenzen $\varepsilon_i - \tilde{\omega}_i$. Es ist daher oft angebracht, das System der Ekliptik durch ein anderes zu ersetzen, in dem die Formeln einfacher werden. So kann man etwa als Hauptebene eine der Ebenen (C_1) oder (C_2) bestimmen. Wählt man (C_1) und definiert in ihr eine Anfangsrichtung („departure point") — etwa die Richtung Υ_1 (s. Abb. 2), die man erhält, indem man von K_1 aus den Bogen $K_1\Upsilon$ auf (C_1) überträgt — so sind in diesem System, das wir kurz als C_1-System bezeichnen,

$$L_1 = \Omega_1 + \nu_1 + \pi_1 = \tau_1 + \pi_1 = l_1 ,$$
$$L_2 = \Omega_1 + \nu_1 + \pi_2 = \tau_1 + \pi_2 = l_2 - (\tau_2 - \tau_1)$$

die wahren Längen von Q_1 und Q_2. Die durch (XXIII; 29) genau aus den ekliptikalen Lagekoordinaten der beiden Ebenen bestimmbare Größe $\tau_2 - \tau_1$ genügt also zur Umwandlung der Längen l_i in L_i. Die Lagekoordinaten von (C_2) sind dann

$$\Omega_2' = \tau_1 , \quad i_2' = J ,$$

und es ist ferner

$$\pi_1 = L_1 - \tau_1 , \quad \pi_2 = L_2 - \tau_1 .$$

Setzt man für die Länge des Knotens N im C_1-System einfach τ statt τ_1, so ergibt sich statt (XXIII; 27)

(XXIII; 30)
$$\cos\varphi = \cos(L_2 - L_1) - 2\sin(L_1 - \tau)\sin(L_2 - \tau)\sin^2\frac{J}{2} =$$
$$= \cos(L_2 - L_1)\cos^2\frac{J}{2} + \cos(L_1 + L_2 - 2\tau)\sin^2\frac{J}{2} .$$

Es werden später (Kap. XXV) die im (C_1)-System gezählten Perihellängen mit ω_1, ω_2 bezeichnet werden, die dann nicht mit den sonst ebenso bezeichneten „Perihelabständen vom Knoten" verwechselt werden dürfen. Es ist dann offenbar

(XXIII; 30a)
$$\begin{cases} \omega_1 = \tilde{\omega}_1 ; \quad \omega_2 = \tilde{\omega}_2 - (\tau_2 - \tau_1) , \\ v_1 = l_1 - \tilde{\omega}_1 = L_1 - \omega_1 ; \quad v_2 = l_2 - \tilde{\omega}_2 = L_2 - \omega_2 . \end{cases}$$

200. Die Laplaceschen Koeffizienten

Die Störungsfunktion (XXIII; 7) läßt sich, wie in Abschnitt 135 gezeigt wurde, in trigonometrische Reihen der Form

$$(\text{XXIII}; 31) \qquad R = \sum_{j,k} C_{jk} \cos (j\lambda_1 + k\lambda_2 + D_{jk})$$

entwickeln, wo C_{jk}, D_{jk} in erster Näherung, d. h. bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung in den störenden Massen, Konstanten, die von den intermediären Bahnelementen $a_i, e_i, \ldots$ $(i = 1, 2)$ des gestörten und des störenden Körpers abhängen, λ_1 und λ_2 die mittleren Längen und j, k ganze Zahlen sind, die auch negativ oder Null sein können. Die in den Störungsgleichungen auftretenden partiellen Ableitungen dieser Ausdrücke nach den Variablen des Problems, etwa den gestörten Bahnelementen, haben dann die gleiche trigonometrische Form und lassen sich gliedweise nach der Zeit integrieren. Die hierbei entstehenden trigonometrischen Reihen geben bereits ein brauchbares Bild des Verhaltens der variablen Elemente über längere Zeiträume, wenn es im Rahmen der angestrebten Genauigkeit statthaft ist, die Entwicklung auf eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Gliedern zu beschränken. Das gelingt im allgemeinen, wenn die Exzentrizitäten sowie die Neigungen der intermediären Bahnen gegen eine passend gewählte Hauptkoordinatenebene klein sind.

Diese Aufgabe ist in Abschnitt 138 zunächst teilweise durchgeführt worden, nämlich bis zur zweiten Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen und unter Beschränkung auf solche Terme, die konstant sind, also keine trigonometrischen Funktionen der mittleren Längen oder Anomalien enthalten, und die nach erfolgter Integration also nur die der Zeit proportionalen säkularen Störungen liefern. Dort wurde auch gezeigt, daß der Nebenteil ψ der Störungsfunktion nur periodische Glieder enthält (also bei der Ableitung säkularer Störungen unbeachtet bleibt). Den Hauptteil $\Psi = \varrho^{-1}$ kann man in Reihen von der Form (XVI; 34),

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}\left(1 + \frac{\sigma}{{\varrho_0}^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{{\varrho_0}^3} + \frac{3}{8}\frac{\sigma^2}{{\varrho_0}^5} - \frac{5}{16}\frac{\sigma^3}{{\varrho_0}^7} + \cdots,$$

entwickeln, wo

$$(\text{XXIII}; 32) \qquad {\varrho_0}^{-1} = {a_2}^{-1}\left[1 - 2\frac{a_1}{a_2}\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad (a_1 < a_2),$$

oder

$$(\text{XXIII}; 32\text{a}) \qquad {\varrho_0}^{-1} = {a_1}^{-1}\left[1 - 2\frac{a_2}{a_1}\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad (a_1 > a_2)$$

den reziproken Abstand zweier fiktiver Planeten bezeichnet, die in der Hauptkoordinatenebene Kreisbahnen mit den Halbmessern a_1 und a_2 beschreiben

und deren Längenunterschied[1]) $l_2 - l_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ daher der Zeit proportional bleibt. Es ist dann [s. auch (XVI; 33)]

$$\sigma = \varrho^2 - \varrho_0{}^2,$$

und es gelingt unschwer, diesen Ausdruck nach Funktionen von λ_1 und λ_2 sowie nach Potenzen der Poincaréschen Koordinaten (XVI; 30) $\xi, \eta; p, q$ zu entwickeln, die klein von der Ordnung der Exzentrizitäten e_1, e_2 bzw. der Neigungen i_1, i_2 (oder $\sin i_1$, $\sin i_2$) sind.

Um die Begriffe zu fixieren, betrachten wir hier stets den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, daß $P_1(a_1, e_1, \ldots)$ der gestörte, $P_2(a_2, e_2, \ldots)$ der störende Planet ist und daß $a_1 < a_2$, also für $\varrho_0{}^{-1}$ die Form (XXIII; 32) angemessen ist. Der Fall $a_1 > a_2$ erfordert nach der Bemerkung auf S. 37 lediglich eine Vertauschung der Indizes.

Das Hauptproblem besteht dann in der Entwicklung der Ausdrücke (XVI; 35),

$$\text{(XXIII; 33)} \qquad \begin{cases} f^{(s)}(\alpha, \gamma) = \left(\dfrac{a_2}{\varrho_0}\right)^{2s} = [1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2]^{-s}, \\ \alpha = \dfrac{a_1}{a_2} < 1; \qquad \gamma = \lambda_2 - \lambda_1, \end{cases}$$

für die Exponentenfolge $s = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$

Da $f^{(s)}(\alpha, \gamma)$ eine gerade periodische Funktion von γ mit der Periode π ist, kann man diesen Ausdruck in eine Fouriersche Kosinusreihe

$$\text{(XXIII; 33a)} \qquad f^{(s)} = \frac{1}{2} b_0{}^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k{}^{(s)} \cos k\gamma = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k{}^{(s)} \cos k\gamma$$

entwickeln, die ihn im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ darstellt. Die Fourier-Koeffizienten[2]) lassen sich auch in der Integralform

$$\text{(XXIII; 34)} \qquad b_k{}^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\gamma \, d\gamma}{(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^s}$$

schreiben, und es ist offensichtlich $b_k{}^{(s)} \equiv b_{-k}^{(s)}$.

In bezug auf die großen Halbachsen a_1 und a_2 sind die Funktionen $f^{(s)}$ und die Koeffizienten $b_k{}^{(s)}$ nicht symmetrisch. Die Symmetrie läßt sich aber herstellen, indem man (XXIII; 33) mit der Konstanten $\alpha^{s-1/2} a_2{}^{-1}$ multipliziert.

---

[1]) Wir bezeichnen mit l_i die wahren, mit λ_i die mittleren Längen. In Kreisbahnen ist $l_i = \lambda_i$.

[2]) In der Literatur findet man durchweg die Bezeichnung $b_s{}^{(k)}$. Es ist aber zweckmäßiger, die obige Bezeichnungsweise zu gebrauchen, da k den Charakter eines Summationsindex, s den eines Exponenten oder einer Ordnung hat. Charlier benutzt in seiner „Mechanik des Himmels“ das Symbol $L_k{}^{(s)}$, das genau unserem $b_k{}^{(s)}$ entspricht, das wir schon in Abschnitt 138 eingeführt haben und auch weiterhin benutzen werden.

Dann läßt sich

$$F^{(s)}(a_1, a_2; \gamma) = \alpha^{s-1/2} a_2^{-1} f^{(s)}(\alpha, \gamma)$$

in die FOURIERsche Reihe

$$F^{(s)} = \frac{1}{2}\beta_0^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(s)} \cos k\gamma$$

mit den Koeffizienten

$$\text{(XXIII; 35)} \qquad \beta_k^{(s)} = \frac{\alpha^{s-1/2}}{a_2} b_k^{(s)} = \frac{{a_1}^{s-1/2}}{{a_2}^{s+1/2}} b_k^{(s)}$$

entwickeln, und es ist offensichtlich

$$\text{(XXIII; 35a)} \qquad \beta_k^{(s)}(a_1, a_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(a_1 a_2)^{s-1/2} \cos\gamma \, d\gamma}{({a_1}^2 + 2a_1 a_2 \cos\gamma + {a_2}^2)^s}$$

symmetrisch in a_1 und a_2. Wie im nächsten Abschnitt bewiesen wird, kann man mit nur von s und k abhängigen Koeffizienten c_i,

$$b_k^{(s)} = \alpha^k (c_0 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha^4 + \cdots)$$

schreiben. Daher sind

$$\text{(XXIII; 36)} \qquad \beta_k^{(s)} = \frac{{a_1}^{s-1/2}}{{a_2}^{s+1/2}} \alpha^k (c_0 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha^4 + \cdots) =$$

$$= {a_1}^{k+s-1/2} {a_2}^{-k-s-1/2} (c_0 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha^4 + \cdots)$$

algebraische Funktionen von a_1, a_2 vom Grade -1. Dasselbe folgt auch unmittelbar aus dem Integranden von (XXIII; 35a), dessen Zähler und Nenner vom Grade $2s - 1$ bzw. $2s$ sind.

Da in den Formeln der Störungstheorie der Planeten selten mehr als die ersten Werte der Ordnungsfolge $s = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$ benutzt werden, ist es unter Umständen zweckmäßig, die Bezeichnungen

$$\text{(XXIII; 37)} \qquad A_k = \beta_k^{(1/2)}, \quad B_k = \beta_k^{(3/2)}, \quad C_k = \beta_k^{(5/2)}, \ldots$$

zu verwenden, die schon in den Abschnitten 138—139 eingeführt worden sind.

201. Berechnung der Laplaceschen Koeffizienten

Nach den in Abschnitt 139 abgeleiteten Rekursionsformeln (XVI; 58),

$$\text{(XXIII; 38)} \quad \begin{cases} s[b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)}] = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2} [(k+s) b_k^{(s)} - (k-s+1) b_{k+1}^{(s)}], \\ s[b_k^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)}] = \dfrac{1}{(1+\alpha)^2} [(k+s) b_k^{(s)} + (k-s+1) b_{k+1}^{(s)}], \end{cases}$$

lassen sich sukzessive alle LAPLACEschen Koeffizienten der Ordnung $s + 1$ berechnen, wenn die von der Ordnung s bekannt sind. Sämtliche Koeffizienten sind also auf die der niedrigsten Ordnung, $s = 1/2$, zurückführbar. Diese erhält man aber aus der Beziehung (XVI; 55) für $s = 1/2$,

$$\text{(XXIII; 39)} \qquad \alpha\left(k + \frac{3}{2}\right) b_{k+2}^{(1/2)} = (1 + \alpha^2)\,(k + 1)\, b_{k+1}^{(1/2)} - \alpha\left(k + \frac{1}{2}\right) b_k^{(1/2)},$$

wenn $b_0^{(1/2)}$ und $b_1^{(1/2)}$ vorliegen.

Aus diesen beiden fundamentalen Koeffizienten gehen also alle $b_k^{(s)}$ durch Rekursionsformeln hervor. Sie lassen sich aber auch direkt, z. B. durch konvergente, nach Potenzen von α fortschreitende Reihen darstellen. Aus (XVI; 51),

$$\text{(XXIII; 40)} \qquad \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(s)} z^k = (1 - \alpha z)^{-s}\,(1 - \alpha z^{-1})^{-s},$$

ergibt sich $^1/_2 b_k^{(s)}$ als Koeffizient von z^k, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung nach Potenzen von z entwickelt. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum b_k^{(s)} z_k = &\left[1 + \binom{s}{1} \alpha z + \binom{s+1}{2} \alpha^2 z^2 + \cdots\right]\left[1 + \binom{s}{1} \alpha z^{-1} + \right. \\
&\left. + \binom{s+1}{2} \alpha^2 z^{-2} + \cdots\right] = \\
&1 + \alpha \binom{s}{1} (z + z^{-1}) = + \alpha^2 \left[\binom{s+1}{2} (z^2 + z^{-2}) + \binom{s}{1}^2\right] + \\
&+ \alpha^3 \left[\binom{s+2}{3} (z^3 + z^{-3}) + \binom{s}{1}\binom{s+1}{2} (z + z^{-1})\right] + \cdots
\end{aligned}$$

und im einzelnen, da die Koeffizienten von z^k und z^{-k} einander gleich sind, also $b_k^{(s)} = b_{-k}^{(s)}$ ist, für $k \geqq 0$

$$\text{(XXIII; 40a)} \quad \begin{cases}
\frac{1}{2} b_0^{(s)} = 1 + \binom{s}{1}^2 \alpha^2 + \binom{s+1}{2}^2 \alpha^4 + \binom{s+2}{3}^2 \alpha^6 + \cdots = \\
\qquad = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s}{i}^2 \alpha^{2i}, \\
\frac{1}{2} b_1^{(s)} = \alpha \left[\binom{s}{1} + \binom{s}{1}\binom{s+1}{2} \alpha^2 + \right. \\
\qquad \left. + \binom{s+1}{2}\binom{s+2}{3} \alpha^4 + \cdots\right], \\
\frac{1}{2} b_2^{(s)} = \alpha^2 \left[\binom{s+1}{2} + \binom{s}{1}\binom{s+2}{3} \alpha^2 + \right. \\
\qquad \left. + \binom{s+1}{2}\binom{s+3}{4} \alpha^4 + \cdots\right],
\end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\

mit $a = s + k$, $c = k + 1$, $x = \alpha^2$ hervor. Beide Reihen sind für $\alpha < 1$ konvergent, aber die Konvergenz ist nur für kleine α befriedigend. Die zahlreichen Möglichkeiten von Transformationen der hypergeometrischen Funktion verhelfen zu weiteren Reihenentwicklungen mannigfacher Art, die auch für größere Werte α rascher konvergieren. Die Reihe (XXIII; 43), die besser konvergiert als (XXIII; 41), ist nur eine von vielen.[1])

An Tafeln derjenigen LAPLACEschen Koeffizienten, die in den Reihenentwicklungen der Störungstheorie am häufigsten vorkommen, ist kein Mangel.[2]) Über die Vielzahl der Methoden, die zur numerischen Berechnung dieser Größen dienen, darf auf die Literatur verwiesen werden. In nahezu erschöpfendem Umfang findet man sie in dem Enzyklopädieartikel von H. VON ZEIPEL[1]) zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen die fundamentalen Koeffizienten $b_0^{(1/2)}$ und $b_1^{(1/2)}$, die man in einfacher Weise durch elliptische Integrale ausdrücken kann. Nach (XXIII; 34) ist

(XXIII; 44)

$$b_0^{(1/2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}}; \qquad b_1^{(1/2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\gamma\, d\gamma}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}}.$$

Aus der LANDENschen Transformationsgleichung

(XXIII; 45) $$\sin(\beta - \gamma) = \alpha \sin\beta,$$

die γ in β überführt, erhält man durch Differenzieren

$$d\beta[\cos(\beta - \gamma) - \alpha\cos\beta] = d\gamma\cos(\beta - \gamma)$$

oder

$$d\gamma = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta} - \alpha\cos\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}}\, d\beta.$$

Andererseits ist

$$\cos\gamma = \cos(\beta - \gamma)\cos\beta + \sin(\beta - \gamma)\sin\beta = \cos\beta\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta} + \alpha\sin^2\beta$$

---

[1]) Siehe z. B. W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1948, S. 10ff.; F. G. TRICOMI, Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955, S. 147ff.; H. VON ZEIPEL, Entwicklung der Störungsfunktion. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften VI, 2, S. 562ff.; G. WITT, Die Koeffizienten der Störungsfunktion. A.N. *269*, 74ff. (1939).

[2]) Siehe z. B. E. W. BROWN und D. BROUWER, Tables for the development of disturbing function with schedules for harmonic analysis. Trans. astron. Observ. Yale 6, Part 5, 1937.

und daher

$$1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2 \quad 1 - 2\alpha\cos\beta\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta} - 2\alpha^2\sin^2\beta + \alpha^2$$
$$= \left[\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta} - \alpha\cos\beta\right]^2,$$

woraus

$$\frac{d\gamma}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}} = \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}}$$

folgt. Es ist aber die rechte Seite von (XXIII;45) $\geqq 0$ für $0 \leqq \beta \leqq \pi$. Im selben Intervall ist also auch $\beta - \gamma \geqq 0$, und es ist $\beta = \gamma$ an dessen Rändern. Mithin gilt

$$b_0^{(1/2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}},$$

$$b_1^{(1/2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\beta\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta} + \alpha\sin^2\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}}\,d\beta.$$

Da aber

$$\alpha\sin^2\beta = \frac{1}{\alpha}\left[1 - (1 - \alpha^2\sin^2\beta)\right]$$

geschrieben werden kann, ist

$$b_1^{(1/2)} = \frac{2}{\pi\alpha}\left[\int_0^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}} - \int_0^\pi \sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}\,d\beta\right].$$

Führt man demnach die elliptischen Integrale

$$\text{(XXIII; 46)} \qquad \mathbf{F}(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}}; \qquad \mathbf{E}(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\beta}\,d\beta$$

ein, so erhält man

$$\text{(XXIII; 47)} \qquad b_0^{(1/2)} = \frac{4}{\pi}\mathbf{F}(\alpha), \qquad b_1^{(1/2)} = \frac{4}{\pi\alpha}\left[\mathbf{F}(\alpha) - \mathbf{E}(\alpha)\right]$$

als einfache Funktionen der beiden Integrale **F** und **E**, für die LEGENDRE[1]) Tafeln auf 14 Dezimalen berechnet hat, die man aber auch mit geringerer Stellenzahl aus vielen neueren Tafelwerken entnehmen kann.

---

[1]) A. M. LEGENDRE, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, Bd. 2. Paris 1829.

Zur Berechnung der $b_k^{(s)}$ aus den Fundamentalgrößen (XXIII; 47) sind noch einige Bemerkungen angebracht:

1. Bei festgehaltenem α und s bilden die $b_k^{(s)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ eine gegen Null monoton abnehmende Folge. Aus der ersten Gleichung (XXIII; 38) folgt zunächst

$$(k+s)\,b_k^{(s)} - (k-s+1)\,b_{k+1}^{(s)} = \left(k+\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} - b_{k+1}^{(s)}) +$$

$$+\left(s-\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}) = s(1-\alpha)^2\,(b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)})$$

oder

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} - b_{k+1}^{(s)}) = s(1-\alpha)^2\,(b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)}) - \left(s-\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}).$$

Hieraus ergibt sich für $s = 1/2$

$$b_k^{(1/2)} - b_{k+1}^{(1/2)} = \frac{(1-\alpha)^2}{2k+1}\,(b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)}) > 0,$$

da alle $b_k^{(s)} > 0$ sind. Die Folge $b_k^{(1/2)}$ nimmt also monoton gegen irgendeinen Grenzwert $\geqq 0$ ab. Dasselbe gilt auch für $s > 1/2$, denn aus der zweiten Gleichung (XXIII; 38) entnimmt man

(XXIII; 48)

$$b_k^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)} = \frac{1}{s(1+\alpha)^2}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}) + \left(s-\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} - b_{k+1}^{(s)})\right] > 0.$$

Diese Ungleichung ist für $s = 1/2$ richtig, gilt dann aber sukzessive auch für $s = 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$

Der Grenzwert der Folge $b_k^{(s)}$ bei festem α und s ist aber Null, denn aus (XXIII; 48) erhält man

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}) =$$

$$= s(1+\alpha)^2\,(b_k^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)}) - \left(s-\frac{1}{2}\right)(b_k^{(s)} - b_{k+1}^{(s)}) < s(1+\alpha)^2\,b_k^{(s+1)}.$$

Es gilt also die rohe Abschätzung

$$b_{k+1}^{(s)} < \frac{1}{2}\,(b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}) < \frac{s(1+\alpha)^2}{2k+1}\,b_k^{(s+1)} < \frac{s(1+\alpha)^2}{2k+1}\,b_0^{(s+1)},$$

so daß für genügend große k alle $b_k^{(s)}$ unter einer beliebig kleinen positiven Schranke liegen.

2. Die Rekursionsformel (XVI; 55),

$$(\text{XXIII}; 49) \qquad b_{k+2}^{(s)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{k+1}{k-s+2}\,b_{k+1}^{(s)} - \frac{k+s}{k-s+2}\,b_k^{(s)},$$

die für $s = 1/2$ in (XXIII; 39) übergeht und aus der man sukzessive alle $b_k^{(s)}$ aus gegebenen Anfangswerten $b_0^{(s)}$ und $b_1^{(s)}$ ableiten kann, liefert für kleine α und für große k ungenaue Zahlenwerte. Ist α sehr klein, so geht ein Abrundungsfehler in $b_{k+1}^{(s)}$ mit dem großen Faktor $1/\alpha$ in die Rechnung ein. Bei fortgesetzter Anwendung der Formel wird dieser Fehlereinfluß schnell wachsen und schließlich die Ergebnisse illusorisch machen. Ist k sehr groß, so wird, wie oben bewiesen, die linke Seite von (XXIII; 49) sehr klein, und rechts steht dann die Differenz zweier nahezu gleicher Zahlen, was bei numerischer Rechnung immer mit einem Verlust an Stellengenauigkeit verbunden ist.

3. Zur Beseitigung der unter Ziffer 2 angedeuteten Schwierigkeiten dient folgendes Verfahren: Man setze

$$(\text{XXIII}; 50) \qquad p_k^{(s)} = b_k^{(s)}/b_{k-1}^{(s)}.$$

Dann ist nach (XXIII; 49)

$$p_{k+2}^{(s)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{k+1}{k-s+2} - \frac{k+s}{k-s+2}\,\frac{1}{p_{k+1}^{(s)}}$$

oder, wenn man k mit $k-2$ vertauscht,

$$p_k^{(s)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{k-1}{k-s}\left[1 - \frac{k+s-2}{k-1}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,\frac{1}{p_{k-1}^{(s)}}\right].$$

Führt man nun neue Größen $\gamma_k^{(s)}$ durch

$$(\text{XXIII}; 51)$$

$$\gamma_k^{(s)} = p_k^{(s)}\,\frac{k}{k+s-1}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha}; \qquad \gamma_{k-1}^{(s)} = p_{k-1}^{(s)}\,\frac{k-1}{k+s-2}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha}$$

ein, so folgt

$$\gamma_k^{(s)}\,\frac{k+s-1}{k}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{k-1}{k-s}\left(1 - \frac{1}{\gamma_{k-1}^{(s)}}\right),$$

d. h.

$$\gamma_k^{(s)} = \frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2}\,\frac{k(k-1)}{(k-s)(k+s-1)}\left(1 - \frac{1}{\gamma_{k-1}^{(s)}}\right) = \frac{1}{\lambda_k^{(s)}}\left(1 - \frac{1}{\gamma_{k-1}^{(s)}}\right)$$

oder

$$(\text{XXIII}; 52)$$

$$\gamma_{k-1}^{(s)} = \frac{1}{1 - \lambda_k^{(s)}\gamma_k^{(s)}} \quad \text{mit} \quad \lambda_k^{(s)} = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,\frac{(k-s)\,(k+s-1)}{k(k-1)}.$$

Man findet also, wenn für irgendein k der Wert $\gamma_k^{(s)}$ bekannt ist, nach (XXIII; 52) alle Glieder der absteigenden Folge $\gamma_{k-1}^{(s)}, \gamma_{k-2}^{(s)}, \ldots, \gamma_1^{(s)}$ und kann dann nach (XXIII; 51) die zugehörigen

$$p_j^{(s)} = \gamma_j^{(s)} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{j+s-1}{j} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k$$

berechnen. Aus ihnen und $b_0^{(s)}$ erhält man dann die Folge

$$b_1^{(s)} = b_0^{(s)} p_1^{(s)}; \quad b_2^{(s)} = b_1^{(s)} p_2^{(s)}; \quad \ldots; \quad b_k^{(s)} = b_{k-1}^{(s)} p_k^{(s)}$$

mit aller wünschenswerten Genauigkeit.

Dieses Verfahren setzt, wenn k der größte Index ist, bis zu dem die Folge $b_k^{(s)}$ berechnet werden soll, die Kenntnis von $\gamma_k^{(s)}$ voraus. GAUSS[1]) gibt für diese Größe eine Kettenbruchentwicklung an, die um so besser konvergiert, je größer k und je kleiner α ist, die also genau die Eigenschaften besitzt, die hier verlangt werden:

Aus der Entwicklung (XXIII; 42) der hypergeometrischen Funktion folgt

$$F(a, b, c; x) = 1 + \binom{a}{1} \frac{b}{c} x + \binom{a+1}{2} \frac{b(b+1)}{c(c+1)} x^2 + \binom{a+2}{3} \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdots,$$

$$F(a, b+1, c+1; x) = 1 + \binom{a}{1} \frac{b+1}{c+1} x + \binom{a+1}{2} \frac{(b+1)(b+2)}{(c+1)(c+2)} x^2 + \binom{a+2}{3} \frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{(c+1)(c+2)(c+3)} x^3 + \cdots.$$

Nach Subtraktion dieser beiden Gleichungen und einfacher Reduktion erhält man

(XXIII; 53)

$$F(a, b, c; x) - F(a, b+1, c+1; x) = \frac{a(b-c)}{c(c+1)} x F(a+1, b+1, c+2; x)$$

und, da die Argumente a und b vertauschbar sind,

(XXIII; 54)

$$F(a, b, c; x) - F(a+1, b, c+1; x) = \frac{b(a-c)}{c(c+1)} x F(a+1, b+1, c+2; x).$$

---

[1]) C. F. GAUSS, Werke Bd. 3. 1813, S. 134.

Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln läßt sich der Gausssche Kettenbruch leicht ableiten. Nach (XXIII; 51) ist

$$\gamma_k^{(s)} = p_k^{(s)} \frac{k(1+\alpha^2)}{\alpha(k+s-1)}$$

und wegen (XXIII; 50 und 41)

$$p_k^{(s)} = \frac{b_k^{(s)}}{b_{k-1}^{(s)}} = \frac{\alpha(k+s-1)}{k} \frac{F(s, k+s, k+1; \alpha^2)}{F(s, k+s-1, k; \alpha^2)},$$

mithin

$$\gamma_k^{(s)} = (1+\alpha^2) \frac{F(s, k+s, k+1; \alpha^2)}{F(s, k+s-1, k; \alpha^2)}.$$

Setzt man also

(XXIII; 55) $$s = a, \quad k = c = b - a + 1, \ \alpha^2 = x,$$

so kann man schreiben

$$z_0 = \frac{\gamma_k^{(s)}}{1+\alpha^2} = \frac{F(a, b+1, c+1; x)}{F(a, b, c; x)}.$$

Man definiere nun, hiermit in Übereinstimmung, für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Folge

(XXIII; 56) $$z_n = \frac{F(a+n, b+n+1, c+2n+1)}{F(a+n, b+n, c+2n)},$$

wobei hier und im folgenden der Kürze wegen das Argument x unter dem Funktionszeichen fortgelassen werde. Aus (XXIII; 53) ergibt sich dann, wenn man dort a, b, c durch $a+n, b+n, c+2n$ ersetzt,

(XXIII; 57)

$$z_n = 1 + x \frac{(a+n)(c-b+n)}{(c+2n)(c+2n+1)} \frac{F(a+n+1, b+n+1, c+2n+2)}{F(a+n, b+n, c+2n)} =$$

$$= 1 + x a_n \xi_n = \frac{1}{\left(1 - x a_n \frac{\xi_n}{z_n}\right)}$$

mit

$$a_n = \frac{(a+n)(c-b+n)}{(c+2n)(c+2n+1)}, \qquad \xi_n = \frac{F(a+n+1, b+n+1, c+2n+2)}{F(a+n, b+n, c+2n)}.$$

Aus (XXIII; 56, 57) folgt aber

(XXIII; 58) $$\frac{\xi_n}{z_n} = \frac{F(a+n+1, b+n+1, c+2n+2)}{F(a+n, b+n+1, c+2n+1)}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich nach (XXIII; 54), wenn man dort a, b, c mit $a + n$, $b + n + 1$, $c + 2n + 1$ vertauscht, in der Form

$$\frac{\xi_n}{z_n} = 1 + x\frac{(b+n+1)(c-a+n+1)}{(c+2n+1)(c+2n+2)} \times$$

$$\times \frac{F(a+n+1,\ b+n+2,\ c+2n+3)}{F(a+n,\ b+n+1,\ c+2n+1)} = 1 + xb_n\eta_n = \frac{1}{\left(1 - xb_n\eta_n\frac{z_n}{\xi_n}\right)}$$

schreiben, wenn

(XXIII; 59)
$$\begin{cases} b_n = \dfrac{(b+n+1)(c-a+n+1)}{(c+2n+1)(c+2n+2)}, \\ \eta_n = \dfrac{F(a+n+1,\ b+n+2,\ c+2n+3)}{F(a+n,\ b+n+1,\ c+2n+1)} \end{cases}$$

gesetzt wird. Aus (XXIII; 58, 59) folgt aber

$$\eta_n\frac{z_n}{\xi_n} = \frac{F(a+n+1,\ b+n+2,\ c+2n+3)}{F(a+n+1,\ b+n+1,\ c+2n+2)} = z_{n+1}$$

und somit nach (XXIII; 57)

$$z_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{xa_n}{1 - xb_nz_{n+1}}},$$

was unmittelbar zu der Kettenbruchentwicklung

$$z_0 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{xa_0}{1 - \cfrac{xb_0}{1 - \cfrac{xa_1}{1 - \cfrac{xb_1}{\cdots\cdots}}}}}$$

führt. Setzt man nun nach (XXIII; 55)

$$a = s; \quad b = k + s - 1; \quad c = k; \quad x = \alpha^2,$$

so erhält man

(XXIII; 60)
$$a_n = \frac{(s+n)(n-s+1)}{(k+2n)(k+2n+1)}, \qquad b_n = \frac{(k+s+n)(k-s+n+1)}{(k+2n+1)(k+2n+2)}$$

und mit diesen Konstanten den Kettenbruch

$$(\text{XXIII}; 61) \qquad \gamma_k^{(s)} = z_0(1+\alpha^2) = \cfrac{1+\alpha^2}{1-\cfrac{a_0\alpha^2}{1-\cfrac{b_0\alpha^2}{1-\cfrac{a_1\alpha^2}{1-\cfrac{b_1\alpha^2}{\cdots\cdots}}}}}.$$

Für große k strebt a_0 gegen Null und daher $\gamma_k^{(s)}$ gegen $1+\alpha^2$. Der Kettenbruch konvergiert also um so rascher, je größer k, aber auch je kleiner α ist, also gerade dann, wenn die Rekursionsformel (XXIII; 49) versagt.

202. Die Ableitungen der Laplaceschen Koeffizienten

In Kapitel XXV wird gezeigt werden, daß bei der Entwicklung der Störungsfunktion auch die Ableitungen

$$\frac{d^p}{d\alpha^p} b_k^{(s)}, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

der Laplaceschen Koeffizienten nach α gebraucht werden. Man kann diese aus den Reihen (XXIII; 41), die von der Form

$$b_k^{(s)} = \alpha^k(c_0 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha^4 + \cdots)$$

sind, direkt durch Differenzieren bilden. Die so entstehenden Reihen konvergieren aber mit wachsendem p fortlaufend schlechter, also auch schlechter als die Reihen (XXIII; 41) selbst. Es ist daher zweckmäßig, Formeln zu benutzen, durch die alle Ableitungen als Funktionen der $b_k^{(s)}$ selbst erscheinen, die nun als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Aus (XXIII; 40) erhält man durch Differenzieren nach α

$$\frac{1}{2}\sum \frac{db_k^{(s)}}{d\alpha} z^k = sz(1-\alpha z)^{-(s+1)}(1-\alpha z^{-1})^{-s} + sz^{-1}(1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha z^{-1})^{-(s+1)} =$$

$$= s(1-\alpha z)^{-(s+1)}(1-\alpha z^{-1})^{-(s+1)}[z - 2\alpha + z^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{2} s(z - 2\alpha + z^{-1}) \sum b_k^{(s+1)} z^k$$

oder, da die Größen $db_k^{(s)}/d\alpha$ auf beiden Seiten durch den Koeffizienten von z^k dargestellt werden,

$$(\text{XXIII}; 62) \qquad \frac{db_k^{(s)}}{d\alpha} = s(b_{k-1}^{(s+1)} - 2\alpha b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)}).$$

Durch wiederholtes Differenzieren ergeben sich hieraus sämtliche Ableitungen der $b_k^{(s)}$ sukzessive als lineare Funktionen der LAPLACEschen Koeffizienten. Die Formeln (XXIII; 62) haben aber den Nachteil, daß man zur Berechnung der p-ten Ableitungen vom Typus s alle Koeffizienten von Typus $s+1$, $s+2, \ldots, s+p$ kennen muß. Man vermeidet das, indem man die Differenzen

$$\frac{d}{d\alpha}(b_k^{(s)} - b_{k-2}^{(s)}) = s[(b_{k-1}^{(s+1)} - b_{k-3}^{(s+1)}) - 2\alpha(b_k^{(s+1)} - b_{k-2}^{(s+1)}) + (b_{k+1}^{(s+1)} - b_{k-1}^{(s+1)})]$$

bildet. Wegen (XVI; 54),

$$\alpha s(b_{k+1}^{(s+1)} - b_{k-1}^{(s+1)}) = -kb_k^{(s)}, \tag{XXIII; 63}$$

folgt dann

$$\alpha\frac{d}{d\alpha}(b_k^{(s)} - b_{k-2}^{(s)}) = -(k-2)\,b_{k-2}^{(s)} + 2\alpha(k-1)\,b_{k-1}^{(s)} - kb_k^{(s)}. \tag{XXIII; 64}$$

Differenziert man diese Gleichung $(p-1)$-mal nach α, so erhält man, da allgemein

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}[\alpha f(\alpha)] = \alpha\frac{d^n f}{d\alpha^n} + n\frac{d^{n-1}f}{d\alpha^{n-1}} \tag{XXIII; 65}$$

ist,

$$\alpha\frac{d^p}{d\alpha^p}(b_k^{(s)} - b_{k-2}^{(s)}) = 2(k-1)\,(p-1)\frac{d^{p-2}}{d\alpha^{p-2}}b_{k-1}^{(s)} + \tag{XXIII; 66}$$

$$+\frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}}[(p-k+1)\,b_{k-2}^{(s)} + 2\alpha(k-1)\,b_{k-1}^{(s)} - (p+k-1)\,b_k^{(s)}],$$

eine Beziehung, die für $p=1$ in (XXIII; 64) übergeht und mit deren Hilfe man nacheinander alle Ableitungen der $b_k^{(s)}$ bis zur Ordnung p erhält, wenn die Ableitungen von $b_0^{(s)}$ und $b_1^{(s)}$ bis zur selben Ordnung bekannt sind. Diese gewinnt man aber nach folgendem Verfahren: Aus (XXIII; 63) ergibt sich zunächst

$$b_{k-1}^{(s+1)} = \frac{k}{\alpha s}b_k^{(s)} + b_{k+1}^{(s)}.$$

Setzt man dies in (XXIII; 62) ein, so folgt

$$\frac{db_k^{(s)}}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha}b_k^{(s)} + 2sb_{k+1}^{(s+1)} - 2\alpha sb_k^{(s+1)}.$$

Nach (XVI; 57a, b) ist aber

$$s(1-\alpha^2)^2 b_k^{(s+1)} = (1+\alpha^2)\,(k+s)\,b_k^{(s)} - 2\alpha(k-s+1)\,b_{k+1}^{(s)},$$
$$s(1-\alpha^2)^2 b_{k+1}^{(s+1)} = 2\alpha(k+s)\,b_k^{(s)} - (1+\alpha^2)\,(k-s+1)\,b_{k+1}^{(s)}$$

und daher

$$\text{(XXIII; 67)} \qquad \alpha(1-\alpha^2)\frac{db_k^{(s)}}{d\alpha} = [k+(k+2s)\alpha^2]\,b_k^{(s)} - 2\alpha(k-s+1)\,b_{k+1}^{(s)}.$$

Setzt man in (XXIII; 67) $k = 0$ bzw. $k = -1$ und bedenkt, daß $b_{-k}^{(s)} = b_k^{(s)}$ ist, so erhält man

$$\text{(XXIII; 68)} \quad \begin{cases} (1-\alpha^2)\dfrac{db_0^{(s)}}{d\alpha} = 2s\alpha b_0^{(s)} + 2(s-1)b_1^{(s)}, \\ \alpha(1-\alpha^2)\dfrac{db_1^{(s)}}{d\alpha} = 2s\alpha b_0^{(s)} + 2(s-1)\,b_1^{(s)} - (1-\alpha^2)\,(2s-1)\,b_1^{(s)} \end{cases}$$

oder

$$\text{(XXIII; 69)} \quad \begin{cases} \dfrac{db_0^{(s)}}{d\alpha} = 2\,\dfrac{s\alpha b_0^{(s)} + (s-1)\,b_1^{(s)}}{1-\alpha^2}, \\ \alpha\dfrac{db_1^{(s)}}{d\alpha} = \dfrac{db_0^{(s)}}{d\alpha} - (2s-1)\,b_1^{(s)}. \end{cases}$$

Aus diesen ersten Ableitungen von $b_0^{(s)}$ und $b_1^{(s)}$ lassen sich die übrigen durch fortgesetzte Differentiation bilden.

S. Newcomb hat ein Verfahren angegeben, nach dem auch die Ableitungen der Laplaceschen Koeffizienten, ebenso wie wir es für diese selbst in Abschnitt 201 gezeigt haben, mit Hilfe rasch konvergierender Kettenbruchentwicklungen berechnet werden können. Man schreibe, mit $x = \alpha^2$, (XXIII; 41) in der Form

$$\alpha^{-k}b_k^{(s)} = 2\,\frac{(s+k-1)!}{(s-1)!\,k!}\,F(s, s+k, k+1; x)$$

und führe anstelle der Ableitungen der $b_k^{(s)}$ nach α neue Größen

(XXIII; 70)

$$B_k^{(s,p)} = \alpha^k\frac{d^p}{dx^p}(\alpha^{-k}b_k^{(s)}) = 2\alpha^k\,\frac{(s+k-1)!}{(s-1)!\,k!}\,\frac{d^p}{dx^p}\,F(s, s+k, k+1; x)$$

ein. Durch vollständige Induktion beweist man leicht, daß

$$\frac{d^p}{dx^p}\,F(a,b,c;x) = \frac{(a+p-1)!\,(b+p-1)!\,(c-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!\,(c+p-1)!}\,F(a+p, b+p, c+p; x),$$

also, mit $a = s$, $b = s+k$, $c = k+1$,

$$B_k^{(s,p)} = 2\alpha^k\,\frac{(s+p-1)!\,(s+k+p-1)!}{(s-1)!\,(s-1)!\,(k+p)!}\,F(s+p, s+k+p, k+p+1; x)$$

ist. Daraus folgt aber

(XXIII; 71)

$$P_k^{(s,p)} = \frac{B_k^{(s,p)}}{B_{k-1}^{(s,p)}} = \alpha \frac{s+k+p-1}{k+p} \frac{F(s+p, s+k+p, k+p+1; x)}{F(s+p, s+k+p-1, k+p; x)}.$$

Setzt man nun

$$\Gamma_k^{(s,p)} = \frac{(k+p)(1+\alpha^2)}{\alpha(s+k+p-1)} P_k^{(s,p)},$$

so findet man

(XXIII; 72) $$\Gamma_k^{(s,p)} = (1+\alpha^2) \frac{F(s+p, s+k+p, k+p+1; x)}{F(s+p, s+k+p-1, k+p; x)}.$$

Die Formeln (XXIII; 70—72) gehen aber für $p = 0$ in die Ausdrücke für $b_k^{(s)}$, $p_k^{(s)}$, $\gamma_k^{(s)}$ aus Abschnitt 201 über. Man kann also, wie dort, nun aber mit

$$a = s+p; b = s+k+p-1; c = k+p,$$

dieselbe Gausssche Kettenbruchentwicklung ausführen. Setzt man also statt (XXIII; 60) allgemeiner

$$a_n^{(p)} = \frac{(s+n+p)(n-s+p+1)}{(k+p+2n)(k+p+2n+1)},$$

$$b_n^{(p)} = \frac{(s+k+p+n)(k-s+p+n+1)}{(k+p+2n+1)(k+p+2n+2)},$$

so ergibt sich der Kettenbruch

$$\Gamma_k^{(s,p)} = \cfrac{1+\alpha^2}{1-\cfrac{a_0^{(p)}\alpha^2}{1-\cfrac{b_0^{(p)}\alpha^2}{1-\cfrac{a_1^{(p)}\alpha^2}{1-\cfrac{b_1^{(p)}\alpha^2}{\cdots\cdots}}}}},$$

der rasch konvergiert, wenn α klein und (oder) k groß ist. Es ist dann

$$P_k^{(s,p)} = \Gamma_k^{(s,p)} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{s+k+p-1}{k+p},$$

und man erhält, wenn $B_0^{(s,p)} = d^p b_0^{(s)}/dx^p$ bekannt ist,

$$B_k^{(s,p)} = B_0^{(s,p)} \cdot P_1^{(s,p)} \cdot P_2^{(s,p)} \cdot \ldots \cdot P_k^{(s,p)}.$$

Die Ableitungen $d^p b_k^{(s)}/d\alpha^p$ lassen sich dann als endliche lineare Ausdrücke in den $B_k^{(s,p)}$ darstellen. Die elementare, wenn auch etwas umständliche Herleitung dieser Formeln sei dem Leser überlassen.

KAPITEL XXIV

VERWENDUNG VON OPERATOREN IN DER HIMMELSMECHANIK

203. Lineare Differentialoperatoren

Die Entwicklung der Störungsfunktion in Reihen, die nach integrablen Funktionen, etwa nach Potenzen der unabhängigen Variablen oder nach trigonometrischen Termen, fortschreiten, ist ein komplizierter und mühsamer Vorgang, besonders dann, wenn er so weit fortgeführt werden soll, bis das Ergebnis den Anforderungen an Genauigkeit entspricht, die von der hochentwickelten Beobachtungskunst her an es gestellt werden. Dafür, daß die langwierige Erarbeitung solcher Reihen nicht immer fehlerfrei gelungen ist, gibt es in der Geschichte der theoretischen Astronomie manches Beispiel. Selbst so ausgezeichnete und sorgfältige Rechner wie LEVERRIER, dem wir die im Kapitel XXV wenigstens im Prinzip dargestellte Methode der allgemeinen Planetenstörungen verdanken, sind kleine Fehler hier und da unterlaufen, die erst spätere Bearbeiter entdeckt und verbessert haben.

Heute gestatten schnelle Computeranlagen nicht nur rasche und genaue Ausführung mühsamer numerischer Rechnungen, sondern mittels spezieller Programmierungsverfahren auch formale Entwicklungen von Funktionen nach den in ihren Argumenten enthaltenen Variablen oder Parametern.[1]) Ein überaus wertvolles Hilfsmittel bei der Formulierung und Ausführung solcher Programme sind die sogenannten Operatoren, die auf verschiedenen Gebieten der angewandten Mathematik, so auch in der Himmelsmechanik und speziell in der Störungstheorie, mit großem Nutzen verwendet werden.

Operatoren sind Vorschriften zur Ausführung bestimmter mathematischer Operationen, also Symbole, die für sich allein keine konkrete Bedeutung haben, sondern erst dann sinnvoll werden, wenn sie auf mathematische Größen (Zahlen, Winkel, Koordinaten, Vektoren, Funktionen usw.) angewandt werden. Ganz allgemein kann man auch jedes Funktionszeichen, wie sin, log, exp, als Operator ansehen: die Beziehung $y = \sin x$ bezeichnet also eine Operation, durch die einem Winkel x eine wohldefinierte Größe y zugeordnet wird. Ebenso ist, wenn $f(x)$ eine Funktion von x bedeutet, d/dx ein „Differentialoperator", der, auf $f(x)$ angewandt, die Ableitung df/dx erzeugt. Eine besondere Art von Operatoren (Verschiebungs- und Differenzoperatoren) haben wir in Abschnitt 144 kennengelernt und in der Interpolationsrechnung und bei der Ausführung numerischer Differentiationen und Integrationen mit Nutzen verwendet.

Eine ziemlich umfassende Klasse von linearen Differentialoperatoren, die sich bei analytischen Entwicklungen in der Himmelsmechanik als nützlich erwiesen haben, läßt sich nach W. GRÖBNER[2]) auf eine sehr allgemeine Form

---

[1]) Siehe z. B. die Fußnote auf S. 68.

[2]) W. GRÖBNER, Die LIE-Reihen und ihre Anwendungen. Berlin 1960.

bringen. Diese Operatoren, angewandt auf analytische Funktionen reeller oder komplexer Variabler, führen auf Reihenentwicklungen, deren Form und deren Eigenschaften zuerst in Arbeiten von SOPHUS LIE[1]) über infinitesimale Transformationen erscheinen und die von GRÖBNER daher als „LIE-Reihen" bezeichnet werden.

Der von GRÖBNER zur Erzeugung von LIE-Reihen benutzte Operator, der daher in der Folge kurz als „LIE-Operator" bezeichnet werden soll, hat die Form

$$(\text{XXIV}; 1) \qquad D = \vartheta_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \vartheta_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n},$$

wo $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ einen variablen Punkt im n-dimensionalen z-Raum bezeichnet. Die „Koordinaten" z_i seien reelle oder komplexe Funktionen der unabhängigen Variablen t, etwa der Zeit, und die Funktionen $\vartheta_i(z)$ seien innerhalb eines Gebietes G des z-Raumes holomorph, d. h., sie seien in einer gewissen Umgebung eines Punktes $z = \zeta$ im Innern dieses Gebietes in Potenzreihen entwickelbar, die für eine gewisse Zeitspanne $|t - t_0| < T$ konvergieren und für $t = t_0$ in $\vartheta_i(\zeta)$ übergehen. Wendet man den Operator D auf eine in G holomorphe Funktion $f(z)$ an, so ist

$$Df(z) = \vartheta_1(z)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \vartheta_2(z)\frac{\partial f}{\partial z_2} + \cdots + \vartheta_n(z)\frac{\partial f}{\partial z_n}$$

dort ebenfalls holomorph. Einfache spezielle Formen des LIE-Operators sind z. B.:

für $n = 1$, $\vartheta_1 = 1$ der gewöhnliche Differentialoperator

$$(\text{XXIV}; 2\text{a}) \qquad D = \frac{d}{dz}, \qquad Df = \frac{df}{dz};$$

für $n = 1$, $\vartheta_1 = z$ der logarithmische Differentialoperator

$$(\text{XXIV}; 2\text{b}) \qquad D = z\frac{d}{dz}, \qquad Df = z\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\ln z};$$

für $\vartheta_i = dz_i/dt$, wenn alle z_i Funktionen der Zeit t sind und $f(z, t)$ eine Funktion der z_i ist, die eventuell auch die Zeit t explizite enthält, der Operator der totalen Differentiation

$$(\text{XXIV}; 2\text{c}) \qquad D = \frac{dz_1}{dt}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{dz_2}{dt}\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \frac{dz_n}{dt}\frac{\partial}{\partial z_n} + \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Df(z, t) = \frac{df}{dt}.$$

Operatoren können nacheinander mehrfach angewandt werden. Wegen der linearen Struktur der LIE-Operatoren ergeben sich für sie algebraische Regeln, und man kann algebraische Symbole auf die Operatoren selbst über-

[1]) S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig 1888.

tragen, ohne dadurch Unklarheiten hervorzurufen. So läßt sich symbolisch

$$D(Df) = D^2f; \quad D(D^2f) = D^3f; \ldots$$

schreiben, indem man als Symbol für die n-fache Anwendung eines Operators auf eine Funktion $f(z)$ die n-fache Potenz des Operators als neuen Operator einführt, für den die Regeln der Potenzrechnung gelten ($D^nD^m = D^{n+m}$).

Für die Anwendung desselben LIE-Operators auf Summen oder Produkte verschiedener Funktionen ergeben sich folgende Grundregeln, deren Gültigkeit man durch Ausführung der durch den Operator vorgeschriebenen Differentiationen leicht bestätigt: Seien f_1 und f_2 verschiedene Funktionen der Variablen z, so ist

$$\text{(XXIV; 3)} \qquad \begin{cases} D(f_1 + f_2) = Df_1 + Df_2\,, \\ D(cf) = cDf; \quad D(c) = 0, \qquad \text{wenn} \qquad c = \text{const}, \\ D(f_1f_2) = f_1Df_2 + f_2Df_1\,, \\ D^n(f_1f_2) = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} D^\alpha f_1 D^{n-\alpha} f_2\,. \end{cases}$$

Für die Anwendung verschiedener Operatoren ($D_1, D_2, \ldots$) auf dieselbe Funktion $f(z)$ gelten das distributive Gesetz

$$(D_1 + D_2)f = D_1f + D_2f$$

und das assoziative Gesetz

$$D_1(D_2D_3)f = (D_1D_2)D_3f,$$

aber nicht, bzw. nur unter zusätzlichen Bedingungen, das kommutative Gesetz, denn es ist im allgemeinen

$$D_1D_2f \neq D_2D_1f,$$

wie man an einem einfachen Beispiel zeigen kann: Es sei $D_1 = d/dz$, $D_2 = zd/dz$. Dann ist

$$D_1D_2f(z) = \frac{d}{dz}\left(z\frac{df}{dz}\right) = \frac{df}{dz} + z\frac{d^2f}{dz^2}, \qquad D_2D_1f(z) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right) = z\frac{d^2f}{dz^2},$$

also $D_1D_2 - D_2D_1 = d/dz = D_1$ ein nicht verschwindender Operator. Nur unter gewissen, sehr scharfen Einschränkungen ist eine Vertauschung der Reihenfolge der Operatoren erlaubt, also für irgend zwei LIE-Operatoren D_j, D_k die Bedingung

$$[D_jD_k] = D_jD_k - D_kD_j = 0$$

erfüllt.

Schreibt man

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_{ji} \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad D_k = \sum_{l=1}^{n} \vartheta_{kl} \frac{\partial}{\partial z_l},$$

so ergibt sich

$$[D_j D_k] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \vartheta_{ji} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\vartheta_{kl} \frac{\partial}{\partial z_l} \right) - \vartheta_{kl} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\vartheta_{ji} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \vartheta_{ji} \frac{\partial \vartheta_{kl}}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_l} - \vartheta_{kl} \frac{\partial \vartheta_{ji}}{\partial z_l} \frac{\partial}{\partial z_i} + \vartheta_{ji} \vartheta_{kl} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_i} \right) \right\}.$$

Die Terme mit den zweiten partiellen Ableitungen fallen also heraus, falls für die Funktion $f(z)$, auf die man die Operatoren anwendet, die „Verträglichkeitsbedingungen“

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_i}$$

gelten, was für alle Funktionen zutrifft, mit denen wir es hier zu tun haben. Der Operator $[D_j D_k]$ ist demnach, ebenso wie D_j und D_k selbst, ein linearer Differentialoperator, der auch

$$[D_j D_k] = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{n} \left(\vartheta_{jl} \frac{\partial \vartheta_{ki}}{\partial z_l} - \vartheta_{kl} \frac{\partial \vartheta_{ji}}{\partial z_l} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \right]$$

geschrieben werden kann, wenn man in der ersten Doppelsumme die Indizes i und l vertauscht. Die Operatoren D_j, D_k sind also, angewandt auf beliebige Funktionen $f(z)$, dann und nur dann vertauschbar, wenn die Summen

$$\text{(XXIV; 4)} \qquad \sum_{l=1}^{n} \left(\vartheta_{jl} \frac{\partial \vartheta_{ki}}{\partial z_l} - \vartheta_{kl} \frac{\partial \vartheta_{ji}}{\partial z_l} \right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sämtlich verschwinden.

204. Die Lie-Reihen. Der Vertauschungssatz

W. GRÖBNER definiert eine „LIE-Reihe“ durch

$$L(z, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu f(z) = \left[1 + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \cdots \right] f(z),$$

wo D irgendein LIE-Operator (XXIV; 1) ist. Symbolisch schreibt man

$$L = e^{tD} f(z).$$

Auch diese Reihe ist holomorph in dem gleichen Gebiet G, in dem $f(z)$ und die Funktionen $\vartheta_i(z)$, die den Operator D definieren, holomorph sind, und

sie konvergiert[1]) für alle t, deren Betrag kleiner ist als eine gewisse positive Schranke T.

Auch für die LIE-Reihen gelten algebraische Regeln, die man leicht aus den Regeln (XXIV; 3) für die Operatoren herleitet. Insbesondere gelten die Sätze

$$(\text{XXIV; 5a}) \quad e^{tD}[c_1 f_1(z) + \cdots + c_n f_n(z)] = c_1 e^{tD} f_1(z) + \cdots + c_n e^{tD} f_n(z),$$

$$(\text{XXIV; 5b}) \quad e^{tD}[f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot \cdots \cdot f_n(z)] = [e^{tD} f_1(z)] \cdot [e^{tD} f_2(z)] \cdot \cdots \cdot [e^{tD} f_n(z)].$$

Der erste folgt unmittelbar aus den Sätzen (XXIV; 3), der zweite wird leicht für $n = 2$ bewiesen; die Ausdehnung des Beweises auf $n > 2$ macht dann keine Schwierigkeit. Es ist nach der letzten Regel (XXIV; 3)

$$e^{tD}(f_1 f_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu (f_1 f_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} D^\alpha f_1 D^{\nu-\alpha} f_2 =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{t^\nu}{\alpha!(\nu-\alpha)!} D^\alpha f_1 D^{\nu-\alpha} f_2 .$$

Führt man $\beta = \nu - \alpha$ als neuen Summationsindex statt ν ein, so erhält man, da nun α und β unabhängig voneinander von 0 bis ∞ laufen,

$$e^{tD}(f_1 f_2) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha+\beta}}{\alpha!\beta!} D^\alpha f_1 D^\beta f_2 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{t^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f_1 \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{t^\beta}{\beta!} D^\beta f_2 = [e^{tD} f_1] \cdot [e^{tD} f_2],$$

was zu beweisen war. Dieser Satz läßt sich noch verallgemeinern. Sind $f_1, f_2, \ldots, f_k$ analytische Funktionen der Variablen $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und ist $P(f_1, \ldots, f_k)$ ein Polynom dieser Funktionen, so gilt aufgrund der Regeln (XXIV; 5a, b)

$$(\text{XXIV; 5c}) \qquad e^{tD} P(f_1, \ldots, f_k) = P(e^{tD} f_1, e^{tD} f_2, \ldots, e^{tD} f_k),$$

d. h., die LIE-Reihe eines Polynoms ist gleich dem Polynom aus den LIE-Reihen. Man kann diesen Satz auch auf beliebige analytische Funktionen der Variablen $z_1, \ldots, z_n$ ausdehnen. Sei $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ eine im Gebiet G des z-Raums holomorphe Funktion, so gilt

$$(\text{XXIV; 6}) \qquad e^{tD} F(z) = F(e^{tD} z),$$

wobei das Symbol z für die Gesamtheit der Variablen z_i, das Symbol $e^{tD} z$ für die Gesamtheit der LIE-Reihen $e^{tD} z_i$ steht. Man nennt (XXIV; 6) den *Vertauschungssatz* für LIE-Reihen, da er aussagt, daß man die Operatoren F und e^{tD} miteinander vertauschen kann. Für Polynome folgt dieser Satz in Gestalt von (XXIV; 5c) aus den algebraischen Eigenschaften (XXIV; 5a, b) der LIE-Reihen. Der allgemeine Vertauschungssatz (XXIV; 6) läßt sich dann ohne besondere Schwierigkeiten aus der hier stets vorausgesetzten gleichmäßi-

---

[1]) Wegen des Beweises der Konvergenz verweisen wir auf die Abhandlung von W. GRÖBNER.

gen Konvergenz der LIE-Reihen ableiten. Offenbar gilt er für jede endliche Partialsumme einer Potenzreihenentwicklung von $F(z)$, da er für Polynome von jeder endlichen Ordnung k gilt. Soweit also die Konvergenzbedingungen für die Entwicklung von $F(z)$ und für die LIE-Reihen $L(z, t)$ erfüllt sind, ist der Grenzübergang $k \to \infty$ erlaubt.

Der Vertauschungssatz ist eine schöne und für Anwendungen auf dynamische Probleme überaus nützliche Eigenschaft der LIE-Reihen. Hierfür ein einfaches Beispiel:

Wir benutzen den Differentialoperator (XXIV; 2a),

$$D = \frac{d}{dz}.$$

Dann ist offenbar

$$Dz = 1, \quad D^n z = 0 \quad \text{für} \quad n = 2, 3, \ldots$$

Mit ihm definieren wir die LIE-Reihe

$$Z = Z(z, t) = e^{tD} z = (1 + tD)z = z + t; \; Z(z, 0) = z.$$

Sei nun $F(Z)$ eine analytische Funktion von Z, so folgt aus dem Vertauschungssatz

$$F(Z) = F(e^{tD} z) = e^{tD} F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu F(z),$$

wenn

$$D^\nu F(z) = \left(\frac{d^\nu F(Z)}{dZ^\nu} \right)_{Z=z} = F^{(\nu)}(z)$$

die ν-te Ableitung von $F(Z)$, genommen für $t = 0$, bedeutet. Es ist dann

$$F(z + t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} F^{(\nu)}(z) \tag{XXIV; 6a}$$

die wohlbekannte TAYLORsche Reihe, in der t ein Inkrement der Variablen z darstellt. Es ist nicht schwierig, diese Überlegungen auf Funktionen von mehreren Variablen auszudehnen.

205. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten nun ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\frac{dz_i}{dt} = \vartheta_i(z), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; (z) = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{XXIV; 7}$$

zur Bestimmung der n Variablen z_i als Funktionen der Zeit t. Die Funktionen $\vartheta_i(z)$ seien in einem Gebiet G holomorph und mögen die unabhängige Variable t

nicht explizite enthalten. Man nennt solche Systeme *autonom*. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß nichtautonome Systeme sich auf autonome zurückführen lassen. Wenn nämlich die ϑ_i die Zeit t (oder irgendeine andere anstelle der Zeit eingeführte unabhängige Variable) explizite enthalten, so genügt es, diese als neue abhängige Variable $z_0 = t$ zu betrachten. Dann bleibt die Form (XXIV; 7) der Differentialgleichungen erhalten, wird aber nun um eine weitere mit $i = 0$, nämlich um

$$\frac{dz_0}{dt} = \vartheta_0(z) = 1$$

vermehrt, und das Aggregat $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ enthält die Variable t nur noch implizite. Das System ist dann autonom und von der Ordnung $n + 1$.

Um die Lösung des autonomen Systems (XXIV; 7) zu finden, bedienen wir uns des LIE-Operators

$$\text{(XXIV; 8)} \qquad D = \vartheta_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \vartheta_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_2} + \cdots + \vartheta_n(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_n},$$

wo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ eine gewisse Position in jenem Gebiet G des n-dimensionalen z-Raums bezeichnen möge, in dem die Funktionen $\vartheta_i(z)$ holomorph sind. Die Position ζ sei vorerst als variabel innerhalb G angesehen, aber nicht von der Zeit t abhängig. Dann sei $z = z(\zeta, t) = e^{tD}\zeta$ eine neue Funktion, deren Koordinaten

$$\text{(XXIV; 9)} \qquad z_i = z_i(\zeta, t) = e^{tD}\zeta_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Funktionen der ζ_i und der unabhängigen Variablen t sind, die mit Hilfe des LIE-Operators (XXIV; 8) als LIE-Reihen definiert sind, und es ist offenbar durch die Koordinaten

$$\text{(XXIV; 10)} \qquad z_i(\zeta, 0) = \zeta_i$$

diejenige Position gekennzeichnet, die z für $t = 0$ einnimmt. Differenziert man z_i nach t, so erhält man, da die ζ_i von t nicht abhängen,

$$\frac{dz_i}{dt} = De^{tD}\zeta_i = e^{tD}D\zeta_i$$

wegen des Vertauschungssatzes. Es ist aber

$$D\zeta_i = \vartheta_i(\zeta),$$

also

$$\frac{dz_i}{dt} = e^{tD}\vartheta_i(\zeta)$$

oder, wenn man den Vertauschungssatz nochmals anwendet,

$$\frac{dz_i}{dt} = \vartheta_i(e^{tD}\zeta) = \vartheta_i(z).$$

Die Funktionen (XXIV; 9) sind also die Lösungen des Systems (XXIV; 7), und wegen (XXIV; 10) sind die Koordinaten ζ_i, die nun einen festen Punkt ζ im z-Raum definieren, die zu diesen Lösungen gehörigen Anfangsbedingungen.

Als einfaches Beispiel für diese elegante Lösung eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung möge die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' + \alpha^2 z = 0 \tag{XXIV; 11}$$

dienen, wo z', z'' Ableitungen einer Funktion $z(\lambda)$ nach der unabhängigen Variablen λ bezeichnen. Der Gleichung (XXIV; 11) ist das System

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\lambda} = y = \vartheta_1(z, y), \\ \dfrac{dy}{d\lambda} = -\alpha^2 z = \vartheta_2(z, y) \end{cases} \tag{XXIV; 12}$$

äquivalent, das die Form (XXIV; 7) hat und das mit den Anfangsbedingungen

$$z(0) = \zeta, \quad y(0) = \eta$$

mittels des LIE-Operators

$$D = \vartheta_1(\zeta, \eta)\frac{\partial}{\partial \zeta} + \vartheta_2(\zeta, \eta)\frac{\partial}{\partial \eta} = \eta\frac{\partial}{\partial \zeta} - \alpha^2\zeta\frac{\partial}{\partial \eta}$$

nach der oben beschriebenen Methode lösbar ist. Die Lösung läßt sich unmittelbar hinschreiben:

$$z = e^{\lambda D}\zeta, \quad y = e^{\lambda D}\eta. \tag{XXIV; 13}$$

Durch Ausführung der Operation findet man für $z(\zeta, \lambda)$

$$z = \left[1 + \lambda D + \frac{\lambda^2}{2!}D^2 + \frac{\lambda^3}{3!}D^3 + \cdots\right]\zeta.$$

Da aber

$$D\zeta = \vartheta_1 = \eta; \quad D^2\zeta = D\eta = -\alpha^2\zeta; \quad D^3\zeta = -\alpha^2 D\zeta = -\alpha^2\eta; \quad \ldots$$

und allgemein

$$D^{2n}\zeta = (-1)^n\alpha^{2n}\zeta; \quad D^{2n+1}\zeta = (-1)^n\alpha^{2n}\eta$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$z = \zeta + \lambda\eta - \frac{\lambda^2}{2!}\alpha^2\zeta - \frac{\lambda^3}{3!}\alpha^2\eta + \frac{\lambda^4}{4!}\alpha^4\zeta + \cdots =$$

$$= \zeta\left(1 - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2!} + \frac{\alpha^4\lambda^4}{4!} - \cdots\right) + \eta\left(\lambda - \frac{\alpha^2\lambda^3}{3!} + \frac{\alpha^4\lambda^5}{5!} - \cdots\right)$$

oder

$$z(\lambda) = \zeta \cos \alpha\lambda + \frac{\eta}{\alpha} \sin \alpha\lambda \tag{XXIV; 14}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$z(0) = \zeta, \quad z'(0) = \eta.$$

Das ist in der Tat die wohlbekannte allgemeine Lösung des Schwingungsproblems (XXIV; 11).

In derselben Weise würde man die Lösung der zweiten Gleichung (XXIV; 12) durch Entwicklung der zweiten Operatorgleichung (XXIV; 13) finden. Es ist indessen nicht erforderlich, diese Operation auszuführen, da (XXIV; 14) bereits die allgemeine Lösung des Problems (XXIV; 11, 12) darstellt. Man erhält $y(\lambda)$ einfacher, indem man (XXIV; 14) nach λ differenziert.

206. Anwendung der Lie-Reihen auf die Lösung des Zweikörperproblems

Die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung eines Planeten um die Sonne lauten

$$\ddot{x}_i + \frac{x_i}{r^3} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{XXIV; 15}$$

wenn x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten des Planeten in irgendeinem festen heliozentrischen System bezeichnen und $r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ ist. Dabei sind die Einheiten von Länge, Zeit und Masse so festgesetzt worden, daß $k^2 = (M + m)^{-1}$ ist, wenn M und m die Massen von Sonne und Planet bedeuten. Die drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung (XXIV; 15) lassen sich dann als System von sechs Gleichungen erster Ordnung,

$$\dot{x}_i = y_i; \qquad \dot{y}_i = -\frac{x_i}{r^3}, \tag{XXIV; 15a}$$

schreiben, dessen allgemeine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$x_i(t_0) = \xi_i; \quad y_i(t_0) = \eta_i; \quad r(t_0) = \varrho = \sqrt{\sum {\xi_i}^2} \tag{XXIV; 16}$$

gesucht wird. Das gelingt mit Hilfe des LIE-Operators

$$D = \sum_{i=1}^{3} \left(\eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i \varrho^{-3} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \right),$$

und die Lösungen haben dann die Form

$$x_i = e^{\tau D} \xi_i; \quad y_i = e^{\tau D} \eta_i; \quad \tau = t - t_0, \tag{XXIV; 17}$$

die für $\tau = 0$ in (XXIV; 16) übergehen. Es sei daran erinnert, daß die Größen ξ_i, η_i bei der Anwendung des Operators D als Variable, nach beendeter Operation aber wieder als Konstante anzusehen sind. Es genügt auch hier, die erste der Lösungen (XXIV; 17) hinzuschreiben. Man erhält dann

$$x_i = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!} D^2 + \frac{\tau^3}{3!} D^3 + \cdots\right) \xi_i,$$

und es ist

$$D\xi_i = \eta_i,$$

$$D^2\xi_i = D\eta_i = -\xi_i \varrho^{-3},$$

$$D^3\xi_i = -\varrho^{-3} D\xi_i + 3\xi_i \varrho^{-4} D\varrho = -\eta_i \varrho^{-3} + 3\xi_i \varrho^{-5} \sum_{j=1}^{3} \xi_j \eta_j,$$

. . . . . .

Setzt man diese Rechnung fort, so entstehen rasch verwickelte Ausdrücke. Dies mühsame Verfahren läßt sich wesentlich erleichtern, wenn man die in Abschnitt 40 eingeführten „lokalen Invarianten“ zu Hilfe nimmt. Seien $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$ die für die Zeit $t = t_0$ als Anfangsbedingungen vorgeschriebenen Vektoren des Ortes und der Geschwindigkeit, so kann man für jeden anderen Zeitpunkt $t = t_0 + \tau$

(XXIV; 18) $$\mathfrak{p}(t) = \mathfrak{p}_0 F + \dot{\mathfrak{p}}_0 G; \quad \dot{\mathfrak{p}}(t) = \mathfrak{p}_0 \dot{F} + \dot{\mathfrak{p}}_0 \dot{G}$$

schreiben, wo F, G skalare Funktionen der „Zwischenzeit“ τ sind, die als Parameter die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängigen „Invarianten“ r_0, $\dot{r}_0$, $\ddot{r}_0$ für den Zeitpunkt t_0 enthalten, bzw. die Größen

$$\mu_0 = \frac{1}{r_0^3}; \qquad \sigma_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0}; \qquad \varepsilon_0 = \frac{\ddot{r}_0}{r_0} + \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0}\right)^2,$$

die nach (V; 31) aus ihnen abgeleitet werden. Wir erinnern daran, daß aus den vektoriellen Differentialgleichungen $\ddot{\mathfrak{p}} = -\mu\mathfrak{p}$ nach (XXIV; 18),

(XXIV; 19) $$\mathfrak{p}_0 \ddot{F} + \dot{\mathfrak{p}}_0 \ddot{G} = -\mu(\mathfrak{p}_0 F + \dot{\mathfrak{p}}_0 G),$$

die Differentialgleichungen

(XXIV; 20) $$\ddot{F} = -\mu F; \quad \ddot{G} = -\mu G$$

folgen, da ja (XXIV; 19) unabhängig von der Wahl der Anfangswerte $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$ gilt. Die Lösungen der skalaren Gleichungen (XXIV; 20),

$$F = F(\mu_0, \sigma_0, \varepsilon_0; \tau); \quad G = G(\mu_0, \sigma_0, \varepsilon_0; \tau),$$

mit den aus (XXIV; 18) folgenden Anfangsbedingungen

(XXIV; 21) $$F_0 = 1; \quad \dot{F}_0 = 0; \quad G_0 = 0; \quad \dot{G}_0 = 1$$

ersetzen also wegen (XXIV; 18) die Lösungen von (XXIV; 15 bzw. 15a).

Es genügt hier zu zeigen, wie $F(\tau)$ durch eine LIE-Reihe dargestellt werden kann, da F und G, die den gleichgeformten Differentialgleichungen (XXIV; 20) genügen, sich nur durch die Anfangswerte (XXIV; 21) voneinander unterscheiden. Die erste Gleichung (XXIV; 20) läßt sich durch ein System linearer Differentialgleichungen,

$$\dot{F} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\mu F, \quad \dot{\mu} = -3\mu\sigma, \quad \dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2, \quad \dot{\varepsilon} = -\sigma(2\varepsilon + \mu)$$

ersetzen, wenn man die Differentialformeln (V; 30) benutzt. Die Lösung dieses Systems gelingt mit Hilfe des LIE-Operators

$$D = \varphi\frac{\partial}{\partial F} - \mu F\frac{\partial}{\partial \varphi} - 3\mu\sigma\frac{\partial}{\partial \mu} + (\varepsilon - 2\sigma^2)\frac{\partial}{\partial \sigma} - \sigma(2\varepsilon + \mu)\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

und es ist dann

$$\text{(XXIV; 22)} \qquad F = (e^{\tau D}F)_{\tau=0} = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!}D^2 + \cdots\right)F_{(\tau=0)}.$$

Nacheinander erhält man

$$\begin{aligned}
DF &= \varphi,\\
D^2F &= D\varphi = -\mu F,\\
D^3F &= -\mu DF - FD\mu = -\mu\varphi + 3\mu\sigma F,\\
D^4F &= -\mu D\varphi - \varphi D\mu + 3\mu\sigma DF + 3\mu FD\sigma + 3\sigma FD\mu =\\
&= \mu^2F + 6\varphi\mu\sigma + 3\mu\varepsilon F - 15\mu\sigma^2F,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

und man hat, nachdem man diese Ausdrücke in (XXIV; 22) eingesetzt hat, die Größen F, φ, μ, σ, ε durch ihre Anfangswerte $F_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, μ_0, σ_0, ε_0 zu ersetzen. Es ergibt sich dann, wenn man den Nullindex wieder fortläßt,

$$F = 1 - \frac{1}{2}\mu\tau^2 + \frac{1}{2}\mu\sigma\tau^3 + \frac{1}{24}(\mu^2 + 3\mu\varepsilon - 15\mu\sigma^2)\tau^4 + \cdots,$$

übereinstimmend mit (VII; 9,12). Für die Entwicklung von G liefern die gleichen Formeln, wenn man $G_0 = 0$, $\dot{G}_0 = \varphi_0 = 1$ statt $F_0 = 1$, $\dot{F}_0 = \varphi_0 = 0$ setzt,

$$G = \tau - \frac{1}{6}\mu\tau^3 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau^4 + \cdots,$$

übereinstimmend mit (VII; 9,13)[1]).

---

[1]) P. SCONZO, A. R. LE SCHACK und R. TOBEY, Symbolic computation of f- and g-series by computer. A.J. *70*, 269 (1965). Die Verfasser haben mit einem FORMAC-Computerprogramm diese Entwicklung bis zur 27. Ordnung durchgeführt und bis zur 12. Ordnung veröffentlicht.

In Abschnitt 42 ist bewiesen worden, daß die Funktionen F, G den linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$F''' + \alpha^2 F' = 0; \qquad G''' + \alpha^2 G' = 0; \qquad \alpha^2 = \frac{1}{a} = r_0{}^2(\mu_0 - \varepsilon_0)$$

genügen, wenn man statt der Zwischenzeit τ die „Pseudozeit" q durch

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r}; \qquad q(0) = 0$$

einführt und Ableitungen nach q durch Striche kennzeichnet. Dieselbe Differentialgleichung gilt [s. (V; 36)] auch für r und wegen (XXIV; 18) auch für die Koordinaten x_i. Es lassen sich dann geschlossene Formeln für $z = F, G, r, x_i$ als Funktionen von q durch Lösung der Differentialgleichung

(XXIV; 23) $$z''' + \alpha^2 z' = 0; \qquad \alpha^2 = \text{const}$$

finden, die auf dieselbe Weise wie die Lösung von (XXIV; 11) gelingt: Man ersetzt (XXIV; 23) durch das System erster Ordnung

$$z' = \varphi, \quad \varphi' = \psi, \quad \psi' = -\alpha^2\varphi, \quad \tau' = r$$

und benutzt zu seiner Lösung den LIE-Operator

$$D = \varphi\frac{\partial}{\partial z} + \psi\frac{\partial}{\partial \varphi} - \alpha^2\varphi\frac{\partial}{\partial \psi} + r\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Dann ist

$$z = \left(1 + qD + \frac{q^2}{2!}D^2 + \cdots\right) z_{(q=0)},$$

und man erhält nacheinander

$$Dz = \varphi; \quad D^2z = \psi; \quad D^3z = -\alpha^2\varphi; \quad D^4z = -\alpha^2\psi; \quad D^5z = \alpha^4\varphi, \quad \ldots$$

Man kann diese Lösung dann unmittelbar in der Form

$$z = z_0 + \varphi_0 q + \psi_0\frac{q^2}{2!} - \alpha^2\left(\varphi_0\frac{q^3}{3!} + \psi_0\frac{q^4}{4!}\right) + \alpha^4\left(\varphi_0\frac{q^5}{5!} + \psi_0\frac{q^6}{6!}\right) - \cdots =$$

$$= z_0 + \varphi_0\left(q - \frac{1}{3!}\alpha^2q^3 + \frac{1}{5!}\alpha^4q^5 - \cdots\right) + \psi_0\left(\frac{1}{2!}q^2 - \frac{1}{4!}\alpha^2q^4 + \frac{1}{6!}\alpha^4q^6 - \cdots\right),$$

d. h. als geschlossenen Ausdruck

$$z = z_0 + z_0{}'\frac{\sin \alpha q}{\alpha} + z_0{}''\frac{1 - \cos \alpha q}{\alpha^2}$$

hinschreiben. Führt man noch die in (V; 42, 43) definierten c-Funktionen ein, so ergibt sich

$$z = z_0 + z_0' c_1(\alpha^2 q^2) q + z_0'' c_2(\alpha^2 q^2) q^2$$

als vollständige Lösung von (XXIV; 23) mit den Anfangsbedingungen z_0, z_0', z_0''. Insbesondere gilt dies für $z = r$, d. h., es ist

$$r = r_0 + r_0' c_1 q + r_0'' c_2 q^2 .$$

Es ist nun noch notwendig, τ als Funktion von q auszudrücken, und zwar ist

$$\tau = \left[1 + qD + \frac{q^2}{2!} D^2 + \cdots\right] \tau_{(q=0)} .$$

Da aber $D\tau = r$, $D^2\tau = Dr$, ..., $D^n\tau = D^{n-1}r$ ist, so erhält man, indem man die schon bei der Entwicklung von $r(q)$ auftretenden Differentialausdrücke benutzt, nach elementarer Rechnung die „Hauptgleichung“

(XXIV; 24) $$\tau = r_0 q + r_0' c_2 q^2 + r_0'' c_3 q^3 .$$

Bequemer folgt (XXIV; 24) durch Integration von

$$\tau' = r = r_0 + r_0' c_1 q + r_0'' c_2 q^2 ,$$

indem man die für die c-Funktionen gültigen Differentialformeln (V; 45),

$$c_n q^n = \frac{d}{dq}\left(c_{n+1} q^{n+1}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^q c_n q^n dq = c_{n+1} q^{n+1},$$

benutzt. Durch Einführung der dimensionslosen Größe $z = r_0 q/\tau$ und der Ausdrücke (V; 47),

$$r' = r^2\sigma ; \quad r'' = r^3\varepsilon ,$$

verwandelt man, nachdem man (XXIV; 24) durch τ dividiert hat, die Hauptgleichung in die Form (V; 51)

$$1 = z + \frac{r^2\sigma}{\tau} c_2 q^2 + \frac{r^3\varepsilon}{\tau} c^3 q^3 = z + c_2\sigma\tau z^2 + c_3\varepsilon\tau^2 z^3 .$$

Statt (XXIV; 24) kann man nach (V; 54) auch

$$1 = c_1 z + c_2\sigma\tau z^2 + c_3\mu\tau^2 z^3$$

oder, da $\mu = r_0^{-3}$ ist,

$$\tau = c_1 r_0 q + c_2 r_0^2 \sigma q^2 + c_3 r_0^3 \mu q^3 = c_1 r_0 q + c_2 r_0^2 \sigma q^2 + c_3 q^3$$

schreiben. W. GOODYEAR[1]) gibt dieser Formel eine etwas andere Gestalt, die für die numerische Rechnung gewisse Vorteile bietet: Führt man nämlich statt der c-Funktionen

$$s_n = c_n q^n = \frac{q^n}{n!} - \alpha^2 \frac{q^{n+2}}{(n+2)!} + \alpha^4 \frac{q^{n+4}}{(n+4)!} - \cdots$$

ein und setzt $r_0^2 \sigma = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 = (\mathfrak{p}_0 \dot{\mathfrak{p}}_0)$, so folgt

$$\tau = r_0 s_1 + (\mathfrak{p}_0 \dot{\mathfrak{p}}_0) s_2 + s_3,$$

und da $ds_n/dq = s_{n-1}$, $d\tau/dq = r$ ist, erhält man durch Differenzieren auch

$$r = r_0 s_0 + (\mathfrak{p}_0 \dot{\mathfrak{p}}_0) s_1 + s_2.$$

Es ist hiermit gezeigt worden, daß die in Kapitel V entwickelte Theorie der Zweikörperbewegung als Anfangswertproblem sich durch Anwendung der LIE-Reihen zwanglos und ohne langwierige Umwege darstellen läßt.

207. Umkehrung analytischer Funktionen

Eine interessante Anwendungsmöglichkeit der LIE-Reihen bezieht sich auf die Umkehrung analytischer Funktionen. Es sei ein System solcher Funktionen,

(XXIV; 25) $$y_i = \varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben, die in der Umgebung einer Position

$$\eta_i = \varphi_i(\xi) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

innerhalb eines Gebietes G holomorph sind, und es sei die JACOBIsche Matrix

$$\mathfrak{J} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial y_1, \ldots, \partial y_n}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n}\right) = (\varphi_{ik})$$

in der Position ξ regulär, d. h., die Funktionaldeterminante $|J|$ sei von Null verschieden. Dann existiert eine Lösung

$$x_i = \Phi_i(y) = \Phi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

des Systems (XXIV; 25) mit der inversen JACOBIschen Matrix

$$\mathfrak{J}^{-1} = \left(\frac{\partial x_1, \ldots, \partial x_n}{\partial y_1, \ldots, \partial y_n}\right) = (\Phi_{ik}),$$

---

[1]) W. GOODYEAR, A general method of variation of parameters for numerical integration. A.J. *70*, 524 (1965).

und die x_i als Funktionen der y_i genügen den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \Phi_{ik}(x)$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i = \xi_i$ für $y_i = \eta_i$.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall $n = 1$. Dann würde die Aufgabe lauten, die Gleichung $y = f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ umzukehren, d. h. die Lösung $x = \varphi(y)$ zu finden, die immer existiert, wenn an der Stelle ξ, η die Ungleichung

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

erfüllt ist. In diesem Falle können wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta(x) = f'(x)$$

hinschreiben, der die inverse Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

entspricht, die in der Umgebung von (ξ, η) nicht singulär ist. Die Lösung dieser Gleichung erzielt man mit dem LIE-Operator

$$D = \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{\partial}{\partial x}\right)_{x=\xi}$$

in der Form

$$\text{(XXIV; 26)} \qquad x = e^{(y-\eta)D}\xi, \qquad D\xi = (Dx)_{x=\xi},$$

die für $y = \eta$ in $x = \xi$ übergeht.

Als Beispiel sei die transzendente Gleichung

$$\text{(XXIV; 27)} \qquad y = x - e \sin x = f(x)$$

gewählt. Ist $y = M = n(t - t_0)$ die mittlere Anomalie einer KEPLERschen Planetenbahn, $x = E$ die exzentrische Anomalie und e die numerische Exzentrizität, so stellt (XXIV; 27) die KEPLERsche Gleichung dar. Nun ist

$$f'(x) = 1 - e \cos x \neq 0,$$

wenn $0 \leqq e < 1$ ist. Die Lösung (XXIV; 26) erhält man dann mittels des LIE-Operators

$$D = \frac{1}{1 - e \cos \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

in der Gestalt

$$x = \left[1 + (y-\eta)D + \frac{1}{2!}(y-\eta)^2 D^2 + \cdots\right]\xi$$

oder, da

$$D\xi = \frac{1}{1 - e\cos\xi}, \qquad D^2\xi = -\frac{e\sin\xi}{(1-e\cos\xi)^3},$$

$$D^3\xi = -\frac{e\cos\xi}{(1-e\cos\xi)^4} + 3\frac{e^2\sin^2\xi}{(1-e\cos\xi)^5}, \qquad \cdots$$

ist,

$$x = \xi + \frac{y-\eta}{1-e\cos\xi} - \frac{(y-\eta)^2}{2!}\frac{e\sin\xi}{(1-e\cos\xi)^3} + \cdots.$$

Diese Lösung der KEPLERschen Gleichung ist wohlbekannt. Sie nimmt eine besonders einfache Form an, wenn man $\xi = \eta = 0$ setzt, d. h. als Ausgangspunkt der Entwicklung das Perihel nimmt, in dem ja die mittlere und die exzentrische Anomalie verschwinden. Dann ist die Reihe

$$x = \frac{y}{1-e} - \frac{y^3}{3!}\frac{e}{(1-e)^4} + \cdots$$

in der Umgebung des Perihels, wo y klein ist, rasch konvergent, wenn e klein ist.

Es wird interessant sein, dieses Verfahren auch auf die Lösung der Hauptgleichung (XXIV; 24)

$$\tau = r_0 q + r_0' c_2 q^2 + r_0'' c_3 q^3$$

des Zweikörperproblems anzuwenden, die eine andere Form der KEPLERschen Gleichung darstellt, in der sich aber $\tau = q = 0$ auf einen beliebigen Punkt der Bahn bezieht. Da $\tau'(0) = r_0 > 0$, ist der LIE-Operator

$$D = \frac{1}{\tau'}\frac{\partial}{\partial q_0} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial q_0},$$

der das Problem löst, in der Umgebung von $q = 0$ nicht singulär, und die Lösung lautet

$$q = e^{\tau D} q_0 = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!}D^2 + \cdots\right) q_0$$

mit

$$Dq_0 = \frac{1}{r_0},$$

$$D^2 q_0 = \frac{1}{r_0}\frac{d}{dq_0}\left(\frac{1}{r_0}\right) = -\frac{r_0'}{r_0^3},$$

$$D^3 q_0 = -\frac{1}{r_0}\frac{d}{dq_0}\left(\frac{r_0'}{r_0^3}\right) = -\frac{1}{r_0}\left[\frac{r_0''}{r_0^3} - 3\frac{r_0'^2}{r_0^4}\right],$$

. . . . . .

also

$$q = \frac{\tau}{r_0} - \frac{\tau^2}{2!}\frac{r_0'}{r_0^3} - \frac{\tau^3}{3!}\left[\frac{r_0''}{r_0^4} - 3\frac{r_0'^2}{r_0^5}\right] + \cdots .$$

Führen wir wieder die dimensionslose Variable $z = r_0 q/\tau$ ein, so erhalten wir aus dieser Gleichung nach Multiplikation mit r_0/τ

$$z = 1 - \frac{\tau}{2!}\frac{r_0'}{r_0^2} - \frac{\tau^2}{3!}\left[\frac{r_0''}{r_0^3} - 3\frac{r_0'^2}{r_0^4}\right] + \cdots .$$

Setzt man wieder für $r', r'', r''' = -\alpha^2 r', \ldots$ die Ausdrücke (V; 47) ein, so folgt die Entwicklung

$$z = 1 - \frac{\tau}{2}\sigma - \frac{\tau^2}{6}(\varepsilon - 3\sigma^2) + \cdots ,$$

die mit der in Bd. I, S. 240, angegebenen identisch ist.

208. Lie-Reihen von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler

Die Anwendung des in Abschnitt 207 beschriebenen Verfahrens zur Umkehrung von Funktionen auf Systeme von Funktionen mehrerer Variabler ist komplizierter, da es auf Systeme von partiellen Differentialgleichungen führt.

Wir nehmen an, daß m verschiedene LIE-Operatoren

(XXIV; 28)

$$D_j = \vartheta_{j1}(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_{j2}(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \vartheta_{jn}\frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

vorliegen und die Funktionen $\vartheta_{jk}(z) = \vartheta_{jk}(z_1, \ldots, z_n)$ in einem Gebiet G holomorph sind. Sei nun $f(z)$ eine im gleichen Gebiet holomorphe Funktion der Variablen z_i, so können wir eine LIE-Reihe durch

(XXIV; 29) $$F(z, t) = e^{t_1 D_1 + t_2 D_2 + \cdots + t_m D_m} f(z)$$

als Funktion von z und den m Parametern $t_1, \ldots, t_m$ definieren, und es ist $F(z, 0) = f(z)$.

Nun betrachten wir n spezielle Funktionen von der Form (XXIV; 29),

(XXIV; 30) $$\varphi_i(z, t) = e^{t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m} z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und erhalten durch partielle Differentiation nach den t_j

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} = D_j e^{t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m} z_i .$$

Auch in diesem Falle gilt der Vertauschungssatz (XXIV; 6);[1]) es ist also

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} = e^{t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m} D_j z_i = e^{t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m} \vartheta_{ji}(z)$$

oder, wenn man den Vertauschungssatz nochmals anwendet,

$$\text{(XXIV; 31)} \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} = \vartheta_{ji}(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \varphi(z, t) .$$

Die Funktionen (XXIV; 30) sind also Lösungen des Systems (XXIV; 31) von partiellen Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi_i(z, 0) = z_i$, doch ist es notwendig, damit die Verträglichkeitsbedingungen

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_j \partial t_k} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_k \partial t_j}$$

erfüllt sind, daß die Operatoren D_j, D_k vertauschbar sind, d. h. nach Abschnitt 203 die Summen (XXIV; 4) sämtlich verschwinden.

Ein sehr einfaches Beispiel für vertauschbare Operatoren geben

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial z_2},$$

die offenbar die Vertauschbarkeitsbedingung $D_1 D_2 = D_2 D_1$ erfüllen. Seien nun h_1 und h_2 zwei kleine Inkremente der Variablen z_1, z_2, so ist

$$F(z, h) = e^{h_1 D_1 + h_2 D_2} F(z) = F(e^{h_1 D_1 + h_2 D_2} z)$$

eine LIE-Reihe, die aber nach dem linearen Gliede abbricht, da

$$D_j z_i = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = i \\ 0 & \text{für} \quad j \neq i \end{cases}$$

ist, also alle mehrfachen Anwendungen der Operatoren auf die z_i Null ergeben. Man erhält daher

$$e^{h_1 D_1 + h_2 D_2} z_i = [1 + (h_1 D_1 + h_2 D_2)] z_i = z_i + h_i ,$$

also

$$\text{(XXIV; 32)} \qquad F(z_1 + h_1, z_2 + h_2) = e^{h_1 D_1 + h_2 D_2} F(z) .$$

Das ist die bekannte TAYLORsche Entwicklung von Funktionen mit zwei Variablen, die in gleicher Form auch für beliebig viele Variable gilt.

---

[1]) Den Beweis, der in derselben Weise geführt wird wie für die einfachere Formel (XXIV; 6), möge man bei W. GRÖBNER (Fußnote [2]) auf S. 58) nachlesen.

Wir benutzen nun die obigen Überlegungen, um das Problem der Umkehr eines Gleichungssystems (XXIV; 25),

$$y_i = \varphi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

allgemein, d. h. auch für $n > 1$, zu lösen. Wir haben bereits bewiesen, daß die Ermittlung der Lösungen,

$$x_i = \Phi_i(y),$$

auf die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen,

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \Phi_{ik},$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i = \xi_i$, $y_i = \eta_i$ zurückgeführt werden kann, wo die Größen Φ_{ik} die Elemente der inversen JACOBIschen Matrix

$$\mathfrak{J}^{-1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right)$$

sind und vorausgesetzt ist, daß $\mathfrak{J} = (\partial y_i/\partial x_k)$ an der Stelle ξ_i, η_i nicht singulär ist. Man kann dann mit Hilfe der LIE-Operatoren

$$D_k = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

deren Vertauschbarkeit noch bewiesen werden muß, die Lösung in der Form

$$x_i = e^{[(y_1-\eta_1)D_1+\cdots+(y_n-\eta_n)D_n]}\xi_i$$

hinschreiben. Es ist nämlich

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(e^{[(y_1-\eta_1)D_1+\cdots+(y_n-\eta_n)D_n]}\xi) = e^{[(y_1-\eta_1)D_1+\cdots]}\varphi_i(\xi) =$$

$$= \left[1 + \sum_j (y_j - \eta_j)D_j + \cdots\right] \varphi_i(\xi).$$

Diese Reihe bricht aber mit dem linearen Gliede ab, denn es ist

$$D_j\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kj} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kj}\varphi_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = i \\ 0 & \text{für} \quad j \neq i \end{cases},$$

da für die zueinander inversen JACOBIschen Matrizen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^{-1}$ das Produkt

$$\mathfrak{J}\mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{E}$$

die Einheitsmatrix liefert. Für beliebige j, k ist also $D_jD_k = D_kD_j = 0$; die Operatoren sind somit vertauschbar. Man erhält daher

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(\xi) + y_i - \eta_i$$

oder

$$y_i = \varphi_i(x) + \eta_i - \varphi_i(\xi) = \varphi_i(x),$$

also die gesuchte Lösung von (XXIV; 25), da für die Anfangswerte ξ_i, y_i die Gültigkeit der Beziehungen $\eta_i = \varphi_i(\xi)$ vorausgesetzt wird.

209. Der logarithmische Operator

Ein spezieller LIE-Operator, der „logarithmische Operator“ (XXIV; 2b),

$$D = z\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\ln z},$$

löst die Differentialgleichung $df(z)/dt = z$. Sei etwa $f(z) = z$ und

(XXIV; 33)
$$\frac{dz}{dt} = z,$$

so erhält man als Lösung

$$z = e^{tD}\xi = \left(1 + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \cdots\right) z_{(z=\xi)}$$

oder, da $Dz = z$, $D^2z = z$, …, $D^nz = z$ ist,

$$z = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\xi = \xi e^t$$

als vollständige Lösung von (XXIV; 33) mit der Integrationskonstanten $\xi = z(0)$.

Man kann diesen Operator zu einer Umformung der TAYLORschen Reihe (XXIV; 6a) bzw. (XXIV; 32) benutzen. Sei h ein kleines Inkrement der Variablen z, so gilt für eine analytische Funktion F innerhalb eines gewissen Bereiches um z

(XXIV; 34)
$$F(z+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial z}}F(z) = \left(1 + h\frac{\partial}{\partial z} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \cdots\right)F(z).$$

Ist h gegen z selbst genügend klein, so kann man

$$z + h = z\left(1 + \frac{h}{z}\right) = z(1+\delta) = zp$$

setzen, wo mit $\delta = h/z$ der Faktor

$$p = 1 + \delta$$

von der Einheit nur wenig verschieden ist. Man kann dann

(XXIV; 35)
$$F(z+h) = F(zp) = e^{\delta z \frac{\partial}{\partial z}} F(z) = \left(1 + \delta z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\delta^2}{2!} z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \cdots\right) F(z)$$

schreiben. Nun sei $D = z\partial/\partial z$ der logarithmische Operator. Dann ist

$$D^2 = z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right) = z\frac{\partial}{\partial z} + z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

also

$$z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} = D^2 - D = D(D-1).$$

Ebenso erhält man

$$z^n\frac{\partial^n}{\partial z^n} = D(D-1)\,(D-2)\cdots(D-n+1).$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion erbracht, denn wenn er für n richtig ist, so folgt

$$D\left(z^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\right) = z\frac{\partial}{\partial z}\left(z^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\right) = z\left[nz^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial z^n} + z^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\right] = nz^n\frac{\partial^n}{\partial z^n} + z^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}},$$

also

$$z^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} = z^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\cdot(D-n),$$

womit die Behauptung bewiesen ist, da sie für $n = 1$ schon gilt. Man darf also

$$\frac{1}{n!}z^n\frac{\partial^n}{\partial z^n} = \binom{D}{n}$$

und statt (XXIV; 35) auch

$$F(zp) = \left[1 + \delta\binom{D}{1} + \delta^2\binom{D}{2} + \cdots\right] F(z)$$

schreiben. Andererseits ist aber, wenn man den binomischen Satz symbolisch zur Abkürzung dieser Formel verwendet,

$$p^D = (1+\delta)^D = 1 + \delta\binom{D}{1} + \delta^2\binom{D}{2} + \cdots$$

und daher

(XXIV; 36)
$$F(zp) = p^D F(z),$$

also nach (XXIV; **34, 35**)

$$e^{h\frac{\partial}{\partial z}} = p^D.$$

Hieraus folgt ohne weiteres für die TAYLORsche Entwicklung (XXIV; 32) einer Funktion von mehreren Variablen

(XXIV; 36a) $$F(z_1 + h_1, z_2 + h_2, \ldots) = p_1{}^{D_1} p_2{}^{D_2} \ldots F(z_1, z_2, \ldots),$$

wenn

$$p_i = 1 + \frac{h_i}{z_i}, \qquad h_i = z_i \delta_i$$

gesetzt wird.

210. Der Gradientoperator

Es sei $\mathfrak{r}$ ein Ortsvektor in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, x, y, z seine Koordinaten und $f(\mathfrak{r}) = f(x, y, z)$ eine skalare Funktion von $\mathfrak{r}$, etwa eine Potentialfunktion $U(\mathfrak{r})$ in einem Kräftefeld. Ferner sei

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r},$$

wo $\mathfrak{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ ein „ungestörter" Ort und $\delta(\xi, \eta, \zeta)$ ein Störungsinkrement sei. Man wird dann die TAYLORsche Entwicklung

$$U(\mathfrak{r}) = U(\mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r}) = e^{\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)} U(\mathfrak{r}_0)$$

ansetzen. Seien ferner $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in den positiven Achsenrichtungen des Koordinatensystems, so ist

$$\delta\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\xi + \mathfrak{j}\eta + \mathfrak{k}\zeta.$$

Andererseits kann man den vektoriellen Operator

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

als „Gradientoperator" bezeichnen, denn es ist ja

$$\nabla U = \mathfrak{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{r}} U,$$

und man kann abgekürzt

$$U(\mathfrak{r}) = e^{(\delta\mathfrak{r}\nabla)} U(\mathfrak{r}_0)$$

schreiben, wenn man

$$\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z} = (\delta\mathfrak{r}\nabla)$$

formal durch das Skalarprodukt aus den beiden Vektoren $\delta\mathfrak{r}$ und ∇ ausdrückt.

Ebenso kann man die Entwicklung

$$U(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = e^{[(\delta\mathfrak{r}_1\nabla_1)+(\delta\mathfrak{r}_2\nabla_2)]}U[\mathfrak{r}_1(0), \mathfrak{r}_2(0)]$$

für eine Skalarfunktion ansetzen, die von zwei gestörten Örtern

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(0) + \delta\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_2(0) + \delta\mathfrak{r}_2$$

abhängt, wenn

$$\nabla_i = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y_i} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

die Gradientoperatoren bedeuten, die auf U an den Stellen $\mathfrak{r}_i$ anzuwenden sind.

211. Dyaden und Affinoren

Eine besondere Form von Operatoren, die dazu verwendet werden können, um komplizierte Entwicklungen in eine einfachere und für Computer geeignetere Form zu bringen, sind die *Dyaden*.

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren,

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k},$$

wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren bezeichnen, die ein im übrigen beliebig orientiertes rechtwinkliges Koordinatensystem definieren. Dann bezeichnen wir mit

(XXIV; 37) $$\Phi = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$$

einen Operator, der, angewandt auf einen dritten Vektor

$$\mathfrak{p} = p_1\mathfrak{i} + p_2\mathfrak{j} + p_3\mathfrak{k},$$

zu dem Ergebnis

(XXIV; 38) $$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) = \mathfrak{a}(b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3)$$

führt, d. h. den Vektor $\mathfrak{p}$ in einen anderen, nämlich in den mit dem Skalarprodukt $(\mathfrak{b}\mathfrak{p})$ multiplizierten Vektor $\mathfrak{a}$, verwandelt. Man bezeichnet $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ auch als das „unbestimmte Produkt“ zweier Vektoren, da es, wie auch andere Operatoren, erst dann einen konkreten Sinn erhält, wenn es auf ein gegebenes Objekt, in diesem Falle also auf einen Vektor $\mathfrak{p}$, bezogen wird.

Die Dyade Φ ist, wie (XXIV; 38) unmittelbar zeigt, in dem rechtwinkligen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$-System durch die quadratische dreireihige Matrix

$$(\Phi) = (a_\mu b_\nu)$$

bestimmt. Sie ist ein Spezialfall eines Operators T, der durch die Matrix

$$(T) = (\alpha_{\mu\nu})$$

mit beliebigen Elementen $\alpha_{\mu\nu}$ definiert wird und den man auch als „Affinor" bezeichnet, weil er eine affine Transformation $\mathfrak{q} = T\mathfrak{p}$ der Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{p}$ vermittelt. Damit T eine Dyade sei, müssen die Elemente in der Form

(XXIV; 39) $$\alpha_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

geschrieben werden können. Das ist im allgemeinen nicht der Fall, denn die Gleichungen (XXIV; 39) stellen neun Bedingungen für die sechs Größen a_μ, b_ν dar, die nur unter besonderen Umständen erfüllt sein werden. Man erhält z. B. aus

$$a_\nu b_1 = \alpha_{\nu 1}, \; a_\nu b_2 = \alpha_{\nu 2}$$

die Beziehungen

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\alpha_{\nu 1}}{\alpha_{\nu 2}},$$

also

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$$

oder

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22} = \alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{32} = 0 \text{ usw.}$$

Mit anderen Worten: Damit der Affinor T die Eigenschaft einer Dyade habe, müssen alle Unterdeterminanten der Determinante $|(T)|$ seiner Matrix und damit auch die Determinante selbst verschwinden.

Das dyadische Produkt (XXIV; 37) ist im allgemeinen nicht umkehrbar, denn während $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{p}$ in die Richtung $\mathfrak{a}$ fällt, ist ja

$$\Phi'\mathfrak{p} = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})\mathfrak{p} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$$

ein Vektor in der Richtung $\mathfrak{b}$, die im allgemeinen von derjenigen des Vektors $\mathfrak{a}$ verschieden ist.

Hinreichend und notwendig für die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})$ ist in der Tat, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die gleiche (oder die entgegengesetzte) Richtung haben. Um für beliebige Vektoren $\mathfrak{p}$ die Kommutierbarkeitsbedingung

(XXIV; 40) $$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{p} - (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) = 0$$

zu ermitteln, genügt es anzunehmen, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ Einheitsvektoren sind, da skalare Faktoren herausfallen. Diese Gleichung ist dann erfüllbar, wenn

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

(2) $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, aber $(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{p}) = 0$

ist. Die zweite Bedingung gilt aber nur für den speziellen Vektor $\mathfrak{p}$, der auf der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ definierten Ebene senkrecht steht, also nicht für beliebige $\mathfrak{p}$. Mithin ist die Bedingung (1) für die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Faktoren eines dyadischen Produkts notwendig und hinreichend.

Jeder Dyade $\Phi = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ kann man den Vektor

$$\Phi_v = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

und das Skalar

$$\Phi_s = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

zuordnen. Das Skalar einer Dyade ist also gleich der Spur ihrer Matrix, d. h. gleich der Summe ihrer Diagonalglieder. Die Dyade $\Phi = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ ist mit ihrer „Konjugierten“ $\Phi' = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})$ vertauschbar, wenn ihr Vektor Φ_v verschwindet, d. h. $a_\mu b_\nu = a_\nu b_\mu$ ist. Das bedeutet aber, daß die Matrix (Φ) symmetrisch ist. So erhält man auch, wenn man die Umkehrungsbedingung (XXIV; 40) mit $\mathfrak{b}$ vektoriell multipliziert,

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) = [\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\,(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) = 0, \quad \text{d. h. } [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \Phi_v = 0.$$

Sind Φ und Φ' konjugierte Dyaden, so kann man, ohne den obigen Definitionen zu widersprechen, durch eine neue Definition

$$\mathfrak{p}\Phi = \mathfrak{p}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = (\mathfrak{p}\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{p}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})\mathfrak{p} = \Phi'\mathfrak{p}$$

einführen. Vertauscht man also die Reihenfolge von Vektor und Dyade, so ist dies nur statthaft, wenn man die Dyade mit ihrer konjugierten vertauscht. Nur für symmetrische Dyaden (d. h. für Dyaden mit symmetrischer Matrix) gilt also das kommutative Gesetz $\mathfrak{p}\Phi = \Phi\mathfrak{p}$.

Die Dyade

$$\Phi = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = (a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}) \cdot (b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k})$$

läßt sich, indem man die rechte Seite dyadisch ausmultipliziert, in eine Summe von Dyaden,

$$(\text{XXIV; 41}) \qquad (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = a_1 b_1 (\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}) + a_1 b_2 (\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j}) + \cdots + a_3 b_2 (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j}) + a_3 b_3 (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k})$$

zerlegen, vorausgesetzt, daß für die dyadische Multiplikation das distributive Gesetz gilt. In der Tat erhält man für die Elementardyaden

$$(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i})\mathfrak{p} = \mathfrak{i}(\mathfrak{i}\mathfrak{p}) = \mathfrak{i}p_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j})\mathfrak{p} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}\mathfrak{p}) = \mathfrak{i}p_2, \ldots, (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j})\mathfrak{p} = \mathfrak{k}(\mathfrak{j}\mathfrak{p}) = \mathfrak{k}p_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k})\mathfrak{p} = \mathfrak{k}(\mathfrak{k}\mathfrak{p}) = \mathfrak{k}p_3.$$

Die Dyade (XXIV; 41), angewandt auf den Vektor $\mathfrak{p}$, läßt sich also auch

$$\text{(XXIV; 42)} \qquad \begin{aligned} \Phi\mathfrak{p} = {} & \mathfrak{i}(a_1b_1p_1 + a_1b_2p_2 + a_1b_3p_3) + \\ & + \mathfrak{j}(a_2b_1p_1 + a_2b_2p_2 + a_2b_3p_3) + \\ & + \mathfrak{k}(a_3b_1p_1 + a_3b_2p_2 + a_3b_3p_3) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

schreiben. Die Berechtigung, das distributive Gesetz bei der dyadischen Multiplikation anzuwenden, ist damit bewiesen.

Für nichtdyadische Affinoren müssen die Regeln der Vertauschbarkeit etwas modifiziert werden. Ist T ein Affinor mit der Matrix $(\alpha_{\mu\nu})$, so kann man, entsprechend (XXIV; 42),

$$\text{(XXIV; 43)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{q} = T\mathfrak{p} = {} & \mathfrak{i}(\alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \alpha_{13}p_3) + \\ & + \mathfrak{j}(\alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \alpha_{23}p_3) + \\ & + \mathfrak{k}(\alpha_{31}p_1 + \alpha_{32}p_2 + \alpha_{33}p_3) \end{aligned}$$

schreiben. Zu dem gleichen Ergebnis kommt man, wenn man, wie für Φ in (XXIV; 41),

$$\text{(XXIV; 44)} \qquad T = \alpha_{11}(\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}) + \alpha_{12}(\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{j}) + \cdots + \alpha_{32}(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{j}) + \alpha_{33}(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k})$$

als eine Summe von Elementardyaden schreibt, die aber selbst keine Dyade zu sein braucht. Wendet man diesen Operator auf $\mathfrak{p}$ an, so folgt

$$\begin{aligned} T\mathfrak{p} &= \alpha_{11}(\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i})\,(\mathfrak{i}p_1 + \mathfrak{j}p_2 + \mathfrak{k}p_3) + \cdots = \\ &= \alpha_{11}\mathfrak{i}[(\mathfrak{i}\mathfrak{i})\,p_1 + (\mathfrak{i}\mathfrak{j})\,p_2 + (\mathfrak{i}\mathfrak{k})p_3] + \cdots = \\ &= \alpha_{11}\mathfrak{i}p_1 + \cdots, \end{aligned}$$

also (XXIV; 43), da ja die skalaren Produkte $(\mathfrak{i}\mathfrak{i}) = (\mathfrak{j}\mathfrak{j}) = (\mathfrak{k}\mathfrak{k}) = 1$, $(\mathfrak{i}\mathfrak{j}) = (\mathfrak{j}\mathfrak{k}) = (\mathfrak{k}\mathfrak{i}) = 0$ sind.

Aufgrund der Gleichung (XXIV; 44) kann man den zu T konjugierten Affinor T' so definieren, daß

$$T' = \alpha_{11}(\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}) + \alpha_{12}(\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{i}) + \cdots + \alpha_{32}(\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k}) + \alpha_{33}(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k})$$

ist, also alle Elementardyaden durch ihre konjugierten ersetzt werden. Dann ist offenbar die Matrix von T'

$$(T') = (\alpha_{\nu\mu}), \text{ wenn } (T) = (\alpha_{\mu\nu}),$$

und T ist umkehrbar, d. h. mit T' vertauschbar, wenn alle $\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$, d. h. die Matrizen symmetrisch sind. Das stimmt wiederum mit der Forderung überein, daß für vertauschbare Affinoren der zu T gehörige Vektor

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{v}} &= \alpha_{11}[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] + \alpha_{12}[\mathfrak{i}\mathfrak{j}] + \cdots + \alpha_{32}[\mathfrak{k}\mathfrak{j}] + \alpha_{33}[\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = \\ &= \mathfrak{i}(\alpha_{23} - \alpha_{32}) + \mathfrak{j}(\alpha_{31} - \alpha_{13}) + \mathfrak{k}(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \end{aligned}$$

verschwindet. Ebenso gilt auch für Affinoren, daß das Skalar

$$T_s = \alpha_{11}(\ddot{\imath}\ddot{\imath}) + \alpha_{12}(\ddot{\imath}\ddot{\jmath}) + \cdots = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

gleich der Spur der Matrix (T) ist.

Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf alle Operatoren übertragen, die sich in eine Summe von beliebig vielen und beliebig beschaffenen Dyaden zerlegen lassen, denn jeder Summand von

$$T = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_i)$$

läßt sich auf die Form (XXIV; 41) zurückführen, und das gilt dann auch für T selbst. Die Summe kann auch unendlich viele Glieder haben, sofern die Summen $\sum_{i=1}^{\infty} a_\mu^{(i)} b_\nu^{(i)}$ konvergieren und endlichen Grenzwerten $\alpha_{\mu\nu}$ zustreben. Die Vertauschbarkeit ist garantiert, wenn die Matrix $(\alpha_{\mu\nu})$ symmetrisch ist. Das wiederum ist der Fall, wenn $\sum[\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i] = 0$ ist.

Es macht keine Schwierigkeit zu beweisen, daß diese Ergebnisse auch dann noch richtig bleiben, wenn man den Operator T als ein Integral über eine Dyade definiert, die als Funktion irgendeiner unabhängigen Variablen τ gilt. Sei etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\tau)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\tau)$, so ist

$$T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) d\tau$$

ein Operator, der umkehrbar ist, wenn der Vektor

$$T_v = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] d\tau$$

verschwindet. Dasselbe gilt auch noch, wenn $d\tau$ das Differential eines Vektors ist und etwa

$$T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mathfrak{a} \cdot [\mathfrak{b} d\tau])$$

gesetzt wird. Die Umkehrbarkeit ist dann gewährleistet, wenn

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} [\mathfrak{a}[\mathfrak{b} d\tau]] = 0$$

ist, und T ist dann ein symmetrischer Operator.

Wendet man eine Dyade Φ auf den Vektor $\mathfrak{p}$ an, so ist das Produkt $(\Phi \cdot \mathfrak{p})$ wiederum ein Vektor. Multipliziert man diesen skalar mit einem anderen Vektor $\mathfrak{q}$, so ergibt sich das Skalar

$$S = \big(\mathfrak{q}(\Phi \cdot \mathfrak{p})\big) = \big((\Phi \cdot \mathfrak{p})\mathfrak{q}\big) = \big((\mathfrak{p} \cdot \Phi')\mathfrak{q}\big).$$

Läßt man die inneren Klammern fort, so kann man S auch

(XXIV; 45) $$S = (\mathfrak{q}\Phi\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}\Phi'\mathfrak{q})$$

schreiben, in derselben Form also, durch die man das gemischte Produkt dreier Vektoren ausdrückt. Wie dort, darf man die Faktoren zyklisch vertauschen, aber nicht ihre Reihenfolge umkehren. Bei der Umkehr muß man vielmehr die Dyade durch ihre konjugierte ersetzen, während bei der Umkehr eines gemischten Vektorenprodukts lediglich das Vorzeichen wechselt. Nur für symmetrische Dyaden gilt das kommutative Gesetz

$$(\mathfrak{q}\Phi\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}\Phi\mathfrak{q}).$$

Alle diese Überlegungen gelten auch, wenn Φ ein nichtdyadischer Affinor mit der Matrix $(\alpha_{\mu\nu})$ und Φ' der konjugierte mit der Matrix $(\alpha_{\nu\mu})$ ist.

Von dem Skalar S kann man, etwa an der Stelle $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ des dreidimensionalen Raumes, den Gradienten bilden, und es ist dann

(XXIV; 46) $$\mathrm{grad}_{\mathfrak{p}} S = (\Phi'\mathfrak{q}),\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{q}} S = (\Phi\mathfrak{p}).$$

Die Richtigkeit dieser Formeln an Hand der Koordinatendarstellung von S zu bestätigen, ist elementar und möge dem Leser überlassen bleiben,

KAPITEL XXV

DIE KLASSISCHE METHODE DER ALLGEMEINEN STÖRUNGSRECHNUNG

212. Entwicklung der Störungsfunktion im Problem der allgemeinen Planetenstörungen

In der Himmelsmechanik hat seit NEWTON das Problem der Berechnung allgemeiner Störungen der Bewegung der großen Planeten, seit Beginn des 19. Jh. auch der Planetoiden, neben der Theorie der Mondbewegung im Vordergrund des Interesses gestanden. Die in diesem Kapitel zu behandelnde „klassische Methode" ist aus den Bemühungen großer Gelehrter wie EULER, LAGRANGE, LAPLACE und anderen hervorgegangen und hat durch LEVERRIER[1]) in seinen berühmten Abhandlungen über die Theorie der großen Planeten eine abschließende Form erhalten, die auch in neueren Untersuchungen im Prinzip unverändert geblieben, wenn auch durch Ergänzungen und Anwendung neuerer Hilfsmittel (z. B. der Operatoren) später vervollkommnet worden ist.

Das Hauptproblem ist dabei immer die Entwicklung der Störungsfunktion in Reihen, die nach trigonometrischen Funktionen fortschreiten, in denen die Zeit meistens in Gestalt der mittleren Anomalien der intermediären Bahnen der an der Bewegung beteiligten Körper, mitunter aber auch implizite durch die wahre oder exzentrische Anomalie bzw. durch andere „Pseudozeiten" ausgedrückt wird, wenn man sich dadurch Vereinfachung der Formeln, bessere Konvergenz oder andere Vorteile verspricht. Die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen der mittleren Anomalien oder Längen ist das natürlichste Verfahren, das wir daher im folgenden auch mit Vorrang verwenden werden.

In ihren Grundzügen ist diese Methode schon in Abschnitt 135 beschrieben worden. Beschränkt man sich auf Terme erster Ordnung in den störenden Massen, so läßt sich — für jede störende Masse einzeln, da sich die von verschiedenen Planeten ausgeübten Störungseffekte addieren — die Störungsfunktion in Reihen von der Form (XVI;13),

$$R = \sum_{j,k} C_{jk} \cos\left[(jn_1 + kn_2)t + D_{jk}\right], \tag{XXV;1}$$

schreiben, wobei n_1, n_2 die mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers bedeuten, C_{jk} und D_{jk} von den in erster Näherung als konstant anzusehenden Bahnelementen der beiden Körper abhängen und der ganze Ausdruck die störende Masse als Faktor enthält. In den Differentialgleichungen für die gestörten Variablen des Problems erscheinen dann auf den rechten Seiten die partiellen Ableitungen von (XXV;1) nach diesen Elementen, die von der gleichen integrablen Form sind. Nach erfolgter Integration und

---

[1]) U. J. J. LEVERRIER, Recherches astronomiques. Ann. Observ. Paris, Mém. 1, 2, 4—6, 10—14 (1855—1877).

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen sind diese Größen — wiederum genähert — als Funktionen der Zeit bekannt (z. B. $C_{jk} = C^0_{jk} + \delta C_{jk}$ usw.), wobei nun wieder die Störungen δC_{jk} von der Ordnung der störenden Massen sind. Setzt man dieses Verfahren sinngemäß fort, so ergeben sich für die Störungsfunktion Ausdrücke von der Form

$$R = k^2[mR_1 + m^2R_2 + m^3R_3 + \cdots]$$

oder, wenn mehrere Störplaneten berücksichtigt werden,

$$R = k^2\Big[\sum_i m_i R_1{}^{(i)} + \sum_{i,j} m_i m_j R_2{}^{(i,j)} + \sum_{i,j,k} m_i m_j m_k R_3{}^{(i,j,k)} + \cdots\Big],$$

in denen nun die R_1, R_2, R_3, ... aus den intermediären Bahnen berechenbar sind. Da die störenden Massen klein sind, wird man selbst bei strengster Rechnung nicht über die Glieder dritter Ordnung hinauszugehen und von diesen auch nur solche mit besonders großen Amplituden mitzunehmen brauchen. Von der Schwierigkeit, die in den Termen höherer Ordnung das Auftreten von trigonometrischen Gliedern verursacht, deren Koeffizienten die Zeit t oder Potenzen von t als Faktoren enthalten, ist schon in Abschnitt 135 die Rede gewesen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel hauptsächlich auf die Störungen erster Ordnung, in denen neben säkularen nur rein periodische, d. h. mit konstanten Koeffizienten behaftete Glieder erscheinen und verschieben eine eingehendere Diskussion der Störungen höherer Ordnung auf neuere Methoden, in denen die dabei auftretenden Schwierigkeiten in übersichtlicher Form gemeistert werden. Besondere Aufmerksamkeit erfordert das Problem der Ermittlung der Störungen der mittleren Anomalie (bzw. der mittleren Länge), die in den Störungsgleichungen von DELAUNAY und POINCARÉ als kanonische Variable dienen und deren Berechnung eine doppelte Integration erforderlich macht. Alles wesentliche darüber ist in Abschnitt 135 behandelt worden, so daß hier nur daran erinnert werden soll.

Zur Berechnung der Störungen erster Ordnung schreiben wir die Störungsfunktion in der Form (XXIII; 20a),

$$R = k^2 m_2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r_1 \cos\varphi}{{r_2}^2}\right),$$

wobei m_2 die Masse des Störplaneten bedeutet, r_1, r_2 die heliozentrischen Distanzen des gestörten Körpers (P_1) und des Störplaneten (P_2) sind, ϱ den Abstand P_1P_2 und φ den Winkel zwischen den beiden heliozentrischen Ortsvektoren bezeichnet. Wir nehmen ferner an, daß $r_1 < r_2$ ist, der gestörte Körper sich also innerhalb der Bahn des Störplaneten bewegt (z. B. Planetoid, gestört durch Jupiter). Daß der andere Fall, $r_1 > r_2$ (etwa bei der Berechnung der Störungen des Saturns durch Jupiter), nur die Vertauschung der Indizes erfordert, wurde schon in Abschnitt 199 begründet.

Der Ausdruck $R = k^2 m F$, mit

(XXV; 2)
$$F = \Psi - \psi = \frac{1}{\varrho} - \frac{r_1 \cos\varphi}{{r_2}^2},$$

ist nur von der Gestalt des Dreiecks (Sonne, P_1, P_2) abhängig, also gegen Transformationen des Koordinatensystems invariant. Man wird also das System zweckmäßig so legen, daß in den zu entwickelnden Formeln keine überflüssigen Parameter erscheinen. In Abschnitt 199 wurde zu diesem Zwecke vorgeschlagen, eine der intermediären Bahnebenen (C_1) oder (C_2) als Hauptkoordinatenebene zu wählen (s. Abb. 3, die mit Abb. 2 identisch ist). Welche von beiden man nimmt, ist an sich gleichgültig, man wird aber die Entscheidung darüber

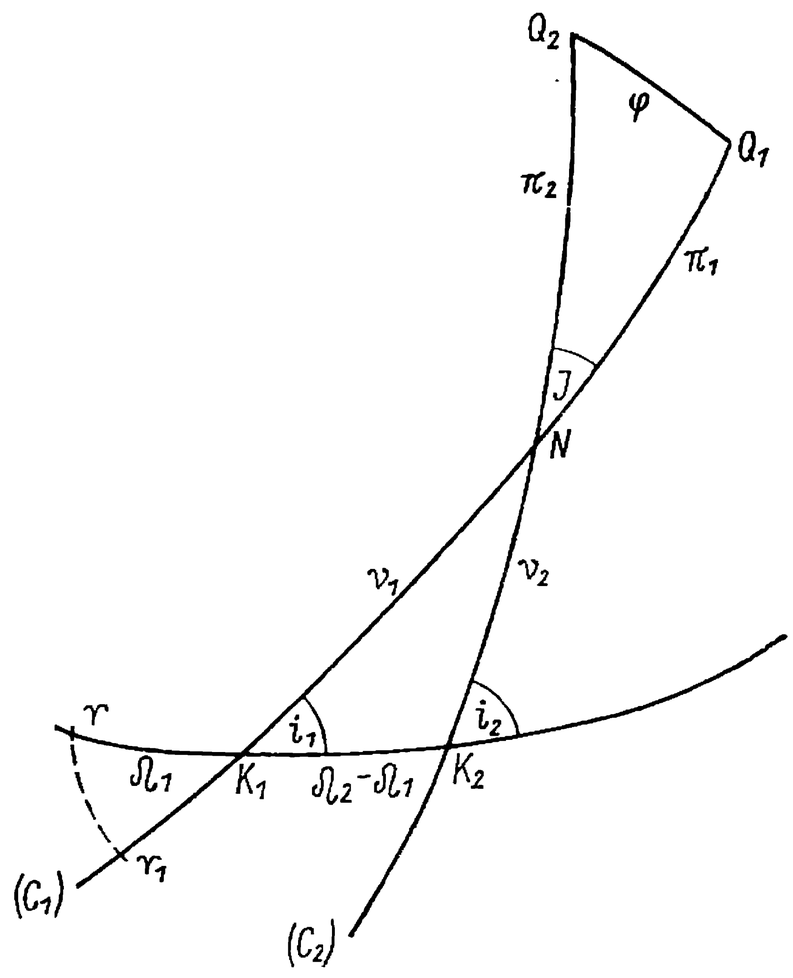

Abb. 3. Spuren der oskulierenden Bahnebenen zweier Planeten an der heliozentrischen Sphäre (Q_1, Q_2 = Richtungen nach den Planetenörtern zur Oskulationszeit)

von dem besonderen Zweck der Untersuchung abhängig machen. Will man z. B. die Theorie der Störungen beliebiger Planetoiden durch Jupiter entwickeln, so wird man die Bahnebene des Jupiters, deren Spur an der heliozentrischen Sphäre (C_2) ist, zur Hauptkoordinatenebene machen und diese als unveränderliche Referenzebene ansehen, was für den genannten Zweck (zumal Störungen durch Saturn und andere Planeten unberücksichtigt bleiben) fast immer ausreicht. Wird andererseits die Aufgabe gestellt, die Störungen eines bestimmten Planeten oder Planetoiden durch mehrere Störplaneten zu ermitteln, so wird man die Ebene (C_1) der intermediären Bahn des gestörten Körpers als Hauptebene verwenden, auf die man dann die Bewegung jedes der störenden Körper beziehen kann. Allerdings wird man dann zusätzlich noch die Veränderlichkeit der Lage von (C_1) in bezug auf ein festes Koordinatensystem berechnen müssen.

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, so darf man bei der

Entwicklung von F beide Bahnebenen als fest und die Elemente beider Bahnbewegungen als konstant ansehen. Es ist dann gleichgültig, welche Ebene als Bezugsebene dient, und wir werden daher, wie in Abschnitt 199, alle Formeln auf das (C_1)-System und die Anfangsrichtung Υ_1 beziehen. Es ist dann, wenn wir die Bezeichnungen übernehmen, die in Abschnitt 199 und Abb. 3 definiert sind,

$$r_1 = r_1(a_1, e_1, v_1), \quad r_2 = r_2(a_2, e_2, v_2),$$

$$v_1 = L_1 - \omega_1, \quad v_2 = L_2 - \omega_2 \quad \text{nach (XXIII; 30a)},$$

$$\cos\varphi = f(L_1, L_2, \tau, J) \quad \text{nach (XXIII; 30)},$$

also

$$F = F(a_1, e_1, a_2, e_2, J;\ L_1, L_2, \omega_1, \omega_2, \tau)$$

eine Funktion von zehn unabhängigen Elementen. Von diesen sind L_1, L_2, die wahren Längen im (C_1)-System, Funktionen der Zeit. In den bei der Entwicklung von F in die trigonometrische Reihe (XXV; 1) auftretenden Termen sind die Amplituden

$$C_{jk} = C_{jk}(a_1, e_1, a_2, e_2, J)$$

Funktionen der Halbachsen a_1, a_2 von der Dimension $[l^{-1}]$ sowie der dimensionslosen Größen e_1, e_2 und J, die Phasen D_{jk} Funktionen der wahren Längen L_1, L_2 der Planeten und der (in erster Näherung konstanten) Längen ω_1, ω_2 der Perihelien sowie der Länge τ des Knotens N, die sich sämtlich auf das (C_1)-System beziehen. Von den zwölf Integrationskonstanten, die das Problem erfordert, fehlen also noch zwei, nämlich die Neigung i_1 und die Knotenlänge Ω_1 der Bahnebene (C_1) bezüglich eines beliebigen festen Koordinatensystems. Diese Größen werden zunächst ausgeklammert, da sie auf die Gestalt des Störungsausdrucks (XXV; 1) keinen Einfluß haben. Sie erfordern also eine gesonderte Behandlung, wenn sie nicht als Konstante angesehen werden dürfen. Das ist immer der Fall, wenn (C_1) die Spur der Bahnebene eines durch Jupiter gestörten Planetoiden ist oder wenn die gegenseitigen Störungen zweier großer Planeten (etwa Jupiter und Saturn) ermittelt werden sollen. Dann wird die Lösung der Differentialgleichungen für i_1 und Ω_1 [s. (XV; 86)] als zusätzliche Aufgabe nötig sein.

In der Störungstheorie der großen und der meisten kleinen Planeten werden die Koeffizienten C_{ij} der trigonometrischen Terme nach Potenzen der kleinen Parameter e_1, e_2 und J entwickelt. Dabei sind e_1, e_2 als klein von der ersten Ordnung anzusehen, während J nur in der Form $\eta^2 = \sin^2(J/2)$, also nur in Ausdrücken auftritt, die klein von der zweiten Ordnung sind. Für die großen Planeten (mit Ausnahme von Merkur und Pluto) gilt das durchweg. LEVERRIER hat die Entwicklung der C_{jk} in Potenzreihen nach diesen Parametern bis zur siebenten Ordnung durchgeführt und dabei nicht weniger als 469 trigonometrische Glieder gefunden, deren Amplituden diese Größenordnung erreichen. Wir begnügen uns im folgenden mit der Entwicklung bis zur zweiten Ordnung einschließlich, was völlig ausreicht, um das Prinzip der Methode deutlich zu machen.

213. Entwicklung des Hauptteils der Störungsfunktion

Der Hauptteil der Störungsfunktion,

$$(\text{XXV}; 3) \qquad \Psi = \frac{1}{\varrho} = [r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos\varphi + r_2^2]^{-1/2},$$

den wir jetzt in dieser symmetrischen Form schreiben wollen, enthält, worauf schon in Abschnitt 199 hingewiesen wurde, die Koordinaten der Planeten im Nenner und unter der Quadratwurzel, so daß seine Entwicklung in Reihen, die nach trigonometrischen Funktionen der mittleren Längen bzw. Anomalien fortschreiten, schwieriger ist als die des Nebenteils ψ, der in den Koordinaten des jeweils gestörten Körpers linear ist. Die Entwicklung des Hauptteils bildet daher in der Störungstheorie das fundamentale Problem. Betrachten wir, um die Verhältnisse zu fixieren, wie in Abschnitt 199, P_1 als den gestörten, P_2 als den störenden Planeten und nehmen wir an, daß die Bahn von P_1 innerhalb der von P_2 verläuft, so daß $\alpha = a_1/a_2 < 1$ ist, und bedienen wir uns der Bezeichnungen des Abschnitts 199 und von Abb. 3, S. 88. Dann ist nach (XXIII; 30)

$$\cos\varphi = \cos(L_2 - L_1) - 2\eta^2 \sin(L_1 - \tau)\sin(L_2 - \tau),$$

wenn $\eta = \sin(J/2)$ nach (XXIII; 28) aus

$$\eta^2 = \sin^2\frac{i_2 - i_1}{2} + \sin i_1 \sin i_2 \sin^2\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$$

berechnet wird. Man schreibt dann

$$\Psi = [r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(L_2 - L_1) + r_2^2 + 4\eta^2 r_1 r_2 \sin(L_1 - \tau)\sin(L_2 - \tau)]^{-1/2}$$

oder

$$(\text{XXV}; 4) \quad \Psi = \Phi^{-1/2}(1 + 4\zeta)^{-1/2} = \Phi^{-1/2}(1 - 2\zeta + 6\zeta^2 - 20\zeta^3 + \cdots),$$

wenn zur Abkürzung

$$\Phi = r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(L_2 - L_1) + r_2^2,$$
$$\xi = \eta^2 r_1 r_2 \sin(L_1 - \tau)\sin(L_2 - \tau), \quad \zeta = \frac{\xi}{\Phi}$$

gesetzt wird. Sind P_1 und P_2 irgend zwei der großen Planeten, so ist

$$|\zeta| < \eta^2 \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2}$$

durchweg sehr klein, da der Faktor $r_1 r_2/(r_1 - r_2)^2$ selbst bei benachbarten Planeten nur mäßig große Werte (< 10) annimmt. In allen Fällen ist $|\zeta| < 10^{-2}$, mit Ausnahme der Fälle Merkur—Venus ($|\zeta| < 1/60$) und Neptun—Pluto.

Die Reihe (XXV; 4) konvergiert also sehr rasch. LEVERRIER hat diese Entwicklung bis zu den Termen mit ζ^3 bzw. η^6 durchgeführt, was der von ihm angestrebten Genauigkeit entspricht. Diese Entwicklungsmethode versagt allerdings, wenn es sich um die Jupiterstörungen gewisser Planetoiden handelt, deren Bahnen große Exzentrizitäten und große Neigungen gegen die Ebene der Jupiterbahn aufweisen. So kann bei Pallas ($J \approx 34°$, $e_1 \approx 0.24$, $a_1 \approx 2.8$) der Abstand vom Jupiter so klein werden, daß $4|\zeta| > 1$ wird. Dann divergiert die Reihe (XXV; 4), und es müssen andere Wege zur Entwicklung der Störungsfunktion eingeschlagen werden.

Bei kleinen Exzentrizitäten und kleiner Neigung erhält man einen ersten Näherungswert Ψ_0 für Ψ, indem man die Exzentrizitäten gleich Null setzt. Die heliozentrischen Distanzen reduzieren sich dann auf die großen Halbachsen a_i, die die Halbmesser von Kreisbahnen mit gegebener Umlaufszeit sind, und die wahren Längen L_i sind mit den mittleren Längen λ_i identisch. Es darf dann

$$\text{(XXV; 5)} \qquad \begin{cases} \Phi_0 = a_1^2 - 2a_1a_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + a_2^2, \\ \xi_0 = \eta^2 a_1 a_2 \sin(\lambda_1 - \tau) \sin(\lambda_2 - \tau) \end{cases}$$

und

$$\text{(XXV; 6)} \quad \Psi_0 = \Phi_0^{-1/2} - \eta^2 a_1 a_2 \Phi_0^{-3/2} \cdot 2 \sin(\lambda_1 - \tau) \sin(\lambda_2 - \tau) + \\ + \frac{3}{4} \eta^4 a_1^2 a_2^2 \Phi_0^{-5/2} \cdot 8 \sin^2(\lambda_1 - \tau) \sin^2(\lambda_2 - \tau) - \\ - \frac{5}{8} \eta^6 a_1^3 a_2^3 \Phi_0^{-7/2} \cdot 32 \sin^3(\lambda_1 - \tau) \sin^3(\lambda_2 - \tau) + \cdots$$

geschrieben werden. Die Größen

$$\Phi_0^{-1/2}, \quad a_1 a_2 \Phi_0^{-3/2}, \quad a_1^2 a_2^2 \Phi_0^{-5/2}, \quad a_1^3 a_2^3 \Phi_0^{-7/2}, \ \ldots$$

lassen sich dann nach (XXIII; 32) in Reihen entwickeln, die nach den Kosinus der Vielfachen von $\lambda_2 - \lambda_1$ fortschreiten, und zwar ist nach Abschnitt 200, mit $s = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$, $\alpha = a_1/a_2 < 1$,

$$\text{(XXV; 7)} \quad (a_1 a_2)^{s-1/2} \Phi_0^{-s} = \frac{a_1^{s-1/2}}{a_2^{s+1/2}} [1 - 2\alpha \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha^2]^{-s} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k^{(s)} \cos k(\lambda_2 - \lambda_1),$$

wenn wir nach (XXIII; 35) die in a_1, a_2 symmetrischen Koeffizienten

$$\beta_k^{(s)} = \frac{a_1^{s-1/2}}{a_2^{s+1/2}} b_k^{(s)} = \frac{1}{a_2} \alpha^{s-1/2} b_k^{(s)}$$

einführen. Statt dessen werden häufig auch die Bezeichnungen (XXIII; 37),

$$A_k = \beta_k^{(1/2)}, \quad B_k = \beta_k^{(3/2)}, \quad C_k = \beta_k^{(5/2)}, \quad D_k = \beta_k^{(7/2)}, \ \ldots$$

benutzt. Man erhält dann die Größen (XXV; 7) in der Form

$$(\text{XXV};\,8)\qquad \begin{cases} \Phi_0^{-1/2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1), \\ a_1 a_2 \Phi_0^{-3/2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1), \\ a_1^2 a_2^2 \Phi_0^{-5/2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1), \ \ldots \end{cases}$$

und es ist $A_{-k} = A_k$, $B_{-k} = B_k$ usw.

Ferner ist in (XXV; 6)

$$(\text{XXV};\,9\text{a})\qquad f_1 = 2\sin(\lambda_1-\tau)\sin(\lambda_2-\tau) = \cos(\lambda_2-\lambda_1) - \cos(\lambda_1+\lambda_2-2\tau),$$

$$(\text{XXV};\,9\text{b})\qquad f_2 = 8\sin^2(\lambda_1-\tau)\sin^2(\lambda_2-\tau) = 2f_1^2 = 2 + \cos 2(\lambda_2-\lambda_1) + \cos 2(\lambda_1+\lambda_2-2\tau) - 2\cos 2(\lambda_1-\tau) - 2\cos 2(\lambda_2-\tau),$$

und auf ähnliche Weise errechnet man auch

$$(\text{XXV};\,9\text{c})\quad f_3 = 32\sin^3(\lambda_1-\tau)\sin^3(\lambda_2-\tau) = 2f_1 f_2 = 9\cos(\lambda_2-\lambda_1) + \cos 3(\lambda_2-\lambda_1) - 9\cos(\lambda_1+\lambda_2-2\tau) - 3\cos(3\lambda_2-\lambda_1-2\tau) - 3\cos(3\lambda_1-\lambda_2-2\tau) + 3\cos(3\lambda_2+\lambda_1-4\tau) + 3\cos(3\lambda_1+\lambda_2-4\tau) - \cos 3(\lambda_1+\lambda_2-2\tau).$$

Setzt man (XXV; 8) und (XXV; 9a—c) in (XXV; 6) ein, so ergeben sich Terme von der Form

$$\cos\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_k \cos[k(\lambda_2-\lambda_1)+\gamma] + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_k \cos[k(\lambda_2-\lambda_1)-\gamma],$$

in denen die Folge K_k eine der Folgen A_k, B_k, C_k, ... bezeichnet und γ irgendeines der in den Formeln (XXV; 9) vorkommenden Winkelargumente bedeutet. Da aber wegen $K_k = K_{-k}$ in den Summen die Indizes k und $-k$ vertauscht werden dürfen, sind die beiden Summen rechts identisch, und es folgt daher

$$\cos\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_k \cos[k(\lambda_2-\lambda_1)+\gamma].$$

Aufgrund dieser Regel ergibt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\lambda_2-\lambda_1 = u; \quad \lambda_1-\tau = w$$

setzen,

(XXV; 10)

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}\sum_k A_k \cos ku - \frac{1}{2}\eta^2 \sum_k B_k \{\cos(k+1)u - \cos[(k+1)u + 2w]\} +$$
$$+ \frac{3}{8}\eta^4 \sum_k C_k \{2\cos ku + \cos(k+2)u + \cos[(k+2)u + 4w] -$$
$$- 2\cos[(k+2)u + 2w] - 2\cos[ku + 2w]\} -$$
$$- \frac{5}{16}\eta^6 \sum_k D_k \{9\cos(k+1)u + \cos(k+3)u - 9\cos[(k+1)u + 2w] -$$
$$- 3\cos[(k+3)u + 2w] - 3\cos[(k-1)u + 2w] +$$
$$+ 3\cos[(k+3)u + 4w] + 3\cos[(k+1)u + 4w] -$$
$$- \cos[(k+3)u + 6w]\} + \cdots.$$

Da in allen Summen der Index k von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, darf man ihn mit $k+1$, $k-1$, $k-2$, $k-3$, ... vertauschen, so daß im Argument der Kosinus überall k statt $k-1$, $k+1$, $k+2$, $k+3$, ... erscheint. Die Summen erhalten dann die gemeinsame Form

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_{k,h} \cos(ku + 2hw) \quad \text{mit} \quad h = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

und es wird dann

(XXV; 10a)

$$\Psi_0 = \sum_k K_{k,0} \cos ku + \sum_k K_{k,1} \cos(ku + 2w) + \sum_k K_{k,2} \cos(ku + 4w) + \cdots$$

mit

(XXV; 10b)

$$\begin{cases} K_{k,0} = \frac{1}{2} A_k - \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1} + \frac{3}{8}\eta^4(C_{k-2} + 2C_k) - \\ \qquad - \frac{5}{16}\eta^6(D_{k-3} + 9D_{k-1}) + \cdots, \\ K_{k,1} = \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1} - \frac{3}{4}\eta^4(C_{k-2} + C_k) + \\ \qquad + \frac{15}{16}\eta^6(D_{k-3} + 3D_{k-1} + D_{k+1}) - \cdots, \\ K_{k,2} = \frac{3}{8}\eta^4 C_{k-2} - \frac{15}{16}\eta^6(D_{k-3} + D_{k-1}) + \cdots, \\ K_{k,3} = \frac{5}{16}\eta^6 D_{k-3} - \cdots. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $K_{k,h}$ sind also, wie die A, B, C, ..., symmetrische Funktionen von a_1, a_2 und außerdem gerade Funktionen der Ordnung $2h$ von η.

Sind die Exzentrizitäten e_1, e_2 klein genug, so kann man von der Näherung Ψ_0 aus durch rasch konvergierende Potenzentwicklungen nach den e_i auf Ψ übergehen. Dies Verfahren ist elementar, erfordert aber, wenn man es bis zu hohen Ordnungen in e_1, e_2 und η durchführen will, umständliche und zeitraubende Rechnungen. Wir begnügen uns daher hier damit, den Gang der Analyse zu skizzieren.

Statt der Größen a_i, λ_i sind in (XXV; 10, 10a, 10b) jetzt

$$r_i = a_i(1 + x_i), \quad L_i = \lambda_i + y_i$$

einzuführen. Die Inkremente x_i, y_i sind von der Ordnung e_i und durch die trigonometrischen Reihen

$$\text{(XXV; 11)} \quad \begin{cases} x_i = \dfrac{r_i}{a_i} - 1 = \dfrac{1}{2}\, {e_i}^2 - \left(e_i - \dfrac{3}{8}\, {e_i}^3 + \cdots\right) \cos M_i - \\ \qquad - \left(\dfrac{1}{2}\, {e_i}^2 - \cdots\right) \cos 2M_i - \left(\dfrac{3}{8}\, {e_i}^3 - \cdots\right) \cos 3M_i - \cdots, \\ y_i = v_i - M_i = \left(2e_i - \dfrac{1}{4}\, {e_i}^3 + \cdots\right) \sin M_i + \\ \qquad + \left(\dfrac{5}{4}\, {e_i}^2 - \cdots\right) \sin 2M_i + \left(\dfrac{13}{12}\, {e_i}^3 - \cdots\right) \sin 3M_i + \cdots \end{cases}$$

darstellbar, die nach Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalien M_i fortschreiten. Der Leser findet diese Reihen in (VII; 64) bzw. (VII; 66)[1]) bis zur Ordnung e^7 ausgeführt.

Nun haben die Koeffizienten (XXV; 10b) die allgemeine Form

$$F(a_1, a_2) = \frac{1}{a_2} f_1 + \frac{a_1}{{a_2}^2} f_2 + \frac{{a_1}^2}{{a_2}^3} f_3 + \cdots,$$

wobei die f_i, soweit sie nicht Null sind, Funktionen von η^2 darstellen. Die F sind also [s. auch (XXIII; 36)] homogene Funktionen von a_1, a_2 vom Grade -1, und für sie gilt daher die identische Beziehung

$$F(a_1, a_2) = \beta F(\beta a_1, \beta a_2),$$

wenn β irgendein von Null verschiedener Faktor ist. Man kann also auch

$$F[a_1(1 + x_1), a_2(1 + x_2)] = \frac{1}{1 + x_2} F\left(a_1 \frac{1 + x_1}{1 + x_2}, a_2\right) = \frac{1}{1 + x_2} F[a_1(1 + \varepsilon), a_2]$$

schreiben, und es ist dann

$$\varepsilon = \frac{x_1 - x_2}{1 + x_2}$$

---

[1]) In dieser Formel ist der Koeffizient von $e^6 \sin 2M$ zu halbieren (vgl. die Berichtigung in Anhang I).

klein von der Ordnung der Exzentrizitäten. Es gilt daher die rasch konvergierende TAYLORsche Entwicklung

$$(1 + x_2)\, F(r_1, r_2) = F(a_1, a_2) + a_1\varepsilon \frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{1}{2!}\, a_1{}^2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a_1{}^2} + \frac{1}{3!}\, a_1{}^3\varepsilon^3 \frac{\partial^3 F}{\partial a_1{}^3} + \cdots.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$K_{k,h}^{(0)} = K_{k,h}; \quad K_{k,h}^{(p)} = \frac{a_1{}^p}{p!} \frac{\partial^p K_{k,h}}{\partial a_1{}^p},$$

so erhält man für nichtverschwindende Exzentrizitäten statt der Ausdrücke (XXV; 10b)

(XXV; 12) $$(1 + x_2)\, K_{k,h}(r_1, r_2) = K_{k,h}^{(0)} + \varepsilon K_{k,h}^{(1)} + \varepsilon^2 K_{k,h}^{(2)} + \cdots$$

und sodann statt (XXV; 10a)

$$\Psi = \sum_{k,h} K_{k,h}(r_1, r_2) \cos\left[k(\lambda_2 - \lambda_1) + k(y_2 - y_1) + 2h(\lambda_1 + y_1 - \tau)\right]$$

oder, wenn man noch

$$q = k - 2h, \quad N_{k,q}^{(p)} = K_{k,h}^{(p)}(a_1, a_2)$$

einführt,

(XXV; 13) $$\Psi = \sum K_{k,h}(r_1, r_2) \cos\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 + ky_2 - qy_1 - (k - q)\tau\right] =$$

$$= \sum N_{k,q}^{(p)} \frac{\varepsilon^p}{1 + x_2} \cos\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 + ky_2 - qy_1 - (k - q)\tau\right].$$

In dieser Summe durchläuft k alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, während p und h die Werte 0, 1, 2, ... annehmen. Beschränkt man die Entwicklung auf Terme bis zu einer gewissen Ordnung in e_1, e_2 und η und ist $\alpha = a_1/a_2 < 1$, so hängt die Anzahl der mitzunehmenden Glieder mit dem Index k von α ab. Diese Anzahl ist aber praktisch begrenzt, da die Werte des Exponenten p infolge der kleinen Exzentrizitäten, die der Indizes $h = (k - q)/2$, wie auch aus (XXV; 10b) hervorgeht, infolge der kleinen Neigungen beschränkt bleiben.

Man setze nun

$$\cos\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 + ky_2 - qy_1 - (k - q)\tau\right] =$$
$$= \cos\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 - (k - q)\tau\right](\cos qy_1 \cos ky_2 + \sin qy_1 \sin ky_2) +$$
$$+ \sin\left[ky_2 - q\lambda_1 - (k - q)\tau\right](\sin qy_1 \cos ky_2 - \cos qy_1 \sin ky_2)$$

und

$$(x_1 - x_2)^p = x_1{}^p - \binom{p}{1} x_1{}^{p-1}x_2 + \binom{p}{2} x_1{}^{p-2}x_2{}^2 - \cdots + (-1)^p x_2{}^p.$$

Dann ergibt sich statt (XXV; 13)

(XXV; 14)
$$\Psi = \sum \left\{ N_{k,q}^{(p)} \cos\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 - (k - q)\tau\right] \sum_{j=0}^{p} (P_1{}^{(j)}P_2{}^{(j)} + Q_1{}^{(j)}Q_2{}^{(j)}) \right\} +$$
$$+ \sum \left\{ N_{k,q}^{(p)} \sin\left[k\lambda_2 - q\lambda_1 - (k - q)\tau\right] \sum_{j=0}^{p} (Q_1{}^{(j)}P_2{}^{(j)} - P_1{}^{(j)}Q_2{}^{(j)}) \right\},$$

wobei in den (endlichen) inneren Summen

$$P_1^{(j)}(p, q) = x_1^{p-j} \cos qy_1, \quad P_2^{(j)}(p, k) = (-1)^j \binom{p}{j} \frac{x_2^j \cos ky_2}{(1 + x_2)^{p+1}},$$

$$Q_1^{(j)}(p, q) = x_1^{p-j} \sin qy_1, \quad Q_2^{(j)}(p, k) = (-1)^j \binom{p}{j} \frac{x_2^j \sin ky_2}{(1 + x_2)^{p+1}}$$

zu setzen ist. Es sind also die P_1, Q_1 Funktionen von x_1, y_1 allein, die P_2, Q_2 Funktionen von x_2, y_2 allein, und es ist daher möglich, diese Größen in trigonometrische Reihen zu entwickeln, die nach Vielfachen der mittleren Anomalien M_1 bzw. M_2 fortschreiten. Man erhält zunächst, für $j = 0, 1, 2, \ldots, p$,

$$\text{(XXV; 15)} \quad \begin{cases} P_1^{(j)} = x_1^{p-j} \left(1 - \frac{q^2}{2!} y_1^2 + \frac{q^4}{4!} y_1^4 - \cdots\right), \\ Q_1^{(j)} = x_1^{p-j} q y_1 \left(1 - \frac{q^2}{3!} y_1^2 + \frac{q^4}{5!} y_1^4 - \cdots\right), \\ P_2^{(j)} = (-1)^j \binom{p}{j} x_2^j \left(1 - \frac{k^2}{2!} y_2^2 + \frac{k^4}{4!} y_2^4 - \cdots\right) \times \\ \qquad \times \left[1 - \binom{p+1}{1} x_2 + \binom{p+2}{2} x_2^2 - \cdots\right], \\ Q_2^{(j)} = (-1)^j \binom{p}{j} x_2^j k y_2 \left(1 - \frac{k^2}{3!} y_2^2 + \frac{k^4}{5!} y_2^4 - \cdots\right) \times \\ \qquad \times \left[1 - \binom{p+1}{1} x_2 + \binom{p+2}{2} x_2^2 - \cdots\right] \end{cases}$$

und erkennt leicht, daß nach Einsetzen der Entwicklungen (XXV; 11) die P, Q die Gestalt ($i = 1, 2$)

$$\text{(XXV; 16)} \quad P_i^{(j)} = \sum_{\nu_i=0}^{\infty} G_{i,\nu_i}^{(j)} \cos \nu_i M_i, \quad Q_i^{(j)} = \sum_{\nu_i=1}^{\infty} H_{i,\nu_i}^{(j)} \sin \nu_i M_i$$

annehmen und daß die Koeffizienten G, H von der Form $e^{\nu_i + 2\varrho_i} \varphi_i(e_i^2)$ sind, wo die ν_i, ϱ_i nichtnegative ganze Zahlen und die φ_i konvergente Reihen sind, die nach Potenzen von e_i^2 fortschreiten.

Nachdem man die Entwicklungen (XXV; 16) auf elementare Weise, wenngleich mit einiger Mühe, bis zu der erforderlichen Ordnung in den Exzentrizitäten durchgeführt hat, nehmen die Terme von (XXV; 14) wenn man vorübergehend $D = k\lambda_2 - q\lambda_1 - (k - q)\tau$ setzt, die Form

$$\begin{aligned} \text{(XXV; 17)} \quad & N_{k,q}^{(p)} \{\cos D \cdot (G_1 G_2 \cos \nu_1 M_1 \cos \nu_2 M_2 + H_1 H_2 \sin \nu_1 M_1 \sin \nu_2 M_2) + \\ & + \sin D \cdot (H_1 G_2 \sin \nu_1 M_1 \cos \nu_2 M_2 - G_1 H_2 \cos \nu_1 M_1 \sin \nu_2 M_2)\} = \\ & = \frac{1}{4} N_{k,q}^{(p)} \{(G_1 G_2 - H_1 H_2 - H_1 G_2 + G_1 H_2) \cos (D + \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) + \end{aligned}$$

$$+ (G_1G_2 - H_1H_2 + H_1G_2 - G_1H_2) \cos (D - \nu_1 M_1 - \nu_2 M_2) +$$
$$+ (G_1G_2 + H_1H_2 - H_1G_2 - G_1H_2) \cos (D + \nu_1 M_1 - \nu_2 M_2) +$$
$$+ (G_1G_2 + H_1H_2 + H_1G_2 + G_1H_2) \cos (D - \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)\}$$

an. Sämtliche Summanden enthalten also nur Kosinusglieder, deren Argumente in den mittleren Längen linear sind. Denn setzt man

$$M_1 = \lambda_1 - \omega_1; \quad M_2 = \lambda_2 - \omega_2,$$

wobei [vgl. auch (XXIII; 30a)] ω_1, ω_2 die im System (C_1) gezählten Perihellängen bedeuten und nicht mit den gewöhnlich ebenso bezeichneten „Perihelabständen vom Knoten“ verwechselt werden dürfen, so erhält man statt (XXV; 17) den Ausdruck

(XXV; 18)
$$\frac{1}{4} N^{(p)}_{k,q} \{(G_1 - H_1)(G_2 + H_2) \cos [\lambda_2(k + \nu_2) - \lambda_1(q - \nu_1) -$$
$$- \nu_1\omega_1 - \nu_2\omega_2 - (k - q)\tau] +$$
$$+ (G_1 + H_1)(G_2 - H_2) \cos [\lambda_2(k - \nu_2) - \lambda_1(q + \nu_1) +$$
$$+ \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 - (k - q)\tau] +$$
$$+ (G_1 - H_1)(G_2 - H_2) \cos [\lambda_2(k - \nu_2) - \lambda_1(q - \nu_1) -$$
$$- \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 - (k - q)\tau] +$$
$$+ (G_1 + H_1)(G_2 + H_2) \cos [\lambda_2(k + \nu_2) - \lambda_1(q + \nu_1) +$$
$$+ \nu_1\omega_1 - \nu_2\omega_2 - (k - q)\tau]\},$$

in dem die Argumente der Kosinus sämtlich die Form

(XXV; 19)
$$\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - 2h\tau, \quad 2h = k - q$$

haben, und es ist offenbar

(XXV; 20)
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - 2h = 0,$$

denn da $\Psi = \varrho^{-1}$ von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängt, darf man die Längen λ_1, λ_2, ω_1, ω_2, τ um eine beliebige Größe μ vermehren, ohne daß die Formeln ihre Gültigkeit verlieren. Es wird also $\mu(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - 2h) = 0$ sein, woraus (XXV; 20) folgt.

Schließlich sind noch die Faktoren $N^{(p)}_{k,q}$ als Funktionen von a_1, a_2 und η^2 auszudrücken. Da

$$N^{(p)}_{k,q} = K^{(p)}_{k,h} = \frac{{a_1}^p}{p!} \frac{\partial^p K_{k,h}}{\partial {a_1}^p}$$

und nach (XXV; 10b)

$$K_{k,h} = \eta^{2h}(L^{(0)}_{k,h} + \eta^2 L^{(1)}_{k,h} + \eta^4 L^{(2)}_{k,h} + \cdots)$$

geschrieben werden kann, wenn die $L_{k,h}^{(i)}$ lineare Ausdrücke in den Größen $A_j, B_j, C_j, \ldots$ bezeichnen, so folgt, daß die N linear in Größen von der Form

$$(\text{XXV};21) \qquad A_j^{(p)} = \frac{a_1^p}{p!}\frac{\partial^p A_j}{\partial a_1^p}; \qquad B_j^{(p)} = \frac{a_1^p}{p!}\frac{\partial^p B_j}{\partial a_1^p}, \quad \ldots$$

sind. Nun ist aber nach (XXIII; 35, 37)

$$a_2 A_j = b_j^{(1/2)}; \quad a_2 B_j = \alpha b_j^{(3/2)}; \quad a_2 C_j = \alpha^2 b_j^{(5/2)}, \quad \ldots,$$

und die $K_{k,h}$ enthalten daher, außer dem Faktor a_2^{-1}, nur Funktionen von α und η^2. Führt man also den Differentialoperator $D = d/d\alpha$, $D^p = d^p/d\alpha^p$ ein und bedenkt, daß

$$\frac{\partial}{\partial a_1} = D\frac{\partial \alpha}{\partial a_1} = \frac{1}{a_2} D; \qquad \frac{\partial^p}{\partial a_1^p} = \frac{1}{a_2^p} D^p$$

ist, so folgt

$$(\text{XXV};22) \quad \begin{cases} a_2 A_j^{(p)} = a_2 \dfrac{a_1^p}{p!}\dfrac{1}{a_2^p} D^p A_j = \dfrac{\alpha^p}{p!} D^p (a_2 A_j) = \dfrac{\alpha^p}{p!} D^p b_j^{(1/2)}, \\ a_2 B_j^{(p)} = \dfrac{\alpha^p}{p!}\left[\alpha D^p + p D^{p-1}\right] b_j^{(3/2)}, \\ a_2 C_j^{(p)} = \dfrac{\alpha^p}{p!}\left[\alpha^2 D^p + 2\alpha p D^{p-1} + p(p-1)\, D^{p-2}\right] b_j^{(5/2)}, \\ a_2 D_j^{(p)} = \dfrac{\alpha^p}{p!}\left[\alpha^3 D^p + 3\alpha^2 p D^{p-1} + 3\alpha p(p-1)\, D^{p-2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + p(p-1)\,(p-2) D^{p-3}\right] b_j^{(7/2)}, \end{cases}$$

und die Ableitungen der LAPLACEschen Koeffizienten $b_j^{(s)}$ sind nach den in Abschnitt 202 beschriebenen Methoden zu berechnen.

214. Explizite Entwicklung des Hauptteils bis zu Termen zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen

Im vorigen Abschnitt sind alle Vorbereitungen getroffen worden, die zur Entwicklung des Hauptteils der Störungsfunktion nach Potenzen von e_1, e_2 und η dienen. Es sei daran erinnert, daß die Störungsfunktion (und daher auch ihr Hauptteil) für jede störende Masse m_2 in eine Summe von trigonometrischen Termen

$$R = k^2 m_2 \sum C \cos D$$

entwickelt werden kann, wobei die Amplituden

$$C = C(a_1, a_2, e_1, e_2, \eta^2)$$

rationale Funktionen der a_i vom Grade -1 sind und auch in der Form

$$a_2 C = f(\alpha, e_1, e_2, \eta^2); \qquad \alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

geschrieben werden können, während die Argumente D die Form (XXV; 19)

$$D = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - 2h\tau; \quad \lambda_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

mit (XXV; 20),

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - 2h = 0,$$

haben.

Die partiellen Ableitungen der R nach den Variablen des Problems, die auf den rechten Seiten der Störungsgleichungen erscheinen, sowie die Störungen selbst enthalten [s. (XXV; 14, 15)] ebenfalls trigonometrische Summen von der Form

$$k^2 m_2 \sum E \cos D \quad \text{bzw.} \quad k^2 m_2 \sum E \sin D,$$

deren Amplituden E von denselben Parametern abhängen wie die C. Die explizite Durchführung der Entwicklung der C nach Potenzen der kleinen Parameter e_1, e_2, η bis zu einer hohen Ordnung ist sehr kompliziert. Um wenigstens den Gang dieser Arbeit anzudeuten, beschränken wir uns hier auf die Entwicklung bis zu Gliedern der zweiten Ordnung einschließlich. Das Ergebnis dieser Näherung enthält bereits wesentliche Teile der Störungsfunktion im Falle der wechselseitigen Störungen zweier der großen Planeten, wenngleich nicht alle Terme, die auch eine genäherte Theorie erfordern würde. Nehmen wir als Beispiel die Störungen, die Jupiter und Saturn aufeinander ausüben. Die Exzentrizitäten der Bahnen dieser beiden Planeten sind von der Größenordnung $^1/_{20}$, die durch $\eta = \sin(J/2)$ gemessene gegenseitige Neigung der Bahnebenen ist noch kleiner. Die Störungsterme dritten Grades, die bei dieser Näherung vernachlässigt werden, sind also von der Ordnung $^1/_{8000}$, multipliziert mit der Masse des jeweils störenden Körpers ($^1/_{3500}$ bzw. $^1/_{1047}$), wenn wir durch geeignete Wahl der Zeiteinheit dafür sorgen, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ wird, sowie mit einem Zahlenfaktor, der im allgemeinen so klein ist, daß diese Terme nicht sonderlich ins Gewicht fallen. Nach der Integration der Störungsgleichungen treten aber, wie schon in Abschnitt 135 bemerkt, in den Amplituden der periodischen Störungsterme die Divisoren $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2$ bzw. (in den Störungen der mittleren Längen) die Divisoren $(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)^2$ auf, die unter Umständen so klein sind, daß die Amplituden große Beträge erreichen. Wir werden weiter unten feststellen, daß sich unter den Termen dritten Grades auch solche befinden, für die $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = +5$ ist. Im Falle Jupiter—Saturn ist aber $5n_2 - 2n_1 \approx 4'' \approx 2 \cdot 10^{-5}$, so daß, besonders in den mittleren Längen, die Störungsglieder dieses Typs beträchtliche Amplituden erhalten.

Entwickelt man Ψ bis zur zweiten Ordnung, so genügt es, die Folge (XXV; 10b) auf

$$K_{k,0} = \frac{1}{2} A_k - \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1}, \qquad K_{k,1} = \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1}$$

zu beschränken, und der Hauptteil der Störungsfunktion wird dann die Form

(XXV; 23) $$\Psi = c_0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 {e_1}^2 + c_4 e_1 e_2 + c_5 {e_2}^2 + c_6 \eta^2$$

erhalten. Andererseits ist Ψ durch die Kosinusreihe

(XXV; 24) $$\Psi = \sum C \cos D = \sum C \cos (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 - 2h\tau)$$

darstellbar, und es sind die Koeffizienten von der Form

$$C = N_{k,q}^{(p)} F_1 F_2,$$

wo die F_i jeweils eine der in den Formeln (XXV; 16—18) vorkommenden Größen G_i, H_i bedeuten. Es sind aber

$$a_2 N_{k,q}^{(p)} = a_2 K_{k,h}^{(p)}$$

Funktionen von α und $\eta^{2h+2\varrho}$, während die Produkte $F_1 F_2$ außer konstanten Koeffizienten die Aggregate

$${e_1}^{\nu_1+2\varrho_1} {e_2}^{\nu_2+2\varrho_2} \varphi_1({e_1}^2)\, \varphi_2({e_2}^2)$$

enthalten, und es sind ϱ_1, ϱ_2 und ϱ nichtnegative ganze Zahlen. Es sind demnach die Koeffizienten C wegen

(XXV; 25) $$a_2 C = {e_1}^{\nu_1} {e_2}^{\nu_2} \eta^{2h} \psi(\alpha, {e_1}^2, {e_2}^2, \eta^2)$$

bis auf einen Faktor $1/a_2$ nur von e_1, e_2, η^2 und α abhängig und daher mindestens von der Ordnung $2h + \nu_1 + \nu_2$ in den kleinen Parametern. Wie (XXV; 16) lehrt, sind aber die $\nu_i \geqq 0$. Wegen (XXV; 18, 19) ist also

$$\nu_1 = |\beta_1|; \quad \nu_2 = |\beta_2|,$$

und wegen (XXV; 20) ist $2h - \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, somit

(XXV; 26) $$2h + \nu_1 + \nu_2 = 2h + |\beta_1| + |\beta_2| = |\alpha_1 + \alpha_2| + 2\varrho,$$

wenn ϱ wiederum irgendeine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Damit ist gezeigt, daß die Ordnung der Koeffizienten C mindestens gleich dem Betrage von $\alpha_1 + \alpha_2$ ist.

Aus diesem Satz lassen sich zwei bedeutsame Folgerungen ableiten:

1. Die säkularen Glieder der Störungsfunktion, die ja nach Abschnitt 137 nur im Hauptteil auftreten, umfassen diejenigen Terme der Entwicklung (XXV; 24, 25), in denen $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist. Für diese ist aber nach (XXV; 26) $\nu_1 + \nu_2$ eine gerade Zahl oder Null. Die säkulare Störungsfunktion enthält also nur Terme gerader Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen, wie schon die Entwicklung (XVI; 49) gezeigt hat, hier aber auf tieferliegende Ursachen zurückgeführt wird.

2. Es wurde weiter oben behauptet, daß die langperiodischen Terme, die im Falle Jupiter—Saturn durch die nahe Kommensurabilität der mittleren Bewegungen vom Typus 2:5 entstehen, von der dritten Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen sind. In der Tat haben diese Terme Argumente von der Form

$$5\lambda_2 - 2\lambda_1 + \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - 2h\tau,$$

und es ist deren Ordnung nach (XXV; 26) $\geqq |\alpha_1 + \alpha_2| = 3$.

Die Argumente der Kosinusterme von (XXV; 18) haben die gemeinsame Form

$$D = k\lambda_2 - q\lambda_1 \pm \nu_1(\lambda_1 - \omega_1) \pm \nu_2(\lambda_2 - \omega_2) - (k - q)\tau$$

oder, da $q = k - 2h$ ist,

$$\text{(XXV; 27)} \qquad D = k(\lambda_2 - \lambda_1) + 2h(\lambda_1 - \tau) \pm \nu_1(\lambda_1 - \omega_1) \pm \nu_2(\lambda_2 - \omega_2).$$

Die Größen h, ν_1, ν_2 sind positive ganze Zahlen oder Null. Wenn also die Ordnung der Terme, $2h + \nu_1 + \nu_2$, nicht größer als 2 sein soll, so lassen sich in der Entwicklung bis zu dieser Ordnung die Glieder der trigonometrischen Reihe (XXV; 24) in wenige Typen aufteilen, nämlich:

a) Glieder nullter Ordnung: $h = \nu_1 = \nu_2 = 0$. Diese haben nach (XXV; 25, 27) die Form

$$a_2 \sum_k C \cos D = \sum_k (\gamma_0 + \gamma_1 {e_1}^2 + \gamma_2 {e_2}^2 + \gamma_3 \eta^2) \cos k(\lambda_2 - \lambda_1),$$

und es sind $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$ Funktionen von k und α.

b) Glieder erster Ordnung: $h = \nu_2 = 0,\ \nu_1 = 1$ oder $h = \nu_1 = 0,\ \nu_2 = 1$. Die Kosinusglieder dieses Typs haben die Form

$$\text{(XXV; 28)} \quad \begin{cases} a_2 \sum_k C \cos [k(\lambda_2 - \lambda_1) \pm m] = a_2 \sum_k C \cos [k(\lambda_2 - \lambda_1) + m], \\ m = \nu_1(\lambda_1 - \omega_1) \quad \text{oder} \quad m = \nu_2(\lambda_2 - \omega_2), \end{cases}$$

denn da k alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, darf k mit $-k$ vertauscht werden, so daß man sich auf das positive Vorzeichen von m beschränken darf. Die Terme mit e_1 sind also, mit $\delta_1 = \delta_1(\alpha, k)$,

$$\begin{aligned} a_2 \sum_k C \cos D &= e_1 \sum_k \delta_1 \cos [k(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1 - \omega_1] = \\ &= e_1 \sum_k \delta_1 \cos [k\lambda_2 - (k - 1)\lambda_1 - \omega_1]. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die Terme mit e_2

$$a_2 \sum_k C \cos D = e_2 \sum_k \delta_2 \cos [(k + 1)\lambda_2 - k\lambda_1 - \omega_2].$$

c) Glieder zweiter Ordnung: Hier gibt es vier Möglichkeiten, nämlich

$$h = \nu_2 = 0; \quad \nu_1 = 2,$$

$$h = \nu_1 = 0; \quad \nu_2 = 2,$$

$$h = 0; \qquad \nu_1 = \nu_2 = 1,$$

$$h = 1; \qquad \nu_1 = \nu_2 = 0.$$

Die ersten dieser Untertypen sind wiederum von der Form (XXV; 28), und man erhält daher für die Terme mit e_1^2

$$a_2 \sum_k C \cos D = e_1^2 \sum_k \varepsilon_1 \cos [k\lambda_2 - (k-2)\lambda_1 - 2\omega_1]$$

und für die mit e_2^2

$$a_2 \sum_k C \cos D = e_2^2 \sum_k \varepsilon_2 \cos [(k+2)\lambda_2 - k\lambda_1 - 2\omega_2].$$

Beim dritten Untertyp (Glieder mit $e_1 e_2$) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1. (Vorzeichen von ν_1 und ν_2 gleich):

$$a_2 \sum_k C \cos D = e_1 e_2 \sum_k \zeta_1 \cos [(k+1)\lambda_2 - (k-1)\lambda_1 - \omega_1 - \omega_2],$$

2. (Vorzeichen von ν_1 und ν_2 verschieden):

$$a_2 \sum_k C \cos D = e_1 e_2 \sum_k \zeta_2 \cos [(k+1)(\lambda_2 - \lambda_1) + \omega_1 - \omega_2].$$

Der vierte und letzte Untertyp (Glieder mit η^2) ergibt

$$a_2 \sum_k C \cos D = \eta^2 \sum_k \vartheta \cos [k\lambda_2 - (k-2)\lambda_1 - 2\tau].$$

Es sind nun noch die Koeffizienten

(XXV; 29) $$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \quad \delta_1, \delta_2; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2; \quad \zeta_1, \zeta_2; \quad \vartheta$$

als Funktionen von k und α zu bestimmen. Am bequemsten ist es, von (XXV; 13) auszugehen und diese Formel, bis zu Gliedern zweiten Grades in y_1 und y_2 genau,

$$\Psi = \sum M_{k,q}^{(p)} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}(ky_2 - qy_1)^2 \right] \cos \Gamma_{k,q} - (ky_2 - qy_1) \sin \Gamma_{k,q} \right\}$$

zu schreiben, wobei zur Abkürzung

$$M_{k,q}^{(p)} = N_{k,q}^{(p)} \frac{\varepsilon^p}{1 + x_2}, \qquad \Gamma_{k,q} = k\lambda_2 - q\lambda_1 - (k-q)\tau$$

gesetzt ist. Es ist dann nur noch nötig, die Ausdrücke $M_{k,q}^{(p)}$ bis zur zweiten Ordnung in e_1, e_2 und η zu entwickeln. Da $\varepsilon = (x_1 - x_2)\,(1 + x_2)^{-1}$ von der ersten Ordnung ist, darf man sich auf $p = 0, 1, 2$ beschränken. Da $q = k - 2h$, $N_{k,q}^{(p)} = K_{k,h}^{(p)}$ ist und der Index h bei Vernachlässigung von Termen dritter und höherer Ordnung nur 0 oder 1 sein kann, ergeben sich lediglich Summanden der folgenden vier Typen:

1. $$M_{k,k}^{(0)} = K_{k,0}^{(0)}(1 + x_2)^{-1} = \frac{1}{2}\,(A_k - \eta^2 B_{k-1})\,(1 + x_2)^{-1} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2}\,[A_k(1 - x_2 + x_2{}^2) - \eta^2 B_{k-1}] + \cdots,$$

2. $$M_{k,k-2}^{(0)} = K_{k,1}^{(0)}(1 + x_2)^{-1} = \frac{1}{2}\,\eta^2 B_{k-1} + \cdots,$$

3. $$M_{k,k}^{(1)} = K_{k,0}^{(1)}(x_1 - x_2)\,(1 + x_2)^{-2} = \frac{1}{2}\,A_k{}^{(1)}(x_1 - x_2)\,(1 - 2x_2) + \cdots,$$

4. $$M_{k,k}^{(2)} = K_{k,0}^{(2)}(x_1 - x_2)^2\,(1 + x_2)^{-3} = \frac{1}{2}\,A_k{}^{(2)}(x_1 - x_2)^2 + \cdots,$$

während alle übrigen M von höherer als zweiter Ordnung sind. Fügt man nun die Faktoren mit y_1 und y_2 hinzu und bedenkt, daß die y von der ersten Ordnung sind, so erhält man zunächst

(XXV; 30)
$$\Psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big\{ \cos \Gamma_{k,k} \Big[\frac{1}{2} A_k(1 - x_2 + x_2{}^2) - \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1} - \frac{1}{4} A_k k^2 (y_2 - y_1)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} A_k{}^{(1)}(x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + 2x_2{}^2) + \frac{1}{2} A_k{}^{(2)}(x_1 - x_2)^2 \Big] -$$
$$- \sin \Gamma_{k,k} \cdot \frac{k}{2} [A_k(1 - x_2)\,(y_2 - y_1) + A_k{}^{(1)}(x_1 - x_2)\,(y_2 - y_1)] +$$
$$+ \cos \Gamma_{k,k-2} \cdot \frac{1}{2}\eta^2 B_{k-1} \Big\}$$

bis auf Glieder höherer Ordnung. Hierin ist nach (XXV; 11), für $i = 1, 2$ und $M_i = \lambda_i - \omega_i$,

(XXV; 31a)
$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{2} e_i{}^2(1 - \cos 2M_i) - e_i \cos M_i, \\ y_i = 2e_i \sin M_i + \frac{5}{4} e_i{}^2 \sin 2M_i, \\ x_i{}^2 = \frac{1}{2} e_i{}^2(1 + \cos 2M_i), \qquad y_i{}^2 = 2e_i{}^2(1 - \cos 2M_i), \\ x_i y_i = -e_i{}^2 \sin 2M_i, \end{cases}$$

ferner

$$\text{XXV; 31 b)} \quad \begin{cases} 2x_1x_2 = 2e_1e_2 \cos M_1 \cos M_2 = \\ \qquad = e_1e_2\,[\cos(M_1 + M_2) + \cos(M_2 - M_1)], \\ 2y_1y_2 = 8e_1e_2 \sin M_1 \sin M_2 = \\ \qquad = 4e_1e_2\,[\cos(M_2 - M_1) - \cos(M_1 + M_2)], \\ x_1y_2 = -2e_1e_2 \cos M_1 \sin M_2 = \\ \qquad = -e_1e_2\,[\sin(M_1 + M_2) + \sin(M_2 - M_1)], \\ x_2y_1 = -2e_1e_2 \sin M_1 \cos M_2 = \\ \qquad = -e_1e_2\,[\sin(M_1 + M_2) - \sin(M_2 - M_1)] \end{cases}$$

zu setzen, und diese Entwicklung wird dann mit (XXV; 23, 24) identisch sein. Beim Vergleich ist zu beachten, daß auf der rechten Seite von (XXV; 30) außer den Termen von der Form

$$\sum_k \sigma_k \cos \Gamma_{k,k}, \quad \sum_k \sigma_k \cos \Gamma_{k,k-2},$$

in denen die Koeffizienten σ_k keine periodischen Glieder mit M_1 bzw. M_2 enthalten, auch solche vom Typus

$$\sum_k \sigma_k \cos \Gamma_{k,k} \cos \Delta; \quad \sum_k \sigma_k k^2 \cos \Gamma_{k,k} \cos \Delta; \quad -\sum_k \sigma_k k \sin \Gamma_{k,k} \sin \Delta$$

vorkommen, in denen Δ jeweils für eines der Argumente

$$M_1, M_2, 2M_1, 2M_2, M_1 + M_2, M_2 - M_1$$

steht. Es ist aber

$$\sum_k \sigma_k \cos \Gamma_{k,k} \cos \Delta = \frac{1}{2} \sum_k \sigma_k\,[\cos(\Gamma_{k,k} + \Delta) + \cos(\Gamma_{k,k} - \Delta)] = \\ = \sum_k \sigma_k \cos(\Gamma_{k,k} + \Delta),$$

denn man darf ja, da k alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, k mit $-k$ vertauschen, also auch $\Gamma_{k.k} = k(\lambda_2 - \lambda_1)$ mit $-\Gamma_{k,k}$, und es sind ja die σ_k Funktionen von A_k, $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, also ist wegen $A_k = A_{-k}$ usw. auch $\sigma_k = \sigma_{-k}$. Dasselbe gilt auch für

$$\sum_k \sigma_k k^2 \cos \Gamma_{k,k} \cos \Delta = \sum_k \sigma_k k^2 \cos(\Gamma_{k,k} + \Delta)$$

und

$$-\sum_k \sigma_k k \sin \Gamma_{k,k} \sin \Delta = \frac{1}{2} \sum_k \sigma_k k\,[\cos(\Gamma_{k,k} + \Delta) - \cos(\Gamma_{k,k} - \Delta)] = \\ = \sum_k \sigma_k k \cos(\Gamma_{k,k} + \Delta).$$

Man kann also, da allgemein

$$\Delta = iM_1 \pm jM_2, \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

ist, die Gestalt der Koeffizienten (XXV; 29) unmittelbar aus (XXV; 30,31) ablesen, indem man die mit den zugehörigen Kombinationen von ν_1 und ν_2 gebildeten Terme sammelt. Insbesondere sind

$$\gamma_0 + \gamma_1 e_1^2 + \gamma_2 e_2^2 + \gamma_3 \eta^2 = \frac{1}{2} A_k - \frac{1}{2} \eta^2 B_{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{4} (e_1^2 + e_2^2) \left(A_k^{(1)} + A_k^{(2)} - 2k^2 A_k\right)$$

konstante Koeffizienten von $\cos \Gamma_{k,k}$,

$$\delta_1 = -\left(kA_k + \frac{1}{2} A_k^{(1)}\right)$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = M_1$,

$$\delta_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right) A_k + \frac{1}{2} A_k^{(1)}$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = M_2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{5}{4} k\right) A_k + \left[\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right) A_k^{(1)} + \frac{1}{4} A_k^{(2)}\right.$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = 2M_1$,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(k^2 + \frac{9}{4} k + 1\right) A_k + \frac{1}{4} (2k + 3) A_k^{(1)} + \frac{1}{4} A_k^{(2)}$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = 2M_2$,

$$\zeta_1 = -\frac{1}{2} (2k^2 + k) A_k - \frac{1}{2} (2k + 1) A_k^{(1)} - \frac{1}{2} A_k^{(2)}$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = M_1 + M_2$,

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} (2k^2 + k) A_k - \frac{1}{2} A_k^{(1)} - \frac{1}{2} A_k^{(2)}$$

Koeffizienten der Terme mit $\Delta = M_2 - M_1$,

$$\vartheta = \frac{1}{2} B_{k-1}$$

Koeffizient von $\eta^2 \cos \Gamma_{k,k-2}$.

Bis zur zweiten Ordnung in den Exzentrizitäten und der Neigung ist also (XXV; 32)

$$\Psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{\left[\frac{1}{2} A_k - \frac{1}{2} \eta^2 B_{k-1} + \frac{e_1^2 + e_2^2}{4} \left(A_k^{(2)} + A_k^{(1)} - 2k^2 A_k\right)\right] \times \right.$$

$$\times \cos k(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{1}{2} e_1 (A_k^{(1)} + 2kA_k) \cos [k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1 - \omega_1] +$$

$$+ \frac{1}{2} e_2 [A_k^{(1)} + (2k + 1) A_k] \cos [(k + 1)\lambda_2 - k\lambda_1 - \omega_2] +$$

$$+\frac{1}{8}e_1^2[2A_k^{(2)}+(4k-2)A_k^{(1)}+(4k^2-5k)A_k]\times$$
$$\times\cos[k\lambda_2-(k-2)\lambda_1-2\omega_1]+$$
$$+\frac{1}{8}e_2^2[2A_k^{(2)}+(4k+6)A_k^{(1)}+(4k^2+9k+4)A_k]\times$$
$$\times\cos[(k+2)\lambda_2-k\lambda_1-2\omega_2]-$$
$$-\frac{1}{2}e_1e_2[A_k^{(2)}+(2k+1)A_k^{(1)}+(2k^2+k)A_k]\times$$
$$\times\cos[(k+1)\lambda_2-(k-1)\lambda_1-\omega_1-\omega_2]-$$
$$-\frac{1}{2}e_1e_2[A_k^{(2)}+A_k^{(1)}-(2k^2+k)A_k]\times$$
$$\times\cos[(k+1)(\lambda_2-\lambda_1)+\omega_1-\omega_2]+$$
$$+\frac{1}{2}\eta^2B_{k-1}\cos[k\lambda_2-(k-2)\lambda_1-2\tau]\Big\}.$$

Die Größen A_k, B_{k-1} sind [s. (XXIII; 35—37)], ebenso wie ihre durch (XXV; 21, 22) definierten Ableitungen $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}$ nach α, symmetrische Funktionen von a_1, a_2 vom Grade -1, wie dies auch in den symbolischen Formeln (XXV; 24, 25) zum Ausdruck kommt.

Man bestätigt leicht, daß in den Argumenten aller Kosinusterme die Summe der Koeffizienten von $\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2, \tau$ Null ist und daß die Summe der Beträge der Koeffizienten von ω_1, ω_2 und τ nicht größer als 2 ist, d. h. die Ordnung der zu berücksichtigenden Terme nicht überschreitet. Die A_k haben α^k als Faktor, ihre Ableitungen $A_k^{(p)}$ haben mindestens α^k als Faktor. Die Anzahl der Summanden, die zu der Summe merklich beitragen, ist also beschränkt und um so kleiner, je kleiner α ist.

215. Die säkularen Terme des Hauptteils

Der Hauptteil Ψ der Störungsfunktion enthält säkulare Terme, d. h. solche, in deren Argumenten die mittleren Längen nicht vorkommen und die also in erster Näherung als konstant anzusehen sind. In der bis zu den Termen zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen durchgeführten Entwicklung (XXV; 32) bemerkt man, daß

1. im ersten Gliede rechts für $k = 0$,
2. im vorletzten Gliede rechts für $k = -1$

das Argument des Kosinus unabhängig von λ_1 und λ_2 wird, während dies in allen übrigen Gliedern der Entwicklung für kein ganzzahliges k zutrifft.

Sammelt man diese Terme, so erhält man für den säkularen Teil der Störungsfunktion (da $A_k = A_{-k}$, $B_k = B_{-k}$ ist)

$$(\text{XXV}; 33) \qquad [\Psi] = \frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{2} \eta^2 B_1 + \frac{{e_1}^2 + {e_2}^2}{4} (A_0^{(1)} + A_0^{(2)}) -$$
$$- \frac{1}{2} e_1 e_2 (A_1^{(1)} + A_1^{(2)} - A_1) \cos (\omega_2 - \omega_1).$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man $[W_2] = k^2 m_2 [\Psi]$ setzt, mit (XVI; 62) identisch.

Um dies zu beweisen, führen wir die dort benutzten Bezeichnungen (XVI; 39) — wie oben mit ω statt $\tilde{\omega}$ als Zeichen für die Perihellänge im (C_1)-System — für $i = 1, 2$

$$f_i = e_i \cos \omega_i, \quad g_i = e_i \sin \omega_i; \quad h_i = \sin i_i \cos \Omega_i, \quad k_i = \sin i_i \sin \Omega_i$$

ein. Dann ist

$${e_1}^2 + {e_2}^2 = {f_1}^2 + {f_2}^2 + {g_1}^2 + {g_2}^2,$$
$$e_1 e_2 \cos (\omega_2 - \omega_1) = f_1 f_2 + g_1 g_2$$

und, nach Bd. II, S. 278 unten, bis zur zweiten Ordnung in i_1, i_2,

$$\eta^2 = \sin^2 \frac{J}{2} = \frac{1}{4} [(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2],$$

also

$$(\text{XXV}; 34) \qquad [\Psi] = \frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{8} B_1 [(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2] +$$
$$+ \frac{1}{4} (A_0^{(1)} + A_0^{(2)}) [{f_1}^2 + {f_2}^2 + {g_1}^2 + {g_2}^2] - \frac{1}{2} (A_1^{(1)} + A_1^{(2)} - A_1) (f_1 f_2 + g_1 g_2).$$

Nun ist aber nach (XXV; 22), wenn wir wieder den Differentialoperator $D = \frac{d}{d\alpha}$ benutzen,

$$Y_0 = a_2 [A_0^{(1)} + A_0^{(2)}] = \alpha \left[D b_0^{(1/2)} + \frac{\alpha}{2} D^2 b_0^{(1/2)} \right],$$
$$Y_1 = a_2 [A_1^{(1)} + A_1^{(2)} - A_1] = \alpha \left[D b_1^{(1/2)} + \frac{\alpha}{2} D^2 b_1^{(1/2)} \right] - b_1^{(1/2)}.$$

Nach (XXIII; 62) erhält man, da $b_{-1}^{(3/2)} = b_1^{(3/2)}$ ist,

$$(\text{XXV}; 35) \qquad \begin{cases} D b_0^{(1/2)} = b_1^{(3/2)} - \alpha b_0^{(3/2)}, \\ D^2 b_0^{(1/2)} = D b_1^{(3/2)} - \alpha D b_0^{(3/2)} - b_0^{(3/2)} \end{cases}$$

und nach (XXIII; 69)

$$(\text{XXV}; 36) \qquad \frac{\alpha}{2} D b_1^{(3/2)} = \frac{1}{2} D b_0^{(3/2)} - b_1^{(3/2)},$$

also

$$Y_0 = -\frac{3}{2}\alpha^2 b_0^{(3/2)} + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha^2)\, Db_0^{(3/2)}.$$

Schließlich ist nach (XXIII; 68)

(XXV; 37) $$(1-\alpha^2)\, Db_0^{(3/2)} = 3\alpha b_0^{(3/2)} + b_1^{(3/2)}$$

und daher

$$Y_0 = \frac{\alpha}{2} b_1^{(3/2)} = \frac{a_2}{2} B_1; \qquad A_0^{(1)} + A_0^{(2)} = \frac{1}{2} B_1.$$

Zur Umformung von Y_1 setzen wir nach (XXIII; 69) und (XXV; 35)

(XXV; 38) $$\begin{cases} \alpha Db_1^{(1/2)} = Db_0^{(1/2)} = b_1^{(3/2)} - \alpha b_0^{(3/2)}, \\ \alpha D^2 b_1^{(1/2)} + Db_1^{(1/2)} = D^2 b_0^{(1/2)} = Db_1^{(3/2)} - \alpha Db_0^{(3/2)} - b_0^{(3/2)}, \end{cases}$$

also

$$Y_1 = b_1^{(3/2)} - b_1^{(1/2)} - \frac{3}{2}\alpha b_0^{(3/2)} + \frac{\alpha}{2}[Db_1^{(3/2)} - Db_1^{(1/2)} - \alpha Db_0^{(3/2)}].$$

Setzt man hierin nach (XXV; 36, 38)

$$\frac{\alpha}{2} Db_1^{(3/2)} = \frac{1}{2} Db_0^{(3/2)} - b_1^{(3/2)},$$

$$\frac{\alpha}{2} Db_1^{(1/2)} = \frac{1}{2}[b_1^{(3/2)} - \alpha b_0^{(3/2)}],$$

dann ergibt sich

$$Y_1 = \frac{1-\alpha^2}{2} Db_0^{(3/2)} - \frac{1}{2} b_1^{(3/2)} - b_1^{(1/2)} - \alpha b_0^{(3/2)}$$

oder, wenn man (XXV; 37) berücksichtigt,

$$Y_1 = \frac{\alpha}{2} b_0^{(3/2)} - b_1^{(1/2)}.$$

Nach (XXIII; 63) ist aber für $k = 1$, $s = 1/2$

$$\frac{\alpha}{2}[b_2^{(3/2)} - b_0^{(3/2)}] + b_1^{(1/2)} = 0,$$

also schließlich

$$Y_1 = \frac{\alpha}{2} b_2^{(3/2)} = \frac{a_2}{2} B_2; \qquad A_1^{(1)} + A_1^{(2)} - A_1 = \frac{1}{2} B_2.$$

Mit den so ermittelten Werten für $Y_0 a_2^{-1}$ und $Y_1 a_2^{-1}$ wird

$$(\text{XXV}; 39) \qquad [\Psi] = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{8} B_1 [f_1^2 + f_2^2 + g_1^2 + g_2^2 - (h_2 - h_1)^2 - (k_2 - k_1)^2] - \frac{1}{4} B_2 (f_1 f_2 + g_1 g_2),$$

übereinstimmend mit (XVI; 62). Die säkularen Glieder der bis zur zweiten Ordnung in den kleinen Exzentrizitäten und Neigungen entwickelten Störungsfunktion sind also von gerader Ordnung. Das gilt aber auch allgemein, denn da für säkulare Terme offensichtlich $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist, folgt aus (XXV; 26) für deren Ordnung

$$2h + \nu_1 + \nu_2 = 2\varrho,$$

also eine gerade Zahl oder Null.

216. Entwicklung des Nebenteils

Der Nebenteil $-\psi$ der Störungsfunktion (XXV; 2) kann nach dem gleichen Verfahren nach Funktionen der mittleren Anomalien oder Längen entwickelt werden, das uns in den vorhergehenden Abschnitten zur Entwicklung des Hauptteils gedient hat. Die Anwendung dieser Methode gestaltet sich hier wesentlich einfacher, nur muß dabei berücksichtigt werden, daß der Nebenteil in den Störungsausdrücken für die einander störenden Planeten P_1 und P_2 verschieden lautet, nämlich

$$(\text{XXV}; 40) \qquad \psi_1 = \frac{r_1 \cos \varphi}{r_2^2} \text{ für } P_1; \qquad \psi_2 = \frac{r_2 \cos \varphi}{r_1^2} \text{ für } P_2$$

als gestörtem Körper, während der Hauptteil Ψ wegen seiner Symmetrie in bezug auf die Koordinaten von P_1 und P_2 in beiden Fällen die gleiche Form hat.

Drückt man $\cos \varphi$ durch (XXIII; 30) aus, so ist

$$\psi_1 = \frac{r_1}{r_2^2} [\cos (L_2 - L_1) - 2\eta^2 \sin (L_1 - \tau) \sin (L_2 - \tau)].$$

Für den Fall verschwindender Exzentrizitäten nimmt dieser Ausdruck den Ausgangswert

$$\psi_{10} = \frac{a_1}{a_2^2} [\cos (\lambda_2 - \lambda_1) - 2\eta^2 \sin (\lambda_1 - \tau) \sin (\lambda_2 - \tau)] =$$

$$= \frac{a_1}{a_2^2} [\cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \eta^2 \{\cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \cos (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\tau)\}]$$

oder, wenn man, wie in (XXV; 10), die Abkürzungen

$$\lambda_2 - \lambda_1 = u; \quad \lambda_1 - \tau = w$$

benutzt,

$$\psi_{10} = \frac{a_1}{{a_2}^2}[\cos u - \eta^2 \{\cos u - \cos (u + 2w)\}] \tag{XXV; 41}$$

an. Diese Gleichung kann als Spezialfall der Gleichung (XXV; 10) aufgefaßt werden, wenn man dort

$$A_{-1} = A_1 = \frac{a_1}{{a_2}^2}; \qquad B_0 = 2\frac{a_1}{{a_2}^2} = 2A_1 \tag{XXV; 42}$$

und alle übrigen A_k, B_k, C_k, ... gleich Null setzt. Natürlich haben die Größen (XXV; 42) eine andere Bedeutung als die gleichnamigen in (XXV; 10). Sie sind aber, ebenso wie diese, homogene algebraische Funktionen der Größen a_1 und a_2 vom Grade -1, und man kann daher das lediglich auf dieser Eigenschaft beruhende in Abschnitt 213 geschilderte Verfahren, von $\Psi(a_1, a_2)$ durch Berücksichtigung kleiner, aber von Null verschiedener Exzentrizitäten auf $\Psi(r_1, r_2)$ überzugehen, auch auf den Nebenteil anwenden. Das gelingt, wenn man die A_k, B_k durch (XXV; 42) definiert und, entsprechend der Vorschrift (XXV; 21), die Ableitungen $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ durch

$$A_k^{(p)} = \frac{{a_1}^p}{p!}\frac{\partial^p A_k}{\partial {a_1}^p}$$

einführt. Es folgt aber aus (XXV; 42)

$$\frac{\partial A_{-1}}{\partial a_1} = \frac{\partial A_1}{\partial a_1} = \frac{1}{{a_2}^2}; \qquad \frac{\partial^p A_{-1}}{\partial {a_1}^p} = \frac{\partial^p A_1}{\partial {a_1}^p} = 0 \quad \text{für} \quad p \geqq 2,$$

so daß man

$$A_{-1}^{(1)} = A_1{}^{(1)} = \frac{a_1}{{a_2}^2}; \qquad A_{-1}^{(2)} = A_1{}^{(2)} = 0$$

zu setzen hat. Mit diesen Werten gilt dann für ψ_1 die Entwicklung (XXV; 32). Sie lautet, da sich die Summe auf die Glieder mit $k = \pm 1$ beschränkt,

$$\begin{aligned}\psi_1 = \frac{a_1}{{a_2}^2}\Bigg\{&\left(1 - \eta^2 - \frac{{e_1}^2 + {e_2}^2}{2}\right)\cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \\ &- \frac{3}{2}e_1 \cos(\lambda_2 - \omega_1) + \frac{1}{2}e_1 \cos(\lambda_2 - 2\lambda_1 + \omega_1) + \\ &+ 2e_2 \cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \omega_2) + \frac{1}{8}{e_1}^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\omega_1) +\end{aligned} \tag{XXV; 43}$$

$$+\frac{3}{8}e_1^2\cos(\lambda_2-3\lambda_1+2\omega_1)+$$

$$+\frac{27}{8}e_2^2\cos(3\lambda_2-\lambda_1-2\omega_2)+$$

$$+\frac{1}{8}e_2^2\cos(\lambda_1+\lambda_2-2\omega_2)-3e_1e_2\cos(2\lambda_2-\omega_1-\omega_2)+$$

$$+e_1e_2\cos[2(\lambda_2-\lambda_1)+\omega_1-\omega_2]+\eta^2\cos(\lambda_1+\lambda_2-2\tau)\Big\}.$$

Die Entwicklung von ψ_2 ergibt sich aus (XXV; 43), indem man a_1 mit a_2, e_1 mit e_2, λ_1 mit λ_2, ω_1 mit ω_2 vertauscht.

Man bemerkt, daß der Nebenteil ψ_1 bzw. ψ_2 nur periodische Glieder enthält, eine Tatsache, die schon in Abschnitt 137 allgemein bewiesen worden ist.

217. Die Störungsgleichungen für die Bahnelemente

Es seien

$$\text{(XXV; 44)}\qquad a;\quad e=\sin\varphi;\quad i;\quad \Omega;\quad \tilde{\omega};\quad \lambda=\varepsilon+\int_{t_0}^{t}n\,dt;\quad n=\varkappa a^{-3/2}$$

die oskulierenden Bahnelemente eines Planeten für die Oskulationsepoche t_0. Dann lauten die Differentialgleichungen für die gestörten Elemente nach (XV; 78)

$$\text{(XXV; 45)}\quad\begin{cases}\dfrac{da}{dt}=2fa\dfrac{\partial F}{\partial\lambda},\\[2ex]\dfrac{de}{dt}=-f\cot\varphi\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\tilde{\omega}}+2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}\right\},\\[2ex]\sin i\dfrac{di}{dt}=-f\sec\varphi\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\Omega}+2\sin^2\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\tilde{\omega}}+\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}\right)\right\},\\[2ex]\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}=-f\sec\varphi\dfrac{\partial F}{\partial i},\\[2ex]\dfrac{d\tilde{\omega}}{dt}=f\left\{\cot\varphi\dfrac{\partial F}{\partial e}+\sec\varphi\tan\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial F}{\partial i}\right\},\\[2ex]\dfrac{\partial\lambda}{dt}=f\left\{\cos\varphi\tan\dfrac{\varphi}{2}\dfrac{\partial F}{\partial e}-2a\dfrac{\partial F}{\partial a}+\sec\varphi\tan\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial F}{\partial i}\right\},\end{cases}$$

wobei, wenn m_1 die Masse des gestörten, m_2 die des störenden Planeten bedeutet,

$$f=\frac{1}{\varkappa\sqrt{a}},\qquad \varkappa=k\sqrt{1+m_1},\qquad F=\frac{\varkappa^2}{2a}+k^2m_2R,\qquad R=\Psi-\psi$$

ist. Bezeichnet man die beiden Planeten des Problems mit P_1, P_2 und unterscheidet ihre Elemente durch den Index 1 bzw. 2, so gelten für P_1 die Differentialgleichungen mit

$$a_1, e_1 = \sin \varphi_1, i_1, \Omega_1, \tilde{\omega}_1, \lambda_1 = \varepsilon_1 + \int_{t_0}^{t} n_1 dt; \quad f_1, \varkappa_1, F_1, R_1, \psi_1,$$

und man erhält die Differentialgleichungen für die Elemente des von P_1 gestörten Planeten P_2 durch Vertauschung der Indizes. Beide Systeme bilden dann ein einziges mit zwölf unabhängigen Variablen.

Die Störungsfunktionen R haben in beiden Teilsystemen die Form

$$R = \sum C \cos D, \tag{XXV; 46}$$

wo

$$\begin{cases} C = C(a_1, a_2, e_1, e_2, J), \\ D = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - 2h\tau \end{cases} \tag{XXV; 46a}$$

ist, α_1, α_2, β_1, β_2 ganze Zahlen $\gtreqless 0$ sind, h eine ganze Zahl $\geqq 0$ und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - 2h = 0 \tag{XXV; 47}$$

ist. Wie wir in Abschnitt 199 (s. auch Abb. 3, S. 88) gezeigt und auch in den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels stets angenommen haben, beziehen sich die Längen λ, ω auf das (C_1)-System, d. h., sie werden auf der festen Ekliptik vom Frühlingspunkt aus bis zum Knoten K_1, von dort längs (C_1) bis zum Knoten N und erst dann längs (C_1) bzw. (C_2) bis zum mittleren Planetenort bzw. zum Perihel gezählt, und es ist $\tau_1 = \tau$ die Länge von N im (C_1)-System. Bezieht man jedoch die Perihellänge $\tilde{\omega}_1$ von P_1 auf das (C_1)-System, die Perihellänge $\tilde{\omega}_2$ von P_2 auf das (C_2)-System und verfährt man ebenso mit den mittleren Längen, so gelten die Gleichungen (XXIII; 30a),

$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1; \quad \omega_2 = \tilde{\omega}_2 - (\tau_2 - \tau_1), \tag{XXV; 48}$$

und entsprechende für die übrigen Längen.

Um Unklarheiten zu vermeiden, werden wir im folgenden vorübergehend die Bezeichnungen ändern. Es sei jetzt P der jeweils gestörte, P' der jeweils störende Planet, die Massen seien m bzw. m', die Bahnelemente $a, e, \ldots, \lambda$ bzw. $a', e', \ldots, \lambda'$, und die Längen $\tilde{\omega}, \lambda, \tau$ mögen sich auf das System $(C) \equiv (C_1)$, die Längen $\tilde{\omega}', \lambda', \tau'$ auf das System $(C') \equiv (C_2)$ beziehen (s. Abb. 4, S. 115). Dann ist in der ersten Formel (XXV; 46a)

$$a_1 = a; \quad a_2 = a'; \quad e_1 = e; \quad e_2 = e'$$

zu setzen und in der zweiten nach (XXV; 48)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda; & \lambda_2 = \lambda' - (\tau' - \tau), \\ \omega_1 = \tilde{\omega}; & \omega_2 = \tilde{\omega}' - (\tau' - \tau), \\ \tau_1 = \tau; & \tau_2 = \tau'. \end{cases} \tag{XXV; 48a}$$

Beschränken wir uns auf Störungen erster Ordnung in den Massen, so sind in den Störungsfunktionen R, R' die Elemente $a, \ldots, \tilde{\omega}; a', \ldots, \tilde{\omega}'$ als konstant, die mittleren Längen λ, λ' als lineare Funktionen der Zeit anzusehen. Es zeigt sich aber, daß in den Ausdrücken (XXV; 46a) für C und D wegen (XXV; 48a) nur

$$a = a_1; \quad a' = a_2; \quad e = e_1; \quad e' = e_2; \quad \lambda = \lambda_1; \quad \tilde{\omega} = \omega_1$$

unmittelbar vorkommen, also von den zwölf Variablen des Problems nur sechs, während die übrigen sechs in $\lambda_2, \omega_2, \tau_1, \tau_2, J$ implizite enthalten sind. Insbesondere sind J, τ_1, τ_2 nach (XXIII; 28, 29) Funktionen von

$$i_1 = i; \quad i_2 = i'; \quad \Omega_1 = \Omega; \quad \Omega_2 = \Omega'.$$

Man kann diese Schwierigkeit auf verschiedene Weise überwinden. LEVERRIER (s. TISSERAND I, Kapitel XIX) löst das Problem, indem er die partiellen Ableitungen der Störungsfunktionen nach den Elementen (XXV; 44), soweit diese in den C und D nicht vorkommen, durch die nach $J, \lambda_2, \omega_2, \tau_1 = \tau$ ersetzt. Diese Ableitungen können aber leicht gebildet werden, da J (in der Gestalt $\eta = \sin(J/2)$) in den Amplituden C und $\lambda_2, \omega_2, \tau$ in den Argumenten D enthalten sind. Wir werden einen anderen Weg einschlagen, der zu einem interessanten Ergebnis führt, das sich aber durch eine leichte Transformation in das LEVERRIERsche umformen läßt.

Subtrahiert man die mit dem Faktor τ multiplizierte Gleichung (XXV; 47) von der zweiten Gleichung (XXV; 46a), so erhält man die gleichbedeutende Beziehung

$$\begin{aligned} D &= \alpha_1(\lambda_1 - \tau) + \alpha_2(\lambda_2 - \tau) + \beta_1(\omega_1 - \tau) + \beta_2(\omega_2 - \tau) = \\ &= \alpha_1 \Lambda + \alpha_2 \Lambda' + \beta_1 \Omega + \beta_2 \Omega', \end{aligned}$$

in der nun die Koeffizienten α, β linear unabhängig sind, und es sind, wie auch Abb. 4 zeigt, $\Lambda, \Lambda', \Omega, \Omega'$ die vom Knoten N aus gezählten mittleren Längen und Perihellängen. Setzt man, wie in (XXV; 48a),

$$\lambda_1 = \lambda; \quad \omega_1 = \tilde{\omega}; \quad \lambda_2 - \tau = \lambda' - \tau'; \quad \omega_2 - \tau = \tilde{\omega}' - \tau',$$

so kann man auch

$$\text{(XXV; 49)} \quad \begin{cases} D = \alpha_1(\lambda - \tau) + \alpha_2(\lambda' - \tau') + \beta_1(\tilde{\omega} - \tau) + \beta_2(\tilde{\omega}' - \tau'), \\ \Lambda = \lambda - \tau; \quad \Lambda' = \lambda' - \tau'; \quad \Omega = \tilde{\omega} - \tau; \quad \Omega' = \tilde{\omega}' - \tau' \end{cases}$$

schreiben.

Es sind also R, R', F, F' Funktionen der neun Variablen

$$\text{(XXV; 50)} \qquad a; a'; e; e'; J; \Lambda; \Lambda'; \Omega; \Omega',$$

die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, also „Invarianten" im Sinne von Abschnitt 106 sind. Diese neun unabhängigen Invarianten als

Funktionen der Zeit bestimmen, ebenso wie die neun Invarianten (XII; 22), das „reduzierte Dreikörperproblem", nach dessen Lösung auf Grund des Satzes von LAGRANGE (Abschnitt 107) die Lösung des vollständigen Problems keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Wir werden jetzt ein System von neun Differentialgleichungen für die Variablen (XXV; 50) aufstellen, das ebenso in sich geschlossen ist wie die beiden Systeme (XXV; 45), d. h. auf beiden Seiten nur die gleichen Variablen enthält. Für a, e, a', e' ist diese Forderung durch die Differentialgleichungen (XXV; 45) schon erfüllt, denn aus (XXV; 49) folgt

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum \alpha_1 C \sin D = \frac{\partial F}{\partial \Lambda}$$

und ebenso

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial F}{\partial \Omega}; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda'} = \frac{\partial F}{\partial \Lambda'}; \quad \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}'} = \frac{\partial F}{\partial \Omega'},$$

und es ist wegen (XXV; 47) auch

$$\text{(XXV; 51)} \qquad \frac{\partial F}{\partial \Lambda} + \frac{\partial F}{\partial \Lambda'} + \frac{\partial F}{\partial \Omega} + \frac{\partial F}{\partial \Omega'} + \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0.$$

Es sind also nur noch Differentialgleichungen für J, Λ, Λ', Ω, Ω' aufzustellen oder, da Differentialgleichungen für λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ in (XXV; 45) vorliegen, für

$$\text{(XXV; 52)} \qquad J; \quad \tau = \Omega + \nu; \quad \tau' = \Omega' + \nu'.$$

In dem Knotendreieck $KK'N$ (Abb. 4, die mit den neuen Bezeichnungen den Abbildungen 2 und 3 entspricht) gelten die Differentialformeln

$$\text{(XXV; 52a)} \quad \begin{cases} dJ = -\cos \nu\, di + \cos \nu'\, di' + \sin \nu \sin i\, d(\Omega' - \Omega), \\ \sin J\, d\nu = \sin \nu \cos J\, di - \sin \nu'\, di' + \cos \nu' \sin i'\, d(\Omega' - \Omega), \\ \sin J\, d\nu' = \sin \nu\, di - \sin \nu' \cos J\, di' + \cos \nu \sin i\, d(\Omega' - \Omega). \end{cases}$$

Aus (XXV; 52, 52a) folgt sodann, wenn man noch die im Knotendreieck gültigen Beziehungen

$$\sin \nu \sin i = \sin \nu' \sin i',$$

$$\cos \nu' \sin i' = \cos i \sin J + \sin i \cos J \cos \nu,$$

$$\cos \nu \sin i = -\cos i' \sin J + \sin i' \cos J \cos \nu',$$

$$\cos \nu' \sin i' - \sin J = \sin i \cos \nu \cos J - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin J,$$

$$\cos \nu \sin i + \sin J = \sin i' \cos \nu' \cos J + 2 \sin^2 \frac{i'}{2} \sin J$$

berücksichtigt,

$$\text{(XXV; 53)}\quad\begin{cases} dJ = -\cos\nu\, di - \sin\nu \sin i\, d\Omega + \cos\nu'\, di' + \sin\nu' \sin i'\, d\Omega', \\ \sin J\, d\tau = \sin\nu \cos J\, di - \left(\sin i \cos\nu \cos J - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin J\right) d\Omega - \\ \qquad\qquad - \sin\nu'\, di' + \cos\nu' \sin i'\, d\Omega', \\ \sin J\, d\tau' = \sin\nu\, di + \cos\nu' \sin i'\, d\Omega - \\ \qquad\qquad - \sin\nu' \cos J\, di' + \left(\sin i' \cos\nu' \cos J + 2\sin^2\frac{i'}{2}\sin J\right) d\Omega'. \end{cases}$$

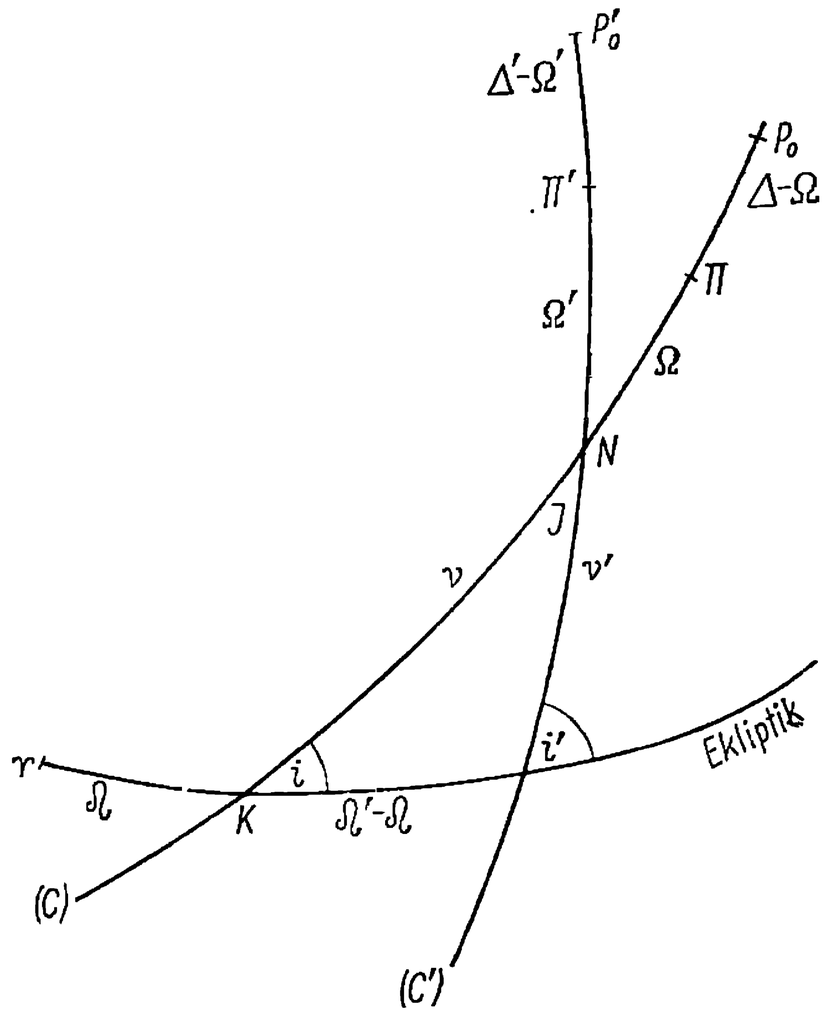

Abb. 4. Intermediäre Bahnebenen zweier Planeten P und P'
an der heliozentrischen Sphäre[1])
(Π, Π' = Perihelrichtungen; P_0, P_0' = Richtungen nach den mittleren Planetenörtern)

Setzen wir zur Abkürzung

$$A \sin J = \frac{\partial F}{\partial\lambda} + \frac{\partial F}{\partial\tilde{\omega}} = \frac{\partial F}{\partial\Lambda} + \frac{\partial F}{\partial\Omega}; \qquad B \sin J = \frac{\partial F}{\partial\Lambda'} + \frac{\partial F}{\partial\Omega'},$$

$$A' \sin J = \frac{\partial F'}{\partial\lambda} + \frac{\partial F'}{\partial\tilde{\omega}} = \frac{\partial F'}{\partial\Lambda} + \frac{\partial F'}{\partial\Omega}; \qquad B' \sin J = \frac{\partial F'}{\partial\Lambda'} + \frac{\partial F'}{\partial\Omega'},$$

[1]) Der Schnittpunkt zwischen (C') und der Ekliptik wird im Text mit K' bezeichnet.

so ist nach (XXV; 45)

$$(\text{XXV};\,54)\qquad \begin{cases} \sin i\,\dfrac{di}{dt} = -f\sec\varphi\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Omega} + 2A\sin J\sin^2\dfrac{i}{2}\right), \\ \sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} = f\sec\varphi\,\dfrac{\partial F}{\partial i}, \\ \sin i'\,\dfrac{di'}{dt} = -f'\sec\varphi'\left(\dfrac{\partial F'}{\partial \Omega'} + 2A'\sin J\sin^2\dfrac{i'}{2}\right), \\ \sin i'\,\dfrac{d\Omega'}{dt} = f'\sec\varphi'\,\dfrac{\partial F'}{\partial i'}. \end{cases}$$

Da ferner wegen (XXV; 49)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial i} = \frac{\partial \Omega}{\partial i} = -\frac{\partial \tau}{\partial i}; \qquad \frac{\partial \Lambda'}{\partial i} = \frac{\partial \Omega'}{\partial i} = -\frac{\partial \tau'}{\partial i}$$

und entsprechendes für die Ableitungen nach i', Ω, Ω' gilt, so erhält man

$$(\text{XXV};\,55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial i} = \dfrac{\partial F}{\partial J}\dfrac{\partial J}{\partial i} - \sin J\left(A\dfrac{\partial \tau}{\partial i} + B\dfrac{\partial \tau'}{\partial i}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Omega} = \dfrac{\partial F}{\partial J}\dfrac{\partial J}{\partial \Omega} - \sin J\left(A\dfrac{\partial \tau}{\partial \Omega} + B\dfrac{\partial \tau'}{\partial \Omega}\right) \end{cases}$$

und entsprechende Ausdrücke für $\partial F'/\partial i'$ und $\partial F'/\partial \Omega'$. Hierin ist nach (XXV; 53)

$$\frac{\partial J}{\partial i} = -\cos\nu; \qquad \frac{\partial J}{\partial \Omega} = -\sin\nu\sin i; \quad \ldots,$$

$$\sin J\,\frac{\partial \tau}{\partial i} = \sin\nu\cos J; \quad \sin J\,\frac{d\tau}{\partial \Omega} = -\left(\sin i\cos\nu\cos J - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin J\right); \quad \ldots$$

usw. zu setzen, und es folgt dann

$$\frac{\partial F}{\partial i} = -\cos\nu\,\frac{\partial F}{\partial J} - \sin\nu\,(A\cos J + B),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} + 2A\sin J\sin^2\frac{i}{2} = -\sin i\left\{\sin\nu\,\frac{\partial F}{\partial J} - \cos\nu\,(A\cos J + B)\right\}.$$

Ähnliche Formeln für $\partial F'/\partial i'$, $\partial F'/\partial \Omega'$ lassen sich auf demselben Wege leicht ableiten. Damit ergibt sich statt (XXV; 54)

$$\text{(XXV; 56)}\qquad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = f\sec\varphi\left\{\sin\nu\,\dfrac{\partial F}{\partial J} - \cos\nu\,(A\cos J + B)\right\}, \\ \sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} = -f\sec\varphi\left\{\cos\nu\,\dfrac{\partial F}{\partial J} + \sin\nu\,(A\cos J + B)\right\}, \\ \dfrac{di'}{dt} = -f'\sec\varphi'\left\{\sin\nu'\,\dfrac{\partial F'}{\partial J} - \cos\nu'\,(A' + B'\cos J)\right\}, \\ \sin i'\,\dfrac{d\Omega'}{dt} = f'\sec\varphi'\left\{\cos\nu'\,\dfrac{\partial F'}{\partial J} + \sin\nu'\,(A' + B'\cos J)\right\}. \end{cases}$$

Setzt man (XXV; 56) in (XXV; 53) ein und bedenkt, daß

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d(\lambda - \tau)}{dt};\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d(\tilde{\omega} - \tau)}{dt};\quad \frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{d(\lambda' - \tau')}{dt};\quad \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{d(\tilde{\omega}' - \tau')}{dt}$$

ist, so findet man nach elementarer Rechnung

$$\text{(XXV; 57)}\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 2fa\,\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}, \qquad \dfrac{da'}{dt} = 2f'a'\,\dfrac{\partial F'}{\partial \Lambda'}, \\ \dfrac{de}{dt} = -f\cot\varphi\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Omega} + 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}\right), \\ \dfrac{de'}{dt} = -f'\cot\varphi'\left(\dfrac{\partial F'}{\partial \Omega'} + 2\sin^2\dfrac{\varphi'}{2}\,\dfrac{\partial F'}{\partial \Lambda'}\right), \\ \dfrac{dJ}{dt} = -f\sec\varphi\,(A\cos J + B) + f'\sec\varphi'\,(A' + B'\cos J), \\ \dfrac{d\Lambda}{dt} = f\left(\cos\varphi\,\tan\dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial F}{\partial e} - 2a\,\dfrac{\partial F}{\partial a} - \sec\varphi\cot J\,\dfrac{\partial F}{\partial J}\right) - \\ \qquad\qquad - f'\sec\varphi'\,\mathrm{cosec}\,J\,\dfrac{\partial F'}{\partial J}, \\ \dfrac{d\Lambda'}{dt} = f'\left(\cos\varphi'\,\tan\dfrac{\varphi'}{2}\,\dfrac{\partial F'}{\partial e'} - 2a'\,\dfrac{\partial F'}{\partial a'} - \sec\varphi'\,\cot J\,\dfrac{\partial F'}{\partial J}\right) - \\ \qquad\qquad - f\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,J\,\dfrac{\partial F}{\partial J}, \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = f\left(\cot\varphi\,\dfrac{dF}{de} - \sec\varphi\,\cot J\,\dfrac{\partial F}{\partial J}\right) - f'\sec\varphi'\,\mathrm{cosec}\,J\,\dfrac{\partial F'}{\partial J}, \\ \dfrac{d\Omega'}{dt} = f'\left(\cot\varphi'\,\dfrac{\partial F'}{\partial e'} - \sec\varphi'\,\cot J\,\dfrac{\partial F'}{\partial J}\right) - f\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,J\,\dfrac{\partial F}{\partial J}. \end{cases}$$

Dies in sich geschlossene System der Differentialgleichungen für die Invarianten (XXV; 50) wird ergänzt durch die Differentialgleichungen für i, Ω, τ, die nach (XXV; 53—56)

$$\frac{di}{dt} = f \sec\varphi \left\{ \sin\nu \frac{\partial F}{\partial J} - \cos\nu (A \cos J + B) \right\},$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = -f \sec\varphi \left\{ \cos\nu \frac{\partial F}{\partial J} + \sin\nu (A \cos J + B) \right\},$$

$$\sin J \frac{d\tau}{dt} = f \sec\varphi \left\{ \left(\cos J - \tan\frac{i}{2} \cos\nu \sin J \right) \frac{\partial F}{\partial J} \right.$$

$$\left. - \tan\frac{i}{2} \sin\nu \sin J (A \cos J + B) \right\} + f' \sec\varphi' \frac{\partial F'}{\partial J}$$

lauten und die auch durch entsprechende Gleichungen für i', Ω', τ' ersetzt werden können.

Die Formeln (XXV; 56) lassen sich leicht in die Leverriersche Form überführen, wenn man bedenkt, daß wegen (XXV; 51)

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} + \frac{\partial F}{\partial \Omega} + \frac{\partial F}{\partial \Lambda'} + \frac{\partial F}{\partial \Omega'} = \sin J (A + B) = -\frac{\partial F}{\partial \tau},$$

also

$$\frac{di}{dt} = f \sec\varphi \left\{ \sin\nu \frac{\partial F}{\partial J} - \cos\nu \left(A \cos J - \frac{\partial F}{\partial \tau} \operatorname{cosec} J - A \right) \right\} =$$

$$= f \sec\varphi \left\{ \sin\nu \frac{\partial F}{\partial J} + 2A \cos\nu \sin^2 \frac{J}{2} + \cos\nu \operatorname{cosec} J \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\}$$

ist. Das ist aber, wenn man die Unterschiede in der Bezeichnungsweise berücksichtigt, genau die Leverriersche Formel für di/dt,[1]) und ebenso identifiziert man die übrigen.

Die oben abgeleitete Form (XXV; 57) der Störungsgleichungen ist also der Leverrierschen äquivalent. Sie besitzt für den Theoretiker interessante Züge, da sie die Formulierung des reduzierten Dreikörperproblems in sich schließt. Ob sie für den praktischen Gebrauch der klassischen Form überlegen ist, sei dahingestellt. Die fünf letzten der Gleichungen (XXV; 57) haben den Nachteil, daß in den Ausdrücken

$$A = \frac{1}{\sin J} \left(\frac{\partial F}{\partial \Lambda} + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \right); \quad \ldots; \quad B' = \frac{1}{\sin J} \left(\frac{\partial F'}{\partial \Lambda'} + \frac{\partial F'}{\partial \Omega'} \right)$$

und in den Faktoren von $\partial F/\partial J$, $\partial F'/\partial J$ die meist sehr kleine Größe $\sin J$ im Nenner enthalten ist. Dieser die Genauigkeit der Lösungen beeinträchtigende

---

[1]) Unsere Formel für di/dt entspricht bei Tisserand (Bd. I, S. 327) derjenigen für $d\varphi'/dt$.

Umstand läßt sich aber leicht beseitigen. Man erinnere sich daran, daß die Störungsfunktionen F und F' den Neigungswinkel J nur in der Form

$$\eta^2 = \sin^2 \frac{J}{2}$$

enthalten. Es ist aber

$$\frac{d\eta^2}{dt} = \frac{1}{2} \sin J \frac{dJ}{dt}, \qquad \frac{\partial F}{\partial J} = \frac{\partial F}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial J} = \frac{1}{2} \sin J \frac{\partial F}{\partial \eta^2}.$$

Führt man also η^2 statt J und $\partial F/\partial \eta^2$, $\partial F'/\partial \eta^2$ statt $\partial F/\partial J$, $\partial F'/\partial J$ ein, so verschwindet in den Gleichungen der Nenner $\sin J$.

Über die Frage der Integration der Störungsgleichungen ist in Kapitel XV das Wesentliche ausgesagt worden, so daß wir uns hier nicht mehr damit zu beschäftigen brauchen. Wir werden auf diese Dinge, insbesondere auch auf das Problem der Berechnung von Störungen höherer Ordnung in den Massen, an anderer Stelle zurückkommen, nämlich bei der Beschreibung moderner Methoden der Störungsrechnung, in denen dieses wichtige Problem eleganter und weniger mühsam gelöst wird als in der klassischen Himmelsmechanik.

218. Entwicklung der Störungsfunktion nach Funktionen der wahren Anomalien

Die Entwicklung der Störungsfunktion in trigonometrische Reihen, die nach Vielfachen der mittleren Längen bzw. Anomalien fortschreiten, ist, wie schon in Abschnitt 212 hervorgehoben wurde, das natürlichste Verfahren, da eine Integration der Störungsgleichungen nach der Zeit dann unmittelbar vorgenommen werden kann. Eine Entwicklung nach Vielfachen der wahren oder der exzentrischen Anomalien hat aber auch Vorteile, die darauf beruhen, daß

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos v) \qquad \text{bzw.} \qquad r = a(1 - e \cos E)$$

einfache endliche Ausdrücke sind, während die Entwicklung von r^{-1} bzw. r nach Vielfachen der mittleren Anomalien auf unendliche Reihen führt. In einigen der klassischen Störungstheorien werden daher Entwicklungen nach E (HANSEN) bzw. v (GYLDÉN, BRENDEL) bevorzugt. Wir werden in diesem Abschnitt die Entwicklung der Störungsfunktion nach Funktionen der Vielfachen der wahren Anomalien durchführen, wobei wir uns der in Abschnitt 209 eingeführten logarithmischen Differentialoperatoren bedienen.[1])

---

[1]) Die Entwicklung nach Vielfachen der exzentrischen und mittleren Anomalien kann nach einem entsprechenden Verfahren, wenn auch weniger durchsichtig, ausgeführt werden. Der Leser sei auf das Lehrbuch von BROUWER und CLEMENCE (D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Methods of celestial mechanics. New York 1961, S. 482ff.) verwiesen.

Der Hauptteil der Störungsfunktion, als Funktion der wahren Anomalien v_1 und v_2 der beiden Planeten, hat die Gestalt (XXV; 3),

$$(\text{XXV}; 58) \qquad \Psi = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_2}\left[1 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos\varphi + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad (r_1 < r_2),$$

wobei

$$r_1 = a_1(1 - e_1^2)\,(1 + e_1\cos v_1)^{-1}; \qquad r_2 = a_2(1 - e_2^2)\,(1 + e_2\cos v_2)^{-1}$$

zu setzen ist und φ den Winkel zwischen den heliozentrischen Ortsvektoren der beiden Planeten bezeichnet. Nach (XXIII; 27) ist dann

$$\cos\varphi = \cos(\pi_1 - \pi_2) - 2\sin^2\frac{J}{2}\sin\pi_1\sin\pi_2 =$$

$$= \cos(\pi_1 - \pi_2)\cos^2\frac{J}{2} + \cos(\pi_1 + \pi_2)\sin^2\frac{J}{2},$$

wenn (Abb. 3, S. 88) $\pi_1 = v_1 + \Omega_1$, $\pi_2 = v_2 + \Omega_2$ die sphärischen Abstände der Planetenörter vom Knoten N und Ω_1, Ω_2 die in Abschnitt 217 definierten Abstände der Perihelien von N bezeichnen (Abb. 4, S. 115). Man erhält daher r_1, r_2 und

$$(\text{XXV}; 59) \qquad \cos\varphi = \cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2)\cos^2\frac{J}{2} +$$

$$+ \cos(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2)\sin^2\frac{J}{2}$$

als Funktionen der wahren Anomalien und der (in der ungestörten Bahn konstanten) Bahnelemente a_1, e_1, Ω_1; a_2, e_2, Ω_2 sowie der gegenseitigen Neigung J der beiden Bahnebenen.

Es empfiehlt sich, statt e und v die Größen β und σ durch

$$e = \sin\eta = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \qquad \beta = \tan\frac{\eta}{2}, \qquad \sigma = \exp(iv), \qquad i = \sqrt{-1}$$

einzuführen. Dann ist allgemein in den oskulierenden Bahnen

$$r = a\left(1 - \frac{4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}\right)\left[1 + \frac{\beta}{1 + \beta^2}(\sigma + \sigma^{-1})\right]^{-1} =$$

$$= a\left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}\right)^2\left[\frac{(1 + \beta\sigma)\,(1 + \beta\sigma^{-1})}{1 + \beta^2}\right]^{-1} = a\frac{(1 - \beta^2)^2}{1 + \beta^2}(1 + \beta\sigma)^{-1}\left(1 + \frac{\beta}{\sigma}\right)^{-1},$$

und es sind den Größen r, a, β, σ die Indizes 1 bzw. 2 beizufügen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta^2 = 1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos^2\frac{J}{2}\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2),$$

so erhält man statt (XXV; 58), nachdem man (XXV; 59) eingesetzt hat,

$$\text{(XXV; 60)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_2}\left[\Delta^2 - 2\frac{r_1}{r_2}\sin^2\frac{J}{2}\cos\left(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2\right)\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{r_2\Delta}\left[1 - \frac{2r_1}{\Delta^2 r_2}\sin^2\frac{J}{2}\cos\left(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2\right)\right]^{-1/2}.$$

Nun schreibe man

$$r_1 = s_1\zeta_1; \quad r_2 = s_2\zeta_2; \quad \alpha_0 = \frac{s_1}{s_2}$$

mit den Abkürzungen ($i = 1, 2$)

$$s_i = a_i\frac{(1-\beta_i{}^2)^2}{1+\beta_i{}^2}; \quad \zeta_i = (1+\beta_i\sigma_i)^{-1}\left(1+\frac{\beta_i}{\sigma_i}\right)^{-1}.$$

Ferner sei

$$\text{(XXV; 61)} \qquad \begin{cases} \Delta_0{}^2 = 1 + \alpha_0{}^2 - 2\alpha_0\cos^2\dfrac{J}{2}\cos\left(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2\right), \\ f(\alpha_0) = \dfrac{1}{\Delta_0}\left[1 - \dfrac{2\alpha_0}{\Delta_0{}^2}\sin^2\dfrac{J}{2}\cos\left(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2\right)\right]^{-1/2}. \end{cases}$$

Dann ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_2}f\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{1}{s_2\zeta_2}f\left(\alpha_0\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right),$$

und man erhält nach Abschnitt 209, (XXIV; 36), wenn

$$D = \alpha_0\frac{d}{d\alpha_0}$$

als logarithmischer Differentialoperator eingeführt wird,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{s_2}\frac{1}{\zeta_2}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^D f(\alpha_0) = \frac{1}{s_2}\,\zeta_1{}^D\zeta_2{}^{-(D+1)}f(\alpha_0)$$

als symbolischen Ausdruck für die Entwicklung des Hauptteils nach Funktionen der wahren Anomalien.

Die zur Entschlüsselung dieser Operatorengleichung nötigen Schritte brauchen hier nur angedeutet zu werden. Bei kleinen J, β_1, β_2 und Beschränkung auf Terme niedriger Ordnung ist die Durchführung dieser Aufgabe nicht schwierig.

Zunächst läßt sich der Operator

$$\zeta_1{}^D = (1+\beta_1\sigma_1)^{-D}\left(1+\frac{\beta_1}{\sigma_1}\right)^{-D}$$

leicht in eine nach Potenzen von β_1 fortschreitende Reihe zerlegen. Der Koeffizient von $\beta_1{}^n$ ist dann eine ganze rationale Funktion n-ten Grades des Operators D. Benutzt man die hypergeometrische Funktion (XXIII; 42),

$$F(a, b, c; \beta^2) = 1 + \frac{a\ b}{1!\,c}\beta^2 + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{2!\,c(c+1)}\beta^4 + \cdots,$$

so läßt sich durch elementare Rechnung zeigen, daß

$$\text{(XXV; 62)} \qquad \zeta_1{}^D = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-D}{n}(\beta_1\sigma_1)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-D}{m}\left(\frac{\beta_1}{\sigma_1}\right)^m =$$

$$= F(D, D, 1; \beta_1{}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_1{}^k(\sigma_1{}^k + \sigma_1{}^{-k})\binom{-D}{k}F(D, D+k, k+1; \beta_1{}^2)$$

und ebenso

$$\zeta_2{}^{-(D+1)} = F(-D-1, -D-1, 1; \beta_2{}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_2{}^k(\sigma_2{}^k + \sigma_2{}^{-k}) \times$$

$$\times\binom{D+1}{k}F(-D-1, -D-1+k, k+1; \beta_2{}^2)$$

geschrieben werden kann. Der Operator $\zeta_1{}^D\zeta_2{}^{-(D+1)}$ läßt sich dann durch Multiplikation dieser Reihen bilden. Entwickelt man etwa bis zur n-ten Ordnung in den β, so ergibt sich ein Ausdruck von der Form

$$\zeta_1{}^D\zeta_1{}^{-(D-1)} = \varphi_0 + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 + \cdots + \varphi_n D^n + \cdots,$$

und es ist φ_n ein Polynom n-ten Grades in β_1 und β_2, dessen Koeffizienten Funktionen von σ_1 und σ_2 bzw. von

$$\sigma_1{}^k + \sigma_1{}^{-k} = 2\cos kv_1, \qquad \sigma_2{}^k + \sigma_2{}^{-k} = 2\cos kv_2$$

sind. Die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in den Exzentrizitäten ergibt

$$\zeta_1{}^D\zeta_2{}^{-(D+1)} = 1 + 2\beta_2\cos v_2 + \beta_2{}^2 +$$

$$+ \{2(\beta_2\cos v_2 - \beta_1\cos v_1) + 2\beta_2{}^2 + \beta_2{}^2\cos 2v_2 - 4\beta_1\beta_2\cos v_1\cos v_2 + \beta_1{}^2\cos 2v_1\}D +$$

$$+ \{\beta_2{}^2(1+\cos 2v_2) - 4\beta_1\beta_2\cos v_1\cos v_2 + \beta_1{}^2(1+\cos 2v_1)\}D^2 + \cdots.$$

Die Operatoren D, D^2, D^3, ... sind dann noch auf die Funktion $f(\alpha_0)$ anzuwenden. Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon = \sin^2\frac{J}{2}\cos(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2), \qquad \delta = \cos^2\frac{J}{2}\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2),$$

so ist nach (XXV; 61)

$$f(\alpha_0) = \frac{1}{\Delta_0}\left(1 - \frac{2\alpha_0\varepsilon}{\Delta_0{}^2}\right)^{-1/2}; \qquad \Delta_0{}^2 = 1 + \alpha_0{}^2 - 2\alpha_0\delta,$$

und man kann, da ε von der zweiten Ordnung in der meist sehr kleinen Neigung J ist, $f(\alpha_0)$ in eine rasch konvergierende Reihe

$$f(\alpha_0) = \frac{1}{\Delta_0} + \frac{\alpha_0\varepsilon}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}\frac{\alpha_0^2\varepsilon^2}{\Delta_0^5} + \frac{5}{2}\frac{\alpha_0^3\varepsilon^3}{\Delta_0^7} + \frac{35}{8}\frac{\alpha_0^4\varepsilon^4}{\Delta_0^9} + \cdots$$

entwickeln, die nach ungeraden Potenzen von Δ_0^{-1} fortschreitet. Es ist dann, wenn $s = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = (\Delta_0^2)^{-s},$$

und man erhält durch logarithmische Differentiation nach α_0

$$D\left(\frac{1}{\Delta_0^{2s}}\right) = \alpha_0 \frac{d}{d\alpha_0}(\Delta_0^2)^{-s} = -\alpha_0 s(\Delta_0^2)^{-s-1}\frac{d\Delta_0^2}{d\alpha} =$$

$$= -\alpha_0 s(\Delta_0^2)^{-s-1}(2\alpha_0 - 2\delta) = -s(\Delta_0^2)^{-s-1}(\Delta_0^2 - 1 + \alpha_0^2)$$

oder

$$D\left(\frac{1}{\Delta_0^{2s}}\right) = s\left[\frac{1-\alpha_0^2}{\Delta_0^{2s+2}} - \frac{1}{\Delta_0^{2s}}\right].$$

Damit ist gezeigt, daß die Ableitungen Df, D^2f, D^3f, ... ebenfalls Reihen ergeben, die nach ungeraden Potenzen von Δ_0^{-1} fortschreiten, und es wird daher nach ausgeführter Differentiation nur noch nötig sein, die Größen Δ_0^{-2s} in trigonometrische Reihen nach den wahren Anomalien v_1, v_2 zu entwickeln. Es ist aber

$$\Delta_0^2 = 1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0\cos^2\frac{J}{2}\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2) =$$

$$= \frac{1+\alpha_0^2}{1+\alpha_1^2}\left[1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_0\frac{1+\alpha_1^2}{1+\alpha_0^2}\cos^2\frac{J}{2}\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2)\right],$$

wenn unter α_1 eine zunächst beliebige Größe verstanden wird. Bestimmt man nun α_1 als die kleinere der beiden positiven Wurzeln ($\alpha_1 < 1$) der quadratischen Gleichung

$$\frac{1+\alpha_1^2}{1+\alpha_0^2}\cos^2\frac{J}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0},$$

so erhält man

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0\cos^2\frac{J}{2}}\right)^s [1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2)]^{-s},$$

und der zweite Faktor rechts läßt sich dann nach (XXIII; 33a) in die trigonometrische, nach Vielfachen der wahren Anomalien fortschreitende Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(s)} \cos k(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2)$$

entwickeln, wobei die LAPLACEschen Koeffizienten $b_k^{(s)}$ als Funktionen von α_1 anzusehen sind.

Die Entwicklung des Nebenteils der Störungsfunktion nach Funktionen von v_1 und v_2 ist verhältnismäßig einfach. Man bildet

$$\psi_1 = \frac{r_1 \cos\varphi}{{r_2}^2} = \frac{r_1}{{r_2}^2}\left[\cos^2\frac{J}{2}\cos(v_1 - v_2 + \Omega_1 - \Omega_2) + \right.$$
$$\left. + \sin^2\frac{J}{2}\cos(v_1 + v_2 + \Omega_1 + \Omega_2)\right]$$

mit

$$\frac{1}{{r_2}^2} = \frac{(1 + e_2\cos v_2)^2}{{a_2}^2(1 - {e_2}^2)^2} = \frac{1}{{a_2}^2(1 - {e_2}^2)^2}\left[1 + 2e_2\cos v_2 + \frac{1}{2}{e_2}^2(1 + \cos 2v_2)\right]$$

und

$$r_1 = a_1(1 - {e_1}^2)(1 + e_1\cos v_1)^{-1} =$$
$$= a_1(1 - {e_1}^2)\left[1 - e_1\cos v_1 + \frac{1}{2}{e_1}^2(1 + \cos 2v_1) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}{e_1}^3(3\cos v_1 + \cos 3v_1) + \cdots\right],$$

ebenso $\psi_2 = (r_2\cos\varphi)/{r_1}^2$ mit vertauschten Indizes.

KAPITEL XXVI

SÄKULARE STÖRUNGEN

219. Die Differentialgleichungen der säkularen Störungen

Das Problem der säkularen Störungen ist in den Abschnitten 137—141 für den Fall des planetaren Dreikörperproblems (Sonne und zwei Planeten) eingehend behandelt worden. Vorausgesetzt, daß die Exzentrizitäten der beiden intermediären Planetenbahnen und deren Neigungen gegen eine geeignet gewählte Hauptkoordinatenebene (etwa UVE oder Ekliptik) klein sind, läßt sich diese Aufgabe mit hinreichender Genauigkeit auf die Integration linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zurückführen.

Diese einfache und bequeme Lösung kann man auch auf den Fall übertragen, daß alle großen Planeten des Sonnensystems oder eine Auswahl von ihnen in die Rechnung einbezogen werden. Der Grund dafür ist, daß es für die meisten Zwecke ausreicht, die säkulare Störungsfunktion $[W]$, wie in (XVI; 62) angenommen wurde, bis zu Gliedern zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen zu entwickeln. Da $[W]$ nur Terme gerader Ordnung enthält, wie in Abschnitt 214 bewiesen wurde, wären die vernachlässigten Glieder von der vierten Ordnung. Da sie außerdem noch die störenden Massen als Faktoren enthalten, wird ihre Vernachlässigung das Ergebnis nicht wesentlich beeinflussen, sofern man die Untersuchung des säkularen Verhaltens der Bahnelemente nicht über mäßige Zeiträume, d. h. hier über wenige Jahrhunderte, ausdehnt und die Rechnung auf Störungen erster Ordnung in den störenden Massen beschränkt.

Will man allerdings die Rechnung auf sehr lange Zeiträume, etwa auf Jahrtausende, ausdehnen, so reicht dieses Verfahren nicht aus. Andererseits ist die Genauigkeit einer allgemeinen Störungsrechnung über so lange Zeiten hinweg ohnehin beschränkt, da aus rund zweihundert Jahren exakter Planetenbeobachtung die numerischen Werte der Integrationskonstanten, etwa der oskulierenden Elemente der Planetenbahnen für irgendeine Ausgangsepoche, für eine so weitgehende Extrapolation nicht sicher genug bekannt sind. Schwierigkeiten, die eine genauere Rechnung erforderlich machen, ergeben sich auch, wenn zwischen den mittleren Bewegungen der Planeten niedrigzahlige Kommensurabilitäten bestehen, wenn (bei Planetoiden oder Kometen) die Exzentrizitäten und Neigungen nicht klein genug sind oder wenn deren Bahnen sich einem störenden Planeten zu gewissen Zeiten nähern.

Alle diese die Genauigkeit der Theorie herabsetzenden oder gar ihre Gültigkeit in Frage stellenden Umstände sollen im folgenden unberücksichtigt bleiben. Wir werden also den Fall von beliebig vielen (n) Planeten nach dem gleichen Prinzip behandeln, wie wir es für $n = 2$ in Kapitel XVI getan haben.

Wir benutzen, wie dort, die Poincaréschen kanonischen Elemente (XVI; 30) und schreiben sie vorerst in der Form

$$(\text{XXVI};1)\quad \begin{cases} L' = \sigma\sqrt{a};\ \xi' = 2\sqrt{L'}\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\tilde{\omega};\ p' = 2\sqrt{L'\cos\varphi}\sin\dfrac{i}{2}\cos\Omega, \\ \lambda = \tilde{\omega} + M;\ \eta' = -2\sqrt{L'}\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin\tilde{\omega};\ q' = -2\sqrt{L'\cos\varphi}\sin\dfrac{i}{2}\sin\Omega, \end{cases}$$

wo $\sin\varphi = e$ und, wenn wir ein heliozentrisches Koordinatensystem zugrunde legen, $\sigma = \varkappa = k\sqrt{1+m}$ ist. Alle Größen sind für jeden Planeten P_i mit dem Index i zu versehen.

Versteht man unter $L', \ldots, q'$ als Funktionen der Zeit die Elemente, sofern sie allein durch säkulare Störungen verändert werden, so genügen sie den halbkanonischen Differentialgleichungen

$$(\text{XXVI};2)\quad \begin{cases} \dfrac{dL_i'}{dt} = \dfrac{\partial[F_i]}{\partial\lambda_i},\ \dfrac{\partial\lambda_i}{dt} = -\dfrac{\partial[F_i]}{\partial L_i'}; \\ \dfrac{d\xi_i'}{dt} = \dfrac{\partial[F_i]}{\partial\eta_i'},\ \dfrac{d\eta_i'}{dt} = -\dfrac{\partial[F_i]}{\partial\xi_i'};\ \dfrac{dp_i'}{dt} = \dfrac{\partial[F_i]}{\partial q_i'},\ \dfrac{dq_i'}{dt} = -\dfrac{\partial[F_i]}{\partial p_i'}, \end{cases}$$

in denen die „säkularen Störungsfunktionen“

$$[F_i] = \frac{\varkappa_i^4}{2L_i'^2} + [W_i]$$

keine periodischen, d. h. von den mittleren Längen λ_i abhängigen Glieder enthalten. Es folgt daher

$$\frac{dL_i'}{dt} = 0,\quad L_i' = \text{const},$$

und es genügt dann, die Differentialgleichungen für ξ_i', η_i', p_i', q_i' zu lösen, da dann $d\lambda_i/dt$ als Funktion der Größen ξ_i', η_i', p_i', q_i' und der Konstanten L_i' bekannt ist, $\lambda_i(t)$ also durch Quadratur folgt.

Beschränkt man sich, wie in den Abschnitten 138—139, auf den Fall zweier Planeten P_i, P_j und führt die dimensionslosen Größen

$$(\text{XXVI};3)\qquad f = \frac{\xi'}{\sqrt{L'}};\ g = -\frac{\eta'}{\sqrt{L'}};\ h = \frac{p'}{\sqrt{L'}};\ k = -\frac{q'}{\sqrt{L'}}$$

ein, so genügen diese den Differentialgleichungen

$$(\text{XXVI};4)$$

$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{1}{L_i'}\frac{\partial[W_i]}{\partial g_i},\quad \frac{dg_i}{dt} = \frac{1}{L_i'}\frac{\partial[W_i]}{\partial f_i};\quad \frac{dh_i}{dt} = -\frac{1}{L_i'}\frac{\partial[W_i]}{\partial k_i},\quad \frac{dk_i}{dt} = \frac{1}{L_i'}\frac{\partial[W_i]}{\partial h_i},$$

in denen $[W_i]$ nach (XVI; 62) die Form

(XXVI; 5)

$$[W_i] = k^2 m_j \left[\frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{8} B_1 \{ f_i^2 + g_i^2 + f_j^2 + g_j^2 - (h_j - h_i)^2 - (k_j - k_i)^2 \} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} B_2 (f_i f_j + g_i g_j) \right]$$

hat und

$$A_0(a_i, a_j); \quad B_1(a_i a_j); \quad B_2(a_i, a_j)$$

zu den in (XXIII; 35—37) eingeführten und in den großen Halbachsen a_i, a_j bzw. L_i', L_j' symmetrischen Funktionen gehören. Da in den Gleichungen (XXVI; 4) keine Ableitungen nach den a bzw. L' vorkommen, darf der Term mit A_0 in (XXVI; 5) fortgelassen werden, und man kann dann

(XXVI; 6)
$$[W_i] = \frac{k^2}{8} m_j [B_1 (f_i^2 + g_i^2 + f_j^2 + g_j^2) - 2 B_2 (f_i f_j + g_i g_j)] -$$
$$- \frac{k^2}{8} m_j B_2 [(h_j - h_i)^2 + (k_j - k_i)^2] = [U'_{ij}] + [V'_{ij}]$$

schreiben, wo, da alle $B_k > 0$ sind und $B_2 < B_1$ ist,

$$[U'_{ij}] = \frac{k^2}{8} m_j [(B_1 - B_2)(f_i^2 + g_i^2 + f_j^2 + g_j^2) + B_2 \{(f_j - f_i)^2 + (g_j - g_i)^2\}]$$

> 0 nur von den f, g,

$[V'_{ij}] < 0$ nur von den h, k abhängt.

Die Differentialgleichungen (XXVI; 4) haben also die Form

(XXVI; 7a)
$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{1}{L_i'} \frac{\partial [U'_{ij}]}{\partial g_i}; \quad \frac{dg_i}{dt} = \frac{1}{L_i'} \frac{\partial [U'_{ij}]}{\partial f_i},$$

(XXVI; 7b)
$$\frac{dh_i}{dt} = -\frac{1}{L_i'} \frac{\partial [V'_{ij}]}{\partial k_i}; \quad \frac{dk_i}{dt} = \frac{1}{L_i'} \frac{\partial [V'_{ij}]}{\partial h_i}$$

und zerfallen daher in zwei voneinander unabhängige Systeme.

Sind mehr als zwei Planeten an der Bewegung beteiligt, so gelten die Formeln (XXVI; 7a, b) ebenfalls, wenn man statt $[U'_{ij}]$, $[V'_{ij}]$ die Summen

$$[U_i'] = \sum_{j \neq i} [U'_{ij}], \quad [V_i'] = \sum_{j \neq i} [V'_{ij}]$$

einführt. Diese Differentialgleichungen bleiben unverändert, wenn man die L_i', $[U_i']$, $[V_i']$ mit dem gleichen Faktor, etwa mit m_i, multipliziert. Es ist

dann

$$L_i = m_i L_i'$$

und

$$[U_i] = m_i[U_i'] = \frac{k^2}{8} \sum_{j \neq i} m_i m_j [B_1(f_i^2 + g_i^2 + f_j^2 + g_j^2) - 2B_2(f_i f_j + g_i g_j)],$$

$$[V_i] = m_i[V_i'] = -\frac{k^2}{8} \sum_{j \neq i} m_i m_j B_2[(h_j - h_i)^2 + (k_j - k_i)^2].$$

Führt man nun statt der POINCARÉschen Variablen ξ_i', η_i', p_i', q_i'

$$\xi_i = \sqrt{m_i}\, \xi_i'; \quad \eta_i = \sqrt{m_i}\, \eta_i'; \quad p_i = \sqrt{m_i}\, p_i'; \quad q_i = \sqrt{m_i}\, q_i'$$

ein, so bleiben die Variablen (XXVI; 3) in der neuen Form

$$f_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{L_i}}; \quad g_i = -\frac{\eta_i}{\sqrt{L_i}}; \quad h_i = \frac{p_i}{\sqrt{L_i}}; \quad k_i = -\frac{q_i}{\sqrt{L_i}}$$

ungeändert, und man darf statt der vier letzten Differentialgleichungen (XXVI; 2)

$$\text{(XXVI; 8)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial[U_i]}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial[U_i]}{\partial \xi_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial[V_i]}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial[V_i]}{\partial p_i}$$

setzen. Nun ist aber

$$\frac{\partial[U_i]}{\partial \eta_i} = \frac{\partial[U_i]}{\partial g_i}\frac{\partial g_i}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{\sqrt{L_i}}\frac{\partial[U_i]}{\partial g_i} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{L_i}}\frac{k^2}{4} \sum_{j \neq i} m_i m_j [B_1 g_i - B_2 g_j] =$$

$$= \frac{k^2}{4}\frac{m_i}{L_i} \sum_{j \neq i} m_j B_1 \eta_i - \frac{k^2}{4}\frac{m_i}{\sqrt{L_i}} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\sqrt{L_j}} B_2 \eta_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j,$$

wenn man

$$\text{(XXVI; 9)} \qquad \begin{cases} a_{ii} = \dfrac{k^2}{4}\dfrac{m_i}{L_i} \displaystyle\sum_{j \neq i} m_j B_1(a_i, a_j), \\ a_{ij} = -\dfrac{k^2}{4}\dfrac{m_i m_j}{\sqrt{L_i L_j}} B_2(a_i, a_j), \quad j \neq i \end{cases}$$

einführt. Formt man alle Gleichungen (XXVI; 8) in dieser Weise um, so ergeben sich die Systeme

$$\text{(XXVI; 10a)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j,$$

$$\text{(XXVI; 10b)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j; \quad \frac{dq_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j,$$

in denen die Koeffizienten a_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ durch (XXVI; 9) und die b_{ij} durch

$$\text{(XXVI; 11)} \qquad \begin{cases} b_{ii} = -\dfrac{k^2}{4}\dfrac{m_i}{L_i}\sum\limits_{j\neq i} m_j B_2(a_i, a_j), \\ b_{ij} = \dfrac{k^2}{4}\dfrac{m_i m_j}{\sqrt{L_i L_j}}\, B_2(a_i, a_j) = -a_{ij}, \quad (j \neq i) \end{cases}$$

als Funktionen der großen Halbachsen und der Massen definiert sind. Die Größen a_{ij}, b_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ bilden zwei symmetrische Matrizen

$$(A) = (a_{ij}), \quad (B) = (b_{ij}),$$

da $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ ist.

Aus (XXVI; 8, 10) folgt ferner, daß man statt $[U_i]$, $[V_i]$ auch

$$\text{(XXVI; 12)} \qquad \begin{cases} [U] = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j), \\ [V] = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\,(p_i p_j + q_i q_j) \end{cases}$$

schreiben kann, ohne daß die partiellen Ableitungen dieser Größen nach den Variablen sich ändern.

220. Säkulare Störungen der Exzentrizitäten und Perihellängen. Die säkulare Gleichung

Die Gleichungen (XXVI; 10a) bilden ein System von $2n$ linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie haben die partikulären Lösungen $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\text{(XXVI; 13)} \quad \xi_{ik} = A_{ik}\cos(\alpha_k\tau + \gamma_k); \quad \eta_{ik} = -A_{ik}\sin(\alpha_k\tau + \gamma_k),$$

und die allgemeine Lösung ist daher

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n}\xi_{ik}; \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{n}\eta_{ik}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Differenziert man (XXVI; 13) nach der Zeit $\tau = t - t_0$, wo t_0 eine Anfangsepoche sei, für die $\xi_i(t_0)$, $\eta_i(t_0)$ als Anfangsbedingungen gegeben sein mögen, so ergibt sich aus den beiden Gleichungen (XXVI; 10a)

$$\alpha_k A_{ik}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\alpha_k\tau + \gamma_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{jk}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\alpha_k\tau + \gamma_k).$$

Für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ besteht also ein lineares Gleichungssystem

$$\text{(XXVI; 14)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{jk} - \alpha_k A_{ik} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

oder explizite

$$\text{(XXVI; 15)}\qquad \begin{cases} A_{1k}(a_{11}-\alpha_k)+A_{2k}a_{12}+\cdots+A_{nk}a_{1n}=0, \\ A_{1k}a_{21}+A_{2k}(a_{22}-\alpha_k)+\cdots+A_{nk}a_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ A_{1k}a_{n1}+A_{2k}a_{n2}+\cdots+A_{nk}(a_{nn}-\alpha_k)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind homogen und haben nur dann nichttriviale, d. h. nicht sämtlich verschwindende Lösungen A_{jk}, wenn die Determinante des Systems Null ist. Die Größen α_k sind demnach die Wurzeln der „säkularen“ oder „charakteristischen“ Gleichung n-ten Grades

$$\text{(XXVI; 16)}\qquad A=\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix}=0.$$

Diese Wurzeln sind sämtlich reell und nicht negativ. Ein algebraischer Beweis dafür, daß die Gleichung (XXVI; 16) keine imaginären bzw. komplexen Wurzeln hat, ist von SYLVESTER[1]) erbracht worden, unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Matrix (a_{ij}) symmetrisch und reell ist. Für $n=2$ ist dieser Beweis sehr einfach (s. Bd. II, S. 287). Für $n>2$ genügt es zu zeigen, daß die Existenz einer imaginären Wurzel $\alpha=iy$ auf Widersprüche führen würde. Das ist übrigens auch ohne Rechnung einzusehen, wenn wir uns an die in Abschnitt 136 erzielten Ergebnisse über das säkulare Verhalten der Exzentrizitäten im System der großen Planeten erinnern. Dort wurde gezeigt, daß die Exzentrizitäten der Planetenbahnen, sofern die Planetenmassen nicht verschwindend klein sind, nicht über mäßig große Werte anwachsen können, wenn sie einmal klein gewesen sind. Die Beiträge der ξ, η, die von der Größenordnung der Exzentrizitäten sind, werden also auch im Laufe sehr langer Zeiten unterhalb gewisser ziemlich kleiner Schranken bleiben. Das schließt aber imaginäre Wurzeln iy der säkularen Gleichung aus, denn dann enthielten die Lösungen (XXVI; 13) Glieder mit $\cosh y\tau$ und $\sinh y\tau$, die mit τ rasch über alle Grenzen wachsen.

Es läßt sich aber auch direkt zeigen, daß eine Lösung $\alpha=iy$ der säkularen Gleichung nicht existieren kann. Schreibt man etwa die Lösungen des Systems (XXVI; 14, 15) in komplexer Form

$$A_{jk}=u_{jk}+iv_{jk},$$

so lauten diese Gleichungen selbst, wobei der Index k nun als überflüssig fortgelassen werden darf,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_j=\alpha A_i=iyA_i$$

---

[1]) Siehe auch G. KOWALEWSKI, Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, S. 125ff.

oder, wenn man den reellen und den imaginären Teil trennt,

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n &= -yv_i, \\ a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n &= \quad yu_i. \end{aligned}\right| \begin{matrix} \text{(I)} \\ -v_i \\ u_i \end{matrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) und summiert über alle i, so erhält man

$$\sum_i [a_{i1}(u_iv_1 - v_iu_1) + \cdots + a_{in}(u_iv_n - v_iu_n)] = y\sum_i(u_i^2 + v_i^2).$$

Die Summe links zerfällt aber in Teilsummen von der Form

$$a_{ij}(u_iv_j - v_iu_j) + a_{ji}(u_jv_i - v_ju_i),$$

die für $i = j$ und wegen der Symmetriebedingungen $a_{ij} = a_{ji}$ auch für $i \neq j$ einzeln verschwinden. Wäre also $y \neq 0$, so müßten alle u_i, v_i, also auch alle A_i, verschwinden. Das entspräche aber der trivialen Lösung von (XXVI; 15), die wir ausgeschlossen haben.

Es bleibt noch zu beweisen, daß alle $\alpha_k \geqq 0$ sind. Zu diesem Zwecke transformieren wir die Variablen ξ, η in neue Variable φ, ψ linear durch eine orthogonale Transformation

$$\text{(XXVI; 17)} \qquad \xi_i = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\varphi_k; \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\psi_k,$$

deren Koeffizienten γ_{ik} den $^1/_2\, n\,(n+1)$ Orthogonalitätsbedingungen

$$\text{(XXVI; 18)} \qquad \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\,\gamma_{il} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = l, \\ 0 & \text{für} \quad k \neq l \end{cases}$$

unterworfen sind. Zur Festlegung der n^2 Größen γ_{ik} sind also noch $^1/_2\, n(n-1)$ weitere Bedingungen nötig, die von (XXVI; 18) unabhängig sind, aber auch mit ihnen verträglich sein müssen. Solche Bedingungen stellen die Gleichungen

$$\text{(XXVI; 19)} \qquad \sum_i\sum_j a_{ij}\gamma_{il}\gamma_{jk} = \sum_i \gamma_{il}\sum_j a_{ij}\gamma_{jk} = 0, \; (k \neq l)$$

dar, deren Anzahl wegen $a_{ij} = a_{ji}$ in der Tat $^1/_2\, n(n-1)$ ist und die mit (XXVI; 18) verträglich sind, wenn, mit beliebigen Konstanten β_k,

$$\sum_j a_{ij}\gamma_{jk} = \beta_k\gamma_{ik}$$

gesetzt wird. Diese Gleichungen sind aber mit (XXVI; 14) identisch, wenn man $\beta_k = \alpha_k$ setzt, und die γ_{jk} sind dann, bis auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$, mit den A_{jk} identisch.

Der Ausdruck (XXVI; 19) ergibt dann für $k = l$

$$\text{(XXVI; 20)} \qquad \sum_i\sum_j a_{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jk} = \sum_i \gamma_{ik}\sum_j a_{ij}\gamma_{jk} = \alpha_k\sum_i \gamma_{ik}^2 = \alpha_k,$$

da wegen (XXVI; 18) $\sum_i \gamma_{ik}^2 = 1$ ist. Die Transformation (XXVI; 17) liefert dann für die ξ_i

$$\sum_i \sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}\varphi_k\varphi_l =$$

$$= \sum_k \sum_l \left(\sum_i \sum_j a_{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}\right)\varphi_k\varphi_l =$$

$$= \sum_k \left(\sum_i \sum_j a_{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jk}\right)\varphi_k{}^2 = \sum_k \alpha_k\varphi_k{}^2$$

wegen (XXV; 19, 20). Ebenso erhält man

$$\sum_i \sum_j a_{ij}\eta_i\eta_j = \sum_k \alpha_k\psi_k{}^2,$$

und es folgt aus der ersten Gleichung (XXVI; 12)

$$[U] = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij}(\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j) = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k\,(\varphi_k{}^2 + \psi_k{}^2).$$

Da aber $[U] > 0$ ist, folgt, daß alle $\alpha_k \geqq 0$ sein müssen, da sonst für geeignet gewählte Werte der Variablen φ, ψ auch $[U] < 0$ sein könnte, was nach Abschnitt 219 ausgeschlossen ist. Im allgemeinen, so auch im System der großen Planeten, sind alle $\alpha_k > 0$. Der Fall, daß das eine oder andere α_k verschwindet, ist möglich, aber nur unter besonderen Bedingungen, die hier nicht erörtert werden sollen. Im Fall $n = 2$ haben wir (Bd. II, S. 287 f.) bewiesen, daß beide α positiv und verschieden voneinander sind, falls die mittleren Bewegungen der beiden Planeten im gleichen Sinne verlaufen, was auch bei den obigen Überlegungen stillschweigend vorausgesetzt wurde.

Die ersten beiden Gleichungen (XXVI; 8) haben übrigens das Integral

$$[U] = \text{const}, \tag{XXVI; 21}$$

da $[U]$ nur von den Variablen ξ, η abhängt und die Zeit nicht explizite enthält. Aus (XXVI; 12) und (XXVI; 21) folgt aber, daß

$$[U] = [U_0] = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij}(\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j)_{(\tau=0)},$$

d. h. gleich dem Wert ist, den diese Größe für $t = t_0$ annimmt. Da die a_{ij} beschränkt und von der Ordnung der störenden Massen sind, die $\xi_i(0)$, $\eta_i(0)$ nach Voraussetzung aber kleine Größen darstellen, so folgt, daß die Exzentrizitäten auch über sehr lange Zeiten beschränkt bleiben. Damit werden die in Abschnitt 136 auf anderem Wege erzielten Ergebnisse über die Stabilität der Planetenbahnen bestätigt, und zwar unabhängig von dem säkularen Verhalten der Bahnneigungen. Natürlich gilt diese Schlußfolgerung nur unter den einschränkenden Bemerkungen, die wir im Abschnitt 219 bei der Formulierung des Problems gemacht haben.

221. Säkulare Störungen der Neigungen und Knotenlängen

Alle Überlegungen des vorigen Abschnitts lassen sich auch auf die Lösungen der Differentialgleichungen (XXVI; 10b) für die Größen

$$p_i = \frac{h_i}{\sqrt{L_i}}; \qquad q_i = -\frac{k_i}{\sqrt{L_i}}$$

übertragen. Diese Gleichungen haben die allgemeinen Lösungen

$$\text{(XXVI; 22)} \qquad p_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \cos(\beta_k \tau + \delta_k); \qquad q_i = -\sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sin(\beta_k \tau + \delta_k),$$

und die Koeffizienten B_{ik} folgen, bis auf gemeinsame Faktoren, aus den homogenen Gleichungssystemen ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\begin{aligned}
&B_{1k}(b_{11} - \beta_k) + B_{2k} b_{12} \qquad + \cdots + B_{nk} b_{1n} = 0,\\
&B_{1k} b_{21} \qquad + B_{2k}(b_{22} - \beta_k) + \cdots + B_{nk} b_{2n} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_{1k} b_{n1} \qquad + B_{2k} b_{n2} \qquad + \cdots + B_{nk}(b_{nn} - \beta_k) = 0,
\end{aligned}$$

wobei die β_k die n Wurzeln der säkularen Gleichung

$$\text{(XXVI; 23)} \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} - \beta & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \beta & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} - \beta \end{vmatrix} = 0$$

sind. Für die b_{ij} gilt, wie aus (XXVI; 11) folgt,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0,$$

so daß die Determinante $|b_{ij}|$ verschwindet. Schreiben wir also $B = 0$ in der Form

$$\beta^n + c_1 \beta^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\beta + c_n = 0,$$

so ist $c_n = |b_{ij}| = 0$. Andererseits ist aber $c_n = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$. Es folgt daher, daß mindestens eine der n Wurzeln β_k Null ist. Die allgemeine Lösung (XXVI; 22) enthält also mindestens ein konstantes Glied. Da

$$[V] = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij}(p_i p_j + q_i q_j)$$

wesentlich negativ ist, werden alle β_k, soweit sie nicht verschwinden, negativ sein. Der Beweis wird genauso geführt, wie der im vorigen Abschnitt für $\alpha_k \geqq 0$.

Das System (XXVI; 10b) besitzt das Integral

$$[V] = \text{const}.$$

Daraus folgt, daß die Bahnneigungen für lange Zeiten beschränkt bleiben, wenn sie für die Ausgangsepoche $t = t_0$ klein gewesen sind.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß für $n = 2$, unter den hier vorausgesetzten Einschränkungen, die gegenseitige Neigung J der beiden Planetenbahnebenen konstant bleibt. Aus (XXIII; 28),

$$\cos J = 1 - 2\sin^2\frac{J}{2} = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1),$$

folgt nämlich

$$4\sin^2\frac{J}{2} = 2(1 - \cos i_1 \cos i_2) - 2\sin i_1 \sin i_2 (\cos\Omega_1 \cos\Omega_2 + \sin\Omega_1 \sin\Omega_2).$$

Schreibt man, wie in (XVI; 39), unter Vernachlässigung von Termen vierter Ordnung in den Neigungen und Exzentrizitäten,

$$h \approx \sin i \cos\Omega; \quad k = \sin i \sin\Omega,$$

$$1 - \cos i_1 \cos i_2 \approx 2\left(\sin^2\frac{i_1}{2} + \sin^2\frac{i_2}{2}\right) \approx \frac{1}{2}(\sin^2 i_1 + \sin^2 i_2),$$

so erhält man

$$4\sin^2\frac{J}{2} = h_1^2 + h_2^2 + k_1^2 + k_2^2 - 2(h_1h_2 + k_1k_2) = (h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2.$$

Für $n = 2$ ist aber, wie man aus (XXVI; 11, 12) leicht ableitet,

$$[V] = -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 B_2(a_1, a_2)\,[(h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2],$$

und dieser Ausdruck ist, wie oben bewiesen, konstant. Daher ist auch J konstant.

222. Lösung der säkularen Gleichung

Die Bestimmung der Größen A_{ik}, B_{ik}, γ_k, δ_k, die in den allgemeinen Lösungen der säkularen Differentialgleichungen als Funktionen der Integrationskonstanten des Problems (etwa der $4n$ Anfangswerte e_i, $\tilde{\omega}_i$, i_i, Ω_i für die Epoche $t = t_0$) auftreten, geschieht in derselben Weise wie im Falle $n = 2$, für den dies in Abschnitt 140 gezeigt worden ist. Der Leser wird diesen Algorithmus

ohne Schwierigkeit auf $n > 2$ ausdehnen können, auch findet er ihn in den meisten Lehrbüchern[1]) ausführlich dargestellt.

Größere Schwierigkeiten bereitet die Lösung der säkularen Gleichungen (XXVI; 16 bzw. 23), die der Berechnung der Koeffizienten vorangehen muß. Für $n = 2$, allenfalls noch für $n = 3$, ist sie mit einfachen algebraischen Methoden möglich. Bei der wichtigsten praktischen Anwendung, der Berechnung der säkularen Störungen der großen Planeten, ist jedoch $n = 8$ oder, wenn man auch Pluto einbezieht, $n = 9$. Die Arbeit, die Koeffizienten der Gleichung 8. bzw. 9. Grades für α bzw. β aus den Elementen der Matrizen (a_{ij}) und (b_{ij}) zu berechnen, ist äußerst verwickelt und ohne das moderne Hilfsmittel elektronischer Computer kaum zu bewältigen. Man hat daher schon frühzeitig nach Methoden gesucht, auf dem Wege eines genügend rasch konvergenten Näherungsverfahrens schneller und weniger mühsam zum Ziele zu gelangen. Eine geniale Methode dieser Art stammt von JACOBI[2]). Es genügt hier, sie für die säkulare Gleichung (XXVI; 16) zu beschreiben. Sie beruht auf dem im Abschnitt 220 verwendeten Prinzip, die HAMILTONsche Funktion $[U]$ durch eine orthogonale Transformation in die einfachere Form

$$[U] = \frac{1}{2}\sum_k a_{kk}^*(\varphi_k^2 + \psi_k^2)$$

überzuführen. Die Differentialgleichungen nehmen dann die Gestalt

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial[U]}{\partial\psi_i} = a_{ii}^*\psi_i, \qquad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial[U]}{\partial\varphi_i} = -a_{ii}^*\varphi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

an und zerfallen daher in n unabhängige Systeme mit den allgemeinen Lösungen

$$\varphi_i = A_i \cos(\alpha_i\tau + \gamma_i); \quad \psi_i = -A_i \sin(\alpha_i\tau + \gamma_i),$$

und es ist dann $\alpha_i = a_{ii}^*$. Die säkulare Gleichung degeneriert dann in

$$\text{(XXVI; 24)} \qquad \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}^* - \alpha) = \begin{vmatrix} a_{11}^* - \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^* - \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^* - \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

also in eine verschwindende Determinante, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind. Leider setzt die Transformation der ξ_i, η_i in die φ_i, ψ_i bereits die Kenntnis der α_i voraus, so daß die Umformung der Gleichung (XXVI; 16) in (XXVI; 24) ein von dieser Kenntnis unabhängiges

---

[1]) Siehe z. B. D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Methods of celestial mechanics. New York 1961, S. 519ff.

[2]) C. G. JACOBI, Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommende Gleichung numerisch aufzulösen. Crelles J. reine angew. Math. *30*, 51 (1846).

Verfahren erfordert. JACOBI löst dieses Problem, indem er versucht, durch eine Folge von orthogonalen Transformationen die Beträge der außerhalb der Diagonale stehenden Elemente a_{ij} nach und nach zu verkleinern bzw. verschwinden zu lassen. Das gelingt folgendermaßen:

Wir betrachten das lineare System (XXVI; 15), in dem wir den jetzt überflüssigen Index k fortlassen. Es sei nun $a_{rs} = a_{sr}$ $(r \neq s)$ das dem Betrage nach größte Element außerhalb der Hauptdiagonale der Matrix (a_{ij}). Man multipliziere die r-te und die s-te Zeile des Systems,

$$\begin{array}{l|c|c} & \text{(I)} & \text{(II)} \\ A_1 a_{r1} + \cdots + A_r(a_{rr} - \alpha) + \cdots + A_s a_{rs} + \cdots + A_n a_{rn} = 0, & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ A_1 a_{s1} + \cdots + A_r a_{sr} + \cdots + A_s(a_{ss} - \alpha) + \cdots + A_n a_{sn} = 0, & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{array}$$

mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiere die Produkte, wobei ϑ ein noch geeignet zu bestimmender Winkel sei. Dann erhält man

$$\text{(XXVI; 25)} \quad \begin{cases} A_r[(a_{rr} - \alpha)\cos\vartheta + a_{sr}\sin\vartheta] + A_s[a_{rs}\cos\vartheta + (a_{ss} - \alpha)\sin\vartheta] + \\ \qquad + \sum_{j \neq r,s} A_j(a_{rj}\cos\vartheta + a_{sj}\sin\vartheta) = 0, \\ A_r[-(a_{rr} - \alpha)\sin\vartheta + a_{sr}\cos\vartheta] + A_s[-a_{rs}\sin\vartheta + (a_{ss} - \alpha)\cos\vartheta] + \\ \qquad + \sum_{j \neq r,s} A_j(-a_{rj}\sin\vartheta + a_{sj}\cos\vartheta] = 0. \end{cases}$$

Nun vertausche man die A_j mit neuen Größen A_j^* mittels der Transformation

$$\text{(XXVI; 26)} \quad \begin{cases} A_r = A_r^*\cos\vartheta - A_s^*\sin\vartheta; \quad A_s = A_r^*\sin\vartheta + A_s^*\cos\vartheta, \\ A_j = A_j^* \quad \text{für} \quad j \neq r, s. \end{cases}$$

Dann verwandeln sich die ersten beiden Terme der beiden Gleichungen (XXVI; 25) in

$$A_r^*(a_{rr}^* - \alpha) + A_s^* a_{rs}^*; \quad A_r^* a_{sr}^* + A_s^*(a_{ss}^* - \alpha),$$

wenn man

$$\text{(XXVI; 27)} \quad \begin{cases} a_{rr}^* = a_{rr}\cos^2\vartheta + a_{ss}\sin^2\vartheta + 2a_{rs}\cos\vartheta\sin\vartheta, \\ a_{ss}^* = a_{rr}\sin^2\vartheta + a_{ss}\cos^2\vartheta - 2a_{rs}\cos\vartheta\sin\vartheta, \\ a_{rs}^* = a_{sr}^* = -(a_{rr} - a_{ss})\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{rs}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{cases}$$

setzt. Verfügt man nun über ϑ so, daß

$$\text{(XXVI; 27a)} \qquad \tan 2\vartheta = \frac{2a_{rs}}{a_{rr} - a_{ss}}$$

ist, so wird $a_{rs}^* = a_{sr}^* = 0$. Führt man ferner für $j \neq r, s$ die Definitionen

$$\text{(XXVI; 28)} \quad \begin{cases} a_{rj}^* = a_{rj}\cos\vartheta + a_{sj}\sin\vartheta, \\ a_{sj}^* = -a_{rj}\sin\vartheta + a_{sj}\cos\vartheta \end{cases}$$

ein, so erhalten die beiden Zeilen $i = r, s$ die neue Form

$$A_1{}^*a_{r1}^* + \cdots + A_r{}^*(a_{rr}^* - \alpha) + \cdots + (0) \qquad + \cdots + A_n{}^*a_{rn}^* = 0,$$

$$A_1{}^*a_{s1}^* + \cdots + (0) \qquad + \cdots + A_s{}^*(a_{ss}^* - \alpha) + \cdots + A_n{}^*a_{sn}^* = 0,$$

in der die verschwindenden Terme mit a_{rs}^* und a_{sr}^* durch das Symbol (0) angedeutet sind. In den übrigen $n - 2$ Zeilen ($i \neq r, s$) dürfen wir in den Spalten $j \neq r, s$, wie in (XXVI; 26), $A_j = A_j{}^*$, aber auch $a_{ij} = a_{ij}^*$ setzen, da diese Elemente der Matrix (a_{ij}) von den Transformationen (XXVI; 28) nicht betroffen werden, es sich also nur um eine Änderung der Bezeichnungen handelt. Das gilt aber nicht für die Elemente der r-ten und der s-ten Spalte, da die Koeffizienten A_r und A_s den Transformationen (XXVI; 26) unterworfen sind. Dagegen läßt sich zeigen, daß man die Summen

$$A_r a_{ir} + A_s a_{is} = A_r{}^* a_{ir}^* + A_s{}^* a_{is}^*$$

schreiben darf, wenn man $a_{ir}^* = a_{ri}^*$, $a_{is}^* = a_{si}^*$ wie in (XXVI; 28) definiert, denn diese Beziehung folgt, wenn man A_r, A_s durch (XXVI; 26) ausdrückt und nach (XXVI; 28)

$$a_{ri} = a_{ri}^* \cos\vartheta - a_{si}^* \sin\vartheta, \quad a_{si} = a_{ri}^* \sin\vartheta + a_{si}^* \cos\vartheta$$

schreibt.

Damit ist gezeigt, daß das System (XXVI; 15) in ein neues übergeht, in dem alle A_j, a_{ij} durch $A_j{}^*, a_{ij}^*$ ersetzt worden sind und in dessen säkularer Gleichung die Elemente $a_{rs}^* = a_{sr}^* = 0$ fehlen. Die neue Matrix (a_{ij}^*) ist symmetrisch wie die alte, und man kann dieses Verfahren nun wiederholen, indem man das Element $a_{ij}^* = a_{ji}^*$ mit dem größten Betrage mittels eines neuen Hilfswinkels ϑ^* zum Verschwinden bringt. Dabei wird aber das Element $a_{rs}^* = a_{sr}^*$ nur dann Null bleiben, sofern das neu zu tilgende Element nicht in die Zeilen bzw. Spalten r oder s fällt. Andernfalls wird nach der Transformation an der Stelle r, s wiederum ein von Null verschiedenes Element erscheinen. Wohl aber wird man erreichen, daß nach jeder weiteren Transformation die Quadratsumme aller Elemente außerhalb der Hauptdiagonale kleiner wird, so daß nach endlich vielen Schritten diese Quadratsumme unter eine vorgegebene Schranke fällt. Dann wird schließlich die säkulare Gleichung die angestrebte Form

$$\prod_{k=1}^{n} (a_{kk} - \alpha) = 0$$

mit genügender Genauigkeit erreichen, und ihre Wurzeln sind dann

$$\alpha_k = a_{kk},$$

wenn wir die nach allen orthogonalen Transformationen resultierenden Elemente wieder mit a_{ij} bezeichnen und bedenken, daß diese Größen für $i \neq j$ praktisch verschwinden.

Daß die Summe $\sum_{j \neq i} a_{ij}^2$ mit jedem Schritt abnimmt, läßt sich leicht zeigen. Nach (XXVI; 28) ist nämlich

$$a_{rj}^{*2} + a_{sj}^{*2} = a_{rj}^2 + a_{sj}^2 \quad \text{für} \quad j \neq r, s,$$

aber $a_{rs}^* = a_{sr}^* = 0$, während für alle übrigen Elemente $a_{ij}^* = a_{ij}$ gilt, so daß

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - 2a_{rs}^2$$

folgt. Andererseits ist die Quadratsumme der Diagonalglieder nach der Transformation

$$\sum_i a_{ii}^{*2} = \sum_{j \neq r,s} a_{jj}^{*2} + a_{rr}^{*2} + a_{ss}^{*2} = \sum_{j \neq r,s} a_{jj}^2 + a_{rr}^{*2} + a_{ss}^{*2}.$$

Da aber wegen (XXVI; 27 und 27a)

$$\begin{aligned} a_{rr}^* + a_{ss}^* &= a_{rr} + a_{ss}, \\ a_{rr}^* - a_{ss}^* &= (a_{rr} - a_{ss}) \cos 2\vartheta + 2a_{rs} \sin 2\vartheta = \\ &= (a_{rr} - a_{ss}) \left(\cos 2\vartheta + \frac{\sin^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} \right) = \frac{a_{rr} - a_{ss}}{\cos 2\vartheta} = \frac{2a_{rs}}{\sin 2\vartheta}, \end{aligned}$$

so erhält man durch Quadrieren und Addieren

$$\begin{aligned} 2(a_{rr}^{*2} + a_{ss}^{*2}) &= (a_{rr}^* + a_{ss}^*)^2 + (a_{rr}^* - a_{ss}^*)^2 (\cos^2 2\vartheta + \sin^2 2\vartheta) = \\ &= (a_{rr} + a_{ss})^2 + (a_{rr} - a_{ss})^2 + 4a_{rs}^2 = 2(a_{rr}^2 + a_{ss}^2) + 4a_{rs}^2, \end{aligned}$$

also

$$a_{rr}^{*2} + a_{ss}^{*2} = a_{rr}^2 + a_{ss}^2 + 2a_{rs}^2.$$

Die Quadratsumme der Diagonalglieder wird also um den gleichen Betrag vergrößert, um den die Quadratsumme der übrigen Glieder abnimmt.

Über die Güte der Konvergenz dieses Verfahrens ist damit noch nichts ausgesagt. Strenggenommen wird man erst nach unendlich vielen Transformationen alle a_{ij} außerhalb der Hauptdiagonale zum Verschwinden bringen. Es gelingt aber stets, nach endlich vielen Schritten ihre Beträge so zu verkleinern, daß sie alle unterhalb einer vorgegebenen Schranke liegen. Nach den Untersuchungen von JACOBI hatte das größte dieser Elemente der Matrix (A) für die acht großen Planeten den Wert -7.5, und es gelang ihm, nach zehn Transformationen die Beträge aller a_{ij} unter 0.3 herabzudrücken. P. HARZER[1]), der in seiner preisgekrönten Arbeit über die säkularen Störungen der großen Planeten die JACOBIsche Methode ebenfalls benutzt hat, erreichte nach vierundzwanzig Schritten, daß sämtliche Beträge < 0.01, die meisten aber sehr viel kleiner waren.

---

[1]) P. HARZER, Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten. Leipzig 1895.

Ist die Reduktion der säkularen Gleichung weit genug vorgeschritten, so läßt sich die genaue Lösung der säkularen Gleichung durch ein rasch konvergierendes Näherungsverfahren bestimmen. In dem genügend reduzierten Gleichungssystem (XXVI; 15),

$$A_{ik}(a_{ii} - \alpha_k) + \sum_{j \neq i} A_{jk} a_{ij} = 0, \tag{XXVI; 29}$$

in dem wir die a_{ij} und die Koeffizienten A_{jk} nun wieder ohne Stern schreiben, sei α_k eine der n Wurzeln der säkularen Gleichung, und es seien alle a_{ij} außerhalb der Hauptdiagonale kleine Größen erster Ordnung gegen die Diagonalelemente a_{ii} und die Differenzen $a_{ii} - a_{jj}$. Über die A_{jk} (bzw. deren Verhältnisse, da sie ja nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmbar sind), die sich nach jeder Transformation ändern, kann erst etwas ausgesagt werden, wenn die Wurzeln α_k schon vorliegen. Bei dem oben beschriebenen Verfahren kommen sie aber nur als Symbole vor und brauchen nicht numerisch bekannt zu sein. Wesentlich ist nur, daß alle Transformationen orthogonal sind und daß daher auch das A_{jk}-System, das aus den genügend reduzierten Gleichungen (XXVI; 15) nach endgültiger Bestimmung der α_k berechenbar ist, aus dem ursprünglichen System durch eine orthogonale Transformation bzw. durch eine Folge solcher Transformationen hervorgeht. Es läßt sich aber durch eine einfache Überlegung zeigen, welchen Grenzwerten die Folge der Verhältnisse der A_{jk} im Laufe dieses Prozesses zustrebt.

Dividiert man die Gleichungen (XXVI; 29) durch A_{kk} und setzt

$$\beta_{ik} = \frac{A_{ik}}{A_{kk}},$$

so erhält man

$$\beta_{ik}(a_{ii} - \alpha_k) + \sum_{j \neq i} \beta_{jk} a_{ij} = 0, \quad (i \neq k),$$

$$\beta_{kk}(a_{kk} - \alpha_k) + \sum_{j \neq k} \beta_{jk} a_{kj} = 0, \quad (i = k).$$

Wegen $\beta_{kk} = 1$ kann man daher

$$\text{(XXVI; 30)} \qquad \begin{cases} \beta_{ik} = \dfrac{1}{\alpha_k - a_{ii}} \left(a_{ik} + \sum\limits_{j \neq i,k} \beta_{jk} a_{ij} \right), \\ \alpha_k = a_{kk} + \sum\limits_{j \neq k} \beta_{jk} a_{kj} \end{cases}$$

schreiben. Diese Gleichungen zeigen, daß die β_{ik} Größen erster Ordnung sind und daß die α_k von den a_{kk} infolgedessen um Größen zweiter Ordnung abweichen. Man kann also bis auf Abweichungen zweiter Ordnung

$$\alpha_k = a_{kk}; \qquad \beta_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk} - a_{ii}}$$

setzen und, ausgehend von diesen Näherungen, die α_k, β_{ik} mit Hilfe der Formeln (XXVI; 30) iterativ verbessern, bis sie sich nicht mehr ändern.

P. HARZER gelang es loc. cit. schon nach der dritten Iteration, endgültige, d. h. einer siebenstelligen Rechengenauigkeit genügende Werte für diese Größen zu erzielen.

223. Das Gaußsche Theorem

GAUSS[1]) hat folgenden merkwürdigen Satz über die Kräfte bewiesen, durch die ein Planet säkulare Störungen der Bahn eines anderen Planeten hervorruft:

Man stelle sich vor, daß die Masse m' des störenden Planeten P' längs seiner Bahn (die man genähert als einen unendlich dünnen Faden von elliptischer Gestalt ansehen kann) so verteilt sei, daß die Massendichte, d. h. die auf ein Linienelement ds' entfallende Masse dm', der Zeit proportional sei, die der Planet braucht, um die Strecke ds' zurückzulegen. Dann werden die säkularen Störungen der Bewegung des gestörten Planeten P durch die von diesem mit Masse belegten Faden ausgehende Gravitationskraft hervorgerufen.

Sofern nur Störungen erster Ordnung in m' berücksichtigt werden, stellt dieser Massefaden eine geschlossene Kurve von unveränderlicher Gestalt dar, die in einem heliozentrischen Koordinatensystem ein unveränderliches Potentialfeld erzeugt. Die Aufgabe der Berechnung säkularer Störungen ist damit auf ein neues Prinzip zurückgeführt, das — anders als die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Methode — die Kleinheit der Exzentrizitäten und Neigungen nicht voraussetzt. G. H. HALPHEN[2]) hat dieses Theorem benutzt, um eine Theorie der säkularen Störungen aufzubauen, deren Anwendbarkeit weit über die der oben dargestellten Methoden hinausgeht. In neuerer Zeit hat P. MUSEN[3]) die von HALPHEN entwickelte und von GORJAČEV[4]) verbesserte Methode auf eine für die Verwendung elektronischer Computer geeignete Form gebracht.

Zur Erläuterung und zum Beweis des GAUSSschen Theorems gehen wir von den Differentialgleichungen (XVIII; 52a) aus, denen die gestörten Bahnelemente des Planeten P genügen:

$$\text{(XXVI; 31)} \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{n\cos\varphi}\left[S\sin\varphi\sin v + T\dfrac{p}{r}\right], \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{na}\left[S\sin v + T\,(\cos v\cos E)\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

---

[1]) C. F. GAUSS, Werke Bd. 3. 1818, S. 331ff.

[2]) G. H. HALPHEN, Traité des fonctions elliptiques, Bd. 2. Paris 1888.

[3]) P. MUSEN, A discussion of HALPHEN's method of secular perturbations and its application to the long-range effects in the motion of celestial bodies. Rev. Geophysics *1*, 85 (1963).

[4]) N. N. GORJAČEV, (Über die HALPHENsche Methode der Berechnung säkularer Störungen). Trudy Univ. Tomsk (1937) (russ.).

Hierin sind

(XXVI; 32) $$S = m'S'; \quad T = m'T'; \quad W = m'W'$$

die der störenden Masse proportionalen Koordinaten der störenden Kraft in einem „begleitenden" Koordinatensystem, und zwar bezieht sich

S auf die Richtung des Ortsvektors von P,
T auf die in der Oskulationsebene zum Ortsvektor senkrechte Richtung im Sinne der Planetenbewegung,
W auf die Richtung der Normale der Bahnebene.

Die W-Richtung zeigt für rechtläufige Planeten in den nördlichen Teil der Himmelskugel, so daß STW ein Rechtssystem ist. Die Einheiten sind so gewählt, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist. Dann ist die mittlere Bewegung des gestörten Planeten $n = \sqrt{1 + m}\, a^{-3/2}$.

In den Ausdrücken auf den rechten Seiten der Gleichungen (XXVI; 31) lassen sich die wahre Anomalie v und die exzentrische Anomalie E in Reihen entwickeln, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie ζ fortschreiten. Ebenso sind S, T und W als Funktionen von ζ und ζ' darstellbar, wenn ζ' die mittlere Anomalie von P' bezeichnet.

Ist also σ irgendeines der sechs oskulierenden Bahnelemente von P, so kann man formal

(XXVI; 33) $$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma_{00} + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \cos\,(i\zeta + j\zeta' + \delta_{ij})$$

schreiben, wo i, j alle ganzen positiven und negativen Zahlen durchlaufen und σ_{ij}, δ_{ij} Funktionen der Bahnelemente σ und σ' und in erster Näherung konstant sind. Nur der nichtperiodische Term mit $i = j = 0$ ist gesondert hingeschrieben, so daß die Summe nur periodische Glieder enthält. Die Integrale von (XXVI; 33) lauten — siehe auch (XVI; 15) —

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{00}t + \text{periodische Glieder},$$

solange man σ_{00} als konstant ansehen darf und vorausgesetzt, daß keine Terme mit $in + jn' = 0$ oder ≈ 0 vorhanden sind, was wir vorläufig ausschließen wollen. Man wird dann das säkulare Störungsglied σ_{00} erhalten, indem man (XXVI; 33) über ζ und ζ' zwischen 0 und 2π integriert, da dann alle periodischen Terme durch „Glättung" herausfallen. Es ist dann

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{dt}\, d\zeta d\zeta' = 4\pi^2\sigma_{00}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S d\zeta' = S_0; \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T d\zeta' = T_0; \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W d\zeta' = W_0,$$

so erhält man

$$\text{(XXVI; 34)}\qquad \begin{cases} a_{00} = \dfrac{1}{\pi n \cos\varphi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[S_0 \sin\varphi \sin v + T_0 \frac{p}{r}\right] d\zeta, \\ \varphi_{00} = \dfrac{1}{2\pi n a}\displaystyle\int_0^{2\pi}[S_0 \sin v + T_0 (\cos v + \cos E)]\, d\zeta, \\ \cdots\cdots\cdots\

man durch numerische Ausführung der Integrale (XXVI; 34) die Konstanten $a_{00} = 0, \varphi_{00}, \ldots$ der säkularen Elementenstörungen.

Einfacher und bequemer wird dieses Verfahren, wenn man statt der mittleren Anomalie ζ und der wahren Anomalie v die exzentrische Anomalie E als einzige unabhängige Variable einführt. Dann ist

$$r\cos v = a(\cos E - e); \qquad E - e\sin E = \zeta; \qquad d\zeta = \frac{r}{a}\,dE,$$

$$r\sin v = a\cos\varphi\sin E; \qquad u = \omega + v,$$

$$r = a(1 - e\cos E); \qquad \tilde{\omega} = \omega + \Omega,$$

$$e = \sin\varphi; \qquad \sqrt{1-e^2} = \cos\varphi; \qquad p = a\cos^2\varphi,$$

und man erhält aus (XVIII; 52a) für die Differentialgleichungen der säkularen Elementenstörungen nach einfacher Reduktion

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}(S_0\sin\varphi\sin E + T_0\cos\varphi)\,dE = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\pi n a}\int_0^{2\pi}\left[S_0\cos\varphi\sin E + T_0\left\{2\cos E - \frac{1}{2}\sin\varphi(3+\cos 2E)\right\}\right]dE,$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos\varphi}{2\pi n a}\int_0^{2\pi} W_0\frac{r}{p}\left[\cos\omega\,(\cos E - e) - \sin\omega\cos\varphi\sin E\right]dE,$$

$$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\cos\varphi}{2\pi n a}\int_0^{2\pi} W_0\frac{r}{p}\left[\sin\omega\,(\cos E - e) + \cos\omega\cos\varphi\sin E\right]dE,$$

$$\sin\varphi\,\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\cos\varphi}{2\pi n a}\int_0^{2\pi}\left[-S_0\,(\cos E - e) + T_0\left(\frac{r}{p}+1\right)\cos\varphi\sin E + \right.$$

$$\left. + W_0\frac{r}{p}\sin\varphi\tan\frac{i}{2}\left\{\sin\omega\,(\cos E - e) + \cos\omega\cos\varphi\sin E\right\}\right]dE,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varphi\,\frac{d\Omega}{dt} - \frac{1}{\pi n a}\int_0^{2\pi} S_0\frac{r^2}{a^2}\,dE.$$

Meist genügt es, die Integranden für N äquidistante über das Intervall 0 bis 2π verteilte Werte von E zu berechnen. Dann ist genähert

$$\int_0^{2\pi} f(E)\,dE \approx \frac{2\pi}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right).$$

Dieser Ausdruck weicht von dem exakten Wert des Integrals um so weniger ab, je größer N gewählt wird. Im allgemeinen reicht es aus, $N = 12$ zu setzen, also die Integranden für $E = 0°, 30°, 60°, \ldots, 330°$ zu berechnen.

224. Die Theorie von Halphen

Die größte Schwierigkeit bei der Anwendung des Gaussschen Theorems zur Berechnung säkularer Elementenstörungen liegt in der analytischen Darstellung der Koordinaten (XXVI; 35) der störenden Kraft oder entsprechender Koordinaten in irgendeinem anderen System, aus denen die Größen S_0, T_0, W_0 durch orthogonale Transformation berechnet werden können.

Wir legen den folgenden Betrachtungen ein rechtwinkliges, durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ definiertes Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung im Ort des gestörten Planeten P zur Zeit t liege. Zur gleichen Zeit sei

$$\mathfrak{p}_0 = x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k}$$

der Ort der Sonne P_0 und

$$\mathfrak{p}' = x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}$$

der Ort eines beliebigen Punktes der Bahn des Störplaneten P'. Ferner sei $d\mathfrak{p}'(dx', dy', dz')$ ein unendlich kleines Linienelement an der Stelle $\mathfrak{p}'$ der Bahn von P', dem die Bewegungsrichtung von P' zugeteilt und das mit der Masse dm' belegt sei. Schließlich sei dt die Zeit, in der sich P' längs des infinitesimalen Vektors $d\mathfrak{p}'$ bewegt. Bezeichnet man nun mit dJ' den Flächeninhalt des Sektors der Bahnebene von P', dessen Spitze in P_0 liegt und der $d\mathfrak{p}'$ zur Basis hat, dann ist nach dem Flächensatz, wenn a', b' die Halbachsen der Bahnellipse sind, und nach dem Gaussschen Theorem

$$\frac{dJ'}{a'b'\pi} = \frac{dt}{T'} = \frac{dm'}{m'}.$$

Die Kraft, die von dem Massenelement dm' auf P ausgeübt wird, ist dann, wenn $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ den Abstand PP' bezeichnet,

$$d\mathfrak{R} = dm' \frac{\mathfrak{p}'}{r'^3} = m' \frac{dJ'}{a'b'\pi} \frac{\mathfrak{p}'}{r'^3}. \tag{XXVI; 36}$$

Nun ist der Inhalt des Tetraeders, das von den vier Punkten 0, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}' + d\mathfrak{p}'$ gebildet wird,

$$V = \frac{1}{3} h dJ',$$

wenn h der Abstand des Planeten P von der Bahnebene des Störplaneten ist. Andererseits ist aber

$$V = \frac{1}{6} |\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}' + d\mathfrak{p}'| = \frac{1}{6} (\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}', d\mathfrak{p}') = \frac{1}{6} (\mathfrak{p}_0 [\mathfrak{p}' d\mathfrak{p}']),$$

wenn wir, wie üblich, das gemischte Produkt dreier Vektoren mit $(\mathfrak{abc}) = (\mathfrak{a}[\mathfrak{bc}])$ bezeichnen. Man erhält dann

$$d\mathfrak{J}' = \frac{1}{2h}(\mathfrak{p}_0[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}']),$$

also wegen (XXVI; 36)

$$d\mathfrak{K} = \frac{m'}{2\pi a'b'h}(\mathfrak{p}_0[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}'])\frac{\mathfrak{p}'}{r'^3},$$

und wenn man über den ganzen Massefaden integriert,

$$\mathfrak{K} = \frac{m'}{2\pi a'b'h}\oint(\mathfrak{p}_0[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}'])\frac{\mathfrak{p}'}{r'^3}.$$

Nun ist aber nach (XXIV; 37, 38)

$$\Phi\mathfrak{p}_0 = \oint\left(\frac{\mathfrak{p}'}{r'^3}\cdot[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}']\right)\mathfrak{p}_0 = \oint(\mathfrak{p}_0[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}'])\frac{\mathfrak{p}'}{r'^3},$$

wenn

$$\Phi = \oint\left(\frac{\mathfrak{p}'}{r'^3}\cdot[\mathfrak{p}'d\mathfrak{p}']\right)$$

eine Dyade mit der Matrix (α_{ik}) bedeutet, deren Elemente $\alpha_{ik} = \oint\beta_i\gamma_k$ durch die neun Produkte $\beta\gamma$ aus

$$\text{(XXVI; 37)}\quad \begin{cases} \beta_1 = x'r'^{-3}; \quad \beta_2 = y'r'^{-3}; \quad \beta_3 = z'r'^{-3}, \\ \gamma_1 = y'dz' - z'dy'; \quad \gamma_2 = z'dx' - x'dz'; \quad \gamma_3 = x'dy' - y'dx' \end{cases}$$

dargestellt werden. Es ergibt sich dann

$$\mathfrak{K} = \frac{m'}{2\pi a'b'h}\Phi\mathfrak{p}_0 = \frac{m'}{2\pi a'b'h}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten von $\mathfrak{K}$ lauten

$$\text{(XXVI; 38)}\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = \dfrac{m'}{2\pi a'b'h}(\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13}z_0), \\ \mathfrak{K}_y = \dfrac{m'}{2\pi a'b'h}(\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23}z_0), \\ \mathfrak{K}_z = \dfrac{m'}{2\pi a'b'h}(\alpha_{31}x_0 + \alpha_{32}y_0 + \alpha_{33}z_0). \end{cases}$$

Setzt man schließlich

$$\mathfrak{p}' = r'\mathfrak{q}',$$

wenn $\mathfrak{q}'$ den Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{p}'$ bezeichnet, so nimmt Φ die einfachere Form

$$\Phi = \oint (\mathfrak{q} \cdot [\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}'])$$

an.

Der Operator Φ hat die Eigenschaft, daß sein Skalar Φ_s und sein Vektor Φ_v (s. Abschnitt 211) verschwinden, d. h., es ist

(XXVI; 39a) $$\Phi_s = \oint (\mathfrak{q}'\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}') = 0,$$

(XXVI; 39b) $$\Phi_v = \oint [\mathfrak{q}'[\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}']] = 0.$$

Die Richtigkeit der ersten Formel ist unmittelbar einzusehen, da der Integrand identisch verschwindet. Zum Beweise der zweiten setzen wir

$$[\mathfrak{q}'[\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}']] = (\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}')\mathfrak{q}' - (\mathfrak{q}'\mathfrak{q}') d\mathfrak{q}'.$$

Nun ist aber $(\mathfrak{q}' d\mathfrak{q}') = {}^1/_2 d(\mathfrak{q}'\mathfrak{q}') = 0$, da $\mathfrak{q}'$ ein Einheitsvektor und sein Quadrat $(\mathfrak{q}'\mathfrak{q}') = 1$ konstant ist. Daher ist

$$\Phi_v = -\oint d\mathfrak{q}' = 0.$$

Nach Abschnitt 211 ist aber (XXVI; 39b) das Kriterium dafür, daß der Operator Φ symmetrisch ist. Daher ist

(XXVI; 40a) $$\alpha_{21} = \alpha_{12}; \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}; \quad \alpha_{13} = \alpha_{31},$$

während aus (XXVI; 39a) folgt, daß die Spur der Matrix (α_{ik}) verschwindet, also

(XXVI; 40b) $$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$$

ist, was auch (XXVI; 37) unmittelbar zeigt.

Multipliziert man den Kraftvektor

$$\mathfrak{K} = \frac{m'}{2\pi a' b' h} \Phi \mathfrak{p}_0$$

skalar mit $\mathfrak{p}_0$, so erhält man [s. (XXIV; 45)]

$$\Sigma = \frac{m'}{2\pi a' b' h} (\mathfrak{p}_0 \Phi \mathfrak{p}_0) = \frac{m'}{2\pi a' b' h} \Sigma_0.$$

Schreibt man $\mathfrak{p}_0 = x_0 \mathfrak{i} + y_0 \mathfrak{j} + z_0 \mathfrak{k}$ und das Produkt Σ_0 in Koordinatenform, so folgt unter Berücksichtigung der Symmetrie von Φ

(XXVI; 41) $$\Sigma_0 = \alpha_{11} x_0^2 + 2\alpha_{12} x_0 y_0 + 2\alpha_{13} x_0 z_0 + \alpha_{22} y_0^2 + 2\alpha_{23} y_0 z_0 + \alpha_{33} z_0^2$$

als homogene quadratische Form in den Koordinaten von $\mathfrak{p}_0$. Wegen der Symmetrie von Φ ist $\Phi\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0\Phi$, also nach (XXIV; 46)

$$\mathfrak{R} = \frac{m'}{4\pi a' b' h}(\Phi\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_0\Phi) = \operatorname{grad}_{\mathfrak{p}_0} \Sigma,$$

d. h., der Kraftvektor, der die säkularen Störungen von P durch P' hervorruft, ist gleich dem Gradienten der skalaren Potentialfunktion Σ an der Stelle der Sonne. In der Tat führt

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{p}_0} \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_0}\mathfrak{i} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y_0}\mathfrak{j} + \frac{\partial \Sigma}{\partial z_0}\mathfrak{k}$$

genau auf den Vektor $\mathfrak{R}$ mit den Koordinaten (XXVI; 38).

Der Operator Φ ist durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{q}'$ bestimmt, hängt also lediglich von der geometrischen Gestalt des Kegels K ab, dessen Spitze im Ort P des gestörten Planeten zur Zeit t liegt und der mit seinem Mantel die Bahn des störenden Planeten P' umschließt. Die Bahnkurve von P', die man bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung als eine KEPLERsche Ellipse mit dem Brennpunkt in der Spitze von $\mathfrak{p}_0$, dem Ortsvektor der Sonne, ansehen kann, ist die Schnittkurve des Kegels K mit der Bahnebene E' von P'. Da aber die Elemente α_{ik} des Operators von den Koordinaten x', y', z' des Planeten nicht abhängen, sondern nur von den Richtungen $\mathfrak{q}'$, so darf man zur Berechnung der α_{ik} die Schnittkurve mit E' durch irgendeine andere geschlossene Kurve ersetzen, die im Mantel von K liegt, etwa durch den Schnitt des Kegels mit irgendeiner anderen Ebene E, z. B. derjenigen, die den elliptischen Kegel im Abstand 1 von seinem Scheitel senkrecht zu seiner inneren Symmetrieachse schneidet. Führt man also die Koordinaten des Kegels im x, y, z-System durch eine Hauptachsentransformation (s. Anhang III) auf ein ξ, η, ζ-System zurück, so daß die ζ-Achse in die innere, die ξ- und η-Achsen in die beiden äußeren Symmetrieachsen fallen, so ist die Schnittkurve mit der Ebene $\zeta = 1$ eine Ellipse mit der Gleichung

$$\text{(XXVI; 42)} \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

und kann dann als Integrationsweg zur Bestimmung der Elemente des Operators Φ dienen.

Ersetzt man also in (XXVI; 37, 38) die Koordinaten x'; y'; z' und r' durch $\xi; \eta; \zeta = 1$ und $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}$, so erhält man, da $d\zeta = 0$ ist,

$$\text{(XXVI; 43)} \quad \begin{cases} \alpha_{11} = -\oint \frac{\xi d\eta}{r^3}; & \alpha_{12} = \oint \frac{\xi d\xi}{r^3}; & \alpha_{13} = \oint \frac{\xi}{r^3}(\xi d\eta - \eta d\xi), \\ \alpha_{21} = -\oint \frac{\eta d\eta}{r^3}; & \alpha_{22} = \oint \frac{\eta d\xi}{r^3}; & \alpha_{23} = \oint \frac{\eta}{r^3}(\xi d\eta - \eta d\xi), \\ \alpha_{31} = -\oint \frac{d\eta}{r^3}; & \alpha_{32} = \oint \frac{d\xi}{r^3}; & \alpha_{33} = \oint \frac{1}{r^3}(\xi d\eta - \eta d\xi). \end{cases}$$

Ohne Rechnung erkennt man, daß die Spur (XXVI; 40b) verschwindet. Auch die Symmetriebedingungen (XXVI; 40a) sind erfüllt, denn es ist wegen $rdr = \xi d\xi + \eta d\eta$

$$\alpha_{21} - \alpha_{12} = -\oint \frac{dr}{r^2} = \oint d\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

da ja $1/r$ am Beginn und Ende des geschlossenen Integrationsweges den gleichen Wert hat. Ferner erhält man

$$\alpha_{32} - \alpha_{23} = \oint \frac{1}{r^3}\left[(1 + \eta^2)\, d\xi - \xi\eta d\eta\right] =$$

$$= \oint \frac{1}{r^3}\left[(r^2 - \xi^2)\, d\xi - \xi(rdr - \xi d\xi)\right] =$$

$$= \oint \frac{1}{r^2}(rd\xi - \xi dr) = \oint d\left(\frac{\xi}{r}\right) = 0$$

und ebenso

$$\alpha_{13} - \alpha_{31} = \oint d\left(\frac{\eta}{r}\right) = 0.$$

Schließlich folgt aus den Symmetrieeigenschaften der Ellipse (XXVI; 42)

$$\oint \frac{d\xi}{r^3} = \oint \frac{d\eta}{r^3} = \int \frac{\eta d\eta}{r^3} = 0,$$

so daß alle Elemente der Matrix (α_{ik}) außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden. Es ist also in den neuen Koordinaten Σ_0 eine rein quadratische Form.

225. Einführung elliptischer Integrale

Zur Berechnung der Diagonalglieder α_{ii} drücken wir die Koordinaten ξ, η der Schnittellipse (XXVI; 42) durch die Halbachsen a, b und die exzentrische Anomalie aus, die wir hier mit ψ bezeichnen. Dann ist

$$\xi = a\cos\psi; \qquad \eta = b\sin\psi,$$

$$d\xi = -a\sin\psi\, d\psi; \qquad d\eta = b\cos\psi\, d\psi,$$

$$r^2 = 1 + a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi = 1 + a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\psi,$$

$$r^3 = (1 + a^2)^{3/2}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}.$$

Damit erhält man nach (XXVI; 43), wenn

(XXVI; 44) $$1 > k^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2} \geqq 0; \qquad 1 - k^2 = \frac{1 + b^2}{1 + a^2}$$

gesetzt wird,

$$(\mathrm{XXVI};\,45)\qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha_{11} &= -\oint \frac{\xi d\eta}{r^3} = -\frac{ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \\
&= -\frac{4ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}, \\
\alpha_{22} &= \oint \frac{\eta d\xi}{r^3} = -\frac{ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \\
&= -\frac{4ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}, \\
\alpha_{33} &= -(\alpha_{11}+\alpha_{22}) = \frac{ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \\
&= \frac{4ab}{(1+a^2)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}.
\end{aligned}\right.$$

Das sind elliptische Integrale, die man leicht durch die elementaren Integrale (XXIII; 46),

$$\mathbf{F} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}; \qquad \mathbf{E} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

ausdrücken kann. Wegen

$$d\left(\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\right) = \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}\,d\psi$$

ergibt sich durch Integration zwischen 0 und $\pi/2$, da dann die linke Seite Null wird,

$$0 = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Da aber andererseits

$$\mathbf{F}-\mathbf{E} = \int_0^{\pi/2}\frac{k^2\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

ist, folgt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \frac{\mathbf{F}-\mathbf{E}}{k^2}.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1-k^2)\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-k^2\sin^2\psi-k^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}\, d\psi = \mathbf{F} - k^2\frac{\mathbf{F}-\mathbf{E}}{k^2} = \mathbf{E},$$

also

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \frac{\mathbf{E}}{1-k^2},$$

und schließlich

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}^3}\, d\psi = \frac{\mathbf{E}}{1-k^2} - \frac{\mathbf{F}-\mathbf{E}}{k^2} = \frac{\mathbf{E}}{k^2(1-k^2)} - \frac{\mathbf{F}}{k^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (XXVI; 45) ein, so erhält man nach (XXVI; 38) für die Kraftkoordinaten im ξ, η, ζ-System, wenn man noch k^2, $1-k^2$ durch (XXVI; 44) ersetzt,

$$\text{(XXVI; 46)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_\xi = -\dfrac{2m'ab\xi_0}{\pi a'b'h(a^2-b^2)\sqrt{1+a^2}}(\mathbf{F}-\mathbf{E}), \\ \mathfrak{K}_\eta = -\dfrac{2m'ab\eta_0}{\pi a'b'h(a^2-b^2)\sqrt{1+a^2}}\left(\dfrac{1+a^2}{1+b^2}\mathbf{E}-\mathbf{F}\right), \\ \mathfrak{K}_\zeta = \quad \dfrac{2m'ab\zeta_0}{\pi a'b'h(1+b^2)\sqrt{1+a^2}}\mathbf{E}. \end{cases}$$

Diese Größen lassen sich berechnen, sobald die Konstanten $a, b, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ bekannt sind, da dann $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ als Funktionen von $k^2 = (a^2-b^2)/(1+a^2)$ aus Tafeln entnommen oder nach bekannten Reihenentwicklungen berechnet werden können. Dazu ist aber eine Transformation der Kegelgleichung, die im x, y, z-System leicht hingeschrieben werden kann, auf das durch die Hauptachsen des Kegels definierte ξ, η, ζ-System erforderlich.

Von dem rechtwinkligen x, y, z-System mit den Basisvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ hatten wir bisher nur angenommen, daß sein Ursprung im Ort $P(t)$ des gestörten Planeten liegen soll. Wir bestimmen nun seine Achsenrichtungen so, daß die x, y-Ebene der Bahnebene E' von P' parallel ist. Die Gleichung von E' sei also $z = h = \text{const}$, und zwar sei die positive z-Richtung, die durch den

Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ repräsentiert wird, so orientiert, daß $\mathfrak{k} = [\mathfrak{ij}]$ ist. Die $\mathfrak{i}$-Richtung sei parallel der Perihelrichtung $M\Pi'$ der Bahn von P' (Abb. 5). Sei dann $\mathfrak{p}_1(x_1, y_1, z_1)$ der Ort des Bahnmittelpunkts M, $\mathfrak{p}_0(x_0, y_0, z_0)$ der Ort der Sonne S, so lautet die Gleichung der Bahnellipse von P'

$$\text{(XXVI; 47)} \qquad \frac{(x' - x_1)^2}{a'^2} + \frac{(y' - y_1)^2}{b'^2} = 1; \qquad z' = z_1 = h,$$

und es ist

$$\text{(XXVI; 47a)} \qquad x_1 = x_0 - a'e'; \quad y_1 = y_0; \quad z_1 = z_0.$$

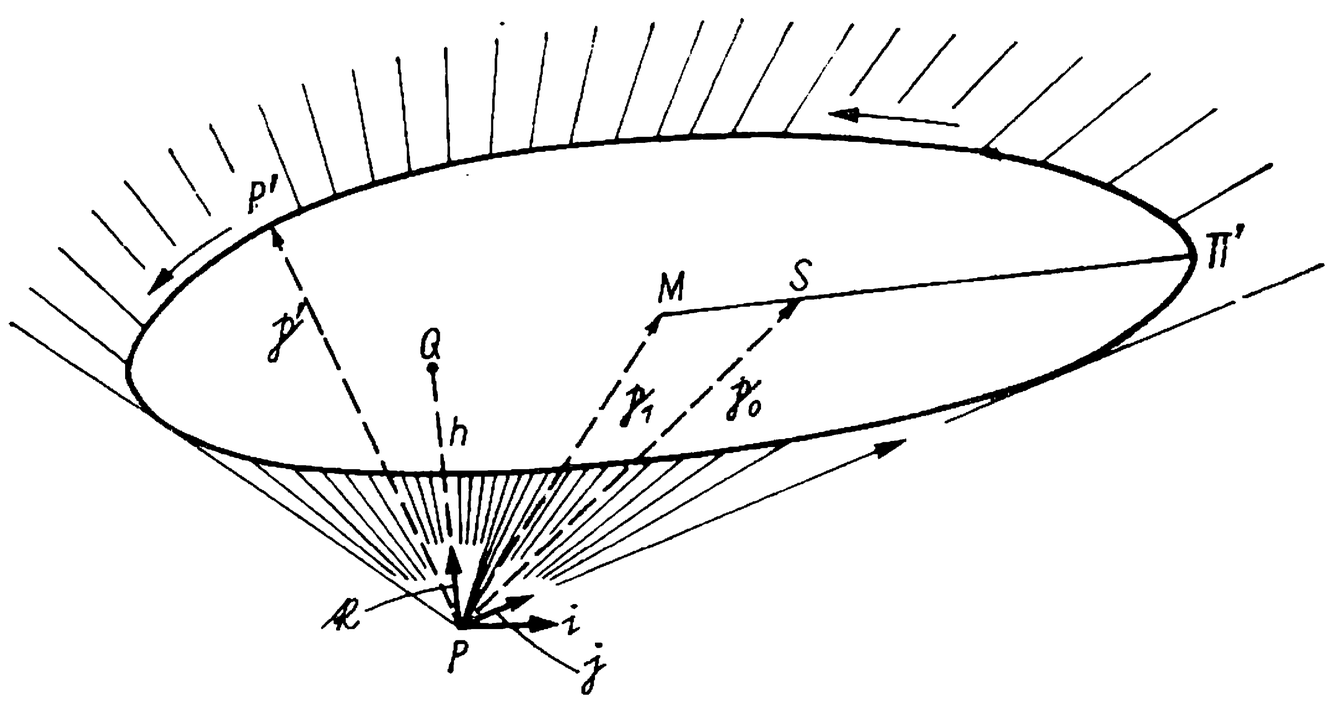

Abb. 5. Der Kegel K im $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$-System

Sei nun $z = \gamma h = \gamma z_1 = \text{const}$ eine beliebige zu E' parallele Ebene E, also γ ein beliebiger Parameter, so ist die Schnittkurve des Kegels K mit E eine Ellipse, die der Bahnellipse (XXVI; 47) ähnlich ist. Die Koordinaten x, y, z dieser Kurve sind dann

$$x = \gamma x'; \quad y = \gamma y'; \quad z = \gamma z'$$

und die Halbachsen

$$\alpha = \gamma a', \quad \beta = \gamma b'.$$

Erweitert man die linke Seite von (XXVI; 47) mit γ^2, so ergibt sich als Gleichung dieser Ellipse

$$\frac{(x - \gamma x_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - \gamma y_1)^2}{\beta^2} = 1$$

oder, wenn man mit $z^2 = \gamma^2 z_1{}^2$ multipliziert,

$$\text{(XXVI; 48)} \qquad \frac{(xz_1 - zx_1)^2}{a'^2} + \frac{(yz_1 - zy_1)^2}{b'^2} = z^2.$$

Das ist aber die Gleichung des Kegels K, da sie den Parameter γ nicht mehr enthält. Sie läßt sich auch in der Form

$$F(x, y, z) = \gamma_{11}x^2 + \gamma_{22}y^2 + \gamma_{33}z^2 + 2\gamma_{12}xy + 2\gamma_{23}yz + 2\gamma_{31}zx = 0$$

schreiben. $F = 0$ ist also eine homogene quadratische Form in den Koordinaten mit den Koeffizienten

$$\text{(XXVI; 49)} \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{{z_1}^2}{a'^2}; & \gamma_{22} = \dfrac{{z_1}^2}{b'^2}; & \gamma_{33} = \dfrac{{x_1}^2}{a'^2} + \dfrac{{y_1}^2}{b'^2} - 1, \\ \gamma_{12} = 0; & \gamma_{23} = -\dfrac{y_1 z_1}{b'^2}; & \gamma_{31} = -\dfrac{z_1 x_1}{a'^2}. \end{cases}$$

Die γ_{ik} lassen sich berechnen, wenn die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Sonne im i, j, k-System vorliegen, denn dann erhält man x_1, y_1, z_1 nach (XXVI; 47a). Nun darf man stets voraussetzen, daß im System der Ekliptik (oder in einem anderen festen heliozentrischen Bezugssystem) die Lagekoordinaten i, Ω bzw. i', Ω' der Bahnebenen der beiden Planeten gegeben sind, ferner die Perihellängen $\tilde{\omega} = \Omega + \nu + \Omega$, $\tilde{\omega}' = \Omega' + \nu' + \Omega'$ und die wahre Anomalie v der gestörten Planeten P zur Zeit t. An der heliozentrischen Sphäre (Abb. 6, die im wesentlichen mit Abb. 4 übereinstimmt) sei Q der sphärische Ort von $P(t)$. Dann ergeben sich aus dem Formelsystem (XXIII; 23) die Größen J, ν, ν', indem man (Abb. 3, S. 88)

i_1, Ω_1, ν_1 durch i, Ω, ν,

i_2, Ω_2, ν_2 durch i', Ω', ν'

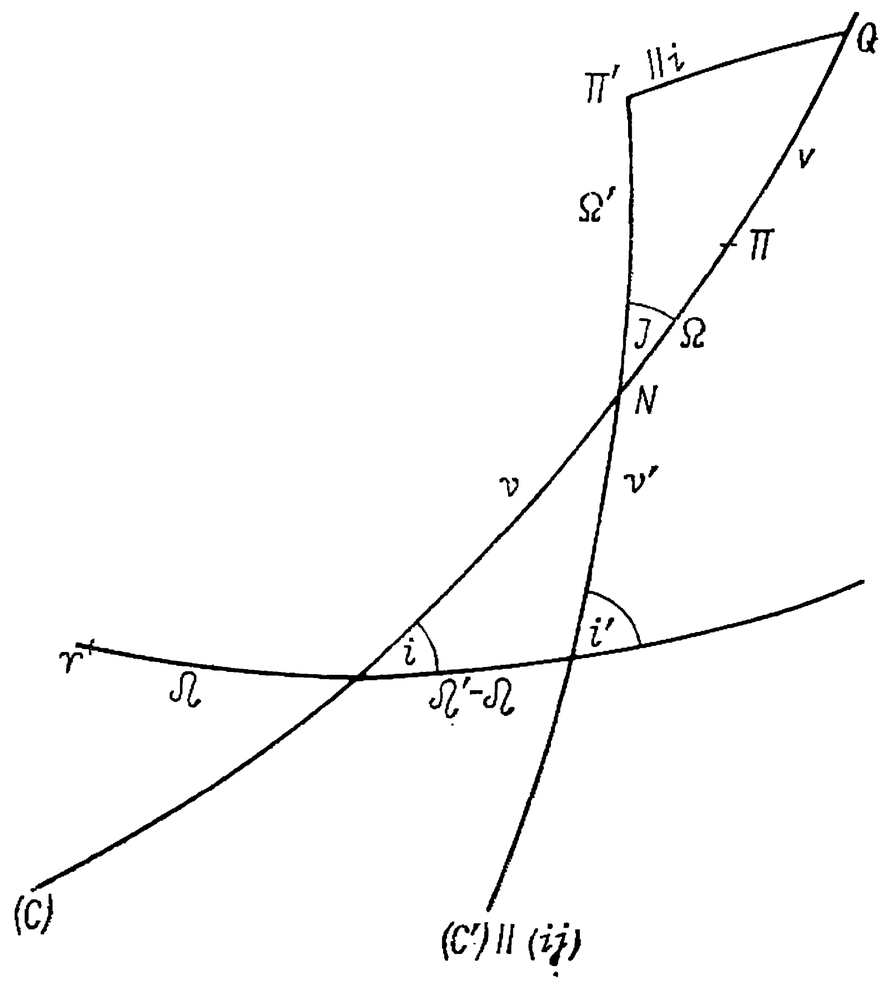

Abb. 6. Parallelverschiebung des i, j, k-Systems

ersetzt, und es ist ferner

$$\Omega' = \tilde{\omega}' - \Omega' - \nu', \quad \Omega + v = \tilde{\omega} - \Omega - \nu + v.$$

Verlagert man nun das oben definierte i, j, f-System (mit dem Ursprung in P) durch Parallelverschiebung so, daß der Ursprung nach P_0, dem Ort der Sonne, versetzt wird, so ist die i, j-Ebene nun mit (C'), die i-Richtung mit Π' identisch, und die f-Richtung zeigt nach dem nördlichen Pol von (C'). Die Koordinaten von P in diesem System sind dann

$$\bar{x} = -x_0; \quad \bar{y} = -y_0; \quad \bar{z} = -z_0,$$

und es ist, wenn r wieder den Abstand PP_0 bezeichnet,

$$\bar{x} = r\cos(Q\mathfrak{i}), \quad \bar{y} = r\cos(Q\mathfrak{j}), \quad \bar{z} = r\cos(Q\mathfrak{f}).$$

Aus den sphärischen Dreiecken $QN\mathfrak{i}$, $QN\mathfrak{j}$, $QN\mathfrak{f}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= r[\cos\Omega'\cos(\Omega + v) + \sin\Omega'\sin(\Omega + v)\cos J],\\
\bar{y} &= r[-\sin\Omega'\cos(\Omega + v) + \cos\Omega'\sin(\Omega + v)\cos J],\\
\bar{z} &= -r\sin(\Omega + v)\sin J,
\end{aligned}$$

und es ist nach (XXVI; 47a)

$$x_1 = -\bar{x} - a'e'; \quad y_1 = -\bar{y}; \quad z_1 = -\bar{z} = h.$$

Damit sind auch die γ_{ik} (XXVI; 49) bekannt. Die Hauptachsentransformation der Kegelgleichung $F(x, y, z) = 0$ in

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = 0$$

geschieht dann nach dem aus der analytischen Geometrie wohlbekannten Verfahren, das in Anhang III erläutert wird. Sind also die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der säkularen Gleichung (Anhang III; 5) bekannt und die Elemente a_{ik} der Transformationsmatrix $\mathfrak{A}$ mit Hilfe der neun Gleichungen (Anhang III; 4) bestimmt, so erhält man die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes, der im i, j, f-System die Koordinaten x, y, z hat, durch (Anhang III; 3):

(XXVI; 50)
$$\begin{cases}
\xi = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z,\\
\eta = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z,\\
\zeta = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z.
\end{cases}$$

Die Gleichung des elliptischen Kegels mit der inneren Achse $\xi = \eta = 0$ lautet dann $\Phi = 0$. Der Schnitt $\zeta = 1$ mit der Mantelfläche ergibt dann die Ellipse (XXVI; 42),

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\xi^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\eta^2 = 1.$$

Es ist also

$$a^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}; \qquad b^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

somit entweder $\lambda_2 \geqq \lambda_1 > 0 > \lambda_3$ oder $\lambda_2 \leqq \lambda_1 < 0 < \lambda_3$.

Da γ_{11}, γ_{22} nach (XXVI; 49) positiv sind, entscheidet die Lösung der säkularen Gleichung über eine dieser beiden Möglichkeiten. Da aber sowohl $F = 0$ als auch $\Phi = 0$ unverändert gültig bleiben, wenn man sie mit einem beliebigen Faktor, etwa -1, multipliziert, sind beide Alternativen gleichberechtigt. Nach (XXVI; 50) berechnet man aus x_0, y_0, z_0 die Sonnenkoordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 im neuen System und daraus die Kraftkoordinaten $\mathfrak{K}_\xi, \mathfrak{K}_\eta, \mathfrak{K}_\zeta$ nach (XXVI; 46). Um daraus die Koordinaten S_0, T_0, W_0 in dem in Abschnitt 223 definierten „begleitenden" System zu berechnen, bedarf es einer weiteren Transformation, die einer Drehung des ξ, η, ζ-Systems um den in P liegenden Ursprung entspricht. Das ist eine einfache Aufgabe der analytischen Geometrie, deren Durchführung dem Leser überlassen bleiben möge.[1])

226. Einführung der Weierstraßschen elliptischen Funktionen

Die im vorigen Abschnitt gewählte Formulierung der GAUSS-HALPHENschen Methode zur Berechnung der säkularen Störungen hat gewisse Nachteile, die sich gerade in denjenigen Fällen bemerkbar machen, die in den praktischen Anwendungen am häufigsten vorkommen, nämlich dann, wenn die Bahnebenen der beiden Planeten nur schwach gegeneinander geneigt sind. Der Abstand h des gestörten Planeten P von der Bahnebene des Störplaneten ist dann durchweg klein, nicht nur in der Umgebung der Knoten, in denen er ganz verschwindet. Da h im Nenner der Ausdrücke (XXVI; 38, 46) steht, andererseits aber die Koordinaten von $\mathfrak{K}$, wenn wir den singulären Fall eines Zusammenstoßes ausschließen, endlich bleiben, so wird man versuchen müssen, diese Ausdrücke so umzuformen, daß sie auch für $h \to 0$ gelten. Das gelingt, falls die Bahn von P außerhalb der des Störplaneten verläuft. Dann degeneriert der Kegel K, wenn sich h der Null nähert, in einen Sektor der Ebene (C'), dessen Grenzgeraden die Bahn von P' tangieren. Die kleine Halbachse b der Schnittellipse strebt dann gleichzeitig mit h gegen Null, und man wird dann vor dem Grenzübergang $b = h\beta$, $a = \alpha$ setzen. Dann fällt h in den Formeln heraus. Bewegt sich dagegen P innerhalb der Bahn von P', so degeneriert für $h \to 0$ der Kegel in die Bahnebene von P' selbst, und das Formelsystem bricht völlig zusammen, da die Halbachsen a, b der Schnittellipse über alle Grenzen wachsen.

HALPHEN hat einen anderen Weg eingeschlagen, der diese Schwierigkeit umgeht. Statt als Integrationsweg den Schnitt des Kegels mit der Ebene

---

[1]) Siehe P. MUSEN, A discussion of HALPHEN's method of secular perturbations and its application to the long-range effects in themotion of celestial bodies. Rev. Geophysics *1*, 85 (1963); H. C. PLUMMER, An introductory treatise on dynamical astronomy (1918), Nachdruck. New York 1960, S. 209ff.

$z = 1$ bzw. $\zeta = 1$ zu wählen, was ja nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten darstellt, wählt er diejenige geschlossene Kurve auf der Mantelfläche, die durch die Kugel $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ erzeugt wird. Diese Kurve ist nur dann eben (und dann eine Ellipse oder ein Kreis), wenn K ein Kreiskegel ist. Sie ist immer endlich und als Integrationsweg selbst dann geeignet, wenn beide Bahnebenen zusammenfallen und P sich innerhalb der Bahn von P' bewegt.

Setzt man in den Ausdrücken (XXVI; 37),

$$\alpha_{ik} = \oint \beta_i \gamma_k ,$$

statt r'; x', y', z'; dx', dy', dz'

$$r = 1; \quad x, y, z; \quad dx = x\, d \ln x, \quad dy = y\, d \ln y, \quad dz = z\, d \ln z ,$$

so folgt

$$\text{(XXVI; 51)} \quad \begin{cases} \alpha_{11} = \oint x(ydz - zdy) = \oint xyz(d \ln z - d \ln y), \\ \alpha_{22} = \oint y(zdx - xdz) = \oint xyz(d \ln x - d \ln z), \\ \alpha_{33} = \oint z(xdy - ydx) = \oint xyz\,(d \ln y - d \ln x), \end{cases}$$

und es ist $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$.

Bezieht man nun die Koordinaten auf das Achsensystem des Kegels, so hat man x, y, z durch ξ, η, ζ zu ersetzen, und es verschwinden alle α_{ik} für $i \neq k$.

Die Gleichung des Kegels nimmt dann die Form

$$\frac{\xi^2}{p_1} + \frac{\eta^2}{p_2} + \frac{\zeta^2}{p_3} = 0, \quad (p_i = \lambda_i^{-1})$$

an, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$p_1 \leqq p_2 < 0 < p_3$$

angenommen werden darf, und es gilt daher

$$\text{(XXVI; 52)} \qquad p_1 - p_2 \leqq 0; \quad p_2 - p_3 < 0; \quad p_3 - p_1 > 0.$$

Die Gleichung der Integrationskurve ergibt sich dann, indem man der Kegelgleichung die Nebenbedingung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ hinzufügt. Führt man einen Parameter s ein, so läßt sich diese Kurve durch

$$\text{(XXVI; 53)} \quad \begin{cases} \xi^2 = \dfrac{p_1(s - p_1)}{(p_3 - p_1)\,(p_1 - p_2)}; \qquad \eta^2 = \dfrac{p_2(s - p_2)}{(p_1 - p_2)\,(p_2 - p_3)}; \\ \zeta^2 = \dfrac{p_3(s - p_3)}{(p_2 - p_3)\,(p_3 - p_1)} \end{cases}$$

darstellen, denn dann ist

$$\frac{\xi^2}{p_1}+\frac{\eta^2}{p_2}+\frac{\zeta^2}{p_3}=$$

$$=\frac{(s-p_1)\,(p_2-p_3)+(s-p_2)\,(p_3-p_1)+(s-p_3)\,(p_1-p_2)}{(p_1-p_2)\,(p_2-p_3)\,(p_3-p_1)}=0$$

für beliebiges s. Ferner erhält man

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=$$

$$=\frac{p_1(s-p_1)\,(p_2-p_3)+p_2(s-p_2)\,(p_3-p_1)+p_3(s-p_3)\,(p_1-p_2)}{(p_1-p_2)\,(p_2-p_3)\,(p_3-p_1)}=1,$$

wie man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigt. Diese Beziehungen gelten zunächst für $p_2-p_1>0$. Da aber die Ausdrücke (XXVI; 53) alle $\geqq 0$ sind, findet man wegen der Ungleichungen (XXVI; 52)

$$s\geqq p_1,\quad s\leqq p_2,$$

also

(XXVI, 54) $$p_1\leqq s\leqq p_2<p_3.$$

Hieraus folgt, was auch aus geometrischen Gründen einzusehen ist, daß der Grenzfall $p_1=p_2$ (Kreiskegel), in dem $p_1-p_2=0$ im Nenner auftritt, nur eine formale Singularität darstellt, die im Grenzübergang $p_2\to p_1$ verschwindet, da dann wegen $s\to p_1=p_2$ ein entsprechendes Glied im Zähler von (XXVI; 53) ebenfalls gegen Null strebt. Wir werden auf diese Frage weiter unten noch zurückkommen.

Die Formeln (XXVI; 51) lassen sich durch Integration über s auswerten, wobei wegen der Symmetrieeigenschaften des Integrationsweges die Integrale über den ganzen Ring gleich dem Vierfachen der Integrale über denjenigen Teil des Weges sind, der im ersten Quadranten liegt, also von der positiven ξ-Achse ($\eta=0$) zur positiven η-Achse ($\xi=0$) führt. Es ist aber im ersten Fall

$$s=p_2;\quad \xi=+\sqrt{p_1/(p_1-p_3)};\quad \eta=0;\quad \zeta=+\sqrt{p_3/(p_3-p_1)},$$

und im zweiten Fall

$$s=p_1;\quad \xi=0;\quad \eta=+\sqrt{p_2/(p_2-p_3)};\quad \zeta=+\sqrt{p_3/(p_3-p_2)}.$$

Ferner ist

$$d\ln\xi=\frac{1}{2}\frac{ds}{s-p_1},\qquad d\ln\eta=\frac{1}{2}\frac{ds}{s-p_2},\qquad d\ln\zeta=\frac{1}{2}\frac{ds}{s-p_3}$$

und, da $p_1p_2p_3>0$ ist,

$$\xi\eta\zeta=+\frac{\sqrt{p_1p_2p_3}\,\sqrt{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)}}{(p_1-p_2)\,(p_2-p_3)\,(p_3-p_1)}.$$

Man erhält dann

$$\text{(XXVI; 55)}\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = -2\displaystyle\int_{p_2}^{p_1} \frac{\sqrt{p_1p_2p_3}}{(p_1-p_2)\,(p_3-p_1)}\,\frac{\sqrt{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)}}{(s-p_2)\,(s-p_3)}\,ds\,, \\ \alpha_{22} = -2\displaystyle\int_{p_2}^{p_1} \frac{\sqrt{p_1p_2p_3}}{(p_2-p_3)\,(p_1-p_2)}\,\frac{\sqrt{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)}}{(s-p_3)\,(s-p_1)}\,ds\,, \\ \alpha_{33} = -2\displaystyle\int_{p_2}^{p_1} \frac{\sqrt{p_1p_2p_3}}{(p_3-p_1)\,(p_2-p_3)}\,\frac{\sqrt{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)}}{(s-p_1)\,(s-p_2)}\,ds\,. \end{cases}$$

Damit nun, wie (XXVI; 45) lehrt, $\alpha_{11} < 0$, $\alpha_{22} < 0$, $\alpha_{33} > 0$ ist, wird man der Quadratwurzel $\sqrt{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)}$ das negative Vorzeichen geben müssen. Setzt man

$$\text{(XXVI; 56)}\qquad \begin{cases} e_1 = p_3 - \dfrac{1}{3}(p_1+p_2+p_3) = \dfrac{1}{3}(2p_3-p_1-p_2), \\ e_2 = p_2 - \dfrac{1}{3}(p_1+p_2+p_3) = \dfrac{1}{3}(2p_2-p_3-p_1), \\ e_3 = p_1 - \dfrac{1}{3}(p_1+p_2+p_3) = \dfrac{1}{3}(2p_1-p_2-p_3), \end{cases}$$

so ist $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, und es bestehen die Ungleichungen

$$\text{(XXVI; 56a)}\qquad e_1 > 0;\quad e_3 < 0;\quad e_1 > e_2 \geqq e_3\,,$$

die den Ungleichungen (XXVI; 52) entsprechen.

Nun führe man statt s eine neue Variable u durch

$$s = \wp(u) + \frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)$$

ein, wo $\wp(u)$ die Weierstrasssche Funktion ist, die der Differentialgleichung

$$\wp'^2(u) = 4(\wp-e_1)\,(\wp-e_2)\,(\wp-e_3)$$

genügt, und es ist dann

$$s - p_1 = \wp(u) - e_3\,,$$

$$s - p_2 = \wp(u) - e_2\,,$$

$$s - p_3 = \wp(u) - e_1\,,$$

ferner

$$\wp'^2(u) = 4(s - p_1)\,(s - p_2)\,(s - p_3)$$

und, da die Quadratwurzel aus diesem Ausdruck negativ zu nehmen ist,

$$\text{(XXVI; 57)} \qquad \begin{cases} \wp'(u) = -2\sqrt{(s - p_1)\,(s - p_2)\,(s - p_3)}, \\ ds = \wp'(u)\,du. \end{cases}$$

Führt man dies in (XXVI; 55) ein, so erhält man

$$\text{(XXVI; 58)} \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = 4\int C(p_2 - p_3)\,[\wp(u) - e_3]\,du, \\ \alpha_{22} = 4\int C(p_3 - p_1)\,[\wp(u) - e_2]\,du, \\ \alpha_{33} = 4\int C(p_1 - p_2)\,[\wp(u) - e_1]\,du, \end{cases}$$

wo der Integrationsweg von $s = p_2$ bis $s = p_1$ bzw. $u = e_2$ bis $u = e_3$ führt und

$$C = \frac{\sqrt{p_1 p_2 p_3}}{(p_1 - p_2)\,(p_2 - p_3)\,(p_3 - p_1)}$$

gesetzt ist. Da wegen (XXVI; 57)

$$du = -\frac{1}{2}\,\frac{d\wp(u)}{\sqrt{(\wp - e_1)\,(\wp - e_2)\,(\wp - e_3)}}$$

ist, so folgt durch Integration über den vierten Teil des geschlossenen Weges

$$u = u_0 + \frac{1}{2}\int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)\,(x - e_2)\,(x - e_3)}} = u_0 + \omega,$$

und es ist 2ω die reelle Periode von $\wp(u)$. Die Integration über den ganzen Ring ergibt dann, wobei die Integrale über u_0 bis $u_0 + 4\omega$ zu erstrecken sind,

$$\text{(XXVI; 59)} \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \int C(p_2 - p_3)\,[\wp(u) - e_3]\,du, \\ \alpha_{22} = \int C(p_3 - p_1)\,[\wp(u) - e_2]\,du, \\ \alpha_{33} = \int C(p_1 - p_2)\,[\wp(u) - e_1]\,du. \end{cases}$$

Damit ist das Problem nach HALPHEN auf elliptische Funktionen zurückgeführt.

Formale Schwierigkeiten treten nur in zwei Fällen auf:

1. wenn P in der Bahnebene von P' liegt, also $z_1 = h = 0$ ist,
2. wenn $p_1 = p_2$, d. h. K ein Kreiskegel ist, da dann in einigen der obigen Ausdrücke $p_1 - p_2$ (bzw. $e_3 - e_2$) im Nenner auftritt.

Der erste Fall erweist sich als harmlos. Im Achsensystem des Kegels nimmt die Potentialfunktion Σ die rein quadratische Form

$$\Sigma = \frac{m'}{2\pi a' b' h}(\alpha_{11}\xi_0^2 + \alpha_{22}\eta_0^2 + \alpha_{33}\zeta_0^2)$$

an. Es läßt sich aber zeigen, daß die Größen α_{ii} den Abstand h des Planeten P von der Bahnebene von P' als Faktor enthalten, so daß h herausfällt. Schreibt man die Gleichung des Kegels in der Form

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = 0,$$

so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, wie im vorigen Abschnitt bewiesen wurde, die Wurzeln der säkularen Gleichung (Anhang III; 5)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \gamma & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \lambda & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\gamma_{ik} = \gamma_{ki})$$

mit den in (XXVI; 49) definierten γ_{ik}. Explizite lautet diese Gleichung

(XXVI; 60) $$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0$$

mit

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1; \quad c = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

und es ist, da $z_1 = h$ ist,

(XXVI; 61)
$$\begin{cases} a = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \\ \quad = \dfrac{1}{a'^2 b'^2}[h^2(a'^2 + b'^2) + x_1^2 b'^2 + y_1^2 a'^2 - a'^2 b'^2], \\ b = \gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{33}\gamma_{11} - \gamma_{13}^2 - \gamma_{23}^2 = \\ \quad = \dfrac{h^2}{a'^2 b'^2}[x_1^2 + y_1^2 + h^2 - (a'^2 + b'^2)], \\ c = |\gamma_{ik}| = -\dfrac{h^4}{a'^2 b'^2}. \end{cases}$$

Andererseits sind

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_1}; \quad p_2 = \frac{1}{\lambda_2}; \quad p_3 = \frac{1}{\lambda_3}$$

die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$p^3 - k_1 p^2 + k_2 p - k_3 = 0,$$

die man aus (XXVI; 60) erhält, indem man mit $-1/c\lambda^3$ multipliziert. Dann ergibt sich

$$p^3 - \frac{b}{c}p^2 + \frac{a}{c}p - \frac{1}{c} = 0,$$

also wegen (XXVI; 61)

$$k_1 = p_1 + p_2 + p_3 = -\frac{1}{h^2}[x_1^2 + y_1^2 + h^2 - (a'^2 + b'^2)],$$

$$k_2 = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 = -\frac{1}{h^4}[h^2(a'^2 + b'^2) + x_1^2b'^2 + y_1^2a'^2 - a'^2b'^2],$$

$$k_3 = p_1p_2p_3 = -\frac{a'^2b'^2}{h^4}.$$

Da die Kegelgleichung

$$\frac{\xi^2}{p_1} + \frac{\eta^2}{p_2} + \frac{\zeta^2}{p_3} = 0$$

unverändert bleibt, wenn man die p_i mit einem noch willkürlich wählbaren Faktor μ multipliziert, so kann man $\mu = -h^2$ setzen. Dann wird $k_3 > 0$, solange $h \neq 0$ ist, was mit den oben festgesetzten Vorzeichenregeln der p_i in Einklang steht, und es ist daher

$$\sqrt{p_1p_2p_3} = |h|\, a'b'.$$

Die Größen α_{ii} enthalten also den Faktor $|h|\, a'b'$, der somit aus den Formeln (XXVI; 46) für die Kraftkomponenten herausfällt.

Der Grenzfall $p_2 = p_1$ tritt ein, wenn K ein Kreiskegel ist. Die innere Kegelachse geht dann durch einen der Brennpunkte der Bahnellipse von P'. Der geometrische Ort P des gestörten Planeten, d. h. der Spitze des Kegels, ist die „Fokalhyperbel" der Bahn von P'. Die Ebene dieser Hyperbel steht auf der Bahnebene (C') senkrecht, ihre reelle Achse fällt in die große Achse der Bahn von P', ihre Brennpunkte liegen auf den Endpunkten der großen Achse, ihre Scheitel in den Brennpunkten.[1]) Ist die Bahn von P' ein Kreis, so fallen die beiden Hyperbeläste zusammen und bilden die auf der Bahnebene senkrecht stehende und durch die Sonne gehende Gerade. Ist die Bahn von P' schwach exzentrisch, so sind die Hyperbeläste schwach gekrümmt, und es wird nur in seltenen Fällen vorkommen, daß der gestörte Körper in die Nähe dieser kritischen Kurven kommt.

Der exakte Beweis, daß $p_1 = p_2$ keine echte Singularität bedeutet, ist langwierig und erfordert spezielle Kenntnisse der Theorie der elliptischen Funktionen, die wir hier nicht voraussetzen wollen. Wir begnügen uns daher

[1]) Die hier benutzten geometrischen Sätze sind aus der Analysis der Flächen zweiter Ordnung bekannt. Siehe O. Dziobek, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. 2. Braunschweig 1902, § 21.

mit einigen Bemerkungen, die den Sachverhalt verständlich machen. Die Größen (XXVI; 56) sind mit den p_i bekannt. Sie sind die Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$(\text{XXVI; 62}) \qquad (x - e_1)\,(x - e_2)\,(x - e_3) = x^3 + g_2 x + g_3 = 0,$$

in der wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ das quadratische Glied entfällt, und es ist

$$(\text{XXVI; 63}) \qquad \begin{cases} g_2 = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = e_1e_3 - (e_1 + e_3)^2 < 0, \\ g_3 = -e_1e_2e_3 = e_1e_3(e_1 + e_3). \end{cases}$$

Die Diskriminante der Gleichung (XXVI; 62) ist

$$D = \frac{\Delta}{108} = \frac{{g_2}^3}{27} + \frac{{g_3}^2}{4}; \qquad \Delta = 27{g_3}^2 + 4{g_2}^3.$$

Schreibt man g_2, g_3 in der Form (XXVI; 63), so folgt nach kurzer Rechnung

$$\Delta = -4({e_1}^6 + {e_3}^6) - 12e_1e_3({e_1}^4 + {e_3}^4) + 3{e_1}^2{e_3}^2({e_1}^2 + {e_3}^2) - 26{e_1}^3{e_3}^3.$$

Ebenso ergibt sich

$$(e_1 - e_2)^2\,(e_2 - e_3)^2\,(e_3 - e_1)^2 = (2e_1 + e_3)^2\,(e_1 + 2e_3)^2\,(e_3 - e_1)^2 =$$
$$= 4({e_1}^6 + {e_3}^6) + 12e_1e_3({e_1}^4 + {e_3}^4) - 3{e_1}^2{e_3}^2({e_1}^2 + {e_3}^2) + 26{e_1}^3{e_3}^3 = -\Delta \geqq 0.$$

Die Diskriminante ist also im allgemeinen negativ, und die Wurzeln e_i sind daher reell (casus irreducibilis). Wegen (XXVI; 56a) ist $\Delta = 0$ nur in dem kritischen Fall $p_1 = p_2$, $e_2 = e_3$. Es ist dann auf Grund der Cardanischen Formel

$$e_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{g_3}{2}}; \qquad e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2}$$

mit $g_3 = -e_1{e_2}^2 < 0$.

Setzt man nun, für $\Delta < 0$,

$$J = \frac{4{g_2}^3}{\Delta}; \qquad J - 1 = \frac{4{g_2}^3 - \Delta}{\Delta} = -\frac{27{g_3}^2}{\Delta} > 0,$$

so ist

$$1 > w = \frac{J - 1}{J} = -\frac{27}{4}\frac{{g_3}^2}{{g_2}^3} > 0,$$

da nach (XXVI; 63) $g_2 < 0$ ist, und für $\Delta \to 0$ gilt $w \to 1$, $1 - w = 1/J \to 0$.

Die Analyse des Problems ergibt, daß die Dyade $\Phi = \alpha_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \alpha_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \alpha_{33}\mathfrak{f}\mathfrak{f}$, die den Kraftvektor

$$\mathfrak{R} = \frac{m'}{2\pi a'b'h}\Phi\mathfrak{p}_0$$

erzeugt, in

$$\Phi = A\Psi + B\Xi$$

aufgespalten werden kann, wo Ψ und Ξ reguläre Dyaden sind, während die Singularität $p_1 = p_2$ bzw. $\Delta = 0$ auf die Ausdrücke A und B beschränkt bleibt. Die Formeln (XXVI; 59) lehren aber, daß diese Singularitäten dadurch vorgetäuscht werden, daß für $p_1 - p_2 \to 0$ Quotienten von der Form

$$\frac{\wp(u) - e_3}{p_2 - p_1} = \frac{s - p_1}{p_2 - p_1}$$

die unbestimmte Gestalt $0:0$ annehmen, aber im Grenzübergang gegen endliche und wohldefinierte Werte streben. In der Tat läßt sich zeigen, daß sich A und B auf hypergeometrische Funktionen $F(a, b, c; x)$ mit numerischen Konstanten a, b, c zurückführen lassen, mit $x = 1 - w$ oder $x = \left(1 - \sqrt{w}\right)/\left(1 + \sqrt{w}\right)$, die für kleines x (also gerade in der Nähe der kritischen Örter) rasch konvergieren.

Die von P. MUSEN (loc. cit.) in allen Einzelheiten durchgeführte Analyse des HALPHENschen Problems kann hier ihres Umfanges wegen nicht ausführlicher wiedergegeben werden. Sie kann aber dem Leser, der tiefer in diese reizvolle Materie einzudringen wünscht, angelegentlich empfohlen werden. Die hier gegebenen Richtlinien werden zum Verständnis dieser ausgezeichneten Arbeit beitragen, die auch eine vollständige und für Computer geeignete Rechenvorschrift enthält.

KAPITEL XXVII

DIE HANSENSCHE THEORIE DER ALLGEMEINEN STÖRUNGEN. GRUNDLAGEN UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

227. Ideale Koordinaten

Unter den klassischen Methoden der allgemeinen Störungsrechnung, die in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts entwickelt worden sind, verdient die von P. A. HANSEN[1]) geschaffene besonders hervorgehoben zu werden. Sie hat durch ihren Ideenreichtum ungemein fruchtbar gewirkt und späteren Autoren als Vorbild für ihre Arbeiten gedient. Das gilt nicht nur für die vor und nach der Jahrhundertwende entstandenen Theorien bedeutender Astronomen wie GYLDÉN und BRENDEL, die auf der von HANSEN geschaffenen Grundlage weitergebaut haben, sondern auch für die gegenwärtige Epoche, in der hervorragende Theoretiker wie P. MUSEN und andere die HANSENschen Ideen gern benutzen, um aktuelle Störungsprobleme (künstliche Satelliten!) zu lösen oder die Vorschriften zur Berechnung absoluter Störungen auf eine Form zu bringen, die auf den Gebrauch moderner mathematischer und technischer Hilfsmittel (Matrizen, Computer) ausgerichtet ist.

HANSEN bedient sich der Polarkoordinaten, deren Vorteile für den Aufbau einer Störungstheorie in Abschnitt 197 hervorgehoben worden sind und die er auch in der speziellen Störungsrechnung verwendet hat (s. Abschnitt 159). Wesentlich ist dabei, daß die spezifischen Eigenschaften der Polarkoordinaten die Aufspaltung des Störungsproblems in zwei nur lose miteinander verknüpfte Aufgaben gestatten, nämlich

1. die Ermittlung der Lageänderung der oskulierenden Bahnebene,
2. die Ermittlung der gestörten Bewegung des Planeten selbst in der oskulierenden Ebene.

Beide Probleme sind nur dann voneinander unabhängig, wenn die Störungen fehlen (KEPLERsche Bewegung) oder wenn der gestörte und die störenden Körper sich in derselben Ebene bewegen (ebenes Drei- und Mehrkörperproblem). In beiden Fällen ist die Lage der Bahnebene konstant. Im allgemeinen sind aber die Differentialgleichungssysteme für die Lagekoordinaten der intermediären Bahnebene und diejenigen für die Koordinaten des Planeten in dieser Ebene infolge der Störungen miteinander gekoppelt.

Die erste Aufgabe, die Bewegung der oskulierenden Bahnebene betreffend, ist gelöst, wenn die Lagekoordinaten dieser Ebene, die Neigung i gegen die Hauptebene eines festen Koordinatensystems und die Länge Ω des auf-

---

[1]) P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Leipzig 1857—1859.

steigenden Knotens, als Funktionen der Zeit bekannt sind. Dazu dienen die Differentialgleichungen (XVIII; 52b),

$$\text{(XXVII; 1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = (W)\,\dfrac{r}{p}\cos u, \\ \sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} = (W)\,\dfrac{r}{p}\sin u, \end{cases}$$

in denen (W) derjenigen Komponente der störenden Kraft proportional ist, die in der Richtung senkrecht zur oskulierenden Ebene wirkt, und u das „Argument der Breite", d. h. den Abstand des Planetenorts vom Knoten an der heliozentrischen Sphäre bedeutet. Beide Gleichungen hängen durch die Beziehung (XXIII; 15),

$$\text{(XXVII; 2)} \qquad \sin u\,\frac{di}{dt} = \sin i\cos u\,\frac{d\Omega}{dt},$$

zusammen, in der außer den variablen Elementen nur noch das Argument der Breite vorkommt.

Seien nun i und Ω als Funktionen der Zeit bekannt, so wird man die Lage des Planeten in der oskulierenden Ebene durch die rechtwinkligen Koordinaten

$$\text{(XXVII; 3)} \qquad \xi = r\cos w; \quad \eta = r\sin w$$

bzw. durch die Polarkoordinaten $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ und die „Länge" w ausdrücken. Die letztere wird (Abb. 7, in der S den Sonnenmittelpunkt darstellt) von einer bestimmten Anfangsrichtung SU aus bis zum Ortsvektor SP des Planeten gezählt. Es sei ferner SK die Richtung nach dem aufsteigenden Knoten; dann ist, mit den Bezeichnungen der Abb. 7, $\sigma = w - u$ die Länge des Knotens im ξ,η-System. Dieser Winkel ist aber noch mehr oder weniger willkürlich festsetzbar, d. h., man hat es noch in der Hand, das ξ,η-System in der oskulierenden Ebene so zu orientieren, daß die Differentialgleichungen, denen die Koordinaten genügen, eine möglichst einfache Form annehmen.

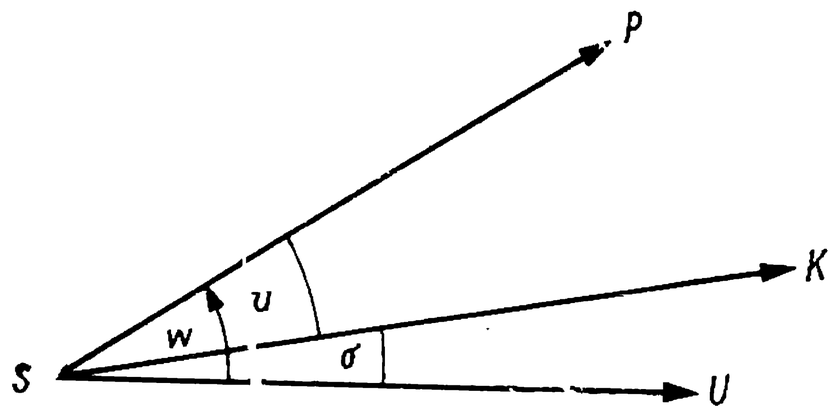

Abb. 7. Richtungen in der Ebene der oskulierenden Bahn

Es sei nun $\mathfrak{p}(x, y, z)$ der Ortsvektor des gestörten Körpers P, $\mathfrak{p}_1(x_1, y_1, z_1)$ der des Störplaneten P_1, und die Koordinaten mögen sich auf ein festes heliozentrisches System (etwa das der mittleren Ekliptik zu irgendeiner Epoche) beziehen. Sei dann $r = |\mathfrak{p}|$, $r_1 = |\mathfrak{p}_1|$, $\varrho = |\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}|$, und seien m, m_1 die Massen der beiden Körper, dann gelten die Bewegungsgleichungen

$$\text{(XXVII; 4)} \qquad \ddot{x} + \varkappa^2 \frac{x}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x};\ \ \ddot{y} + \varkappa^2 \frac{y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y};\ \ \ddot{z} + \varkappa^2 \frac{z}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

wenn $\varkappa^2 = k^2(1 + m)$ und

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{{r_1}^3} \right)$$

die Störungsfunktion ist.

Allgemein geschieht der Übergang von dem festen xyz-System auf ein anderes, ebenfalls heliozentrisches, ξ,η,ζ-System mittels der orthogonalen Transformation

$$\text{(XXVII; 5)} \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{T}\mathfrak{p}; \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{T}'\mathfrak{q},$$

wenn $\mathfrak{p}\,(x, y, z) = \mathfrak{q}\,(\xi, \eta, \zeta)$, $|\mathfrak{p}| = |\mathfrak{q}| = r$ und

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{T}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix und ihre Transponierte sind. Die Elemente α_i, β_i, γ_i genügen den sechs unabhängigen Orthogonalitätsbedingungen

$$\text{(XXVII; 6a)} \qquad \sum \alpha_i^2 = \sum \beta_i^2 = \sum \gamma_i^2 = 1; \qquad \sum \alpha_i \beta_i = \sum \beta_i \gamma_i = \sum \gamma_i \alpha_i = 0,$$

die sich auch in der Form (XXII; 38),

$$\text{(XXVII; 6b)} \qquad \alpha_i = \beta_j \gamma_k - \gamma_j \beta_k;\ \ \beta_i = \gamma_j \alpha_k - \alpha_j \gamma_k;\ \ \gamma_i = \alpha_j \beta_k - \beta_j \alpha_k,$$

schreiben lassen, d. h., die Elemente der Determinante $\Delta = 1$ von $\mathfrak{T}$ sind den ihnen zugeordneten Unterdeterminanten gleich.

Da die Gleichungen (XXVII; 6a) nur sechs unabhängige Bindungen zwischen den neun Elementen der Matrix ($\mathfrak{T}$) darstellen, sind zur Fixierung der Transformation drei weitere Bedingungen nötig, d. h., die α_i, β_i, γ_i sind Funktionen von drei unabhängigen Parametern, über die noch frei verfügt werden kann. Ist (Abb. 8) das feste x, y, z-System (Ekliptik) durch die Richtungen X, Y, Z der positiven Achsen an der heliozentrischen Sphäre definiert, so seien U, V, W die entsprechenden Achsenrichtungen des ξ,η,ζ-Systems. Die gegenseitige Lage der beiden Systeme wird dann durch die drei Winkel i, Ω, σ bestimmt, d. h. den Neigungswinkel zwischen den beiden Hauptebenen XY und UV und die in beiden Systemen gezählten Längen des aufsteigenden Knotens K.

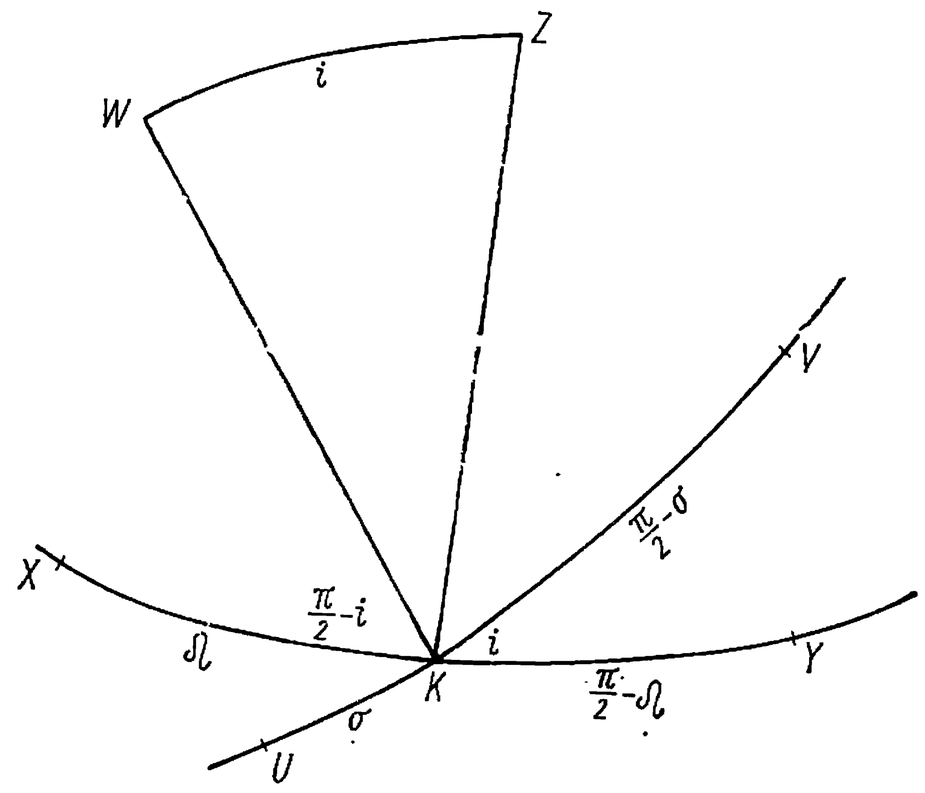

Abb. 8. Übergang von einem rechtwinkligen System (X, Y, Z) auf ein anderes (U, V, W)

Aus den sphärischen Dreiecken XUK, YUK, ZUK, ... erhält man dann nach dem Kosinussatz

$$
\text{(XXVII; 7)}\qquad
\begin{cases}
\alpha_1 = \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \cos(XU) = \cos\sigma\cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega\cos i, \\
\beta_1 = \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \cos(YU) = \cos\sigma\sin\Omega - \sin\sigma\cos\Omega\cos i, \\
\gamma_1 = \dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \cos(ZU) = -\sin\sigma\sin i, \\
\alpha_2 = \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = \cos(XV) = \sin\sigma\cos\Omega - \cos\sigma\sin\Omega\cos i, \\
\beta_2 = \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \cos(YV) = \sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega\cos i, \\
\gamma_2 = \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \cos(ZV) = \cos\sigma\sin i, \\
\alpha_3 = \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} = \cos(XW) = \sin\Omega\sin i, \\
\beta_3 = \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = \cos(YW) = -\cos\Omega\sin i, \\
\gamma_3 = \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} = \cos(ZW) = \cos i.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen erhält man auch aus (XVIII; 39), indem man u mit $-\sigma$ vertauscht, denn dort war angenommen worden, daß die Richtung der positiven ξ-Achse nach dem Planetenort zeigt, von dem aus gezählt die Länge des Knotens K gleich $-u$ ist.

Solange man annehmen darf, daß das ξ,η,ζ-System in bezug auf die Ekliptik festliegt, sind die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ bzw. die Parameter i, Ω, σ konstant, und es ist dann

$$\text{(XXVII; 8)} \qquad \dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{T}\dot{\mathfrak{p}}; \qquad \ddot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{T}\ddot{\mathfrak{p}}.$$

Wegen der Gleichungen (XXVII; 4) gilt dann für die ξ-Koordinate

$$\ddot{\xi} + \varkappa^2 \frac{\xi}{r^3} = (\alpha_1\ddot{x} + \beta_1\ddot{y} + \gamma_1\ddot{z}) + \frac{\varkappa^2}{r^3}(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z),$$

also wegen (XXVII; 4)

$$\ddot{\xi} + \varkappa^2 \frac{\xi}{r^3} = \alpha_1 \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}.$$

Dasselbe gilt für η und ζ. Die Bewegungsgleichungen haben also in beiden Systemen die gleiche analytische Form, d. h., sie sind gegen orthogonale Transformationen invariant.

Das gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn die α_i, β_i, γ_i variabel sind. Dann ist

$$\dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{T}\dot{\mathfrak{p}} + \dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p},$$

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{T}\ddot{\mathfrak{p}} + 2\dot{\mathfrak{T}}\dot{\mathfrak{p}} + \ddot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p}.$$

Die Forderung (XXVII; 8) wäre aber erfüllt, wenn

$$\text{(XXVII; 9)} \qquad \text{a) } \dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p} = 0; \qquad \text{b) } \dot{\mathfrak{T}}\dot{\mathfrak{p}} = 0$$

ist, denn aus $\dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p} = 0$ folgt ja $\dot{\mathfrak{T}}\dot{\mathfrak{p}} + \ddot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p} = 0$, so daß mit $\dot{\mathfrak{T}}\dot{\mathfrak{p}}$ auch $\ddot{\mathfrak{T}}\mathfrak{p}$ verschwindet.

Transformationen, die der Bedingung (XXVII; 9a) genügen, nennt HANSEN *ideal*. Erfüllen also die Koordinaten ξ, η, ζ, die aus x, y, z durch die orthogonale Transformation

$$\text{(XXVII; 10a)} \qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ \zeta = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

hervorgehen, die Forderung, daß auch für variable α_i, β_i, γ_i

$$\text{(XXVII; 10b)} \qquad \begin{cases} \dot{\xi} = \alpha_1\dot{x} + \beta_1\dot{y} + \gamma_1\dot{z}, \\ \dot{\eta} = \alpha_2\dot{x} + \beta_2\dot{y} + \gamma_2\dot{z}, \\ \dot{\zeta} = \alpha_3\dot{x} + \beta_3\dot{y} + \gamma_3\dot{z} \end{cases}$$

ist, daß man also bei einmaligem Differenzieren der Gleichungen (XXVII; 10a) die Variablen α_i, β_i, γ_i bzw. die variablen Parameter i, Ω, σ als konstant ansehen darf, so sind ξ, η, ζ *ideale Koordinaten*. Sie erfüllen (XXVII; 9a), während die Frage, ob es möglich ist, durch spezielle Wahl von $\mathfrak{T}$ auch (XXVII; 9b) zu erfüllen, noch offen bleibt.

Die Bedingung (XXVII; 9a), die explizite

$$\text{(XXVII; 11a)} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}_1 x + \dot{\beta}_1 y + \dot{\gamma}_1 z = 0, \\ \dot{\alpha}_2 x + \dot{\beta}_2 y + \dot{\gamma}_2 z = 0, \\ \dot{\alpha}_3 x + \dot{\beta}_3 y + \dot{\gamma}_3 z = 0 \end{cases}$$

lautet, läßt sich einfacher

$$\text{(XXVII; 11b)} \qquad \begin{cases} B\zeta - C\eta = 0, \\ C\xi - A\zeta = 0, \\ A\eta - B\xi = 0 \end{cases}$$

schreiben, wenn man zur Abkürzung

$$\text{(XXVII; 12)} \qquad \begin{cases} A = \alpha_2\dot{\alpha}_3 + \beta_2\dot{\beta}_3 + \gamma_2\dot{\gamma}_3 = -(\alpha_3\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\beta}_2 + \gamma_3\dot{\gamma}_2), \\ B = \alpha_3\dot{\alpha}_1 + \beta_3\dot{\beta}_1 + \gamma_3\dot{\gamma}_1 = -(\alpha_1\dot{\alpha}_3 + \beta_1\dot{\beta}_3 + \gamma_1\dot{\gamma}_3), \\ C = \alpha_1\dot{\alpha}_2 + \beta_1\dot{\beta}_2 + \gamma_1\dot{\gamma}_2 = -(\alpha_2\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\gamma}_1) \end{cases}$$

einführt. Die homogenen Gleichungen (XXVII; 11b) sind miteinander verträglich, d. h. für nicht sämtlich verschwindende ξ, η, ζ erfüllbar, da ihre Determinante Null ist. Sie sind voneinander linear abhängig, denn multipliziert man sie mit den Faktoren A bzw. B bzw. C und addiert die Produkte, so ist die Summe Null. Die Gleichungen (XXVII; 11a bzw. 11b) sind also schon durch zwei unabhängige Bedingungen erfüllbar, und es bleibt zur vollständigen Definition einer idealen Transformation noch eine zusätzliche Bedingung frei verfügbar.

Wir werden untersuchen, ob diese Bedingung so formuliert werden kann, daß auch der Forderung (XXVII; 9b) genügt wird und daß daher die Bewegungsgleichungen (XXVII; 4) in beiden Koordinatensystemen die gleiche analytische Form haben, auch wenn die Elemente der Transformation $\mathfrak{T}$ nicht konstant sind.

Aus $\dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{T}\dot{\mathfrak{p}}$ folgt $\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{T}'\dot{\mathfrak{q}}$, also explizite das Gleichungssystem

	(I)	(II)	(III)
$\dot{x} = \alpha_1\dot{\xi} + \alpha_2\dot{\eta} + \alpha_3\dot{\zeta},$	$\dot{\alpha}_1$	$\dot{\alpha}_2$	$\dot{\alpha}_3$
$\dot{y} = \beta_1\dot{\xi} + \beta_2\dot{\eta} + \beta_3\dot{\zeta},$	$\dot{\beta}_1$	$\dot{\beta}_2$	$\dot{\beta}_3$
$\dot{z} = \gamma_1\dot{\xi} + \gamma_2\dot{\eta} + \gamma_3\dot{\zeta},$	$\dot{\gamma}_1$	$\dot{\gamma}_2$	$\dot{\gamma}_3$

das man auch durch Auflösung von (XXVII; 10b) erhält. Multipliziert man diese Gleichungen nacheinander mit den Faktoren (I), (II), (III) und addiert die Produkte, so erhält man wegen der Orthogonalitätsbedingungen (XXVII; 6) und nach Einführung der Ausdrücke (XXVII; 12)

$$\dot{\alpha}_1\dot{x} + \dot{\beta}_1\dot{y} + \dot{\gamma}_1\dot{z} = B\dot{\zeta} - C\dot{\eta},$$

$$\dot{\alpha}_2\dot{x} + \dot{\beta}_2\dot{y} + \dot{\gamma}_2\dot{z} = C\dot{\xi} - A\dot{\zeta},$$

$$\dot{\alpha}_3\dot{x} + \dot{\beta}_3\dot{y} + \dot{\gamma}_3\dot{z} = A\dot{\eta} - B\dot{\xi}.$$

Der Forderung (XXVII;9b) wäre demnach genügt, wenn außer (XXVII;11b) auch

(XXVII; 13)
$$\begin{cases} B\dot{\zeta} - C\dot{\eta} = 0, \\ C\dot{\xi} - A\dot{\zeta} = 0, \\ A\dot{\eta} - B\dot{\xi} = 0 \end{cases}$$

gälte. Das wären wiederum zwei unabhängige Bedingungen für A, B, C, so daß insgesamt vier Bindungen zwischen den Transformationselementen und ihren Ableitungen bestehen müßten, während nur drei frei verfügbar sind. Es gibt aber eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen. Ist nämlich die ξ,η-Ebene in jedem Zeitpunkt mit der oskulierenden Bahnebene des gestörten Planeten identisch, so gilt für dessen Bewegung beständig

$$\zeta = 0, \quad \text{also auch} \quad \dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = \cdots = 0,$$

und aus (XXVII; 11b) folgt dann

(XXVII; 14)
$$\begin{cases} \text{a) } C = 0, \\ \text{b) } A\eta - B\xi = 0, \end{cases}$$

und von den Gleichungen (XXVII; 13) gelten die ersten beiden, die letzte nicht. Führt man aber statt der Störungsfunktion Ω eine neue,

$$\Omega' = \Omega + (A\dot{\eta} - B\dot{\xi})\zeta$$

ein, so erhält man

(XXVII; 15)
$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\xi = \dfrac{\partial\Omega'}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \ddot{\eta} + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\eta = \dfrac{\partial\Omega'}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \\ \ddot{\zeta} + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\zeta = \dfrac{\partial\Omega'}{\partial\zeta} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} + A\dot{\eta} - B\dot{\xi} = 0. \end{cases}$$

Damit ist gezeigt, daß die Bewegung in der ξ,η-Ebene durch Differentialgleichungen beschrieben wird, die die gewünschte Form haben. Die letzte Gleichung (XXVII; 13) braucht also nicht erfüllt zu sein, da sie auf diese Bewegung keinen Einfluß hat. Andererseits wird man aber noch beweisen müssen, daß

$$\text{(XXVII; 16)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} + A\dot{\eta} - B\dot{\xi} = 0$$

ist, so daß die letzte Gleichung (XXVII;15) keinen Widerspruch enthält. Diesen Beweis werden wir im nächsten Abschnitt nachholen.

Es sei also jetzt die Lage der oskulierenden Bahnebene durch i, Ω und die Richtung der positiven ξ-Achse durch σ gegeben. Die ersten beiden Größen sind als Funktionen der Zeit durch die Differentialgleichungen (XXVII; 1) und Anfangswerte i_0, Ω_0 zu einer Ausgangszeit t_0 gegeben. Es gilt also noch, eine Differentialgleichung für $\sigma(t)$ aufzustellen. Durch sie und durch einen geeignet zu wählenden Anfangswert σ_0 wird die Richtung der ξ-Achse in der oskulierenden Ebene festgelegt, und zwar müssen die Bedingungen (XXVII; 14) erfüllt sein, damit ξ, η, ζ ideale Koordinaten sind.

Differenziert man die Größen (XXVII; 7), so ergibt sich nach einfacher Reduktion

$$\text{(XXVII; 17)} \quad \begin{cases} d\alpha_1 = -\alpha_2 d\sigma - \beta_1 d\Omega - \alpha_3 \sin\sigma\, di, \\ d\beta_1 = -\beta_2 d\sigma + \alpha_1 d\Omega - \beta_3 \sin\sigma\, di, \\ d\gamma_1 = -\gamma_2 d\sigma \qquad\qquad - \gamma_3 \sin\sigma\, di, \\ d\alpha_2 = \alpha_1 d\sigma - \beta_2 d\Omega + \alpha_3 \cos\sigma\, di, \\ d\beta_2 = \beta_1 d\sigma + \alpha_2 d\Omega + \beta_3 \cos\sigma\, di, \\ d\gamma_2 = \gamma_1 d\sigma \qquad\qquad + \gamma_3 \cos\sigma\, di, \\ d\alpha_3 = \qquad - \beta_3 d\Omega + (\alpha_1 \sin\sigma - \alpha_2 \cos\sigma)\, di, \\ d\beta_3 = \qquad \alpha_3 d\Omega + (\beta_1 \sin\sigma - \beta_2 \cos\sigma)\, di, \\ d\gamma_3 = \qquad\qquad (\gamma_1 \sin\sigma - \gamma_2 \cos\sigma)\, di \end{cases}$$

und daraus unter Anwendung der Orthogonalitätsbedingungen

$$\text{(XXVII; 17a)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{d\Omega}{dt} \sin\sigma \sin i - \dfrac{di}{dt} \cos\sigma, \\ B = -\dfrac{d\Omega}{dt} \cos\sigma \sin i - \dfrac{di}{dt} \sin\sigma, \\ C = \dfrac{d\sigma}{dt} - \dfrac{d\Omega}{dt} \cos i. \end{cases}$$

Die Gleichungen (XXVII; 14) sind also befriedigt, wenn man

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}\cos i \tag{XXVII; 18}$$

und

$$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}(\eta\sin\sigma + \xi\cos\sigma) - \frac{di}{dt}(\eta\cos\sigma - \xi\sin\sigma) = 0$$

setzt. Sei nun, wie in (XXVII; 3), $\xi = r\cos w$, $\eta = r\sin w$, wenn w die von der Richtung U (Abb. 9) aus gezählte Länge des sphärischen Planetenorts Q in der intermediären Bahn bedeutet, so ist $w = u + \sigma$, und die letzte Gleichung ergibt

$$\frac{d\Omega}{dt}\sin i\cos u - \frac{di}{dt}\sin u = 0,$$

übereinstimmend mit (XXVII; 2).

Die geometrische Bedeutung von (XXVII; 14a bzw. 18) ist leicht einzusehen. An der heliozentrischen Einheitskugel (Abb. 9) sind die Koordinaten

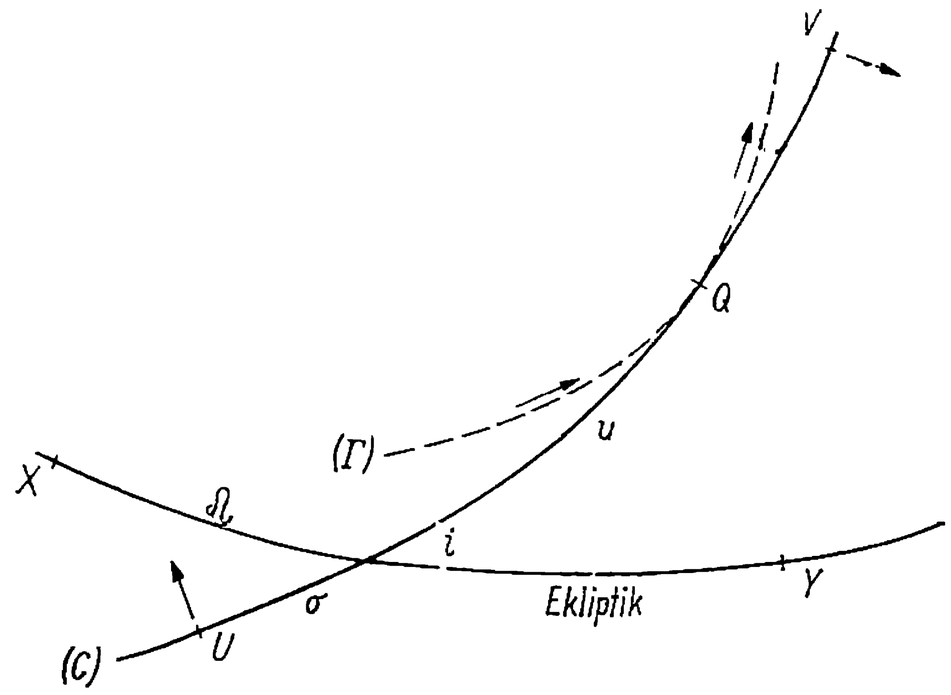

Abb. 9. Abrollen der intermediären auf der gestörten Bahnebene
((C) = Spur der intermediären Bahnebene; (Γ) = Spur der gestörten Bahnebene; Q = sphärischer Ort des gestörten Planeten)

der Richtungspunkte U, V der positiven ξ- bzw. η-Achse im System der Ekliptik

$$U = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1); \quad V = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

Ebenso sind

$$\dot U = (\dot\alpha_1, \dot\beta_1, \dot\gamma_1); \quad \dot V = (\dot\alpha_2, \dot\beta_2, \dot\gamma_2)$$

ihre zeitlichen Änderungen, und es ist wegen (XXVII; 14a) und (XXVII; 12)

$$\cos(U\dot V) = \cos(V\dot U) = 0.$$

Während sich also Q auf der Spur der intermediären Bahnebene fortbewegt, bewegt sich U senkrecht zur V-Achse, V senkrecht zur U-Achse, beide also normal zur ξ,η-Ebene. Man kann diesen geometrischen Vorgang einfach, aber dennoch exakt so formulieren: Die Spur (C) der intermediären Bahnebene, die während ihrer Bewegung die Spur (Γ) der gestörten Bahnebene beständig in Q berührt, rollt sich auf (Γ) ab, ohne daß sich der „departure point" U auf ihr verlagert.

Aufgrund dieser Feststellung ergibt sich die Gleichung (XXVII; 18) durch eine einfache geometrische Überlegung: Seien in Abb. 10 (C) und (C') die

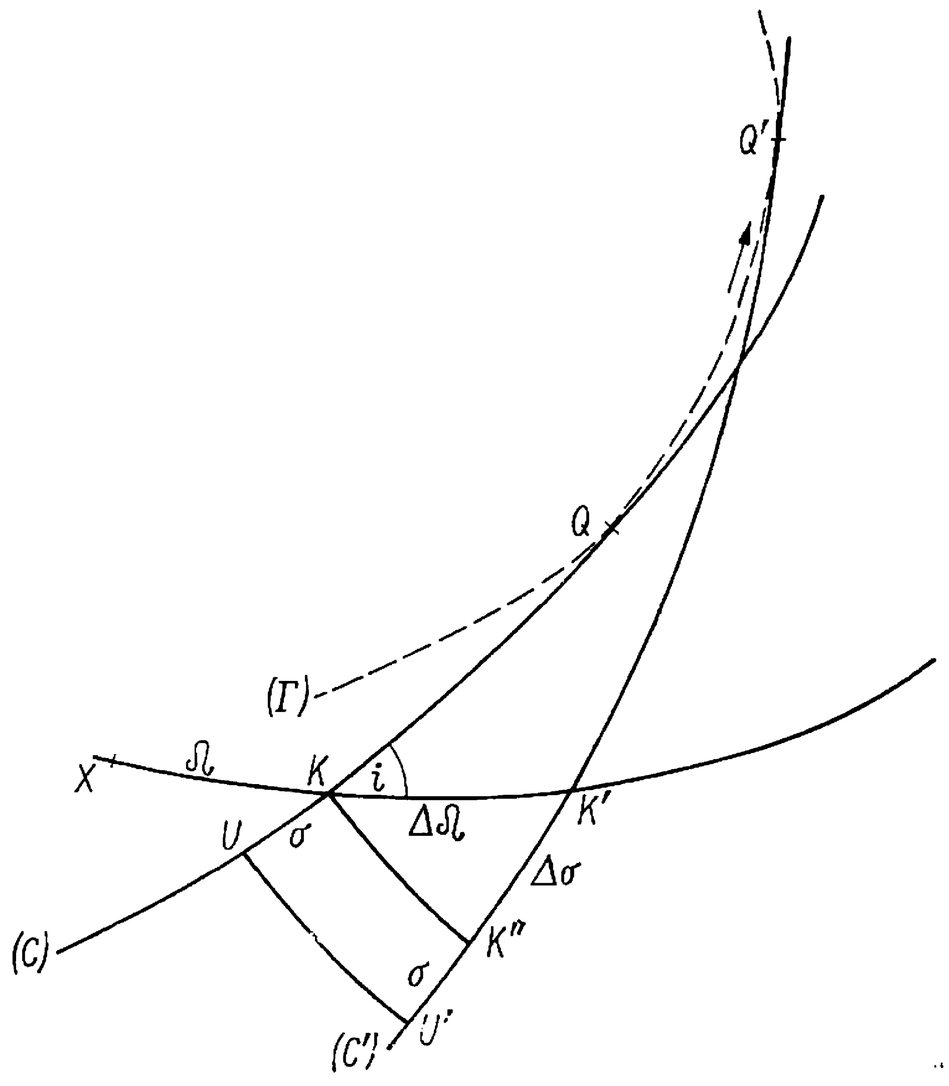

Abb. 10. Geometrische Interpretation der Differentialgleichung für σ

Spuren der intermediären Bahnebene zu zwei benachbarten Zeitpunkten t und $t' = t + \Delta t$, K, K' die entsprechenden Knoten, Q, Q' die sphärischen Planetenörter, U, U' die Richtungen der ξ-Achse zu diesen Zeiten. Dann ist das kleine Dreieck $KK'K''$ bei K'' rechtwinklig, und es gilt genähert

$$\Delta\Omega \cos i = \Delta\sigma.$$

Diese Beziehung geht aber für $\Delta t \to 0$ in (XXVII; 18) über.

Die Lösung der Differentialgleichung (XXVII; 18) enthält noch eine willkürliche Konstante, den Wert σ_0, den $\sigma(t)$ für $t = t_0$ annimmt. Es ist zweckmäßig, $\sigma_0 = \Omega_0$ zu setzen. Das bedeutet, daß in beiden Systemen die Länge des Planetenorts zur Zeit t_0 den gleichen Wert hat, denn es ist im System der Ekliptik diese Länge $l = \Omega + u$, im idealen ξ,η,ζ-System $w = \sigma + u$.

228. Die Grundgleichungen der Hansenschen Theorie

Für ideale Koordinaten gilt der wichtige Satz, daß Funktionen solcher Koordinaten, die auch noch konstante Parameter enthalten dürfen, ebenfalls „ideal" sind. Ist nämlich $f(\xi, \eta, \zeta)$ eine solche Funktion und gilt

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z; \qquad \dot{\xi} = \alpha_1 \dot{x} + \beta_1 \dot{y} + \gamma_1 \dot{z}; \ \ldots,$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial \xi}\,\dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,\dot{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\,\dot{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,(\alpha_1 \dot{x} + \beta_1 \dot{y} + \gamma_1 \dot{z}) + \cdots = \\ &= \dot{x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\,\alpha_3\right) + \cdots = \\ &= \dot{x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \cdots = \frac{\partial f}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\dot{z}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Funktion nach der Zeit (oder einer anderen unabhängigen Variablen) haben also in beiden Systemen die gleiche analytische Form, wenn die α_i, β_i, γ_i beim Differenzieren als konstant angesehen werden dürfen, auch wenn sie variabel sind, d. h., wenn die ξ, η, ζ ideale Koordinaten sind. Das gilt für die ersten und cum grano salis auch für die zweiten Ableitungen.

Transformiert man die idealen Koordinaten ξ, η in der instantanen Bahnebene $\zeta = 0$ durch

$$\xi = r \cos w; \qquad \eta = r \sin w$$

auf Polarkoordinaten, so sind r und w ideale Koordinaten, und es gelten für sie die erste und dritte der Differentialgleichungen (XXIII; 12a), wenn dort $\lambda = w$, $\beta = 0$ gesetzt wird, also

(XXVII; 19)
$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{w}^2 = \dfrac{\partial U}{\partial r} = -\dfrac{\varkappa^2}{r^2} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\,(r^2 \dot{w}) = \dfrac{\partial U}{\partial w} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial w}, \end{cases}$$

und es ist nach (XXIII; 11) $U = \varkappa^2/r + \Omega$ die Potentialfunktion und Ω die Störungsfunktion. Die zweite Gleichung (XXIII; 12a) nimmt für den Zeitpunkt der Oskulation, wo $\beta = \dot{\beta} = 0$ ist, die Form

$$\frac{d}{dt}\,(r^2 \dot{\beta}) = 2r\dot{r}\dot{\beta} + r^2 \ddot{\beta} = r^2 \ddot{\beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$$

an und definiert (s. Abb. 9, S. 171) die durch $\ddot{\beta}$ ausgedrückte Krümmung der gestörten Bahnebene (Γ) im Oskulationsort Q an der Sphäre. Sie hat also für die Bewegung des Planeten in der instantanen Bahnebene keine Bedeutung.

In der ξ,η-Ebene ist die Störungsfunktion Ω nur von ξ, η bzw. r, w abhängig, außerdem natürlich von den Koordinaten des störenden Planeten in bezug auf das ξ,η,ζ-System, nach denen aber nicht differenziert wird und die daher bei der Bildung der partiellen Ableitungen als Konstante gelten. Es ist dann

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\cos w + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\sin w,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial w} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial w} = r\left[-\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\sin w + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\cos w\right].$$

Sei nun, wie in Abschnitt 157, S die Koordinate der störenden Kraft in Richtung des Ortsvektors des gestörten Körpers, T diejenige in der instantanen Bahnebene und senkrecht zum Ortsvektor im Sinne der Bewegung, Z diejenige in Richtung nach dem nördlichen Pol der Bahnebene,[1]) so ist offenbar

$$S = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\cos w + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\sin w,$$

$$T = -\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\sin w + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\cos w,$$

$$Z = \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},$$

und man erhält für den Oskulationszeitpunkt

(XXVII; 20)
$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{w}^2 + \dfrac{\varkappa^2}{r^2} = S, \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = rT. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung (XXVII; 20) läßt sich wegen (XVIII; 52c) auf

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = r\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(T) = \frac{\varkappa}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt} = \varkappa\frac{d\sqrt{p}}{dt}$$

zurückführen. Durch Integration ergibt sich also

(XXVII; 21)
$$r^2\dot{w} = \varkappa\sqrt{p} + \text{const}.$$

[1]) Wir bezeichnen von jetzt an die zur instantanen Bahnebene normale Koordinate der störenden Kraft mit Z statt mit W, da in der HANSENschen Theorie das Symbol W eine andere Bedeutung hat (s. Abschnitt 230).

Die Integrationskonstante entfällt, wenn man annimmt, daß für die Anfangszeit t_0

$$r_0^2 w_0 = \varkappa \sqrt{p_0}$$

ist. Die Länge w in der intermediären Bahn genügt also formal derselben Differentialgleichung wie die wahre Länge (oder die wahre Anomalie, die sich von ihr nur durch eine Konstante unterscheidet) in der ungestörten KEPLERschen Bewegung, mit dem Unterschied allerdings, daß der Parameter p in (XXVII; 21) nicht konstant, sondern der Störungsgleichung (XVIII; 52c) unterworfen ist.

Diese bemerkenswerte Beziehung dient zum Beweis der Gleichung (XXVII; 16), den wir noch zurückgestellt hatten. Aus (XXVII; 17a) ergibt sich

$$A\dot{\eta} - B\dot{\xi} = \sin i \frac{d\Omega}{dt} (\dot{\eta} \sin \sigma + \dot{\xi} \cos \sigma) - \frac{di}{dt} (\dot{\eta} \cos \sigma - \dot{\xi} \sin \sigma).$$

Setzt man aber

$$\dot{\xi} = \dot{r} \cos w - rw \sin w; \quad \dot{\eta} = \dot{r} \sin w + rw \cos w,$$

so folgt wegen $w - \sigma = u$, (XXVII; 1, 2) und (XXVII; 21)

$$A\dot{\eta} - B\dot{\xi} = -rw \left(\sin i \sin u \frac{d\Omega}{dt} + \cos u \frac{di}{dt} \right) =$$

$$= -rw(Z) \frac{r}{p} = -\frac{r^2 w}{p} \frac{\sqrt{p}}{\varkappa} Z = -Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta},$$

womit (XXVII; 16) bewiesen ist.

Einige zusätzliche Bemerkungen sind nützlich, um die Vorteile zu zeigen, die das ideale Koordinatensystem bietet. Statt der Länge des Perihels der oskulierenden Bahn, die durch

$$\tilde{\omega} = \Omega + u - v = w - v + \Omega - \sigma$$

gegeben ist, wird man die Perihellänge zweckmäßig in der instantanen Bahnebene vom „departure point“ U (Abb. 7—10) aus zählen. Sie ist dann durch

(XXVII; 22) $$\chi = w - v = \tilde{\omega} - (\Omega - \sigma)$$

definiert, und es ist nur für die Anfangszeit t_0, für die aufgrund der Festsetzung am Schluß des vorigen Abschnitts $\sigma_0 = \Omega_0$ ist, $\chi_0 = \tilde{\omega}_0$. Die Größe χ als Funktion der Zeit folgt aus den Differentialgleichungen (XVIII; 52b). Es ist

$$\dot{\chi} = \dot{\tilde{\omega}} - (\dot{\Omega} - \dot{\sigma})$$

und wegen (XXVII; 18)

$$\dot{\Omega} - \dot{\sigma} = \dot{\Omega}\,(1 - \cos i) = 2\dot{\Omega}\sin^2\frac{i}{2} = 2(Z)\,\frac{r}{p}\sin u\,\frac{\sin^2\frac{i}{2}}{\sin i} =$$

$$= (Z)\,\frac{r}{p}\sin u\tan\frac{i}{2},$$

also, mit $e = \sin\varphi$,

$$\text{(XXVII; 23)}\qquad \sin\varphi\,\frac{d\chi}{dt} = \sin\varphi\,\frac{d\tilde{\omega}}{dt} - (Z)\,\frac{r}{p}\sin u\sin\varphi\tan\frac{i}{2} =$$

$$= -(S)\cos v + (T)\left(\frac{r}{p} + 1\right)\sin v.$$

Die Differentialgleichung für χ ist also wesentlich einfacher als die für $\tilde{\omega}$.

Neben r ist auch $\dot{r} = (1/r)\,(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta})$ eine ideale Größe, denn es sind ja außer ξ, η auch $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ ideal, wie sich ergibt, wenn man (XXVII; 10b) differenziert und (XXVII; 13) berücksichtigt. Die Gleichung

$$\dot{r} = \varkappa\frac{e}{\sqrt{p}}\sin v,$$

die für die ungestörte Bewegung gilt, ist also auch für die gestörte noch richtig, wenn man $v = w - \chi$ setzt und die Größen χ, e und p als gestörte Bahnelemente betrachtet. In der Tat erhält man durch nochmaliges Differenzieren

$$\ddot{r} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\left[\dot{e}\sin v + e\dot{v}\cos v - \frac{e}{2p}\,\dot{p}\sin v\right],$$

und da nach (XVIII; 52b, c) und (XXVII; 22, 23)

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,\dot{e} = S\sin v + T\,(\cos v + \cos E),$$

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,\dot{v} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,(\dot{w} - \dot{\chi}) = \frac{\varkappa^2}{r^2} + \frac{1}{e}\left[S\cos v - T\left(\frac{r}{p} + 1\right)\sin v\right],$$

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,\dot{p} = 2rT$$

ist, folgt

$$\ddot{r} = S + \frac{T}{p}\sin v\,[p\cos E - r\,(e + \cos v)] + \frac{\varkappa^2}{r^2}\,e\cos v.$$

Da aber in jedem Oskulationszeitpunkt die Formeln

$$r\cos v = a(\cos E - e); \qquad r = a(1 - e\cos E)$$

auch für die gestörten Koordinaten und Elemente gelten, so ist

$$p\cos E - r(e + \cos v) = a(1 - e^2)\cos E - re - a(\cos E - e) = \\ = e(a - r - ae\cos E) = 0,$$

also

$$\ddot{r} = S + \frac{\varkappa^2}{r^2} e\cos v = S - \frac{\varkappa^2}{r^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right)$$

oder, da $\varkappa^2 p = r^4 w^2$ ist,

$$\ddot{r} - rw^2 + \frac{\varkappa^2}{r^2} = S.$$

Man erhält also genau die erste Gleichung (XXVII; 20), die somit auch auf diese Weise aus den idealen Eigenschaften des Systems abgeleitet werden kann.

Die Grundgleichungen der HANSENschen Theorie lassen sich, wie folgt, in zwei Gruppen zusammenstellen: Für die Lagekoordinaten des idealen Systems in bezug auf das feste System (Ekliptik) gilt

(XXVII; 24a)
$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{\varkappa\sqrt{p}} Zr\cos(w - \sigma), \\ \sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{\varkappa\sqrt{p}} Zr\sin(w - \sigma), \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = \cos i\,\dfrac{d\Omega}{dt} \end{cases}$$

und für die Koordinaten des gestörten Planeten in der intermediären Ebene

(XXVII; 24b)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 + \dfrac{\varkappa^2}{r^2} = S, \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{dw}{dt}\right) = rT. \end{cases}$$

229. Die Bewegung in der instantanen Bahnebene

Wir nehmen einstweilen an, daß die Gleichungen (XXVII; 24a) gelöst sind, die Lage des ξ,η,ζ-Systems in bezug auf das feste Koordinatensystem also für jeden Zeitpunkt t bekannt ist. Dann ist die Bewegung des Planeten P in der ξ,η-Ebene durch $r(t)$ und $w(t)$ bestimmt, und die Länge w wird vom „departure point“ $\eta = 0$ aus gezählt.

Es seien nun in der ξ,η-Ebene, außer der gestörten Bahn des Planeten P selbst, zwei verschiedene elliptische KEPLERsche Bewegungen definiert, die von zwei fiktiven Planeten P' und P_0 ausgeführt werden. Die Bahn von P' sei die oskulierende Bahn im Zeitpunkt t, ihre Elemente

$$\text{(XXVII; 25)} \qquad a;\ e;\ \chi;\ \gamma = \varepsilon - \chi;\ n = \varkappa a^{-3/2};\ p = a\,(1 - e^2)$$

sind dann Funktionen der Zeit, und ihr Zusammenhang mit der gestörten Bewegung von P ist durch die Oskulationsbedingungen gegeben. Es gelten dann die aus der Theorie der Zweikörperbewegung bekannten Beziehungen

$$\text{(XXVII; 26a)} \qquad \begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos v} = a\,(1 - e\cos E), \\ r\cos v = a\,(\cos E - e), \quad w = \chi + v, \\ r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\,\sin E, \quad \tan\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\tan\dfrac{E}{2} \end{cases}$$

und, da r, w ideale Koordinaten sind,

$$\text{(XXVII; 26b)} \qquad \begin{cases} M = nt + \gamma = E - e\sin E, \\ \dot r = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,e\sin v, \quad \dot E = \dfrac{na}{r}, \\ r^2\dot w = \varkappa\sqrt{p}. \end{cases}$$

Die Bahn von P_0 sei durch die für alle Zeiten konstanten Elemente

$$\text{(XXVII; 27)} \qquad a_0;\ e_0;\ \chi_0;\ \gamma_0 = \varepsilon_0 - \chi_0;\ n_0 = \varkappa a_0^{-3/2};\ p_0 = a_0\,(1 - e_0^2)$$

definiert, ihre Lage in der ξ,η-Ebene aber so festgelegt, daß P_0 und P' stets die gleichen Längen haben, also

$$\text{(XXVII; 28)} \qquad w = w_0 = \chi + v = \chi_0 + v_0;\quad v = v_0 - (\chi - \chi_0)$$

ist. Der Ortsvektor von P_0 fällt also stets in die Richtung des Ortsvektors von P und P', es ist aber

$$\text{(XXVII; 29)} \qquad r = r_0\,(1 + \nu)$$

von r_0 um einen Faktor verschieden, der von der Einheit nur wenig abweicht, wenn die Elemente (XXVII; 27) sich von den Elementen (XXVII; 25) nur um Größen von der Ordnung der störenden Masse unterscheiden. Man wird also die Konstanten (XXVII; 27) am besten so festlegen, daß sie den Mittelwerten der oskulierenden Bahnelemente über lange Zeiträume hinweg möglichst nahekommen. Sofern solche Mittelwerte nicht zur Verfügung stehen, ist es

zweckmäßig, die Größen (XXVII; 27) mit den oskulierenden Bahnelementen zu identifizieren, die für eine Oskulationsepoche t_0 gelten, die in einem durch Beobachtungen belegten Zeitintervall liegt. Wir werden vorerst diese spezielle stets realisierbare Definition der intermediären Elemente (XXVII; 27) stillschweigend voraussetzen, aber im Auge behalten, daß sie keineswegs verbindlich und im allgemeinen auch nicht die vorteilhafteste ist. Andererseits wird man langjährige Mittelwerte der oskulierenden Bahnelemente (XXVII; 25) a priori nicht verfügbar haben — das wird erst der Fall sein, wenn man (etwa aufgrund einer genäherten Störungsrechnung) eine Vorstellung von dem Verhalten der Bahnelemente in größeren Zeiträumen hat.

Für die Bewegung von P_0 gelten die Beziehungen

$$\text{(XXVII; 30a)} \quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{p_0}{1 + e_0 \cos v_0} = a_0 (1 - e_0 \cos E_0), \\ r_0 \cos v_0 = a_0 (\cos E_0 - e_0); \quad w_0 = \chi_0 + v_0 = w = \chi + v \\ r_0 \sin v_0 = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0; \quad \tan \dfrac{v_0}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + e_0}{1 - e_0}} \tan \dfrac{E_0}{2}, \end{cases}$$

aber nicht die (XXVII; 26b) entsprechenden Gleichungen für M_0, $\dot{r}_0$ $\dot{w}_0$, denn wegen (XXVII; 28), $\chi_0 = \text{const}$ und (XXVII; 29) ist

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{dw_0}{dt} = \frac{\varkappa \sqrt{p}}{r^2} = \frac{\varkappa \sqrt{p}}{r_0^2} \frac{1}{(1 + \nu)^2},$$

also

$$r_0^2 \frac{dw_0}{dt} = \varkappa \sqrt{p_0} \sqrt{\frac{p}{p_0}} \frac{1}{(1 + \nu)^2},$$

nicht konstant. Man kann aber diese Beziehungen der P_0-Bewegung, in denen die Zeit vorkommt, auf eine (XXVII; 26b) entsprechende Form bringen, wenn man statt t eine „fiktive“ oder „reduzierte“ Zeit $z = z(t)$ so einführt, daß

$$r_0^2 \frac{dw_0}{dz} = r_0^2 \frac{dv_0}{dz} = \varkappa \sqrt{p_0} = \text{const}$$

und demnach

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{dv_0}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_0}{dz} \sqrt{\frac{p}{p_0}} \frac{1}{(1 + \nu)^2}$$

ist. Setzt man also zur Abkürzung

$$h = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}; \quad h_0 = \frac{\varkappa}{\sqrt{p_0}}; \quad \sqrt{\frac{p}{p_0}} = \frac{h_0}{h},$$

so folgt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h (1 + \nu)^2}.$$

Mit z als Pseudozeit erhält man dann

$$\text{(XXVII; 30 b)}\qquad \begin{cases} M_0 = n_0 z + \gamma_0 = E_0 - e_0 \sin E_0, \quad (\gamma_0 = \varepsilon_0 - \chi_0), \\ \dfrac{dr_0}{dz} = \varkappa \dfrac{e_0}{\sqrt{p_0}} \sin v_0 = h_0 e_0 \sin v_0, \\ {r_0}^2 \dfrac{dv_0}{dz} = \varkappa \sqrt{p_0} = h_0 p_0, \end{cases}$$

und man bestätigt die Verträglichkeit der ersten beiden dieser Beziehungen mit der dritten durch eine einfache Prüfung. Aus

$$\frac{dE_0}{dz} = \frac{n_0}{1 - e_0 \cos E_0} = \frac{n_0 a_0}{r_0},$$

$$\frac{dr_0}{dz} = a_0 e_0 \sin E_0 \frac{dE_0}{dz} = \frac{r_0 e_0 \sin v_0}{\sqrt{1 - {e_0}^2}} \frac{dE_0}{dz}$$

und

$$\frac{dr_0}{dz} = \frac{p_0 e_0 \sin v_0}{(1 + e_0 \cos v_0)^2} \frac{dv_0}{dz} = \frac{e_0}{p_0} \sin v_0 \cdot {r_0}^2 \frac{dv_0}{dz}$$

folgt nämlich übereinstimmend

$$\frac{dr_0}{dz} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p_0}} e_0 \sin v_0.$$

Damit ist gezeigt, daß man die Koordinaten r, w des Planeten auf die Koordinaten r_0, v_0 und die konstanten Elemente a_0, e_0, χ_0 der KEPLERschen Bahn von P_0 durch (XXVII; 28, 29),

$$r = r_0 (1 + \nu), \qquad w = \chi_0 + v_0,$$

zurückführen kann, wenn ν und z bzw. $\delta z = z - t$ als Funktionen von t bekannt sind. Außer

$$\text{(XXVII; 31)}\qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h (1 + \nu)^2}; \qquad \frac{d\delta z}{dt} = \frac{h_0}{h (1 + \nu)^2} - 1$$

muß also noch eine Differentialgleichung für ν gefunden werden.

Es ist, wegen $v = v_0 - (\chi - \chi_0)$,

$$\frac{1}{1 + \nu} = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{p} [1 + e \cos \{v_0 - (\chi - \chi_0)\}].$$

Da nun $\chi - \chi_0$ klein von der Ordnung der störenden Kräfte ist, kann man

$$\text{(XXVII; 32)} \qquad \begin{cases} e\cos(\chi-\chi_0) = e_0 + \varphi\,(1-e_0^2), \\ e\sin(\chi-\chi_0) = \qquad \psi\,(1-e_0^2) \end{cases}$$

setzen, wo φ und ψ ebenfalls kleine Größen sind, und es ist dann

$$\frac{1}{1+v} = \frac{r_0}{p}\,[1 + e_0\cos v_0 + (1-e_0^2)\,(\varphi\cos v_0 + \psi\sin v_0)]$$

oder, wegen $r_0\,(1 + e_0\cos v_0) = p_0 = a_0\,(1-e_0^2)$, $p_0/p = h^2/h_0^2$,

$$\text{(XXVII; 33)} \qquad \frac{1}{1+v} = \frac{h^2}{h_0^2}\left[1 + \frac{r_0}{a_0}\,(\varphi\cos v_0 + \psi\sin v_0)\right].$$

Die Gleichungen (XXVII; 31, 33) sind zur Bestimmung von z und v nicht geeignet, lassen sich aber in eine praktisch verwendbare Gestalt umformen. Man setze

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h\,(1+v)^2} = \frac{h_0}{h}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 + 2\,\frac{h_0}{h\,(1+v)} - \frac{h_0}{h} = 1 + \overline{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2,$$

wo

$$\overline{W} = 2\,\frac{h_0}{h\,(1+v)} - \frac{h_0}{h} - 1 = 2\,\frac{h}{h_0}\,\frac{h_0^2}{h^2\,(1+v)} - \frac{h_0}{h} - 1$$

von der ersten Ordnung in der störenden Masse ist, da $\overline{W} \to 0$ für $h \to h_0$ und $v \to 0$ gilt. Eliminiert man $1 + v$ durch (XXVII; 33), so folgt

$$\text{(XXVII; 34)} \qquad \overline{W} = \frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\,\frac{h}{h_0}\,\frac{r_0}{a_0}\,(\varphi\cos v_0 + \psi\sin v_0),$$

und es ist

$$\text{(XXVII; 35)} \qquad \frac{d\delta z}{dt} = \overline{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2$$

in einen Ausdruck erster Ordnung und in ein Zusatzglied zweiter Ordnung aufgespalten — das letztere wird man fortlassen dürfen, wenn man sich auf Störungen erster Ordnung beschränkt. Nach einem Vorschlag von G. W. Hill kann man wegen (XXVII; 31),

$$\frac{h_0}{h} = (1+v)^2\,\frac{dz}{dt},$$

auch

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W} + v^2\,\frac{dz}{dt} = \overline{W} + v^2\left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right)$$

schreiben, woraus

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2} \approx \overline{W} \tag{XXVII; 36}$$

folgt.

Differenziert man (XXVII; 29), so erhält man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dz}(1+\nu)\frac{dz}{dt} + r_0\frac{dv}{dt} = h_0 e_0 \sin v_0 \cdot \frac{h_0}{h(1+\nu)} + r_0\frac{dv}{dt},$$

also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r_0} e \sin v - \frac{{h_0}^2}{hr} e_0 \sin v_0 =$$

$$= \frac{h}{p_0}[e \sin v (1 + e_0 \cos v_0) - e_0 \sin v_0 (1 + e \cos v)],$$

und wegen (XXVII; 28, 32)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{p_0}[e \sin \{v_0 - (\chi - \chi_0)\} - e_0 \sin v_0 - e e_0 \sin (\chi - \chi_0)] =$$

$$= \frac{h}{p_0}[\{e_0 + \varphi(1 - {e_0}^2)\} \sin v_0 - \psi(1 - {e_0}^2)\cos v_0 - e_0\{\sin v_0 + \psi(1 - {e_0}^2)\}]$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{a_0}[\varphi \sin v_0 - \psi(e_0 + \cos v_0)]. \tag{XXVII; 37}$$

Die Gleichungen (XXVII; 34—37) zeigen, daß $\overline{W}$ und dv/dt die Variablen h, φ, ψ enthalten. Es wird daher nötig sein, für diese Größen oder zweckmäßig gewählte Funktionen von ihnen Differentialgleichungen aufzustellen, durch die sie als Funktionen der Zeit definiert sind. Setzt man etwa

$$\Xi = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1; \quad \Phi = 2\frac{h}{h_0}\varphi; \quad \Psi = 2\frac{h}{h_0}\psi,$$

so erhält man

$$\begin{cases} \overline{W} = \Xi + \dfrac{r_0}{a_0}(\Phi \cos v_0 + \Psi \sin v_0), \\ \dfrac{d\delta z}{dt} = \dfrac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{h_0}{2a_0}[\Phi \sin v_0 - \Psi(e_0 + \cos v_0)], \end{cases} \tag{XXVII; 38}$$

und das Problem läßt sich daher auf die Bestimmung von Ξ, Φ, Ψ zurückführen.

Aus $h = \varkappa/\sqrt{p}$ und (XVIII; 52c) folgt

$$\text{(XXVII; 39)} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\varkappa}{2\sqrt{p^3}}\frac{dp}{dt} = -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\frac{r(T)}{p} = -\frac{r}{p}T,$$

also

$$\text{(XXVII; 40a)} \qquad \frac{d\Xi}{dt} = -h_0\left(1 + 2\frac{h^2}{{h_0}^2}\right)\frac{rT}{\varkappa^2}.$$

Nun ist nach (III; 60)

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v} = \frac{r}{p}(\cos v + e); \quad \cos v + \cos E = \left(\frac{r}{p} + 1\right)\cos v + e\frac{r}{p},$$

also nach (XVIII; 52b) und (XXVII; 23, 39)

	(I)	(II)
$\frac{d(he)}{dt} = S\sin v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\cos v,$	$\cos(\chi-\chi_0)$	$\sin(\chi-\chi_0)$
$he\frac{d\chi}{dt} = -S\cos v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v.$	$-\sin(\chi-\chi_0)$	$\cos(\chi-\chi_0)$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiert die Produkte, so erhält man, da $v + \chi - \chi_0 = w - \chi_0 = v_0$ ist,

$$\frac{d}{dt}[he\cos(\chi-\chi_0)] = S\sin v_0 + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\cos v_0,$$

$$\frac{d}{dt}[he\sin(\chi-\chi_0)] = -S\cos v_0 + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v_0.$$

Andererseits folgt aus (XXVII; 32)

$$(1-{e_0}^2)h\varphi = (1-{e_0}^2)\frac{h_0}{2}\Phi = he\cos(\chi-\chi_0) - he_0,$$

$$(1-{e_0}^2)h\psi = (1-{e_0}^2)\frac{h_0}{2}\Psi = he\sin(\chi-\chi_0)$$

und daher

$$\text{(XXVII; 40b)} \qquad \begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2}{h_0(1-{e_0}^2)}\left[S\sin v_0 + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\cos v_0 + e_0T\frac{r}{p}\right], \\ \frac{d\Psi}{dt} = \frac{2}{h_0(1-{e_0}^2)}\left[-S\cos v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v_0\right]. \end{cases}$$

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung und wählt die Zeiteinheit so, daß $\varkappa = 1$ ist, so darf man in den Störungsgliedern den Index Null fortlassen, und es ist $1/[h\,(1 - e^2)] = ah$ und

$$\text{(XXVII; 41)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Xi}{dt} = -3hrT, \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = 2ha\left[S\sin v + T\left\{\dfrac{r}{p}\,(e + \cos v) + \cos v\right\}\right], \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = 2ha\left[-S\cos v + T\left(\dfrac{r}{p} + 1\right)\sin v\right]. \end{cases}$$

230. Die Hansensche W-Funktion

Die Differentialgleichung (XXVII; 37), durch die v als Funktion von t bestimmt wird, läßt sich auch auf eine andere, sehr elegante Weise ableiten. Da $v = r/r_0 - 1$ ist und r, r_0 ideale Koordinaten sind, so ist auch v ideal. Man kann also v nach der Zeit differenzieren, ohne von der durch die Störungen bedingten Lageänderung der ξ,η-Ebene gegen das feste Koordinatensystem Notiz zu nehmen, d. h., man darf die Elemente (XXVII; 25) der oskulierenden Bahn bzw. die von ihnen abhängigen Größen h, φ, ψ als konstant ansehen. Aus (XXVII; 33) ergibt sich dann

$$-\frac{1}{(1+v)^2}\frac{dv}{dt} = \frac{h^2}{a_0 h_0^2}\left[\varphi\frac{d}{dt}\,(r_0\cos v_0) + \psi\frac{d}{dt}\,(r_0\sin v_0)\right]$$

oder, da $(1 + v)^2 = \dfrac{h_0}{h}\dfrac{dt}{dz}$ ist,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{a_0 h_0}\left[\varphi\frac{d}{dz}\,(r_0\cos v_0) + \psi\frac{d}{dz}\,(r_0\sin v_0)\right].$$

Aus (XXVII; 30b) folgt aber nach einfacher Rechnung

$$\text{(XXVII; 42)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\,(r_0\cos v_0) = -h_0\sin v_0, \\ \dfrac{d}{dz}\,(r_0\sin v_0) = h_0\,(e_0 + \cos v_0) \end{cases}$$

und daher, übereinstimmend mit (XXVII; 37, 38),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{a_0}\,[\varphi\sin v_0 - \psi\,(e_0 + \cos v_0)] = \frac{h_0}{2a_0}\,[\Phi\sin v_0 - \Psi\,(e_0 + \cos v_0)].$$

Die formale Verwandtschaft zwischen der ersten und letzten Gleichung (XXVII; 38) läßt auf einen engen Zusammenhang zwischen ν und $\overline{W}$ schließen, wie er ja auch zwischen δz und $\overline{W}$ besteht. HANSEN hat diesen Zusammenhang durch das folgende Verfahren deutlich gemacht. Der diesem Verfahren zugrunde liegende Gedankengang, der sich weit über das hier vorliegende spezielle Problem hinaus als fruchtbar erwiesen hat, gehört zu den großen schöpferischen Konzeptionen dieses bedeutenden Theoretikers.

HANSEN führt eine Funktion

$$W(t, \zeta) = \Xi + \frac{\varrho}{a_0}(\Phi \cos\omega + \Psi \sin\omega) \tag{XXVII; 43}$$

der beiden unabhängigen Variablen t und ζ ein, in der Ξ, Φ, Ψ die im vorigen Abschnitt definierten Funktionen der Zeit sind, während ϱ, ω als Funktionen einer Pseudozeit $\zeta = \tau + \delta\zeta$ formal in gleicher Weise berechnet werden, wie r_0, v_0 nach (XXVII; 30a, b) als Funktionen von $z = t + \delta z$. Es ist also

$$\text{(XXVII; 44)} \quad \begin{cases} n_0\zeta + \gamma_0 = \eta - e_0 \sin\eta; & \zeta = \tau + \delta\zeta, \\ \varrho = \dfrac{p_0}{1 + e_0\cos\omega} = a_0(1 - e_0\cos\eta), & \\ \varrho\cos\omega = a_0(\cos\eta - e_0); & \dfrac{d}{d\zeta}(\varrho\cos\omega) = -h_0\sin\omega, \\ \varrho\sin\omega = a_0\sqrt{1 - e_0^2}\sin\eta; & \dfrac{d}{d\zeta}(\varrho\sin\omega) = h_0(e_0 + \cos\omega) \end{cases}$$

und daher

$$\frac{\partial W}{\partial\zeta} = -\frac{h_0}{a_0}[\Phi\sin\omega - \Psi(e_0 + \cos\omega)].$$

Nun vereinbaren wir, daß ein Querstrich über einem Funktionszeichen ($\bar{F}$) bedeutet, daß $F(\zeta)$ in $F(z)$ übergeht, so daß also $\bar{F}(\zeta) = F(z)$ ist und ebenso

$$\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

bedeutet, daß nach Ausführung der Differentiation ζ mit z zu vertauschen ist. Gleichzeitig werden auch ϱ, ω, η, τ, $\delta\zeta$ mit r_0, v_0, E_0, t, δz vertauscht. Dieser Vorschrift gemäß geht

$$\overline{W} = \Xi + \frac{r_0}{a_0}(\Phi\cos v_0 + \Psi\sin v_0)$$

in Einklang mit (XXVII; 38) aus W hervor. Ebenso folgt

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)} = -\frac{h_0}{a_0}[\Phi\sin v_0 - \Psi(e_0 + \cos v_0)] = -2\frac{dv}{dt}.$$

Für ν und δz als Funktionen von t gelten also die Differentialgleichungen

$$\text{(XXVII; 45)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\nu}{dt} = -\dfrac{1}{2}\overline{\left(\dfrac{\partial W}{\partial \zeta}\right)}, \\ \dfrac{d\delta z}{dt} = \dfrac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2}, \end{cases}$$

die explizit hingeschrieben werden können, wenn man W kennt. Diese Gleichungen sind streng und lassen die fundamentale Bedeutung der HANSENschen W-Funktion erkennen.

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, so genügt es, $W_0(t, \tau)$ statt $W(t, \zeta) = W(t, \tau + \delta\zeta)$ zur Darstellung der rechten Seiten von (XXVII; 45) zu benutzen. Statt ϱ, ω als Funktionen der gestörten mittleren Anomalie $n_0\tau + \gamma_0 + n_0\delta\zeta$, die in den überstrichenen Ausdrücken in $n_0 t + \gamma_0 + n_0\delta z$ übergeht, wird man dann ϱ_0, ω_0 als Funktionen einer ungestörten mittleren Anomalie $n_0\tau + \gamma_0$ definieren, durch ein Formelsystem, das aus (XXVII; 44) hervorgeht, wenn man ϱ, ω, η, ζ durch ϱ_0, ω_0, η_0, τ ersetzt.

Es ist dann

$$W_0(t, \tau) = \Xi + \frac{\varrho_0}{a_0}(\Phi \cos\omega_0 + \Psi \sin\omega_0).$$

Will man auch Störungen höherer Ordnung berechnen, so läßt sich $W(t, \tau + \delta\zeta)$ in eine TAYLORsche Reihe

$$W = W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial \tau}\delta\zeta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2}(\delta\zeta)^2 + \cdots$$

entwickeln, die in

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + \overline{\left(\frac{\partial W_0}{\partial \tau}\right)}\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2}\right)}(\delta z)^2 + \cdots$$

übergeht. Damit ist der Formalismus einer vollständigen Störungstheorie in der intermediären Bahnebene genügend gekennzeichnet. Wir werden uns aber im folgenden der Kürze wegen auf das Problem der allgemeinen Störungen erster Ordnung beschränken.

Um W_0 als Funktion der Zeit zu berechnen, wird man

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{\varrho_0}{a_0}\left(\frac{d\Phi}{dt}\cos\omega_0 + \frac{d\Psi}{dt}\sin\omega_0\right)$$

durch die Koordinaten S, T der störenden Kraft ausdrücken. Dabei genügt es, die genäherten Ausdrücke (XXVII; 41) zu verwenden, während die strengen Formeln (XXVII; 40a, b) nur dann benutzt zu werden brauchen, wenn auch Störungen höherer Ordnung ermittelt werden sollen.

Man erhält, wenn man, wie in (XXVII; 41), $\varkappa = 1$ setzt und die nun überflüssigen Nullindizes fortläßt,

$$\frac{dW_0}{dt} = -3hrT + 2h\varrho\cos\omega\left[S\sin v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\cos v + T\,\frac{r}{p}\,e\right] +$$
$$+ 2h\varrho\sin\omega\left[-S\cos v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v\right] = 2h\varrho S\sin(v-\omega) +$$
$$+ hrT\left[2\,\frac{\varrho}{r}\cos(v-\omega) - 1 + 2\left\{\frac{\varrho}{p}\,e\cos\omega - 1 + \frac{\varrho}{p}\cos(v-\omega)\right\}\right].$$

Aus $(\varrho/p)\,(1 + e\cos\omega) = 1$ folgt aber $(\varrho/p)\,e\cos\omega - 1 = -\varrho/p$, d. h., es ist

(XXVII; 46)
$$\frac{dW_0}{dt} = 2h\varrho S\sin(v-\omega) + hrT\left[2\,\frac{\varrho}{r}\cos(v-\omega) - 1 - 2\,\frac{\varrho}{p}\,\{1-\cos(v-\omega)\}\right].$$

Um W_0 zu erhalten, wird man über diesen Ausdruck integrieren, wobei r, v und h als Funktionen der Zeit, ϱ und ω aber als Konstanten anzusehen sind. Ehe wir uns dieser Aufgabe zuwenden, nach deren Lösung man die Bewegung in der instantanen ξ,η-Ebene beherrscht, müssen wir noch die Differentialgleichungen diskutieren, durch die die Bewegung des ξ,η,ζ-Systems gegen das feste Koordinatensystem (Ekliptik und Frühlingspunkt) definiert wird.

231. Die Bewegung der instantanen Bahnebene bezüglich der Ekliptik

Es seien

(XXVII; 47) $$x = r\cos b\cos l;\quad y = r\cos b\sin l;\quad z = r\sin b$$

die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Planeten im System der Ekliptik und l, b seine ekliptikale Länge und Breite. Sind ferner i, Ω die Lagekoordinaten der instantanen Bahnebene $\zeta = 0$ und ist σ die Länge des Knotens in der ξ,η-Ebene, so folgt (Abb. 11) aus dem rechtwinkligen Dreieck PKQ

(XXVII; 48)
$$\begin{cases} \cos b\cos(l-\Omega) = \cos(w-\sigma), \\ \cos b\sin(l-\Omega) = \sin(w-\sigma)\cos i, \\ \sin b \qquad\qquad\quad = \sin(w-\sigma)\sin i. \end{cases}$$

Um die ekliptikalen Koordinaten (XXVII; 47) berechnen zu können, wird man außer r und w, die nach Lösung des in den Abschnitten 229, 230 behandelten Problems bekannt sind, auch i, Ω, σ mittels der Differentialgleichungen (XXVII; 24a) und der Anfangswerte i_0, $\Omega_0 = \sigma_0$ als Funktionen der Zeit zu ermitteln haben. HANSEN hat gezeigt, daß es durch einen Kunstgriff möglich

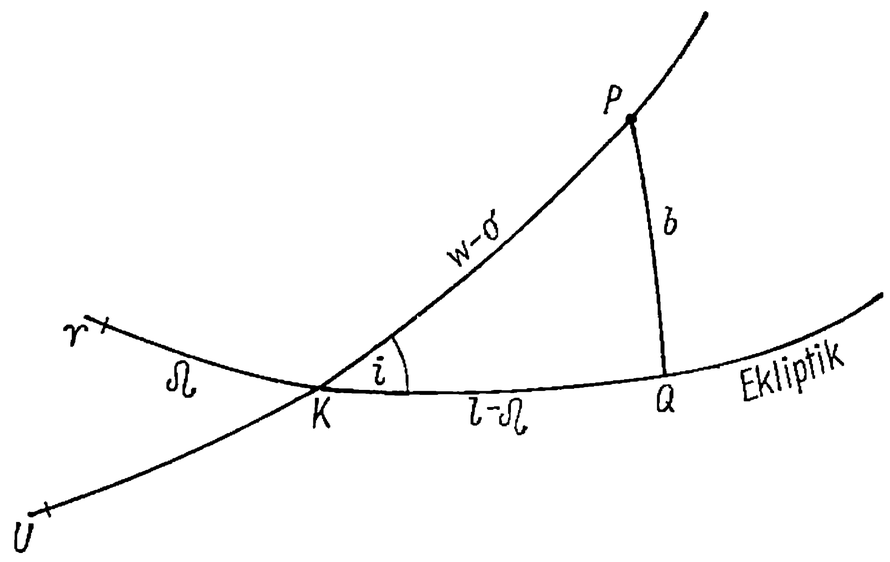

Abb. 11. Polarkoordinaten

ist, mit einer einzigen Differentialgleichung auszukommen, wenn man Störungen höherer Ordnung vernachlässigt. Zu diesem Zwecke macht er den Ansatz

$$\text{(XXVII; 49)} \quad \begin{cases} \cos b \cos (l - \sigma_0 - \Gamma) = \cos (w - \sigma_0) + s\alpha\,, \\ \cos b \sin (l - \sigma_0 - \Gamma) = \sin (w - \sigma_0) \cos i_0 - s\beta, \\ \sin b \qquad\qquad\qquad\quad = \sin (w - \sigma_0) \sin i_0 + s \end{cases}$$

und bestimmt die Größen Γ, s, α, β so, daß die Formeln (XXVII; 49) mit (XXVII; 48) gleichbedeutend sind. Dieses Problem ist aber überbestimmt, da statt der drei gestörten Koordinaten i, Ω, σ vier unbekannte Größen als Funktionen der Zeit zu ermitteln sind. Diese Unbestimmtheit läßt sich aber durch die zusätzliche Forderung beseitigen, daß Γ, α, β von w unabhängig sein sollen.

In der Tat läßt sich zeigen, daß diese Forderung erfüllbar ist und zu einer scharfen Definition der vier Unbekannten führt. Darüber hinaus wird man feststellen, daß Γ von der zweiten, s und α von der ersten Ordnung in der störenden Masse wird und daß bis auf einen Rest von der ersten Ordnung $\beta = \tan i_0$ gesetzt werden kann. Beschränkt man sich also auf die Berücksichtigung von Störungen erster Ordnung, so gehen die Gleichungen (XXVII; 49) in

$$\text{(XXVII; 49a)} \quad \begin{cases} \cos b \cos (l - \sigma_0) = \cos (w - \sigma_0), \\ \cos b \sin (l - \sigma_0) = \sin (w - \sigma_0) \cos i_0 - s \tan i_0, \\ \sin b \qquad\qquad\quad = \sin (w - \sigma_0) \sin i_0 + s \end{cases}$$

über, so daß es genügt, die Störungsgröße s als Funktion der Zeit zu ermitteln.

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus den letzten Gleichungen (XXVII; 48, 49)

$$s = \sin (w - \sigma) \sin i - \sin (w - \sigma_0) \sin i_0$$

oder, wenn

$$p = \sin i \sin(\sigma - \sigma_0); \qquad q = \sin i \cos(\sigma - \sigma_0) - \sin i_0$$

gesetzt wird,

$$s = q \sin(w - \sigma_0) - p \cos(w - \sigma_0)$$

folgt. Setzt man zur Abkürzung

$$\text{(XXVII; 50)} \quad \begin{cases} w - \sigma_0 = Y; \ \sigma - \sigma_0 = \Sigma; \quad \Omega - \sigma_0 - \Gamma = \Theta, \text{ also} \\ l - \sigma_0 - \Gamma = l - \Omega + \Theta; \quad w - \sigma = Y - \Sigma, \end{cases}$$

so erhält man

$$\text{(XXVII; 51)} \quad \begin{cases} p = \sin i \sin \Sigma; \quad q = \sin i \cos \Sigma - \sin i_0, \\ s = q \sin Y - p \cos Y, \end{cases}$$

und aus den ersten beiden Gleichungen (XXVII; 49)

$$\cos b \cos(l - \Omega + \Theta) = \cos Y + \alpha (q \sin Y - p \cos Y),$$

$$\cos b \sin(l - \Omega + \Theta) = \sin Y \cos i_0 - \beta (q \sin Y - p \cos Y).$$

Eliminiert man b und $l - \Omega$ durch (XXVII; 48), so folgt

$$\cos(Y - \Sigma) \cos\Theta - \sin(Y - \Sigma) \sin\Theta \cos i = (1 - \alpha p) \cos Y + \alpha q \sin Y,$$

$$\cos(Y - \Sigma) \sin\Theta + \sin(Y - \Sigma) \cos\Theta \cos i = (\cos i_0 - \beta q) \sin Y + \beta p \cos Y.$$

Das sind zwei lineare homogene Gleichungen für $\cos Y$ und $\sin Y$, und die Variable w kommt explizite nur in Y vor. Sollen Θ (d. h. Γ) und α, β von w unabhängig sein, so müssen die Koeffizienten von $\cos Y$, $\sin Y$ identisch verschwinden, d. h. die Gleichungen

$$\text{(XXVII; 52)} \quad \begin{cases} \alpha p = 1 - \cos\Sigma \cos\Theta - \sin\Sigma \sin\Theta \cos i, \\ \alpha q = \sin\Sigma \cos\Theta - \cos\Sigma \sin\Theta \cos i, \\ \beta p = \cos\Sigma \sin\Theta - \sin\Sigma \cos\Theta \cos i, \\ \beta q = \cos i_0 - \sin\Sigma \sin\Theta - \cos\Sigma \cos\Theta \cos i \end{cases}$$

erfüllt sein. Das sind vier lineare Gleichungen für die Größen α, β, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$, deren Koeffizienten von i, i_0 und $\Sigma = \sigma - \sigma_0$ abhängen. Die Lösungen dieses Systems haben aber nur dann einen Sinn (d. h., die Forderung, daß Γ, α, β von w unabhängig sein sollen, ist nur dann erfüllbar), wenn sie der Bedingung

$\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$ genügen. Um das zu bestätigen, eliminiert man α, β aus (XXVII; 52) und erhält

$$(q \sin \Sigma - p \cos \Sigma) \sin \Theta \cos i + (q \cos \Sigma + p \sin \Sigma) \cos \Theta = q,$$

$$(q \cos \Sigma + p \sin \Sigma) \sin \Theta - (q \sin \Sigma - p \cos \Sigma) \cos \Theta \cos i = p \cos i_0$$

oder, da wegen (XXVII; 51)

$$q \sin \Sigma - p \cos \Sigma = - \sin \Sigma \sin i_0,$$

$$q \cos \Sigma + p \sin \Sigma = \sin i - \cos \Sigma \sin i_0$$

geschrieben werden kann,

$$\sin \Theta \sin \Sigma \cos i \sin i_0 + \cos \Theta (\cos \Sigma \sin i_0 - \sin i) = \sin i_0 - \cos \Sigma \sin i,$$

$$\sin \Theta (\cos \Sigma \sin i_0 - \sin i) - \cos \Theta \sin \Sigma \cos i \sin i_0 = -\sin \Sigma \sin i \cos i_0.$$

Setzt man nun

$$\text{(XXVII; 53a)} \qquad \begin{cases} \lambda \cos \gamma = \cos \Sigma \sin i_0 - \sin i, \\ \lambda \sin \gamma = \sin \Sigma \cos i \sin i_0, \end{cases}$$

so nehmen diese Gleichungen die Form

$$\text{(XXVII; 53b)} \qquad \begin{cases} \lambda \cos (\Theta - \gamma) = \sin i_0 - \cos \Sigma \sin i, \\ \lambda \sin (\Theta - \gamma) = -\sin \Sigma \sin i \cos i_0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \lambda \sin \gamma & \lambda \cos \gamma \\ \lambda \cos \gamma & -\lambda \sin \gamma \end{vmatrix}$$

an. Die Bedingung $\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$ ist erfüllt, wenn die aus (XXVII; 53a und b) folgenden Beträge λ^2, nämlich

$$\text{(XXVII; 54)} \qquad \begin{cases} \lambda^2 = (\cos \Sigma \sin i_0 - \sin i)^2 + \sin^2 \Sigma \cos^2 i \sin^2 i_0, \\ \lambda^2 = (\cos \Sigma \sin i - \sin i_0)^2 + \sin^2 \Sigma \cos^2 i_0 \sin^2 i, \end{cases}$$

übereinstimmen. Aus der ersten Gleichung (XXVII; 54) folgt aber

$$\text{(XXVII; 54a)} \qquad \lambda^2 = (1 - \sin i \sin i_0 \cos \Sigma)^2 - \cos^2 i \cos^2 i_0.$$

Man darf also in diesem Ausdruck i und i_0 vertauschen. Die beiden Formeln (XXVII; 54) sind daher identisch, q.e.d.

Setzt man[1])

$$\text{(XXVII; 55)} \qquad \begin{cases} k = 1 - (\cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos \Sigma), \\ \mu = 1 + (\cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos \Sigma), \end{cases}$$

so folgt aus (XXVII; 54a)

$$\text{(XXVII; 56)} \qquad \lambda^2 = k\mu.$$

---

[1]) Für kleines i, i_0 ist $\mu \approx 2$, so daß man durch diese Größe unbedenklich dividieren darf.

Ferner ergibt (XXVII; 53b), wenn man diese Gleichungen mit den nebenstehenden Faktoren, die man aus (XXVII; 53a) entnimmt, multipliziert und die Produkte addiert,

$$\lambda^2 \sin \Theta = k (\cos i + \cos i_0) \sin \Sigma,$$

$$\lambda^2 \cos \Theta = k [(1 + \cos i \cos i_0) \cos \Sigma - \sin i \sin i_0]$$

oder, wegen (XXVII; 56),

$$\text{(XXVII; 57a)} \quad \begin{cases} \mu \sin \Theta = (\cos i + \cos i_0) \sin \Sigma, \\ \mu \cos \Theta = (1 + \cos i \cos i_0) \cos \Sigma - \sin i \sin i_0. \end{cases}$$

Da aber wegen (XXVII; 51)

$$\mu = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i_0 (q + \sin i_0) = (\cos i + \cos i_0) \cos i_0 - q \sin i_0$$

ist, gilt auch

$$\text{(XXVII; 57b)} \qquad \mu \sin \Theta = \frac{\mu + q \sin i_0}{\cos i_0} \sin \Sigma.$$

Nach diesen Vorbereitungen findet man leicht Ausdrücke für α und β. Aus den ersten beiden und den letzten beiden Gleichungen (XXVII; 52) leitet man

$$\alpha (p \sin \Sigma + q \cos \Sigma) = \sin \Sigma - \sin \Theta \cos i,$$

$$\beta (p \cos \Sigma - q \sin \Sigma) = \sin \Theta - \sin \Sigma \cos i_0$$

oder, da nach (XXVII; 51)

$$p \sin \Sigma + q \cos \Sigma = \sin i - \cos \Sigma \sin i_0,$$

$$p \cos \Sigma - q \sin \Sigma = \qquad \sin \Sigma \sin i_0$$

ist,

$$\text{(XXVII; 58)} \quad \begin{cases} \alpha (\sin i - \cos \Sigma \sin i_0) = \sin \Sigma - \sin \Theta \cos i, \\ \beta \sin \Sigma \sin i_0 \qquad\qquad = \sin \Theta - \sin \Sigma \cos i_0 \end{cases}$$

ab. Eliminiert man $\sin \Theta$ durch (XXVII; 57a), so folgt aus der ersten Gleichung (XXVII; 58)

$$\mu\alpha (\sin i - \cos \Sigma \sin i_0) = \sin \Sigma [\mu - \cos i (\cos i + \cos i_0)] =$$
$$= \sin \Sigma \sin i (\sin i - \cos \Sigma \sin i_0)$$

oder

$$\alpha = \frac{p}{\mu}.$$

Ebenso erhält man aus der zweiten Gleichung (XXVII; 58), indem man $\sin \Theta$ durch (XXVII;57 b) ausdrückt und den dann auf beiden Seiten auftretenden Faktor $\sin \Sigma$ herausdividiert,

$$\mu\beta \sin i_0 = \frac{\mu + q \sin i_0}{\cos i_0} - \mu \cos i_0 = \sin i_0 \, (\mu \tan i_0 + q \sec i_0)$$

oder

$$\beta = \tan i_0 + \frac{q}{\mu} \sec i_0 .$$

Mit diesen Ausdrücken für α, β lauten die Gleichungen (XXVII; 49)

$$\text{(XXVII; 59)} \quad \begin{cases} \cos b \cos (l - \sigma_0 - \Gamma) = \cos (w - \sigma_0) + s \dfrac{p}{\mu}, \\ \cos b \sin (l - \sigma_0 - \Gamma) = \sin (w - \sigma_0) \cos i_0 - s \, (\tan i_0 + \\ \qquad\qquad + \dfrac{q}{\mu} \sec i_0), \\ \sin b = \sin (w - \sigma_0) \sin i_0 + s . \end{cases}$$

Da aber s, p, q von der ersten Ordnung in den Störungen, außerdem aber von der Ordnung der Neigung i sind, nehmen die rechten Seiten bei Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung die Form (XXVII; 49a) an, und es wird nur noch zu zeigen sein, daß auch Γ von der zweiten Ordnung ist und daher, wie in (XXVII; 49a) angenommen wurde, unterdrückt werden darf.

Um die Vorteile, die kleine Neigungen bieten, möglichst auszunutzen, ist es unter Umständen angebracht, statt der Ekliptik als Hauptebene des festen Bezugssystems die zur Epoche $t = t_0$ gehörende intermediäre Bahnebene zu verwenden. Dann ist $i_0 = 0$, $\cos i_0 = 1$ und

$$\mu = 1 + \cos i = 2 \cos^2 \frac{i}{2} .$$

Die Gleichungen (XXVII; 59) lauten dann einfacher, mit $Y = w - \sigma_0$,

$$\text{(XXVII; 60)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos b \cos (l - \sigma_0 - \Gamma) = \cos Y + \dfrac{ps}{2 \cos^2 \frac{i}{2}}, \\ \cos b \sin (l - \sigma_0 - \Gamma) = \sin Y - \dfrac{qs}{2 \cos^2 \frac{i}{2}}, \\ \sin b = s , \end{array} \right| \begin{array}{c|c} \cos Y & -\sin Y \\ \sin Y & \cos Y \end{array}$$

und σ_0 ist eine beliebig wählbare Konstante, durch die der Anfangspunkt der Längenzählung festgelegt wird. Durch Multiplikation mit den nebenstehenden Faktoren und Addition der Produkte erhält man aus den beiden ersten Gleichungen (XXVII; 60)

(XXVII; 61)
$$\begin{cases} \cos b \cos (l - w - \Gamma) = 1 + \dfrac{p \cos Y - q \sin Y}{2 \cos^2 \dfrac{i}{2}}\, s = \\ \qquad = 1 - \dfrac{s^2}{2 \cos^2 \dfrac{i}{2}}, \\ \cos b \sin (l - w - \Gamma) = -\dfrac{p \sin Y + q \cos Y}{2 \cos^2 \dfrac{i}{2}} = \\ \qquad = -\dfrac{1}{2 \cos^2 \dfrac{i}{2}}\, s \dfrac{ds}{dw}. \end{cases}$$

Es ist nämlich nach (XXVII; 51)

(XXVII; 62) $$s = q \sin Y - p \cos Y, \qquad (Y = w - \sigma_0)$$

eine „ideale" Größe, da sie eine Funktion der idealen Koordinate w ist und die Faktoren p und q nur von i und σ abhängen, also von den Elementen der Transformation, die das feste mit dem beweglichen Koordinatensystem verbindet. Man darf also beim Differenzieren p und q als konstant ansehen und

(XXVII; 63) $$\frac{ds}{dw} = q \cos Y + p \sin Y$$

schreiben.

Das Gleichungssystem (XXVII; 60 bzw. 61) ist streng und läßt erkennen, daß l und b bekannt sind, wenn s und Γ als Funktionen der Zeit oder einer sie vertretenden Variablen (z. B. w) vorliegen. In (XXVII; 60) kommen außer diesen beiden Funktionen noch p und q vor. Aber nach (XXVII; 62, 63) sind ja

(XXVII; 64)
$$\begin{cases} p = s \sin Y + \dfrac{ds}{dw} \cos Y, \\ q = -s \cos Y + \dfrac{ds}{dw} \sin Y \end{cases}$$

mit w und $s(w)$ bekannt.

232. Die Differentialgleichungen für Γ und s

Die Lösung der Aufgabe, die Koordinaten des gestörten Planeten in einem festen Koordinatensystem (z. B. dem der Ekliptik oder der intermediären Bahnebene, die einer Epoche t_0 zugehört) als Funktionen der Zeit zu ermitteln, hängt, nachdem mit $r(t)$ und $w(t)$ die Bewegung in der instantanen Bahnebene bekannt geworden ist, von der Ermittlung der beiden Größen Γ und s ab. Dabei ist, wie noch zu beweisen ist, Γ von der zweiten Ordnung, während s von der ersten Ordnung in den Störungen ist. Außerdem sind s und Γ von der Ordnung der Neigung i. Man wird also Γ oft ganz vernachlässigen können, und das Hauptgewicht wird auf der Bestimmung von s als Funktion der Zeit liegen.

Um eine Differentialgleichung für Γ zu erhalten, differenziere man $\Theta = \Omega - \sigma_0 - \Gamma$ und berücksichtige (XXVII; 18). Dann ist

$$d\Theta = d\Omega - d\Gamma = \sec i \, d\sigma - d\Gamma.$$

Aus (XXVII; 57a) folgt durch Differenzieren, da $d\Sigma = d\sigma$ ist,

$$\sin \Theta \, d\mu + \mu \cos \Theta \, d\Theta = - \sin i \sin \Sigma \, di + (\cos i + \cos i_0) \cos \Sigma \, d\sigma,$$

$$\cos \Theta \, d\mu - \mu \sin \Theta \, d\Theta = - (\sin i \cos i_0 \cos \Sigma + \cos i \sin i_0) \, di - (1 + \cos i \cos i_0) \sin \Sigma \, d\sigma,$$

also, wenn man $d\mu$ eliminiert,

$$\begin{aligned} \mu d\Theta &= [\sin \Theta \, (\sin i \cos i_0 \cos \Sigma + \cos i \sin i_0) - \cos \Theta \sin i \sin \Sigma] \, di + \\ &\quad + [\cos \Theta \cos \Sigma \, (\cos i + \cos i_0) + \sin \Theta \sin \Sigma \, (1 + \cos i \cos i_0)] \, d\sigma = \\ &= \sin i_0 \sin \Sigma \, di + (\cos i + \cos i_0) \, d\sigma = \mu \, (\sec i \, d\sigma - d\Gamma), \end{aligned}$$

wie man durch Nachrechnen, mit Hilfe der Formeln (XXVII; 57a, 55), leicht bestätigt. Ferner erhält man aus (XXVII; 51)

(XXVII; 65)
$$\begin{cases} dp = \cos i \sin \Sigma \, di + \sin i \cos \Sigma \, d\sigma, \\ dq = \cos i \cos \Sigma \, di - \sin i \sin \Sigma \, d\sigma \end{cases}$$

und

$$q dp - p dq = - \sin i_0 \cos i \sin \Sigma \, di + (\sin i - \sin i_0 \cos \Sigma) \sin i \, d\sigma.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit

$$\begin{aligned} \mu d\Gamma &= - \sin i_0 \sin \Sigma \, di + [\mu \sec i - (\cos i + \cos i_0)] \, d\sigma = \\ &= - \sin i_0 \sin \Sigma \, di + \tan i \, (\sin i - \sin i_0 \cos \Sigma) \, d\sigma, \end{aligned}$$

so erhält man

$$(\text{XXVII; 66}) \qquad d\Gamma = \frac{qdp - pdq}{\mu \cos i}.$$

Nun ist nach (XXVII; 24a), wenn man $h = \varkappa/\sqrt{p}$ setzt.

$$\varkappa^2 \frac{di}{dt} = hrZ \cos (w - \sigma),$$

$$\varkappa^2 \sin i \frac{d\Omega}{dt} = hrZ \sin (w - \sigma) = \varkappa^2 \tan i \frac{d\sigma}{dt}$$

und daher, mit $w - \sigma + \Sigma = w - \sigma_0$, nach (XXVII; 65)

$$(\text{XXVII; 67}) \qquad \begin{cases} \varkappa^2 \dfrac{dp}{dt} = hrZ \cos i \sin (w - \sigma_0), \\ \varkappa^2 \dfrac{dq}{dt} = hrZ \cos i \cos (w - \sigma_0). \end{cases}$$

Aus (XXVII; 66 und 62) ergibt sich schließlich

$$(\text{XXVII; 68}) \qquad \varkappa^2 \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{hrZ}{\mu} [q \sin (w - \sigma_0) - p \cos (w - \sigma_0)] = \frac{hrZs}{\mu}.$$

Dieser Ausdruck und daher auch Γ selbst ist von der zweiten Ordnung in der störenden Masse, da s und Z beide von der ersten Ordnung sind. Außerdem ist er, wie s, von der Ordnung der Neigung der instantanen Bahnebene gegen die feste Hauptkoordinatenebene, die bei geeigneter Wahl der letzteren für lange Zeiten sehr klein bleibt. Man begeht daher nur unmerkliche Fehler, wenn man $h \approx h_0$ und

$$\mu \approx 1 + \cos (i + i_0) \approx 1 + \cos 2i_0 = 2 \cos^2 i_0$$

setzt. Dann ist

$$(\text{XXVII; 68a}) \qquad \Gamma \approx \frac{h_0}{2\varkappa^2 \cos^2 i_0} \int_{t_0}^{t} rsZdt.$$

Zur Formulierung einer Differentialgleichung für $s(t)$ bedient sich HANSEN einer Methode, die auf dem gleichen Prinzip beruht, das er auch bei der Bestimmung von ν und δz (s. Abschnitt 230) benutzt hat. Statt s führt er die neue Variable

$$u = \frac{r_0}{a_0} s$$

ein, wo $r_0(z)$ und a_0 die in (XXVII; 30a, b) definierten Größen sind. Setzt man nach (XXVII; 28)

$$w_0 = w = \chi_0 + v_0,$$

so wird nach (XXVII; 62)

$$Y = w - \sigma_0 = v_0 + \chi_0 - \sigma_0; \qquad s = q \sin Y - p \cos Y,$$

also

$$u = \frac{r_0}{a_0} [q \sin (v_0 + \chi_0 - \sigma_0) - p \cos (v_0 + \chi_0 - \sigma_0)],$$

und es sind p, q nach (XXVII; 67) Funktionen der Zeit t, während r_0, v_0 nach (XXVII; 30b) als Funktionen der Pseudozeit $z = z(t)$ aufgefaßt werden können.

Es sei nun

(XXVII; 69) $$R(t, \zeta) = \frac{\varrho}{a_0} [q \sin (\omega + \chi_0 - \sigma_0) - p \cos (\omega + \chi_0 - \sigma_0)]$$

eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen t und ζ, und es seien ϱ, ω die durch (XXVII; 44) definierten Funktionen von ζ. Dann ist

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\varrho}{a_0} \left[\frac{dq}{dt} \sin (\omega + \chi_0 - \sigma_0) - \frac{dp}{dt} \cos (\omega + \chi_0 - \sigma_0)\right]$$

oder, wenn man (XXVII; 67) einführt und nach (XXVII; 28) $w = \chi_0 + v_0$ setzt,

(XXVII; 70)

$$\varkappa^2 \frac{dR}{dt} = hrZ \cos i \frac{\varrho}{a_0} \sin (\omega + \chi_0 - w) = hrZ \cos i \frac{\varrho}{a_0} \sin (\omega - v_0).$$

Nach Integration dieser Gleichung, wobei ϱ und ω als Konstante gelten, ergibt sich $R(t, \zeta)$ und, wenn man die in Abschnitt 230 eingeführte symbolische Schreibweise auch hier benutzt,

(XXVII; 71a) $$u = \overline{R}(t, z(t)) = \overline{R}(t),$$

d. h., der Querstrich bedeutet, daß man $\varrho(\zeta)$ und $\omega(\zeta)$ mit $r_0(z)$ und $v_0(z)$ vertauscht. Da R durch Integration aus (XXVII; 70) erhalten wird, ergibt sich auch u in der Integralform

(XXVII; 71b) $$u = \int_{t_0}^{t} \overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \zeta}\right)} dt,$$

und (XXVII; 71a) kann zur Kontrolle dienen.

Diese Gleichungen sind streng. Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, so darf man statt $R(t, \zeta)$

$$R_0(t, \tau) = \frac{\varrho_0}{a_0} [q \sin (\omega_0 + \chi_0 - \sigma_0) - p \cos (\omega_0 + \chi_0 - \sigma_0)]$$

schreiben, wo ϱ_0, ω_0 die in Abschnitt 230 definierten Funktionen von τ bzw. der ungestörten mittleren Anomalie $n_0\tau + \gamma_0$ sind, und es gilt dann genähert

$$\text{(XXVII; 71c)} \qquad u \approx u_0 = \overline{R_0} = \int_{t_0}^{t} \overline{\left(\frac{\partial R_0}{\partial \tau}\right)} \, dt.$$

Der Querstrich bedeutet hier, daß nach Ausführung der partiellen Differentiation τ mit t zu vertauschen ist, die Größen r_0, v_0 also Funktionen von t statt von $z = t + \delta z$ sind. Sollen Störungen höherer Ordnung berücksichtigt werden, so kann man die Taylorsche Entwicklung

$$u = \overline{R_0} + \overline{\left(\frac{\partial R_0}{\partial \tau}\right)} \delta z + \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\right)} (\delta z)^2 + \cdots$$

ansetzen und erhält somit $s = (a_0/r_0)u$ als Funktion von $w = v_0 + \chi_0$ und damit auch ds/dw, also die beiden Größen, die (neben Γ, das nur in den Störungen höherer Ordnung auftritt) das Problem der Bewegung der instantanen Bahnebene in bezug auf das feste Koordinatensystem lösen.

KAPITEL XXVIII

DIE HANSENSCHE THEORIE. INTEGRATION DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

233. Vorbereitung der Integration

Wir werden uns im folgenden, um uns nicht in Einzelheiten zu verlieren, durchweg auf das Problem der Ermittlung der Störungen erster Ordnung beschränken, zumal für die Berücksichtigung der Störungen höherer Ordnung moderne Methoden zur Verfügung stehen, die bequemer und durchsichtiger sind. Wir werden also, wie in (XXVII; 49a), $\Gamma = 0$ setzen und zur Berechnung von δz, ν und s die genäherten Ausdrücke W_0 und R_0 statt W und R benutzen. Unter dieser Annahme wird der Index Null, der in den Formeln der Abschnitte 229—232 eingeführt wurde, überflüssig, und man darf daher nach (XXVII; 46, 70), wenn auch, mit passend gewählter Zeiteinheit, $\varkappa = 1$ gesetzt wird,

$$\text{(XXVIII; 1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = 2h\varrho S \sin(v-\omega) + hrT\left[2\dfrac{\varrho}{r}\cos(v-\omega) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - 1 - 2\dfrac{\varrho}{p}\{1-\cos(v-\omega)\}\right], \\ \dfrac{dR}{dt} = hrZ\cos i\,\dfrac{\varrho}{a}\sin(\omega - v) \end{cases}$$

schreiben. In diesen Gleichungen sind ϱ, ω als Funktionen von τ ungestörte elliptische Koordinaten, die aus dem System

$$\text{(XXVIII; 2)} \qquad \begin{cases} n\tau + \gamma = \eta - e\sin\eta, & h = \dfrac{1}{\sqrt{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}}, \\ \varrho\cos\omega = a(\cos\eta - e), & \\ \varrho\sin\omega = a\sqrt{1-e^2}\sin\eta, & \varrho = a(1 - e\cos\eta) \end{cases}$$

mit konstanten a, e, γ, $n = a^{-3/2}$ berechnet werden. Diese Konstanten sind entweder mit den oskulierenden Elementen zur Oskulationsepoche t_0 oder mit mittleren Elementen identisch, d. h. mit den Mittelwerten der oskulierenden Elemente über einen großen Zeitraum. Ebenso sind r, v als Funktionen von t ungestörte elliptische Koordinaten, die aus

$$\text{(XXVIII; 3)} \qquad \begin{cases} nt + \gamma = E - e\sin E, & \\ r\cos v = a(\cos E - e), & r = a(1 - e\cos E) \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E, & \end{cases}$$

erhalten werden. Ist die Integration der Differentialgleichungen (XXVIII; 1) ausgeführt, liegen also $W(t, \tau)$ und $R(t, \tau)$ vor, so ergeben sich δz, v, s aus den

Differentialgleichungen

$$\text{(XXVIII; 4)} \qquad \frac{d\delta z}{dt} = \overline{W}(t); \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)}; \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{a}{r}\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)},$$

wobei der Querstrich bedeutet, daß (in den beiden letzten Fällen nach erfolgter partieller Differentiation) τ durch t zu ersetzen ist. Dann ist, mit konstantem χ,

$$r = r_0\,(1 + v); \qquad w = v_0 + \chi,$$

wo r_0, v_0 aus (XXVIII; 3) folgen, wenn dort t durch $z = t + \delta z$ ersetzt wird.

Die Integration der Differentialgleichungen (XXVIII; 1) wird möglich, wenn die Störungskoordinaten S, T, Z als Funktionen von t in integrabler Form vorliegen. Man schreibe die Störungsfunktion (XXIII; 20),

$$R = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos\varphi}{{r_1}^2}\right),$$

wenn, wie oben, $\varkappa^2 = k^2(1 + m) = 1$ gesetzt wird, in der Form

$$\Omega = \frac{m_1}{1 + m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rH}{{r_1}^2}\right),$$

wo $H = \cos\varphi$ den Kosinus des Winkels zwischen den heliozentrischen Ortsvektoren der beiden Planeten bezeichnet.[1]) Dann ist

$$\text{(XXVIII; 5)} \qquad S = \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \qquad rT = \frac{\partial \Omega}{\partial w} = \frac{\partial \Omega}{\partial v}; \qquad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \text{ für } \zeta = 0,$$

und es ist Ω eine Funktion von r, v; r_1, v_1, ζ_1, den auf die instantane Bahnebene $\zeta = 0$ und den in Abschnitt 227 definierten „departure point" bezogenen ungestörten Polarkoordinaten der beiden Planeten. Sind (Abb. 12) (C), (C_1) die Spuren der beiden intermediären Bahnen an der heliozentrischen Sphäre, P, P_1 die sphärischen Örter der beiden Planeten, ist ferner N der aufsteigende Knoten von (C_1) bezüglich (C) und sind π, π_1 die von N aus gezählten Perihellängen, v und v_1 die wahren Anomalien, so ist

$$\text{(XXVIII; 6a)} \quad \begin{cases} H = \cos(\pi + v)\cos(\pi_1 + v_1) + \sin(\pi + v)\sin(\pi_1 + v_1)\cos J = \\ \quad = A\cos v\cos v_1 + B\cos v\sin v_1 + C\sin v\cos v_1 + \\ \quad\quad + D\sin v\sin v_1, \\ \Delta^2 = r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1H = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2, \\ \Omega = \dfrac{m_1}{1 + m}\left(\dfrac{1}{\Delta} - \dfrac{rH}{{r_1}^2}\right) = \dfrac{m_1}{1 + m}\left(\dfrac{1}{\Delta} - \dfrac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{{r_1}^3}\right), \end{cases}$$

[1]) Wir vermeiden im folgenden die Bezeichnung φ für den Winkel PP_1, da wir dieses Symbol später anderweitig verwenden werden. Ebenso bezeichnen wir den Abstand der beiden Planeten mit Δ statt mit ϱ, das ja hier, s. (XXVIII; 2), in anderer Bedeutung auftritt.

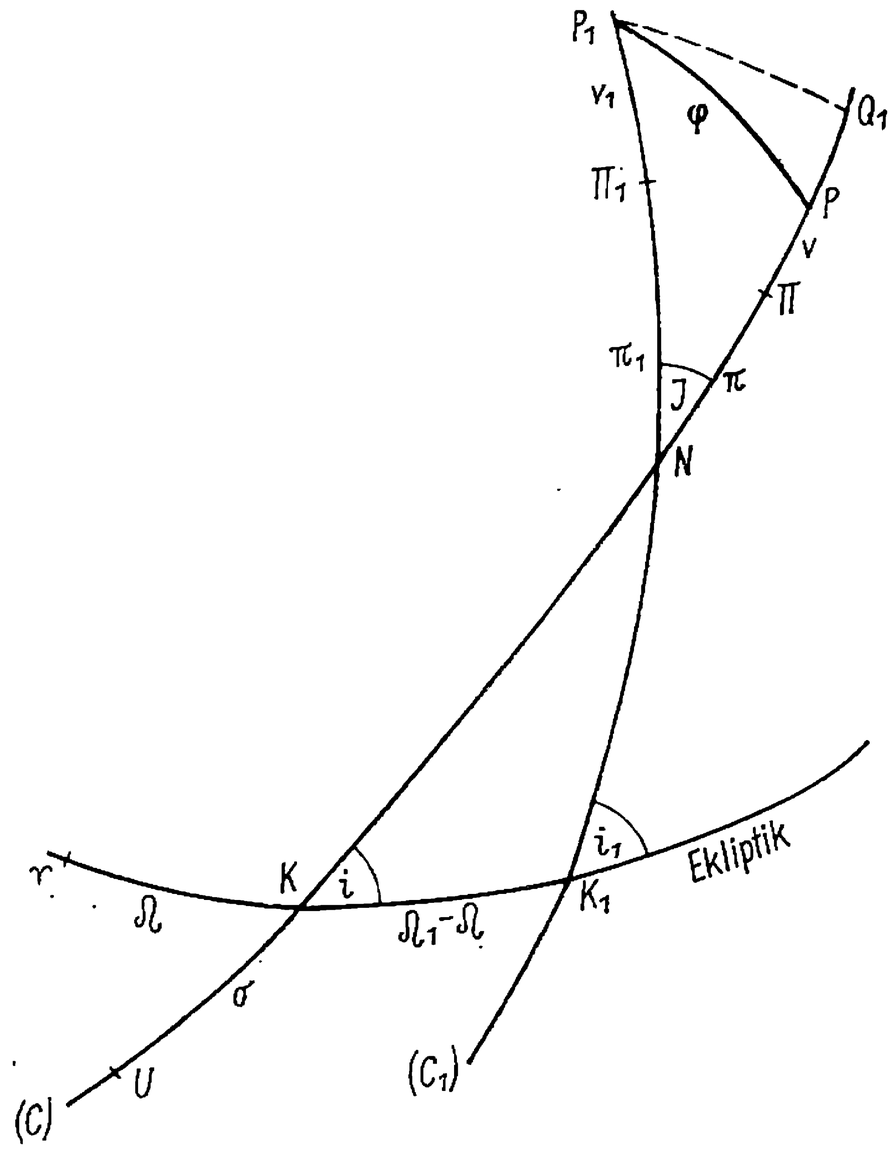

Abb. 12. Instantane Bahnebenen und Örter zweier Planeten an der heliozentrischen Sphäre

mit

$$A = \cos\pi\cos\pi_1 + \sin\pi\sin\pi_1\cos J,$$

$$B = -\cos\pi\sin\pi_1 + \sin\pi\cos\pi_1\cos J,$$

$$C = -\sin\pi\cos\pi_1 + \cos\pi\sin\pi_1\cos J,$$

$$D = \sin\pi\sin\pi_1 + \cos\pi\cos\pi_1\cos J,$$

und man erhält durch partielle Differentiation

$$\text{(XXVIII; 6b)}\quad \begin{cases} r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} = \dfrac{m_1}{1+m}\left[rr_1H\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{{r_1}^3}\right)-\dfrac{r^2}{\Delta^3}\right] = \\ \qquad = \dfrac{m_1}{1+m}\left(\dfrac{{r_1}^2-r^2}{2\Delta^3}-\dfrac{1}{2\Delta}-\dfrac{rH}{{r_1}^2}\right), \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} = \dfrac{m_1}{1+m}rr_1\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{{r_1}^3}\right)\dfrac{\partial H}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} = \dfrac{m_1}{1+m}\left(\dfrac{\zeta_1-\zeta}{\Delta^3}-\dfrac{\zeta_1}{{r_1}^3}\right). \end{cases}$$

Bezieht man die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 auf die instantane Bahnebene $\zeta = 0$, so wird

$$\text{(XXVIII; 6c)} \qquad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{m_1}{1+m}\,\zeta_1\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1{}^3}\right),$$

und es ist nach Abb. 12, wenn P_1Q_1 senkrecht auf der Bahnspur NP steht,

$$\text{(XXVIII; 6d)} \qquad \zeta_1 = r_1 \sin P_1Q_1 = r_1 \sin(\pi_1 + v_1) \sin J.$$

Zur Vorbereitung der Integration der Differentialgleichungen (XXVIII; 1), bei der ϱ, ω als Konstante gelten, wird es notwendig sein, alle diese Ausdrücke als integrable Funktionen der Zeit oder einer sie vertretenden Pseudozeit darzustellen. Als natürliche unabhängige Variable bieten sich dar

1. die mittleren Anomalien der beiden Planeten,
2. die wahren Anomalien,
3. die exzentrischen Anomalien.

Alle diese Möglichkeiten sind von verschiedenen Autoren benutzt worden. D. Brouwer[1]) hat eine sehr instruktive Analyse des Problems bei Verwendung der mittleren Anomalien gegeben. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß nach Durchführung aller Vorbereitungen die Integration nach der Zeit unmittelbar möglich ist, da ja die mittleren Anomalien beider Planeten lineare Funktionen der Zeit sind. Die wahre Anomalie des gestörten Planeten als unabhängige Variable wurde von H. Gyldén bevorzugt. Die von ihm entwickelte Methode, deren Grundzüge F. Tisserand im vierten Bande seines „Traité de mécanique céleste“ behandelt hat, beabsichtigt eine Verbesserung der Hansenschen Theorie mit dem Ziel, jene in den Störungen höherer Ordnung auftretenden Terme zum Verschwinden zu bringen, in denen die Zeit außerhalb der trigonometrischen Funktionen als Faktor auftritt. M. Brendel, einer der bedeutendsten Schüler Gyldéns, hat dessen Ideen weiterentwickelt und mit Hilfe einer zweckmäßigen Transformation der Variablen die Konvergenz der Reihen verbessert. Hansen selbst hat die exzentrische Anomalie der Bahn des gestörten Planeten als Pseudozeit gewählt und die Vorteile, die diese Variable bietet, in überzeugender Weise herausgestellt.

Wir werden in den folgenden Abschnitten das Hansensche Integrationsverfahren, mit Beschränkung auf Störungen erster Ordnung, kurz skizzieren, d. h., ohne die langwierigen Entwicklungen explizite hinzuschreiben, den Gedankengang des Verfahrens verständlich zu machen suchen. Am Schluß dieses Kapitels werden wir auf eine Variante der Hansenschen Methode eingehen, die den von Brendel eingeführten Hilfswinkel φ als Integrationsvariable benutzt. Diese geschickte Verflechtung Gyldén-Brendelscher Ideen mit der Hansenschen Theorie, aus der sie hervorgegangen sind, muß eine ausführliche Würdigung der ersteren ersetzen, für die hier der Platz fehlt.

---

[1]) D. Brouwer und G. M. Clemence, Methods of celestial mechanics. New York 1961, S. 436—447.

234. Einführung der exzentrischen Anomalie als unabhängige Variable

Anstatt der Zeit t führt HANSEN die neue unabhängige Variable ε durch

$$\text{(XXVIII; 7)} \qquad \varepsilon - e \sin \varepsilon = nt + \gamma; \qquad d\varepsilon = \frac{n}{1 - e \cos \varepsilon}\, dt$$

ein. Diese Größe ist mit der exzentrischen Anomalie einer KEPLERschen Ellipse mit den Bahnelementen a, e, $n = a^{-3/2}$, γ und dem Radiusvektor $r = a\,(1 - e \cos \varepsilon)$ identisch, und man wird die Konstanten so wählen, daß sie den Elementen einer intermediären Bahn des gestörten Planeten entsprechen. Setzt man, wie früher, $h = 1/\sqrt{a(1 - e^2)}$, so wird

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{r}{na} = \frac{r}{h\sqrt{1 - e^2}}.$$

Mit ε als „Pseudozeit" lauten dann die Differentialgleichungen (XXVIII; 1)

$$\text{(XXVIII; 8)} \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \sqrt{1 - e^2}\,\dfrac{dW}{d\varepsilon} = 2rS\varrho \sin (v - \omega) + \\ \qquad + rT\left[2\varrho \cos (v - \omega) - r - 2\,\dfrac{r}{p}\,\varrho\{1 - \cos (v - \omega)\}\right], \\ \text{b)} \quad \sqrt{1 - e^2}\,\dfrac{dR}{d\varepsilon} = \dfrac{r^2\varrho}{a}\, Z \cos i \sin (\omega - v), \end{cases}$$

und es sind ϱ, ω nach (XXVIII; 2) Funktionen der von ε unabhängigen Größe η. Die Funktionen $W(t, \tau) = W(\varepsilon, \eta)$, $R(t, \tau) = R(\varepsilon, \eta)$ erhält man also durch Integration der Gleichungen (XXVIII; 8), wobei ϱ, ω als Konstante gelten. Dagegen sind r, v, S, T, Z Funktionen von ε. Für r und v gelten die (XXVIII; 3) entsprechenden Gleichungen

$$\text{(XXVIII; 9)} \qquad \begin{cases} r = a\,(1 - e \cos \varepsilon), \\ r \cos v = a\,(\cos \varepsilon - e), \\ r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin \varepsilon, \end{cases}$$

während S, T, Z nach (XXVIII; 5, 6 b—d) durch partielle Differentiation der Störungsfunktion Ω entstehen. Diese Größen sind aber Funktionen von r, v; r_1, v_1, sofern (bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung) π, π_1 und J als Konstante anzusehen sind. Sie enthalten ε in r, v direkt infolge der Beziehungen (XXVIII; 9), indirekt aber auch in $r_1(t)$, $v_1(t)$, da t nach (XXVIII; 7) als Funktion von ε aufgefaßt werden kann.

Wir nehmen an, daß es gelungen sei, die Ausdrücke (XXVIII; 6b—d)

$$rS = r\frac{\partial\Omega}{\partial r}; \qquad rT = \frac{\partial\Omega}{\partial v}; \qquad Z = \left(\frac{\partial\Omega}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}$$

in diesem Sinne als Funktionen von ε darzustellen. Es ist dann leicht einzusehen, daß mit Hilfe der Formeln (XXVIII; 9) und der entsprechenden für ϱ, $\varrho\cos\omega$, $\varrho\sin\omega$ als Funktionen von η die rechten Seiten der Gleichungen (XXVIII; 8) die Form

(XXVIII; 10) $$\alpha + \beta\cos\eta + \gamma\sin\eta$$

annehmen, wo α, β, γ Funktionen von ε sind. So erhält man aus (XXVIII; 8b)

$$\sqrt{1-e^2}\,\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{r}{a}\,Z\cos i\,[\varrho\sin\omega\cdot r\cos v - \varrho\cos\omega\cdot r\sin v] =$$

$$= Z\cos i\cdot a^2\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos\varepsilon)\,[\sin\eta\,(\cos\varepsilon - e) - \sin\varepsilon\,(\cos\eta - e)],$$

also

(XXVIII; 11) $$\frac{dR}{d\varepsilon} = a^2Q\,(\varepsilon,\eta)\cdot Z\cos i,$$

wo

(XXVIII; 11a) $$Q = (1-e\cos\varepsilon)\,[e\sin\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\eta + (\cos\varepsilon - e)\sin\eta] =$$

$$= e\sin\varepsilon - \frac{e^2}{2}\sin 2\varepsilon - \frac{3}{2}\,e\sin\eta - \left(1+\frac{e^2}{2}\right)\sin(\varepsilon-\eta) +$$

$$+ \frac{e^2}{2}\sin(\varepsilon+\eta) + \frac{e}{2}\sin(2\varepsilon-\eta)$$

eine endliche trigonometrische Reihe in ε und η ist, deren Koeffizienten Funktionen von e sind. Etwas umständlicher ist es, einen ebenso einfachen Ausdruck für $dW/d\varepsilon$ zu finden. Auf der rechten Seite von (XXVIII; 8a) hat ein Teil der Terme, nämlich

(XXVIII; 12) $$2rS\varrho\sin(v-\omega) + 2rT\varrho\cos(v-\omega),$$

wenn man $\varrho\cos\omega$, $\varrho\sin\omega$ durch (XXVIII; 2) ausdrückt und

$$\cos v = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon}; \qquad \sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}$$

setzt, den Nenner $1 - e\cos\varepsilon$. Man könnte ihn vermeiden, wenn man $r = a(1-e\cos\varepsilon)$ setzen würde, müßte dann aber auf die Vorteile verzichten, die (s. Abschnitt 235) gerade die Entwicklung von rS und rT als Funktionen von ε bietet. HANSEN beseitigt dieses Dilemma, indem er

(XXVIII; 13) $$\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\varepsilon} = S\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} + rT\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}$$

einführt, die partielle Ableitung der Störungsfunktion nach ε, sofern diese Variable als exzentrische Anomalie in r und v vorkommt. Da nach Abschnitt 25 (Bd. I, S. 117 unten)

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = ae \sin \varepsilon; \qquad \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}$$

ist, erhält man aus (XXVIII; 13)

$$rT = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} - \frac{e \sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} rS.$$

Die kritischen Terme (XXVIII; 12) erhalten dann die Form

$$2rS\left[\varrho \sin (v-\omega) - \frac{e \sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} \varrho \cos (v-\omega)\right] + 2 \frac{r\varrho}{a\sqrt{1-e^2}} \cos (v-\omega) \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}.$$

Der Faktor von $\partial\Omega/\partial\varepsilon$ (einem Ausdruck, der — ebenso wie Ω und rS — leicht entwickelbar ist) enthält also den störenden Nenner nicht. Dasselbe gilt aber auch für den Faktor von $2rS/\sqrt{1-e^2}$, der

$$\varrho \cos \omega \left[\sqrt{1-e^2} \sin v - e \sin \varepsilon \cos v\right] - \varrho \sin \omega \left[\sqrt{1-e^2} \cos v + e \sin \varepsilon \sin v\right] =$$
$$= \varrho \cos \omega \sin \varepsilon - \sqrt{1-e^2}\, \varrho \sin \omega \cos \varepsilon$$

lautet. Setzt man also

$$\text{(XXVIII; 14)} \qquad \frac{dW}{d\varepsilon} = aM(\varepsilon, \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + aN(\varepsilon, \eta)\, r \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

so folgt nach elementarer Rechnung

$$\text{(XXVIII; 14a)} \begin{cases} M(1-e^2) = -3\left(1 - \dfrac{e^2}{2}\right) + 2e \cos \varepsilon - \dfrac{e^2}{2} \cos 2\varepsilon - \\ \qquad - 3e \cos \eta + e^2 \cos (\varepsilon + \eta) + \\ \qquad + (4 - e^2) \cos (\varepsilon - \eta) - e \cos (2\varepsilon - \eta), \\ N(1-e^2) = e \sin \varepsilon - \dfrac{e^2}{2} \sin 2\varepsilon - e \sin \eta + e^2 \sin (\varepsilon + \eta) + \\ \qquad + (2 - e^2) \sin (\varepsilon - \eta) - e \sin (2\varepsilon - \eta). \end{cases}$$

Damit ist das Problem, die Differentialgleichungen (XXVIII; 8) in eine integrable Form zu bringen, auf die Aufgabe zurückgeführt, die Funktionen

$$\Omega \text{ bzw. } \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}; \qquad rS = r \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \qquad Z = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln, die nach Funktionen der Vielfachen von ε fortschreiten.

235. Entwicklung nach der Pseudozeit ε

Zur Lösung der am Schluß des vorigen Abschnitts formulierten Aufgabe betrachten wir die Gleichungen (XXVIII; 6a—d),

$$\text{(XXVIII; 15)}\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{m_1}{1+m}\left(\dfrac{1}{\Delta} - \dfrac{rH}{{r_1}^2}\right), \\ r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} = rS = \dfrac{m_1}{1+m}\left(\dfrac{{r_1}^2 - r^2}{2\Delta^3} - \dfrac{1}{2\Delta} - \dfrac{rH}{{r_1}^2}\right), \\ Z = \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = \\ \quad = \dfrac{m_1}{1+m}\sin J\left[\dfrac{r_1\sin(\pi_1+v_1)}{\Delta^3} - \dfrac{\sin(\pi_1+v_1)}{{r_1}^2}\right], \\ \dfrac{rH}{{r_1}^2} = \dfrac{r\cos v_1}{{r_1}^2}(A\cos v + C\sin v) + \\ \quad + \dfrac{r\sin v_1}{{r_1}^2}(B\cos v + D\sin v). \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke in trigonometrische, nach Vielfachen der Pseudozeit ε fortschreitende Reihen zu entwickeln, genügt es, derartige Entwicklungen für Δ^{-1}, Δ^{-3} (bei Berücksichtigung von Störungen höherer Ordnung, die partielle Ableitungen höherer Ordnung der Störungsfunktion erfordern, auch für Δ^{-5}, Δ^{-7}, ...) und für

$$\text{(XXVIII; 16)}\quad {r_1}^2;\quad r_1\cos v_1;\quad r_1\sin v_1;\quad \frac{\cos v_1}{{r_1}^2};\quad \frac{\sin v_1}{{r_1}^2}$$

durchzuführen, während

$$r\cos v = a(\cos\varepsilon - e);\qquad r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon,$$

$$r^2 = a^2(1 - e\cos\varepsilon)^2 = a^2\left(1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos\varepsilon + \frac{e^2}{2}\cos 2\varepsilon\right)$$

unmittelbar in der gewünschten Form verfügbar sind. Die Entwicklung der negativen ungeraden Potenzen von Δ werden wir ihrer besonderen Schwierigkeit wegen im nächsten Abschnitt gesondert behandeln.

Die Ausdrücke (XXVIII; 16) lassen sich zunächst als Funktionen der mittleren Anomalie g_1 der intermediären Bahn des störenden Planeten darstellen und erst über diese Zwischenstufe als Funktionen von ε, da sowohl g_1 als ε Funktionen von t sind. Nach (VII; 47) ist

$$\text{(XXVIII; 17a)}\quad {r_1}^2 = {a_1}^2\left[1 + \frac{3}{2}{e_1}^2 - 4\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e_1)\frac{\cos\nu g_1}{\nu^2}\right].$$

Ferner ist nach (VII; 43)

$$\frac{r_1}{a_1}\cos v_1 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{dJ_\nu(\nu e_1)}{de_1}\frac{\cos\nu g_1}{\nu^2} - \frac{3}{2}e_1,$$

$$\frac{r_1}{a_1}\sin v_1 = \frac{2}{e_1}\sqrt{1-e_1^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}J_\nu(\nu e_1)\frac{\sin\nu g_1}{\nu}$$

oder, wenn man nach (VII; 33, 32)

$$2\frac{dJ_\nu(\nu e_1)}{de_1} = \nu\,[J_{\nu-1}(\nu e_1) - J_{\nu+1}(\nu e_1)],$$

$$2J_\nu(\nu e_1) = e_1\,[J_{\nu-1}(\nu e_1) + J_{\nu+1}(\nu e_1)]$$

schreibt,

$$\text{(XXVIII; 17b)}\quad \begin{cases} \dfrac{r_1}{a_1}\cos v_1 = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}[J_{\nu-1}(\nu e_1) - J_{\nu+1}(\nu e_1)]\frac{\cos\nu g_1}{\nu} - \frac{3}{2}e_1, \\ \dfrac{r_1}{a_1}\sin v_1 = \sqrt{1-e_1^2}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}[J_{\nu-1}(\nu e_1) + J_{\nu+1}(\nu e_1)]\frac{\sin\nu g_1}{\nu}. \end{cases}$$

Schließlich ist nach (VII; 52)

$$\text{(XXVIII; 17c)}\quad \begin{cases} \left(\dfrac{a_1}{r_1}\right)^2\cos v_1 = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,[J_{\nu-1}(\nu e_1) - J_{\nu+1}(\nu e_1)]\cos\nu g_1, \\ \left(\dfrac{a_1}{r_1}\right)^2\sin v_1 = \sqrt{1-e_1^2}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,[J_{\nu-1}(\nu e_1) + J_{\nu+1}(\nu e_1)]\sin\nu g_1. \end{cases}$$

Die Reihen (XXVIII; 17a—c) konvergieren rasch, wenn e_1 klein ist (für Jupiter und Saturn als Störplaneten ist $e_1 \approx 0.05$), so daß sie im allgemeinen nach wenigen Gliedern abgebrochen werden dürfen. Alle Ausdrücke (XXVIII; 16) haben also die Form

$$c_0 + c_1\cos g_1 + c_2\cos 2g_1 + c_3\cos 3g_1 + \cdots$$

oder

$$s_1\sin g_1 + s_2\sin 2g_1 + s_3\sin 3g_1 + \cdots,$$

und die Koeffizienten sind Funktionen von a_1 und e_1, die man mit Hilfe der BESSELschen Funktionen als Potenzreihen nach e_1 hinschreiben kann und deren numerische Werte in konkreten Fällen zur Verfügung stehen.

Zum Übergang von g_1 auf ε als unabhängige Variable eliminiert man t aus

$$g_1 = n_1 t + \gamma_1; \qquad \varepsilon - e\sin\varepsilon = nt + \gamma,$$

d. h., es ist, wenn $\mu = n_1/n = (a/a_1)^{3/2}$, $\beta = \gamma_1 - \mu\gamma$ gesetzt wird,

$$\text{(XXVIII; 18)}\qquad g_1 = \beta + \mu\,(\varepsilon - e\sin\varepsilon).$$

Ist also j irgendeine ganze positive Zahl, so ist

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} jg_1 = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[j\,(\beta + \mu\varepsilon) - j\mu e\sin\varepsilon]$$

oder

$$\cos jg_1 = \cos\{j(\mu\varepsilon + \beta)\}\cos(j\mu e\sin\varepsilon) + \sin\{j(\mu\varepsilon + \beta)\}\sin(j\mu e\sin\varepsilon),$$

$$\sin jg_1 = sin\{j(\mu\varepsilon + \beta)\}\cos(j\mu e\sin\varepsilon) - \cos\{j(\mu\varepsilon + \beta)\}\sin(j\mu e\sin\varepsilon).$$

Nach (VII; 28) ist aber

$$\cos(j\mu e\sin\varepsilon) = J_0 + 2[J_2\cos 2\varepsilon + J_4\cos 4\varepsilon + \cdots],$$

$$\sin(j\mu e\sin\varepsilon) = \quad 2[J_1\sin\varepsilon + J_3\sin 3\varepsilon + \cdots],$$

wenn $J_n = J_n(j\mu e)$ die BESSELschen Funktionen mit dem Argument $j\mu e$ sind. Damit ist im Prinzip gezeigt, wie man alle Ausdrücke (XXVIII; 17a—c) als trigonometrische Reihen von der Form

$$\text{(XXVIII; 19)}\quad \sum_{i,j}[C_{ij}\cos\{(i - j\mu)\varepsilon - j\beta\} + S_{ij}\sin\{(i - j\mu)\varepsilon - j\beta\}]$$

schreiben kann, in denen i alle ganzen Zahlen, j alle ganzen positiven Zahlen einschließlich der Null durchläuft.

236. Entwicklung des Hauptteils der Störungsfunktion und seiner ungeraden Potenzen

Die Entwicklung des Hauptteils Δ^{-1} der Störungsfunktion und seiner ungeraden Potenzen, von denen bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung nur Δ^{-3} interessiert, erfordert besondere Überlegungen. Aus (XXVIII; 6a),

$$\Delta^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos v\,(A\cos v_1 + B\sin v_1) - 2rr_1\sin v\,(C\cos v_1 + D\sin v_1),$$

erhält man, wenn man r, $r\cos v$, $r\sin v$ durch ε und r_1, $r_1\cos v_1$, $r_1\sin v_1$ durch ε_1 ausdrückt,

$$\frac{\Delta^2}{a_1^2} = h - f\cos(\varepsilon_1 - F) + g\cos 2\varepsilon_1 = G + g\cos 2\varepsilon_1.$$

Darin ist, wenn $\alpha = a/a_1$ gesetzt wird,

$$h = 1 + \frac{e_1^2}{2} + \alpha^2\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - 2\alpha^2 e\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha^2e^2\cos 2\varepsilon +$$
$$+ 2\alpha e_1 A(\cos\varepsilon - e) + 2\alpha e_1 C\sqrt{1 - e^2}\sin\varepsilon,$$

$$\frac{1}{2}f\cos F = e_1 + \alpha A(\cos\varepsilon - e) + \alpha C\sqrt{1 - e^2}\sin\varepsilon,$$

$$\frac{1}{2}f\sin F = \alpha B\sqrt{1 - e_1^2}(\cos\varepsilon - e) + \alpha D\sqrt{1 - e^2}\sqrt{1 - e_1^2}\sin\varepsilon,$$

$$g = \frac{1}{2}e_1^2.$$

Es sind daher h, $f\cos F$ und $f\sin F$ periodische Funktionen von ε, die man für beliebige ε numerisch berechnen kann, sofern die numerischen Werte der Konstanten a, e, π; a_1, e_1, π_1; J vorliegen.

Wenn wir den Fall ausschließen, daß Δ im Laufe der Bewegung sehr kleine Beträge annimmt, d. h., daß die beiden Planeten sich zeitweise sehr nahe kommen, so ist stets $g < G$. In der Tat erhält man für $e = e_1 = J = 0$

$$\text{(XXVIII; 20)} \quad \begin{cases} h = 1 + \alpha^2; \quad A = D = \cos(\pi_1 - \pi), \\ C = -B = \sin(\pi_1 - \pi), \\ f\cos F = 2\alpha(A\cos\varepsilon - B\sin\varepsilon), \\ f\sin F = 2\alpha(A\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon), \end{cases}$$

also

$$f^2 = 4\alpha^2(A^2 + B^2) = 4\alpha^2; \quad f = 2\alpha$$

und daher

$$G = 1 - 2\alpha\cos(\varepsilon_1 - F) + \alpha^2 \geqq (1-\alpha)^2 > 0 \text{ für } \alpha \neq 1.$$

Für verschwindende e, e_1, J strebt also G gegen einen positiven Grenzwert, dagegen g gegen Null. Man wird also bei kleinen Exzentrizitäten und kleiner Neigung den Ansatz

$$\left(\frac{a_1}{\Delta}\right)^{2s} = G^{-s}\left(1 + \frac{g}{G}\cos 2\varepsilon_1\right)^{-s} = \\ = G^{-s} - sgG^{-(s+1)}\cos 2\varepsilon_1 + \frac{s(s+1)}{2}g^2G^{-(s+2)}\cos^2 2\varepsilon_1 - \cdots$$

für $s = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ machen können. Diese Reihen konvergieren sehr rasch. Die Entwicklung der negativen Potenzen von G, die alle auf die Form G^{-s} zurückgeführt werden können, gelingt leicht mit Hilfe der LAPLACEschen Koeffizienten (s. Abschnitt 200—201). Setzt man nämlich

$$h = m(1 + \Theta^2); \quad f = 2m\Theta,$$

so folgt nach (XXIII; 33, 33a)

$$\text{(XXVIII; 21)} \quad G^{-s} = [h - f\cos(\varepsilon_1 - F)]^{-s} = m^{-s}[1 - 2\Theta\cos(\varepsilon_1 - F) + \\ + \Theta^2]^{-s} = m^{-s}\left[\frac{1}{2}b_0^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(s)}\cos k(\varepsilon_1 - F)\right],$$

und es sind die $b_k^{(s)}$ die LAPLACEschen Koeffizienten als Funktionen von Θ. Diese Entwicklungen sind sinnvoll, solange $\Theta < 1$ ist. Das ist aber immer der Fall, wenn große Annäherungen der beiden Planeten ausgeschlossen bleiben. Nach obiger Abschätzung ist nämlich für e, e_1, $J \to 0$

$$\frac{f}{h} = \frac{2\Theta}{1 + \Theta^2} \to \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{2\alpha^{-1}}{1 + \alpha^{-2}} < 1,$$

wenn $\alpha \neq 1$ ist. Man darf also für $\alpha \lessgtr 1$, d. h. einerlei, ob $a < a_1$ oder $a > a_1$ ist, und für genügend kleine e, e_1, J

$$\frac{f}{h} = \sin \chi; \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2}$$

setzen und erhält dann

$$\Theta = \tan \frac{\chi}{2} < 1; \qquad m = h \cos^2 \frac{\chi}{2}.$$

Die Entwicklung von G^{-s} nach Funktionen von ε allein geschieht dann in mehreren Schritten. Zunächst wird die Bildung einer nach den Vielfachen von ε und ε_1 fortschreitenden trigonometrischen Reihe angestrebt. Setzt man

$$\varepsilon_1 - F = \varepsilon_1 - \varepsilon - (F - \varepsilon),$$

so ergibt sich

$$\cos k(\varepsilon_1 - F) = \cos k(\varepsilon_1 - \varepsilon) \cos k(F - \varepsilon) + \sin k(\varepsilon_1 - \varepsilon) \sin k(F - \varepsilon)$$

und statt (XXVIII; 21) die Reihe

$$G^{-s} = m^{-s} \left[\frac{1}{2} \beta_0^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(s)} \cos k(\varepsilon_1 - \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(s)} \sin k(\varepsilon_1 - \varepsilon) \right],$$

in der

$$\beta_k^{(s)} = b_k^{(s)} \cos k(F - \varepsilon), \qquad \gamma_k^{(s)} = b_k^{(s)} \sin k(F - \varepsilon)$$

periodische Funktionen von ε sind. Nun ist aber der Winkel $F - \varepsilon$ für kleine e, e_1, J nahezu konstant, denn nach der Abschätzung (XXVIII; 20) erhält man für e, e_1, $J \to 0$

$$f \cos (F - \varepsilon) \to 2\alpha A; \qquad f \sin (F - \varepsilon) \to 2\alpha B.$$

Man wird also die Größen $\beta_k^{(s)}$, $\gamma_k^{(s)}$ in rasch konvergierende Reihen von der Form

$$c_0 + c_1 \cos \varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + \cdots$$

$$+ s_1 \sin \varepsilon + s_2 \sin 2\varepsilon + \cdots$$

entwickeln können. Die numerischen Werte der Koeffizienten c_i, s_i dieser trigonometrischen Reihen lassen sich aber bequem und genau genug mit Hilfe der Methode der harmonischen Analyse (Anhang II) bestimmen, wenn die Größen $\beta_k^{(s)}$, $\gamma_k^{(s)}$ für eine äquidistante über das Intervall $0 \leqq \varepsilon \leqq 2\pi$ verteilte Folge von ε-Werten numerisch vorliegen. Im allgemeinen genügt es, diese Folge für 24 Argumente, d. h. für

$$\varepsilon = 0°, 15°, 30°, \ldots, 330°,$$

zu berechnen. Damit ist gezeigt, wie man die Koeffizienten der Entwicklung

$$G^{-s} = \sum_{i,j} [C_{ij}^{(s)} \cos (i\varepsilon - j\varepsilon_1) + S_{ij}^{(s)} \sin (i\varepsilon - j\varepsilon_1)]$$

numerisch bestimmt, in der i und j dieselben ganzen Zahlen durchlaufen wie in (XXVIII; 19), und nach (XXVIII; 21) läßt sich dann auch Δ^{-2s} in dieser Form darstellen.

Ist dies geschehen, so verwandelt man diese Reihen in solche mit ε als einzige unabhängige Variable in zwei Schritten. Man schreibt

$$\cos(i\varepsilon - j\varepsilon_1) = \cos i\varepsilon \cos j\varepsilon_1 + \sin i\varepsilon \sin j\varepsilon_1,$$
$$\sin(i\varepsilon - j\varepsilon_1) = \sin i\varepsilon \cos j\varepsilon_1 - \cos i\varepsilon \sin j\varepsilon_1$$

und setzt nach (VII; 38, 40)

$$\cos\varepsilon_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_{\nu-1}(\nu e_1) - J_{\nu+1}(\nu e_1)] \frac{\cos \nu g_1}{\nu} - \frac{e_1}{2},$$

$$\cos j\varepsilon_1 = j \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_{\nu-j}(\nu e_1) - J_{\nu+j}(\nu e_1)] \frac{\cos \nu g_1}{\nu}, \qquad (j = 2, 3, \ldots)$$

$$\sin j\varepsilon_1 = j \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_{\nu-j}(\nu e_1) + J_{\nu+j}(\nu e_1)] \frac{\sin \nu g_1}{\nu}, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

Entwicklungen, die für kleine e_1 schon nach wenigen Gliedern abgebrochen werden können, und man erhält daher

$$\left(\frac{a_1}{\Delta}\right)^{2s} = \sum_{i,j} [p_{ij}^{(s)} \cos(i\varepsilon - jg_1) + q_{ij}^{(s)} \sin(i\varepsilon - jg_1)].$$

Diese Reihen lassen sich aber nach dem in Abschnitt 235 beschriebenen Verfahren in die Form (XXVIII; 19) überführen.

Damit ist im Prinzip gezeigt, wie man die Ausdrücke (XXVIII; 15) als integrable Funktionen der Pseudozeit ε darstellt. F. TISSERAND hat diese langwierige Rechnung im vierten Bande seines „Traité“ (Kap. XXI, S. 340ff.) bis in Einzelheiten durchgeführt. Wir mußten uns hier darauf beschränken, den Gang des Verfahrens zu skizzieren.

Eine abschließende Bemerkung ist aber noch nötig, ehe wir zur Integration der Differentialgleichungen des Problems schreiten. Die Ausdrücke (XXVIII; 19), in denen

$$\beta = \gamma_1 - \mu\gamma; \qquad \mu = \frac{n_1}{n}$$

Konstante sind, lassen sich selbstverständlich in der einfacheren Gestalt

(XXVIII; 22) $$\sum_{i,j} [c_{ij} \cos(i - j\mu)\varepsilon + s_{ij} \sin(i - j\mu)\varepsilon]$$

schreiben. Die Form (XXVIII; 19) muß aber für die Entwicklung von Ω beibehalten werden, damit man die partielle Ableitung $\partial\Omega/\partial\varepsilon$ bilden kann, in der ε nicht die Pseudozeit, sondern die exzentrische Anomalie der Bahn des gestörten Planeten bedeutet, von der r und v, nicht aber r_1 und v_1 ab-

hängen. Setzt man

$$\Omega = \sum_{i,j} [F_{ij} \cos \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\} + G_{ij} \sin \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\}],$$

so ist

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sum_{i,j} [-(i - j\mu)\, F_{ij} \sin \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\} + (i - j\mu)\, G_{ij} \cos \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\}]$$

die totale Ableitung der Störungsfunktion nach ε. Andererseits ist aber

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Omega}{\partial g_1} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}\varepsilon},$$

wegen (XXVIII; 18) aber

$$\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}\varepsilon} = \mu(1 - e \cos \varepsilon); \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial g_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta},$$

und es ist daher

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\varepsilon} - \mu(1 - e \cos \varepsilon) \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \sum_{i,j} [jF_{ij} \sin \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\} - jG_{ij} \cos \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\}].$$

Nach einfacher Rechnung folgt daher

(XXVIII; 23)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} = \mu e \cos \varepsilon \sum_{i,j} [jF_{ij} \sin \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\} - jG_{ij} \cos \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\}] -$$
$$- \sum_{i,j} [iF_{ij} \sin \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\} - iG_{ij} \cos \{(i - j\mu)\, \varepsilon - j\beta\}],$$

ein Ausdruck, der sehr leicht auf die Form (XXVIII; 22) zurückgeführt werden kann, in der dann alle Funktionen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}, \qquad r \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \qquad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0}$$

erscheinen.

Wir haben gezeigt, wie die Ausdrücke $\partial\Omega/\partial\varepsilon$, $r\partial\Omega/\partial r$, Z in trigonometrische Reihen von der Form (XXVIII; 19 oder 22) entwickelt werden können, deren Koeffizienten in jedem konkreten Fall als Funktionen der intermediären Bahnelemente der beiden Planeten durch ein numerisches Verfahren bestimmbar sind. Da wir hier nur Störungen erster Ordnung berücksichtigen, also

$\beta = \gamma_1 - \mu\gamma$ als konstant ansehen dürfen, ziehen wir die einfachere Form (XXVIII; 22) vor. Wir können dann auch

$$\text{(XXVIII; 24)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dR}{d\varepsilon} = a^2 \cos iQ(\varepsilon, \eta)\, Z, \\ \dfrac{dW}{d\varepsilon} = a\left[M(\varepsilon, \eta)\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + N(\varepsilon, \eta)\, r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}\right] \end{cases}$$

als trigonometrische Reihen hinschreiben, wobei Q, M, N durch (XXVIII; 11a, 14a) als endliche Ausdrücke von der Form (XXVIII; 10) gegeben sind. Sind durch Integration dieser Gleichungen die Funktionen $R(\varepsilon, \eta)$ und $W(\varepsilon, \eta)$ bekannt geworden, so ist nach (XXVII; 71a, c)

$$\text{(XXVIII; 25a)} \qquad u = \bar{R}(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \overline{\left(\frac{\partial R}{\partial\tau}\right)}\, dt$$

und nach (XXVIII; 4)

$$\text{(XXVIII; 25b)} \qquad v = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\right)}\, dt, \qquad \delta z = \int_{t_0}^{t} \overline{W}(t)\, dt.$$

Nun sei $F(\varepsilon, \eta)$ eine der Funktionen R, W. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial\tau} = \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{n}{1 - e\cos\eta}; \qquad \overline{\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)}\frac{n}{1 - e\cos\varepsilon}$$

oder, da $ndt = (1 - e\cos\varepsilon)\, d\varepsilon$ ist,

$$\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)}\, dt = \overline{\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)}\, d\varepsilon.$$

Statt (XXVIII; 25a, b) kann man also auch schreiben

$$\text{(XXVIII; 26)} \qquad \begin{cases} u = \bar{R}(\varepsilon) = \displaystyle\int \overline{\left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)}\, d\varepsilon + \text{const}, \\ v = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)}\, d\varepsilon + \text{const}, \\ n\delta z = n\displaystyle\int_{t_0}^{t} \overline{W}(t)\, dt = \int \overline{W}(\varepsilon)\,(1 - e\cos\varepsilon)\, d\varepsilon + \text{const}. \end{cases}$$

Zur Berechnung von $u(\varepsilon)$ bzw. $s = ua/r = u/(1 - e\cos\varepsilon)$ gibt es also zwei Möglichkeiten; die Ergebnisse können wechselseitig als Kontrolle dienen.

Aus (XXVIII; 11a) folgt nach einfacher Reduktion

$$Q = K_0 + K_1 \cos\eta + K_2 \sin\eta = K_1 (\cos\eta - e) + K_2 \sin\eta$$

mit $K_0(\varepsilon) = -eK_1(\varepsilon)$ und

$$K_1(\varepsilon) = -\sin\varepsilon + \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon,$$

$$K_2(\varepsilon) = -\frac{3}{2} + (1 + e^2)\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\cos 2\varepsilon.$$

Schreibt man also ZQ in der Form

(XXVIII; 27)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\cos i}\frac{dR}{d\varepsilon} &= Z[K_1(\cos\eta - e) + K_2\sin\eta] = \\ &= \sum_{i,j}[U_{ij}^{(0)}\cos(i - j\mu)\varepsilon + V_{ij}^{(0)}\sin(i - j\mu)\varepsilon] + \\ &\quad + \sum_{i,j}[U_{ij}^{(1)}\cos\{(i - j\mu)\varepsilon + \eta\} + V_{ij}^{(1)}\sin\{(i - j\mu)\varepsilon + \eta\}] + \\ &\quad + \sum_{i,j}[U_{ij}^{(2)}\cos\{(i - j\mu)\varepsilon - \eta\} + V_{ij}^{(2)}\sin\{(i - j\mu)\varepsilon - \eta\}]\end{aligned}$$

und integriert, wobei η als *willkürliche* Konstante gilt, so ergibt sich, wenn k_1, k_2 Integrationskonstante sind,

(XXVIII; 28)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\cos i}R(\varepsilon,\eta) &= k_1(\cos\eta - e) + k_2\sin\eta + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(0)}}{i - j\mu}\sin(i - j\mu)\varepsilon - \frac{V_{ij}^{(0)}}{i - j\mu}\cos(i - j\mu)\varepsilon\right] + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(1)}}{i - j\mu}\sin\{(i - j\mu)\varepsilon + \eta\} - \frac{V_{ij}^{(1)}}{i - j\mu}\cos\{(i - j\mu)\varepsilon + \eta\}\right] + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(2)}}{i - j\mu}\sin\{(i - j\mu)\varepsilon - \eta\} - \frac{V_{ij}^{(2)}}{i - j\mu}\cos\{(i - j\mu)\varepsilon - \eta\}\right].\end{aligned}$$

Setzt man hierin $\eta = \varepsilon$, so folgt

(XXVIII; 29)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\cos i}\bar{R}(\varepsilon) &= k_1(\cos\varepsilon - e) + k_2\sin\varepsilon + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(0)}}{i - j\mu}\sin(i - j\mu)\varepsilon - \frac{V_{ij}^{(0)}}{i - j\mu}\cos(i - j\mu)\varepsilon\right] + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(1)}}{i - j\mu}\sin(i + 1 - j\mu)\varepsilon - \frac{V_{ij}^{(1)}}{i - j\mu}\cos(i + 1 - j\mu)\varepsilon\right] + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{U_{ij}^{(2)}}{i - j\mu}\sin(i - 1 - j\mu)\varepsilon - \frac{V_{ij}^{(2)}}{i - j\mu}\cos(i - 1 - j\mu)\varepsilon\right].\end{aligned}$$

In den Summen durchläuft der Index i alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, der Index j alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null. Wir schließen den Fall strenger Kommensurabilität der mittleren Bewegungen aus, der andere Integrationsmethoden erfordern würde. Es soll also $i\,n' - j n = (ni - n_1 j)/n$ nur für $i = j = 0$ verschwinden. Für diesen Fall entstehen in (XXVIII; 29) Terme mit verschwindendem Divisor. Diese scheinbare Singularität läßt sich aber vermeiden, wenn man in (XXVIII; 27) die Summen den mit $j = 0$ und unter ihnen auch die mit $i = 0$ gesondert schreibt. Man erhält dann

$$\begin{aligned}(\text{XXVIII; 30})\quad \frac{1}{a^2\cos i}\frac{dR}{d\varepsilon} = {} & U_{00}^{(0)} + (U_{00}^{(1)} + U_{00}^{(2)})\cos\eta + (V_{00}^{(1)} - V_{00}^{(2)})\sin\eta + \\ & + \sum_{i\neq 0}[U_{i0}^{(0)}\cos i\varepsilon + V_{i0}^{(0)}\sin i\varepsilon] + \\ & + \sum_{i\neq 0}[U_{i0}^{(1)}\cos(i\varepsilon+\eta) + V_{i0}^{(1)}\sin(i\varepsilon+\eta)] + \\ & + \sum_{i\neq 0}[U_{i0}^{(2)}\cos(i\varepsilon-\eta) + V_{i0}^{(2)}\sin(i\varepsilon-\eta)] + \\ & + \sum_{i,j>0}[U_{ij}^{(0)}\cos(i-j\mu)\varepsilon + \cdots],\end{aligned}$$

eine Reihe, deren Integral keine Terme mit verschwindendem Nenner enthält.

Infolge der besonderen Struktur der Funktion $Q(\varepsilon, \eta)$ bestehen zwischen den Koeffizienten $U_{ij}^{(k)}$ gewisse identische Beziehungen, deren Kenntnis für die folgenden Überlegungen nützlich ist. Schreibt man

$$\begin{aligned}Z = {} & a_0 + a_1\cos\varepsilon + a_2\cos 2\varepsilon + \cdots + \\ & + b_1\sin\varepsilon + b_2\sin 2\varepsilon + \cdots\end{aligned}$$

und multipliziert man diese Reihe, von der nur die hingeschriebenen ersten Terme mit $j = 0$ interessieren, mit

$$\begin{aligned}Q = {} & e\sin\varepsilon - \frac{3}{2}e\sin\eta + \left(1+\frac{e^2}{2}\right)\sin(\eta-\varepsilon) + \frac{e^2}{2}\sin(\eta+\varepsilon) - \\ & - \frac{e^2}{2}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{2}\sin(\eta-2\varepsilon)\end{aligned}$$

und sondert aus diesem Produkt die konstanten, d. h. von ε und η freien Glieder, ferner diejenigen mit $\cos\eta$ und $\cos(\eta-\varepsilon)$ aus, so erhält man für die Summen dieser Terme

$$b_1\frac{e}{2} - b_2\frac{e^2}{4} - \left(\frac{b_1}{2} - b_2\frac{e}{4}\right)\cos\eta - \left(b_1\frac{e}{2} - b_2\frac{e^2}{4}\right)\cos(\eta-\varepsilon).$$

Die gleichen Terme aus der Entwicklung (XXVIII; 30) lauten aber

$$U_{00}^{(0)} + (U_{00}^{(1)} + U_{00}^{(2)})\cos\eta + (U_{-1,0}^{(1)} + U_{1,0}^{(2)})\cos(\eta-\varepsilon).$$

Daraus folgen die identischen Gleichungen

$$(\text{XXVIII; 31}) \qquad U_{00}^{(0)} = -e(U_{00}^{(1)} + U_{00}^{(2)}) = -(U_{-1,0}^{(1)} + U_{1,0}^{(2)}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$U_{00}^{(0)} = g_0; \qquad U_{00}^{(1)} + U_{00}^{(2)} = g_1; \qquad V_{00}^{(1)} - V_{00}^{(2)} = g_2,$$

so lautet die erste Zeile von (XXVIII; 30)

$$g_1(\cos\eta - e) + g_2 \sin\eta$$

und ist in bezug auf ε konstant. Integriert man, so folgt daher

$$\begin{aligned}(\text{XXVIII; 32}) \quad \frac{1}{a^2\cos i} R(\varepsilon,\eta) = {} & (k_1 + g_1\varepsilon)(\cos\eta - e) + (k_2 + g_2\varepsilon)\sin\eta + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i}[U_{i0}^{(0)} \sin i\varepsilon - V_{i0}^{(0)} \cos i\varepsilon] + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i}[U_{i0}^{(1)} \sin(i\varepsilon+\eta) - V_{i0}^{(1)} \cos(i\varepsilon+\eta)] + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i}[U_{i0}^{(2)} \sin(i\varepsilon-\eta) - V_{i0}^{(2)} \cos(i\varepsilon-\eta)] + \\ & + \sum_{i,j>0} \left[\frac{U_{ij}^{(0)}}{i - j\mu} \sin(i - j\mu)\varepsilon - \cdots\right].\end{aligned}$$

Ebenso ist, mit $\eta = \varepsilon$, wenn $V_{-1,0}^{(1)} - V_{1,0}^{(2)} = v$ gesetzt wird,

(XXVIII; 33)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\cos i}\bar{R}(\varepsilon) = \frac{u}{a^2\cos i} = {} & (k_1 + g_1\varepsilon)(\cos\varepsilon - e) + (k_2 + g_2\varepsilon)\sin\varepsilon + v + \\ & + \text{periodische Glieder mit Argumenten von der Form } i\varepsilon,\ (i - j\mu)\varepsilon.\end{aligned}$$

Differenziert man andererseits (XXVIII; 32) partiell nach η, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\cos i}\frac{\partial R}{\partial\eta} = {} & -(k_1 + g_1\varepsilon)\sin\eta + (k_2 + g_2\varepsilon)\cos\eta + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i}[U_{i0}^{(1)} \cos(i\varepsilon+\eta) + V_{i0}^{(1)} \sin(i\varepsilon+\eta)] - \\ & - \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i}[U_{i0}^{(2)} \cos(i\varepsilon-\eta) + V_{i0}^{(2)} \sin(i\varepsilon-\eta)] + \\ & + \sum_{i,j>0} \left[\frac{U_{ij}^{(1)}}{i - j\mu} \cos\{(i - j\mu)\varepsilon + \eta\} + \cdots\right],\end{aligned}$$

also, wenn man wiederum $\eta = \varepsilon$ setzt und Terme mit verschwindendem Argument gesondert schreibt,

(XXVIII; 34)

$$\frac{1}{a^2 \cos i}\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)} = -(k_1 + g_1\varepsilon)\sin\varepsilon + (k_2 + g_2\varepsilon)\cos\varepsilon - (U^{(1)}_{-1,0} + U^{(2)}_{1,0}) +$$
$$+ \sum_{i\neq 0,-1} \frac{1}{i}\left[U^{(1)}_{i0}\cos(i+1)\varepsilon + V^{(1)}_{i0}\sin(i+1)\varepsilon\right] -$$
$$- \sum_{i\neq 0,1} \frac{1}{i}\left[U^{(2)}_{i0}\cos(i-1)\varepsilon + V^{(2)}_{i0}\sin(i-1)\varepsilon\right] +$$
$$+ \sum_{i,j>0}\left[\frac{U^{(1)}_{ij}}{i - j\mu}\cos(i+1-j\mu)\varepsilon + \cdots\right].$$

Integriert man über ε, so folgt, mit k_0 als Integrationskonstante, und wenn man nach (XXVIII; 31)

$$U^{(1)}_{-1,0} + U^{(2)}_{1,0} = eg_1$$

setzt,

$$\frac{1}{a^2 \cos i}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)}\,d\varepsilon = k_0 + k_1\cos\varepsilon + k_2\sin\varepsilon - eg_1\varepsilon -$$
$$- g_1\int \varepsilon\sin\varepsilon\,d\varepsilon + g_2\int\varepsilon\cos\varepsilon\,d\varepsilon +$$
$$+ \sum_{i\neq 0,-1}\frac{1}{i(i+1)}\left[U^{(1)}_{i0}\sin(i+1)\varepsilon - V^{(1)}_{i0}\cos(i+1)\varepsilon\right] -$$
$$- \sum_{i\neq 0,1}\frac{1}{i(i-1)}\left[U^{(2)}_{i0}\sin(i-1)\varepsilon - V^{(2)}_{i0}\cos(i-1)\varepsilon\right] +$$
$$+ \sum_{i,j>0}\left[\frac{U^{(1)}_{ij}\sin(i+1-j\mu)\varepsilon}{(i-j\mu)(i+1-j\mu)} + \cdots\right].$$

Da nun

$$\int\varepsilon\sin\varepsilon\,d\varepsilon = \sin\varepsilon - \varepsilon\cos\varepsilon; \qquad \int\varepsilon\cos\varepsilon\,d\varepsilon = \cos\varepsilon + \varepsilon\sin\varepsilon$$

ist, ergibt sich

$$\frac{u}{a^2\cos i} = \frac{1}{a^2\cos i}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)}\,d\varepsilon = k_0 - eg_1\varepsilon + (k_1 + g_1\varepsilon)\cos\varepsilon + (k_2 + g_2\varepsilon)\sin\varepsilon +$$
$$+ \text{ periodische Glieder mit Argumenten von der Form } i\varepsilon,\ (i - j\mu)\,\varepsilon.$$

Da diese Formel mit (XXVIII; 33) identisch ist, folgt, daß k_0 keine willkürliche Konstante ist. Vielmehr ist, mit $v = V^{(1)}_{-1,0} - V^{(1)}_{1,0}$,

$$k_0 - eg_1\varepsilon = -e(k_1 - g_1\varepsilon) + v, \qquad \text{also} \qquad k_0 = v - ek_1.$$

Die Integration der Differentialgleichungen für δz und v erfolgt, mutatis mutandis, nach dem gleichen Schema. Bezeichnet man die Entwicklungskoeffizienten von $dW/d\varepsilon$ mit $P_{ij}^{(k)}, Q_{ij}^{(k)}$, so ergibt sich, entsprechend der Entwicklung (XXVIII; 30) von $dR/d\varepsilon$,

(XXVIII; 35)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\frac{dW}{d\varepsilon} &= M\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + Nr\frac{\partial\Omega}{\partial r} = K_3(\varepsilon) + K_4(\varepsilon)\cos\eta + K_5(\varepsilon)\sin\eta = \\ &= P_{00}^{(0)} + (P_{00}^{(1)} + P_{00}^{(2)})\cos\eta + (Q_{00}^{(1)} - Q_{00}^{(2)})\sin\eta + \\ &\quad + \sum_{i\neq 0}[P_{i0}^{(0)}\cos i\varepsilon + Q_{i0}^{(0)}\sin i\varepsilon], \\ &\quad + \sum_{i\neq 0}[P_{i0}^{(1)}\cos(i\varepsilon+\eta) + Q_{i0}^{(1)}\sin(i\varepsilon+\eta)] + \\ &\quad + \sum_{i\neq 0}[P_{i0}^{(2)}\cos(i\varepsilon-\eta) + Q_{i0}^{(2)}\sin(i\varepsilon-\eta)] + \\ &\quad + \sum_{i,j>0}[P_{ij}^{(0)}\cos(i-j\mu)\varepsilon + \cdots].\end{aligned}$$

Gegenüber der Differentialgleichung (XXVIII; 30) für R muß auf folgende Unterschiede aufmerksam gemacht werden:

1. Zwischen den von ε abhängigen Ausdrücken K_3, K_4, K_5 bestehen keine identischen Beziehungen wie zwischen K_0 und K_1. Die Integration von (XXVIII; 35) liefert also, da während des Integrierens η als konstant anzusehen ist, die Konstante

$$k_3 + k_4\cos\eta + k_5\sin\eta,$$

also, da η willkürlich ist, drei Integrationskonstante k_3, k_4, k_5.

2. Zwischen den Koeffizienten $P_{00}^{(0)}, P_{00}^{(1)} + P_{00}^{(2)}, P_{-1,0}^{(1)} + P_{1,0}^{(2)}$ des konstanten Terms und derjenigen von $\cos\eta$ und $\cos(\eta - \varepsilon)$ bestehen wiederum identische Beziehungen, die man leicht ableitet, wenn man M, N nach (XXVIII; 14a) als Funktionen von ε und η, ferner $\partial\Omega/\partial\varepsilon, r\partial\Omega/\partial r$ als Funktionen von ε in Form trigonometrischer Reihen schreibt und $dW/d\varepsilon$ nach (XXVIII; 35) als Produktsumme dieser Ausdrücke bildet. Zur Erzeugung der obengenannten Koeffizienten genügt es, die ersten Glieder dieser Reihen,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = A_1\cos\varepsilon + A_2\cos 2\varepsilon + \cdots + B_1\sin\varepsilon + B_2\sin 2\varepsilon + \cdots,$$

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = C_0 + C_1\cos\varepsilon + C_2\cos 2\varepsilon + \cdots + D_1\sin\varepsilon + D_2\sin 2\varepsilon + \cdots,$$

hinzuschreiben, wobei zu beachten ist, daß die erste Reihe kein konstantes Glied enthält, wie man aus (XXVIII; 23) unmittelbar abliest. Die einfache Rechnung ergibt dann, wenn zur Abkürzung

$$g_3 = P_{00}^{(0)}; \qquad g_4 = P_{00}^{(1)} + P_{00}^{(2)}; \qquad p = P_{-1,0}^{(1)} + P_{1,0}^{(2)}$$

gesetzt wird, die Identitäten

$$g_3 = \frac{e}{2} g_4 = -\frac{1}{2} p. \tag{XXVIII; 36}$$

Setzt man schließlich $g_5 = Q_{00}^{(1)} - Q_{00}^{(2)}$, so ergibt Integration von (XXVIII; 35), formal wie (XXVIII; 32),

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} W(\varepsilon, \eta) = {} & k_3 + g_3\varepsilon + (k_4 + g_4\varepsilon)\cos\eta + (k_5 + g_5\varepsilon)\sin\eta + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i} [P_{i0}^{(0)} \sin i\varepsilon - Q_{i0}^{(0)} \cos i\varepsilon] + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i} [P_{i0}^{(1)} \sin (i\varepsilon + \eta) - Q_{i0}^{(1)} \cos (i\varepsilon + \eta)] + \\ & + \sum_{i\neq 0} \frac{1}{i} [P_{i0}^{(2)} \sin (i\varepsilon - \eta) - Q_{i0}^{(2)} \cos (i\varepsilon - \eta)] + \\ & + \sum_{i,j>0} \left[\frac{P_{ij}^{(0)}}{i - j\mu} \sin (i - j\mu)\varepsilon - \cdots\right]\end{aligned} \tag{XXVIII; 37}$$

und schließlich, wenn $\eta = \varepsilon$ und $Q_{-1,0}^{(1)} - Q_{1,0}^{(2)} = q$ gesetzt wird, formal wie (XXVIII; 33),

(XXVIII; 37a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \overline{W}(\varepsilon) = {} & k_3 + g_3\varepsilon + (k_4 + g_4\varepsilon)\cos\varepsilon + (k_5 + g_5\varepsilon)\sin\varepsilon + q + \\ & + \text{periodische Terme mit Argumenten von der Form } i\varepsilon,\ (i - j\mu)\varepsilon.\end{aligned}$$

Diese Entwicklung enthält, ebenso wie die für $\bar{R}$, ein ε proportionales „säkulares“ Glied sowie gemischte Terme, in denen die unabhängige Variable als Faktor vor die periodischen Ausdrücke $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ tritt. Es ist bemerkenswert, daß in dem Produkt $\overline{W}(1 - e\cos\varepsilon)$, über das bei der Bildung von $n\delta z$ zu integrieren ist, der säkulare Term herausfällt. Nach erfolgter Integration wird also $n\delta z$ zwar wiederum einen ε proportionalen säkularen Term enthalten, aber keinen, der ε^2 proportional wäre. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \overline{W}(1 - e\cos\varepsilon) = {} & k_3 + g_3\varepsilon + (k_4 + g_4\varepsilon)\cos\varepsilon + \\ & + (k_5 + g_5\varepsilon)\sin\varepsilon + q(1 - e\cos\varepsilon) - e(k_3 + g_3\varepsilon)\cos\varepsilon - \\ & - \frac{e}{2}(k_4 + g_4\varepsilon)(1 + \cos 2\varepsilon) - \frac{e}{2}(k_5 + g_5\varepsilon)\sin 2\varepsilon + \\ & + \text{weitere periodische Glieder.}\end{aligned} \tag{XXVIII; 38}$$

Die säkularen Terme,

$$\varepsilon\left(g_3 - \frac{e}{2}g_4\right),$$

heben sich aber wegen (XXVIII; 36) auf, q.e.d.

Bei der Integration über ε entsteht eine neue unabhängige Konstante k_6, ferner ein säkulares Glied $(k_3 - {}^1/_2 e k_4 + q)\varepsilon$ sowie gemischte Terme von der Form $\varepsilon\cos\varepsilon$, $\varepsilon\sin\varepsilon$, $\varepsilon\cos 2\varepsilon$, $\varepsilon\sin 2\varepsilon$, wie sie auch schon in (XXVIII; 38) auftreten, denn wegen

$$\int \varepsilon\cos\varepsilon\, d\varepsilon = \cos\varepsilon + \varepsilon\sin\varepsilon; \qquad \int \varepsilon\sin\varepsilon\, d\varepsilon = \sin\varepsilon - \varepsilon\cos\varepsilon,$$

$$\int \varepsilon\cos 2\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{4}\cos 2\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\varepsilon; \qquad \int \varepsilon\sin 2\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{4}\sin 2\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

entstehen durch die Integration außer rein periodischen Termen keine gemischten von anderer Form. Wir brauchen die Integration selbst, die $n\delta z$ als Funktion der Pseudozeit ε liefert, nicht explizite auszuführen.[1]) Es genügt die Bemerkung, daß man vor der Integration aus den periodischen Gliedern von (XXVIII; 38) mit $j = 0$ diejenigen mit verschwindenden Argumenten herausziehen muß. Diese tragen zu den säkularen Gliedern von $n\delta z$ bei. Unter den Termen mit Argumenten von der Form $i - j\mu$ befinden sich auch solche (auf Grund der doppelten Integration, die zum Ergebnis $n\delta z$ führt), die Divisoren von der Form $(i - j\mu)^2$ aufweisen. Nahezu kommensurable Bewegungen ergeben also in der Störung der mittleren Länge langperiodische Terme von besonders großer Amplitude, eine Erscheinung, die wir bereits in Abschnitt 135 erkannt und begründet haben.

Die Integration der Differentialgleichung für ν macht wenig Schwierigkeiten. Entsprechend (XXVIII; 34) ergibt die partielle Ableitung von (XXVIII; 37) nach η, in der man nachträglich $\eta = \varepsilon$ setzt,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)} = &-(k_4 + g_4\varepsilon)\sin\varepsilon + (k_5 + g_5\varepsilon)\cos\varepsilon - p + \\ &+ \sum_{i\neq 0,-1}\frac{1}{i}\left[P_{i0}^{(1)}\cos(i+1)\varepsilon + Q_{i0}^{(1)}\sin(i+1)\varepsilon\right] - \\ &- \sum_{i\neq 0,1}\frac{1}{i}\left[P_{i0}^{(2)}\cos(i-1)\,\varepsilon + Q_{i0}^{(2)}\sin(i-1)\varepsilon\right] + \\ &+ \sum_{i,j>0}\left[\frac{P_{ij}^{(1)}}{i - j\mu}\cos(i+1-j\mu)\varepsilon + \cdots\right].\end{aligned}$$

---

[1]) Eine bis in Einzelheiten gehende Darstellung des Integrationsprozesses findet der Leser bei F. Tisserand, Traité de mécanique céleste, Bd. 4. Paris 1896, Kap. XXII.

Integriert man über ε und setzt, wegen (XXVIII; 36),

$$p = P^{(1)}_{-1,0} + P^{(2)}_{1,0} = -2g_3,$$

so folgt, mit $2k_7$ als Integrationskonstante,

$$\text{(XXVIII; 39)} \quad -\frac{2}{a}\nu = 2(k_7 + g_3\varepsilon) + k_4 \cos\varepsilon + k_5 \sin\varepsilon + \\ + g_4(\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\varepsilon) + g_5(\varepsilon\sin\varepsilon + \cos\varepsilon) + \\ + \text{periodische Glieder}$$

oder

$$\text{(XXVIII; 40)} \quad -\frac{2}{a}\nu = 2(k_7 + g_3\varepsilon) + (k_4 + g_4\varepsilon)\cos\varepsilon + (k_5 + g_5\varepsilon)\sin\varepsilon + \\ + \text{periodische Glieder,}$$

indem man die Terme $g_5 \cos\varepsilon - g_4 \sin\varepsilon$ in die Summe der periodischen Glieder mit einbezieht.

238. Die Integrationskonstanten

Die Lösungen der Differentialgleichungen der HANSENschen Theorie enthalten, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, die sieben Integrationskonstanten $k_1, k_2, \ldots, k_7$. Das Problem selbst aber erfordert nur sechs unabhängige Konstante, die durch die sechs Bahnelemente der intermediären KEPLERschen Bewegung bestimmt werden. Es ist also eine Integrationskonstante zuviel, und es muß daher zwischen diesen Größen oder zwischen einigen von ihnen eine identische Beziehung bestehen.

Daß dies zutrifft, läßt sich leicht beweisen. Nach (XXVII; 43) ist, wenn $\varrho\cos\omega = a(\cos\eta - e)$, $\varrho\sin\omega = a\sqrt{1-e^2}\sin\eta$ gesetzt wird,

$$W(\varepsilon,\eta) = \Xi + \Phi(\cos\eta - e) + \Psi\sqrt{1-e^2}\sin\eta,$$

wobei

$$\Xi = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1; \qquad \Phi = 2\frac{h}{h_0}\varphi; \qquad \Psi = 2\frac{h}{h_0}\psi$$

Funktionen von ε und von der Ordnung der störenden Masse sind. Schreibt man also

$$W(\varepsilon,\eta) = A(\varepsilon) + B(\varepsilon)\cos\eta + C(\varepsilon)\sin\eta,$$

so ist

$$A = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 - 2\frac{h}{h_0}\varphi e; \qquad B = 2\frac{h}{h_0}\varphi$$

und daher

$$\text{(XXVIII; 41)} \qquad 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = A + Be.$$

Andererseits ist nach (XXVII; 31)

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{d\delta z}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2}, \qquad \frac{h_0}{h} = (1+\nu)^2\left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right).$$

Man kann also (XXVIII; 41) auch

$$\frac{2}{(1+\nu)^2\left(1+\frac{d\delta z}{dt}\right)} - (1+\nu)^2\left(1+\frac{d\delta z}{dt}\right) - 1 = A + Be$$

schreiben. Diese Gleichung ist streng und zeigt in der Tat, daß ν auch ohne Integration gewonnen werden kann, wenn $\overline{W}$ bekannt ist, denn es ist ja

$$\frac{d\partial z}{dt} = \frac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2}.$$

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, vernachlässigt also höhere Potenzen von ν und $\overline{W}$, so erhält man einfacher

$$2(1-2\nu)(1-\overline{W}) - (1+2\nu)(1+\overline{W}) - 1 = -6\nu - 3\overline{W} = A + Be$$

oder

$$\nu = \frac{1}{2}\overline{W} - \frac{1}{6}(A + Be).$$

Nun ist aber nach (XXVIII; 37) ak_3 das konstante Glied von A, ak_4 das konstante Glied von B und nach (XXVIII; 40) $-ak_7$ das konstante Glied von ν. Sei andererseits $a\bar{A}$ der konstante Anteil von $\overline{W}$, so kann man schreiben

$$k_7 = \frac{1}{6}(k_3 + ek_4) - \frac{1}{2}\bar{A}.$$

Wie (XXVIII; 37a) lehrt, ist der konstante Teil von $\overline{W}$ gleich $a(k_3 + q)$, so daß also

$$k_7 = \frac{1}{6}(ek_4 - 2k_3 - 3q)$$

in der Tat durch die unabhängigen Konstanten k_3, k_4 mitbestimmt wird.

Im ungestörten Problem haben die sechs Integrationskonstanten eine wohldefinierte Bedeutung als Funktionen der sechs Bahnelemente einer KEPLERschen Ellipse. In der gestörten Bewegung können wir die Integrationskonstanten ebenfalls als Funktionen der Elemente einer intermediären Kegelschnittsbahn auffassen. Aber man hat in der Wahl der intermediären Bahn, auf die man die Störungen beziehen will, eine wenn auch durch vernünftig gesetzte Schranken eingeengte Freiheit. Die einfachste Definition der inter-

mediären Bahn ist die einer oskulierenden Zweikörperbewegung, aber selbst in diesem Falle ist noch die Wahl der Oskulationsepoche t_0 willkürlich. Man wird immer dann eine oskulierende Bahn als Referenzbewegung wählen, wenn man über die Eigenschaften der gestörten Bewegung über lange Zeiträume hinweg noch keine Erfahrung hat, also immer dann, wenn man erst in Begriff steht, eine allgemeine Störungstheorie nach dem oben beschriebenen Verfahren aufzubauen. In diesem Falle besteht der Vorteil, daß die Störungsbeträge in einem gewissen, mehr oder weniger beschränkten, Zeitraum um die Oskulationsepoche klein sind. Sie werden aber, besonders wenn die Oskulationsepoche ungünstig liegt, infolge der säkularen, langperiodischen und gemischten Glieder in längeren Zeiträumen stark anwachsen. Es ist daher unter Umständen zweckmäßig, intermediäre Bahnen zu verwenden, deren Elemente Mittelwerte der variablen oskulierenden Elemente über den durch die Störungsrechnung zu überbrückenden Zeitraum sind und die sich daher der gestörten Bewegung besser anpassen als irgendeine oskulierende Bahn. Eine solche intermediäre Bahn braucht allerdings die gestörte Bahn zu keiner Zeit zu oskulieren.

Wir werden im folgenden zeigen, wie die Integrationskonstanten in beiden Fällen bestimmt werden können. Wird eine oskulierende Bahn als Referenzbewegung gewählt, so hat man die Konstanten so zu bestimmen, daß für den Oskulationszeitpunkt t_0 die Störungen verschwinden. Sei ε_0 der Wert der unabhängigen Variablen für $t = t_0$, so werden für $\varepsilon = \varepsilon_0$ die Größen

$$R = D(\cos\eta - e) + E\sin\eta; \qquad W = A + B\cos\eta + C\sin\eta; \qquad n\delta z$$

verschwinden müssen, unabhängig von η. Dadurch lassen sich $k_1, k_2, \ldots, k_6$ eindeutig bestimmen. Hier genügt ein Beispiel: Sammelt man in (XXVIII; 32) die von η freien Terme und setzt in ihnen $\varepsilon = \varepsilon_0$ und die Summe dieser Terme gleich Null, so folgt

$$0 = -e(k_1 + g_1\varepsilon_0) + \sum_{i\neq 0}\frac{1}{i}[U_{i0}^{(0)}\sin i\,\varepsilon_0 - V_{i0}^{(0)}\cos i\,\varepsilon_0] +$$

$$+\sum_{i,j>0}\left[\frac{U_{ij}^{(0)}}{i-j\mu}\sin(i-j\mu)\varepsilon_0 - \frac{V_{ij}^{(0)}}{i-j\mu}\cos(i-j\mu)\varepsilon_0\right]$$

als Gleichung zur Bestimmung von k_1. Die übrigen Konstanten ergeben sich in entsprechender Weise, wenn man die Funktionen E, A, B, C und $n\delta z$ für $\varepsilon = \varepsilon_0$ verschwinden läßt. Diese Methode ist eindeutig und streng, sofern man Störungen höherer Ordnung vernachlässigen darf. Sie ist aber mehr oder weniger umständlich, je nach der Güte der Konvergenz der Reihen.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten für mittlere intermediäre Bahnen ist einfacher, andererseits aber von mehr oder weniger willkürlichen Vorsätzen abhängig und daher vieldeutig. In vielen Fällen (z. B. in den Störungstheorien der meisten Planetoiden) scheint folgende Definition einer intermediären Bewegung vernünftig zu sein: Es soll durch geeignete Wahl der Konstanten dafür gesorgt werden, daß $n\delta z$, die Störung der mittleren

Länge, kein konstantes Glied, kein säkulares Glied und keine Terme von der Form $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ enthält, die erfahrungsgemäß große Amplituden aufweisen. Die ersten beiden Forderungen ergeben

$$k_6 = 0; \qquad k_3 - \frac{e}{2} k_4 + q = 0,$$

die letzten beiden liefern zwei lineare Gleichungen für k_3, k_4, k_5 mit ebenfalls konstanten Koeffizienten. Damit sind $k_3, \ldots, k_6$ so bestimmt, daß die oben genannten Terme von $n\delta z$ identisch verschwinden. Die beiden übrigen Konstanten, k_1 und k_2, ergeben sich auf ähnliche Weise, indem man etwa fordert, daß $u(\varepsilon)$ keine periodischen Terme von der Form $\cos\varepsilon$ oder $\sin\varepsilon$ enthalten soll.

Nachdem die Integrationskonstanten auf die eine oder die andere Art festgesetzt worden sind, ergeben sich alle Unbekannten des Problems als Funktionen der Pseudozeit ε und daher, wenn man

$$nt + \gamma = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$

setzt, auch als Funktionen der Zeit.

239. Eine Variante der Hansenschen Methode

In Abschnitt 233 wurde darauf hingewiesen, daß H. GYLDÉN[1]) eine Theorie der allgemeinen Planetenstörungen entwickelt hat, die sich von der HANSENschen in mehreren Punkten unterscheidet. GYLDÉN benutzt als unabhängige Variable die wahre Anomalie, und er ist bestrebt, als Lösungen des Störungsproblems „absolute Bahnen" zu finden, die auch über lange Zeiten die Bewegung eines Planeten genau genug darstellen. Insbesondere vermeidet diese Theorie die bei HANSEN schon in den Störungen erster Ordnung auftretenden Terme, in denen die unabhängige Variable aus den trigonometrischen Funktionen heraustritt. Unter GYLDÉNS zahlreichen Schülern, die auf den von ihm geschaffenen Grundlagen weitergearbeitet haben, sei hier nur M. BRENDEL erwähnt, der sich durch seine theoretischen Untersuchungen über die allgemeinen Störungen der Planeten und Planetoiden einen Namen gemacht hat. Da hier der Platz fehlt, auf die Arbeiten von GYLDÉN und seiner Schule näher einzugehen, sei nur eine auf den Ideen von GYLDÉN und BRENDEL beruhende Variante der HANSENschen Methode kurz geschildert, die E. RABE[2]) beschrieben hat. In dieser Methode werden die Grundlagen der HANSENschen Theorie unverändert benutzt, aber als unabhängige Variable zunächst, wie bei GYLDÉN, die wahre Anomalie bzw. die wahre Länge des gestörten Körpers verwendet, dann aber durch die von BRENDEL eingeführte unabhängige Varia-

---

[1]) Eine ziemlich eingehende Beschreibung der GYLDÉNschen Theorie gibt F. TISSERAND, Traité de mécanique céleste, Bd. 4. Paris 1896.

[2]) E. RABE, Eine zweckmäßige Methode zur Berechnung der allgemeinen Störungen der Planeten. A.N. *273*, 209ff. (1943).

ble φ ersetzt, die weiter unten definiert werden soll. Der Erfolg dieses Verfahrens ist nicht nur eine bedeutende Verbesserung der Konvergenz der Reihen, sondern besonders der Umstand, daß in der Entwicklung dieser Reihen die langperiodischen Glieder, wie sie insbesondere bei angenäherter Kommensurabilität der mittleren Bewegungen auftreten und meist große Amplituden haben, am Anfang der Reihen erscheinen und daher die Konvergenz nicht beeinflussen.

Die Rabesche Analyse ist loc. cit. bis in Einzelheiten wiedergegeben und durch ein vollständiges Rechenschema zur Berechnung der Störungen erster Ordnung auf numerischem Wege ergänzt. Hier begnügen wir uns damit, das Prinzip der Methode zu erläutern und zu zeigen, wie durch Einführung der Brendelschen Variablen φ als „Pseudozeit" die oben genannten schönen Eigenschaften des Verfahrens erreicht werden.

Es sei L die gestörte mittlere Länge zur Zeit t, L_0 die ungestörte mittlere Länge zur Zeit t_0, die der festen intermediären Bahn mit den Elementen (XXVII; 27) angehört. Dann ist

$$L = L_0 + n_0 (t - t_0) + n\delta z,$$

wenn $n\delta z$ die Störung der mittleren Länge in der Hansenschen Theorie bedeutet. Andererseits ist $L = w - g$, wenn g die (gestörte) Mittelpunktsgleichung darstellt. Zwischen w und t besteht also die Beziehung

$$\text{(XXVIII; 42a)} \qquad L_0 + n_0(t - t_0) = w - g - n\delta z.$$

Ebenso ist für den störenden Planeten, wenn die auf ihn bezüglichen Größen mit einem Strich bezeichnet werden,

$$\text{(XXVIII; 42b)} \qquad L_0' + n_0'(t - t_0) = w' - g' - n'\delta z'.$$

Eliminiert man $t - t_0$ aus (XXVIII; 42a, b) und setzt, entsprechend (XXVIII; 18), $\mu_0 = n_0'/n_0$, so erhält man für die Differenz der beiden wahren Längen den Ausdruck

$$\text{(XXVIII; 43)} \quad w - w' = (1 - \mu_0)\, w + \mu_0(L_0 + g + n\delta z) - \\ - (L_0' + g' + n'\delta z').$$

Nun seien g_0, g_0' die Mittelpunktsgleichungen in den ungestörten Bahnen, und es sei

$$g = g_0 + \delta g; \qquad g' = g_0' + \delta g'.$$

Man setze dann

$$\text{(XXVIII; 44)} \qquad \eta = w - w' + g_0' - \mu_0 g_0.$$

Diese Beziehung stellt eine von dem Grad der Annäherung durch Störungen verschieden hoher Ordnung unabhängige strenge Beziehung zwischen w, w' und der durch sie definierten Größe η dar. Für den Fall, daß die gegenseitige

Neigung der Bahnebenen und die Exzentrizitäten der Bahnen verschwinden, geht η in den Winkel zwischen den heliozentrischen Ortsvektoren der beiden Planeten über. Setzt man ferner

$$U = L_0' - \mu_0 L_0 + \delta g' + n'\delta z' - \mu_0(\delta g + n\delta z),$$

so folgt aus (XXVIII; 43, 44)

$$\text{(XXVIII; 45)} \qquad \eta = (1 - \mu_0)\, w - U,$$

und U enthält neben der Konstante $L_0' - \mu_0 L_0$ nur Größen von der Ordnung der Störungen.

Nun führe man — siehe (XXIII;45) und folgende Formeln — die BRENDELsche Variable φ durch die LANDENsche Transformation

$$\text{(XXVIII; 46)} \qquad \sin(\varphi - \eta) = \alpha_0 \sin\varphi; \qquad \alpha_0 = \frac{a_0}{a_0'}$$

ein. Da α_0 als das Verhältnis zwischen den großen Halbachsen der festen intermediären Ellipsen konstant ist, gilt diese Beziehung zwischen φ und η, ebenso wie (XXVIII; 44), streng. Ferner ist

$$\text{(XXVIII; 47)} \qquad \begin{cases} \cos(\varphi - \eta) = \sqrt{1 - \alpha_0^2 \sin^2\varphi}, \\ \vartheta = \sqrt{1 - 2\alpha_0 \cos\eta + \alpha_0^2} = \cos(\varphi - \eta) - \alpha_0 \cos\varphi, \\ \dfrac{d\eta}{d\varphi} = \dfrac{\vartheta}{\sqrt{1 - \alpha_0^2 \sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Um die geometrische Bedeutung von φ zu erkennen, betrachten wir wieder den Fall verschwindender Exzentrizitäten und Neigung. In Abb. 13 seien P_0

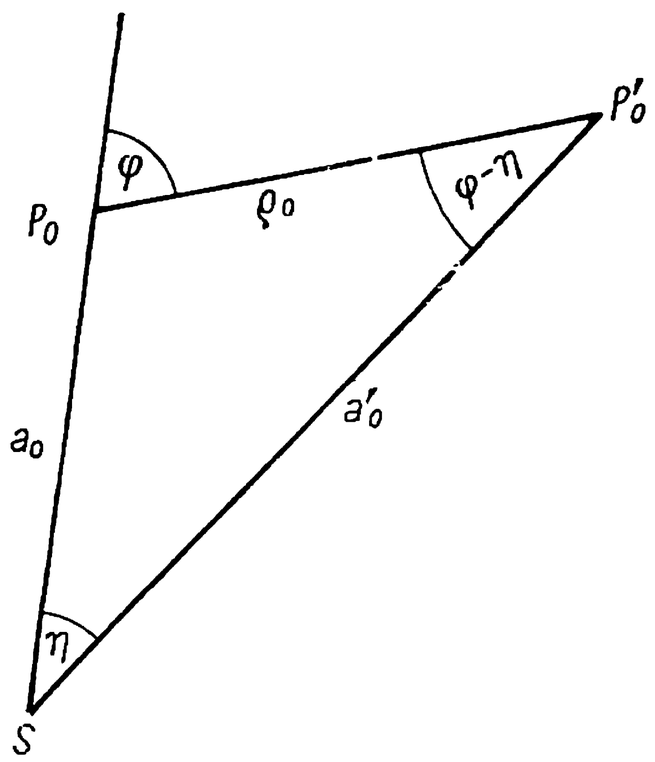

Abb. 13. Definition der BRENDELschen Variablen φ

und P_0' die Örter zweier fiktiver Planeten, die sich um die Sonne S in Kreisbahnen mit den Halbmessern a_0 und a_0' bewegen. Dann ist, wie oben bemerkt, η der Winkel bei S, und man erhält für das Quadrat des Abstandes der beiden Planeten

$$\varrho_0^2 = a_0^2 + a_0'^2 - 2a_0a_0' \cos\eta = a_0'^2 (1 - 2\alpha_0 \cos\eta + \alpha_0^2) = a_0'^2\vartheta^2.$$

Die LANDENsche Transformation (XXVIII; 46) ist identisch mit den Parametergleichungen

$$\text{(XXVIII; 48)} \qquad \begin{cases} \sin\eta = \vartheta \sin\varphi, \\ \cos\eta = \vartheta \cos\varphi + \alpha_0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen kann man aber wegen $\vartheta = \varrho_0/a_0'$

$$a_0' \sin\eta = \varrho_0 \sin\varphi$$

schreiben. Das ist im Dreieck SP_0P_0' der Sinussatz, wenn φ der Winkel oder der Außenwinkel bei P_0 ist. Es empfiehlt sich, den *Außenwinkel* mit φ zu bezeichnen, da dann für $a_0 < a_0'$ (Planetoid und Jupiter) φ monoton und im selben Sinne wie die Zeit wächst. Im gestörten Problem ist also, wenn die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind, φ von dem Winkel zwischen den von dem gestörten Planeten aus gesehenen Richtungen nach dem störenden Planeten und dem Gegenpunkt der Sonne nicht sehr verschieden.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, die wesentlichen Vorteile erkennbar zu machen, die durch die Einführung von φ als Pseudozeit erzielt werden.

Die HANSENsche Funktion $W_0(t, \tau)$ genügt, wie in Abschnitt 230 gezeigt wurde, der Differentialgleichung

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}\frac{\varrho_0}{a_0}\cos\omega_0 + \frac{d\Psi}{dt}\frac{\varrho_0}{a_0}\sin\omega_0,$$

wo ϱ_0 und ω_0 Funktionen von τ sind und Ξ, Φ, Ψ Funktionen der Zeit t darstellen, die von der Ordnung der störenden Masse sind. Ihre Ableitungen sind von der Form (XXVII;41). Man geht auf die neue unabhängige Variable φ über, indem man

$$\frac{dW_0}{d\varphi} = \frac{dW_0}{dt}\frac{dt}{dw}\frac{dw}{d\eta}\frac{d\eta}{d\varphi}$$

schreibt und nach (XXVII; 21) und (XXVIII; 45, 47)

$$\frac{dt}{dw} = \frac{r^2}{\varkappa\sqrt{p}}; \qquad \frac{dw}{d\eta} = \frac{1}{1-\mu_0}\left(1 + \frac{dU}{d\eta}\right);$$

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \alpha_0^2 \sin^2\varphi}} = 1 - \frac{\alpha_0 \cos\varphi}{\sqrt{1 - \alpha_0^2 \sin^2\varphi}}$$

setzt. Da aber W_0 von der Ordnung der Störungen ist, darf man, sofern nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt werden, diese Faktoren durch ihre ungestörten Werte ersetzen. Insbesondere darf also $dU/d\eta$ unterdrückt werden, da U außer Störungsgrößen nur eine additive Konstante enthält. Es ist also, wenn $F(t)$ irgendeine der Funktionen Ξ, Φ, Ψ bedeutet,

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dF}{dt}\,\frac{r_0^2}{\varkappa\sqrt{p_0}}\,\frac{1}{1-\mu_0}\,\frac{\vartheta(\varphi)}{\Theta(\varphi)},$$

wenn zur Abkürzung $\Theta = \sqrt{1-\alpha_0^2\sin^2\varphi}$ gesetzt wird. Nun sind die dF/dt unmittelbar als Funktionen von r_0 und v_0 gegeben und lassen sich, da

$$v_0 = w_0 - \chi_0; \qquad r_0 = \frac{p_0}{1+e_0\cos(w_0-\chi_0)}$$

ist, auch als Funktionen von $w = w_0$ ansehen. Man schreibt daher besser zunächst

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dF}{dw}\,\frac{\vartheta}{(1-\mu_0)\Theta} = f(w)\cdot g(\varphi),$$

wo $f(w)$ und $g(\varphi)$ periodische Funktionen ihrer Argumente sind.

Es gilt nun, auch $f(w)$ als Funktion von φ auszudrücken. Dazu entwickelt man f in die trigonometrische Reihe

$$f(w) = \sum_{i=0}^{\infty}(A_i\cos iw + B_i\sin iw).$$

Wenn man $2N$ äquidistant über das Intervall $0 \leqq w \leqq 2\pi$ verteilte Ordinaten von $f(w)$ berechnet, so kann man mit dem Verfahren der harmonischen Analyse (Anhang II) diese unendliche Reihe durch eine endliche mit leicht berechenbaren Koeffizienten annähern. In der Störungsrechnung der kleinen Planeten erzielt man im allgemeinen genügende Genauigkeit mit $2N = 24$ äquidistanten Funktionswerten, etwa denjenigen für $w = 0°,\ 15°,\ 30°, \ldots,\ 330°$.

Nach (XXVIII; 45) ist

$$iw = \frac{i}{1-\mu_0}(\eta + U), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man setze nun

$$\frac{i}{1-\mu_0} = N_i + \varepsilon_i,$$

und N_i sei diejenige ganze Zahl, die dem Quotienten auf der linken Seite dieser Gleichung am nächsten kommt. Dann ist $|\varepsilon_i| \leqq {}^1/_2$. Ferner setze man

$$\text{(XXVIII; 49)} \qquad U_i = N_i\eta - \varepsilon_i(\varphi-\eta); \qquad u_i = \varepsilon_i\varphi + \frac{i}{1-\mu_0}U.$$

Dann ist offensichtlich

$$iw = U_i + u_i$$

und

$$\cos iw = \cos u_i \cos U_i - \sin u_i \sin U_i,$$
$$\sin iw = \cos u_i \sin U_i + \sin u_i \cos U_i.$$

Man kann also auch

$$A_i \cos iw + B_i \sin iw = P_i \cos u_i + Q_i \sin u_i$$

schreiben, wenn

$$P_i = A_i \cos U_i + B_i \sin U_i,$$
$$Q_i = -A_i \sin U_i + B_i \cos U_i$$

gesetzt wird. Nun ist aber nach (XXVIII;46) η eine Funktion von φ, ferner darf, wie oben bemerkt, $U = \text{const}$ gesetzt werden. Daher sind nach (XXVIII;49) U_i und u_i Funktionen von φ allein, und dasselbe gilt daher auch für P_i und Q_i. Für $F = \Xi, \Phi, \Psi$ ist also

(XXVIII; 50)
$$\frac{dF}{d\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} g(\varphi)\,[P_i \cos u_i + Q_i \sin u_i] = \sum_{i=0}^{\infty} (p_i \cos u_i + q_i \sin u_i),$$

wo p_i und q_i periodische Funktionen von φ sind, die man in trigonometrische Reihen

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(i)} \cos n\varphi + b_n^{(i)} \sin n\varphi); \qquad q_i = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^{(i)} \cos n\varphi + \beta_n^{(i)} \sin n\varphi)$$

entwickeln und mittels harmonischer Analyse äquidistanter Werte p_i, q_i durch endliche Reihen annähern kann.

Das allgemeine Glied von (XXVIII; 50) lautet, wenn wir bei den Koeffizienten $a_n, \ldots, \beta_n$ den oberen Index (i) weglassen,

$$p_i \cos u_i + q_i \sin u_i = \cos u_i \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) +$$
$$+ \sin u_i \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) =$$
$$= a_0 \cos u_i + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \beta_n) \cos (n\varphi + u_i) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \beta_n) \cos (n\varphi - u_i) +$$
$$+ \alpha_0 \sin u_i + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + \alpha_n) \sin (n\varphi + u_i) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - \alpha_n) \sin (n\varphi - u_i).$$

Beim Integrieren erhält man, da $u_i = \varepsilon_i \varphi + \text{const}$ ist,

$$\int \cos(n\varphi \pm u_i)\, d\varphi = \frac{\sin(n\varphi \pm u_i)}{n \pm \varepsilon_i}; \qquad \int \sin(n\varphi \pm u_i)\, d\varphi = -\frac{\cos(n\varphi \pm u_i)}{n \pm \varepsilon_i},$$

also schließlich

$$\int (p_i \cos u_i + q_i \sin u_i)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a_0}{\varepsilon_i} \sin u_i + \frac{1}{2} \sum \frac{a_n - \beta_n}{n + \varepsilon_i} \sin(n\varphi + u_i) + \frac{1}{2} \sum \frac{a_n + \beta_n}{n - \varepsilon_i} \sin(n\varphi - u_i) -$$

$$- \frac{\alpha_0}{\varepsilon_i} \cos u_i - \frac{1}{2} \sum \frac{b_n + \alpha_n}{n + \varepsilon_i} \cos(n\varphi + u_i) - \frac{1}{2} \sum \frac{b_n - \alpha_n}{n - \varepsilon_i} \cos(n\varphi - u_i) =$$

$$= C_i \cos u_i + D_i \sin u_i,$$

wo

$$C_i = -\frac{\alpha_0}{\varepsilon_i} + \frac{1}{2} \sum \frac{a_n - \beta_n}{n + \varepsilon_i} \sin n\varphi + \frac{1}{2} \sum \frac{a_n + \beta_n}{n - \varepsilon_i} \sin n\varphi -$$

$$- \frac{1}{2} \sum \frac{b_n + \alpha_n}{n + \varepsilon_i} \cos n\varphi - \frac{1}{2} \sum \frac{b_n - \alpha_n}{n - \varepsilon_i} \cos n\varphi =$$

$$= -\frac{\alpha_0}{\varepsilon_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n + \varepsilon_i \beta_n}{n^2 - {\varepsilon_i}^2} \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i \alpha_n - n b_n}{n^2 - {\varepsilon_i}^2} \cos n\varphi$$

ist und D_i durch einen ähnlichen Ausdruck dargestellt wird.

Man erkennt, daß in diesen Entwicklungen die langperiodischen Terme mit den kleinen Divisoren ε_i am Anfang stehen und daß die Beträge der Koeffizienten, deren Nenner mit n^2 wachsen, rasch abnehmen. Damit haben wir die wesentlichen Vorteile dieser Methode aufgezeigt, die auch bei Weiterführung der Analyse nach HANSEN, insbesondere bei der Berechnung der Längenstörung $n\delta z$, die eine weitere Integration erfordert, nicht verlorengehen.

Natürlich läßt sich nach dem geschilderten Verfahren auch eine analytische Störungstheorie aufbauen. Hierbei ergibt sich ein weiterer Vorteil. Wir haben oben festgestellt, daß bei verschwindenden Exzentrizitäten und verschwindender gegenseitiger Neigung der Bahnebenen der Abstand ϱ der beiden Planeten die Form

$$\varrho_0 = a_0' \vartheta = a_0' \left[\sqrt{1 - {\alpha_0}^2 \sin^2 \varphi} - \alpha_0 \cos \varphi\right]$$

annimmt. Es ist aber

$$\frac{a_0'}{\varrho_0} = \frac{1}{\vartheta} = \frac{\sqrt{1 - {\alpha_0}^2 \sin^2 \varphi} + \alpha_0 \cos \varphi}{1 - {\alpha_0}^2},$$

so daß sich also für diesen wichtigen Ausgangswert für die Berechnung des Hauptteils der Störungsfunktion ein geschlossener Ausdruck ergibt, in dem die unabhängige Variable nicht im Nenner auftritt.

KAPITEL XXIX

ALLGEMEINE STÖRUNGEN DER RECHTWINKLIGEN KOORDINATEN

240. Die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten

Gegenüber den klassischen Methoden der allgemeinen Störungsrechnung setzen sich in neuerer Zeit immer mehr diejenigen durch, in denen als abhängige Variable die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Körpers dienen. Die algebraische Form und die Symmetrie der Bewegungsgleichungen erleichtern (z. B. bei der Berechnung spezieller Störungen) das Programmieren des Integrationsvorgangs, wenn man das moderne Hilfsmittel der Computeranlagen zur Verfügung hat. Aber auch bei der Entwicklung allgemeiner Störungstheorien kommen diese Vorzüge der rechtwinkligen Koordinaten zur Geltung. Nicht nur kennt man hierbei Verfahren, die sonst recht umständlichen und zeitraubenden Reihenentwicklungen durch Computer durchführen zu lassen, da sich für die Berechnung der Koeffizienten dieser Reihen vielfach bequeme Rekursionsbeziehungen darbieten, sondern die verhältnismäßig einfache Struktur des Systems der Differentialgleichungen für die Koordinatenstörungen führt auch auf Iterationsprozesse, die es erlauben, von einer intermediären Anfangslösung aus schrittweise zu gestörten Lösungen erster, zweiter und höherer Ordnung vorzudringen, wobei der Algorithmus des Iterationsverfahrens von Schritt zu Schritt formal derselbe bleibt. Diese Möglichkeiten sind erst in neuerer Zeit voll ausgenutzt worden. Die in ihrer Art vollkommenste und reifste Lösung dieses Problems verdanken wir P. MUSEN[1]); seine Theorie wird daher den Schwerpunkt dieses Kapitels einnehmen. Als Vorläufer seiner Methode kann man die Arbeiten von D. BROUWER[2]) ansehen, doch reichen die Anfänge der zu diesen modernen Lösungen führenden Entwicklung bis ins vorige Jahrhundert zurück. R. BROUCKE[3]) hat auf diese interessanten Zusammenhänge hingewiesen, die auf ENCKE, HILL, insbesondere aber auf Bemerkungen von DZIOBEK[4]) zurückgreifen, die damals allerdings noch keine praktische Verwendung fanden. Wir werden aus seiner kurzgefaßten Darstellung der iterativen Lösungen des allgemeinen Störungsproblems in den rechtwinkligen Koordinaten im folgenden mehrfach Nutzen ziehen.

---

[1]) P. MUSEN und L. CARPENTER, On the general planetary perturbations in rectangular coordinates. J. geophys. Res. *68*, 2727 (1963); P. MUSEN, On the general perturbations of the position vectors of a planetary system. J. O. *48*, 11 (1965).

[2]) D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Methods of celestial mechanics. New York 1961, Kap. XIII.

[3]) R. BROUCKE, Computation of perturbations in rectangular coordinates. IPL Space Programs Summary 37/49, Bd. 3.

[4]) O. DZIOBEK, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung. Leipzig 1888, Nachdruck (engl.) New York 1962.

In einem festen heliozentrischen Koordinatensystem mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als den Basisvektoren (den Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen) seien $\mathfrak{q}(x, y, z)$, $\mathfrak{q}_1(x_1, y_1, z_1)$ die Ortsvektoren des gestörten bzw. des störenden Planeten, m und m_1 deren in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückte Massen, und es sei $r = |\mathfrak{q}|$, $r_1 = |\mathfrak{q}_1|$, $\Delta = |\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}|$. Dann genügt $\mathfrak{q}(t)$ der Differentialgleichung [vgl. (XXIII; 6)]

$$\text{(XXIX; 1)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\,\mathfrak{q} = k^2 m_1 \left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\Delta^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{{r_1}^3}\right), \qquad \varkappa^2 = k^2(1 + m).$$

Ist

$$\nabla = \mathfrak{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{y}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{z}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

ein Gradientoperator und

$$\text{(XXIX; 2)} \qquad \Omega = \frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{{r_1}^3} = \Omega\,(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$$

die Störungsfunktion, so kann man statt (XXIX; 1) auch

$$\text{(XXIX; 3)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\,\mathfrak{q} = k^2 m_1\,\nabla\Omega$$

schreiben, denn wegen $\Delta^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$ gilt

$$\text{(XXIX; 4)} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{{r_1}^3}, \cdots,$$

woraus

$$\nabla\Omega = \frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\Delta^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{{r_1}^3}$$

folgt. Aus den Übergangsformeln auf Polarkoordinaten,

$$x = r\cos\beta\cos\lambda, \qquad y = r\cos\beta\sin\lambda, \qquad z = r\sin\beta$$

entnimmt man

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}; \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}; \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r},$$

also, wenn man zur Abkürzung $r\partial\Omega/\partial r = p$ setzt,

$$\text{(XXIX; 5)} \qquad p = r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \cdots\right) = x\,\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\,\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\,\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Da auf der linken Seite von (XXIX; 1) auch r vorkommt, ist es zweckmäßig, auch eine Differentialgleichung für $r(t)$ zu besitzen.

Aus

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{XXIX; 6}$$

folgt durch fortgesetztes Differenzieren, wenn man rechts auftretende zweite Ableitungen der Koordinaten durch (XXIX; 1) ersetzt, mit Rücksicht auf (XXIX; 5)

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \tag{XXIX; 6a}$$

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x\left(-\frac{\varkappa^2}{r^3}x + k^2m_1\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \cdots = \tag{XXIX; 6b}$$

$$= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \frac{\varkappa^2}{r} + k^2m_1p,$$

$$r\dddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} = 2\left[\dot{x}\left(-\frac{\varkappa^2}{r^3}x + k^2m_1\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \cdots\right] + \varkappa^2\frac{\dot{r}}{r^2} + k^2m_1\dot{p} = \tag{XXIX; 6c}$$

$$= -\varkappa^2\frac{\dot{r}}{r^2} + k^2m_1\left[\dot{p} + 2\left(\dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\right].$$

Nun ist

$$\frac{d\Omega}{dt} = \dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \dot{x}_1\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \dot{y}_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + \dot{z}_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}.$$

Betrachtet man aber die Koordinaten des störenden Planeten als konstant und führt demgemäß einen partiellen Differentialoperator

$$\frac{\partial}{dt} = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

ein, so schreibt man kürzer

$$r\dddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} + \varkappa^2\frac{\dot{r}}{r^2} = k^2m_1\left[\frac{d}{dt}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial\Omega}{dt}\right] = k^2m_1\left(\dot{p} + 2\frac{\partial\Omega}{dt}\right).$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man (XXIX; 6b) in der Form

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 - \frac{\varkappa^2}{r} = k^2m_1\left(p + 2\int\partial\Omega\right) + C \tag{XXIX; 7}$$

zurück, wo C eine Integrationskonstante bedeutet. Subtrahiert man (XXIX; 6b) so folgt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2\frac{\varkappa^2}{r} = 2k^2m_1\int\partial\Omega + C. \tag{XXIX; 7a}$$

Es sei nun $\mathfrak{q}_0(x_0, y_0, z_0)$ der Ortsvektor eines fiktiven Planeten mit der Masse m, der eine ungestörte Bahn um die Sonne beschreibt. Dann ist

$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 + \frac{\varkappa^2}{r_0^3}\,\mathfrak{q}_0 = 0\,, \tag{XXIX; 8}$$

und $r_0 = |\mathfrak{q}_0|$ genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung (XII; 1),

$$r_0\dddot{r}_0 + 3\dot{r}_0\ddot{r}_0 + \varkappa^2\frac{\dot{r}_0}{r_0^2} = 0\,,$$

deren erstes Integral

$$r_0\ddot{r}_0 + \dot{r}_0^2 - \frac{\varkappa^2}{r_0} = \text{const} = C_0 \tag{XXIX; 9a}$$

lautet, das auch in der Form des Energiesatzes (III; 31)

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 - 2\frac{\varkappa^2}{r_0} = -\frac{\varkappa^2}{a_0} = C_0 \tag{XXIX; 9b}$$

geschrieben werden kann. Vergleicht man (XXIX; 9b) mit (XXIX; 7a), so erscheint es zweckmäßig, die willkürliche Konstante $C = C_0$ zu setzen. Oskuliert nämlich $\mathfrak{q}_0(t)$ die gestörte Bahn $\mathfrak{q}(t)$ im Zeitpunkt t_0, so kann man (XXIX; 7, 7a) in der Form

$$\text{(XXIX; 10)}\qquad \begin{cases} r\ddot{r} + \dot{r}^2 - \varkappa^2\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{a_0}\right) = k^2 m_1\left(p + 2\displaystyle\int_{t_0}^{t}\partial\Omega\right), \\[2ex] \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \varkappa^2\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a_0}\right) = 2k^2 m_1\displaystyle\int_{t_0}^{t}\partial\Omega \end{cases}$$

schreiben. Dann unterscheiden sich $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_0$ innerhalb einer großen Zwischenzeit $\tau = t - t_0$ höchstens um Beträge von der Größenordnung der störenden Massen. Das bleibt aber auch noch richtig, wenn man $C = -\varkappa^2/a_0 + \gamma$ setzt, wo γ eine willkürliche Konstante von der Ordnung der Störungen ist. Dieses Inkrement, das dann auf den rechten Seiten von (XXIX; 10) hinzutritt, kann auch als Integrationskonstante des Integrals $\int(\partial\Omega/dt)\,dt$ aufgefaßt werden.

Anmerkung: Führt man für die Ortsvektoren $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ die Bezeichnungen des Abschnitts 106 ein, setzt also etwa

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_i\,; \qquad \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q} = \mathfrak{r}_j\,; \qquad \mathfrak{q}_1 = -\mathfrak{r}_k\,,$$

so daß $\mathfrak{r}_i + \mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_k = 0$ ist, und bezeichnet man (Bd. II, Abb. 13, S. 84) die dem Vektor $\mathfrak{r}_i$ gegenüberliegende Masse mit m_i, so erhalten die Differentialgleichungen für die drei Vektoren die symmetrische Form

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i + k^2 M\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} = k^2 m_i\mathfrak{R} = k^2 m_i\left(\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} + \frac{\mathfrak{r}_j}{r_j^3} + \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3}\right), \qquad (M = m_i + m_j + m_k)\,,$$

und es ist

$$\Omega_i = -\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{{r_k}^3} = \Omega_i(x_i, y_i, z_i;\ x_k, y_k, z_k)$$

und

$$\nabla_i \Omega_i = \left(\mathfrak{x}\frac{\partial}{\partial x_i} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial y_i} + \mathfrak{z}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\Omega_i = \mathfrak{R},$$

wenn man

$${r_j}^2 = (x_i + x_k)^2 + (y_i + y_k)^2 + (z_i + z_k)^2$$

berücksichtigt. Alle Formeln behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Indizes i, j, k zyklisch vertauscht. Führt man die „lokalen Invarianten“ (XI; 4) und (XII; 31) ein, so erhält man statt der auf der rechten Seite von (XXIX; 6c) erscheinenden Ausdrücke die symmetrischen Formeln

$$p = r\frac{\partial \Omega}{\partial r} = p_i = \mu_i p_{ii} + \mu_j p_{ij} + \mu_k p_{ik}, \qquad \frac{\partial \Omega}{dt} = p_\alpha = \mu_i p_{i\alpha} + \mu_j p_{j\alpha} + \mu_k p_{k\alpha},$$

also als Differentialgleichung für r_i

$$r_i \ddot{r}_i + 3\dot{r}_i \ddot{r}_i + k^2 M\frac{\dot{r}_i}{{r_i}^2} = k^2 m_i(\dot{p}_i + 2p_\alpha),$$

wie in (XII; 45). Die Störungsfunktion Ω_i unterscheidet sich von (XXIX; 2) durch den hinzutretenden Summanden $-{r_i}^{-1}$, der mit dem indirekten Teil vereinigt werden kann, da er, ebenso wie dieser, leicht entwickelbar ist und außer einem konstanten Term, der bei der Differentiation herausfällt, nur periodische Glieder enthält.

241. Die Differentialgleichungen für die Koordinatenstörungen

Sind die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der intermediären Bahn als Funktionen der Zeit bekannt, so sei

$$x = x_0 + \xi; \qquad y = y_0 + \eta; \qquad z = z_0 + \zeta; \qquad r = r_0 + \varrho,$$

und die „Koordinatenstörungen“ $\xi, \eta, \zeta, \varrho$ werden dann gewissen Differentialgleichungen genügen, deren Anfangsbedingungen von der Definition der intermediären Bewegung abhängen. Am bequemsten ist es, die intermediäre Bahn so festzulegen, daß sie die gestörte in irgendeinem Zeitpunkt t_0 oskuliert. Dann sind für $t = t_0$ die Störungskoordinaten ξ, η, ζ und deren Ableitungen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ Null. Allerdings ist eine solche Determinierung der intermediären Bahn nicht immer die beste, da die Oskulationsepoche so ungünstig liegen kann, daß die Störungen, obwohl für eine gewisse Zeitspanne beiderseits t_0 sehr klein, doch in relativ kurzer Zeit unerwünscht stark anwachsen. Man wird dann

besser tun, die intermediären Bahnelemente so festzulegen, daß ihre Variationen infolge der Störungen auch über längere Zeiten hinweg klein bleiben. Eine solche Bahn wird im allgemeinen die gestörte zu keiner Zeit oskulieren, und sie braucht auch keine KEPLERsche Kegelschnittsbahn zu sein, sondern man wird unter Umständen gewisse Störungsterme mit in die intermediäre Bahn hineinnehmen, um die Störungsbeträge weiter einzuschränken. Wir werden aber vorerst von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch machen.

Subtrahiert man (XXIX; 8) von (XXIX; 1), so erhält man für den Störungsvektor $\delta\mathfrak{q} = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}_0$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\delta\mathfrak{q} + \varkappa^2\left(\frac{\mathfrak{q}}{r^3} - \frac{\mathfrak{q}-\delta\mathfrak{q}}{{r_0}^3}\right) = k^2 m_1 \nabla\Omega\,,$$

also für dessen Koordinaten

$$\text{(XXIX; 11)}\qquad \begin{cases} \ddot{\xi} + \varkappa^2\dfrac{\xi}{{r_0}^3} = \varkappa^2\left(\dfrac{1}{{r_0}^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)x + k^2 m_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{\eta} + \varkappa^2\dfrac{\eta}{{r_0}^3} = \varkappa^2\left(\dfrac{1}{{r_0}^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)y + k^2 m_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{\zeta} + \varkappa^2\dfrac{\zeta}{{r_0}^3} = \varkappa^2\left(\dfrac{1}{{r_0}^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)z + k^2 m_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Ferner findet man aus der ersten Gleichung (XXIX; 10)

$$(r_0+\varrho)(\ddot{r}_0+\ddot{\varrho}) + (\dot{r}_0+\dot{\varrho})^2 - \varkappa^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_0}\right) = k^2 m_1\left(p + 2\int\partial\Omega\right)$$

und, subtrahiert man, mit $C_0 = -\varkappa^2/a_0$, die Gleichung (XXIX; 9a),

$$\ddot{r}_0\varrho + 2\dot{r}_0\dot{\varrho} + r_0\ddot{\varrho} + \varrho\ddot{\varrho} + \dot{\varrho}^2 + \varkappa^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = k^2 m_1\left(p + 2\int\partial\Omega\right)$$

oder

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_0\varrho) + \varkappa^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = k^2 m_1\left(p + 2\int\partial\Omega\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2\varrho^2}{dt^2}.$$

Da aber

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} = \frac{(r_0\varrho)}{r{r_0}^2} = \frac{(r_0\varrho)}{{r_0}^3}\left(1 + \frac{\varrho}{r_0}\right)^{-1} = \frac{(r_0\varrho)}{{r_0}^3}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)$$

ist, so folgt schließlich

$$\text{(XXIX; 12)}\qquad \frac{d^2}{dt^2}(r_0\varrho) + \varkappa^2\frac{(r_0\varrho)}{{r_0}^3} = k^2 m_1\left(p + 2\int\partial\Omega\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2\varrho^2}{dt^2} + \frac{\varkappa^2\varrho^2}{r{r_0}^2},$$

eine Gleichung, in der die beiden letzten Glieder rechts von der zweiten Ordnung in den Störungen sind und unterdrückt werden dürfen, wenn man sich auf die Berechnung von Störungen erster Ordnung beschränkt.

Die Gleichungen (XXIX; 11, 12), die man abgekürzt auch

$$\text{(XXIX; 13a)} \quad \ddot{\xi} + \varkappa^2 \frac{\xi}{{r_0}^3} = Q_\xi; \quad \ddot{\eta} + \varkappa^2 \frac{\eta}{{r_0}^3} = Q_\eta; \quad \ddot{\zeta} + \varkappa^2 \frac{\zeta}{{r_0}^3} = Q_\zeta,$$

$$\text{(XXIX; 13b)} \qquad \frac{d^2}{dt^2}(r_0\varrho) + \varkappa^2 \frac{(r_0\varrho)}{{r_0}^3} = Q_{r_0\varrho}$$

schreiben kann, haben gemeinsame Form. Zur Lösung des Problems genügt es an sich, die drei Gleichungen (XXIX; 13a) zu integrieren.
Aber

$$Q_\xi = \varkappa^2 \left(\frac{1}{{r_0}^3} - \frac{1}{r^3} \right) x + k^2 m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

ebenso wie Q_η und Q_ζ, enthält im ersten Term den Faktor

$$\frac{1}{{r_0}^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{1}{{r_0}^4}(3\varrho - 6\varrho^2 + 10\varrho^3 - \cdots) \approx 3\frac{\varrho}{{r_0}^4},$$

dessen Berechnung die Kenntnis von ϱ erfordert. Man wird also auch die Gleichung (XXIX; 13b) lösen müssen. Die letztere ist, da $Q_{r_0\varrho}$ den Term $\int \partial\Omega$ enthält, eigentlich das erste Integral einer Differentialgleichung dritter Ordnung, während jede der Gleichungen (XXIX; 13a) von der zweiten Ordnung ist. Das System (XXIX; 13a, b) erfordert also neun Integrationskonstante, von denen aber nur sechs voneinander unabhängig sind. Nach formaler Lösung der vier Differentialgleichungen wird man also die drei Integrationskonstanten von (XXIX; 13b), von denen eine in $\int \partial\Omega$ enthalten ist, als Funktionen der sechs Integrationskonstanten von (XXIX; 13a) bestimmen müssen. Die hierzu nötigen Beziehungen gewinnt man aus den Identitäten (XXIX; 6, 6a) sowie aus (XXIX; 7a). Aus (XXIX; 6) folgt zunächst

$$(x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2 = (r_0 + \varrho)^2,$$

also, da ${x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = {r_0}^2$ ist,

$$\text{(XXIX; 14a)} \quad 2(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2(r_0\varrho) + \frac{(r_0\varrho)^2}{{r_0}^2}.$$

Ebenso leitet man aus (XXIX; 6a)

(XXIX; 14b)

$$x_0\dot{\xi} + y_0\dot{\eta} + z_0\dot{\zeta} + \dot{x}_0\xi + \dot{y}_0\eta + \dot{z}_0\zeta + \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = \frac{d}{dt}(r_0\varrho) + \varrho\dot{\varrho}$$

ab, eine Gleichung, die man auch unmittelbar durch Differenzieren von (XXIX; 14a) erhält. Schließlich ergibt (XXIX; 7a), mit $C = C_0$,

$$(\dot{x}_0 + \dot{\xi})^2 + (\dot{y}_0 + \dot{\eta})^2 + (\dot{z}_0 + \dot{\zeta})^2 - \varkappa^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_0}\right) = 2\,k^2 m_1 \int \partial\Omega$$

und, nachdem man (XXIX; 9b) subtrahiert hat,

(XXIX; 14c)

$$2(\dot{x}_0\dot{\xi} + \dot{y}_0\dot{\eta} + \dot{z}_0\dot{\zeta}) + \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2\varkappa^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = 2k^2 m_1 \int \partial\Omega,$$

wobei wieder, wie oben,

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} = \frac{(r_0\varrho)}{{r_0}^3}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)$$

gesetzt werden kann.

Sind also für $t = t_0$ die Anfangsbedingungen ξ, η, ζ; $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ der Differentialgleichungen (XXIX; 13a) gegeben, so erhält man aus (XXIX; 14a, b, c) die entsprechenden Anfangsbedingungen ϱ, $\dot{\varrho}$, $\int \partial\Omega$ der Differentialgleichung (XXIX; 13b). Für den Fall, daß die intermediäre Bahn (XXIX; 8) die gestörte Bahn (XXIX; 1) im Zeitpunkt t_0 oskuliert, verschwinden sämtliche neun Anfangswerte.

242. Integration der Differentialgleichungen

Die Differentialgleichungen (XXIX; 13a, b) haben die gemeinsame Form

(XXIX; 15) $$\ddot{q} + f(t)\,q = Q_q,$$

wo $f(t) = \varkappa^2 r_0^{-3}$ eine bekannte Funktion der Zeit und Q_q ein Störungsausdruck von der Ordnung der störenden Masse ist. Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten die gestörten Koordinaten, aber wenn man sich auf Störungen erster Ordnung beschränkt, so darf man $Q_{r_0\varrho}$, das den Faktor m_1 enthält, mit den ungestörten Koordinaten berechnen, und mit diesem genäherten Wert ergibt die Lösung der Differentialgleichung (XXIX; 13b) ϱ bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung genau. Mit diesem genäherten ϱ sind dann auch die rechten Seiten der Gleichungen (XXIX; 13a) mit derselben Genauigkeit bekannt. Wiederholung dieses Verfahrens mit verbesserten Koordinaten ergibt dann die Koordinatenstörungen bis zur zweiten Ordnung genau, usw.

Vorbehaltlich dieser einzuschlagenden Reihenfolge in der Ausführung der Integration durch ein Näherungsverfahren dürfen wir also bei jedem Integrationsschritt den Störungsausdruck Q_q in (XXIX; 15) als eine bekannte Funktion der Zeit ansehen.

Die (XXIX; 15) entsprechende ungestörte Gleichung,

$$\ddot{q}_0 + f(t)\, q_0 = 0, \tag{XXIX; 16}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, ist nach bekannten Methoden lösbar. Seien $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zwei voneinander unabhängige Lösungen von (XXIX; 16), so ist

$$q_0 = k_1 q_1 + k_2 q_2 \tag{XXIX; 17}$$

mit den willkürlichen Konstanten k_1 und k_2 die allgemeine Lösung, und es gilt

$$\ddot{q}_1 + f(t)\, q_1 = 0; \quad \ddot{q}_2 + f(t)\, q_2 = 0. \tag{XXIX; 18}$$

Eliminiert man hieraus $f(t)$, so folgt

$$q_1 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 = 0$$

und durch Integration

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = \alpha = \text{const}, \tag{XXIX; 19}$$

offensichtlich eine verallgemeinerte Form des für Zentralbewegungen gültigen Flächensatzes. Die Konstante α ist von Null verschieden, denn für $\alpha = 0$ würde man

$$\frac{\dot{q}_1}{q_1} = \frac{\dot{q}_2}{q_2}$$

erhalten, und es ergäbe sich als neues Integral, mit konstantem β,

$$\ln q_1 = \ln q_2 + \ln \beta \quad \text{oder} \quad q_1 = \beta q_2,$$

d. h., q_1 und q_2 wären linear abhängig, entgegen der Voraussetzung. Im übrigen ist α willkürlich, und man wird die partikulären Lösungen immer so normieren können, daß $\alpha = 1$ ist.

Nun betrachte man die gestörte Gleichung (XXIX; 15). Eliminiert man aus ihr und je einer der beiden Gleichungen (XXIX; 18) $f(t)$, so erhält man

$$q_1 \ddot{q} - q \ddot{q}_1 = q_1 Q_q,$$

$$q_2 \ddot{q} - q \ddot{q}_2 = q_2 Q_q$$

und hieraus durch Integrieren, mit den Integrationskonstanten α_1 und α_2,

$$\begin{array}{l|r} q_1 \dot{q} - q \dot{q}_1 = \int q_1 Q_q dt + \alpha_1, & q_2 \\ q_2 \dot{q} - q \dot{q}_2 = \int q_2 Q_q dt + \alpha_2. & -q_1 \end{array}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den nebenstehenden Faktoren und addiert die Produkte, so folgt, wenn man (XXIX; 19) berücksichtigt und $\alpha = 1$ setzt,

$$q(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) = q = q_2\int q_1 Q_q dt - q_1\int q_2 Q_q dt + \alpha_1 q_2 - \alpha_2 q_1 .$$

Für $Q_q = 0$ würde diese Lösung in $q_0 = k_1 q_1 + k_2 q_2$ übergehen, und man darf daher $\alpha_1 = k_2$, $\alpha_2 = -k_1$ setzen, d. h., es ist

$$q = q_2\int q_1 Q_q dt - q_1\int q_2 Q_q dt + k_1 q_1 + k_2 q_2 .$$

Sind demnach q_1 und q_2 irgend zwei partikuläre Lösungen von (XXIX; 16), so lauten die allgemeinen Lösungen der vier Gleichungen (XXIX; 13a, b)

(XXIX; 20)
$$\begin{cases} \xi = q_2\int q_1 Q_\xi dt - q_1\int q_2 Q_\xi dt + \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 , \\ \eta = q_2\int q_1 Q_\eta dt - q_1\int q_2 Q_\eta dt + \eta_1 q_1 + \eta_2 q_2 , \\ \zeta = q_2\int q_1 Q_\zeta dt - q_1\int q_2 Q_\zeta dt + \zeta_1 q_1 + \zeta_2 q_2 , \\ r_0\varrho = q_2\int q_1 Q_{r_0\varrho} dt - q_1\int q_2 Q_{r_0\varrho} dt + \varrho_1 q_1 + \varrho_2 q_2 \end{cases}$$

mit den acht Integrationskonstanten $\xi_1, \ldots, \varrho_1$; $\xi_2, \ldots, \varrho_2$, zu denen als neunte die in $Q_{r_0\varrho}$ versteckte, von dem Integral über $\partial\Omega/dt$ herrührende Konstante hinzukommt. Alle diese Konstanten sind Null, wenn die intermediäre Bahn eine oskulierende ist und wenn man als untere Grenze der Integrale die Oskulationsepoche t_0 wählt.

Die rechten Seiten der Gleichungen (XXIX; 20) eignen sich für die numerische Rechnung schlecht, da sie kleine Differenzen größerer Zahlen enthalten. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit dient der Kunstgriff, den (in anderem Zusammenhang) P. A. Hansen in seiner Theorie der allgemeinen Störungen (s. Kapitel XXVII) verwendet: Man ziehe die vor den Integralen stehenden Funktionen q_2 bzw. q_1 in den Integranden hinein, mit der Vorschrift, daß diese Größen während der Integration als Konstante gelten sollen. Man schreibe sie also unter dem Integralzeichen als Funktionen einer von t unabhängigen Variablen τ. Es ist dann

(XXIX; 21)
$$\xi = \int(\bar{q}_2 q_1 - \bar{q}_1 q_2)\, Q_\xi dt + \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 , \ldots ,$$

wobei in $\bar{q} = \bar{q}(\tau)$ der Querstrich bedeutet, daß nach erfolgter Integration q wieder als Funktion von t anzusehen ist. Der Ausdruck im Integranden läßt sich dann in eine Form bringen, die den Nachteil kleiner Differenzen vermeidet.

In unserem speziellen Problem sind die Funktionen q_1 und q_2 als partikuläre Integrale der Differentialgleichung

(XXIX; 22)
$$\ddot{q}_0 + \varkappa^2 \frac{q_0}{{r_0}^3} = 0; \quad \varkappa^2 = k^2(1 + m)$$

zu bestimmen. Diese Gleichung gilt aber für die rechtwinkligen Koordinaten des heliozentrischen Ortsvektors q der intermediären Bahn (XXIX; 8) in irgendeinem rechtwinkligen System. Insbesondere gilt sie, wenn r_0 und v_0 Radiusvektor und wahre Anomalie in dieser Bahn bedeuten, für die speziellen Funktionen

(XXIX; 23) $$q_1 = \lambda r_0 \cos v_0; \quad q_2 = \lambda r_0 \sin v_0,$$

in denen λ einen Normierungsfaktor darstellt. Nach dem Flächensatz gilt dann die Beziehung (XXIX; 19),

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = \lambda^2 \varkappa \sqrt{p_0} = \alpha,$$

und für $\lambda^2 = 1/\varkappa\sqrt{p_0}$ wird $\alpha = 1$. In der Tat läßt sich jede beliebige Lösung von (XXIX; 22) in der Form

$$k_1 q_1 + k_2 q_2$$

darstellen. So genügen die rechtwinkligen Koordinaten von $\mathfrak{q}_0$ nach (IV; 13), wenn dort für das Argument der Breite $u = v + \omega$ gesetzt wird, Beziehungen von der Form

$$x_0 = r_0 (A_x \cos v_0 + B_x \sin v_0), \ldots,$$

wo $A_x, B_x, \ldots$ konstante Funktionen der Bahnelemente i, Ω, ω sind. Dasselbe läßt sich auch für die schiefwinkligen Koordinaten F, G zeigen, die nach (VII; 4) ebenfalls diese Form haben und — siehe (V; 61, 62) — den Differentialgleichungen (XXIX; 22) genügen.

Für den Integranden von (XXIX; 21) erhält man nach Einführung von (XXIX; 23)

$$(\bar{q}_2 q_1 - \bar{q}_1 q_2)\, Q_\xi = \lambda^2 \bar{r}_0 r_0 \sin (\bar{v}_0 - v_0)\, Q_\xi,$$

wo $\bar{r}_0, \bar{v}_0$ unter dem Integralzeichen als Funktionen von τ und daher bei der Integration als Konstante gelten, jedoch nach erfolgter Integration wieder zu Funktionen von t werden. Aus diesem Grunde darf man $\bar{r}_0$ als konstanten Faktor des Integranden vor das Integral ziehen, wo es dann wieder zu $r_0(t)$ wird. Man erhält also

(XXIX; 24) $$\xi = \frac{r_0}{\varkappa\sqrt{p_0}} \int Q_\xi r_0 \sin (\bar{v}_0 - v_0)\, dt + r_0 (A_\xi \cos v_0 + B_\xi \sin v_0),$$

entsprechende Gleichungen für η, ζ und $r_0 \varrho$, und es sind $A_\xi, B_\xi, \ldots$ kleine Konstante von der Ordnung der Störungen, die verschwinden, wenn die intermediäre Bahn die gestörte in $t = t_0$ oskuliert.

243. Die Dziobekschen Differentialgleichungen

Das System (XXIX; 11) der Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten des Störungsvektors hat trotz seiner einfachen und symmetrischen Form den Nachteil, daß seine Lösung mit der einer weiteren Differentialgleichung (XXIX; 12) für die Störung des Radiusvektors gekoppelt ist. Die allgemeine Lösung des gesamten Systems besitzt also, wie wir gezeigt haben, drei überzählige Integrationskonstanten. Dieser Umstand, der nicht nur die Eleganz des Verfahrens beeinträchtigt, ist im vorigen Jahrhundert (1854—1874) Gegenstand einer lebhaften Kontroverse zwischen Encke und Hansen gewesen, aber es ist erst in neuerer Zeit gelungen, praktisch verwendbare Methoden zu entwickeln, in denen nur die sechs unabhängigen Konstanten erscheinen, die das Problem erfordert. Die Grundlagen dieser Methoden (Brouwer, Danby, Musen, Carpenter) finden sich schon bei Dziobek[1]), der die Differentialgleichungen des Problems so umgeformt hat, daß eine zusätzliche Störungsgleichung für r nicht mehr erforderlich ist. Er hat auch die Lösung dieser Gleichungen nach dem Prinzip der Variation der Konstanten der Form nach angegeben, ohne allerdings die in dieser fruchtbaren Idee vorhandenen praktischen Möglichkeiten auszuschöpfen.

Wir werden im folgenden, um doppelte Indizes zu vermeiden, die gestörten heliozentrischen Ortsvektoren des gestörten und des störenden Planeten mit $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ bezeichnen, die ungestörten mit $\mathfrak{q}_0$ und $\mathfrak{q}_0'$. Entsprechend seien auch m und m' die Massen. Die Störungsvektoren sind dann

$$\mathfrak{q} - \mathfrak{q}_0 = \delta\mathfrak{q}(\xi, \eta, \zeta); \quad \mathfrak{q}' - \mathfrak{q}_0' = \delta\mathfrak{q}'(\xi', \eta', \zeta').$$

Schreibt man nun in der ersten Gleichung (XXIX; 11) das erste Glied rechts

$$\varkappa^2 \left(\frac{x}{{r_0}^3} - \frac{x_0 + \xi}{r^3} \right),$$

so erhält man nach einfacher Umformung

$$\text{(XXIX; 25)} \qquad \ddot{\xi} + \varkappa^2 \frac{\xi}{r^3} + \varkappa^2 x_0 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{{r_0}^3} \right) = k^2 m' \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

und entsprechende Gleichungen für η und ζ. Man setze ferner, wie in Abschnitt 241, $r = r_0 + \varrho$ und

$$\text{(XXIX; 26)} \qquad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{{r_0}^3} \left(1 + \frac{\varrho}{r_0} \right)^{-3} = \frac{1}{{r_0}^3} - 3 \frac{\varrho}{{r_0}^4} + 6 \frac{\varrho^2}{{r_0}^5} - \cdots.$$

---

[1]) O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung. Leipzig 1888, Nachdruck (engl.) New York 1962, § 21, 22.

Dann ist, bis zu Störungstermen zweiter Ordnung genau,

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{{r_0}^3} = -3\,\frac{r_0\varrho + \frac{1}{2}\,\varrho^2}{{r_0}^5} + \frac{15}{2}\,\frac{\varrho^2}{{r_0}^5} + \cdots$$

und, wegen $r^2 = (r_0 + \varrho)^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2$,

$$r_0\varrho + \frac{1}{2}\,\varrho^2 = x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta + \frac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q}) + \frac{1}{2}\,(\delta\mathfrak{q})^2.$$

Schließlich folgt, wenn Störungsterme dritter und höherer Ordnung unterdrückt werden,

$$\varrho^2 = \frac{(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)^2}{{r_0}^2} = \frac{1}{{r_0}^2}\,(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})^2$$

und somit

$$\text{(XXIX; 27)} \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{{r_0}^3} = -\frac{3}{{r_0}^5}\,(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q}) - \frac{3}{2}\,\frac{(\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^5} + \frac{15}{2}\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^7} + \cdots.$$

Setzt man (XXIX; 26, 27) in (XXIX; 25) ein, so erhält man, wiederum bis zu Gliedern zweiter Ordnung einschließlich,

$$\ddot{\xi} + \varkappa^2\xi\left(\frac{1}{{r_0}^3} - 3\,\frac{\varrho}{{r_0}^4} + \cdots\right) - \varkappa^2 x_0\left[3\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})}{{r_0}^5} + \frac{3}{2}\,\frac{(\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^5} - \frac{15}{2}\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^7} + \cdots\right] = k^2 m'\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

oder, da man links

$$\frac{\xi\varrho}{{r_0}^4} = \xi\,\frac{r_0\varrho}{{r_0}^5} = \xi\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})}{{r_0}^5}$$

setzen darf,

$$\text{(XXIX; 28)} \qquad \ddot{\xi} + \varkappa^2\left[\frac{\xi}{{r_0}^3} - 3x_0\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})}{{r_0}^5}\right] = k^2 m'\,\frac{\partial\Omega}{\partial x} + G_x = R_x,$$

wo

$$G_x = \varkappa^2\left[3\xi\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})}{{r_0}^5} + x_0\left\{\frac{3}{2}\,\frac{(\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^5} - \frac{15}{2}\,\frac{(\mathfrak{q}_0\delta\mathfrak{q})^2}{{r_0}^7}\right\} + \cdots\right]$$

nur Störungsglieder zweiter und höherer Ordnung enthält. Sei

$$\Omega_0 = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{(\mathfrak{q}_0\mathfrak{q}_0')}{{r_0'}^3}$$

die mit den ungestörten Koordinaten der Planeten gebildete Störungsfunktion, so läßt sich auch

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_0} + \left(\xi \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial {x_0}^2} + \eta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_0 \partial y_0} + \zeta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_0 \partial z_0} + \xi' \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_0 \partial x_0'} + \right.$$
$$\left. + \eta' \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_0 \partial y_0'} + \zeta' \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_0 \partial z_0'} \right) + \cdots$$

in eine nach Termen steigender Ordnung fortschreitende Taylorsche Reihe entwickeln, und da dieser Ausdruck mit dem Faktor m' behaftet ist, genügt es, die hier hingeschriebenen Terme nullter und erster Ordnung zu berücksichtigen.

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, so ist offensichtlich

$$R_x = k^2 m' \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_0}$$

nur von den ungestörten Koordinaten abhängig, und die rechten Seiten der Gleichung (XXIX; 28) und der entsprechenden für η und ζ sind demnach bekannte Funktionen der Zeit. Ebenso darf man, wenn man Störungen bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen will, die rechten Seiten der Störungsgleichungen mit Koordinaten berechnen, die Störungen erster Ordnung enthalten, da alle vernachlässigten Glieder dann mindestens von der dritten Ordnung sind. Auf diese Weise ergibt sich ein Näherungsverfahren, das auf der wiederholten Lösung des Gleichungssystems

$$\text{(XXIX; 29)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} + \varkappa^2 \left(\dfrac{\xi}{{r_0}^3} - 3x_0 \dfrac{x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta}{{r_0}^5} \right) = R_x, \\ \ddot{\eta} + \varkappa^2 \left(\dfrac{\eta}{{r_0}^3} - 3y_0 \dfrac{x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta}{{r_0}^5} \right) = R_y, \\ \ddot{\zeta} + \varkappa^2 \left(\dfrac{\zeta}{{r_0}^3} - 3z_0 \dfrac{x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta}{{r_0}^5} \right) = R_z \end{cases}$$

und nötigenfalls eines entsprechenden für die Störungskoordinaten des störenden Planeten beruht, wobei die rechten Seiten jeweils bekannte Funktionen der Zeit sind.

Dies ist ein System nichthomogener linearer Differentialgleichungen, dessen Lösung auf die des homogenen Systems

$$\text{(XXIX; 29a)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} + \varkappa^2 \left(\dfrac{\xi}{{r_0}^3} - 3x_0 \dfrac{x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta}{{r_0}^5} \right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

zurückgeführt werden kann, das aus (XXIX; 29) entsteht, wenn man die rechten Seiten gleich Null setzt. DZIOBEK hat gezeigt, daß man die Lösungen $\xi_0, \eta_0, \zeta_0;\ \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$ des homogenen Systems sofort hinschreiben kann, wenn die ungestörten Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten als Funktionen der Zeit und der intermediären Bahnelemente gegeben sind. Seien diese konstanten Elemente $c_1, \ldots, c_6$, so ist, wenn c_i eines von ihnen ist,

$$\text{(XXIX; 30)} \qquad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{\partial x_0}{\partial c_i}, & \eta_0 = \dfrac{\partial y_0}{\partial c_i}, & \zeta_0 = \dfrac{\partial z_0}{\partial c_i}; \\ \dot{\xi}_0 = \dfrac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i}, & \dot{\eta}_0 = \dfrac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i}, & \dot{\zeta}_0 = \dfrac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i} \end{cases}$$

eine partielle Lösung des Systems (XXIX; 29a). Differenziert man nämlich die Bewegungsgleichungen des ungestörten Planeten,

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \varkappa^2 \frac{x_0}{{r_0}^3} = 0, \ldots,$$

partiell nach c_i, so folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x_0}{\partial c_i} + \frac{\varkappa^2}{{r_0}^3}\frac{\partial x_0}{\partial c_i} - 3\varkappa^2 \frac{x_0}{{r_0}^5}\left(x_0 \frac{\partial x_0}{\partial c_i} + y_0 \frac{\partial y_0}{\partial c_i} + z_0 \frac{\partial z_0}{\partial c_i}\right) = 0,$$

und entsprechende Gleichungen leitet man aus den Bewegungsgleichungen für y_0 und z_0 ab. Es sind also ξ_0, η_0, ζ_0 in der Form (XXIX; 30) Lösungen der homogenen Differentialgleichungen, und dasselbe gilt wegen der linearen Form dieser Gleichungen auch für $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$. Die allgemeine Lösung von (XXIX; 29a) ist demnach

$$\text{(XXIX; 31)} \qquad \xi_0 = \sum_{i=1}^{6} C_i \frac{\partial x_0}{\partial c_i}; \qquad \eta_0 = \sum_{i=1}^{6} C_i \frac{\partial y_0}{\partial c_i}; \ \ldots; \qquad \dot{\zeta}_0 = \sum_{i=1}^{6} C_i \frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i},$$

wo $C_1, \ldots, C_6$ willkürliche Integrationskonstante sind. Im gestörten Problem (XXIX; 29) sind die C_i, gemäß der Methode der Variation der Konstanten, schwach veränderliche Funktionen der Zeit, die gewissen Differentialgleichungen genügen und so bestimmt werden müssen, daß (XXIX; 29) mit den jeweils gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt ist. Man wird also die allgemeinen Lösungen dieses Systems

$$\text{(XXIX; 32a)} \qquad \xi = \sum C_i \frac{\partial x_0}{\partial c_i}; \qquad \eta = \sum C_i \frac{\partial y_0}{\partial c_i}; \qquad \zeta = \sum C_i \frac{\partial z_0}{\partial c_i},$$

$$\text{(XXIX; 32b)} \qquad \dot{\xi} = \sum C_i \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i}; \qquad \dot{\eta} = \sum C_i \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i}; \qquad \dot{\zeta} = \sum C_i \frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i}$$

schreiben, wo die $C_i(t)$ nun von der Zeit abhängen. Differenziert man (XXIX; 32a), so erhält man

$$\dot{\xi} = \sum\left(\dot{C}_i \frac{\partial x_0}{\partial c_i} + C_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial c_i}\right) = \sum\left(\dot{C}_i \frac{\partial x_0}{\partial c_i} + C_i \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i}\right), \ldots,$$

und vergleicht man diese Beziehungen mit (XXIX; 32b), so folgt

$$\text{(XXIX; 33)} \qquad \sum \dot{C}_i \frac{\partial x_0}{\partial c_i} = \sum \dot{C}_i \frac{\partial y_0}{\partial c_i} = \sum \dot{C}_i \frac{\partial z_0}{\partial c_i} = 0.$$

Das sind zunächst drei Differentialgleichungen erster Ordnung für die C_i; sie sind die Bedingungen dafür, daß die Gleichungen (XXIX; 32b) erfüllt sind, d. h., daß beim Differenzieren von (XXIX; 32a) die $C_i(t)$ als Konstante gelten. Mit anderen Worten: die Störungsgrößen (XXIX; 32a) haben als lineare Funktionen der bekannten Ausdrücke $\partial x_0/\partial c_i, \ldots$ die Eigenschaften „idealer Koordinaten" im Sinne von Abschnitt 227.

Differenziert man (XXIX; 32b), so folgt

$$\text{(XXIX; 34)} \qquad \ddot{\xi} = \sum\left(\dot{C}_i \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i} + C_i \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_i}\right) = \sum \dot{C}_i \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i} - \varkappa^2 \sum C_i \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{x_0}{{r_0}^3}\right).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{x_0}{{r_0}^3} = \frac{1}{{r_0}^3}\frac{\partial x_0}{\partial c_i} - 3\frac{x_0}{{r_0}^5}\left(x_0 \frac{\partial x_0}{\partial c_i} + y_0 \frac{\partial y_0}{\partial c_i} + z_0 \frac{\partial z_0}{\partial c_i}\right), \ldots$$

Setzt man dies in (XXIX; 34) ein und bedenkt man, daß die C_i jetzt variabel sind und daher $\sum C_i \partial x_0/\partial c_i = \xi, \ldots$ ist, so ergibt sich wegen (XXIX; 29)

$$\text{(XXIX; 35)} \qquad \sum \dot{C}_i \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i} = R_x; \quad \sum \dot{C}_i \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i} = R_y; \quad \sum \dot{C}_i \frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i} = R_z.$$

Das sind drei weitere Differentialgleichungen für die C_i. Durch Auflösung der sechs linearen Gleichungen (XXIX; 33, 35) erhält man dann die $\dot{C}_i$ als bekannte Funktionen der Zeit, falls die Funktionaldeterminante

$$J = \left|\frac{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)}\right|$$

von Null verschieden ist. Es ist dann

$$\text{(XXIX; 35a)} \qquad J\dot{C}_i = R_x\left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i}\right) + R_y\left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i}\right) + R_z\left(\frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i}\right),$$

wenn mit den eingeklammerten Elementen der Determinante J die zu diesen Elementen gehörenden Unterdeterminanten bezeichnet werden. Die $C_i(t)$ ergeben sich dann durch Quadratur:

$$(\text{XXIX};36) \qquad C_i = \frac{1}{J}\int\left[R_x\left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i}\right) + R_y\left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i}\right) + R_z\left(\frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i}\right)\right] dt + \text{const.}$$

244. Die Methode von Brouwer

Dziobek hat diese elegante Methode zur Berechnung der Koordinatenstörungen weiter erläutert, indem er darauf hingewiesen hat, daß sich die Differentialgleichungen für die $C_i(t)$ vereinfachen, wenn man für die c_i kanonische Elemente wählt. Die Gleichungen

$$x_0 = x_0(c_1, c_2, \ldots, c_6; t); \quad \dot{x}_0 = \dot{x}_0(c_1, c_2, \ldots, c_6; t); \ldots$$

stellen dann kanonische Transformationen dar, die, wie in Abschnitt 127 gezeigt worden ist, die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten wesentlich erleichtern. Dziobek hat es aber dabei bewenden lassen, Richtlinien für ein solches Verfahren aufzuzeigen, ohne detaillierte Anweisungen für die Durchführung zu geben. Eine praktisch brauchbare Rechenvorschrift für die Lösung des Störungsproblems nach den von Dziobek gegebenen Anweisungen stammt von D. Brouwer[1]).

Als Bezugsebene wählt Brouwer die x_0, y_0-Ebene ($z_0 = 0$) der intermediären Bahn. Dann nehmen die Gleichungen (XXIX; 29) die einfachere Gestalt

$$\ddot{\xi} + \varkappa^2\left[\frac{\xi}{{r_0}^3} - 3x_0\,\frac{x_0\xi + y_0\eta}{{r_0}^5}\right] = R_x,$$

$$\ddot{\eta} + \varkappa^2\left[\frac{\eta}{{r_0}^3} - 3y_0\,\frac{x_0\xi + y_0\eta}{{r_0}^5}\right] = R_y,$$

$$\ddot{\zeta} + \varkappa^2\,\frac{\zeta}{{r_0}^3} = R_z$$

an. Die dritte Gleichung ist von der Form (XXIX; 13a) und kann, da R_z jeweils als bekannte Funktion der Zeit angesehen werden kann, nach dem Näherungsverfahren integriert werden, das in Abschnitt 242 beschrieben ist. Es bleiben also nur noch die beiden ersten Gleichungen dieses Systems zu lösen übrig, und die Zahl der partikulären Lösungen (XXIX; 30) vermindert

---

[1]) D. Brouwer, Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates. A. J. *51*, 37 (1944); D. Brouwer und G. M. Clemence, Methods of celestial mechanics. New York 1961.

sich auf vier. Im übrigen gelten die Betrachtungen des vorigen Abschnitts unverändert. Insbesondere gilt nun statt (XXIX; 36)

$$(\text{XXIX}; 37) \qquad JC_i = \int \left[R_x \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i} \right) + R_y \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i} \right) \right] dt + \text{const}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Führt man für die c_i kanonische Elemente ein, so werden die Lösungen (XXIX; 37) erheblich einfacher. Es wird dann $J = 1$, und die in diesen Formeln auftretenden Unterdeterminanten von J, die für nichtkanonische Elemente recht komplizierte Gestalt annehmen können, lassen sich nach Anhang IV in einfacher Form hinschreiben. Seien nämlich x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen der Zeit, die den kanonischen Differentialgleichungen

$$(\text{XXIX}; 38\text{a}) \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

mit der Hamiltonschen Funktion $F = F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ genügen, und ist

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n; t),$$

$$y_i = y_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n; t)$$

eine kanonische Transformation, so daß

$$(\text{XXIX}; 38\text{b}) \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

mit der gleichen Hamiltonschen Funktion gilt, so ist die Funktionaldeterminante

$$J = \left| \frac{\partial (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{\partial (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)} \right| = 1,$$

und es gilt nach Formel (11) in Anhang IV

$$(\text{XXIX}; 39) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial y_k}{\partial p_i}; & \left(\frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial x_k}{\partial p_i}, \\ \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial y_k}{\partial q_i}; & \left(\frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \end{cases}$$

wenn die Klammern bedeuten, daß die zu den eingeklammerten Elementen von J gehörigen Unterdeterminanten gemeint sind.

Setzt man im vorliegenden Falle

$$(\text{XXIX}; 40) \qquad x_0 = x_1, \quad y_0 = x_2; \quad \dot{x}_0 = y_1, \quad \dot{y}_0 = y_2,$$

so sind die Differentialgleichungen (XXIX; 38a) mit

$$F = \frac{1}{2}\,(y_1^{\,2} + y_2^{\,2}) - \frac{\varkappa^2}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}}$$

erfüllt. Durch eine kanonische Transformation lassen sich die Variablen (XXIX; 40) in die Poincaréschen Elemente (s. Abschnitt 132)

$$\text{(XXIX; 41)} \qquad \begin{cases} q_1 = \lambda = nt + \varepsilon; \quad q_2 = \gamma = -2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tilde{\omega}, \\ p_1 = L = \varkappa\sqrt{a}\,; \quad p_2 = G = 2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\tilde{\omega} \end{cases}$$

überführen, wenn a, $e = \sin\varphi$, $\tilde{\omega}$, ε (nebst $i = \Omega = 0$, da es sich hier um das ebene Problem handelt) die klassischen Kegelschnittselemente der intermediären Bahn sind. In der Tat gilt (XXIX; 38b), denn wegen des Energiesatzes

$$F = \frac{1}{2}\,(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}) - \frac{\varkappa^2}{r_0} = -\frac{\varkappa^2}{2a} = -\frac{\varkappa^4}{2L^2}$$

ist

$$\text{(XXIX; 41a)} \qquad \begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial F}{\partial L} = \dfrac{\varkappa^4}{L^3} = \varkappa a^{-3/2} = n, \\ \dot{q}_2 = \dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0, \end{cases}$$

übereinstimmend mit (XXIX; 41). Sind also $c_1, \ldots, c_4$ vier willkürliche Konstante, so ergibt die Integration des Systems (XXIX; 41a)

$$\text{(XXIX; 42)} \qquad \begin{cases} q_1 = \lambda = \dfrac{\varkappa^4}{c_3^{\,3}}\,t + c_1 = nt + \varepsilon; \; q_2 = \gamma = c_2 = -2\sqrt{c_3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tilde{\omega}, \\ p_1 = L = c_3 = \varkappa\sqrt{a}\,; \qquad\qquad p_2 = G = c_4 = 2\sqrt{c_3}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\tilde{\omega}. \end{cases}$$

Ist z irgendeine der vier Variablen (XXIX; 40), so kann man

$$z = z(c_1, c_2, c_3, c_4; t) = z(\lambda, \gamma, L, G)$$

schreiben, und es ist

$$J = \left|\frac{\partial z}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\gamma}, \frac{\partial z}{\partial L}, \frac{\partial z}{\partial G}\right| = 1,$$

aber auch

$$K = \left|\frac{\partial z}{\partial c_1}, \frac{\partial z}{\partial c_2}, \frac{\partial z}{\partial c_3}, \frac{\partial z}{\partial c_4}\right| = 1.$$

In der Tat sind beide Funktionaldeterminanten gleich, denn es ist ja, wenn man zur Abkürzung $\tau = \varkappa^4 L^{-4} t = t\alpha^{-2}$ setzt,

$$\text{(XXIX; 43)} \qquad \frac{\partial z}{\partial c_1} = \frac{\partial z}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial z}{\partial c_2} = \frac{\partial z}{\partial \gamma}; \quad \frac{\partial z}{\partial c_3} = \frac{\partial z}{\partial L} - 3\tau \frac{\partial z}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial z}{\partial c_4} = \frac{\partial z}{\partial G},$$

und es wird daher $J \equiv K$, wenn man die dritte Spalte von J um das 3τ-fache der ersten Spalte vermindert, wodurch sich der Wert von J nicht ändert. Setzt man nun wieder nach (XXIX; 40)

$$x_1 = x_0, \quad x_2 = y_0; \quad y_1 = \dot{x}_0, \quad y_2 = \dot{y}_0$$

und nach (XXIX; 42)

$$q_1 = \frac{\varkappa^4}{{c_3}^3} t + c_1; \quad q_2 = c_2; \quad p_1 = c_3; \quad p_2 = c_4,$$

so ergibt sich wegen (XXIX; 39, 43)

$$\text{(XXIX; 44)} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1}\right) = -\frac{\partial x_0}{\partial c_3} = -\frac{\partial x_0}{\partial L} + 3\tau \frac{\partial x_0}{\partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2}\right) = -\frac{\partial x_0}{\partial c_4} = -\frac{\partial x_0}{\partial G}, \\ \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3}\right) = \frac{\partial x_0}{\partial c_1} = \frac{\partial x_0}{\partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}\right) = \frac{\partial x_0}{\partial c_2} = \frac{\partial x_0}{\partial \gamma}, \\ \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1}\right) = -\frac{\partial y_0}{\partial c_3} = -\frac{\partial y_0}{\partial L} + 3\tau \frac{\partial y_0}{\partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2}\right) = -\frac{\partial y_0}{\partial c_4} = -\frac{\partial y_0}{\partial G}, \\ \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3}\right) = \frac{\partial y_0}{\partial c_1} = \frac{\partial y_0}{\partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}\right) = \frac{\partial y_0}{\partial c_2} = \frac{\partial y_0}{\partial \gamma}. \end{cases}$$

Die in (XXIX; 37) auftretenden Unterdeterminanten erhalten damit eine sehr einfache Form; sie können leicht durch partielle Differentiation berechnet werden, wenn für $z = x_0, y_0$ die Beziehungen

$$\text{(XXIX; 45)} \qquad z = z(\lambda, \gamma, L, G)$$

bekannt sind. Diese lassen sich aber folgendermaßen herstellen: Es ist

$$\text{(XXIX; 46)} \quad \begin{cases} x_0 = r_0 \cos(v_0 + \tilde{\omega}) = \\ \quad = a\left[(\cos E - e)\cos\tilde{\omega} - \sqrt{1-e^2}\sin E \sin\tilde{\omega}\right], \\ y_0 = r_0 \sin(v_0 + \tilde{\omega}) = \\ \quad = a\left[(\cos E - e)\sin\tilde{\omega} + \sqrt{1-e^2}\sin E \cos\tilde{\omega}\right]. \end{cases}$$

Man kennt also die Beziehungen

$$(\text{XXIX}; 47) \qquad z = z(E, \tilde{\omega}, a, e) = z(l, \tilde{\omega}, a, e),$$

wenn $l = E - e \sin E$ die mittlere Anomalie bezeichnet. Andererseits bestehen zwischen den Elementen (XXIX; 45) und (XXIX; 47) die Zusammenhänge

$$(\text{XXIX}; 48\,\text{a}) \quad \begin{cases} \lambda = l + \tilde{\omega}; \quad L = \varkappa\sqrt{a}\,, \\ \gamma = -2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tilde{\omega}; \quad G = 2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\tilde{\omega} \end{cases}$$

oder die inversen

$$(\text{XXIX}; 48\,\text{b}) \quad \begin{cases} l = l(\lambda, \gamma, G) = \lambda + \arctan\frac{\gamma}{G}, \\ \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\gamma, G) = -\arctan\frac{\gamma}{G}, \\ a = a(L) = \frac{L^2}{\varkappa^2}, \\ 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma^2 + G^2}{L} \text{ bzw.} \\ e = e(\gamma, L, G) = \sqrt{\frac{\gamma^2 + G^2}{L} - \frac{(\gamma^2 + G^2)^2}{4L^2}}. \end{cases}$$

Mittels der Formeln

$$(\text{XXIX}; 49) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial\lambda} = \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\lambda}; & \frac{\partial z}{\partial\gamma} = \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\gamma} + \frac{\partial z}{\partial\tilde{\omega}}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\gamma} + \frac{\partial z}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial\gamma}, \\ \frac{\partial z}{\partial L} = \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial L} + \frac{\partial z}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial L}; & \frac{\partial z}{\partial G} = \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial G} + \frac{\partial z}{\partial\tilde{\omega}}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial G} + \frac{\partial z}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial G} \end{cases}$$

wird das Problem auf die partielle Differentiation von (XXIX; 46) nach l, $\tilde{\omega}$, a, e und von (XXIX; 48 b) nach λ, γ, L, G zurückgeführt. Aus (XXIX; 48b) folgt zunächst

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial\lambda} = 1, \quad \frac{\partial l}{\partial\gamma} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\gamma}, \quad \frac{\partial l}{\partial G} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial G}; \\ \frac{\partial a}{\partial L} = \frac{2L}{\varkappa^2} = \frac{2a}{L}, \quad \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\gamma} = -\frac{G}{\gamma^2 + G^2} = -\frac{\cos\tilde{\omega}}{2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}}; \end{cases}$$

(XXIX; 50)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial G}=\frac{\gamma}{\gamma^2+G^2}=-\frac{\sin\tilde{\omega}}{2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}},\\
&\frac{\partial e}{\partial\gamma}=\frac{\gamma}{eL}\left[1-\frac{\gamma^2+G^2}{2L}\right]=-\frac{\cos\varphi\sin\tilde{\omega}}{\sqrt{L}\cos\frac{\varphi}{2}};\\
&\frac{\partial e}{\partial G}=\frac{\partial e}{\partial\gamma}\frac{G}{\gamma}=\frac{\cos\varphi\cos\tilde{\omega}}{\sqrt{L}\cos\frac{\varphi}{2}},\\
&\frac{\partial e}{\partial L}=\frac{1}{2e}\left[-\frac{\gamma^2+G^2}{L^2}+\frac{(\gamma^2+G^2)^2}{2L^3}\right]=-\frac{1}{L}\tan\frac{\varphi}{2}\cos\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Da aber das x_0, y_0-Koordinatensystem so orientiert ist, daß die positive x_0-Achse nach dem Perihel der intermediären Bahn zeigt, darf nach Ausführung der Differentiationen $\tilde{\omega}=0$ gesetzt werden. Es ist daher $\gamma=0$ und

(XXIX; 50a)
$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\gamma}=-\frac{1}{2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}};\quad \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial G}=\frac{\partial e}{\partial\gamma}=0;\quad \frac{\partial e}{\partial G}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{L}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Aus (XXIX; 46) folgt, wenn man wiederum nach der Differentiation $\tilde{\omega}=0$ setzt,

$$\frac{\partial x_0}{\partial l}=\frac{\partial x_0}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial l}=-a\sin E\frac{\partial E}{\partial l};\qquad \frac{\partial y_0}{\partial l}=a\cos\varphi\cos E\frac{\partial E}{\partial l},$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial\tilde{\omega}}=-a\cos\varphi\sin E;\qquad \frac{\partial y_0}{\partial\tilde{\omega}}=a(\cos E-e),$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial a}=\frac{x_0}{a};\qquad \frac{\partial y_0}{\partial a}=\frac{y_0}{a},$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial e}=-a\left(1+\sin E\frac{\partial E}{\partial e}\right);\qquad \frac{\partial y_0}{\partial e}=-a\left(\tan\varphi\sin E-\cos\varphi\sin E\frac{\partial E}{\partial e}\right).$$

Aus $l=E-e\sin E$ ergibt sich ferner

$$dl=dE(1-e\cos E)-de\sin E=dE\frac{r}{a}-de\sin E.$$

Da aber e und l voneinander unabhängige Variable darstellen, ist

$$\frac{\partial E}{\partial l}=\frac{a}{r};\qquad \frac{\partial E}{\partial e}=\frac{a}{r}\sin E,$$

also

$$\frac{\partial x_0}{\partial l} = -\frac{a^2}{r}\sin E; \quad \frac{\partial y_0}{\partial l} = \frac{a^2}{r}\cos\varphi\cos E,$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial e} = -a\left(1+\frac{a}{r}\sin^2 E\right); \quad \frac{\partial y_0}{\partial e} = -a\sin E\left(\tan\varphi - \frac{a}{r}\cos\varphi\cos E\right).$$

Mit diesen Werten für die partiellen Ableitungen der Koordinaten nach den Elementen (XXIX; 47) ergibt sich schließlich, wenn man (XXIX; 49, 50, 50a) berücksichtigt,

$$\frac{\partial z}{\partial\lambda} = \frac{\partial z}{\partial l}; \qquad \sqrt{L}\frac{\partial z}{\partial\gamma} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial z}{\partial\tilde{\omega}}\right),$$

$$L\frac{\partial z}{\partial L} = 2a\frac{\partial z}{\partial a} - \tan\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial e}; \quad \sqrt{L}\frac{\partial z}{\partial G} = \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\frac{\partial z}{\partial e}.$$

Die Lösungen (XXIX; 37), die jetzt wegen (XXIX; 43) und mit der Abkürzung $\tau = \varkappa^4 L^{-4} t$

$$C_1 = \int\left[R_x\left(-\frac{\partial x_0}{\partial L} + 3\tau\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\right) + R_y\left(-\frac{\partial y_0}{\partial L} + 3\tau\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}\right)\right]dt,$$

$$C_2 = -\int\left[R_x\frac{\partial x_0}{\partial G} + R_y\frac{\partial y_0}{\partial G}\right]dt,$$

$$C_3 = \int\left[R_x\frac{\partial x_0}{\partial\lambda} + R_y\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}\right]dt,$$

$$C_4 = \int\left[R_x\frac{\partial x_0}{\partial\gamma} + R_y\frac{\partial y_0}{\partial\gamma}\right]dt$$

(abgesehen von Integrationskonstanten, die Null sind, wenn die intermediäre Bahn zur Zeit t_0 oskuliert und die Integrale von t_0 bis t erstreckt werden) geschrieben werden können, ergeben für die Störungskoordinate $\xi = \sum C_i \partial x_0/\partial c_i$

$$\xi = C_1\frac{\partial x_0}{\partial\lambda} + C_2\frac{\partial x_0}{\partial\gamma} + C_3\left(\frac{\partial x_0}{\partial L} - 3\tau\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\right) + C_4\frac{\partial x_0}{\partial G}$$

und für η einen entsprechenden Ausdruck. In C_1 und in dem Faktor von C_3 tritt die Zeit t in $\tau = t a^{-2}$ explizite auf. Man wird also $\xi = \xi_0 + \xi_1$ schreiben,

wo ξ_0 diejenigen Terme enthält, in denen τ nicht vorkommt. Es ist dann

$$\xi_0 = \frac{\partial x_0}{\partial L}\int\left(R_x\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}+R_y\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}\right)dt-\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\int\left(R_x\frac{\partial x_0}{\partial L}+R_y\frac{\partial y_0}{\partial L}\right)dt+$$
$$+\frac{\partial x_0}{\partial G}\int\left(R_x\frac{\partial x_0}{\partial\gamma}+R_y\frac{\partial y_0}{\partial\gamma}\right)dt-\frac{\partial x_0}{\partial\gamma}\int\left(R_x\frac{\partial x_0}{\partial G}+R_y\frac{\partial y_0}{\partial G}\right)dt.$$

Diese Formel und die entsprechende für η_0 enthalten, da ξ_0, η_0 klein sind, kleine Differenzen größerer Zahlen. Es ist daher zweckmäßig, wie schon am Schluß des Abschnitts 242, den Hansenschen Kunstgriff anzuwenden, also die vor den Integralen stehenden Funktionen der Zeit unter das Integralzeichen zu bringen und mit einem Querstrich zu versehen. Sie gelten dann während der Integration als Konstante und werden nach ausgeführter Integration wieder zu Funktionen der Zeit. Dann ist

$$\text{(XXIX; 51)}\qquad \xi_0 = \int R_x\left[\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial L}}-\frac{\partial x_0}{\partial L}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}}+\frac{\partial x_0}{\partial\gamma}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial G}}-\frac{\partial x_0}{\partial G}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial\gamma}}\right]dt+$$
$$+\int R_y\left[\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial L}}-\frac{\partial y_0}{\partial L}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}}+\frac{\partial y_0}{\partial\gamma}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial G}}-\frac{\partial y_0}{\partial G}\overline{\frac{\partial x_0}{\partial\gamma}}\right]dt,$$

und eine entsprechende Formel erhält man für η_0.

Die $\tau = \varkappa^4 L^{-4}t$ explizite enthaltenden Terme lauten, wenn zur Abkürzung

$$R_\lambda = R_x\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}+R_y\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}$$

gesetzt wird,

$$\xi_1 = -3\tau\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\int R_\lambda dt+\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\int 3\tau R_\lambda dt$$

oder, da $L = \text{const}$ ist,

$$\xi_1 = -3\frac{\varkappa^4}{L^4}\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\left[t\int R_\lambda dt-\int tR_\lambda dt\right].$$

Partielle Integration ergibt aber

$$\int tR_\lambda dt = t\int R_\lambda dt-\int\int R_\lambda dt.$$

Also ist

$$\text{(XXIX; 52)}\qquad \begin{cases}\xi_1 = -3\dfrac{\varkappa^4}{L^4}\dfrac{\partial x_0}{\partial\lambda}\displaystyle\int\int R_\lambda dt\\[2ex] \eta_1 = -3\dfrac{\varkappa^4}{L^4}\dfrac{\partial y_0}{\partial\lambda}\displaystyle\int\int R_\lambda dt.\end{cases}$$

Sofern man sich auf Störungen erster Ordnung beschränkt, darf man in (XXIX; 51), mit $\Omega_0' = k^2 m' \Omega_0$,

$$R_x = \frac{\partial \Omega_0'}{\partial x_0}; \quad R_y = \frac{\partial \Omega_0'}{\partial y_0}$$

und daher in (XXIX; 52)

$$R_\lambda = \frac{\partial \Omega_0'}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Omega_0'}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Omega_0'}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Omega_0'}{\partial l}$$

setzen. Da aber Ω_0 in Form einer trigonometrischen Reihe

$$\Omega_0 = a_0 + \sum a_{i,k} \cos (il + kl_1 + A_{i,k})$$

geschrieben werden kann, die nach Vielfachen der mittleren Anomalien l, l_1 der beiden Planeten fortschreitet, enthält $\partial \Omega_0'/\partial l$ nur periodische Glieder. Das Doppelintegral in (XXIX; 52) wird also außer periodischen Termen säkulare von der Form $k_0 + k_1 t$, aber keine mit t^2 aufweisen. Solche Glieder treten erst auf, wenn die Untersuchung auf Störungen zweiter Ordnung ausgedehnt wird.

245. Methode von Musen und Carpenter. Die Differentialgleichungen

Die algebraische Gestalt und die ausgeprägte Symmetrie der Formeln, die wir in den Theorien der allgemeinen Störungen der rechtwinkligen Koordinaten antreffen, machen diese Methoden in hervorragender Weise für elektronische Rechnung geeignet, da sie eine weit einfachere Programmierung erfordern als andere. Die neuere Entwicklung zielt daher auch darauf ab, diese für die Anwendung von Computern so nützlichen Eigenschaften der Koordinatenstörungen weitgehend auszunutzen, um die Schwierigkeiten des Problems auf ein Mindestmaß herabzusetzen. Die nachfolgend behandelte, von P. Musen und L. Carpenter[1]) entwickelte Methode stellt einen bedeutenden Fortschritt auf diesem Wege dar, zumal sie sich der Vorteile bedient, die mit der Verwendung algebraischer Operatoren (s. Kapitel XXIV) verbunden sind.

Die in dieser Methode auftretenden Differentialgleichungen für die Koordinatenstörungen nehmen ungezwungen die Dziobeksche Form an. Die Vereinfachungen, die Brouwers Methode kennzeichnen, erweisen sich als unnötig. Eine Bevorzugung der Hauptkoordinatenebene der intermediären Bahn als Bezugsebene schon vor Ausführung der Integration wäre als symmetriestörend eher schädlich als nutzbringend. Es ist auch überflüssig, kanonische Elemente einzuführen, da die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Störungskoordinaten direkt integriert werden, ohne daß auf die

---

[1]) P. Musen und L. Carpenter, On the general perturbations in rectangular coordinates. J. geophys. Res. *68*, 2727 (1963).

Methode der Variation der Konstanten zurückgegriffen wird. Vielmehr werden variable Bahnelemente als Funktionen der Zeit erst eingeführt, nachdem der Integrationsprozeß beendet ist, der die Koordinatenstörungen irgendwelcher Ordnung liefert, sobald die Störungen niedriger Ordnung bekannt geworden sind. Dabei bleibt der Algorithmus für jeden Integrationsschritt formal identisch.

Wir beschreiben in diesem und in den folgenden Abschnitten die MUSEN-CARPENTERsche Methode für den Fall des planetaren Dreikörperproblems. Es ist leicht möglich, das Verfahren auf ein System mit beliebig vielen Planeten auszudehnen, wie P. MUSEN[1]) gezeigt hat. Da hierbei keine wesentlich neuen Gesichtspunkte erscheinen, genügt es, auf diese Arbeit hinzuweisen.

Es seien $\mathfrak{r}(x, y, z)$ und $\mathfrak{r}'(x', y', z')$ die rechtwinkligen heliozentrischen Ortsvektoren des gestörten Planeten P und des störenden Planeten P' in irgendeinem System, und es sei $|\mathfrak{r}| = r$, $|\mathfrak{r}'| = r'$. Dann gilt für die Bewegung von P die vektorielle Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \varkappa^2 \nabla \left(\frac{1}{r} + \Omega \right); \quad \varkappa^2 = k^2(1 + m),$$

wo

$$\Omega = \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}|} - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')}{r'^3} \right)$$

die Störungsfunktion und, mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ als Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen (den Basisvektoren des Systems),

$$\nabla = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{k}$$

den Gradientoperator (s. Abschnitt 210) an der Stelle $\mathfrak{r}$ bedeutet. Ebenso genügt $\mathfrak{r}'$ der Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{r}}' = \varkappa'^2 \nabla' \left(\frac{1}{r'} + \Omega' \right); \quad \varkappa'^2 = k^2(1 + m')$$

mit

$$\Omega' = \frac{m}{1 + m'} \left(\frac{1}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}|} - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')}{r^3} \right)$$

und

$$\nabla' = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}'} = \frac{\partial}{\partial x'} \mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z'} \mathfrak{k}.$$

Es seien ferner $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_0'$ die Ortsvektoren in den intermediären Bahnen, so daß

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r}; \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + \delta\mathfrak{r}'$$

---

[1]) P. MUSEN, On the general perturbations of the position vectors of a planetary system. J. O. *48*, 11 (1965).

ist und die Störungen $\delta\mathfrak{r}$, $\delta\mathfrak{r}'$ Ausdrücke von der Ordnung der jeweils störenden Masse (m' bzw. m) darstellen. Die Vektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_0'$ selbst genügen den vollständig integrablen Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{r}}_0 = \varkappa^2 \nabla_0 \frac{1}{r_0}; \quad \ddot{\mathfrak{r}}_0' = \varkappa'^2 \nabla_0' \frac{1}{r_0'}; \quad \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y_0}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z_0}\mathfrak{k}.$$

Bezeichnen wir mit

$$U = \frac{1}{r} + \Omega(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$$

die Potentialfunktion an der Stelle $\mathfrak{r}$ und mit

$$U_0 = \frac{1}{r_0} + \Omega_0(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_0')$$

dieselbe Funktion, in der $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ durch $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_0'$ ersetzt worden sind, so kann man nach Abschnitt 210

$$U(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = \exp D\ U_0(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_0')$$

schreiben, wo

$$D = \delta\mathfrak{r}\nabla + \delta\mathfrak{r}'\nabla' = \delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} + \delta x' \frac{\partial}{\partial x'} + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'} + \delta z' \frac{\partial}{\partial z'}$$

einen Differentialoperator bedeutet, und es ist dann

$$\text{(XXIX; 53)} \qquad \ddot{\mathfrak{r}} = \varkappa^2 \nabla \exp D\ U_0; \qquad \ddot{\mathfrak{r}}' = \varkappa'^2 \nabla' \exp D\ U_0'.$$

Man kann nun die Störungsvektoren $\delta\mathfrak{r}$, $\delta\mathfrak{r}'$ in

$$\text{(XXIX; 54)} \qquad \delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \cdots; \qquad \delta\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2' + \mathfrak{r}_3' + \cdots$$

zerlegen, wenn (für $i = 1, 2, 3, \ldots$) $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{r}_i'$ die Störungen i-ter Ordnung darstellen, und es wird in praxi stets genügen, diese Aufteilung bis zur dritten Ordnung auszudehnen, wenn man den Fall naher Begegnungen der beiden Planeten ausschließt, der ja in der Theorie der großen Planeten nicht und bei Planetoiden und Kometen nur selten vorkommt.

Bis zur dritten Ordnung genau erhält man dann

$$\begin{aligned}\text{(XXIX; 55)} \quad \exp D &= 1 + D + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{6} D^3 + \cdots = \\ &= 1 + (\mathfrak{r}_1\nabla + \mathfrak{r}_1'\nabla') + (\mathfrak{r}_2\nabla + \mathfrak{r}_2'\nabla') + (\mathfrak{r}_3\nabla + \mathfrak{r}_3'\nabla') + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[(\mathfrak{r}_1\nabla + \mathfrak{r}_1'\nabla')^2 + 2(\mathfrak{r}_1\nabla + \mathfrak{r}_1'\nabla')(\mathfrak{r}_2\nabla + \mathfrak{r}_2'\nabla')\right] + \\ &\quad + \frac{1}{6}(\mathfrak{r}_1\nabla + \mathfrak{r}_1'\nabla')^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Das ist eine Entwicklung nach Skalarprodukten der Gradientoperatoren mit den Ortsvektoren. Diese Skalarprodukte sind selbst Operatoren, die man auch in Komponenten nach den konstanten Basisvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ des Systems zerlegen kann. Die elementaren Operatoren $(\mathfrak{i}\nabla)$, $(\mathfrak{j}\nabla)$, $(\mathfrak{k}\nabla)$ sind dann auf das Potential U_0 anzuwenden, das als skalare Funktion der Örter $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_0'$ bekannt ist.

Der Einfachheit halber werden wir im folgenden bei $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_0'$, ∇_0 den Index Null fortlassen, also

$$\nabla_0 U_0 = \nabla\left(\frac{1}{r} + \Omega(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\right)$$

schreiben, mit der Übereinkunft, daß $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ in dieser Formel die Örter in den intermediären Bahnen bezeichnen sollen. Wir betrachten zunächst den störungsfreien Teil $1/r$ von U_0. Wegen

$$(\mathfrak{i}\nabla) = \frac{\partial}{\partial x}; \quad (\mathfrak{j}\nabla) = \frac{\partial}{\partial y}; \quad (\mathfrak{k}\nabla) = \frac{\partial}{\partial z}$$

ist dann

(XXIX; 56a) $$(\mathfrak{i}\nabla)\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} = -\frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{r})}{r^3}, \ldots$$

Ferner erhält man

$$(\mathfrak{i}\nabla)(\mathfrak{i}\nabla)\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5},$$

$$(\mathfrak{i}\nabla)(\mathfrak{j}\nabla)\frac{1}{r} = (\mathfrak{j}\nabla)(\mathfrak{i}\nabla)\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = 3\frac{xy}{r^5},$$

$$(\mathfrak{i}\nabla)(\mathfrak{k}\nabla)\frac{1}{r} = (\mathfrak{k}\nabla)(\mathfrak{i}\nabla)\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = 3\frac{xz}{r^5}.$$

Diese Formeln lassen sich aber in einer einzigen,

(XXIX; 56b) $$(\mathfrak{i}\nabla)(\mathfrak{j}\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\mathfrak{i}\mathfrak{r})(\mathfrak{j}\mathfrak{r})$$

zusammenfassen, in der nun $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ irgend zwei (verschiedene oder gleiche) der drei orthogonalen Basisvektoren des Systems vertreten, denn es ist ja

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{i}) = 1; \qquad (\mathfrak{i}\mathfrak{j}) = (\mathfrak{i}\mathfrak{k}) = 0,$$

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{r}) = x; \qquad (\mathfrak{j}\mathfrak{r}) = y; \qquad (\mathfrak{k}\mathfrak{r}) = z.$$

Ebenso leitet man die symmetrisch gebaute Formel

$$(\mathrm{XXIX};\,56\mathrm{c}) \qquad (\mathfrak{i}\nabla)\,(\mathfrak{j}\nabla)\,(\mathfrak{k}\nabla)\,\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\mathfrak{i}\nabla)\,(\mathfrak{j}\nabla)\,\frac{1}{r}\right] =$$

$$= \frac{3}{r^5}\left[(\mathfrak{i}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{j}\mathfrak{k}) + (\mathfrak{j}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{k}\mathfrak{i}) + (\mathfrak{k}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{i}\mathfrak{j})\right] - \frac{15}{r^7}\,(\mathfrak{i}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{j}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{k}\mathfrak{r})$$

ab.

Da die Lage des Koordinatensystems im Raum beliebig ist, folgt aus (XXIX; 56a), wenn man die i-Richtung mit der Richtung eines Vektors $\mathfrak{r}_1$ identifiziert,

$$(\mathrm{XXIX};\,57\mathrm{a}) \qquad (\mathfrak{r}_1\nabla)\,\frac{1}{r} = -\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^3}.$$

Ist $\mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}$ ein weiterer Vektor, so folgt

$$(\mathfrak{r}_2\nabla)\,(\mathfrak{i}\nabla)\,\frac{1}{r} = (x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k},\ \nabla)\,(\mathfrak{i}\nabla)\,\frac{1}{r} =$$

$$= \left[x_2(\mathfrak{i}\nabla)\,(\mathfrak{i}\nabla) + y_2\,(\mathfrak{j}\nabla)\,(\mathfrak{i}\nabla) + z_2\,(\mathfrak{k}\nabla)\,(\mathfrak{i}\nabla)\right]\frac{1}{r} =$$

$$= x_2\left(-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{x^2}{r^5}\right) + \frac{3}{r^5}\,(y_2xy + z_2xz) =$$

$$= -\frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_2)}{r^3} + \frac{3}{r^5}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{i})\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)$$

oder, wenn man wiederum $\mathfrak{i}$ in die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ legt,

$$\mathrm{XXIX};\,57\mathrm{b}) \qquad (\mathfrak{r}_1\nabla)\,(\mathfrak{r}_2\nabla)\,\frac{1}{r} = -\frac{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}{r^3} + \frac{3}{r^5}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2).$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus (XXIX; 56c), wenn man einen dritten Vektor $\mathfrak{r}_3 = x_3\mathfrak{i} + y_3\mathfrak{j} + z_3\mathfrak{k}$ einführt, die Identität

$$(\mathrm{XXIX};\,57\mathrm{c}) \quad (\mathfrak{r}_1\nabla)\,(\mathfrak{r}_2\nabla)\,(\mathfrak{r}_3\nabla)\,\frac{1}{r} = \frac{3}{r^5}\left[(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3) + (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)\,(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_3)\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)\right] -$$

$$- \frac{15}{r^7}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_3).$$

Mit anderen Worten: Aus (XXIX; 56a, b, c) folgt (XXIX; 57a, b, c), indem man $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ durch beliebige Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, etwa durch irgendeine Kombination aus den oben definierten Störungsvektoren erster, zweiter und dritter Ordnung, ersetzt. Es ist dann $(\mathfrak{r}_a\nabla)\,(\mathfrak{r}_b\nabla)\,(\mathfrak{r}_c\nabla)/r$ von der Ordnung $a + b + c$.

Wendet man den Operator (XXIX; 55) auf $1/r$ an, so ergeben alle Elementaroperatoren $(\mathfrak{r}_i'\nabla')$ Null, und es bleibt, wenn die übrigen Terme nach wachsender Ordnung aufgeschrieben werden,

$$\exp D\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + (\mathfrak{r}_1\nabla)\,\frac{1}{r} + \left[(\mathfrak{r}_2\nabla) + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{r}_1\nabla)^2\right]\frac{1}{r} + \\ + \left[(\mathfrak{r}_3\nabla) + (\mathfrak{r}_1\nabla)\,(\mathfrak{r}_2\nabla) + \frac{1}{6}\,(\mathfrak{r}_1\nabla)^3\right]\frac{1}{r} + \cdots .$$

Setzt man dann (XXIX; 57a, b, c) ein, so ergibt sich schließlich

$$\text{(XXIX; 58)} \qquad \exp D\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^3} + \left[-\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)}{r^3} + \frac{3}{2}\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}{r^5} - \frac{1}{2}\,\frac{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^3}\right] + \\ + \left[-\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_3)}{r^3} + 3\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)}{r^5} - \frac{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}{r^3} + \frac{3}{2}\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^5} - \frac{5}{2}\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^3}{r^7}\right] + \cdots .$$

Von dieser skalaren Funktion ist der Gradient ∇ an der Stelle $\mathfrak{r}$ zu bilden. Im einzelnen ist

$$\nabla\,\frac{1}{r^n} = \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^{n+2}}\,(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) = -\frac{n\mathfrak{r}}{r^{n+2}},$$

$$\nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) = \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)(xx_1 + yy_1 + zz_1) = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k} = \mathfrak{r}_1,$$

. . . . . .

Ferner gilt allgemein das distributive Gesetz

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a.$$

Man bildet somit

$$\nabla\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^n} = \frac{1}{r^n}\,\nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\nabla\,\frac{1}{r^n} = \frac{\mathfrak{r}_1}{r^n} - \frac{n\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^{n+2}},$$

$$\nabla\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)}{r^5} = (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)\nabla\,\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5} + \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5}\,\nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2) = (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)\left[\frac{\mathfrak{r}_1}{r^5} - 5\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^7}\right] + \frac{\mathfrak{r}_2\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5},$$

. . . . . ,

und man erhält daher

$$\text{(XXIX; 59)} \qquad \nabla \exp D\,\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} + \left[-\frac{\mathfrak{r}_1}{r^3} + 3\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5}\right] + \\ + \left[-\frac{\mathfrak{r}_2}{r^3} + 3\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)}{r^5} + 3\,\frac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5} + \frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^5} - \frac{15}{2}\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}{r^7}\right] + \\ + \left[-\frac{\mathfrak{r}_3}{r^3} + 3\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_3)}{r^5} + \frac{3}{r^5}\,\{\mathfrak{r}_2\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + \mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2) + \mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)\} -\right.$$

$$- \frac{15}{r^7}\,\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2) + \frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^5} - \frac{15}{2}\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^7} -$$

$$- \frac{15}{2}\,\frac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}{r^7} + \frac{35}{2}\,\frac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^3}{r^9}\Big] + \cdots.$$

Dieser Reihe ist noch der Gradient ∇ von

$$\text{(XXIX; 60)} \qquad \exp D\ \Omega = \Big\{1 + (\mathfrak{r}_1\nabla) + (\mathfrak{r}_1'\nabla') + (\mathfrak{r}_2\nabla) + \mathfrak{r}_2'\nabla') +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[(\mathfrak{r}_1\nabla) + (\mathfrak{r}_1'\nabla')]^2 + \cdots\Big\}\,\Omega$$

hinzuzufügen, der hier, da ja Ω von der Ordnung der störenden Masse ist, ebenfalls bis zur dritten Ordnung einschließlich aufgeschrieben ist.

Setzt man $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}$, $|\mathfrak{q}| = q$, so folgt zunächst aus

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{q} - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')}{r'^3}\right)$$

als erstes Glied dieses Gradienten

$$\text{(XXIX; 61a)} \qquad \nabla\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{\mathfrak{q}}{q^3} - \frac{\mathfrak{r}'}{r'^3}\right).$$

Dagegen ist

$$\text{XXIX; 61b)} \qquad \nabla'\Omega = \frac{m'}{1+m}\left[-\frac{\mathfrak{q}}{q^3} - \frac{\mathfrak{r}}{r'^3} + \frac{3}{r'^5}\,\mathfrak{r}'(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')\right].$$

Die Bildung der ∇-Gradienten der nächsten Terme von (XXIX;60) zeigen wir ausführlich am ersten von ihnen. Aus

$$(\mathfrak{r}_1\nabla)\,\Omega = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + z_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\Omega = (\mathfrak{r}_1\nabla\Omega)$$

erhält man

$$\nabla(\mathfrak{r}_1\nabla)\,\Omega = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x_1\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y_1\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z_1\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$

oder

$$\text{(XXIX; 62)} \qquad \nabla(\mathfrak{r}_1\nabla\Omega) = \mathfrak{i}\left(x_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + y_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial x} + z_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial x}\right) +$$

$$+ \mathfrak{j}\left(x_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y} + y_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + z_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial y}\right) +$$

$$+ \mathfrak{k}\left(x_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + y_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + z_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \nabla\,(\nabla\Omega\mathfrak{r}_1) = (\nabla\nabla\Omega)\mathfrak{r}_1 = \Phi\ \mathfrak{r}_1.$$

Der Operator

$$\nabla\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

angewandt auf die skalare Ortsfunktion Ω, ergibt also die Transformationsmatrix $\nabla\nabla\Omega = \Phi$, die den Vektor $\mathfrak{r}_1$ in einen neuen Vektor $\Phi\mathfrak{r}_1 = \nabla(\mathfrak{r}_1\nabla\Omega)$ überführt. Aus (XXIX; 61a) folgt, wenn zur Abkürzung $m'/(1+m) = \mu$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \mu\left(\frac{x_1 - x}{q^3} - \frac{x'}{r'^3}\right); \ldots$$

und daraus

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = \mu\left(-\frac{1}{q^3} + 3\,\frac{(x_1-x)^2}{q^5}\right); \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y} = 3\mu\,\frac{(x_1-x)\,(y_1-y)}{q^5}; \ldots$$

Setzt man diese Werte der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in (XXIX; 62) ein, so erhält man leicht

$$\nabla(\mathfrak{r}_1\nabla\Omega) = -\mu\,\frac{\mathfrak{i}x_1 + \mathfrak{j}y_1 + \mathfrak{k}z_1}{q^3} +$$

$$+ \frac{3\mu}{q^5}\{\mathfrak{i}(x_1-x) + \mathfrak{j}(y_1-y) + \mathfrak{k}(z_1-z)\}\{x_1(x_1-x) +$$

$$+ y_1(y_1-y) + z_1(z_1-z)\} = \mu\left[-\frac{\mathfrak{r}_1}{q^3} + 3\,\frac{\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{r}_1)}{q^5}\right].$$

Man kann dies Ergebnis auch folgendermaßen formulieren: Die Transformationsmatrix Φ läßt sich als ein Operator

$$\Phi = \nabla\nabla\Omega = \mu\left[-\frac{\mathfrak{e}}{q^3} + \frac{3}{q^5}\,\mathfrak{q}\mathfrak{q}\right]$$

auffassen, wobei unter $\mathfrak{e}$ der Identitätsoperator zu verstehen ist, der einen Vektor in sich selbst überführt ($\mathfrak{e}\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1$), während $\mathfrak{q}\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q})$ ein Operator in Gestalt einer Dyade ist, der [s. (XXIV; 37, 38)] den Vektor $\mathfrak{r}_1$ in den Vektor $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{r}_1)$ verwandelt.

Ähnlich leitet man aus (XXIX; 61b)

$$\nabla\nabla'\Omega = \mu\left[\frac{\mathfrak{e}}{q^3} - \frac{3}{q^5}\,\mathfrak{q}\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{e}}{r'^3} + \frac{3}{r'^5}\,\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'\right]$$

ab, woraus

$$\nabla\,(\mathfrak{r}_1'\,\nabla'\Omega) = (\nabla\nabla'\Omega)\,\mathfrak{r}_1' = \\ = \mu\left[\frac{\mathfrak{r}_1'}{q^3} - \frac{3}{q^5}\,\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{r}_1') - \frac{\mathfrak{r}_1'}{r'^3} + \frac{3}{r'^5}\,\mathfrak{r}'(\mathfrak{r}'\mathfrak{r}_1')\right]$$

folgt. Entsprechende Formeln erhält man durch Anwendung der Operatoren $\nabla\nabla\Omega$ und $\nabla\nabla'\Omega$ auf die Störungsvektoren $\mathfrak{r}_2$ bzw. $\mathfrak{r}_2'$.

Die letzten Terme des ∇-Gradienten von (XXIX;60) sind komplizierter gebaut und führen auf dreistufige Tensoren in Verbindung mit quadratischen Formen der Störungskoordinaten. Da Störungen dritter Ordnung nur in seltenen Fällen berücksichtigt werden, soll auf die explizite Bildung dieser Terme hier nicht eingegangen werden.

Nach (XXIX; 53, 54) ist streng

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \ddot{\mathfrak{r}}_1 + \ddot{\mathfrak{r}}_2 + \ddot{\mathfrak{r}}_3 + \cdots = \varkappa^2\,\nabla \exp D\left(\frac{1}{r} + \Omega\right),$$

und man kann diese Gleichung, wenn man rechts, ebenso wie dies links geschehen ist, Terme verschiedener Ordnung trennt und wenn man der Kürze halber die Gradienten in unentwickelter Form stehen läßt, in eine Folge von Differentialgleichungen,

(XXIX; 63)

$$\begin{cases} \text{a)}\quad \ddot{\mathfrak{r}} + \varkappa^2\,\dfrac{\mathfrak{r}}{r^3} = 0, \\[2ex] \text{b)}\quad \ddot{\mathfrak{r}}_1 + \varkappa^2\left(\dfrac{\mathfrak{r}_1}{r^3} - 3\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5}\right) = \varkappa^2\mathfrak{F}_1 = \varkappa^2\nabla\Omega, \\[2ex] \text{c)}\quad \ddot{\mathfrak{r}}_2 + \varkappa^2\left(\dfrac{\mathfrak{r}_2}{r^3} - 3\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2)}{r^5}\right) = \varkappa^2\mathfrak{F}_2 = \\[2ex] \qquad = \varkappa^2\left\{\nabla\,[(\mathfrak{r}_1\nabla) + (\mathfrak{r}_1'\nabla')]\,\Omega + 3\,\dfrac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)}{r^5} + \right. \\[2ex] \qquad \left. + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^5} - \dfrac{15}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}{r^7}\right\}, \\[2ex] \text{d)}\quad \ddot{\mathfrak{r}}_3 + \varkappa^2\left(\dfrac{\mathfrak{r}_3}{r^3} - 3\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_3)}{r^5}\right) = \varkappa^2\mathfrak{F}_3 = \varkappa^2\left\{\nabla[(\mathfrak{r}_2\nabla) + (\mathfrak{r}_2'\nabla')]\,\Omega + \right. \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{2}\,\nabla\,[(\mathfrak{r}_1\nabla) + (\mathfrak{r}_1'\nabla')]^2\Omega + \dfrac{3}{r^5}\,[\mathfrak{r}_2\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + \mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2) + \\[2ex] \qquad + \mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)] + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^5} - \dfrac{15}{r^7}\,\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2) - \\[2ex] \qquad \left. - \dfrac{15}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1)}{r^7} - \dfrac{15}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}{r^7} + \dfrac{35}{2}\,\dfrac{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^3}{r^9}\right\}, \end{cases}$$

auflösen. Alle Differentialgleichungen für die *Störungen*, also alle außer der ersten, haben die gemeinsame Form

$$\text{(XXIX; 64a)} \qquad \ddot{\mathfrak{r}}_i + \varkappa^2 \left(\frac{\mathfrak{e}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\, \mathfrak{r}\mathfrak{r} \right) \mathfrak{r}_i = \varkappa^2 \mathfrak{F}_i ,$$

die genau derjenigen der Dziobekschen Gleichungen (XXIX; 29) entspricht. Die $\mathfrak{F}_i$ sind vektorielle Funktionen von $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{i-1}$ und $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}'_{i-1}$, so daß die rechten Seiten jeder dieser Differentialgleichungen bekannte Funktionen der Zeit sind, wenn alle vorhergehenden integriert sind. Falls nur Störungen erster Ordnung zu berechnen sind, genügt es, die intermediären Bewegungen $\mathfrak{r}(t)$ und $\mathfrak{r}'(t)$ der beiden Planeten zu kennen. Dann ist $\mathfrak{F}_1$ bekannt, und die Integration von (XXIX; 63b) liefert die Störung $\mathfrak{r}_1(t)$. Sind Störungen höherer Ordnung zu berechnen und ist die Masse von P so bedeutend, daß sie die Bewegung von P' merklich beeinflußt, so wird man auch für P' Störungsgleichungen von der Form

$$\text{(XXIX; 64b)} \qquad \ddot{\mathfrak{r}}_i' + \varkappa'^2 \left(\frac{\mathfrak{e}}{r'^3} - \frac{3}{r'^5}\, \mathfrak{r}'\mathfrak{r}' \right) \mathfrak{r}_i' = \varkappa_i'^2 \mathfrak{F}_i'$$

aufstellen, die aus (XXIX; 64a) durch Einsatz von gestrichenen anstelle der ungestrichenen Symbole erhalten werden, und man wird die Differentialgleichungen für $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_i'$ simultan integrieren, nachdem die Lösungen aller Gleichungen bis zur Ordnung $i - 1$ vorliegen.

246. Methode Musen—Carpenter. Integration der Differentialgleichungen

Sei $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor in der intermediären Bahn des Planeten P, so läßt sich der Störungsvektor i-ter Ordnung $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_i$ in (im allgemeinen schiefwinklige) Komponenten in bezug auf ein bewegliches (begleitendes) Koordinatensystem zerlegen, dessen positive Achsenrichtungen durch die Vektoren

$$\text{(XXIX; 65)} \qquad \mathfrak{r}; \quad \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v}; \quad [\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{g} = \varkappa^2\, \mathfrak{p} = \text{const}$$

gekennzeichnet sind. Es wird dann in jedem Augenblick

$$\mathfrak{p} = F\mathfrak{r} + G\dot{\mathfrak{r}} + H\,[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}] = F\mathfrak{r} + G\mathfrak{v} + H\mathfrak{g}$$

sein, wo F, G, H skalare Faktoren sind, die als Funktionen der Zeit bestimmt werden müssen und gewissen Differentialgleichungen genügen. Es ist dann

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{F}\mathfrak{r} + (F + \dot{G})\,\mathfrak{v} + G\dot{\mathfrak{v}} + \dot{H}\mathfrak{g}$$

oder, da $\dot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{r}} = -\,(\varkappa^2/r^3)\,\mathfrak{r}$ ist,

$$\dot{\mathfrak{p}} = \left(\dot{F} - \frac{\varkappa^2}{r^3}\, G \right) \mathfrak{r} + (F + \dot{G})\,\mathfrak{v} + \dot{H}\mathfrak{g} .$$

Nochmalige Differentiation nach der Zeit ergibt, in Verbindung mit (XXIX; 64a) und wenn man $(\mathfrak{rg}) = 0$ berücksichtigt,

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \left[\ddot{F} - \frac{\varkappa^2}{r^3}\dot{G} + 3\frac{\varkappa^2}{r^5}(\mathfrak{rv})G\right]\mathfrak{r} + \left(\dot{F} - \frac{\varkappa^2}{r^3}G\right)\mathfrak{v} + (\dot{F} + \ddot{G})\,\mathfrak{v} - (F + \dot{G})\frac{\varkappa^2}{r^3}\mathfrak{r} + \ddot{H}\mathfrak{g} =$$

$$= \varkappa^2\mathfrak{F} - \frac{\varkappa^2}{r^3}(F\mathfrak{r} + G\mathfrak{v} + H\mathfrak{g}) + \frac{3\varkappa^2}{r^5}\mathfrak{r}\{F(\mathfrak{rr}) + G(\mathfrak{rv})\}.$$

Fassen wir also, wie oben, unter der Bezeichnung F, G, H, $\mathfrak{F}$ die Größen F_i, G_i, H_i, $\mathfrak{F}_i$ für irgendeine Ordnung $i = 1, 2, 3, \ldots$ zusammen, so gilt immer, wenn wir den obigen Ausdruck nach den mit den Vektoren (XXIX;65) multiplizierten Termen ordnen,

$$\left(\ddot{F} - 3\frac{\varkappa^2}{r^3}F - 2\frac{\varkappa^2}{r^3}\dot{G}\right)\mathfrak{r} + (\ddot{G} + 2\dot{F})\mathfrak{v} + \left(\ddot{H} + \frac{\varkappa^2}{r^3}H\right)\mathfrak{g} = \varkappa^2\mathfrak{F}.$$

Multipliziert man diese Gleichung nacheinander skalar mit den Vektoren $[\mathfrak{vg}]$, $[\mathfrak{gr}]$ und $[\mathfrak{rv}] = \mathfrak{g}$, so folgt, wenn man für die gemischten Produkte die Bezeichnung $(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{bc}]) = (\mathfrak{abc})$ benutzt und bedenkt, daß

(XXIX; 66) $$(\mathfrak{rvg}) = (\mathfrak{vgr}) = (\mathfrak{grv}) = (\mathfrak{g}\,[\mathfrak{rv}]) = \mathfrak{g}^2 = \varkappa^2 p$$

eine positive Konstante ist,

(XXIX; 67)
$$\begin{cases} \text{a)}\ \ddot{F} - \dfrac{\varkappa^2}{r^3}(3F + 2\dot{G}) = \dfrac{1}{p}(\mathfrak{Fvg}), \\ \text{b)}\ \ddot{G} + 2\dot{F} = \dfrac{1}{p}(\mathfrak{Fgr}), \\ \text{c)}\ \ddot{H} + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}H = \dfrac{1}{p}(\mathfrak{Fg}) = h(t). \end{cases}$$

Formale Integration von (XXIX;67b) ergibt, mit K_3 als Integrationskonstante,

(XXIX; 68) $$\dot{G} = -2F + \frac{1}{p}\int(\mathfrak{Fgr})dt + K_3.$$

Setzt man dies in (XXIX;67a) ein, so erhält man

(XXIX; 69) $$\ddot{F} + \frac{\varkappa^2}{r^3}F = \frac{1}{p}(\mathfrak{Fvg}) + 2\frac{\varkappa^2}{pr^3}\int(\mathfrak{Fgr})dt + 2\frac{\varkappa^2}{r^3}K_3 = f(t).$$

Damit ist, getrennt für Störungen beliebig hoher Ordnung, die Ermittlung von F und H auf die Integration von Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{F} + \frac{\varkappa^2}{r^3} F = f(t); \qquad \ddot{H} + \frac{\varkappa^2}{r^3} H = h(t)$$

zurückgeführt. Diese haben aber die Gestalt (XXIX; 15) mit jeweils bekannten rechten Seiten und können nach demselben, zuerst von HILL (1874) angewandten Verfahren integriert werden, das wir in Abschnitt 242 beschrieben haben. Das Ergebnis wird also die Form (XXIX;24) haben, nämlich

$$\text{(XXIX; 70)} \quad \begin{cases} F = \dfrac{1}{\varkappa\sqrt{p}} \displaystyle\int r\bar{r} f(t) \sin(\bar{v} - v)\, dt + r\,(K_1 \cos v + K_2 \sin v), \\ H = \dfrac{1}{\varkappa\sqrt{p}} \displaystyle\int r\bar{r} h(t) \sin(\bar{v} - v)\, dt + r\,(K_5 \cos v + K_6 \sin v), \end{cases}$$

wobei K_1, K_2, K_5, K_6 vier Integrationskonstanten sind und die überstrichenen Größen $\bar{r}$, $\bar{v}$ unter dem Integralzeichen als Konstante gelten, aber nach erfolgter Integration wieder durch die Variablen r, v ersetzt werden.

Nun kann man schreiben

$$(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) = \varkappa\sqrt{p} \cdot r\bar{r} \sin(\bar{v} - v)$$

und daher statt (XXIX; 70)

$$\text{(XXIX; 71)} \quad \begin{cases} F = \dfrac{1}{\varkappa^2 p} \displaystyle\int f(t)\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\, dt + r\,(K_1 \cos v + K_2 \sin v), \\ H = \dfrac{1}{\varkappa^2 p} \displaystyle\int h(t)\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\, dt + r\,(K_5 \cos v + K_6 \sin v), \end{cases}$$

wobei

$$f(t) = \frac{1}{p}(\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g}) + 2\frac{\varkappa^2}{pr^3}\int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\, dt + 2\frac{\varkappa^2}{r^3} K_3, \qquad h(t) = \frac{1}{p}(\mathfrak{F}\mathfrak{g})$$

zu setzen ist. Es folgt dann

$$F = \frac{1}{\varkappa^2 p^2}\int (\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\, dt + \frac{2}{p} K_3 \int \frac{1}{r^3}(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\, dt + \\ + \frac{2}{p^2}\int \left[\frac{1}{r^3}(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\, dt\right] dt + r\,(K_1 \cos v + K_2 \sin v).$$

Nun ist aber $(\varkappa^2/r^3)\,\mathfrak{r} = -\ddot{\mathfrak{r}} = -d\mathfrak{v}/dt$, also, da $\mathfrak{g}$ und vor Ausführung der Integration auch $\bar{\mathfrak{r}}$ konstant sind,

$$\frac{\varkappa^2}{r^3}\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) = -\frac{d}{dt}\,(\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) = \frac{d}{dt}\,(\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})$$

und daher, mit Rücksicht auf (XXIX;66),

$$\frac{2}{p}\,K_3 \int \frac{1}{r^3}\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\,dt = \frac{2}{\varkappa^2 p}\,K_3\,(\mathfrak{r}\mathfrak{v}\mathfrak{g}) = 2K_3.$$

Schließlich ist

$$\int \left[\frac{1}{r^3}\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt\right] dt = \frac{1}{\varkappa^2} \int \left[\frac{d}{dt}\,(\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g}) \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt\right] dt,$$

und rechts folgt durch partielle Integration

$$\frac{1}{\varkappa^2}\left\{(\mathfrak{r}\mathfrak{v}\mathfrak{g}) \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt - \int (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\,(\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,[\varkappa^2 p - (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})]\,dt.$$

Damit ist das Doppelintegral in dem Ausdruck für F beseitigt, und man erhält statt (XXIX;71)

$$\text{(XXIX; 72)} \qquad \begin{cases} F = r\,(K_1 \cos v + K_2 \sin v) + 2K_3 + A(t), \\ H = r\,(K_5 \cos v + K_6 \sin v) + C(t) \end{cases}$$

mit

$$\text{(XXIX; 73)} \qquad \begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{\varkappa^2 p^2} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\,dt + \dfrac{2}{\varkappa^2 p^2} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,[\varkappa^2 p - (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})]\,dt, \\ C(t) = \dfrac{1}{\varkappa^2 p^2} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g})\,(\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g})\,dt. \end{cases}$$

Nochmalige Integration von (XXIX;68) ergibt dann, mit einer neuen Integrationskonstanten K_4,

$$\text{(XXIX; 74)} \qquad G = K_4 + K_3 t - 2\int F dt + \frac{1}{p}\iint (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt^2 =$$

$$= K_4 - 3K_3 t - 2K_1 \int r \cos v\,dt - 2K_2 \int r \sin v\,dt -$$

$$- 2\int A(t)\,dt + \frac{1}{p}\iint (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt^2.$$

Die Integrale über $r\cos v$ und $r\sin v$ führt man aus, indem man t durch die exzentrische Anomalie E ersetzt. Dann ist

$$r\cos v = a(\cos E - e); \quad r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \quad ndt = (1 - e\cos E)\,dE,$$

also, mit $n = \varkappa a^{-3/2}$,

$$\begin{aligned}\int r\cos v\,dt &= \frac{a}{n}\int(\cos E - e)(1 - e\cos E)\,dE = \\ &= \frac{a}{n}\int\left[(1+e^2)\cos E - e - \frac{e}{2}(1+\cos 2E)\right]dE = \\ &= \frac{a}{n}\left[(1+e^2)\sin E - \frac{3}{2}eE - \frac{e}{4}\sin 2E\right]\end{aligned}$$

oder, da $E = e\sin E + nt$ ist,

$$\text{(XXIX; 74a)} \qquad \int r\cos v\,dt = \frac{a}{n}\left[-\frac{3}{2}net + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right],$$

ferner

$$\text{(XXIX; 74b)} \qquad \begin{aligned}\int r\sin v\,dt &= \frac{a}{n}\sqrt{1-e^2}\int\sin E(1 - e\cos E)\,dE = \\ &= \frac{a}{n}\sqrt{1-e^2}\int\left[\sin E - \frac{e}{2}\sin 2E\right]dE = \\ &= \frac{a}{n}\sqrt{1-e^2}\left[-\cos E + \frac{e}{4}\cos 2E\right].\end{aligned}$$

Es folgt also[1])

$$\text{(XXIX; 75)} \qquad \left\{\begin{aligned} G = {} & 2K_1\frac{a}{n}\left[\frac{3}{2}net - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\sin E + \frac{e}{4}\sin 2E\right] + \\ & + 2K_2\frac{a}{n}\sqrt{1-e^2}\left[\cos E - \frac{e}{4}\cos 2E\right] - 3K_3t + K_4 + B(t)\end{aligned}\right.$$

mit

$$\text{(XXIX; 76)} \qquad B(t) = -2\int A\,dt + \frac{1}{p}\iint(\mathfrak{Fgr})\,dt^2.$$

247. Die Integrationskonstanten

Die älteren Methoden zur Berechnung der allgemeinen Störungen der rechtwinkligen Koordinaten (s. Abschnitt 241, 242) leiden an dem Übelstand, daß für die Bewegung jedes gestörten Körpers neun Integrationskonstante auf-

[1]) Siehe auch Zusatz 2 in Anhang VIII.

treten, die nicht unabhängig voneinander sind, sondern erst nachträglich auf die von der Theorie geforderten sechs willkürlichen Konstanten reduziert werden müssen. Die Methoden von BROUWER und MUSEN—CARPENTER haben den Vorzug, die sechs Integrationskonstanten unmittelbar zu liefern. Allerdings ergeben die Lösungen der Differentialgleichungen für die Störungsanteile verschiedener Ordnung *je* sechs Konstante, so daß es den Anschein hat, als ob die Zahl der Konstanten mit jeder weiteren Ordnung um sechs zunimmt und daher eigentlich unendlich groß ist. Das ist aber in Wirklichkeit nicht der Fall, da sich nach Addition der Störungen aller Ordnungen die Konstanten in sechs unabhängige konstante Ausdrücke vereinigen lassen, die dann die eigentlichen Integrationskonstanten des Problems darstellen. Allerdings ist dabei vorauszusetzen, daß bei jeder Integration die Bestimmung der Konstanten nach der gleichen Vorschrift über die Anfangsbedingungen bzw. die Definition der intermediären Bahnelemente vor sich geht.

Um die Zusammenhänge zwischen den Integrationskonstanten $K_1, \ldots, K_6$ für die Koordinatenstörungen irgendeiner Ordnung mit den Anfangsbedingungen des Problems zu formulieren, nehmen wir an, daß

$$F_0, G_0, H_0; \quad \dot{F}_0, \dot{G}_0, \dot{H}_0$$

die Anfangswerte der Funktionen F, G, H; $\dot{F}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$ für die Epoche $t = t_0$ darstellen, die sich auf die Störungsanteile $\mathfrak{r}_i$, $\dot{\mathfrak{r}}_i$ für irgendein $i = 1, 2, 3, \ldots$ beziehen. Dann ist nach (XXIX; 68)

$$\text{(XXIX; 77a)} \qquad K_3 = \dot{G}_0 + 2F_0 - \frac{1}{p}\left[\int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\, dt\right]_{t=t_0}.$$

Man differenziere nun die erste Gleichung (XXIX; 72):

$$\dot{F} = K_1 (\dot{r} \cos v - r\, \dot{v} \sin v) + K_2 (\dot{r} \sin v + r\dot{v} \cos v) + \dot{A}.$$

Wegen

$$\dot{r} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} e \sin v; \qquad r\dot{v} = \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r}; \qquad \frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

erhält man nach einfacher Rechnung

$$\dot{F} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} [-K_1 \sin v + K_2 (e + \cos v)] + \dot{A}.$$

Hieraus und aus (XXIX; 72) selbst folgt für $t = 0$

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} [-K_1 \sin v_0 + K_2 (e + \cos v_0)] = \dot{F}_0 - \dot{A}_0,$$

$$r_0 [K_1 \cos v_0 + K_2 \sin v_0] = F_0 - A_0 - 2K_3,$$

woraus man

$$\text{(XXIX; 77 b)}\qquad \begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{p}\,(e + \cos v_0)\,(F_0 - A_0 - 2K_3) - \dfrac{r_0}{\varkappa\sqrt{p}}\sin v_0\,(\dot F_0 - \dot A_0), \\ K_2 = \dfrac{1}{p}\sin v_0\,(F_0 - A_0 - 2K_3) + \dfrac{r_0}{\varkappa\sqrt{p}}\cos v_0\,(\dot F_0 - \dot A_0) \end{cases}$$

ableitet. Entsprechend erhält man aus der zweiten Gleichung (XXIX; 72) und ihrer Ableitung

$$\text{(XXIX; 77 c)}\qquad \begin{cases} K_5 = \dfrac{1}{p}\,(e + \cos v_0)\,(H_0 - C_0) - \dfrac{r_0}{\varkappa\sqrt{p}}\sin v_0\,(\dot H_0 - \dot C_0), \\ K_6 = \dfrac{1}{p}\sin v_0\,(H_0 - C_0) + \dfrac{r_0}{\varkappa\sqrt{p}}\cos v_0\,(\dot H_0 - \dot C_0) \end{cases}$$

und schließlich aus (XXIX; 74, 76)

$$\text{(XXIX; 77 d)}\qquad K_4 = 2K_1\left(\int r\cos v\,dt\right)_{t=0} + 2K_2\left(\int r\sin v\,dt\right)_{t=0} + G_0 - B_0.$$

Will man, wie im folgenden, statt der Zeit t die exzentrische Anomalie E der intermediären Bahn des gestörten Körpers als unabhängige Variable einführen, so ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e\cos E} = \frac{\varkappa}{r\sqrt{a}}; \qquad \frac{dF}{dE} = F'; \ldots,$$

also

$$\dot F - \dot A = (F' - A')\,\frac{\varkappa}{r\sqrt{a}}; \qquad \dot H - \dot C = (H' - C')\,\frac{\varkappa}{r\sqrt{a}}; \qquad \dot G = G'\,\frac{\varkappa}{r\sqrt{a}}.$$

Wegen der Beziehungen

$$r\cos v = a\,(\cos E - e); \qquad r\sin v = a\cos\varphi\sin E; \qquad \sin\varphi = e$$

und, nach (III; 60),

$$e + \cos v = \frac{p}{r}\cos E$$

erhält man dann statt (XXIX; 77 a—d), wenn man noch in (XXIX; 77 d) die Integrale durch (XXIX; 74 a, b) mit $t = 0$, $E = E_0$ ersetzt,

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\cos E_0}{r_0}\,(F_0 - A_0 - 2K_3) - \dfrac{\sin E_0}{r_0}\,(F_0' - A_0'), \\ K_2 = \dfrac{\sin E_0}{r_0\cos\varphi}\,(F_0 - A_0 - 2K_3) + \dfrac{\cos E_0 - e}{r_0\cos\varphi}\,(F_0' - A_0'), \end{cases}$$

(XXIX; 78)
$$\left\{\begin{aligned}
K_3 &= 2F_0 + \frac{\varkappa}{r_0\sqrt{a}}\,G_0' - \frac{1}{p}\left|\int(\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\,dt\right|_{t=0},\\
K_4 &= 2K_1\,\frac{a}{n}\left\{\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E_0 - \frac{e}{4}\sin 2E_0\right\} + \\
&\quad + 2K_2\,\frac{a}{n}\left\{-\cos E_0 + \frac{e}{4}\cos 2E_0\right\} + G_0 - B_0,\\
K_5 &= \frac{\cos E_0}{r_0}(H_0 - C_0) - \frac{\sin E_0}{r_0}(H_0' - C_0'),\\
K_6 &= \frac{\sin E_0}{r_0\cos\varphi}(H_0 - C_0) + \frac{\cos E_0 - e}{r_0\cos\varphi}(H_0' - C_0').
\end{aligned}\right.$$

Es sind jetzt noch auf Grund von (XXIX; 73, 76) die Größen A, B, C als Funktionen von E auszudrücken. Dazu ist erforderlich, die gemischten Produkte

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g}); \qquad (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r}); \qquad (\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}); \qquad (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})$$

sowie das Skalarprodukt $(\mathfrak{F}\mathfrak{g})$ als integrable Funktionen von E darzustellen, wo das Symbol $\mathfrak{F}$ für irgendeinen der Vektoren $\mathfrak{F}_i$ steht; diese sind aber, wie gezeigt worden ist, bekannt, wenn die Störungsanteile $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{i-1}$ durch Integration der ersten $i-1$ Differentialgleichungen (XXIX; 63) vorliegen. Es genügt hier, den Fall

$$\mathfrak{F}_1 = \nabla\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}}{\varrho^3} - \frac{\mathfrak{r}'}{r'^3}\right)$$

ins Auge zu fassen, wo $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, ϱ, r' den intermediären Bewegungen der beiden Planeten entnommen werden. Die Entwicklung der Koordinaten dieses Ausdrucks in trigonometrische, nach Funktionen der Vielfachen der mittleren, wahren oder exzentrischen Anomalien fortschreitenden Reihen mit Hilfe der Laplaceschen Koeffizienten ist (s. Kapitel XXV) sehr umständlich und konvergiert, wenn überhaupt, nur dann rasch genug, wenn die Exzentrizitäten der beiden Bahnen und deren gegenseitige Neigung genügend klein sind. Dasselbe gilt in erhöhtem Maße für die verwickelteren Vektoren $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ Man zieht daher heute numerische Entwicklungen durch harmonische Analyse eines genügend ausgedehnten Datenmaterials vor. Da $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ ungestörten Bewegungen angehören, lassen sich stets beliebig viele Örter numerisch berechnen, und es sind daher die Koordinaten von $\mathfrak{F}_1(t)$ für beliebig viele äquidistante Zeitpunkte t bekannt, mit deren Hilfe man durch doppelte harmonische Analyse Reihen der Form

(XXIX; 79)
$$\sum_j \sum_k C_{jk} \cos\left[(jn + kn')\,t + D_{jk}\right]$$

mit numerisch bestimmten Konstanten C_{jk}, D_{jk} herstellen kann. Das dazu dienende Verfahren, das mit Computern rasch und sicher durchgeführt werden kann, wird in Anhang II beschrieben.

Die Reihen (XXIX; 79) schreiten nach Vielfachen der mittleren Anomalien fort. Es ist aber vorzuziehen, wahre oder exzentrische Anomalien zu benutzen, da (außer den $\mathfrak{F}_i$ selbst) alle in den Lösungen unseres Problems vorkommenden Größen sich in diesen Variablen in geschlossener Form ausdrücken lassen, während sie als Funktionen der mittleren Anomalien nur durch unendliche Reihen darstellbar sind.

Wir werden hier, wie dies auch weiter oben schon geschehen ist, die exzentrischen Anomalien E und E' als unabhängige Variable benutzen. Als Koordinatensystem kann jedes beliebige feste rechtwinklige heliozentrische System dienen, etwa das des Äquators oder der Ekliptik. Vorzuziehen ist aber ein System, dessen Hauptebene mit der intermediären Bahnebene des gestörten Planeten zusammenfällt und dessen positive x-Achse nach dem Perihel dieser Bahn zeigt. Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen ($\mathfrak{z}$ zeigt dann nach dem Nordpol der Bahnebene), so ist der ungestörte Ortsvektor des gestörten Planeten P durch

$$\text{(XXIX; 80a)}\quad \begin{cases} \mathfrak{r} = r\,(\mathfrak{x}\cos v + \mathfrak{y}\sin v) = a\,\{\mathfrak{x}\,(\cos E - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi\sin E\}, \\ E - e\sin E = nt + \varepsilon; \qquad \cos\varphi = \sqrt{1-e^2} \end{cases}$$

bestimmt, wenn ε die mittlere Anomalie zur Epoche $t = 0$ darstellt. Ebenso könnte man den ungestörten Ortsvektor des störenden Planeten P' durch

$$\text{(XXIX; 80b)}\quad \begin{cases} \mathfrak{r}' = r'\,(\mathfrak{x}'\cos v' + \mathfrak{y}'\sin v') = \\ \quad = a'\,\{\mathfrak{x}'\,(\cos E' - e') + \mathfrak{y}'\cos\varphi'\sin E'\}, \\ E' - e'\sin E' = n't + \varepsilon'; \qquad \cos\varphi' = \sqrt{1-e'^2} \end{cases}$$

darstellen, wenn die Basisvektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ ein rechtwinkliges System definieren, das mit der intermediären Bahn von P' in derselben Weise verknüpft ist wie System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mit der von P. Durch eine lineare Transformation, deren Matrix leicht herstellbar ist, gehen beide Systeme ineinander über, so daß sich auch $\mathfrak{r}'$ in Komponenten nach den Richtungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zerlegen läßt.

Zur Berechnung der Integrale in (XXIX; 73, 76) ist es notwendig, $\mathfrak{F}$ als Funktion einer einzigen Variablen, etwa E, auszudrücken. Man erreicht das, indem man aus den beiden KEPLERschen Gleichungen in (XXIX; 80a, b) die Zeit eliminiert. Dann ist

$$\text{(XXIX; 81)}\qquad E' - e'\sin E' = \frac{n'}{n}\,(E - e\sin E - \varepsilon) + \varepsilon' = \psi - \frac{n'}{n}\,e\sin E,$$

wenn

$$\text{(XXIX; 82)}\qquad \psi = \frac{n'}{n}\,(E - \varepsilon) + \varepsilon'$$

eine lineare Funktion von E darstellt. Man berechne also zu einer Folge von diskreten Werten E eine Folge $\psi(E)$ nach (XXIX; 82) und die zugehörigen E' nach (XXIX; 81). Damit ergeben sich die Koordinaten von $\mathfrak{r}'$, die dann noch auf das System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu transformieren sind. Man erhält dann die Koordinaten von $\mathfrak{F}$ durch doppelte harmonische Analyse als Reihen von der Form

$$\sum_j \sum_k c_{jk} \cos(jE + k\psi + d_{jk}) =$$

$$= \sum_j \sum_k c_{jk} \cos\left[(jn + kn')\frac{E}{n} + \left(\varepsilon' - \frac{n'}{n}\varepsilon + d_{jk}\right)\right],$$

deren Gestalt genau der von (XXIX; 79) entspricht und die nach Funktionen der Vielfachen von E bzw. $n'E/n$ statt nach denjenigen der mittleren Anomalien oder Längen fortschreiten.

Es seien also die Koordinaten $(\mathfrak{F}\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{z})$ von $\mathfrak{F}$ als Funktionen von E bekannt. Dann ist nach (XXIX; 80a)

$$\mathfrak{r} = a\,[\mathfrak{x}\,(\cos E - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi\sin E],$$

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v} = a\,[-\mathfrak{x}\sin E + \mathfrak{y}\cos\varphi\cos E]\frac{dE}{dt},$$

$$\mathfrak{g} = \varkappa\sqrt{p}\,\mathfrak{z}.$$

Wegen $[\mathfrak{x}\mathfrak{z}] = -\mathfrak{y}$, $[\mathfrak{y}\mathfrak{z}] = \mathfrak{x}$ erhält man leicht

(XXIX; 83)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad (\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\,dt = (\mathfrak{F}\,[\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}])\,dt = \\ \qquad = \varkappa a\sqrt{p}\,\{(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\cos\varphi\cos E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})\sin E\}\,dE = \\ \qquad = \varkappa p\sqrt{a}\,\{(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\cos E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})\sec\varphi\sin E\}\,dE, \\ \text{b)} \quad (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{F}\,[\mathfrak{g}\mathfrak{r}]) = \\ \qquad = \varkappa a\sqrt{p}\,\{-(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\cos\varphi\sin E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})(\cos E - e)\} = \\ \qquad = \varkappa p\sqrt{a}\,\{-(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\sin E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})\sec\varphi\,(\cos E - e)\}, \\ \text{c)} \quad (\mathfrak{F}\mathfrak{g}) = \varkappa\sqrt{p}\,(\mathfrak{F}\mathfrak{z}). \end{cases}$$

Ist ferner η eine fiktive exzentrische Anomalie, die unter dem Integralzeichen als konstant gilt, aber nach ausgeführter Integration mit der Variablen E vertauscht wird, so kann man

$$\bar{\mathfrak{r}} = a\,\{\mathfrak{x}\,(\cos\eta - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi\sin\eta\}$$

schreiben. Wegen $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = [\mathfrak{y}\mathfrak{y}] = 0$, $[\mathfrak{x}\mathfrak{y}] = -[\mathfrak{y}\mathfrak{x}] = \mathfrak{z}$ ist dann

$$[\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}] = a^2\,[\mathfrak{x}\,(\cos E - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi\sin E,\quad \mathfrak{x}\,(\cos\eta - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi\sin\eta] =$$
$$= a^2\cos\varphi\,\{(\cos E - e)\sin\eta - (\cos\eta - e)\sin E\}\,\mathfrak{z}$$

und wegen $a^2 \cos\varphi \cdot \varkappa\sqrt{p} = \varkappa \mathfrak{a}^{3/2} p, \quad \mathfrak{z}^2 = 1$

(XXIX; 84a) $\qquad (\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) = \varkappa a^{3/2} p \{\sin(\eta - E) - e(\sin\eta - \sin E)\}.$

Ebenso findet man

$$[\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}] = a^2 [\mathfrak{x}(\cos\eta - e) + \mathfrak{y}\cos\varphi \sin\eta, \; -\mathfrak{x}\sin E + \mathfrak{y}\cos\varphi\cos E] \frac{dE}{dt} =$$

$$= a^2 \cos\varphi \{(\cos\eta - e)\cos E + \sin\eta \sin E\} \frac{dE}{dt} \mathfrak{z}$$

und daher

(XXIX; 84b) $\qquad (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\, dt = \varkappa a^{3/2} p \{\cos(\eta - E) - e\cos E\}\, dE.$

Schließlich ist, wenn man

$$dt = \frac{a^{3/2}}{\varkappa}(1 - e\cos E)\, dE$$

setzt,

(XXIX; 84c) $\qquad \{\varkappa^2 p - (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\}\, dt = \varkappa^2 p dt - \varkappa a^{3/2} p \{\cos(\eta - E) - e\cos E\}\, dE =$

$$= \varkappa a^{3/2} p \{1 - \cos(\eta - E)\}\, dE.$$

Zur Abkürzung führe man die Bezeichnungen

$$N_1 = \sin(\eta - E) - e(\sin\eta - \sin E),$$

$$N_2 = 2\{1 - \cos(\eta - E)\},$$

$$N_3 = 1 - e\cos E; \qquad dt = \frac{1}{\varkappa} a^{3/2} N_3\, dE$$

sowie

$$M_1 = a^2 \{(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\cos E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})\sec\varphi \sin E\},$$

$$M_2 = a^2 \{-(\mathfrak{F}\mathfrak{x})\sin E + (\mathfrak{F}\mathfrak{y})\sec\varphi(\cos E - e)\},$$

$$M_3 = a^3 (\mathfrak{F}\mathfrak{z})\, N_3,$$

$$M_4 = \int M_2 N_3\, dE$$

ein. Dann ist nach (XXIX; 84a, c) und (XXIX; 83a, b, c)

(XXIX; 85)

$$\begin{cases} (\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{g}) = \varkappa a^{3/2} p N_1, \\ 2\{\varkappa^2 p - (\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\}\, dt = \varkappa a^{3/2} p N_2\, dE, \\ (\mathfrak{F}\mathfrak{v}\mathfrak{g})\, dt = \varkappa p a^{-3/2} M_1\, dE, \\ (\mathfrak{F}\mathfrak{g})\, dt = a^{3/2}\sqrt{p}\,(\mathfrak{F}\mathfrak{z})\, N_3\, dE = \sqrt{p}\, a^{-3/2} M_3\, dE, \\ (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{x})\, dt = p M_2 N_3\, dE = p\, dM_4, \\ (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{x}) = \varkappa p a^{-3/2} M_2. \end{cases}$$

Mit den Ausdrücken (XXIX; 85) erhält man dann nach (XXIX; 73) und (XXIX; 76) die Formeln

$$\text{(XXIX; 86)}\qquad \begin{cases} A(E) = \int (M_1 N_1 + M_2 N_2)\, dE\,, \\ B(E) = \int \left\{ \dfrac{1}{p} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\, dt - 2A \right\} dt = \\ \qquad = \dfrac{1}{\varkappa}\, a^{3/2} \int \{M_4 - 2A\}\, N_3\, dE\,, \\ C(E) = \dfrac{1}{\varkappa \sqrt{p}} \int M_3 N_1\, dE\,. \end{cases}$$

Sämtliche Integrationen sind unbestimmt auszuführen. Aus (XXIX; 86) entnimmt man für $t = 0$, $E = E_0$ die Größen

$$A_0,\ B_0,\ C_0;\qquad A_0',\ B_0',\ C_0',$$

mit denen man mit Hilfe von (XXIX; 78) die Integrationskonstanten $K_1, \ldots, K_6$ berechnen kann. Eine einfachere Formel für K_3 ergibt sich, wenn man auf Grund der vorletzten Gleichung (XXIX; 85)

$$\frac{1}{p} \int (\mathfrak{F}\mathfrak{g}\mathfrak{r})\, dt = M_4$$

setzt. Es ist dann

$$\text{(XXIX; 87)}\qquad K_3 = 2F_0 + \frac{\varkappa}{r_0 \sqrt{a}}\, G_0' - (M_4)_0.$$

Mit den Konstanten K und den Funktionen (XXIX; 86) erhalten die Unbekannten des Problems nach (XXIX; 72, 75) die Gestalt

$$\text{(XXIX; 88)}\qquad \begin{cases} F = A + (2K_3 - aeK_1) + a\,\{K_1 \cos E + K_2 \cos\varphi \sin E\}, \\ G = B + 3\,(aeK_1 - K_3)t + K_4 + \\ \qquad + 2\,\dfrac{a}{n} \left\{ K_2 \cos\varphi \cos E - \left(1 - \dfrac{e^2}{2}\right) K_1 \sin E \right\} - \\ \qquad - \dfrac{ae}{2n}\,\{K_2 \cos\varphi \cos 2E - K_1 \sin 2E\}, \\ H = C - aeK_5 + a\,\{K_5 \cos E + K_6 \cos\varphi \sin E\}. \end{cases}$$

Die Form der Lösungen (XXIX; 88) ist noch von der Wahl der Elemente der intermediären Bahn bzw. von den Anfangsbedingungen des Problems

abhängig. Am einfachsten ist es, oskulierende Bahnen zu wählen. Dann gelten die Anfangsbedingungen

$$F_0 = G_0 = H_0 = F_0' = G_0' = H_0' = 0,$$

die man in die Gleichungen (XXIX; 78, 87) für die Integrationskonstanten einzusetzen hat. Man wird dieses Verfahren immer einschlagen, solange über die Bewegung des Planeten während langer Zeiträume noch keine Beobachtungen vorliegen. Eine andere Möglichkeit zur Definition der intermediären Bahn besteht darin, zu verlangen, daß für jede Ordnung die Konstanten K verschwinden. Dann ist nach (XXIX; 88)

$$F = A; \quad G = B; \quad H = C,$$

wobei die Funktionen A, B, C durch unbestimmte Integration aus (XXIX; 86) berechnet werden. Diese Gleichungen lassen sich aber, wie leicht einzusehen ist, nur durch ein Näherungsverfahren erfüllen, d. h. durch Variation der Elemente der intermediären Bahn.

Soll erreicht werden, daß die Störungen während eines möglichst ausgedehnten Zeitraums klein bleiben, so ist es zweckmäßig, die intermediäre Bahn so zu bestimmen, daß in den Störungen der mittleren Länge Terme von der Form

$$c_0; \quad c_1 t; \quad c_2 \cos\lambda; \quad c_3 \sin\lambda$$

und in den Störungen der z-Koordinate (in Richtung auf den Pol der intermediären Bahnebene) Terme von der Form

$$c_4 \cos\lambda; \quad c_5 \sin\lambda$$

herausfallen, d. h. jene Terme, die erfahrungsgemäß die größten Beträge erreichen. Intermediäre Bahnelemente, die diese Bedingungen erfüllen, werden „mittlere Elemente" genannt. Das iterative Verfahren, mittlere Elemente durch Variation der oskulierenden Elemente zu bestimmen, ist in der Literatur eingehend beschrieben worden. Wir müssen uns hier aus Gründen der Raumersparnis mit dem Hinweis auf einige dieser Quellen begnügen.[1])

248. Darstellung der allgemeinen Koordinatenstörungen durch Tschebyscheffsche Reihen

L. Carpenter[2]) hat gezeigt, daß es unter Umständen vorteilhaft ist, die Entwicklung der Störungsfunktion oder anderer dynamischer Ausdrücke anstatt nach trigonometrischen Funktionen nach Tschebyscheffschen

[1]) D. Brouwer und G. M. Clemence, Methods of celestial mechanics. New York 1961, S. 411ff.; P. Musen, On the general perturbations of the position vectors of a planetary system. J. O. *48*, 12ff. (1965).

[2]) L. Carpenter, Planetary perturbations in Chebyshev series. NASA TN D-3168, 1966.

Polynomen durchzuführen. Das ist z. B. der Fall, wenn es sich um die Herstellung eines Computerprogramms handelt, nach dem man, ohne auf die Methoden der speziellen Störungsrechnung zurückzugreifen, die rechtwinkligen gestörten Koordinaten eines Planeten oder eines Systems von Planeten direkt als Funktionen der Zeit t erhält, wenn t innerhalb eines großen Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ liegt. Die Vorteile dieses Verfahrens, das sich auch in vielen Fällen als brauchbar erweist, in denen die klassischen Methoden der allgemeinen Störungen versagen, werden wir am Schluß dieses Abschnitts hervorheben. Sie beruhen im wesentlichen auf den Eigenschaften der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome, die, soweit für diesen Zweck erforderlich, in Anhang VI zusammengestellt worden sind.

Die Störungsfunktion setzt sich aus Termen folgender Kategorien zusammen:

1. periodische Terme der Form $\cos pt$, $\sin pt$, wo p ein linearer Ausdruck in den mittleren Bewegungen und, in Störungen höherer Ordnung, auch in den säkularen Bewegungen der Knoten- und Perihellängen ist. Zu ihnen gehören auch (s. Abschnitt 268) die „kritischen" Terme, die bei genäherter Kommensurabilität ($p \approx 0$) zu langperiodischen Störungen mit beträchtlichen Amplituden führen und die Konvergenz der Reihen gefährden.

2. gemischte Terme von der Form $t^k \cos pt$, $t^k \sin pt$, wo $k = 1, 2, \ldots$ eine kleine positive Zahl ist. Zu ihnen gehören auch ($p = 0$) die säkularen Terme, die proportional t^k sind.

Nach Anhang VI (4, 4a) lassen sich, wie jede in einem Intervall stetige und beschränkte Funktion, die periodischen Terme, wenn x der Zeit proportional verläuft, im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ in die TSCHEBYSCHEFFschen Reihen

$$\text{(XXIX; 89)} \quad \begin{cases} \cos qx = \dfrac{1}{2} c_0^{(q)} + c_1^{(q)} T_1(x) + c_2^{(q)} T_2(x) + \cdots, \\ \sin qx = \dfrac{1}{2} s_0^{(q)} + s_1^{(q)} T_1(x) + s_2^{(q)} T_2(x) + \cdots \end{cases}$$

mit den Konstanten $c_i^{(q)}$, $s_i^{(q)}$ entwickeln. Da aber $\cos qx$ eine gerade, $\sin qx$ eine ungerade Funktion ist, so verschwinden die c_i für ungerade, die s_i für gerade i. Die übrigen lassen sich durch die BESSELschen Funktionen $J_r(q)$ ausdrücken, denn nach (VII; 28) ist, mit $x = \sin \psi$,

$$\cos(q \sin \psi) = J_0(q) + 2J_2(q) \cos 2\psi + 2J_4(q) \cos 4\psi + \cdots,$$

$$\sin(q \sin \psi) = \quad 2J_1(q) \sin \psi + 2J_3(q) \sin 3\psi + \cdots.$$

Setzt man hierin $\psi = \pi/2 - \varphi$, $x = \sin \psi = \cos \varphi$, so folgt

$$\cos qx = J_0(q) - 2J_2(q) \cos 2\varphi + 2J_4(q) \cos 4\varphi - \cdots,$$

$$\sin qx = \quad 2J_1(q) \cos \varphi - 2J_3(q) \cos 3\varphi + \cdots$$

oder, da (nach Anhang VI) $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi) = T_n(x)$ ist,

$$\text{(XXIX; 90)} \quad \begin{cases} \cos qx = J_0(q) - 2J_2(q)T_2(x) + 2J_4(q)T_4(x) - \cdots, \\ \sin qx = 2J_1(q)T_1(x) - 2J_3(q)T_3(x) + \cdots. \end{cases}$$

Auch die säkularen und gemischten Terme lassen sich durch TSCHEBYSCHEFFsche Reihen ausdrücken, denn nach Anhang VI (7) ist x^k eine lineare Funktion von T_k, T_{k-2}, ..., und die Produkte $x^k \cos qx$, $x^k \sin qx$ enthalten daher Produkte von der Form T_nT_m, die nach Anhang VI (5),

$$T_nT_m = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m}), \quad (n \geqq m)$$

ebenfalls als Summen von TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen erscheinen.

Es werde nun verlangt, einen periodischen Term $\cos pt$ oder $\sin pt$ innerhalb eines Intervalls $t_1 \leqq t \leqq t_2$ durch eine TSCHEBYSCHEFFsche Reihe genügend genau darzustellen. Der Zeitraum $\Delta = t_2 - t_1$ kann sehr groß sein. Es sei dann $t_0 = {}^1/_2(t_1 + t_2)$ eine in der Mitte dieses Intervalls liegende Epoche. Setzt man nun $t - t_0 = \tau$, $k = 2/\Delta$, so gilt in $[t_1, t_2]$

$$-1 \leqq x = k\tau \leqq +1,$$

und x ist eine Variable, die mit t gleichförmig wächst. Sei nun $P = 2\pi/p$ die Periode des Terms, und setzt man

$$\text{(XXIX; 91)} \qquad \cos p\tau = \cos qx; \qquad \sin p\tau = \sin qx,$$

so ist

$$\text{(XXIX; 92)} \qquad q = \frac{p\tau}{x} = \frac{p}{k} = \frac{2\pi}{P}\frac{\Delta}{2} = \frac{\pi\Delta}{P}.$$

Aus (XXIX; 90) folgt dann, daß für kleine q, die nach (XXIX; 92) langen Perioden entsprechen, die Entwicklungen rasch konvergieren, da die $J_r(q)$ für kleine q mit wachsendem r rasch abnehmen und nach Anhang VI (10) $|T_r(x)| \leqq 1$ ist. Für langperiodische und, was besonders wichtig ist, für kritische Terme kann man also diese Reihen schon nach wenigen Gliedern abbrechen. Andererseits ist q für kurze Perioden groß; die Reihen (XXIX; 90) konvergieren dann langsam und dürfen erst nach einer mehr oder weniger großen Anzahl von Summanden abgebrochen werden, wenn die erforderliche Genauigkeit erreicht werden soll. Solange $r < q$ ist, oszilliert $J_r(q)$ mit wachsendem r um Null, für $r > q$ strebt $J_r(q)$ rasch und monoton gegen Null. Es wird also nötig sein, die Entwicklung bis zu einem Index $r = r_0 > q$ durchzuführen, für den $|2J_r(q)| < \varepsilon$ ist, wenn ε eine vorgegebene kleine positive Schranke bedeutet. CARPENTER führt hierfür ein Beispiel an: Es sei $\Delta = 200$ Jahre, $P = 2\pi$ Jahre. Dann ist $q = 100$, und man erhält

$$\text{(XXIX; 93)} \qquad \begin{cases} \text{für } \varepsilon = 10^{-4} & r_0 = 118, \\ \text{für } \varepsilon = 10^{-10} & r_0 = 137, \\ \text{für } \varepsilon = 10^{-16} & r_0 = 152. \end{cases}$$

Natürlich wäre es wenig sinnvoll, jedes säkulare, gemischte oder periodische Glied der Störungsfunktion einzeln auf diese Weise nach TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen zu entwickeln, zumal die Berechnung der numerischen Werte der BESSELschen Funktionen für große Argumente q und große Indizes r sehr mühsam wäre. Man wird vielmehr den günstigen Umstand benutzen, daß *alle* Terme, welcher Kategorie sie auch angehören, durch TSCHEBYSCHEFFsche Polynome mit dem Argument $x = k\tau$ darstellbar sind und daß dies ebenso für ihre Produkte und Integrale gilt. Besonders vorteilhaft ist, daß die Reihen für die langperiodischen Terme und die in den klassischen Methoden Schwierigkeiten bereitenden kritischen Terme hier durch gut konvergierende Reihen darstellbar sind. Wegen der einheitlichen Darstellung aller Terme durch Reihen, die nach den $T_r(x)$ fortschreiten, genügt es also, den Ansatz

$$(\text{XXIX}; 94) \qquad F(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots + a_r T_r(x) + \cdots$$

für die Störungsfunktion oder andere in der Theorie auftretende Funktionen zu machen und die Koeffizienten a_r bis zu einer gewissen Ordnung $r_0 = n$ mit Hilfe numerischer Methoden zu berechnen, die wir nachfolgend beschreiben werden und die sich als sehr einfach erweisen.

Man wird den Index n, bei dem die Reihe (XXIX; 94) abgebrochen werden darf, so bestimmen, daß er mindestens so groß ist wie die Anzahl der Terme, die zur genauen Darstellung der periodischen Glieder mit der kleinsten vorkommenden Periode notwendig sind. Man darf dann im Rahmen der angestrebten Genauigkeit $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$ setzen.

Vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ bekannt sind, läßt sich die Funktion $F(x)$ für jedes x im Intervall $[-1, +1]$ bzw. für jedes φ im Intervall $[0, \pi]$ nach einem von C. W. CLENSHAW[1]) angegebenen Verfahren durch einen einfachen Rekursionsprozeß berechnen, in dem die TSCHEBYSCHEFFschen Polynome nicht mehr explizite vorkommen:

Man bestimme die Hilfsgrößen b_r durch den Ansatz

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= b_{n+1} = 0, \\ b_r \quad &= 2xb_{r+1} - b_{r+2} + a_r, \quad (r = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{array}{l|l} a_0 \quad = b_0 - 2xb_1 + b_2, & {}^1/_2 T_0 = {}^1/_2 \\ a_1 \quad = b_1 - 2xb_2 + b_3, & T_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots \\ a_{n-2} = b_{n-2} - 2xb_{n-1} + b_n, & T_{n-2}(x) \\ a_{n-1} = b_{n-1} - 2xb_n, & T_{n-1}(x) \\ a_n \quad = b_n. & T_n(x) \end{array}$$

---

[1]) C. W. CLENSHAW, The numerical solution of linear differential equations in CHEBYSHEV series. Proc. Cambridge philos. Soc. *53*, 134 (1957).

Multipliziert man diese Gleichungen mit den nebenstehenden Faktoren und addiert die Produkte, so erhält man wegen Anhang VI (6)

$$F(x) = \frac{1}{2}\, b_0 + (T_1 - x)\, b_1 + \left(T_2 - 2xT_1 + \frac{1}{2}\right) b_2 + \\ + \sum_{r=3}^{n} (T_r - 2xT_{r-1} + T_{r-2})\, b_r = \frac{1}{2}\,(b_0 - b_2).$$

Mittels eines ähnlichen Rekursionsprogramms gelingt die Bestimmung der Koeffizienten a_r. Schreibt man

$$F(x) = F(\cos\varphi) = f(\varphi) = \frac{1}{2}\, a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi,$$

so lassen sich die a_r (s. Anhang II) durch die Integralformeln

$$\text{(XXIX; 95)} \qquad a_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi) \cos r\varphi \, d\varphi, \quad (r = 0, 1, \ldots, n)$$

ausdrücken. Diese Integrale lassen sich durch endliche Summen approximieren, wenn von $f(\varphi)$ eine über das Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gleichmäßig verteilte Folge von $N + 1$ Ordinaten $f(\varphi_s)$ bekannt ist. Sei nämlich, wie in Abb. 14 für $N = 8$ angedeutet,

$$\varphi_s = \frac{\pi}{N}\, s, \quad (s = 0, 1, \ldots, N)$$

die Folge der Abszissen dieser Funktionswerte, so kann man, wenn N genügend groß ist, ohne merklichen Fehler die Teilintegrale

$$\frac{2}{\pi} \int_{\varphi_s - \pi/2N}^{\varphi_s + \pi/2N} f(\varphi) \cos r\varphi \, d\varphi$$

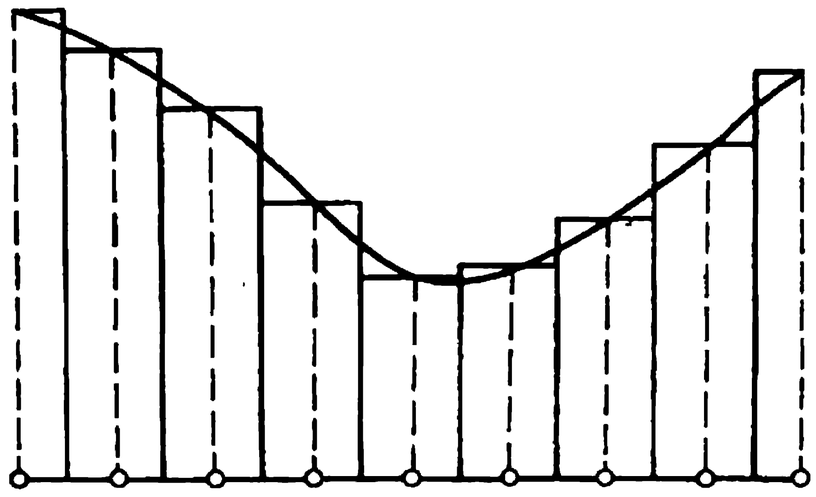

Abb. 14. Annäherung eines Integrals durch eine Summe von Ordinaten mit gleichabständigen Abszissen (o)

durch die Rechtecksinhalte

$$\frac{2}{N} f\left(\frac{\pi}{N} s\right) \cos r \frac{\pi}{N} s$$

ersetzen, wobei aber zu beachten ist, daß die Breite des ersten und letzten Rechtecks halb so groß ist wie die der übrigen. Allgemein ist also, wenn man noch $f(0) = F(1)$, $f(\pi) = F(-1)$ setzt,

$$(\text{XXIX}; 96) \qquad a_r = \frac{1}{N}\left[F(1) + (-1)^r F(-1)\right] + \frac{2}{N} \sum_{s=1}^{N-1} F\left(\cos \frac{\pi s}{N}\right) \cos \frac{r\pi s}{N}$$

oder, mit

$$\alpha_s = \frac{2}{N} F\left(\cos \frac{\pi s}{N}\right), \qquad \gamma_0 = \frac{1}{2} \alpha_0, \qquad \gamma_N = \frac{1}{2} \alpha_N, \quad \text{sonst } \gamma_s = \alpha_s,$$

$$(\text{XXIX}; 96\text{a}) \qquad a_r = \sum_{s=0}^{N} \gamma_s T_r(x_s) = \sum_{s=0}^{N} \gamma_s T_s(x_r); \qquad x_r = \cos \frac{r\pi}{N},$$

da nach Anhang VI (11) $T_r\left(\cos \frac{s\pi}{N}\right) = T_s\left(\cos \frac{r\pi}{N}\right)$ ist.

Je größer man N wählt, desto genauer wird das Integral (XXIX; 95) durch die Summe (XXIX; 96, 96a) dargestellt. Eine untere Grenze für N ist durch die Forderung gegeben, daß die Rechtecksbreite π/N höchstens den vierten Teil der Periode $2\pi/r$ des cos-Terms in (XXIX; 95) betragen darf, d. h., es muß $4\pi/N \leqq 2\pi/r$ oder $N \geqq 2r$ sein. Da dies für jedes $r \leqq n$ gilt, wird man $N \geqq 2n$ wählen müssen. Im allgemeinen genügt es, $N = 2n$ zu setzen, da dann jede vorkommende Periode mindestens durch vier Ordinaten belegt wird. Diese Forderung entspricht, wenn wir sie auf die Abschätzung von n anwenden, größenordnungsmäßig der Forderung $r_0 > q$, für die (XXIX; 93) ein Beispiel gibt. Zur Bestimmung der $n + 1$ Koeffizienten der nach dem Gliede mit a_n abgebrochenen Reihe (XXIX; 94) sind $n + 1$ über das Intervall $[0, \pi]$ gleichmäßig verteilte Ordinaten $f(\varphi) > F(x)$ erforderlich, die einer Einteilung des Intervalls in n Abschnitte entsprechen. Sei nun, wie in obigem Beispiel, $\Delta = 200$, $P = 2\pi$ die kleinste Periode, so würde, damit diese Periode mit vier Ordinaten belegt ist, $n = 4 \cdot \Delta/2\pi = 400/\pi \approx 127$ sein müssen, was mit CARPENTERS Abschätzung der BESSELschen Funktionen gut vereinbar ist.

Mit Hilfe der α_s bestimmt man dann die Hilfsgrößen β_s durch die Rekursionsformeln

$$\beta_{N+2} = \beta_{N+1} = 0; \quad \beta_N = \frac{1}{2} \alpha_N; \quad \beta_s = 2x_r \beta_{s+1} - \beta_{s+2} + \alpha_s, \ (s = 0, \ldots, N-1).$$

Dann ist

$$\begin{array}{l|l}
\alpha_0 = \beta_0 - 2x_r\beta_1 + \beta_2, & {}^1/_2T_0 = {}^1/_2 \\
\alpha_1 = \beta_1 - 2x_r\beta_2 + \beta_3, & T_1(x_r) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{N-2} = \beta_{N-2} - 2x_r\beta_{N-1} + \beta_N, & T_{N-2}(x_r) \\
\alpha_{N-1} = \beta_{N-1} - 2x_r\beta_N, & T_{N-1}(x_r) \\
{}^1/_2\alpha_N = \beta_N, & T_N(x_r)
\end{array}$$

und wenn man wiederum diese Gleichungen mit den nebenstehenden Faktoren multipliziert und die Produkte addiert, so ergibt sich

$$a_r = \frac{1}{2}(\beta_0 - \beta_2).$$

Durch ein anderes Rekursionsverfahren erhält man, nachdem die a_r bestimmt worden sind, auch die Ableitungen $dF(x)/dx$. Es sei

$$\frac{d}{dx}F(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{d}{dx}T_r(x) = \frac{1}{2}a_0' + \sum_{r=1}^{\infty} a_r' T_r(x).$$

Dann erhält man nach Anhang VI (8) durch Integrieren

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r T_r(x) \equiv \frac{1}{2}a_0' T_1 + \frac{1}{4}a_1' T_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{\infty} a_r' \left(\frac{T_{r+1}}{r+1} - \frac{T_{r-1}}{r-1}\right) + \text{const.}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von T_r auf beiden Seiten dieser Identität, so folgt für $r > 0$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_0' - a_2'); \quad a_2 = \frac{1}{4}(a_1' - a_3'); \quad \ldots; \quad a_r = \frac{1}{2r}(a_{r-1}' - a_{r+1}'); \quad \ldots,$$

während a_0 als Integrationskonstante gilt. Sind also die a_r bekannt, so berechnet man, da für $r > N$ alle a_r verschwinden, die a_r' durch das Rekursionsschema

$$a_{N+1}' = a_N' = 0,$$

$$a_r' = 2(r+1)a_{r+1} + a_{r+2}', \quad (r = N-1, N-2, \ldots, 0).$$

Schließlich läßt sich mit Hilfe der Produktformeln Anhang VI (5) die Multiplikation zweier TSCHEBYSCHEFFschen Reihen

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r T_r(x); \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\,b_0 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r T_r(x)$$

durchführen. Durch Nachrechnen bestätigt man leicht, daß

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{1}{2}\,c_0 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r T_r(x)$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{2}\,a_0 b_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r b_r,$$

$$c_k = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(a_r b_{r+k} + a_{r+k} b_r) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1} a_r b_{k-r}, \quad (k > 0)$$

ist. Damit sind alle zur Lösung des Störungsproblems durch Reihenentwicklungen nach TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen nötigen Hilfsformeln gegeben.

Man kann z. B., was hier nicht im einzelnen ausgeführt zu werden braucht, nach der in den vorigen Abschnitten beschriebenen Methode von MUSEN und CARPENTER die Störungsanteile verschiedener Ordnung einzeln berechnen und die Integrationskonstanten nach einer der dort angegebenen Regeln mit den Anfangsbedingungen in Verbindung bringen. Man kann aber auch, was das Programm wesentlich vereinfacht, die Störungen verschiedener Ordnung zusammenfassen und das Problem durch Iteration lösen.

Man setze etwa für den Ortsvektor des gestörten Planeten

$$\mathfrak{r} = (1 + F)\,\mathfrak{r}_0 + G\mathfrak{v}_0 + H\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{s},$$

wo $\mathfrak{s}$ der Störungsvektor ist, $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{v}_0$ den ungestörten Orts- bzw. Geschwindigkeitsvektor, $\mathfrak{g}_0$ den auf der instantanen Bahnebene senkrechten Einheitsvektor bezeichnen. Dann sind die Funktionen F, G, H nach dem in Abschnitt 246—247 beschriebenen Verfahren zu bestimmen. Andererseits erhält man aus (XXIX; 63), wenn man alle Gleichungen addiert und den ungestörten Ortsvektor und seinen Betrag wieder mit $\mathfrak{r}_0$, r_0 statt mit $\mathfrak{r}$, r bezeichnet,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \cdots$$

und

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \varkappa^2 \frac{\mathfrak{r}}{{r_0}^3} - 3\varkappa^2 \frac{\mathfrak{r}_0}{{r_0}^5}(\mathfrak{r}_0\mathfrak{s}) = \varkappa^2(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 + \cdots) = \varkappa^2\mathfrak{F}.$$

Nach der klassischen Störungstheorie ist aber, wenn wir nur einen störenden Planeten mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ und der Masse m' annehmen,

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \varkappa^2 \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \varkappa^2 \frac{m'}{1+m}\left(\frac{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}|^3} - \frac{\mathfrak{r}'}{r'^3}\right).$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so erhält man für die Störungsbeschleunigung den Ausdruck

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{r}}{{r_0}^3} - \frac{\mathfrak{r}}{r^3} - 3\,\frac{\mathfrak{r}_0(\mathfrak{r}_0\mathfrak{s})}{{r_0}^5} + \frac{m'}{1+m}\left(\frac{\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}|^3} - \frac{\mathfrak{r}'}{r'^3}\right),$$

mit dem man die Größen F, G, H iterativ bestimmen kann, wenn man mit den ungestörten Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ beginnt.

Die Vorteile dieses Verfahrens gegenüber den klassischen Methoden der allgemeinen Störungstheorie für rechtwinklige Koordinaten liegen auf der Hand. Es ist weitgehend unabhängig von der Größenordnung der Exzentrizitäten und Neigungen der Bahnen, und es treten keine Schwierigkeiten im Falle von kommensurablen oder nahezu kommensurablen mittleren Bewegungen auf. Selbst wenn die Bahnkurve des gestörten Planeten die eines störenden schneidet oder nahe an sie heranreicht (ein Fall, der in der klassischen Theorie auf divergente oder schlecht konvergierende Reihen nach Funktionen der mittleren Anomalien führen würde), wird diese Methode nicht versagen, vorausgesetzt, daß im Zeitraum $[t_1, t_2]$ die Planetenörter sich nicht nähern oder gar zusammenfallen.

L. CARPENTER hat seine Methode erfolgreich auf die Berechnung der Ephemeriden der fünf äußeren Planeten für den Zeitraum 1800—2000 angewandt. Seine sphärischen Örter stimmten bereits nach drei Iterationen bis auf weniger als 0.″01 mit den von ECKERT, BROUWER und CLEMENCE[1]) durch spezielle Störungsrechnung erzielten Ergebnissen überein.

Im Falle stark exzentrischer Bahnen ist es angebracht, die Variable x nicht als lineare Funktion der Zeit, sondern als lineare Funktion der exzentrischen Anomalie zu definieren, was durch eine verhältnismäßig geringe Änderung des Computerprogramms möglich ist und zu einer besseren Konvergenz des Verfahrens führt.

---

[1]) W. J. ECKERT, D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Coordinates of the five outer planets 1653—2060. Astron. Papers *12* (1951).

KAPITEL XXX

LINEARISATION UND REGULARISATION. SPINOREN

249. Lineare und regularisierte Differentialgleichungen der Zweikörperbewegung

Transformationen der abhängigen oder der unabhängigen Variablen (oder beider), die in dynamischen Problemen auftreten, erweisen sich vielfach als nützlich bei der Lösung der Differentialgleichungen, die diese Probleme repräsentieren. In besonders einfachen Fällen gelingt es, diese Gleichungen, die im allgemeinen die Form

$$\text{(XXX; 1)} \qquad \dot{x}_i = f_i(x, t) = f_i(x_1, \ldots, x_n; t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

haben, durch eine Transformation

$$x_i = x_i(\xi, q); \quad t = t(q)$$

so umzuformen, daß die neuen Variablen $\xi(q)$ linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die relative Zweikörperbewegung, deren Differentialgleichungen die Form

$$\text{(XXX; 2)} \qquad \ddot{x}_i + \frac{x_i}{r^3} = 0; \quad r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

oder

$$\dot{x}_i = u_i; \quad \dot{u}_i = -\frac{x_i}{r^3}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

haben, wenn die Einheiten so gewählt werden, daß $\varkappa^2 = k^2(1 + m) = 1$ ist. In Kapitel V ist gezeigt worden, daß die Einführung einer Pseudozeit q durch

$$\text{(XXX; 3)} \qquad \dot{q} = \frac{1}{r}$$

genügt, die Differentialgleichungen (XXX; 2) in die lineare Form

$$x_i'' + \alpha^2 x_i = \text{const}, \quad (\alpha^2 = \text{const})$$

überzuführen, wenn Ableitungen nach q durch Striche gekennzeichnet werden. In der Tat erhält man, für $x = x_i$,

$$\dot{x} = x'\dot{q} = \frac{x'}{r}; \quad \ddot{x} = \frac{1}{r}\frac{d}{dq}\left(\frac{x'}{r}\right) = \frac{1}{r^3}(rx'' - r'x'),$$

also aus (XXX; 2) zunächst

$$x'' + \frac{x - r'x'}{r} = 0. \tag{XXX; 4}$$

Ferner folgt aus $r^2 = \sum x^2$ durch zweimaliges Differenzieren

$$rr' = \sum xx'; \quad rr'' + r'^2 = \sum \left\{x'^2 + \frac{x}{r}(r'x' - x)\right\},$$

also

$$\sum x'^2 = r(r'' + 1), \tag{XXX; 5}$$

und wenn man noch einmal differenziert, x'' durch (XXX; 4) und $\sum x'^2$ durch (XXX; 5) eliminiert,

$$r''' + \frac{1 - r''}{r} r' = 0. \tag{XXX; 6a}$$

Ebenso ergibt nochmalige Differentiation von (XXX; 4)

$$x''' + \frac{1 - r''}{r} x' = 0. \tag{XXX; 6b}$$

Es ist aber (s. Abschnitt 184)

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1 - r''}{r}\right) = -\frac{1}{r}\left(r''' + \frac{1 - r''}{r} r'\right) = 0,$$

also

$$\frac{1 - r''}{r} = \alpha^2 = \text{const},^{1}) \tag{XXX; 7}$$

so daß (XXX; 6a, b) die gemeinsame Form

$$s''' + \alpha^2 s' = 0, \quad (\alpha^2 \gtreqless 0) \tag{XXX; 8}$$

einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten haben Diese Gleichung hat also die speziellen Lösungen $s = r, x_i$ (bzw. x, y, z). Ihr genügen aber auch die Funktionen $F(q)$ und $G(q)$, wenn man die Koordinaten des Ortsvektors des Planeten

$$x = Fx_0 + G\dot{x}_0$$

schreibt, d. h. den Ortsvektor in (im allgemeinen schiefwinklige) Komponenten bezüglich des Orts- und Geschwindigkeitsvektors zu einer festen Epoche $t = t_0$ zerlegt. In der Tat sind F und G Lösungen von (XXX; 8), da sie (s. Ab-

---

[1]) Die Konstante, die auch negativ sein kann, wird mit α^2 bezeichnet, da in den Formeln des Zweikörperproblems, z. B. (XXX; 9), $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$ vorkommt. Durch die Bezeichnung α^2 werden also lästige Quadratwurzeln vermieden.

schnitt 42) als Funktionen der Zeit Differentialgleichungen vom Typus (XXX; 2) genügen.

Die Gleichungen (XXX; 8) lassen sich einmal integrieren:

$$s'' + \alpha^2 s = \text{const}.$$

Speziell ist wegen (XXX; 7) $r'' + \alpha^2 r = 1$ und wegen (XXX; 4)

$$x'' + \alpha^2 x = \frac{r'x' - r''x}{r} = \text{const},$$

da man leicht zeigt, daß die Ableitung der rechten Seite dieser Gleichung identisch verschwindet, wenn man (XXX; 4, 7) benutzt.

Die reelle Konstante α^2 hat, wie in Abschnitt 41 bewiesen wurde, im Zweikörperproblem die Bedeutung $1/a$, also der reziproken großen Halbachse der Bahn. Je nachdem α selbst reell, Null oder rein imaginär ist, ergeben sich elliptische, parabolische oder hyperbolische Lösungen, die unter Umständen auch in geradlinige mit singulärem Verhalten (Fallbewegungen) ausarten können (s. Abschnitt 26).

In der klassischen Himmelsmechanik haben diese Fallunterscheidungen bewirkt, daß unterschiedliche Verfahren zur analytischen und numerischen Auswertung der Lösungen des Zweikörperproblems entwickelt wurden. Das war historisch bedingt, weil man von der KEPLERschen Lösung des elliptischen Problems ausging und daher als „Pseudozeit" die exzentrische Anomalie E verwendete. Der Zusammenhang zwischen E und der Zeit t ist durch

$$dE = \frac{dt}{r\sqrt{a}}$$

gegeben. Die rechte Seite ist also nur im elliptischen Fall reell und von Null verschieden; es besteht kein regulärer Übergang von den elliptischen ($a > 0$) über die parabolischen ($a = \infty$) zu den hyperbolischen Lösungen ($a < 0$). Die Einführung von q durch $\dot{q} = \sqrt{a}\dot{E} = r^{-1}$ regularisiert also das Problem, und auch die Singularität beim Zusammenstoß der beiden Körper in der geradlinigen Fallbewegung wird aufgehoben. Denn während die Geschwindigkeit $V(t)$ wegen der Relation (III; 31),

$$V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

für $r \to 0$ über alle Grenzen wächst, strebt $V(q)$ wegen (XXX; 5) gegen Null.

Formal bleiben die obengenannten Fallunterscheidungen allerdings noch bestehen, denn die allgemeinen Lösungen von (XXX; 8) lauten ja

$$(\text{XXX}; 9)\quad \begin{cases} \text{a)}\ s = s_0 + s_1 \cos \alpha q + s_2 \sin \alpha q, & (\alpha^2 > 0), \\ \text{b)}\ s = s_0 + s_1 q + s_2 q^2, & (\alpha^2 = 0), \\ \text{c)}\ s = s_0 + s_1 \cosh \beta q + s_2 \sinh \beta q, & (\alpha^2 = -\beta^2 < 0), \end{cases}$$

und der Übergang von der elliptischen zur hyperbolischen Lösung scheint den parabolischen Fall auszuschließen, denn aus (XXX; 9a) und (XXX; 9c) folgt für $\alpha \to 0$ statt (XXX; 9b)

$$s \to s_0 + s_1 = \text{const}.$$

Dieser Widerspruch entfällt aber, wenn man die Anfangsbedingungen des Problems berücksichtigt. Im elliptischen Fall erhält man für $q = 0$

$$s(0) = s_0 + s_1; \quad s'(0) = \alpha s_2; \quad s''(0) = -\alpha^2 s_1,$$

also

$$s(q) = s(0) + \frac{s'(0)}{\alpha} \sin \alpha q + \frac{s''(0)}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha q) =$$

$$= s(0) + \frac{\sin \alpha q}{\alpha q} s'(0)\, q + \frac{1 - \cos \alpha q}{\alpha^2 q^2} s''(0)\, q^2.$$

Dieser Ausdruck geht aber für $\alpha \to 0$ in

$$s(q) = s(0) + s'(0)\, q + \frac{1}{2} s''(0)\, q^2,$$

d. h. in die parabolische Lösung (XXX; 9b), über. Dasselbe gilt, wenn man von der hyperbolischen Lösung ausgeht, da

$$c_1(\lambda^2) = \frac{\sin \lambda}{\lambda}; \quad c_2(\lambda^2) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2}$$

gerade Funktionen von $\lambda = \alpha q$ sind. Die Einführung der Hilfsfunktionen c_1, c_2 beseitigt also die Fallunterscheidung.

Im nächsten Abschnitt soll versucht werden, diese Gedankengänge, die zur Linearisierung, Regularisierung und Uniformisierung des Zweikörperproblems geführt haben, zu verallgemeinern. Wir werden daher die wichtigsten Ergebnisse der in Kapitel V ausführlich diskutierten Theorie kurz in Erinnerung bringen:

1. Mit der Pseudozeit $q(t) = r^{-1}$ als unabhängige Variable nehmen die Differentialgleichungen des relativen Zweikörperproblems die lineare Form $s''' + \alpha^2 s' = 0$ an.

2. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist regulär und hat die einheitliche Form

(XXX; 10) $$s(q) = s_0 + c_1 q s_0' + c_2 q^2 s_0'',$$

wenn s_0, s_0', s_0'' die Anfangsbedingungen (Integrationskonstanten) des Problems sind.

3. Die Hilfsfunktionen $c_1(\lambda^2)$, $c_2(\lambda^2)$; $\lambda = \alpha q$ gehören der Folge

$$c_0 = \cos \lambda; \quad c_1 = \frac{\sin \lambda}{\lambda}; \quad c_2 = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2}; \quad c_3 = \frac{\lambda - \sin \lambda}{\lambda^3}; \quad \ldots$$

an, die aus der partiellen Lösung c_0 von (XXX; 8) durch fortgesetzte Integration,

$$(\text{XXX}; 11) \qquad c_\nu = \frac{1}{q^\nu} \int_0^q \cdots \int_0^q \cos \alpha q \, (dq)^\nu$$

hervorgeht. Sie genügen der Rekursionsbeziehung

$$(\text{XXX}; 12) \qquad c_\nu + \lambda^2 c_{\nu+2} = \frac{1}{\nu!}$$

und den Differential- bzw. Integralbeziehungen

$$(\text{XXX}; 13) \qquad \frac{d}{dq}(c_\nu q^\nu) = c_{\nu-1} q^{\nu-1}; \quad \int_0^q c_\nu q^\nu \, dq = c_{\nu+1} q^{\nu+1}.$$

4. Die Zeit t gewinnt man aus q durch die „Hauptgleichung“

$$(\text{XXX}; 14) \qquad t - t_0 = r_0 q + r_0' c_2 q^2 + r_0'' c_3 q^3$$

zurück, die durch Integration von

$$dt = r \, dq = (r_0 + r_0' c_1 q + r_0'' c_2 q^2) \, dq$$

erhalten wird.

250. Geschlossene und einheitliche Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung (XXX; 8) ist ein sehr spezieller Fall der linearen Differentialgleichung

$$(\text{XXX}; 15) \quad s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + a_2 s^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} s' + a_n s = 0; \quad s^{(\nu)} = \frac{d^\nu s}{dq^\nu}$$

n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die unabhängige Variable q ist entweder die Zeit t selbst oder eine Funktion von t, von der man annehmen darf, daß sie mit der Zeit monoton wächst, wenn nicht für alle t, so doch für ein Intervall $|t - t_0| \leqq T$.

Es möge nun $\varphi = \varphi(q)$ eine partikuläre Lösung von (XXX; 15) sein, über die noch verfügt werden kann und die als erzeugende Funktion einer Folge

$$(\text{XXX}; 16) \qquad \varphi_\nu(q) = \frac{1}{q^\nu} \int_0^q \cdots \int_0^q \varphi(q) \, (dq)^\nu$$

dient. Speziell ist $\varphi_0(q) = \varphi$, und es gilt wegen (XXX; 15)

$$(\text{XXX}; 17) \quad \varphi^{(n)} + a_1 \varphi^{(n-1)} + a_2 \varphi^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \varphi' + a_n \varphi = 0.$$

Jede partikuläre Lösung von (XXX; 17) ist durch die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0);\quad \varphi'(0);\quad \varphi''(0);\quad \ldots;\quad \varphi^{(n-1)}(0)$$

determiniert. Diese mögen durch die Vorschrift

$$\text{(XXX; 18)}\qquad \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi'(0) + a_1\varphi(0) = 0, \\ \varphi''(0) + a_1\varphi'(0) + a_2\varphi(0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \varphi^{(n-1)}(0) + a_1\varphi^{(n-2)}(0) + \cdots + a_{n-2}\varphi'(0) + a_{n-1}\varphi(0) = 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_{n-1}$ eindeutig bestimmt werden.

Integriert man (XXX; 17), so ergibt sich

$$\varphi^{(n-1)} + a_1\varphi^{(n-2)} + a_2\varphi^{(n-3)} + \cdots + a_{n-1}\varphi + a_n \int_0^q \varphi\, dq = \text{const} = 0,$$

da für $q = 0$ wegen der letzten Gleichung (XXX; 18) auch die linke Seite verschwindet. Ebenso folgt durch fortgesetztes Integrieren, wenn man jedesmal die Bedingungen (XXX; 18) berücksichtigt,

$$\text{(XXX; 19)}\qquad \begin{cases} \varphi^{(n-2)} + a_1\varphi^{(n-3)} + a_2\varphi^{(n-4)} + \cdots + a_{n-1}\int_0^q \varphi\, dq + a_n \int_0^q\int_0^q \varphi\,(dq)^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \varphi^1 + a_1\varphi + a_2\int_0^q \varphi\, dq + \cdots + a_{n-1}\int_0^q\cdots\int_0^q \varphi\,(dq)^{n-2} + a_n\int_0^q\cdots\int_0^q \varphi\,(dq)^{n-1} = 0, \\ \varphi + a_1\int_0^q \varphi\, dq + a_2\int_0^q\int_0^q \varphi\,(dq)^2 + \cdots + a_{n-1}\int_0^q\cdots\int_0^q \varphi\,(dq)^{n-1} + \\ \quad + a_n\int_0^q\cdots\int_0^q \varphi\,(dq)^n = 1. \end{cases}$$

Führt man nun die Folge der Hilfsfunktionen (XXX; 16) ein, so nimmt die letzte Gleichung (XXX; 19) die Form

$$\text{(XXX; 20)}\qquad \varphi + a_1\varphi_1 q + a_2\varphi_2 q^2 + \cdots + a_{n-1}\varphi_{n-1}q^{n-1} + a_n\varphi_n q^n = 1$$

an. Aus (XXX; 16) folgen die (XXX; 13) entsprechenden Beziehungen

$$\frac{d}{dq}(\varphi_\nu q^\nu) = \varphi_{\nu-1}q^{\nu-1};\qquad \int_0^q \varphi_\nu q^\nu dq = \varphi_{\nu+1}q^{\nu+1}.$$

Integriert man (XXX; 20) zwischen 0 und q, so ergibt sich

$$\varphi_1 q + a_1\varphi_2 q^2 + a_2\varphi_3 q^3 + \cdots + a_n\varphi_{n+1}q^{n+1} = q + \text{const},$$

und die Konstante ist Null, da diese Gleichung auch für $q = 0$ gilt. Ebenso erhält man nach $\nu - 1$ weiteren Integrationen

$$\varphi_\nu q^\nu + a_1\varphi_{\nu+1}q^{\nu+1} + \cdots + a_{n-1}\varphi_{\nu+n-1}q^{\nu+n-1} + a_n\varphi_{\nu+n}q^{\nu+n} = \frac{q^\nu}{\nu!}$$

oder, wenn man durch q^ν dividiert,

$$\text{(XXX; 21)} \qquad \varphi_\nu + a_1\varphi_{\nu+1}q + a_2\varphi_{\nu+2}q^2 + \cdots + a_{n-1}\varphi_{\nu+n-1}q^{n-1} + a_n\varphi_{\nu+n}q^n = \frac{1}{\nu!}.$$

Jede Lösung von (XXX; 15) läßt sich in einem gewissen Intervall $|q| \leqq Q$ in eine TAYLORsche Reihe

$$s(q) = \frac{1}{0!}s_0 + \frac{1}{1!}s_0'q + \frac{1}{2!}s_0''q^2 + \cdots$$

entwickeln. Ersetzt man die reziproken Fakultäten durch die Polynome (XXX; 21), so erhält man

$$\begin{aligned} s(q) = {} & s_0(\varphi_0 + a_1\varphi_1 q + a_2\varphi_2 q^2 + \cdots + a_n\varphi_n q^n) + \\ & + s_0'q(\varphi_1 + a_1\varphi_2 q + a_2\varphi_3 q^2 + \cdots + a_n\varphi_{n+1}q^n) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + s_0^{(n)}q^n(\varphi_n + a_1\varphi_{n+1}q + a_2\varphi_{n+2}q^2 + \cdots + a_n\varphi_{2n}q^n) + \cdots \end{aligned}$$

oder, indem man erneut nach Potenzen von q ordnet,

$$\begin{aligned} \text{(XXX; 22)} \quad s(q) = {} & \varphi_0 s_0 + \varphi_1 q(s_0' + a_1 s_0) + \varphi_2 q^2(s_0'' + a_1 s_0' + a_2 s_0) + \\ & + \cdots + \varphi_{n-1}q^{n-1}(s_0^{(n-1)} + a_1 s_0^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}s_0) \end{aligned}$$

als geschlossenen Ausdruck, da die folgenden Terme das identisch verschwindende Polynom (XXX; 15) bzw. dessen Ableitungen nach q enthalten.

Vor den aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannten Formen der allgemeinen Lösungen von (XXX; 15) hat (XXX; 22) den Vorzug, keinerlei Fallunterscheidungen notwendig zu machen. Auch für den Sonderfall, daß bei Variation der Konstanten a_i alle diese Größen gleichzeitig durch Null gehen, ergeben sich keine Schwierigkeiten. Die Hilfsfunktionen φ_ν nehmen dann die konstanten Werte $1/\nu!$ an, und (XXX; 22) geht in eine ganze rationale Funktion vom Grade $n - 1$ über, also in die allgemeine Lösung von $s^{(n)} = 0$.

251. Einige Beispiele

Die im vorigen Abschnitt dargelegte Theorie soll durch einige einfache Beispiele aus der Dynamik erläutert werden, in denen die Differentialgleichungen die Form (XXX; 15) haben oder durch Übergang auf eine geeignete unabhängige Variable erhalten:

1. Die Bewegungsgleichungen des relativen Zweikörperproblems nehmen mit der durch (XXX; 3) definierten Pseudozeit $q(t)$ die lineare Form

$$(\text{XXX}; 23) \qquad s''' + \alpha^2 s' = 0, \quad \left(s' = \frac{ds}{dq}; \quad \alpha^2 = \frac{1}{a} = \text{const}\right)$$

an. Diese Gleichung gilt für $s = r, x, y, z, F, G$ (s. Abschnitt 249). Sie hat die Form (XXX; 15) mit $n = 3$ und

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \alpha^2; \quad a_3 = 0.$$

Die Anfangsbedingungen für $q = 0$ sind durch die willkürlichen Konstanten s_0, s_0', s_0'' gegeben. Für die Erzeugende $\varphi = \varphi_0$ der Folge der Hilfsfunktionen $\varphi_\nu(q)$, die eine partikuläre Lösung von (XXX; 23) ist, gelten die speziellen Anfangsbedingungen, die durch die Vorschrift (XXX; 18) zu

$$(\text{XXX}; 24) \qquad \varphi(0) = 1; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \varphi''(0) = -\alpha^2$$

bestimmt werden. Die analytische Form von $\varphi(q)$ erhält man entweder durch fortgesetzte Differentiation von (XXX; 23),

$$\varphi''' + \alpha^2\varphi' = 0; \quad \varphi^{(4)} + \alpha^2\varphi'' = 0; \quad \varphi^{(5)} + \alpha^2\varphi''' = 0; \quad \ldots,$$

woraus für $q = 0$ und $n \geqq 1$

$$\varphi^{(2n-1)}(0) = 0; \quad \varphi^{(2n)}(0) = (-1)^n\alpha^{2n},$$

also

$$\varphi(q) = \varphi(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!}\varphi^{(2\nu)}(0) = 1 - \frac{\alpha^2 q^2}{2!} + \frac{\alpha^4 q^4}{4!} - \cdots = \cos(\alpha q)$$

folgt. Oder man geht von der aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannten allgemeinen Lösung

$$\varphi(q) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos \alpha q + \gamma_2 \sin \alpha q$$

aus und erhält wegen (XXX; 24)

$$\varphi(0) = \gamma_0 + \gamma_1 = 1; \quad \varphi'(0) = \gamma_2\alpha = 0; \quad \varphi''(0) = -\gamma_1\alpha^2 = -\alpha^2$$

oder $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, woraus $\varphi(q) = \cos \alpha q$ folgt. Die Hilfsfunktionen (XXX; 16) sind dann mit den in Abschnitt 249 definierten c-Funktionen identisch, deren zentrale Stellung in der Theorie der Zweikörperbewegung in Kapitel V ausführlich dargelegt worden ist.

Die allgemeine Lösung von (XXX; 23) ist dann nach (XXX; 22)

$$s(q) = c_0 s_0 + c_1 q s_0' + c_2 q^2 (s_0'' + \alpha^2 s_0)$$

oder, wenn man wegen (XXX; 12) $c_0 = 1 - \alpha^2 q^2 c_2$ setzt,

$$s(q) = s_0 + c_1 q s_0' + c_2 q^2 s_0'', \quad \left(s_0^{(n)} = s^{(n)}(0)\right),$$

übereinstimmend mit der in Abschnitt 249 abgeleiteten Formel.

2. Eine aus zwei periodischen Schwingungen verschiedener Frequenz zusammengesetzte harmonische Bewegung,

(XXX; 25) $$s(q) = A_0 + A_1 \cos(\alpha_1 q + B_1) + A_2 \cos(\alpha_2 q + B_2),$$

genügt der Differentialgleichung fünfter Ordnung

(XXX; 26) $$s^{(5)} + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, s''' + \alpha_1^2 \alpha_2^2 s' = 0,$$

also der Gleichung (XXX; 15) mit

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = \alpha_1^2 \alpha_2^2; \quad a_5 = 0.$$

Die erzeugende Funktion φ ist dann eine partikuläre Lösung von (XXX; 26) mit den nach der Vorschrift (XXX; 18) abgeleiteten Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 1; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \varphi''(0) = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2); \quad \varphi'''(0) = 0;$$

$$\varphi^{(4)}(0) = \alpha_1^4 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens, wobei dann keine neuen a_i mehr auftreten, ergibt

$$\varphi^{(2n-1)}(0) = 0; \quad \varphi^{(2n)}(0) = (-1)^n \sigma_n(\alpha_1^2, \alpha_2^2),$$

wenn $\sigma_n(x, y)$ die elementarsymmetrischen Funktionen

$$\sigma_n = x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + xy^{n-1} + y^n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

bezeichnen. Es ist demnach

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(0) \frac{q^\nu}{\nu!} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} - \frac{\alpha_1^4 - \alpha_2^4}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \frac{q^2}{2!} + \frac{\alpha_1^6 - \alpha_2^6}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \frac{q^4}{4!} - \cdots =$$

$$= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cos(\alpha_1 q) - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cos(\alpha_2 q).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\lambda_1 = \alpha_1 q; \quad \lambda_2 = \alpha_2 q,$$

so lautet die Folge der φ-Funktionen

$$\varphi_\nu = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} c_\nu(\lambda_1^2) - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} c_\nu(\lambda_2^2),$$

wenn die $c_\nu(\lambda^2)$ die aus der Zweikörpertheorie bekannten c-Funktionen sind. Mit Hilfe der φ_ν ergibt sich nach (XXX; 22) für jede Lösung von (XXX; 26) die geschlossene Form

$$s(q) = \varphi_0 s_0 + \varphi_1 q s_0' + \varphi_2 q^2[s_0'' + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, s_0] +$$
$$+ \varphi_3 q^3[s_0''' + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, s_0'] + \varphi_4 q^4[s_0^{(4)} + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, s_0'' + \alpha_1^2 \alpha_2^2 s_0].$$

Im Gegensatz zum ersten Beispiel ist hier $q = t - t_0$ gewöhnlich die Zeit selbst. Es ist aber denkbar, daß eine periodische Bewegung (etwa die intermediäre Bahn eines gestörten Planeten, die auch gewisse periodische Störungen enthält, oder periodische Lösungen des Dreikörperproblems) durch Übergang auf eine geeignete Pseudozeit $q(t)$ die Form (XXX; 25) oder eine entsprechende mit $n \gtrless 2$ Perioden annimmt. Die sich hier bietenden Möglichkeiten zur Linearisierung, Regularisierung und Uniformisierung himmelsmechanischer Probleme sind bisher noch wenig beachtet worden. Ein interessantes Beispiel für einen Versuch dieser Art ist in Abschnitt 185 beschrieben worden.

3. Die Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung,

$$s''' + 2ks'' + (k^2 + \alpha^2)\, s' = 0 \qquad \text{(XXX; 27)}$$

mit $a_1 = 2k$, $a_2 = k^2 + \alpha^2$, $a_3 = 0$. Die Anfangswerte der erzeugenden Funktion $\varphi(q)$ erhält man aus (XXX; 18):

$$\text{(XXX; 28)} \quad \begin{cases} \varphi(0) = 1, & \\ \varphi'(0) + a_1\varphi(0) = 0; & \varphi'(0) = -2k, \\ \varphi''(0) + a_1\varphi'(0) + a_2\varphi(0) = 0; & \varphi''(0) = 3k^2 - \alpha^2. \end{cases}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens mit $a_4 = a_5 = \cdots = 0$ führt auf

$$\varphi^{(n)}(0) = (-1)^n \left[\binom{n+1}{1} k^n - \binom{n+1}{3} k^{n-2}\alpha^2 + \binom{n+1}{5} k^{n-4}\alpha^4 - \cdots\right]$$

und

$$\varphi(q) = e^{-kq}\left[\cos(\alpha q) - \frac{k}{\alpha}\sin(\alpha q)\right].$$

Diese Funktion ist eine partikuläre Form der allgemeinen Lösung von (XXX; 27),

$$s(q) = e^{-kq}[A_0 + A_1 \cos(\alpha q) + A_2 \sin(\alpha q)],$$

die man erhält, wenn man die Anfangswerte $s(0)$, $s'(0)$, $s''(0)$ mit (XXX; 28) identifiziert.

252. Die Levi-Civitàsche Transformation

Die linearen Differentialgleichungen

$$x''' + \alpha^2 x' = 0; \quad y''' + \alpha^2 y' = 0, \quad \left(\alpha^2 = \frac{1 - r''}{r} = \frac{1}{a} = \text{const}\right)$$

der ungestörten, ebenen, heliozentrischen Planetenkoordinaten in bezug auf die durch (XXX; 3) definierte Pseudozeit q ergeben als erste Integrale

$$\text{(XXX; 29)} \qquad x'' + \alpha^2 x = \text{const}; \quad y'' + \alpha^2 y = \text{const}$$

mit im allgemeinen von Null verschiedenen Integrationskonstanten. Nach (XXX; 4) sind diese Formeln identisch mit

$$\text{(XXX; 29a)} \qquad rx'' - r'x' + x = 0; \quad ry'' - r'y' + y = 0.$$

T. Levi-Cività hat gezeigt, daß man durch Übergang auf neue abhängige Koordinaten ξ, η die Gleichungen (XXX; 29, 29a) in der Form

$$\text{(XXX; 30)} \quad \xi'' + \omega^2 \xi = 0; \quad \eta'' + \omega^2 \eta = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{4a}\right)$$

schreiben kann, in der nun die rechten Seiten Null sind. Das wird durch die Transformation

$$\text{(XXX; 31)} \qquad x = \xi^2 - \eta^2; \quad y = 2\xi\eta; \quad r = \xi^2 + \eta^2$$

erreicht. In der Tat erhält man, wenn man die Ableitungen

$$\text{(XXX; 31a)} \quad \begin{cases} x' = 2(\xi\xi' - \eta\eta'); & y' = 2(\xi\eta' + \eta\xi'), \\ x'' = 2(\xi\xi'' - \eta\eta'' + \xi'^2 - \eta'^2); & y'' = 2(\xi\eta'' + \eta\xi'' + 2\xi'\eta'), \\ r' = 2(\xi\xi' + \eta\eta') \end{cases}$$

in (XXX; 29a) einführt und auf Grund von (XXX; 30) versuchsweise

$$\xi\xi'' - \eta\eta'' = -\omega^2(\xi^2 - \eta^2),$$
$$\xi\eta'' + \eta\xi'' = -2\omega^2\xi\eta$$

setzt, nach elementarer Rechnung

$$\xi'' + \omega^2\xi = (\xi^2 - \eta^2)\,[1 - 2(\xi'^2 + \eta'^2) - 2r\omega^2] = 0,$$
$$\eta'' + \omega^2\eta = 2\xi\eta[1 - 2(\xi'^2 + \eta'^2) - 2r\omega^2] = 0,$$

da die Ausdrücke in den eckigen Klammern identisch verschwinden. Man beweist das folgendermaßen: Nach (XXX; 5) ist im x, y-System das Quadrat

der Geschwindigkeit in bezug auf q (wenn die Einheiten der Zeit und der Masse so gewählt werden, daß $\varkappa^2 = 1$ ist)

$$x'^2 + y'^2 = r(r'' + 1) = r(2 - r\alpha^2). \tag{XXX; 32}$$

Die Transformationsformeln (XXX; 31, 31a) ergeben aber

$$x'^2 + y'^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)\,(\xi'^2 + \eta'^2) = 4r(\xi'^2 + \eta'^2),$$

woraus

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \frac{1}{2} - \frac{r\alpha^2}{4} = \frac{1}{2} - r\omega^2 \tag{XXX; 32a}$$

folgt, was zu beweisen war.

Die Levi-Civitàsche Transformation (XXX; 31) ändert sich nicht, wenn man ξ, η mit $-\xi, -\eta$ vertauscht. Durch sie wird also die Bewegung in der x, y-Ebene, die längs eines Kegelschnitts mit einem Brennpunkt im Koordinatenursprung erfolgt, zweimal in der ξ, η-Ebene abgebildet. Legt man das Koordinatensystem in der x, y-Ebene so, daß die positive x-Achse nach dem Perihel der Bahn zeigt, und führt man Polarkoordinaten r, v durch

$$x = r\cos v; \quad y = r\sin v \tag{XXX; 33}$$

ein, so gilt

$$r(1 + e\cos v) = r + ex = p,$$

wenn a die große Halbachse, e die Exzentrizität und $p = a(1 - e^2)$ den Parameter der Bahn bezeichnet. Wegen (XXX; 31) ist dann

$$\xi^2 + \eta^2 + e(\xi^2 - \eta^2) = a(1 - e^2)$$

oder

$$\xi^2(1 + e) + \eta^2(1 - e) = a(1 + e)\,(1 - e).$$

Die Bahngleichung in der Form

$$\frac{\xi^2}{a(1 - e)} + \frac{\eta^2}{a(1 + e)} = 1$$

ist für $a > 0$, $e < 1$ die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{a(1 - e)}$ bzw. $\sqrt{a(1 + e)}$.

Während also, mit q als Pseudozeit, der Körper in der x, y-Ebene (Abb. 15a) eine harmonische Bewegung $A \to P \to A$ mit der Apheldistanz $a(1 + e)$ und der Periheldistanz $a(1 - e)$ ausführt, erfolgt die entsprechende Bewegung in der ξ, η-Ebene (Abb. 15b) zweimal, mit zwei Aphelien $\xi = 0, \eta = \pm\sqrt{a(1 + e)}$ und zwei Perihelien $\eta = 0$, $\xi = \pm\sqrt{a(1 - e)}$. Im Fall einer Parabelbahn mit von Null verschiedener Periheldistanz σ degeneriert die Ellipse in zwei zur η-Achse parallele Gerade $\xi = \pm\sigma$. Die geradlinige Fallbewegung ($\sigma = 0$) verläuft längs der η-Achse als harmonische Schwingung zwischen den beiden

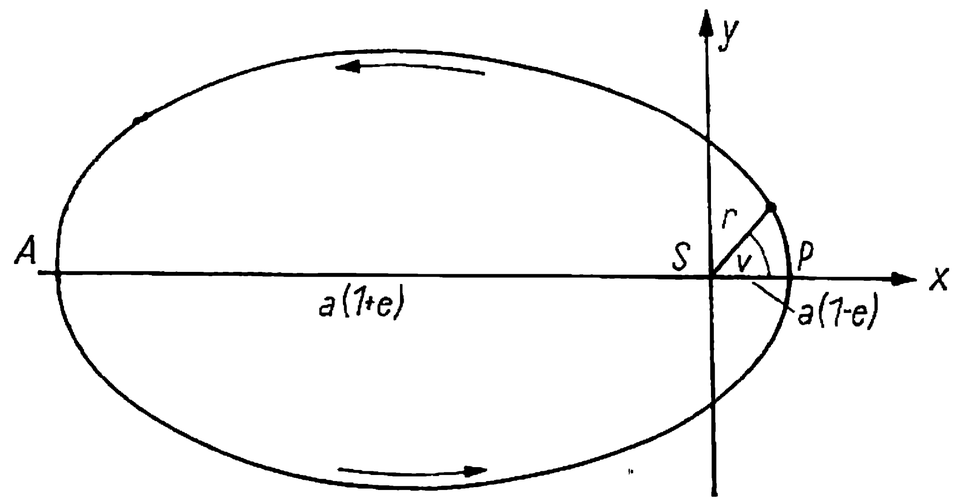

Abb. 15a. Elliptische Bewegung in der x, y-Ebene

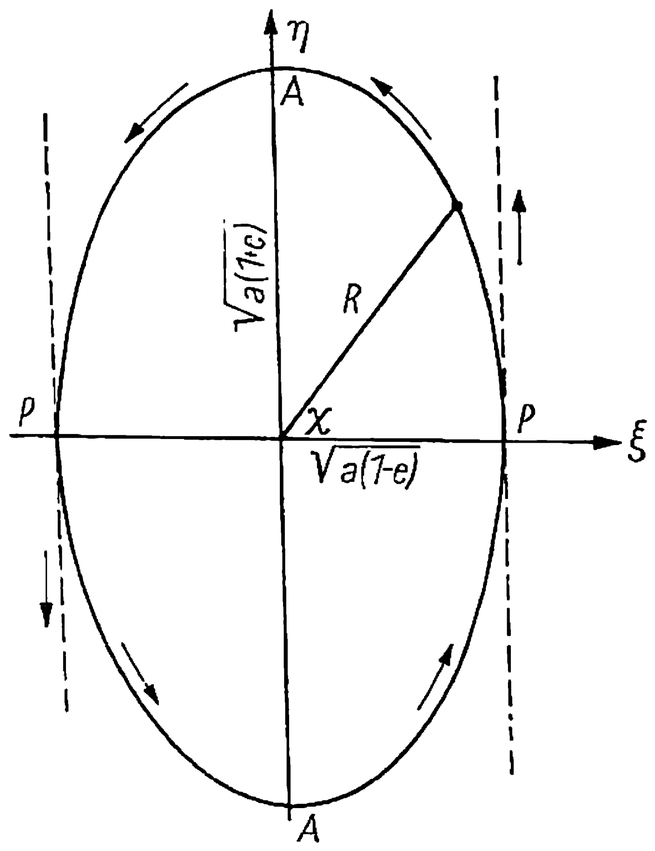

Abb. 15b. Elliptische (———) und parabolische (— — —) Bewegung in LEVI-CIVITÀschen Koordinaten

Aphelien, die auch (Fall aus dem Unendlichen) im unendlich fernen Punkt der η-Achse liegen oder (im hyperbolischen Fall der geradlinigen Bewegung, in dem die Fallgeschwindigkeit auch im Unendlichen noch positiv ist) imaginär sein können.

Führt man neben (XXX; 33) auch in der ξ, η-Ebene Polarkoordinaten R, χ durch

$$\xi = R\cos\chi; \quad \eta = R\sin\chi$$

ein, so ist

$$\tan v = \frac{y}{x} = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{2\tan\chi}{1 - \tan^2\chi} = \tan 2\chi; \quad R^2 = \xi^2 + \eta^2 = r,$$

also

$$\chi = \frac{v}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{v}{2} + \pi; \quad R = \sqrt{r}.$$

Ein Umlauf des Planeten in der x, y-Ebene ($0 \leqq v \leqq 2\pi$) entspricht also in der ξ, η-Ebene einem halben Umlauf ($0 \leqq \chi \leqq \pi$ oder $\pi \leqq \chi \leqq 2\pi$).

Vergleicht man die Geschwindigkeitsformeln (XXX; 32) und (XXX; 32a), so findet man, daß im x, y-System bei geradliniger Bewegung ($r = -x$) der fallende Körper das Attraktionszentrum ($r = 0$) mit der Geschwindigkeit Null erreicht und dann die entgegengesetzte Richtung einschlägt. Im ξ, η-System durchläuft er das Zentrum ohne Umkehr der Bewegungsrichtung mit der Impaktgeschwindigkeit $1/\sqrt{2}$. In der parabolischen Bewegung ($a = \infty$, $\omega = 0$) ist die Geschwindigkeit *konstant* gleich $1/\sqrt{2}$. Die LEVI-CIVITÀsche Transformation in Verbindung mit der Pseudozeit q bewirkt also bei Parabelbahnen, daß die (insbesondere bei kleinen Periheldistanzen) scharfe Krümmung im Perihel, die rechnerisch immer unvorteilhaft ist, ganz und bei parabelnahen Bahnen fast ganz entfällt. Ebenso verschwindet bei geradliniger Bewegung die (bei q als Zeitvariable allerdings unwesentliche) Singularität beim Impakt.

253. Lösung des Zweikörperproblems in Levi-Civitàschen Koordinaten

Die ungestörten Bewegungsgleichungen (XXX; 30) eines Planeten in LEVI-CIVITÀschen Koordinaten,

$$\text{(XXX; 34)} \qquad \xi'' + \omega^2 \xi = 0; \quad \eta'' + \omega^2 \eta = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{4a}\right)$$

lassen sich nach der in Abschnitt 250 beschriebenen Methode mittels der Hilfsfunktionen $c_\nu(\omega^2 q^2)$ integrieren. Man erhält nach (XXX; 22) mit $a_1 = 0$, $a_2 = \omega^2$ für $s = \xi, \eta$

$$\text{(XXX; 35)} \qquad s(q) = c_0 s_0 + c_1 q s_0'$$

als allgemeine Lösung mit den Anfangsbedingungen $s_0 = s(0)$, $s_0' = s'(0)$, also explizite

$$s(q) = s_0 \cos \omega q + s_0' \frac{\sin \omega q}{\omega}.$$

Diese Lösung geht für $\omega \to 0$ ohne Singularität in die parabolische,

$$s(q) = s_0 + s_0' q,$$

über.

Zur Berechnung der Zeit t als Funktion von q dient wie im x, y-System die Hauptgleichung (XXX; 14)

$$t - t_0 = r_0 q + r_0' c_2 q^2 + r_0'' c_3 q^3,$$

in der aber die c-Funktionen $c_\nu(\alpha^2 q^2) = c_\nu(4\omega^2 q^2)$ das vierfache Argument wie in (XXX; 34) haben. Wie in Abschnitt 252 bewiesen wurde, ist ja die mittlere Bewegung im x, y-System doppelt so groß wie im System der LEVI-CIVITÀschen Koordinaten ($\alpha = 2\omega$).

Es soll nun der Zusammenhang zwischen den Anfangsbedingungen ξ_0, η_0; ξ'_0, η_0', d. h. den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten für $t = t_0$, und den Integralen der Differentialgleichungen (XXX; 34) bzw. den Elementen der Bahnbewegung untersucht werden. Aus (XXX; 34) folgen die Beziehungen

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \omega^2(\xi\xi' + \eta\eta') = 0,$$

$$\xi\eta'' - \eta\xi'' = 0,$$

die integrierbar sind und

(XXX; 36) $$\xi'^2 + \eta'^2 + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) = \varepsilon = \text{const}, \quad \text{(Energiesatz)}$$

(XXX; 37) $$\xi\eta' - \eta\xi' = \text{const}, \quad \text{(Flächensatz)}$$

liefern. Aus $r = \xi^2 + \eta^2$ und (XXX; 34) folgt

$$r'' = 2(\xi'^2 + \eta'^2 + \xi\xi'' + \eta\eta'') = 2[\xi'^2 + \eta'^2 - \omega^2(\xi^2 + \eta^2)],$$

also für das Geschwindigkeitsquadrat im ξ, η-System

$$W^2 = \xi'^2 + \eta'^2 = \frac{r''}{2} + \omega^2 r.$$

Nach (XXX; 36) ist also die Energiekonstante

$$\varepsilon = \frac{r''}{2} + 2\omega^2 r = \frac{1}{2},$$

da nach (XXX; 7) $r'' = 1 - \alpha^2 r = 1 - 4\omega^2 r$ ist.

Der Flächensatz lautet im x, y-System (mit $\varkappa^2 = 1$)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{1}{r}(xy' - yx') = \sqrt{p} = \sqrt{a(1 - e^2)},$$

also wegen (XXX; 31, 31a) in Levi-Cività'schen Koordinaten

$$\sqrt{p} = \frac{2}{r}[(\xi^2 - \eta^2)(\xi\eta' + \eta\xi') - 2\xi\eta(\xi\xi' - \eta\eta')] = 2(\xi\eta' - \eta\xi')$$

oder

(XXX; 38) $$\xi\eta' - \eta\xi' = \frac{1}{2}\sqrt{p}.$$

Schreibt man für $t = t_0$

$$W_0^2 = \xi_0'^2 + \eta_0'^2; \qquad r_0 = \xi_0^2 + \eta_0^2,$$

so erhält man die Konstanten a, e, die die Form der Bahn bestimmen, auf folgende Weise: Aus (XXX; 36) folgt mit $\varepsilon = 1/2$

$$W_0^2 = \frac{1}{2} - \omega^2 r_0$$

oder

$$\text{(XXX; 39)} \qquad \omega^2 = \frac{1}{4a} = \frac{\frac{1}{2} - {W_0}^2}{r_0} = \frac{1 - 2\,({\xi_0}'^2 + {\eta_0}'^2)}{2({\xi_0}^2 + {\eta_0}^2)}$$

und aus (XXX; 38)

$$\frac{p}{4} = (\xi_0 {\eta_0}' - \eta_0 {\xi_0}')^2.$$

Addiert man zu dieser Gleichung

$$\frac{{r_0}'^2}{4} = (\xi_0 {\xi_0}' + \eta_0 {\eta_0}')^2,$$

so ergibt sich

$$\text{(XXX; 40)} \qquad \frac{1}{4}\,(p + {r_0}'^2) = ({\xi_0}^2 + {\eta_0}^2)\,({\xi_0}'^2 + {\eta_0}'^2) = r_0 {W_0}^2.$$

Aus (XXX; 39, 40) erhält man die Formeln

$$\text{(XXX; 41)} \quad \begin{cases} a = \dfrac{r_0}{2(1 - 2{W_0}^2)}; \quad p = 4 r_0 {W_0}^2 - {r_0}'^2, \\ e^2 = 1 - \dfrac{p}{a} = 1 - \dfrac{2}{r_0}\,(1 - 2{W_0}^2)\,(4 r_0 {W_0}^2 - {r_0}'^2) = \\ \quad = (1 - 4{W_0}^2)^2 + 2\,\dfrac{{r_0}'^2}{r_0}\,(1 - 2{W_0}^2), \end{cases}$$

aus denen man folgende für Kegelschnittsbahnen verschiedenen Typs gültige Regeln abliest:

$$\text{(XXX; 42)} \quad \begin{cases} \text{a) } {W_0}^2 < \dfrac{1}{2} \text{ für Ellipsen } (a > 0), \\ \quad {W_0}^2 = \dfrac{1}{2} \text{ für Parabeln } (a \to \infty), \\ \quad {W_0}^2 > \dfrac{1}{2} \text{ für Hyperbeln } (a < 0); \\ \text{b) da } p \geqq 0 \text{ ist, so ist } {r_0}'^2 < 4 r_0 {W_0}^2 \text{ für } p > 0, \\ \quad {r_0}'^2 = 4 r_0 {W_0}^2 \text{ für } p = 0 \text{ (Fallbewegung)}; \\ \text{c) } e = 1 \text{ ist nur möglich, wenn wenigstens eine der Bedingungen} \\ \quad {W_0}^2 = \dfrac{1}{2} \text{ (Parabeln), } p = 0 \text{ (geradlinige Bahnen) erfüllt ist;} \\ \text{d) } e = 0 \text{ (Kreisbahnen) ist nur möglich, wenn gleichzeitig} \\ \quad {W_0}^2 = \dfrac{1}{4}, \quad {r_0}' = 0 \text{ erfüllt ist.} \end{cases}$$

Ein drittes Integral bestimmt die Lage der Apsidenrichtungen in dem einmal gewählten ξ, η-System. Sind wieder ξ_0, η_0 die Koordinaten des Planeten für $t = t_0$, so wird sich der Ortsvektor um einen Winkel ωs drehen müssen, um in die Apsidenrichtung zu gelangen. Seien ξ, η die Koordinaten im Perihel (oder Aphel), so ist dort

$$r' = 2\,(\xi\xi' + \eta\eta') = 0.$$

Nun gilt aber für $r(q)$, das der Differentialgleichung (XXX; 8) genügt, nach (XXX; 10)

$$r(q) = r_0 + c_1 q r_0' + c_2 q^2 r_0'',$$

$$r'(q) = c_0 r_0' + c_1 q r_0'', \qquad [c_\nu = c_\nu\,(4\omega^2 q^2)].$$

Die Bedingung $r' = 0$ liefert also

$$0 = r_0' \cos 2\omega s + \frac{r_0''}{2\omega} \sin 2\omega s$$

oder

$$\tan 2\,\omega s = \frac{2 \tan \omega s}{1 - \tan^2 \omega s} = -\frac{2 r_0' \omega}{r_0''} = -\frac{r_0'}{r_0'' \sqrt{a}},$$

woraus

$$\tan \omega s = \frac{r_0'' \sqrt{a}}{r_0'} \pm \frac{1}{r_0'} \sqrt{r_0''^2 a + r_0'^2}$$

folgt. Nun ist aber $r'' = 1 - r/a$ und nach (V; 20)

$$r'^2 = r^2 \dot{r}^2 = 2r - \frac{r^2}{a} - a\,(1 - e^2) = a\left[e^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2\right],$$

also $r_0''^2 a + r_0'^2 = a e^2$ und daher

$$\tan \omega s = \frac{\sqrt{a}}{r_0'}\,(r_0'' \pm e) = \frac{\sqrt{a}}{r_0'}\left(1 \pm e - \frac{r_0}{a}\right) =$$

$$= \pm \frac{a(1 \pm e) - r_0}{\sqrt{[a(e+1) - r_0]\,[a(e-1) + r_0]}}.$$

Es gibt also die Lösungen

$$\tan \omega s_1 = \pm \sqrt{\frac{a(1+e) - r_0}{r_0 - a(1-e)}}; \quad \tan \omega s_2 = \mp \sqrt{\frac{r_0 - a(1-e)}{a(1+e) - r_0}} = -\cot \omega s_1$$

für die beiden Winkel, die zu den Apsiden führen.

Ihre einfachste Form nehmen die oben abgeleiteten Beziehungen an, wenn die Anfangszeit t_0 auf den Durchgang durch die Apsiden fällt. Dann ist $r_0' = 0$ und nach (XXX; 41)

$$p = 4 r_0 W_0^2; \qquad e = |1 - 4 W_0^2|.$$

Für elliptische Bahnen ist nach (XXX; 42a) $W_0^2 < 1/2$, also

$$e = 1 - 4W_0^2, \quad \text{wenn} \quad W_0^2 \leqq \frac{1}{4} \quad (t_0 \text{ im Aphel}),$$

$$e = 4W_0^2 - 1, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{4} \leqq W_0^2 < \frac{1}{2} \quad (t_0 \text{ im Perihel}).$$

Die Formeln für t_0 im Perihel,

$$a = \frac{r_0}{2\,(1 - 2W_0^2)}; \quad e = 4W_0^2 - 1,$$

gelten für alle Kegelschnittstypen.

254. Spinoren

Es ist nicht ohne weiteres möglich, die in den Abschnitten 252, 253 vorgetragenen Gedankengänge auf Bewegungen im dreidimensionalen Raum auszudehnen. Versuche, die hierbei auftretenden Schwierigkeiten zu überwinden, stammen von P. KUSTAANHEIMO[1]). Er hat als erster erkannt, daß ein in der Atomphysik verwendetes mathematisches Hilfsmittel, die „Spinoren“[2]), hierfür geeignet sind.

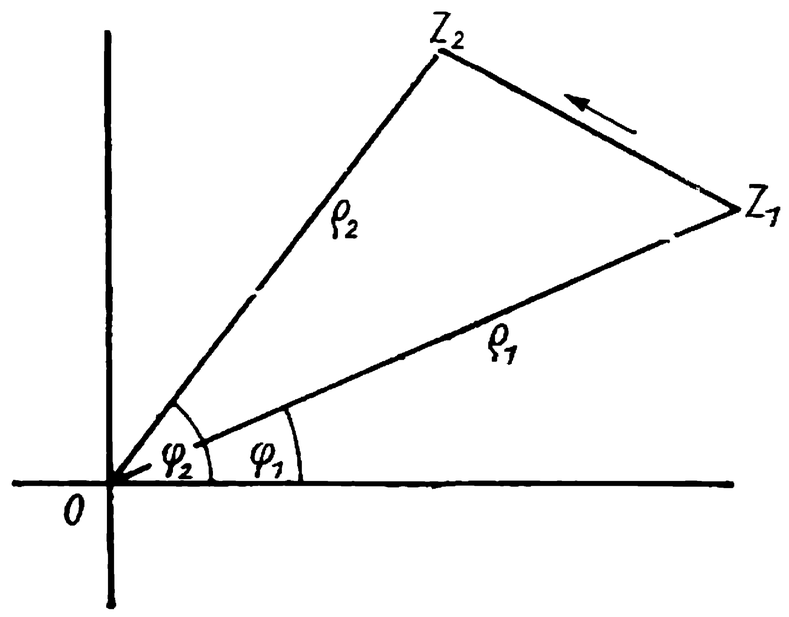

Abb. 16. Spinor als Vektor in der komplexen Ebene

Spinoren lassen sich auf verschiedene Weise definieren:

1. geometrisch (s. Abb. 16) als Vektoren in der komplexen Ebene, die von einer komplexen Zahl z_1 zu einer anderen, z_2, führen,
2. algebraisch als Vektoren mit zwei komplexen Koordinaten,

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S} = (z_1, z_2),$$

---

[1]) P. KUSTAANHEIMO, Spinor regularization of the KEPLER motion. Publ. Astron. Observ. Helsinki No. 102 (1964).

[2]) Spinoren werden bei der mathematischen Beschreibung des „spin“, d. h. der Rotation von Elementarteilchen, verwendet.

3. als Vektoren im vierdimensionalen Raum (R_4),

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},$$

4. als quadratische Matrizen

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 u_4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} u_1 u_3 \\ u_2 u_4 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $z_1 = u_1 + iu_2$, $z_2 = u_3 + iu_4$, so erkennt man, daß alle diese Definitionen dasselbe besagen. P. KUSTAANHEIMO[1]) hat in einer groß angelegten Arbeit gezeigt, daß man, ähnlich wie mit Vektoren und Matrizen, auch mit Spinoren algebraische Operationen ausführen kann. Hier genügt es, diejenigen Anwendungen der Spinoralgebra, die für die Himmelsmechanik interessant sind, auf die bekannten Regeln der Vektor- und Matrizenrechnung zurückzuführen.

Es sei ein Spinor als vierdimensionaler Vektor mit den Koordinaten u_i ($i = 1, \ldots, 4$) gegeben, und es seien

$$z_1 = u_1 + iu_2; \quad z_2 = u_3 + iu_4$$

zwei komplexe Zahlen und

$$\bar{z}_1 = u_1 - iu_2; \quad \bar{z}_2 = u_3 - iu_4$$

ihre Konjugierten. Ein Vektor r im euklidischen Raum (R_3) mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 läßt sich also mittels einer geeigneten Transformation nur dann durch die Koordinaten u_i eines Spinors eindeutig ausdrücken, wenn diese einer zusätzlichen Bedingung unterworfen sind.

Man definiere etwa vier reelle Größen x_1, x_2, x_3, r als Funktionen der Spinorkoordinaten u_i durch die Gleichungen

$$\text{(XXX; 43)} \qquad \begin{cases} r + x_1 = 2z_1\bar{z}_1 = 2({u_1}^2 + {u_2}^2), \\ r - x_1 = 2z_2\bar{z}_2 = 2({u_3}^2 + {u_4}^2), \\ x_2 + ix_3 = 2z_1\bar{z}_2 = 2[u_1u_3 + u_2u_4 + i(u_2u_3 - u_1u_4)], \\ x_2 - ix_3 = 2z_2\bar{z}_1 = 2[u_1u_3 + u_2u_4 - i\,(u_2u_3 - u_1u_4)], \end{cases}$$

aus denen

$$\text{(XXX; 44)} \qquad \begin{cases} r = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = \sum_{i=1}^{4} {u_i}^2, \\ x_1 = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 - ({u_3}^2 + {u_4}^2), \\ x_2 = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2(u_1u_3 + u_2u_4), \\ x_3 = i\,(z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2) = 2(u_2u_3 - u_1u_4) \end{cases}$$

---

[1]) P. KUSTAANHEIMO, Spinor ring algebra. Publ. Astron. Observ. Helsinki No. 109 (1965).

folgt. Diese Größen sind aber nicht unabhängig voneinander, denn es ist ja

$$(r + x_1)(r - x_1) - (x_2 + ix_3)(x_2 - ix_3) = r^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 =$$

$$= 4(z_1\bar{z}_1 \cdot z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 \cdot z_2\bar{z}_1) = 0$$

und daher $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ der Betrag des Vektors $\mathfrak{r}(x_1, x_2, x_3)$ in R_3. Damit also R_3 auf den Spinorraum R_4 eineindeutig abgebildet werden kann, muß der Spinor eine zusätzliche Bedingung erfüllen. Mit anderen Worten: Jeder Spinor entspricht einem Vektor infolge der eindeutigen Beziehungen (XXX; 44), aber jedem Vektor entspricht eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit von Spinoren, aus denen man, um die Vieldeutigkeit auszuschalten, ein Individuum auswählen muß! Man hat es also noch in der Hand, diese Auswahl so zu treffen, daß sie für den jeweiligen Zweck geeignet ist.

Am einfachsten übersieht man diese Verhältnisse, wenn man die geometrische Definition des Spinors als Pfeil in der komplexen Ebene benutzt. Setzt man nämlich

$$z_1 = \varrho_1 e^{i\varphi_1}; \quad z_2 = \varrho_2 e^{i\varphi_2}; \quad \bar{z}_1 = \varrho_1 e^{-i\varphi_1}; \quad \bar{z}_2 = \varrho_2 e^{-i\varphi_2},$$

so erhält man aus (XXX; 44)

$$\text{(XXX; 45)} \qquad \begin{cases} r_1 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2; & x_2 = 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ x_1 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2; & x_3 = -2\varrho_1\varrho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases}$$

Die drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind also Funktionen von ϱ_1, ϱ_2 und $\varphi_2 - \varphi_1$ und hängen daher lediglich von Gestalt und Umlaufsinn des Dreiecks $0z_1z_2$, nicht aber von dessen Lage in der komplexen Ebene ab (Abb. 16, S. 301). Diese Lage bestimmt der Winkel φ_1 (oder φ_2), der jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 2π annehmen oder als Funktion der Zeit beliebig definiert werden darf. Sei $\mathfrak{S}^*$ irgendein Spinor dieser Mannigfaltigkeit, so erhält man die Gesamtheit aller Spinoren, die dem Vektor (x_1, x_2, x_3) zugeordnet sind, in der Form $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^* e^{i\varphi}$ mit $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, also durch eine beliebige Drehung des Dreiecks $0z_1z_2$ um den Nullpunkt.

Für zweidimensionale Vektoren geht die Spinordarstellung in die durch Levi-Civitàsche Koordinaten über. Denn setzt man $x_3 = 0$, so wird nach (XXX; 45) $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ oder $\pm\pi$, und man erhält

$$x_1 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2; \qquad x_2 = \pm 2\varrho_1\varrho_2.$$

Die beiden komplexen Zahlen z_1, z_2 liegen dann auf einer durch den Nullpunkt führenden Geraden, entweder auf der gleichen Seite vom Nullpunkt ($\varphi_2 - \varphi_1 = 0$) oder auf entgegengesetzten ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$), und φ_1 (oder φ_2) bestimmt die Neigung dieser Geraden gegen die reelle Achse. Da dieser Winkel willkürlich wählbar ist, darf man ihn gleich Null setzen. Dann sind z_1 und z_2 reell und ihre Beträge mit ϱ_1 und ϱ_2 identisch.

Die gestörte Bewegung eines Himmelskörpers erfolgt im allgemeinen im dreidimensionalen Raum, wenn nämlich die störenden Kräfte Komponenten

senkrecht auf der Ebene der intermediären Bahn besitzen. Zur Vorbereitung der Aufgabe, die Bewegungsgleichungen gestörter Planeten in Spinorform auszudrücken, wird es nützlich sein, zunächst das ungestörte Problem zu betrachten, aber nun im Raum. Wir werden also die Differentialgleichungen

$$\text{(XXX; 46)} \quad \ddot{x}_1 + \varkappa^2 \frac{x_1}{r^3} = 0; \quad \ddot{x}_2 + \varkappa^2 \frac{x_2}{r^3} = 0; \quad \ddot{x}_3 + \varkappa^2 \frac{x_3}{r^3} = 0$$

der räumlichen KEPLER-Bewegung in Spinorform schreiben müssen, wobei die Elemente z_1, z_2 des Spinors eine Bedingung erfüllen müssen, damit die Zuordnung Spinor—Vektor eindeutig wird, und man wird diese Bedingung so formulieren, daß die entstehenden Formeln möglichst einfach werden.

Die Umformung der Gleichungen (XXX; 46) in die ihnen entsprechende Spinorgleichung ist elementar, aber recht umständlich, wenn man nicht die Regeln der Spinoralgebra benutzt, deren Kenntnis hier nicht vorausgesetzt werden soll. Am einfachsten gelangt man zum Ziel, wenn man die vier elementaren Integrale des relativen Zweikörperproblems (mit $\varkappa^2 = 1$),

$$\text{(XXX; 47)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - \dfrac{2}{r} = -\dfrac{1}{a} = \text{const}, \\ x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2 = \text{const}, \\ x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3 = \text{const}, \\ x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = \text{const}, \end{cases}$$

mit Hilfe der Beziehungen (XXX; 44) in die Spinorform überträgt.

Führt man statt der Zeit t eine neue unabhängige Variable $q(t)$ ein und bezeichnet Ableitungen nach q durch Striche, so folgt nach Differenzieren der Ausdrücke (XXX; 44)

$$\text{(XXX; 48)} \quad \begin{cases} r' = 2(z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2') + P = 2(\bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2') - P, \\ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 4r(z_1'\bar{z}_1' + z_2'\bar{z}_2') + P^2, \\ x_2 x_3' - x_3 x_2' = 2i[r\,(z_1\bar{z}_1' - \bar{z}_1 z_1') + z_1\bar{z}_1 P], \\ x_3 x_1' - x_1 x_3' + i(x_1 x_2' - x_2 x_1') = 2i[r(z_1\bar{z}_2' - \bar{z}_2 z_1') + z_1\bar{z}_2 P], \\ x_3 x_1' - x_1 x_3' - i(x_1 x_2' - x_2 x_1') = 2i[r(z_2\bar{z}_1' - \bar{z}_1 z_2') + z_2\bar{z}_1 P], \end{cases}$$

wenn

$$\text{(XXX; 49)} \qquad P = \bar{z}_1 z_1' - z_1\bar{z}_1' + \bar{z}_2 z_2' - z_2\bar{z}_2'$$

gesetzt wird. Die beiden letzten Gleichungen (XXX; 48) sind identisch; sie gehen auseinander hervor, wenn man die komplexen Größen z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, i, P durch ihre Konjugierten ersetzt. Diese Gleichungen nehmen ihre einfachste Form an, wenn man $P = 0$ setzt. Diese Bedingung macht die Zuordnung des vierdimensionalen Spinors zum dreidimensionalen Vektor umkehrbar-eindeutig, und sie steht auch nicht mit den Bedingungen für den Fall der ebenen

Bewegung in Widerspruch, denn dann sind ja die z_i reell, und es ist $\bar{z}_i = z_i$, woraus $P = 0$ folgt.

Mit $P = 0$, und wenn man, wie früher, als regularisierende Variable $q(t)$ durch $\dot{q} = 1/r$ einführt, so daß $x' = \dot{r}x, \ldots$ gilt, erhält man für die vier Integrale (XXX; 47)

$$(\text{XXX};\ 50)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{r^2} - \dfrac{2}{r} = -\dfrac{1}{a} \quad \text{oder} \\ \dfrac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{4r} - \dfrac{1}{2} = z_1'\bar{z}_1' + z_2'\bar{z}_2' - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{r}{4a}, \\ \dfrac{1}{r}\,(x_2x_3' - x_3x_2') = 2i(z_1\bar{z}_1' - \bar{z}_1z_1') = \text{const}, \\ \dfrac{1}{r}\,[x_3x_1' - x_1x_3' + i(x_1x_2' - x_2x_1')] = 2i(z_1\bar{z}_2' - \bar{z}_2z_1') = \text{const}, \\ \dfrac{1}{r}\,[x_3x_1' - x_1x_3' - i(x_1x_2' - x_2x_1')] = 2i(z_2\bar{z}_1' - \bar{z}_1z_2') = \text{const}. \end{cases}$$

Differenziert man diese Gleichungen nach q, so ergibt sich

$$(\text{XXX};\ 51)\quad \begin{cases} z_1''\bar{z}_1' + z_2''\bar{z}_2' + \bar{z}_1''z_1' + \bar{z}_2''z_2' = -\dfrac{r'}{4a}, \\ \bar{z}_1''z_1 - z_1''\bar{z}_1 = 0, \\ \bar{z}_2''z_1 - z_1''\bar{z}_2 = 0, \\ z_2''\bar{z}_1 - \bar{z}_1''z_2 = 0. \end{cases}$$

Aus den drei letzten dieser Gleichungen leitet man

$$(\text{XXX};\ 52)\qquad \bar{z}_1'' = z_1''\,\frac{\bar{z}_1}{z_1};\quad \bar{z}_2'' = z_1''\,\frac{\bar{z}_2}{z_1};\quad z_2'' = \bar{z}_1''\,\frac{z_2}{\bar{z}_1} = z_1''\,\frac{z_2}{z_1}$$

ab, und die dritte dieser Beziehungen liefert den Flächensatz

$$(\text{XXX};\ 53)\qquad z_1z_2'' - z_2z_1'' = 0;\qquad z_1z_2' - z_2z_1' = \text{const}$$

in Spinorform. Eliminiert man ferner aus der ersten Gleichung (XXX; 51) $\bar{z}_1''$, $\bar{z}_2''$, z_2'' durch (XXX; 52) und multipliziert mit z_1, so erhält man

$$z_1''(z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2' + \bar{z}_1z_1' + \bar{z}_2z_2') = -z_1\,\frac{r'}{4a}.$$

Da der Klammerausdruck gleich r' ist, folgt

$$(\text{XXX};\ 54\text{a})\qquad z_1'' + \frac{1}{4a}\,z_1 = 0,$$

und wenn man mit z_2/z_1 multipliziert und (XXX; 52) berücksichtigt,

$$z_2'' + \frac{1}{4a} z_2 = 0. \tag{XXX; 54b}$$

Diese beiden Gleichungen stellen die Spinorform der Bewegungsgleichungen des räumlichen Zweikörperproblems dar. Schreibt man $\mathfrak{S} = (z_1, z_2)$, so kann man (XXX; 54a, b) in

$$\mathfrak{S}'' + \omega^2 \mathfrak{S} = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{1}{4a}\right)$$

zusammenfassen, und diese Spinorgleichung zerfällt, wenn man $\mathfrak{S}$ als Vektor in R_4 schreibt, in vier Differentialgleichungen

$$u_i'' + \omega^2 u_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{XXX; 55}$$

für die reellen Größen u_i. Diese sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Bedingung

$$\begin{aligned} P &= \bar{z}_1 z_1' - z_1 \bar{z}_1' + \bar{z}_2 z_2' - z_2 \bar{z}_2' = \\ &= 2i(u_1 u_2' - u_2 u_1' + u_3 u_4' - u_4 u_3') = 0 \end{aligned}$$

oder

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' + u_3 u_4' - u_4 u_3' = 0 \tag{XXX; 56}$$

miteinander verknüpft. Es genügt, drei der Differentialgleichungen (XXX; 55) zu lösen, etwa die für u_1, u_2 und u_3. Differenziert man nämlich (XXX; 56) und eliminiert u_1'', u_2'', u_3'' durch (XXX; 55), so folgt

$$u_3 u_4'' + u_4 \omega^2 u_3 = 0 \quad \text{oder} \quad u_4'' + \omega^2 u_4 = 0.$$

Die Differentialgleichung für u_4 ist also mit denen für die übrigen u_i gleichzeitig erfüllt.

255. Das Störungsproblem in Spinorenform

Die Differentialgleichungen der Relativbewegung eines Planeten um seinen Zentralkörper, die durch äußere Kräfte gestört wird, haben, wenn $\mathfrak{p}$ den Ortsvektor des Planeten bezeichnet, die Form

$$\ddot{\mathfrak{p}} + \varkappa^2 \frac{\mathfrak{p}}{r^3} = \mathfrak{q}; \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x_1, x_2, x_3); \quad r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2. \tag{XXX; 57}$$

Wir werden auch hier $\varkappa^2 = k^2(1 + m) = 1$ setzen, was stets durch passende Wahl der Einheiten möglich ist. Die Störbeschleunigung kann verschiedener Art sein. Handelt es sich lediglich um die Anziehung durch andere Massen (Störplaneten), so wird sie durch konservative Kräfte, d. h. durch solche, die Gradienten eines Potentials sind, hervorgerufen. Wir schließen aber den Fall

nichtkonservativer Kräfte nicht aus, z. B. den Luftwiderstand, der die Bewegung eines künstlichen Erdsatelliten in der oberen Atmosphäre beeinflußt.

Die Störbeschleunigung $\mathfrak{q}$ läßt sich (wie in Abschnitt 246) zu jedem Zeitpunkt in Komponenten

$$\text{(XXX; 58)} \qquad \mathfrak{q} = F\mathfrak{p} + G\dot{\mathfrak{p}} + H[\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}]$$

zerlegen, deren Richtungen die des Ortsvektors $\mathfrak{p}$, des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathfrak{p}}$ und des Vektorprodukts beider sind. Das letztere hat die Richtung der Normale auf der instantanen Bahnebene. Die skalaren Funktionen F, G, H sind Funktionen der Koordinaten des gestörten und des störenden Körpers; im Fall nichtkonservativer Kräfte sind sie komplizierter gebaut und können auch die Zeit explizite enthalten.

Zur Regularisation der Bewegung könnte man wieder die Pseudozeit $q(t)$ einführen, die durch $\dot{q} = 1/r$ und $q_0 = 0$ für $t = t_0$ definiert ist. P. KUSTAANHEIMO macht statt dessen den allgemeineren Ansatz

$$\text{(XXX; 59)} \qquad \dot{q} = \frac{A}{r} \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)\, ds\right\},$$

der noch durch geeignete Wahl der Konstante A und der Funktion $K(s)$ variiert werden kann. Bezeichnet man wieder die Ableitungen nach q durch Striche, so folgt aus (XXX; 59)

$$\text{(XXX; 59a)} \quad \begin{cases} t' = \dfrac{r}{A} \exp\left\{\displaystyle\int_{t_0}^{t} K\, ds\right\}, \\ t'' = \dfrac{1}{A} \exp\left\{\displaystyle\int_{t_0}^{t} K\, ds\right\} [r' + rK(t)t'] = \dfrac{r't'}{r} + Kt'^2, \end{cases}$$

ferner für die Ableitungen von $\mathfrak{p}$ nach der Zeit

$$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}'}{t'}; \quad \ddot{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}''}{t'^2} - \frac{\mathfrak{p}'t''}{t'^3}.$$

Setzt man dies in (XXX; 57, 58) ein, so folgt

$$\frac{\mathfrak{p}''}{t'^2} - \frac{\mathfrak{p}'t''}{t'^3} = F\mathfrak{p} + \frac{G}{t'}\mathfrak{p}' + \frac{H}{t'}[\mathfrak{p}\mathfrak{p}'] - \frac{\mathfrak{p}}{r^3}$$

oder

$$\text{(XXX; 60)} \quad \begin{cases} \mathfrak{p}'' = \left(F - \dfrac{1}{r^3}\right)\mathfrak{p}t'^2 + \left[\dfrac{r'}{r} + (G + K)\,t'\right]\mathfrak{p}' + Ht'\,[\mathfrak{p}\mathfrak{p}'], \\ t'' = \dfrac{r't'}{r} + Kt'^2. \end{cases}$$

Das ist ein System achter Ordnung, das den Vektor $\mathfrak{p}$ und das Skalar t als Funktionen von q definiert. Für $A = 1$, $K = 0$ geht die zweite dieser Differentialgleichungen in $t' = r$, die erste in

$$\mathfrak{p}'' = \left(Fr^2 - \frac{1}{r}\right)\mathfrak{p} + \left[\frac{r'}{r} + Gr\right]\mathfrak{p}' + Hr\,[\mathfrak{p}\mathfrak{p}']$$

über.

Die Transformation dieser Differentialgleichungen auf Spinoren erfolgt leicht mit Hilfe der von KUSTAANHEIMO entwickelten Spinorenalgebra. Da wir diese noch wenig eingebürgerte Rechnungsart nicht als bekannt voraussetzen, andererseits die recht umständliche Ausführung der Rechnung nach elementaren Regeln abkürzen wollen, geben wir einen formalen Ansatz für die Lösung vor und beweisen seine Gültigkeit.

Wir behaupten, daß die Differentialgleichungen (XXX; 57) in Spinorenform

(XXX; 61 a)

$$z_j'' = \left(ft'^2 + \frac{P^2}{4r^2}\right)z_j + \left(gt' + \frac{P}{r}\right)\left[z_j' - \frac{1}{2r}(r' + P)\,z_j\right], \qquad (j = 1, 2)$$

geschrieben werden können, wo

$$P = \bar{z}_1 z_1' - z_1\bar{z}_1' + \bar{z}_2 z_2' - z_2\bar{z}_2'; \qquad \bar{P} = -P$$

der bereits eingeführte Ausdruck (XXX; 49) ist und f, g zwei komplexe Funktionen von q bedeuten, über die noch verfügt werden soll. Dann gilt für den konjugiert-komplexen Spinor

(XXX; 61 b) $$\bar{z}_j'' = \left(\bar{f}t'^2 + \frac{P^2}{4r^2}\right)\bar{z}_j + \left(\bar{g}t' - \frac{P}{r}\right)\left[\bar{z}_j' - \frac{1}{2r}(r' - P)\,\bar{z}_j\right].$$

Differenziert man P nach q und führt für z_j'', $\bar{z}_j''$ (XXX; 61 a,b) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} P' = &\left(ft'^2 + \frac{P^2}{4r^2}\right)(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) + \left(gt' + \frac{P}{r}\right)\times \\ &\times\left[\bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2' - \frac{r' + P}{2r}(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)\right] - \left(\bar{f}t'^2 + \frac{P^2}{4r^2}\right)(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) - \\ &- \left(\bar{g}t' - \frac{P}{r}\right)\left[z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2' - \frac{r' - P}{2r}(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)\right]. \end{aligned}$$

Da aber nach (XXX; 44, 48)

$$r = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2; \quad r' + P = 2(\bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2'); \quad r' - P = 2(z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2')$$

ist, folgt

$$P' = (f - \bar{f})t'^2 r.$$

Nun ist aber $P' = 0$, daher $f = \bar{f}$, d. h., f ist reell. Mit $P = 0$, $g = h + ik$ und reellen f, h, k schreibt man (XXX; 61a, b) einfacher

$$\text{(XXX; 62)} \qquad \begin{cases} z_j'' = ft'^2 z_j + (h + ik)\, t' \left(z_j' - \dfrac{r'}{2r}\, z_j \right), \\ \bar{z}_j'' = ft'^2 \bar{z}_j + (h - ik)\, t' \left(\bar{z}_j' - \dfrac{r'}{2r}\, \bar{z}_j \right). \end{cases}$$

Für die x_1-Koordinate lautet die erste Gleichung (XXX; 60)

(XXX; 63)

$$x_1'' = \left(F - \frac{1}{r^3} \right) x_1 t'^2 + \left[\frac{r'}{r} + (G + K)\, t' \right] x_1' + Ht' \left[x_2 x_3' - x_3 x_2' \right].$$

Andererseits folgt aus (XXX; 44) durch zweimaliges Differenzieren

$$x_1'' = \bar{z}_1 z_1'' + z_1 \bar{z}_1'' - \bar{z}_2 z_2'' - z_2 \bar{z}_2'' + 2(z_1' \bar{z}_1' - z_2' \bar{z}_2').$$

Eliminiert man hieraus z_j'', $\bar{z}_j''$ durch (XXX; 62), so folgt

$$\begin{aligned} \text{(XXX; 64)} \quad x_1'' = {} & 2(z_1' \bar{z}_1' - z_2' \bar{z}_2') + 2(z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) \left(ft'^2 - \frac{r'}{2r}\, ht' \right) + \\ & + (\bar{z}_1 z_1' - \bar{z}_2 z_2' + z_1 \bar{z}_1' - z_2 \bar{z}_2')\, ht' + \\ & + i(\bar{z}_1 z_1' - z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2' + z_2 \bar{z}_2')\, kt'. \end{aligned}$$

Nun ist aber wegen (XXX; 44)

$$\text{(XXX; 65a)} \qquad z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 = x_1; \qquad \bar{z}_1 z_1' + z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2' - z_2 \bar{z}_2' = x_1',$$

ferner

$$\bar{z}_1 z_1' - z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2' + z_2 \bar{z}_2' = P - 2(z_1 \bar{z}_1' - z_2 \bar{z}_2').$$

Wegen $P = 0$ und (XXX; 48) ist also

$$\text{(XXX; 65b)} \quad \bar{z}_1 z_1' - z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2' + z_2 \bar{z}_2' = \frac{i}{r} (x_2 x_3' - x_3 x_2').$$

Schließlich ist

$$r' x_1' = 2(\bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2') (\bar{z}_1 z_1' + z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2' - z_2 \bar{z}_2')$$

oder, wenn man (wegen $P = 0$) $\bar{z}_1 z_1' - z_2 \bar{z}_2' = z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2'$ setzt,

$$r' x_1' = 4[\bar{z}_1 z_1' (z_1 \bar{z}_1' - \bar{z}_2 z_2') + \bar{z}_2 z_2' (\bar{z}_1 z_1' - z_2 \bar{z}_2')] = 4[z_1 \bar{z}_1 z_1' \bar{z}_1' - z_2 \bar{z}_2 z_2' \bar{z}_2'].$$

Andererseits folgt aus (XXX; 50)

$$x_1 \frac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{2r} = 2(z_1' \bar{z}_1' + z_2' \bar{z}_2') (z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2),$$

und man erhält nach kurzer Rechnung

$$r' x_1' - x_1 \frac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{2r} = 2r(z_1' \bar{z}_1' - z_2' \bar{z}_2')$$

oder

$$\text{(XXX; 65c)} \quad 2(z_1' \bar{z}_1' - z_2' \bar{z}_2') = \frac{r' x_1'}{r} - \frac{x_1}{2r^2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2).$$

Setzt man (XXX; 65a, b, c) in (XXX; 64) ein, so entsteht

$$x_1'' = \left(2ft'^2 - \frac{hr'}{r} t' - \frac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{2r^2}\right) x_1 + \\ + \left(ht' + \frac{r'}{r}\right) x_1' - \frac{kt'}{r}(x_2 x_3' - x_3 x_2').$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (XXX; 63), so findet man Übereinstimmung, wenn

$$\text{(XXX; 66)} \quad \begin{cases} \text{a)} \; k = -rH, \\ \text{b)} \; h = G + K, \\ \text{c)} \; 2f = F - \dfrac{1}{r^3} + \dfrac{r'}{rt'}(G + K) + \dfrac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{2r^2 t'^2} \end{cases}$$

gesetzt wird. Da diese Formeln von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind, gelten sie gleichermaßen auch für x_2 und x_3. Damit ist der Ansatz (XXX; 61a, b) bewiesen, falls f und $g = h + ik$ durch (XXX; 66) mit den Beschleunigungskoordinaten F, G, H in Verbindung gebracht werden.

Die Beziehung (XXX; 66c) läßt sich einfacher schreiben, wenn man den Energieausdruck

$$\varepsilon = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{2} - \frac{1}{r} = \frac{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}{2t'^2} - \frac{1}{r}$$

einführt, der in der ungestörten Bewegung konstant $= -1/2a$, in der gestörten aber schwach veränderlich ist. Man erhält dann

$$2f = \frac{\varepsilon}{r^2} + F + \frac{r'}{rt'}(G + K),$$

und die Differentialgleichung für den Spinor $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$ lautet dann

$$\text{(XXX; 67)} \quad \mathfrak{S}'' - \frac{\varepsilon t'^2}{2r^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(Ft'^2 + ir't'H)\,\mathfrak{S} + (K + G - irH)\,t'\mathfrak{S}'.$$

Die rechte Seite ist von der Ordnung der störenden Kräfte, falls man die noch verfügbare Funktion $K(q)$ so bestimmt, daß sie mindestens von dieser Ordnung

ist. Stellt man den Spinor $\mathfrak{S}$ durch den vierdimensionalen Vektor (u_i) dar, so genügen dessen Koordinaten den Differentialgleichungen

$$u_i'' + \omega^2 u_i = Q_i = rT_i, \tag{XXX; 68}$$

und es ist, wenn t' durch (XXX; 59a) ausgedrückt wird,

$$\omega^2 = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{A^2}\, e^{2\int K ds} \tag{XXX; 68a}$$

ein nahezu konstanter Ausdruck, der für die ungestörte Bewegung ($K = 0$, $\varepsilon = -1/2a = \text{const}$) in die Konstante $\omega^2 = 1/4aA^2$ übergeht, während die Störungskoordinaten Q_i Größen von der Ordnung der Störbeschleunigung sind. Man erhält, wenn man in (XXX; 67) $z_1 = u_1 + iu_2$, $z_2 = u_3 + iu_4$ setzt,

$$\text{(XXX; 69)} \quad \begin{cases} Q_1 = rT_1 = \dfrac{1}{2}\,(u_1 F t'^2 - u_2 r' H t') + t'[u_1'(G+K) + u_2' r H], \\ Q_2 = rT_2 = \dfrac{1}{2}\,(u_2 F t'^2 + u_1 r' H t') + t'[u'_2(G+K) - u_1' r H], \\ Q_3 = rT_3 = \dfrac{1}{2}\,(u_3 F t'^2 - u_4 r' H t') + t'[u_3'(G+K) + u_4' r H], \\ Q_4 = rT_4 = \dfrac{1}{2}\,(u_4 F t'^2 + u_3 r' H t') + t'[u_4'(G+K) - u_3' r H]. \end{cases}$$

Da die Konstante A und die Funktion $K(q)$ noch willkürlich wählbar sind, gibt es verschiedene Varianten, die Vorteile versprechen. Aus $K = 0$, $A = 1$ folgt $t' = r$ oder $\dot{q} = 1/r$, also die regularisierende Pseudozeit, die sich im ungestörten Problem als unabhängige Variable bewährt hat. Die Vorgabe $K = 0$, $A = 1/\sqrt{a_0}$, wo a_0 die große Halbachse einer intermediären KEPLERschen Ellipse ist, führt auf $\dot{q} = 1/r\sqrt{a_0}$, eine Gleichung, die durch die exzentrische Anomalie E der intermediären Bahn erfüllt wird. Diese Variante hat gewisse Vorteile, wenn man sich auf elliptische Bahnen mit kleiner Exzentrizität beschränkt.

Eine interessante Variante ist durch $A = 1$, $K = -G$ gegeben. Dann verschwindet in (XXX; 69) der dritte Term rechts, es wird

$$2f = \frac{\varepsilon}{r^2} + F,$$

und die Spinorgleichung nimmt die Form

$$\mathfrak{S}'' - ft'^2\mathfrak{S} = iHt'\left(\frac{r'}{2}\,\mathfrak{S} - r\mathfrak{S}'\right)$$

an, die sich dadurch auszeichnet, daß rechts H als Faktor auftritt, der im

planetaren Drei- und Mehrkörperproblem durchweg sehr klein ist. Ist $H = 0$ (im ebenen Problem), so haben die Gleichungen

$$\mathfrak{S}'' - ft'^2\mathfrak{S} = 0$$

das Flächenintegral

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = 0.$$

Das ist bemerkenswert für den Fall, daß der gestörte Körper, dessen Position durch den Spinor $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$ gekennzeichnet wird, verschwindende Masse hat. In der klassischen Theorie des ebenen Dreikörperproblems beziehen sich dann die algebraischen Integrale der Energie und der Flächen auf die Bewegung der endlichen Massen allein, und die Bewegung der infinitesimalen Masse besitzt in der physikalischen x, y-Ebene das JACOBIsche Integral, aber nur unter der Voraussetzung, daß die endlichen Massen Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben. In der Spinorebene tritt statt dessen ein algebraisches Integral in Form des Flächensatzes auf, und zwar ohne einschränkende Bedingungen für die Bewegung der endlichen Massen.

Die Störungsausdrücke (XXX; 69) gelten, wie schon erwähnt, für beliebige (konservative und nichtkonservative) Kräfte. Im Falle konservativer Kräfte sind im euklidischen Raum die Störungsgleichungen von der Form

$$\ddot{x}_i + \frac{x_i}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

wo U eine nur von den Ortskoordinaten des gestörten und der störenden Körper abhängige Potentialfunktion ist, die überall (mit Ausnahme der jeweiligen Örter der Massenpunkte selbst) regulär ist. Nach erfolgter Regularisierung durch Einführung der Spinoren und einer geeigneten Pseudozeit, durch die auch die verbleibenden Singularitäten verschwinden, erhalten die Störungsgleichungen die Form (XXX; 68), und es läßt sich zeigen, daß dann

$$\text{(XXX; 70)} \qquad \frac{\partial U}{\partial u_i} = 4T_i = 4\frac{Q_i}{r}$$

ist. Es genügt hier, dies für $K = 0$, $A = 1$, also für die durch $t' = r$ definierte Pseudozeit zu beweisen. Nach (XXX; 58) lauten dann die Störbeschleunigungen

$$\text{(XXX; 71)} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_i} = Fx_i + \frac{G}{r}x_i' + \frac{H}{r}(x_j x_k' - x_k x_j'),$$

wenn i, j, k eine zyklische Permutation der Indexfolge 1, 2, 3 ist. Andererseits ist

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial u_i}.$$

Wir beweisen (XXX; 70) ausführlich für $i = 1$. Aus (XXX; 44) folgt

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = 2u_1; \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 2u_3; \quad \frac{\partial x_3}{\partial u_1} = -2u_4,$$

also

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial u_1} = F(x_1u_1 + x_2u_3 - x_3u_4) + \frac{G}{r}(x_1'u_1 + x_2'u_3 - x_3'u_4) + \\ + \frac{H}{r}[(x_2x_3' - x_3x_2')u_1 + (x_3x_1' - x_1x_3')u_3 - (x_1x_2' - x_2x_1')u_4].$$

Führt man nach (XXX; 44) x_i, x_i' als Funktionen der u_i, u_i' ein, so erhält man nach elementarer Rechnung

$$x_1u_1 + x_2u_3 - x_3u_4 = u_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = u_1r,$$

$$x_1'u_1 + x_2'u_3 - x_3'u_4 = 2u_1'r + 2u_2(u_1u_2' - u_2u_1' + u_3u_4' - u_4u_3') = 2u_1'r$$

wegen (XXX; 56) und schließlich

$$(x_2x_3' - x_3x_2')u_1 + (x_3x_1' - x_1x_3')u_3 - (x_1x_2' - x_2x_1')u_4 = r(2u_2'r - u_2r').$$

Setzt man dies in (XXX; 71) ein, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = 2Fu_1r + 4Gu_1' + 2H(2u_2'r - u_2r') = 4T_1,$$

wenn man (XXX; 69) mit $K = 0$, $t' = r$ berücksichtigt. Damit ist die Behauptung für $i = 1$ bewiesen, für $i = 2, 3, 4$ erfolgt der Beweis entsprechend. Dasselbe Ergebnis läßt sich auch unmittelbarer aus den Prinzipien der Mechanik ableiten,[1]) hier kam es nur darauf an zu zeigen, daß der für Kräfte beliebiger Art gültige Störungsausdruck (XXX; 58) im Falle konservativer Systeme ohne weiteres die Form eines Gradienten der Potentialfunktion annimmt und daß dies insbesondere auch im vierdimensionalen Spinorraum gilt.

256. Linearisierung der Störungsgleichungen

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des gestörten Körpers in Spinorform lauten nach (XXX; 68), wenn der Spinor durch seine Koordinaten u_i ausgedrückt wird,

$$\text{(XXX; 72)} \qquad \frac{d^2u_i}{dq^2} + \omega^2u_i = rT_i; \quad r = \sum_{j=1}^{4} u_j^2; \quad 4T_i = \frac{\partial U}{\partial u_i},$$

---

[1]) Siehe E. Stiefel, M. Rössler, J. Waldvogel und C. A. Burdet, Report to NASA on methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics. Zürich 1966.

und es ist, wenn die Pseudozeit q durch $dt/dq = r$ definiert wird,

$$(\text{XXX}; 73) \quad \omega^2 = -\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{4r^2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_j}{dq}\right)^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{du_j}{dq}\right)^2\right],$$

da aus (XXX; 48)

$$\Sigma\left(\frac{dx_j}{dq}\right)^2 = 4r\,\Sigma\left(\frac{du_j}{dq}\right)^2$$

folgt.

Die Größe ω^2 ist für die ungestörte Bewegung konstant, für die gestörte aber (im allgemeinen nur schwach) veränderlich, so daß (XXX; 72) nicht die für die Analyse bequeme Form der Differentialgleichung einer durch äußere Störungskräfte modulierten harmonischen Schwingung besitzt. Man kann diesem Übelstand auf verschiedene Weise abhelfen. P. KUSTAANHEIMO und E. STIEFEL[1]) haben dieses Ziel durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen $s(q)$ erreicht, wodurch die Differentialgleichungen (XXX; 72) die Form

$$(\text{XXX}; 74) \qquad \frac{d^2u_i}{ds^2} + \omega_0{}^2 u_i = R_i(s)$$

annehmen, wo $\omega_0{}^2$ konstant ist und die R_i von der Ordnung der Störungen sind. Sie lassen sich leicht integrieren, wenn es gelingt, die rechten Seiten in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Der Fall, daß in diesen Reihen Glieder auftreten, deren Frequenzen mit ω_0 kommensurabel sind und zu Resonanzerscheinungen Anlaß geben können, erfordert auch hier besondere Vorsicht.

Man setze also $q = q(s)$ als eine noch zu bestimmende stets positive analytische Funktion von s und bezeichne nun Ableitungen nach s durch Striche. Dann ist, wenn u irgendeines der u_i bedeutet,

$$\frac{du}{dq} = \frac{u'}{q'}; \quad \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{u''}{q'^2} - \frac{u'q''}{q'^3},$$

so daß

$$u'' = q'^2\left(\frac{d^2u}{dq^2} + u'\,\frac{q''}{q'^3}\right),$$

also wegen (XXX; 72, 73)

$$u_i'' = q'^2\left[rT_i - \frac{u_i}{r}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q'^2}\sum u_j'^2\right) + u_i'\,\frac{q''}{q'^3}\right]$$

oder

$$(\text{XXX}; 75) \qquad u_i'' + \omega_0{}^2 u_i = q'^2 r T_i + \frac{q''}{q'}\,u_i'$$

---

[1]) P. KUSTAANHEIMO und E. STIEFEL, Perturbation theory of KEPLER motion based on spinor regularization. J. reine angew. Math. *218*, 204 (1965).

mit

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{2r}\,(q'^2 - 2\sum u_j'^2)$$

ist. Die Funktion $q(s)$ kann nun unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß $\omega_0{}^2$ eine vorerst noch beliebige Konstante ist. Es gilt dann

(XXX; 76) $$q'^2 = 2(r\omega_0{}^2 + \sum u_j'^2)\,.$$

Differenziert man (XXX; 76), so ergibt sich

$$q'q'' = r'\omega_0{}^2 + 2\sum u_j' u_j'' = 2\sum(u_j' u_j'' + \omega_0{}^2 u_j u_j') =$$

$$= 2\sum u_j'(u_j'' + \omega_0{}^2 u_j) = 2\sum u_j' \left(q'^2 r T_j + \frac{q''}{q'}\,u_j'\right)$$

oder

$$\frac{q''}{q'}\,(q'^2 - 2\sum u_j'^2) = 2r\omega_0{}^2\,\frac{q''}{q'} = 2rq'^2\sum T_j u_j'\,,$$

woraus

(XXX; 77) $$\frac{q''}{q'} = \frac{q'^2}{\omega_0{}^2}\sum T_j u_j'$$

folgt. Aus (XXX; 75—77) erhält man dann

(XXX; 78) $$u_i'' + \omega_0{}^2 u_i = 2(r\omega_0{}^2 + \sum u_j'^2)\left(rT_i + \frac{u_i'}{\omega_0{}^2}\sum T_j u_j'\right).$$

Das sind aber Gleichungen von der Form (XXX; 74), da die rechten Seiten mit den T_i verschwinden.

Die Konstante $\omega_0{}^2$ ist noch willkürlich; man wird sie so wählen, daß die Gleichungen (XXX; 78) im Falle der ungestörten Bewegung durch die Spinorkoordinaten der intermediären Bahn befriedigt werden. Wenn alle T_i verschwinden, so folgt aus (XXX; 77) $q'' = 0$, $q' = \gamma = \text{const}$. Es ist dann nach (XXX; 75)

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{2r}\,(\gamma^2 - 2\sum u_j'^2)\,.$$

Andererseits gilt für alle u_i

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dq}\,\frac{dq}{ds} = \dot{u}rq' = \dot{u}r\gamma\,,$$

also

$$\sum u_j'^2 = r^2\gamma^2\sum \dot{u}_i{}^2 = \frac{r\gamma^2}{4}\sum \dot{x}_i{}^2 = \frac{r\gamma^2}{4}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

mithin $\omega_0{}^2 = \gamma^2/4a$. Setzt man $\gamma = 1$, so wird beim Übergang auf die ungestörte Bewegung $s = q$, $q' = 1$, und die Spinorgleichungen gehen widerspruchslos in die ungestörten Gleichungen (XXX; 54, 55) über, wenn man auch in den gestörten Gleichungen (XXX; 78) $\omega_0{}^2 = 1/4a$ setzt.

Es hat den Anschein, und dies ist auch von den Initiatoren der Methode angenommen worden, als bräche das Gleichungssystem (XXX; 78) zusammen, wenn die intermediäre (oskulierende) Bahn eine Parabel ist. Es ist dann $\omega_0^2 = 0$, und auf den rechten Seiten von (XXX; 78) kommt ω_0^2 im Nenner vor. M. Rössler[1]) greift daher bei seinem Versuch, eine analytische Lösung des Problems zu finden, auf die exzentrische Anomalie als Pseudozeit zurück, beschränkt sich also auf elliptische Bahnen, um den kritischen parabolischen Fall zu vermeiden. K. Stumpff[2]) bemerkte zuerst, daß die vermeintliche Singularität bei $\omega_0^2 = 0$ nicht existiert, denn nach (XXX; 77) ist ja

$$\frac{\sum T_j u_j'}{\omega_0^2} = \frac{q''}{q'^3}$$

auch für $\omega_0 = 0$ endlich, da $q' > 0$ ist und für schwach gestörte Bahnen von der Einheit nur wenig abweichen wird. Der Ausdruck $\sum T_j u_j'$ wird also die Konstante ω_0^2 als Faktor haben. In der Tat stellt $\sum T_j du_j = W ds$ die in der Pseudozeit ds an dem Körper geleistete Arbeit dar, die aber im Falle parabolischer Bahnen Null ist. In Levi-Civitàschen Koordinaten stellen solche Bahnen ja gerade Linien dar, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Sind die u_i als Funktionen von s bestimmt, so ergibt sich die Zeit $t(s)$ nach (XXX; 76) durch Quadratur von

$$t' = rq' = r\sqrt{2(r\omega_0^2 + \sum u_j'^2)}.$$

Wie eingangs angedeutet, ist diese Methode der Linearisierung der Spinorgleichungen nicht die einzig mögliche. Wir erinnern an den in Abschnitt 184 diskutierten Vorschlag zur Linearisierung der Bewegungsgleichungen im Zusammenhang mit dem Hillschen Mondproblem. Dort wurde gezeigt, daß die Differentialgleichung für den gestörten Radiusvektor, mit $\dot{q} = 1/r$, $r' = dr/dq$,

$$r''' + \alpha^2 r' = g(q) = rf(q) \qquad \text{(XXX; 79)}$$

geschrieben werden kann,[3]) und es ist $\alpha^2 = (1 - r'')/r$ nicht konstant, wenn $g \not\equiv 0$ ist. Es ist dann

$$\frac{d\alpha^2}{dq} = -\frac{1}{r}\left(r''' + \frac{1 - r''}{r} r'\right) = -\frac{g}{r} = -f(q),$$

also nach Integration, mit konstantem α_0,

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 - \int_0^q f dq$$

---

[1]) M. Rössler, Analytische Störungstheorie im Dreikörperproblem mit Hilfe von regularisierenden Variablen. Zürich 1966.

[2]) K. Stumpff, On the application of spinors to the problems of celestial mechanics. NASA TN D-4447, 1968.

[3]) Siehe auch Zusatz **3** in Anhang VIII.

und daher

$$(\text{XXX}; 80)\quad r''' + \alpha_0{}^2 r' = rf + r' \int_0^q f\,dq = \frac{d}{dq}\left(r \int f\,dq\right) = h(q).$$

Diese Gleichung hat das Integral

$$r'' + \alpha_0{}^2 r = 1 + r \int_0^q f\,dq,$$

da $r'' + \alpha_0{}^2 r = 1$ für störungsfreie Bewegung gilt. Gleichung (XXX; 80) ist gleichbedeutend mit (XXI; 54), und wie dort läßt sich die Lösung formal

$$(\text{XXX}; 81)\quad r(q) = r_0 + c_1 q r_0' + c_2 q^2 r_0'' + c_3 q^3 h_0 + c_4 q^4 h_0' + \cdots$$

schreiben, wenn $c_\nu(\lambda^2)$ mit $\lambda = \alpha_0 q$ die Hilfsfunktionen (XXX; 11) bedeuten, die den Regeln (XXX; 12, 13) unterworfen sind, und es ist wegen (XXX; 80) für $t = t_0$, $q = 0$

$$h_0 = \left[rf + r' \int_0^q f dq\right]_{q=0} = r_0 f_0,$$

$$h_0' = \left[rf' + 2r'f + r'' \int_0^q f dq\right]_{q=0} = r_0 f_0' + 2r_0' f_0,$$

. . . . . .

Vorausgesetzt, daß diese Lösung vorliegt, läßt sich jede Differentialgleichung

$$\ddot{s} + \frac{1}{r^3} s = S(t)$$

ebenfalls lösen. Führt man nämlich auch hier q als Pseudozeit ein, so ergibt sich

$$s''' + \alpha^2 s' = r(3r'S + rS') = r\sigma(q),$$

also eine Differentialgleichung von der Form (XXX; 79). Solche Gleichungen lassen sich auf ähnliche Weise integrieren wie (XXX; 79) selbst, sofern $r(q)$ aus (XXX; 81) bekannt ist. Dieses Verfahren, das hier nur angedeutet werden kann, läßt sich sowohl auf die Spinorkoordinaten u_i als auch auf die räumlichen Koordinaten x_i und die schiefwinkligen Koordinaten F, G, H anwenden, die man erhält, wenn man den Ortsvektor $\mathfrak{p}$ des gestörten Körpers durch

$$\mathfrak{p} = F\mathfrak{p}_0 + G\dot{\mathfrak{p}}_0 + H[\mathfrak{p}_0\dot{\mathfrak{p}}_0]$$

in Komponenten nach den Richtungen von $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$, $[\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}_0]$ zerlegt, die für eine Anfangsepoche t_0 gelten. Die Funktionen F, G, H sind, wie bemerkt werden muß, nicht mit den gleichbenannten Größen in (XXX; 58) identisch, die sich nicht auf den Ortsvektor $\mathfrak{p}$, sondern auf den Störungsvektor $\mathfrak{q}$ beziehen und die nicht in einem festen, sondern in einem mit dem gestörten Körper beweglichen Koordinatensystem definiert sind.

Alle in diesem Kapitel beschriebenen Methoden, ob sie sich auf Spinoren oder räumliche Koordinaten beziehen, leiden daran, daß eine überzählige Differentialgleichung zweiter Ordnung auftritt. Im Falle der Spinorgleichungen hat dies nicht viel zu sagen, da diese Gleichungen völlige Symmetrie zeigen und ihre Lösungen durch einfache Beziehungen miteinander verknüpft sind, die als Kontrolle der Rechnung nützlich sind. Bei den in diesem Abschnitt zuletzt erwähnten Methoden tritt zu den Differentialgleichungen für die drei räumlichen Koordinaten als vierte die für den Radiusvektor hinzu, deren Lösung derjenigen der anderen unbekannten Funktionen vorausgehen muß, so wie es auch (s. Abschnitt 241, 242) bei den klassischen Methoden zur Berechnung der allgemeinen Koordinatenstörungen der Fall war.

Die Linearisierung und Regularisierung dynamischer Differentialgleichungssysteme sind erst in jüngster Zeit als ungemein wichtig erkannt worden, und wir befinden uns in dem Bemühen, die in diesem Ideenbereich verborgenen Möglichkeiten auszuschöpfen, noch ganz am Anfang. Die Entdeckung der Spinoren als Hilfsmittel zur Bewältigung himmelsmechanischer Probleme stellt einen beachtlichen Fortschritt auf diesem Wege dar.

KAPITEL XXXI

APPROXIMATIVE UND ITERATIVE LÖSUNGEN DES STÖRUNGSPROBLEMS

257. Genäherte Berechnung gestörter Bahnen in rechtwinkligen Koordinaten. Methode von Steffensen—Broucke

Der Begriff „genäherte Bahnen" hat unterschiedliche Bedeutung. Man kann darunter Bahnen verstehen, die während eines langen Zeitraums die wahre Bewegung des Himmelskörpers bis auf verhältnismäßig kleine Abweichungen approximieren. Solche „intermediäre" Bahnen sind entweder KEPLERsche Ellipsen oder andere Kegelschnittstypen, oder sie enthalten darüber hinaus einige der wichtigsten säkularen oder periodischen Störungen. Eine andere Art genäherter Lösungen des Drei- oder Mehrkörperproblems zeichnet sich dadurch aus, daß innerhalb eines mehr oder weniger ausgedehnten Zeitraums vor und nach einer „Epoche" t_0, etwa für $|t - t_0| \leqq T$, die Bewegung des gestörten Körpers oder auch aller Körper eines Systems mit der angestrebten Rechengenauigkeit exakt wiedergegeben werden, aber für $|t - t_0| > T$ rasch wachsende Abweichungen zeigen. Approximative Methoden der letzteren Art, die analytisch oder numerisch sein können, gewinnen immer mehr an Bedeutung, seit Vorausberechnungen der Bahnen künstlicher Himmelskörper aus gegebenen Anfangsbedingungen zu den routinemäßigen Aufgaben der Raumfahrt gehören, bei deren Lösung mitunter die Verkürzung der Rechenzeit den Vorrang vor den Genauigkeitsansprüchen an den Ergebnissen hat. Auch die oskulierenden Bahnen gehören hierher, doch ist ihr Anwendungsbereich meist sehr klein und für praktische Aufgaben unzureichend.

Dagegen ist eine Entwicklung der Koordinaten des gestörten Körpers in Potenzreihen nach der seit der Epoche verflossenen Zwischenzeit $\tau = t - t_0$ für diesen Zweck geeignet, falls es gelingt, diese Entwicklung bis zu einer genügend hohen Ordnung voranzutreiben. Die Konvergenz solcher Reihen ist aber im allgemeinen beschränkt, und beschränkt ist daher auch der Zeitraum, der durch Potenzreihen überbrückt werden kann, die nach den Termen einer nicht allzu hohen Ordnung abgebrochen werden dürfen. J. F. STEFFENSEN hat eine Methode angegeben, die Koeffizienten solcher Potenzreihen iterativ zu berechnen. Mit Hilfe schneller Computer gelingt dies leicht bis zu relativ hohen Ordnungen. R. BROUCKE[1]) hat die von STEFFENSEN[2])[3]) ursprünglich auf das eingeschränkte und das ebene Dreikörperproblem bezogene Methode

---

[1]) R. BROUCKE, Solution of the N-body problem with recurrent power series. JPL Space Programs Summary 37/37, Bd. 4.

[2]) J. F. STEFFENSEN, On the restricted problem of three bodies. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. *30*, No. 18 (1956).

[3]) J. F. STEFFENSEN, On the problem of three bodies in the plane. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. *31*, No. 3 (1957).

auf das allgemeine n-Körperproblem erweitert. Ihr Wesen besteht darin, außer den rechtwinkligen Koordinaten der an dem System beteiligten Körper selbst weitere Variable (die Geschwindigkeitskoordinaten, die Abstände und deren negative dritte Potenzen) einzuführen, wodurch aus den Differentialgleichungen alle Nenner verschwinden. Diese Variablen sind natürlich nicht voneinander unabhängig, aber die Abhängigkeiten kommen lediglich in den Anfangsbedingungen zum Ausdruck.

Wir beschränken uns hier auf das Dreikörperproblem und schreiben die Differentialgleichungen für die drei Massenpunkte m_i, m_j, m_k (wobei die Indizes i, j, k eine zyklische Permutation der Zahlenfolge 1, 2, 3 darstellen) nach (XXIII; 8) in vektorieller Form an. Es sei also $\mathfrak{q}_{ij}\,(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ der von m_i zu m_j führende Vektor und $r_{ij} = |\mathfrak{q}_{ij}|$ sein Betrag; ferner seien $\dot{\mathfrak{q}}_{ij} = \mathfrak{v}_{ij}(u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})$ die Geschwindigkeitsvektoren, und die Zeiteinheit sei so gewählt, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist. Dann stellt

$$(\text{XXXI; 1}) \quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{q}}_{ij} = \mathfrak{v}_{ij}, \\ \dot{\mathfrak{v}}_{ij} = -\dfrac{m_i + m_j}{r_{ij}^3}\,\mathfrak{q}_{ij} + m_k\left(\dfrac{\mathfrak{q}_{ki}}{r_{ki}^3} + \dfrac{\mathfrak{q}_{jk}}{r_{jk}^3}\right) \end{cases}$$

ein System von achtzehn skalaren Differentialgleichungen erster Ordnung dar, von denen allerdings nur zwölf voneinander unabhängig sind, da

$$\mathfrak{q}_{ij} + \mathfrak{q}_{jk} + \mathfrak{q}_{ki} = 0; \quad \mathfrak{v}_{ij} + \mathfrak{v}_{jk} + \mathfrak{v}_{ki} = 0$$

ist. Führt man nun

$$r_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}; \quad \dot{s}_{ij} = r_{ij}^{-3}$$

als neue Variable ein, so kommen sechs weitere Gleichungen,

$$r_{ij}\dot{r}_{ij} = (\mathfrak{q}_{ij}\mathfrak{v}_{ij}) = x_{ij}u_{ij} + y_{ij}v_{ij} + z_{ij}w_{ij},$$

$$r_{ij}\dot{s}_{ij} = -3s_{ij}\dot{r}_{ij}$$

hinzu, deren Anfangsbedingungen durch diejenigen von (XXXI; 1) mitbestimmt sind. Mit jedem weiteren Körper, der dem System hinzugefügt wird, erhöht sich die Zahl der Differentialgleichungen rasch.

Man setze nun für die Variablen des Problems Potenzreihen

$$x_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^{(n)}\tau^n; \quad y_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ij}^{(n)}\tau^n; \quad z_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{ij}^{(n)}\tau^n,$$

$$u_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{ij}^{(n)}\tau^n; \quad v_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} V_{ij}^{(n)}\tau^n; \quad w_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} W_{ij}^{(n)}\tau^n,$$

$$r_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{ij}^{(n)}\tau^n; \quad s_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{ij}^{(n)}\tau^n, \qquad (\tau = t - t_0)$$

an. Führt man diese Potenzreihen in die Differentialgleichungen

$$\text{(XXXI; 2)} \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \dot{x}_{ij} = u_{ij}; \quad \dot{y}_{ij} = v_{ij}; \quad \dot{z}_{ij} = w_{ij}, \\ \text{b)} \quad \dot{u}_{ij} = -(m_i + m_j)\, s_{ij} x_{ij} + m_k (s_{ki} x_{ki} + s_{jk} x_{jk}) \\ \qquad \text{und entsprechende Formeln für } \dot{v}_{ij} \text{ und } \dot{w}_{ij}, \\ \text{c)} \quad r_{ij} \dot{r}_{ij} = x_{ij} u_{ij} + y_{ij} v_{ij} + z_{ij} w_{ij}, \\ \text{d)} \quad r_{ij} \dot{s}_{ij} = -3 s_{ij} \dot{r}_{ij} \end{cases}$$

ein, so kann man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen, die auf beiden Seiten erscheinen, einander gleichsetzen und erhält auf diese Weise ein rekurrentes Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten der n-ten Ordnung berechnen kann, wenn alle Koeffizienten bis zur $(n-1)$-ten Ordnung bekannt sind. Da die Anfangswerte $X_{ij}^{(0)}, \ldots, S_{ij}^{(0)}$ für $\tau = 0$ gegeben sind, erhält man die Koeffizienten erster, zweiter und höherer Ordnung nacheinander aus den Rekursionsformeln.

Wir begnügen uns hier, um die Ausführung dieser Idee an Beispielen zu zeigen, mit der Aufstellung der Rekursionsformeln für die Koeffizienten von x_{ij} und $u_{ij} = \dot{x}_{ij}$. Aus (XXXI; 2a) folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n X_{ij}^{(n)} \tau^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, X_{ij}^{(n+1)} \tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} U_{ij}^{(n)} \tau^n,$$

also durch Koeffizientenvergleich

$$\text{(XXXI; 3 a)} \qquad X_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} U_{ij}^{(n)}$$

und entsprechende Gleichungen für $Y_{ij}^{(n+1)}$, $Z_{ij}^{(n+1)}$. Aus (XXXI; 2b) erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) U_{ij}^{(n+1)} \tau^n = -(m_i + m_j) \sum_{n=0}^{\infty} S_{ij}^{(n)} \tau^n \sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^{(n)} \tau^n + m_k \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} S_{ki}^{(n)} \tau^n \sum_{n=0}^{\infty} X_{ki}^{(n)} \tau^n + \sum_{n=0}^{\infty} S_{jk}^{(n)} \tau^n \sum_{n=0}^{\infty} X_{jk}^{(n)} \tau^n \right\}.$$

Auf der rechten Seite stehen Doppelsummen von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tau^n \sum_{n=0}^{\infty} B_n \tau^n = A_0 B_0 + (A_0 B_1 + A_1 B_0)\, \tau + (A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0)\, \tau^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p} \right) \tau^n,$$

so daß

$$\text{(XXXI; 3 b)} \qquad U_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \left\{ -(m_i + m_j) \sum_{p=0}^{n} S_{ij}^{(p)} X_{ij}^{(n-p)} + m_k \sum_{p=0}^{n} (S_{ki}^{(p)} X_{ki}^{(n-p)} + S_{jk}^{(p)} X_{jk}^{(n-p)}) \right\}$$

und entsprechende Gleichungen für $V_{ij}^{(n+1)}$ und $W_{ij}^{(n+1)}$ gelten. Ähnliche Rekursionsformeln, die nur wenig komplizierter sind, ergeben sich aus (XXXI; 2c) und (XXXI; 2d). Ihre Ableitung darf dem Leser überlassen bleiben.

Dieses Iterationsverfahren ist wegen des rein algebraischen Charakters der Gleichungen, und weil auf den rechten Seiten nur endliche bilineare Summen erscheinen, leicht programmierbar und liefert mit schnellen Maschinen Potenzreihen für die Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit jedes Körpers in bezug auf jeden anderen mühelos bis zu hohen Ordnungen und damit die Koordinaten selbst für ziemlich große Zeitintervalle vor und nach t_0 ausreichend genau. Hat man auf diese Weise Ort und Geschwindigkeit für einen Zeitpunkt t_1 ermittelt, so können diese als neue Anfangswerte für den Übergang auf einen neuen Zeitpunkt t_2 dienen, und so fort. Man wird mit diesem Verfahren um so rascher vorankommen, je größer die Zwischenzeiten $t_n - t_{n-1}$ sind, die durch die Potenzreihen überbrückt werden können. Eine natürliche Grenze ist ihm aber gesetzt, da die kleinen Fehler, die durch das Abbrechen der Potenzreihen bei einer endlichen Ordnung sowie durch Abrundungsfehler bei der Berechnung der Koeffizienten entstehen, sich allmählich zu merklichen Beträgen aufsummieren, wenn sie auch anfangs unter der Schwelle der Genauigkeit bleiben.

258. Methode von K. Stumpff und E. H. Weiss

Ein anderes Verfahren, die Lösung von Störungsproblemen durch Integration der Differentialgleichungen in großen Schritten zu finden, beruht auf der von K. STUMPFF[1]) angegebenen Variante der ENCKEschen Methode zur Berechnung der speziellen Störungen. Es wurde von ihm und E. H. WEISS[2])[3]) den praktischen Bedürfnissen der Raumfahrt (schnelle Berechnung von Bahnen künstlicher Himmelskörper im Gravitationsfeld von Erde, Mond und Sonne) angepaßt, programmiert und in zahlreichen Versuchen erprobt.

Es sei $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ein System von n Himmelskörpern (Punktmassen), ihre Massen seien $m_1, m_2, \ldots, m_n$, und die Zeiteinheit sei so bemessen, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist. Ferner sei, wie in Abschnitt 257, $\mathfrak{q}_{ij} = -\mathfrak{q}_{ji}$ der von P_i nach P_j führende Vektor, wenn i, j irgendein Zahlenpaar aus dem Vorrat $1, 2, \ldots, n$ und $r_{ij} = r_{ji}$ sein Betrag ist. Dann gelten vektorielle Gleichungen von der Form

$$\ddot{\mathfrak{q}}_{ij} = -(m_i + m_j)\frac{\mathfrak{q}_{ij}}{r_{ij}^3} + \sum_{\nu \neq i,j} m_\nu \left\{\frac{\mathfrak{q}_{\nu i}}{r_{\nu i}^3} + \frac{\mathfrak{q}_{j\nu}}{r_{j\nu}^3}\right\} \tag{XXXI; 4}$$

für die $n(n-1)/2$ verschiedenen relativen Ortsvektoren, von denen aber nur $n-1$ voneinander unabhängig sind. Es genügt also, irgendein P_i als „Zentralkörper" anzusehen und die $n-1$ Differentialgleichungen für die Vektoren $\mathfrak{q}_{ij}$ $(j \neq i)$ zu integrieren, da alle übrigen aus den zwischen den $\mathfrak{q}_{\mu\nu}$ bestehenden

---

[1]) K. STUMPFF, Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. A.N. *273*, 105 (1942); Himmelsmechanik Bd. 2. Berlin 1965, S. 381ff.

[2]) K. STUMPFF und E. H. WEISS, Applications of an N-body reference orbit. J. astronaut. Sci. *15*, 257 (1968).

[3]) K. STUMPFF und E. H. WEISS, A fast method of orbit computation. NASA TN D-4470, 1968.

linearen Beziehungen folgen. Man kann die Gleichungen (XXXI; 4) auch in völlig symmetrischer Form

$$\ddot{\mathfrak{q}}_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left\{ \frac{\mathfrak{q}_{\nu i}}{r_{\nu i}^3} + \frac{\mathfrak{q}_{j\nu}}{r_{j\nu}^3} \right\} \tag{XXXI; 4a}$$

schreiben, mit dem Zusatz, daß die in den Summanden $\nu = i$ und $\nu = j$ auftretenden sinnlosen Terme von der Form $\mathfrak{q}_{\nu\nu} r_{\nu\nu}^{-3}$ auszulassen sind. Die Anfangsbedingungen, die eine spezielle Lösung von (XXXI; 4 oder 4a) determinieren, seien durch

$$(\mathfrak{q}_{ij})_0, (\dot{\mathfrak{q}}_{ij})_0 \quad \text{für} \quad t = t_0 \quad \text{bzw.} \quad \tau = t - t_0 = 0$$

gegeben. Wir definieren nun $n(n-1)/2$ ungestörte Kegelschnittsbahnen, die im Zeitpunkt $\tau = 0$ die Bahnen $\mathfrak{q}_{ij}(\tau)$ oskulieren, durch

$$[\mathfrak{q}_{ij}(\tau)], \quad \text{mit} \quad [r_{ij}] = |[\mathfrak{q}_{ij}]| .$$

Sie genügen den Differentialgleichungen

$$[\ddot{\mathfrak{q}}_{ij}] + (m_i + m_j)\,[\mathfrak{q}_{ij}]\,[r_{ij}]^{-3} = 0$$

und den Oskulationsbedingungen

$$[\mathfrak{q}_{ij}]_0 = (\mathfrak{q}_{ij})_0, \quad [\dot{\mathfrak{q}}_{ij}]_0 = (\dot{\mathfrak{q}}_{ij})_0 . \tag{XXXI; 5}$$

Ferner definieren wir $n(n-1)/2$ vektorielle Hilfsfunktionen

$$\mathfrak{s}_{ij} = -\mathfrak{s}_{ji} = [\mathfrak{q}_{ij}]\,[r_{ij}]^{-3} - \mathfrak{q}_{ij} r_{ij}^{-3} . \tag{XXXI; 6}$$

Dann ist

$$\mathfrak{q}_{ij} r_{ij}^{-3} = [\mathfrak{q}_{ij}]\,[r_{ij}]^{-3} - \mathfrak{s}_{ij} = -\left\{ \frac{[\ddot{\mathfrak{q}}_{ij}]}{m_i + m_j} + \mathfrak{s}_{ij} \right\}$$

und nach (XXXI; 4) bzw. (XXXI; 5)

$$\ddot{\mathfrak{q}}_{ij} = \ddot{\mathfrak{p}}_{ij} + \ddot{\mathfrak{r}}_{ij} \tag{XXXI; 7}$$

mit

$$\text{(XXXI; 8)} \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \ddot{\mathfrak{p}}_{ij} = [\ddot{\mathfrak{q}}_{ij}] + \sum\limits_{\nu \neq i,j} m_\nu \left\{ \dfrac{[\ddot{\mathfrak{q}}_{i\nu}]}{m_i + m_\nu} + \dfrac{[\ddot{\mathfrak{q}}_{\nu j}]}{m_\nu + m_j} \right\}, \\ \text{b)} \quad \ddot{\mathfrak{r}}_{ij} = (m_i + m_j)\,\mathfrak{s}_{ij} = \sum\limits_{\nu \neq i,j} m_\nu (\mathfrak{s}_{i\nu} + \mathfrak{s}_{\nu j}) . \end{cases}$$

Die Gleichung (XXXI; 8a) ist integrabel und liefert mit den vektoriellen Integrationskonstanten $\mathfrak{a}_{ij}$, $\mathfrak{b}_{ij}$

$$\text{(XXXI; 9)} \quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{p}}_{ij} = [\dot{\mathfrak{q}}_{ij}] + \sum\limits_{\nu \neq i,j} m_\nu \left\{ \dfrac{[\dot{\mathfrak{q}}_{i\nu}]}{m_i + m_\nu} + \dfrac{[\dot{\mathfrak{q}}_{\nu j}]}{m_\nu + m_j} \right\} + \mathfrak{a}_{ij} = \\ \quad = [\dot{\mathfrak{q}}_{ij}] + \dot{\mathfrak{w}}_{ij} + \mathfrak{a}_{ij} , \\ \mathfrak{p}_{ij} = [\mathfrak{q}_{ij}] + \sum\limits_{\nu \neq i,j} m_\nu \left\{ \dfrac{[\mathfrak{q}_{i\nu}]}{m_i + m_\nu} + \dfrac{[\mathfrak{q}_{\nu j}]}{m_\nu + m_j} \right\} + \mathfrak{a}_{ij}\tau + \mathfrak{b}_{ij} = \\ \quad = [\mathfrak{q}_{ij}] + \mathfrak{w}_{ij} + \mathfrak{a}_{ij}\tau + \mathfrak{b}_{ij} . \end{cases}$$

Für $\tau = 0$ ist wegen (XXXI; 6, 5) $(\mathfrak{z}_{ij})_0 = (\dot{\mathfrak{z}}_{ij})_0 = 0$, also nach (XXXI; 8b) $(\ddot{\mathfrak{r}}_{ij})_0 = (\dddot{\mathfrak{r}}_{ij})_0 = 0$, und wenn wir die Integrationskonstanten von (XXXI; 8b) mit denen von (XXXI; 8a), also mit $\mathfrak{a}_{ij}$, $\mathfrak{b}_{ij}$, vereinigen, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist, so darf auch $(\mathfrak{r}_{ij})_0 = (\dot{\mathfrak{r}}_{ij})_0 = 0$ gesetzt werden. Die Funktionen $\mathfrak{r}_{ij}(\tau)$ sind demnach von der vierten Ordnung in τ, während die Störungsgrößen $\mathfrak{z}_{ij}$ von der zweiten Ordnung sind. Schreibt man (XXXI; 9) für $\tau = 0$ auf, so folgt wegen (XXXI; 5)

$$(\dot{\mathfrak{p}}_{ij})_0 - [\dot{\mathfrak{q}}_{ij}]_0 = (\dot{\mathfrak{w}}_{ij})_0 + \mathfrak{a}_{ij} = 0,$$

$$(\mathfrak{p}_{ij})_0 - [\mathfrak{q}_{ij}]_0 = (\mathfrak{w}_{ij})_0 + \mathfrak{b}_{ij} = 0,$$

also

$$\mathfrak{a}_{ij} = -(\dot{\mathfrak{w}}_{ij})_0, \quad \mathfrak{b}_{ij} = -(\mathfrak{w}_{ij})_0.$$

Die Funktionen

$$\mathfrak{w}_{ij}(\tau) = \sum_{\nu \neq i,j} m_\nu \left\{ \frac{[\mathfrak{q}_{i\nu}]}{m_i + m_\nu} + \frac{[\mathfrak{q}_{\nu j}]}{m_\nu + m_j} \right\},$$

die sich linear aus $n(n-1)/2$ Kegelschnittsbewegungen mit gegebenen Anfangsbedingungen zusammensetzen, heißen „genäherte Störungen"; sie stellen die Gesamtstörungen bis auf die „Reststörungen" $\mathfrak{r}_{ij}$ dar, also bis auf Terme von der vierten Ordnung in der Zwischenzeit τ. Sie genügen daher zur genäherten Berechnung der Positionen für längere Zwischenzeiten, als es die oskulierenden Bahnen tun. Man könnte also bei völliger Vernachlässigung der Reststörungen eine schrittweise Integration allein mit Hilfe der Formeln der Zweikörperbewegung durchführen, wenn man die Schrittlänge so bestimmt, daß die Reststörungen stets unter einer vom verlangten Genauigkeitsgrad abhängigen Schwelle bleiben. Für die genäherte Berechnung der Ephemeriden von Planetoiden ist diese primitive Methode sehr geeignet. Ein Versuch mit dem kleinen Planeten (931) Whittemora ergab, daß bei einer Schrittlänge von 20 Tagen die Ephemeride bis zu 1600 Tagen nach der Ausgangsepoche bis auf wenige Einheiten der siebenten Dezimale genau errechnet wurde. Selbst mit der großen Schrittweite von 160 Tagen war das Ergebnis noch bis zur vierten Dezimale genau, was für die Berechnung einer provisorischen Bahn gerade noch ausreichen würde.

Für die stark gestörten Bewegungen von Raumsonden, die aus dem Anziehungsbereich der Erde — mitunter wiederholt — in den des Mondes gelangen, wäre dieses Verfahren unwirtschaftlich und überdies zu ungenau: Im Falle großer Annäherung an einen störenden Körper wird man auch mit sehr kleinen Schrittweiten keine befriedigenden Ergebnisse mehr erzielen. Eine Berücksichtigung der Reststörungen $\mathfrak{r}$ durch eine, wenn auch nur genäherte, Integration der Differentialgleichungen (XXXI; 8b) ist dann unerläßlich. Es genügt aber dann meistens, die $\mathfrak{z}$ nach (XXXI; 6) zu berechnen, indem man die Vektoren $\mathfrak{q}$ durch ihre Näherungen $\mathfrak{p}$ ersetzt. Da diese bis auf Reste von der Ordnung τ^4 genau sind, werden nach zweimaliger Integration der $\ddot{\mathfrak{r}}$ die $\mathfrak{r}$ selbst bis auf Reste von der Ordnung τ^6 genau sein, was in den meisten Fällen ausreicht.

Die Integration von (XXXI; 8b) läßt sich etwa auf folgende Weise durchführen: Man teile die Schrittweite h zwischen t_n und t_{n+1} in vier gleiche Teilintervalle von der Länge $h' = h/4$ ein und berechne, von den bekannten Anfangswerten zur Zeit t_n ausgehend, die $\ddot{\mathfrak{r}}$ für die Zeitpunkte $t_n + \mu h'$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Dann hat man für jeden Vektor $\mathfrak{r}$ (bzw. dessen Koordinaten) fünf Stützwerte

$$\ddot{\mathfrak{r}}_0 = 0,\ \ddot{\mathfrak{r}}_1,\ \ddot{\mathfrak{r}}_2,\ \ddot{\mathfrak{r}}_3,\ \ddot{\mathfrak{r}}_4$$

zur Verfügung, um das einfache und das Doppelintegral zwischen t_n und t_{n+1} zu bilden. Sei $\ddot{x} = f(t)$ eine der Koordinaten von $\ddot{\mathfrak{r}}(t)$, so benutzt man zur Berechnung der Integrale die Formeln (XVII; 55) und (XVII; 74) bis zur Differenz vierter Ordnung, die aus den fünf Stützwerten noch bestimmt werden kann:

$$\text{(XXXI; 10)}\quad \begin{cases} \dot{x}(a+sh') = \dfrac{1}{h'}\displaystyle\int^{a+sh'} f(t)\,dt = C_1 + sf(a) + \frac{s^2}{2} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s^3}{6} f^{\mathrm{II}}(a) + \\ \qquad + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{12}\right) f^{\mathrm{III}}(a) + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{72}\right) f^{\mathrm{IV}}(a), \\ x(a+sh') = \dfrac{1}{h'^2}\displaystyle\iint^{a+sh'} f(t)\,dt^2 = C_2 + sC_1 + \frac{s^2}{2} f(a) + \frac{s^3}{6} f^{\mathrm{I}}(a) + \\ \qquad + \frac{s^4}{24} f^{\mathrm{II}}(a) + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{36}\right) f^{\mathrm{III}}(a) + \\ \qquad + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{288}\right) f^{\mathrm{IV}}(a). \end{cases}$$

Man legt zweckmäßig die Abszisse a auf den mittleren Stützwert, so daß

$$f_i = f[a + (i-2)\,h']$$

ist. Dann ergibt sich aus dem ENCKEschen Differenzenschema (Abschnitt 143)

$$\text{(XXXI; 11)}\quad \begin{cases} f(a) = f_2, \\ f(a) = \dfrac{1}{2}(f_3 - f_1), \\ f^{\mathrm{II}}(a) = f_3 - 2f_2 + f_1, \\ f^{\mathrm{III}}(a) = \dfrac{1}{2}[f_4 - 2f_3 + 2f_1 - f_0], \\ f^{\mathrm{IV}}(a) = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0. \end{cases}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 folgen aus (XXXI; 10), wenn man $\dot{x}(a-2h') = x(a-2h') = 0$, d. h. auf beiden Seiten $s = -2$ setzt. Dann erhält man

$$C_1 = 2f(a) - 2f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{4}{3}f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{3}f^{\mathrm{III}}(a) + \frac{2}{45}f^{\mathrm{IV}}(a),$$

$$C_2 = 2f(a) - \frac{8}{3}f^{\mathrm{I}}(a) + 2f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{28}{45}f^{\mathrm{III}}(a) + \frac{5}{18}f^{\mathrm{IV}}(a),$$

und für die beiden von $a - 2h'$ bis $a + 2h'$ zu erstreckenden Integrale findet man nach elementarer Rechnung

$$I_1 = h'\left[4f(a) + \frac{8}{3}f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{14}{45}f^{\mathrm{IV}}(a)\right],$$

$$I_2 = h'^2\left[8f(a) - \frac{16}{3}\{f^{\mathrm{I}}(a) - f^{\mathrm{II}}(a)\} - \frac{28}{45}\{2f^{\mathrm{III}}(a) - f^{\mathrm{IV}}(a)\}\right]$$

oder, wenn man die Formeln (XXXI; 11) benutzt, $f_0 = 0$ setzt und die Ergebnisse in vektorieller Form schreibt,

(XXXI; 12)
$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{r}} = \dfrac{h'}{45}(64\ddot{\mathfrak{r}}_1 + 24\ddot{\mathfrak{r}}_2 + 64\ddot{\mathfrak{r}}_3 + 14\ddot{\mathfrak{r}}_4), \\ \mathfrak{r} = \dfrac{h'^2}{45}(192\ddot{\mathfrak{r}}_1 + 48\ddot{\mathfrak{r}}_2 + 64\ddot{\mathfrak{r}}_3). \end{cases}$$

Diese Reststörungen sind nach jedem Schritt von der Länge $h = 4h'$ den genäherten Lösungen $\dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}$ hinzuzufügen, und man erhält dann genauere Ausgangspositionen $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{r}$, $\dot{\mathfrak{q}} = \dot{\mathfrak{p}} + \dot{\mathfrak{r}}$ für den nächsten Schritt.

Ungenauigkeiten können entstehen, wenn die Zahl der Stützwerte zu klein ist oder wenn die Berechnung der $\mathfrak{s}$ mit den genäherten Koordinaten $\mathfrak{p}$ zu ungenau ist. Im ersten Fall wird man entweder die Schrittlänge verkürzen oder die Zahl der Stützwerte vermehren, was natürlich eine Änderung der Integrationsformeln (XXXI; 12) bedingt. Im zweiten Fall erhält man genauere Resultate, wenn man die $\mathfrak{s}$ erneut berechnet, indem man die Näherungen $\mathfrak{p}$ durch die im ersten Rechengang erhaltenen Reststörungen ergänzt.

Die hier geschilderte Methode zur schrittweisen Berechnung von gestörten Bahnen wäre für Handrechnung zu kompliziert, ist aber, wenn schnelle Computer zur Verfügung stehen, den klassischen Methoden weit überlegen, da sie fast ausschließlich auf der — allerdings vielfachen — Anwendung einer Subroutine zur Berechnung von Zweikörperephemeriden mit kurzen Zwischenzeiten beruht. Die Durchführung eines solchen Unterprogramms erfordert so kurze Rechenzeiten, daß ein Ephemeridenprogramm auf Grund der oben geschilderten Methode wesentlich weniger Zeit in Anspruch nimmt als ein auf den klassischen Integrationsmethoden aufgebautes Programm. Einer der am meisten ins Gewicht fallenden Vorteile des Verfahrens besteht darin, daß keine Anlaufsrechnung nötig ist und daß jeder h-Schritt einen geschlossenen Rechenvorgang darstellt. Es ist daher ohne jede Schwierigkeit möglich, die

Schrittlänge zu wechseln, wenn nötig sogar nach jedem Schritt, und man wird bestrebt sein, sie so lang wie möglich und so kurz wie nötig zu machen. Dafür gibt es verschiedene Kriterien, die man in das Programm einbauen kann, so daß die Maschine über Verlängerung oder Verkürzung der Schrittlänge selbst entscheiden kann.

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Differentialgleichungen (XXXI; 4, 4a) hat diese Methode mit der in Abschnitt 198 beschriebenen simultanen Integration eines n-Körperproblems alle Vorteile gemeinsam. Es macht nicht die geringste Schwierigkeit, die Bahn eines gestörten Körpers ohne Änderung des Algorithmus aus der Anziehungssphäre eines störenden Körpers in die eines anderen zu verfolgen. Die Rechenzeit hängt von der Anzahl der zur Durchführung eines Programms notwendigen Schritte ab. Diese Anzahl wird um so kleiner sein, je geringer die Ansprüche an Genauigkeit sind. Verkürzt man die mittlere Schrittlänge systematisch, so erreicht man eine Grenze, unterhalb der sich die Koordinaten der Endposition nicht mehr ändern. Diese Koordinaten dürfen dann als exakt angesehen werden.

Zur Prüfung der Genauigkeit und Rentabilität dieses Verfahrens wurde ein extrem ungünstiges Beispiel gewählt: die Bahn von Explorer 33, die von einer gegebenen Anfangsposition am 31. 7. 1966 aus für eine Laufzeit von 180 Tagen zu berechnen war. Die sehr stark gestörte Bahn war vom Typ langgestreckter Ellipsen und vollendete während dieser 180 Tage zwölf Erdumläufe mit mehreren sehr engen Annäherungen an Erde und Mond. Es wurde ein Vierkörperproblem (Erde, Mond, Sonne, Raumsonde) gerechnet und mit einer strengen Rechnung nach klassischen Methoden verglichen. Die Rechenzeit betrug, einschließlich Berücksichtigung der Reststörungen nach dem oben beschriebenen Verfahren, 86 s bei einem maximalen Fehler des Abstandes Erde—Explorer von 86 km. Durch Verkürzung der Schrittweiten wurde mit etwa 180 s Rechenzeit der Fehler auf Null herabgedrückt. Mit der genäherten Methode (ohne Berechnung der Reststörungen) waren die Abweichungen erheblich größer, und es gelang nicht, sie ganz zum Verschwinden zu bringen. Die Rechenzeiten mit den klassischen Methoden von Cowell (Abschnitt 154) und Encke (Abschnitt 156) betrugen 10 bzw. 15 min. Eine typische Erde-Mond-Trajektorie mit 2.5 Tagen Laufzeit, deren Berechnung nach den üblichen Integrationsverfahren etwa 1 min erforderte, wurde nach der obigen Methode in sieben Schritten (Rechenzeit 1.4 s, Endfehler 0.7 km) bzw. in siebzehn Schritten (Rechenzeit 3.3 s, Endfehler Null) errechnet. Alle Rechnungen wurden mit einer IBM 7094 ausgeführt.

259. Variation der Bewegung im Zweikörperproblem infolge kleiner Änderungen der Anfangsbedingungen

In Abschnitt 198 ist hervorgehoben worden, daß bei der Berechnung von Planetenkoordinaten aus gegebenen Anfangswerten an die Genauigkeit der letzteren große Ansprüche gestellt werden müssen, wenn man die Bewegung durch numerische Integration für längere Zeiträume genau genug darstellen

will. In vielen Fällen, z. B. wenn die Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit für eine Anfangszeit t_0 aus wenigen Beobachtungen nach den in Kapitel VIII beschriebenen Methoden einer ersten Bahnbestimmung ermittelt worden sind, ist diese Bedingung kaum erfüllt, und man wird, wenn man mit diesen Anfangswerten eine ungestörte oder gestörte Bahn berechnet, für die Zeit $t = t_0 + \tau$ Koordinatenwerte erhalten, die um so fehlerhafter sind, je größer $|\tau|$ ist. Hieraus folgt für die Praxis der Bahnrechnung die Notwendigkeit, geeignete Methoden zur Lösung zweier Probleme zu besitzen: 1. Welchen Einfluß hat eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen $\mathfrak{q}_0$, $\dot{\mathfrak{q}}_0$ für $t = t_0$ auf die Änderung der Vektoren $\mathfrak{q}$, $\dot{\mathfrak{q}}$ des Ortes und der Geschwindigkeit des Himmelskörpers zur Zeit $t = t_0 + \tau$? 2. Wie wird man $\mathfrak{q}_0$, $\dot{\mathfrak{q}}_0$ ändern müssen, um die mit diesen Anfangswerten berechneten Endwerte $\mathfrak{q}$, $\dot{\mathfrak{q}}$ von ihren Fehlern zu befreien?

Selbstverständlich sind diese Aufgaben streng lösbar, wenn man die Bahnrechnung durch numerische Integration mit veränderten Anfangs- (bzw. nach rückwärts mit veränderten End-) Bedingungen wiederholt, wobei man sich im Falle ungestörter Bahnen der in Kapitel V entwickelten strengen, geschlossenen und für alle Bahnformen einheitlich gültigen Formeln bedienen kann. Wenn es sich aber um kleine Variationen der Anfangs- oder Endbedingungen handelt, die als infinitesimal angesehen werden dürfen, ist es vorteilhafter, den Einfluß dieser Variationen durch lineare Differentialausdrücke direkt darzustellen. Seien $x_i(0)$ mit $i = 1, 2, \ldots, 6$ die Anfangswerte der Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit, x_i die Endwerte für $t_0 + \tau$, ferner $dx_i(0)$ die Variationen der Anfangswerte, dx_i diejenigen der Endwerte, so gilt

$$dx_i = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x_i}{\partial x_j(0)}\, dx_j(0), \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

und diese Gleichungen lassen sich in Matrizenform

$$d\mathfrak{p} = \mathfrak{T} d\mathfrak{p}_0$$

schreiben, wo

$$d\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_6 \end{pmatrix}, \quad d\mathfrak{p}_0 = \begin{pmatrix} dx_1(0) \\ dx_2(0) \\ \vdots \\ dx_6(0) \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j(0)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1(0)} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2(0)} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_6(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_6}{\partial x_1(0)} & \frac{\partial x_6}{\partial x_2(0)} & \cdots & \frac{\partial x_6}{\partial x_6(0)} \end{pmatrix}$$

6×1- bzw. 6×6-gliedrige Matrizen sind. Die Matrix $\mathfrak{T}$ bildet das Kernstück der Lösung des ersten der oben genannten Probleme. Das zweite Problem

erfordert die inverse Matrix $\mathfrak{T}^{-1}$, und es ist $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{E}_6$ die 6×6-gliedrige Einheitsmatrix.

Im Falle einer ungestörten Bewegung lassen sich die Elemente der $\mathfrak{T}$-Matrix[1]), ebenso wie die Koordinaten x_i selbst, nach geschlossenen Formeln berechnen, wie W. H. GOODYEAR[2])[3]) gezeigt hat. Für gestörte Bahnen ist dies nicht ohne weiteres möglich, doch hat E. H. WEISS[4]) bewiesen und an praktischen Beispielen demonstriert, daß man das gewünschte Ergebnis durch mehrfache Anwendung von ungestörten $\mathfrak{T}$-Matrizen beliebig approximieren kann. Das gilt insbesondere für den Fall der durch beliebig viele Massen gestörten Bewegung eines praktisch masselosen Körpers (Planetoid, Komet oder Raumsonde) und für nicht allzu große Zeitintervalle.

Diese approximative Methode zur Berechnung der $\mathfrak{T}$-Matrix für gestörte Bahnen soll im nächsten Abschnitt beschrieben werden. Hier werden wir zunächst die GOODYEARsche, für Computerprogramme geeignete Form der $\mathfrak{T}$-Matrix für die Zweikörperbewegung angeben. Auf ihre recht umständliche Ableitung müssen wir aus Raummangel verzichten und den Leser auf die Originalarbeit[2]) verweisen, die im wesentlichen auf der in Kapitel V entwickelten Theorie der Zweikörperbewegung beruht. Ihr Verfasser bedient sich aber zum Teil abweichender Symbole, wodurch gewisse Formeln eine einfachere Gestalt annehmen. Es wird zum Verständnis dieser Arbeit beitragen, wenn wir auf diese Unterschiede in den Bezeichnungen und Formeln hinweisen. Wichtiger ist aber folgende Bemerkung:

Die Differentialgleichungen des relativen Zweikörperproblems haben die Form (XXIII; 6a), die wir kurz, wenn $\mathfrak{q}$ den auf den Zentralkörper bezogenen Ortsvektor eines Planeten bezeichnet,

$$\ddot{\mathfrak{q}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\mathfrak{q} = 0; \quad r = |\mathfrak{q}|$$

schreiben können, wo $\varkappa^2 = k^2(M + m)$ ist und M, m die Massen der beiden Körper bezeichnen. Solange es um die ungestörte Bewegung eines einzelnen Planeten oder Satelliten um seinen Zentralkörper geht, kann man stets durch geeignete Wahl der Zeiteinheit $\varkappa = 1$ setzen, und dies ist in Kapitel V allgemein und mit Berechtigung geschehen. Wenn es sich aber, wie in Abschnitt 258, um verschiedene oskulierende Bahnen in einem System von Körpern handelt, die alle oder zum Teil endliche Massen haben, ist dies nicht mehr statthaft, da die Massenfaktoren $\varkappa^2$ im allgemeinen voneinander verschieden sind. Allenfalls kann man die Zeiteinheit so festsetzen, daß die Gravitations-

---

[1]) Im Englischen heißt $\mathfrak{T}$ die „state transition matrix". Wir bezeichnen sie hier, da eine entsprechend kurze deutsche Bezeichnung sich noch nicht eingebürgert hat, der Einfachheit halber mit $\mathfrak{T}$-Matrix.

[2]) W. H. GOODYEAR, A general method for the computation of Cartesian coordinates and partial derivatives of the two-body problem. NASA Contractor Report CR-522, 1966.

[3]) W. H. GOODYEAR, Completely general closed-form solution for coordinates and partial derivatives of the two-body problem. A. J. *70*, 189 (1965).

[4]) E. H. WEISS, A new method for computing the state transition matrix. J. astronaut. Sci. *16*, 121 (1969).

konstante $k = 1$ wird. Dann ist (wie dies auch in Abschnitt 258 angenommen wurde) $\varkappa^2 = M + m$. Wir werden daher in den Formeln der Ephemeridenrechnung überall die Konstante $\varkappa^2$ wieder einführen müssen, wo es nötig ist. Insbesondere erhält man für die „lokalen Invarianten" anstelle der Ausdrücke (V; 28, 29)

$$\mu = \frac{\varkappa^2}{r^3};\ \varrho = \frac{\varkappa^2}{ar^2};\quad r^2\omega = V^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Die Funktion $r(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$r\dddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} + \varkappa^2\frac{\dot{r}}{r^2} = 0,$$

und führt man die regularisierende Variable $q(t)$, wie früher, durch $\dot{q} = r^{-1}$ ein und bezeichnet die Ableitungen nach q durch Striche, so nimmt diese Gleichung die lineare Form

$$r''' + \alpha^2 r' = 0;\qquad \alpha^2 = \frac{\varkappa^2}{a}$$

an.

Den Ausgangspunkt für die Berechnung der ungestörten $\mathfrak{T}$-Matrix bilden die Beziehungen

(XXXI; 13)
$$\mathfrak{q} = F\mathfrak{q}_0 + G\dot{\mathfrak{q}}_0;\quad \dot{\mathfrak{q}} = \dot{F}\mathfrak{q}_0 + \dot{G}\dot{\mathfrak{q}}_0,$$

in denen die skalaren Größen $F, G, \dot{F}, \dot{G}$ durch (V; 70, 71) gegeben sind. Goodyear benutzt statt der dimensionslosen transzendenten Hilfsfunktionen $c_\nu(\alpha^2 q^2)$ die Produkte

$$s_\nu = c_\nu q^\nu,$$

wodurch gewisse Vereinfachungen der Formeln erzielt werden. So erhält man, wenn man $z\tau = r_0 q$, $\tau = t - t_0$ setzt,

(XXXI; 14)
$$\begin{cases} F = 1 - c_2\mu_0\tau^2 z^2 = 1 - \dfrac{\varkappa^2}{r_0}s_2, \\ G = \tau(1 - c_3\mu_0\tau^2 z^3) = \tau - \varkappa^2 s_3, \\ \dot{F} = -c_1\mu_0\tau z\dfrac{r_0}{r} = -\dfrac{\varkappa^2}{rr_0}s_1, \\ \dot{G} = 1 - \dfrac{r_0}{r}(1 - F) = 1 - \dfrac{\varkappa^2}{r}s_2. \end{cases}$$

Die Hauptgleichung in der Form (V; 54) läßt sich dann

$$\tau = c_1 r_0 q + c_2 r_0{}^2\sigma_0 q^2 + c_3\frac{\varkappa^2}{r_0{}^3}r_0{}^3 q^3$$

oder

(XXXI; 15) $$\tau = r_0 s_1 + r_0 \dot{r}_0 s_2 + \varkappa^2 s_3$$

schreiben.

GOODYEAR benutzt die Symbole σ_0 und α in abweichender Bedeutung. Statt, wie in Kapitel V,

$$\sigma_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0}; \qquad \alpha^2 = \frac{\varkappa^2}{a}$$

schreibt er

$$\sigma_0 = r_0 \dot{r}_0 = (\mathfrak{q}_0 \dot{\mathfrak{q}}_0); \quad \alpha = -\frac{\varkappa^2}{a},$$

so daß in seiner Fassung die Hauptgleichung die Form

(XXXI; 15a) $$\tau = r_0 s_1 + \sigma_0 s_2 + \varkappa^2 s_3$$

annimmt und die s-Funktionen

$$s_0 = \cos i\alpha q = 1 + \frac{1}{2!}\alpha q^2 + \frac{1}{4!}\alpha^2 q^4 + \cdots,$$

$$s_1 = \frac{\sin i\alpha q}{i\alpha} = q\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}\alpha q^2 + \frac{1}{5!}\alpha^2 q^4 + \cdots\right),$$

. . . . . .

lauten.

Die Elemente der $\mathfrak{T}$-Matrix erhält man dann aus den vektoriellen Differentialbeziehungen

$$d\mathfrak{q} = F\, d\mathfrak{q}_0 + G\, d\dot{\mathfrak{q}}_0 + \mathfrak{q}_0\, dF + \dot{\mathfrak{q}}_0\, dG; \quad d\dot{\mathfrak{q}} = \dot{F}\, d\mathfrak{q}_0 + \dot{G}\, d\dot{\mathfrak{q}}_0 + \mathfrak{q}_0\, d\dot{F} + \dot{\mathfrak{q}}_0\, d\dot{G},$$

die aus (XXXI; 13) folgen, und die skalaren Differentiale $dF, dG, d\dot{F}, d\dot{G}$ leitet man aus (XXXI; 14) ab. GOODYEAR variiert dabei auch τ und $\varkappa^2$, worauf hier verzichtet werden darf. Feste Zwischenzeit τ bedingt aber nicht, daß auch die Pseudozeit q unverändert bleibt, was man leicht durch Variation der Hauptgleichung mit $d\tau = 0$ beweist.

Bei der recht langwierigen Ausführung der Differentiationen sind folgende leicht zu beweisende Beziehungen nützlich:

$$ds_0 = \alpha s_1 dq + \frac{\partial s_0}{\partial \alpha} d\alpha; \qquad 2\frac{\partial s_0}{\partial \alpha} = q s_1,$$

$$ds_1 = s_0 dq + \frac{\partial s_1}{\partial \alpha}\partial\alpha; \qquad 2\frac{\partial s_1}{\partial \alpha} = q s_2 - s_3 = s_1 s_2 - s_0 s_3,$$

$$ds_2 = s_1 dq + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha} d\alpha; \qquad 2\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} = q s_3 - 2 s_4 = {s_2}^2 - s_1 s_3,$$

$$ds_3 = s_2 dq + \frac{\partial s_3}{\partial \alpha} d\alpha; \qquad 2\frac{\partial s_3}{\partial \alpha} = q s_4 - 3 s_5,$$

wobei zu bemerken ist, daß $d\alpha$ nicht identisch Null ist, da ja die große Halbachse a sich mit den Anfangsbedingungen ändert.

Die 6×6-$\mathfrak{T}$-Matrix setzt sich aus vier 3×3-Matrizen zusammen:

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ \mathfrak{T}_{21} & \mathfrak{T}_{22} \end{pmatrix},$$

und es ist

$$\mathfrak{T}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix} = F\mathfrak{E}_3 + U \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} (\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0) +$$

$$+ \begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{\dot{F} s_1}{r_0} + \frac{F-1}{{r_0}^2}\right) & -\dot{F} s_2 \\ \frac{(F-1)\, s_1}{r_0} & (F-1)\, s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{T}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix} = G\mathfrak{E}_3 - U \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) +$$

$$+ \begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{F} s_2 & -(\dot{G}-1)\, s_2 \\ (F-1)\, s_2 & G s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{T}_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0} \end{pmatrix} = \dot{F}\mathfrak{E}_3 + U \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} (\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0) +$$

$$+ \begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{F}\left(\frac{s_0}{r r_0} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{{r_0}^2}\right) & -\left(\frac{\dot{F} s_1}{r} + \frac{\dot{G}-1}{r^2}\right) \\ \frac{\dot{F} s_1}{r_0} + \frac{F-1}{{r_0}^2} & \dot{F} s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{T}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix} = \dot{G}\mathfrak{E}_3 - U \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) +$$

$$+ \begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{\dot{F}s_1}{r} + \frac{\dot{G}-1}{r^2}\right) & -\frac{(\dot{G}-1)\,s_1}{r} \\ \dot{F}s_2 & (\dot{G}-1)\,s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \end{pmatrix},$$

wobei $U = s_2\tau + \varkappa^2(qs_4 - 3s_5)$ einen skalaren Parameter darstellt, der mit der Zwischenzeit τ monoton wächst und $\mathfrak{E}_3$ die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichnet.

Die inverse $\mathfrak{T}$-Matrix $\mathfrak{T}^{-1}$ läßt sich aus den vier Teilmatrizen $\mathfrak{T}_{ik}$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{T}_{11}^{-1} = \mathfrak{T}_{22}'; \quad \mathfrak{T}_{12}^{-1} = -\mathfrak{T}_{21}'; \quad \mathfrak{T}_{21}^{-1} = \mathfrak{T}_{12}'; \quad \mathfrak{T}_{22}^{-1} = \mathfrak{T}_{11}'$$

herstellen, wobei der Strich bedeutet, daß die transponierte Matrix (Zeilen und Spalten vertauscht) gemeint ist.

Alle Formeln sind streng, von der Bahnform unabhängig und erfordern die Auflösung der Hauptgleichung nach einem Näherungsverfahren. Die Anwendung der $\mathfrak{T}$-Matrix ergibt die Variation des Endzustands genau genug, wenn die Variationen klein sind, d. h. ihre Quadrate unter die Genauigkeitsschwelle der Rechnung fallen. Andernfalls lassen sich genauere Ergebnisse durch Näherungsverfahren erzielen.

260. Approximative Berechnung der $\mathfrak{T}$-Matrix für gestörte Bahnen

Im Abschnitt 258 ist gezeigt worden, daß man spezielle Störungsprobleme, statt durch numerische Integration, genähert durch vielfache Anwendung der in Kapitel V entwickelten Formeln des ungestörten Zweikörperproblems lösen kann, wobei — nicht allzu große Zwischenzeiten vorausgesetzt — durch Verwendung genügend kleiner Rechenschritte die Fehler der Annäherung klein gehalten oder auch ganz zum Verschwinden gebracht werden können.

E. H. Weiss[1]) hat gezeigt, daß dasselbe Annäherungsprinzip auch auf die Berechnung von $\mathfrak{T}$-Matrizen für gestörte Bahnen anwendbar ist, d. h., daß diese Matrizen, bis auf Restfehler von der Ordnung h^4 (h = Schrittweite) durch eine Reihe verschiedener $\mathfrak{T}$-Matrizen für ungestörte Bahnen angenähert werden können, für deren Berechnung in Abschnitt 259 strenge Formeln gegeben worden sind. Da es sich in den praktischen Anwendungen fast ausschließlich um den Einfluß infinitesimaler Variationen der Anfangsbedingungen

---

[1]) E. H. Weiss, A new method for computing the state transition matrix. J. astronaut. Sci. *16*, 121 (1969)

handelt, genügt es meist, die Reststörungen (s. Abschnitt 258) ganz zu vernachlässigen, da für genügend kleine Schrittweiten ihr Einfluß unmerklich bleibt.

Es seien $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ n Körper mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Die Reihenfolge der Zuordnung der Indizes zu den Körpern ist beliebig. Man bezeichne daher den jeweils als Zentralkörper eines Relativsystems anzusehenden Körper mit Q_1, denjenigen, dessen gestörte Bewegung relativ zu Q_1 untersucht werden soll mit Q_n. Speziell sei angenommen, daß $m_n = 0$ ist (Q_n = Planetoid, Komet oder Raumsonde). Die genäherten Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit von Q_n (ohne die Reststörungen) lassen sich dann, nach den in Abschnitt 258 abgeleiteten Formeln, durch Vektoren von der Form

$$\text{(XXXI; 16)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}] + \mathfrak{w} - (\mathfrak{w}_0 + h\dot{\mathfrak{w}}_0), \\ \dot{\mathfrak{p}} = [\dot{\mathfrak{q}}] + \dot{\mathfrak{w}} - \dot{\mathfrak{w}}_0 \end{cases}$$

darstellen. Diese Gleichungen lassen sich in Matrizenform zusammenfassen: Allgemein seien, für die genäherte Bewegung von Q_j um Q_i,

$$\mathfrak{P}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{ij} \\ \dot{\mathfrak{p}}_{ij} \end{pmatrix}, \quad [\mathfrak{Q}_{ij}] = \begin{pmatrix} [\mathfrak{q}_{ij}] \\ [\dot{\mathfrak{q}}_{ij}] \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{W}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathfrak{w}_{ij} - [\mathfrak{w}_{ij}(0) + h\dot{\mathfrak{w}}_{ij}(0)] \\ \dot{\mathfrak{w}}_{ij} - \dot{\mathfrak{w}}_{ij}(0) \end{pmatrix}$$

Vektoren mit sechs Koordinaten bzw. 6×1-Matrizen. Dann kann man

$$\mathfrak{P}_{1n} = [\mathfrak{Q}_{1n}] + \mathfrak{W}_{1n}$$

schreiben, wo

$$\mathfrak{W}_{1n} = \sum_{i=2}^{n-1} \left\{ \frac{m_i}{m_1 + m_i} ([\mathfrak{Q}_{1i}] - \mathfrak{E}[\mathfrak{Q}_{1i}(0)]) + \frac{m_i}{m_i + m_n} ([\mathfrak{Q}_{in}] - \mathfrak{E}[\mathfrak{Q}_{in}(0)]) \right\}$$

den genäherten Störungsvektor darstellt und

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_3 & h\mathfrak{E}_3 \\ 0_3 & \mathfrak{E}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine konstante 6×6-Matrix ist.

Die $\mathfrak{T}$-Matrix für den gestörten Körper Q_n hat dann die Form

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j(0)} \right),$$

wenn x_i die Koordinaten von $\mathfrak{P}_{1n}$, $x_i(0)$ die von $[\mathfrak{Q}_{1n}(0)] = \mathfrak{P}_{1n}(0)$ sind. Symbolisch schreibt man

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} \right),$$

und es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{1n}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} + \frac{\partial \mathfrak{W}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)}$$

mit

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \sum_{i=2}^{n-1} \left\{ \frac{m_i}{m_1 + m_i} \left(\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{1i}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} - \mathfrak{E} \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{1i}(0)]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_i}{m_i + m_n} \left(\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} - \mathfrak{E} \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}(0)]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} \right) \right\},$$

da $\partial \mathfrak{E} / \partial \mathfrak{P}_{1n}(0) = 0$ ist. Speziell ist nun

$$\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{1i}(0)]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq n, \\ \mathfrak{E}_6 & \text{für} \quad i = n, \end{cases}$$

da nur die Koordinaten von Q_n zur Zeit t_0 variiert werden. Wegen

$$[\mathfrak{Q}_{in}(0)] = [\mathfrak{Q}_{1n}(0)] - [\mathfrak{Q}_{1i}(0)]$$

ist also

$$\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}(0)]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \mathfrak{E}_6 \quad \text{für} \quad i \neq n$$

Andererseits ist der Vektor $[\mathfrak{Q}_{in}]$ der ungestörten Bahn von Q_n relativ zu Q_i zur Zeit $t = t_0 + h$ nur von $[\mathfrak{Q}_{in}(0)] = \mathfrak{P}_{in}(0)$ und h abhängig. Es ist also

$$\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{in}(0)} \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}(0)]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} + \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)}, \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Der zweite Term rechts verschwindet, da h eine unabhängige Konstante ist, und es war gezeigt, daß der zweite Faktor des ersten Terms gleich der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_6$ ist. Daraus folgt

$$\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{in}(0)} = \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial [\mathfrak{Q}_{in}(0)]}.$$

Ebenso beweist man

$$\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{1i}]}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq n,$$

und man erhält daher, wenn man noch $m_n = 0$ setzt,

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{in}(0)} - \mathfrak{E}_6 \right) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{in}(0)} - (n-2)\, \mathfrak{E}_6$$

und daher

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{1n}}{\partial \mathfrak{P}_{1n}(0)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial [\mathfrak{Q}_{in}]}{\partial \mathfrak{P}_{in}(0)} - (n-2) \mathfrak{E}_6. \tag{XXXI; 17}$$

Die Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung sind aber $\mathfrak{T}$-Matrizen für die ungestörten Bewegungen von Q_n um Q_i und lassen sich daher nach den Goodyearschen Formeln (Abschnitt 259) streng berechnen.

Die Gleichung (XXXI; 17) ist symmetrisch in bezug auf alle Körper $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, und es ist bemerkenswert, daß Q_1 keine Sonderstellung als Zentralkörper mehr einnimmt. Sie gilt vielmehr auch, wenn man die Körper $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ beliebig umnumeriert; man darf also jeden dieser Massenpunkte als Zentralkörper auffassen. Sie gilt also auch unabhängig davon, welche der $n - 1$ auf Q_n wirkenden Massen jeweils den größten Gravitationseinfluß hat, und es ist daher kein Wechsel des Koordinatensystems erforderlich, wenn der Körper aus dem Einflußbereich einer Masse in den einer anderen übertritt.

Es ist leicht einzusehen, daß der Fehler der Approximation von der Ordnung h^4 ist, ebenso wie dies für die genäherte Störungsrechnung (ohne Integration der Restterme) gilt. Den einfachen Beweis möge man in der Originalabhandlung nachlesen, in der auch eindrucksvolle numerische Beispiele gegeben sind.

261. Iterative Lösung des Störungsproblems durch Lie-Reihen

Alle Methoden der Störungsrechnung, mögen sie numerisch oder analytisch sein, spezielle oder allgemeine Störungen liefern, beruhen in irgendeiner Weise auf Näherungsverfahren. Wir bezeichnen solche Lösungsmethoden als iterativ, wenn jeder Näherungsschritt nach demselben Algorithmus vor sich geht, jedoch mit Daten, die aus den vorhergehenden Schritten bekannt geworden sind. Zu diesen iterativen Methoden gehört z. B. auch das auf einem Rekursionsmechanismus basierende Verfahren von STEFFENSEN—BROUCKE, das wir in Abschnitt 257 beschrieben haben.

W. GRÖBNER hat gezeigt, daß mit Hilfe der LIE-Reihen (Abschnitt 204) der iterativen Lösung von Störungsproblemen eine sehr allgemeine Form gegeben werden kann. Obwohl die praktische Anwendung dieser Idee noch wenig erprobt und ihre Zweckdienlichkeit umstritten ist,[1]) sind die theoretischen Überlegungen, auf denen sie beruht, so interessant, daß wir sie hier nicht übergehen können.

Es sei wieder, wie in Abschnitt 205, ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\text{(XXXI; 18)} \qquad \frac{dz_i}{dt} = \vartheta_i(z) = \vartheta_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vorgelegt, das in autonome Form gebracht sei, wenn dies nicht schon von vornherein der Fall gewesen sein sollte. Man erhält dann die allgemeine Lösung des Systems (XXXI; 18) mit Hilfe des Operators

$$D = \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \vartheta_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

---

[1]) Eine kritische Studie über diese Frage stammt von P. SCONZO: Applications of LIE series to the solutions of celestial mechanics problems. Publ. IBM Corp., Cambridge/Mass. 1967.

in der Form

$$z_i(t) = e^{(t-t_0)D} z_i|_{z=\zeta_i}, \text{ oder abgekürzt } z_i = e^{(t-t_0)D}\zeta_i$$

mit den Integrationskonstanten

$$z_i(t_0) = \zeta_i .$$

Nun möge der Differentialoperator D als Summe zweier Teiloperatoren,

$$D = D_1 + D_2 ,$$

geschrieben werden, und diese sollen folgende Eigenschaften haben:

1. D_1 muß so beschaffen sein, daß die LIE-Reihen

$$L_1 = e^{(t-t_0)D_1}\zeta , \qquad D_1 = \vartheta_{11}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \vartheta_{1n}\frac{\partial}{\partial z_n}$$

bekannte Funktionen der ζ und der Zeit sind. Dies haben wir in Abschnitt 205 und 206 an einfachen Beispielen, u. a. am ungestörten Zweikörperproblem, gezeigt.

2. D_2 muß, verglichen mit D_1, klein sein, d. h., die Koeffizienten von

$$D_2 = \vartheta_{21}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \vartheta_{2n}\frac{\partial}{\partial z_n}$$

sollen ihren Beträgen nach durchschnittlich merklich kleiner als diejenigen von D_1 sein.

Die vollständige Lösung des Systems (XXXI; 18) lautet dann, mit $\tau = t - t_0$,

(XXXI; 19)

$$z_i = e^{\tau(D_1+D_2)}\zeta_i = \left[1 + \tau\,(D_1 + D_2) + \frac{\tau^2}{2!}(D_1 + D_2)^2 + \cdots\right]\zeta_i .$$

Es muß dabei beachtet werden, daß im allgemeinen die Operatoren D_1 und D_2 nicht vertauschbar sind, so daß z. B.

$$(D_1 + D_2)^2 = D_1^2 + D_1D_2 + D_2D_1 + D_2^2$$

geschrieben werden muß. Ein einfaches Beispiel dafür bilden die Differentialgleichungen (XII; 32) des reduzierten Dreikörperproblems. Wenn wir es als Störungsproblem auffassen, so lauten die Differentialgleichungen für die Invarianten p_{11}, p_{12}, p_{22}, durch welche die Bewegung eines gestörten Planeten in seiner instantanen Bahnebene beschrieben wird, und wenn m_1 die Masse des störenden Planeten ist, die Massensumme und die Gravitationskonstante gleich 1 gesetzt werden,

(XXXI; 20)

$$\begin{cases} \dot{p}_{11} = 2p_{12} , \\ \dot{p}_{12} = p_{22} - p_{11}^{-1/2} + m_1 p_1 , \\ \dot{p}_{22} = -2\,(p_{12}p_{11}^{-3/2} - m_1 p_2) \end{cases}$$

mit den Bezeichnungen des Abschnitts 109. Vorausgesetzt, daß die Bewegung des störenden Planeten als bekannt angenommen werden darf, erhält man die Lösung des Systems (XXXI; 20) in der Form

$$p_{11} = e^{\tau D} p_{11}(0); \qquad p_{12} = e^{\tau D} p_{12}(0); \qquad p_{22} = e^{\tau D} p_{22}(0)$$

mit

$$D = 2p_{12}\frac{\partial}{\partial p_{11}} + (p_{22} - p_{11}^{-1/2} + m_1 p_1)\frac{\partial}{\partial p_{12}} - 2(p_{12}p_{11}^{-3/2} - m_1 p_2)\frac{\partial}{\partial p_{22}}.$$

Setzt man nun $D = D_1 + D_2$ und

$$D_1 = 2p_{12}\frac{\partial}{\partial p_{11}} + (p_{22} - p_{11}^{-1/2})\frac{\partial}{\partial p_{12}} - 2p_{12}p_{11}^{-3/2}\frac{\partial}{\partial p_{22}},$$

$$D_2 = m_1 p_1 \frac{\partial}{\partial p_{12}} + 2m_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_{22}},$$

so entspricht die intermediäre Lösung

$$p_{11} = e^{\tau D_1} p_{11}(0); \qquad p_{12} = e^{\tau D_1} p_{12}(0); \qquad p_{22} = e^{\tau D_1} p_{22}(0)$$

dem ungestörten Problem, während im gestörten D_1 durch den Störungsoperator D_2 zu ergänzen ist, dessen Koeffizienten wegen des Faktors m_1 klein sind. Dann ist aber

$$D_1 p_{11} = 2p_{12}; \qquad D_2 p_{11} = 0$$

und daher

$$D_1 D_2 p_{11} = 0; \qquad D_2 D_1 p_{11} = 2D_2 p_{12} = 2m_1 p_1;$$

also verschwindet $(D_1 D_2 - D_2 D_1)\, p_{11}$ nicht identisch.

Unter Beachtung der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren kann man in der Lösung (XXXI; 19) des Systems (XXXI; 18) auch

$$D = D_1 + D_2,$$

$$D^2 = D_1^2 + D_1 D_2 + D_2 D,$$

$$D^3 = D_1^3 + D_1^2 D_2 + D_1 D_2 D + D_2 D^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzen. Das führt auf die allgemeine Formel

$$D^n = D_1^n + D_1^{n-1} D_2 + D_1^{n-2} D_2 D + D^{n-3} D_2 D^2 + \cdots + D_2 D^{n-1},$$

deren Gültigkeit man durch vollständige Induktion beweist, nachdem gezeigt worden ist, daß sie für $n = 1, 2, 3$ gilt. Jedes D^n zerfällt also in $n + 1$ Summanden:

$$D^n = D_1^n + \sum_{\nu=1}^{n} D_1^{n-\nu} D_2 D^{\nu-1},$$

und jeder Summand ist vom Grade n und so beschaffen, daß der Faktor D_2 sich von hinten an um je eine Stelle nach vorn schiebt und daß die vorderen Faktoren Potenzen von D_1, die hinteren jedoch Potenzen von D sind. Die Entwicklung (XXXI;19) läßt sich daher auch in der Form

$$(\text{XXXI};\ 21)\qquad z_i = \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^{\nu-1}D_2 + \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^{\nu-2}D_2D + \cdots + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^{\nu-\alpha}D_2D^{\alpha-1} + \cdots\right]\zeta_i$$

schreiben.

Die erste Summe,

$$f_0(\zeta,\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^\nu\zeta,$$

enthält alle Terme, in denen nur Potenzen von D_1 vorkommen, und symbolisiert daher die intermediäre Bahn. Der zweite Term enthält D_2 nur einmal, und zwar an letzter Stelle. Der dritte Term umfaßt alle Glieder, in denen D_2 an vorletzter Stelle, aber auch in dem Faktor D am Schluß erscheint, usw. Diese Form der Entwicklung ist insofern unbefriedigend, als die Störungen verschiedener Ordnung, die durch Potenzen von D_2 gekennzeichnet sind, nicht getrennt auftreten. Im Gegenteil findet man Störungsterme erster Ordnung in sämtlichen Summen außer der ersten, Störungsterme zweiter Ordnung in allen Summen außer den ersten beiden, usw. Um Störungen verschiedener Ordnung zu trennen, müssen die Summen in (XXXI;21) umgeordnet werden, was natürlich die absolute Konvergenz der Reihen voraussetzt.

Wir begnügen uns hier damit, die Störungsterme erster Ordnung auszusondern. Allen Summen in (XXXI;21) sind dann die Summanden zu entnehmen, in denen D_2 nur in der ersten Potenz vorkommt. Aus jener Summe, die mit $\nu = \alpha$ beginnt, erhalten wir die Teilsumme

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^{\nu-\alpha}D_2D_1{}^{\alpha-1}.$$

Dann sind sämtliche Störungsglieder erster Ordnung in der Doppelsumme

$$f_1(\zeta,\tau) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\frac{\tau^\nu}{\nu!}D_1{}^{\nu-\alpha}D_2D_1{}^{\alpha-1}\zeta$$

enthalten, die man auch

$$(\text{XXXI};\ 22)\qquad f_1(\zeta,\tau) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\tau^{\nu+\alpha+1}}{(\nu+\alpha+1)!}D_1{}^\alpha D_2D_1{}^\nu\zeta$$

schreiben kann. Jede Teilsumme, die τ^n mit $n = \nu + \alpha + 1$ enthält, besteht aus n Gliedern, in denen D_2 jede mögliche Position zwischen den $n-1$ Faktoren D_1 einnimmt. Ähnliche Überlegungen führen zu entsprechenden Ausdrücken $f_n(\tau, z)$ für die Störungen n-ter Ordnung.

GRÖBNER schlägt noch ein anderes Verfahren vor, das der Lösung

$$z(\tau) = [f_0(z, \tau) + f_1(z, \tau) + \cdots]_{z=\zeta}$$

die Form einer Integralgleichung verleiht. Er schreibt das allgemeine Glied der Reihe (XXXI; 21)

$$\text{(XXXI; 23)} \qquad \sum_{\nu=\alpha}^{\infty} \frac{\tau^\nu}{\nu!} D_1^{\nu-\alpha} D_2 D^{\alpha-1}\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\tau^{\nu+\alpha}}{(\nu+\alpha)!} D_1^\nu D_2 D^{\alpha-1}\zeta$$

und benutzt die Identität

$$\frac{\tau^{\nu+\alpha}}{(\nu+\alpha)!} = \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\sigma^\nu}{\nu!} d\sigma,$$

die sich leicht durch wiederholte partielle Integration der rechten Seite beweisen läßt, um der Summe (XXXI;23) die Integralform

$$I_\alpha = \int_0^\tau \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\tau-\sigma)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\sigma^\nu}{\nu!} D_1^\nu D_2 D^{\alpha-1}\zeta d\sigma$$

zu geben. Summiert man nun alle diese Ausdrücke mit dem Index α und vertauscht α mit $\alpha + 1$, so kann man statt (XXXI; 21)

$$z(\tau) = f(\tau, \zeta) = f_0(\tau, \zeta) + \int_0^\tau \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\tau-\sigma)^\alpha}{\alpha!} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma^\nu}{\nu!} D_1^\nu D_2 D^\alpha \zeta \right) d\sigma$$

schreiben. In der inneren Summe im Integranden ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma^\nu}{\nu!} D_1^\nu = e^{\sigma D_1}$$

und nach dem Vertauschungssatz (XXIV; 6)

$$e^{\sigma D_1}(D_2 D^\alpha)\zeta = D_2 D^\alpha (e^{\sigma D_1}\zeta) = D_2 D^\alpha f_0.$$

Mithin erhält man

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\tau-\sigma)^\alpha}{\alpha!} D_2 D^\alpha f_0 = D_2 \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\tau-\sigma)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f_0 = D_2 f(\tau-\sigma, z)_{z=f_0}$$

und schließlich

$$z(\tau) = f_0(\tau, \zeta) + \int_0^\tau D_2 f(\tau-\sigma, z)_{z=f_0} d\sigma.$$

Diese Integralgleichung kann durch Iteration gelöst werden, und dieser Prozeß wird rasch konvergieren, wenn der Störungsoperator klein genug ist. Die ersten beiden Iterationsschritte führen zu der gestörten Bewegung mit Einschluß der Störungen erster Ordnung:

Am Anfang steht die intermediäre Bahn

$$z^{(0)} = f_0(\tau, \zeta) = e^{\tau D_1}\zeta,$$

und der nächste Schritt ergibt

$$z^{(1)} = f_0 + \int_0^\tau D_2 f_0(\tau - \sigma, z)_{z=z^{(0)}}\, d\sigma,$$

wobei der Integrand mit den ungestörten Funktionswerten berechnet wird. Es läßt sich leicht zeigen, daß das Integral mit der Doppelsumme (XXXI;22) identisch ist, die wir oben für die Störungen erster Ordnung abgeleitet haben.

262. Die Exhaustionsmethode von Delaunay

In vielen Fällen genügen Kegelschnittsbewegungen als intermediäre (evtl. oskulierende) Lösungen des Störungsproblems. Dies ist immer dann vernünftig, wenn die Störungen, d. h. die Abweichungen der wahren von der intermediären Bewegung, für lange Zeiten vor und nach der Epoche klein bleiben. Das ist im allgemeinen der Fall für Planetoiden mit kleiner Exzentrizität und kleiner Bahnneigung gegen die Bewegungsebene des störenden Planeten (Jupiter). In anderen Fällen werden ungestörte Ellipsen als intermediäre Bahnen nicht ausreichen, so z. B. für die Theorie des Mondes und der äußeren Satelliten der großen Planeten.

Man wird dann nach intermediären Lösungen suchen, die wesentliche Teile der Störungen enthalten und die man aus vollständig integrablen Differentialgleichungssystemen ableiten kann. Die klassische Methode dieser Art stammt von CH. E. DELAUNAY. Sie beschränkt sich nicht, wie die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Verfahren, auf die numerische Lösung spezieller Probleme, sondern strebt den Aufbau analytischer Theorien an. DELAUNAY hat seine Methode mit Erfolg auch auf die Bewegung des Mondes angewandt.

Wir bezeichnen DELAUNAYS Methode als exhaustiv, weil im Laufe eines Iterationsprozesses die intermediäre Lösung sukzessive durch säkulare und periodische Terme vervollständigt wird, die andererseits aus der Störungsfunktion verschwinden, bis diese erschöpft ist, d. h. der noch verbleibende Rest klein genug ist, um vernachlässigt oder durch Quadratur integrierbar zu werden. In der Theorie des Mondes erfordert dieses Verfahren eine große Anzahl solcher „Operationen", wie DELAUNAY die einzelnen Eliminationsschritte bezeichnet. Heute haben wir gelernt, nach den zuerst von HILL, BROWN, VON ZEIPEL und anderen entwickelten Methoden, diese langwierige Arbeit beträchtlich abzukürzen, indem wir aus der Störungsfunktion in einem Rechnungsgang nicht nur *einen* periodischen Term, sondern eine ganze Gruppe (z. B. alle säkularen, alle kurz- oder alle langperiodischen Terme) eliminieren. Diese rasch fördernden Methoden, speziell die VON ZEIPELsche, sollen im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben werden. Ein spezielles und besonders

einfaches Beispiel für die Anwendung dieser Methode haben wir bereits in Abschnitt 188 vorweggenommen: die Theorie der Bewegung eines künstlichen Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde, die etwas ausführlicher in dem Lehrbuch von BROUWER und CLEMENCE behandelt ist.

Im Hauptproblem der Mondtheorie (s. Abschnitt 173) werden drei punktförmige Massen m_0 (Erde P_0), m (Mond P) und m_1 (Sonne P_1) angenommen und JACOBIsche Koordinaten (Abb. 17, S. 404) eingeführt. Dann bewegt sich, wie wir in Abschnitt 173 bewiesen haben, P_1 um den Massenmittelpunkt G von P_0 und P in einer Bahn, die genau genug durch eine ungestörte KEPLERsche Ellipse dargestellt werden kann.

Die Bewegung von P relativ zu P_0 genügt den kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XXXI; 24)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}; & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}; & \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}; & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}; & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H} \end{cases}$$

für die DELAUNAYschen Elemente

$$\text{(XXXI; 25)}\qquad \begin{cases} L = \sigma\sqrt{a}\,; & G = L\sqrt{1-e^2}\,; & H = G\cos i, \\ l = nt + \gamma; & g = \omega = \tilde{\omega} - \Omega; & h = \Omega, \\ \sigma = \varkappa\dfrac{m_0 m}{\sqrt{m_0 + m}}; & n = \varkappa\sqrt{m_0 + m}\,a^{-3/2}, & \end{cases}$$

wenn a, e, i, Ω, $\tilde{\omega}$, γ die variablen Elemente der geozentrischen Bewegung des Mondes bedeuten und $\varkappa$ die Gravitationskonstante, ausgedrückt in den gewählten Einheiten von Zeit, Länge und Masse, bezeichnet. Wir vermeiden hier den Buchstaben k, der gewöhnlich für diese Konstante verwendet wird, weil wir ihn in diesem und dem nächsten Abschnitt vorübergehend in einer anderen Bedeutung verwenden werden.

Die Bewegung von P_1 um G genügt dem System

$$\text{(XXXI; 26)}\qquad \frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_1}; \ \ldots; \quad \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H_1}$$

für die entsprechenden Elemente

$$\text{(XXXI; 27)}\qquad \begin{cases} L_1 = \sigma_1\sqrt{a_1}; & G_1 = L_1\sqrt{1-{e_1}^2}\,; & H_1 = G_1\cos i_1, \\ l_1 = n_1 t + \gamma_1; & g_1 = \omega_1 = \tilde{\omega}_1 - \Omega_1; & h_1 = \Omega_1, \\ \sigma_1 = \varkappa m_1\sqrt{\dfrac{m_0(m_0+m)}{m_0+m+m_1}}; & n_1 = \varkappa\sqrt{\dfrac{m_0+m+m_1}{m_0+m}}\,{a_1}^{-3/2}. & \end{cases}$$

Die zwölf Differentialgleichungen (XXXI; 24, 26) bilden ein vollständiges kanonisches System mit der HAMILTONschen Funktion

$$F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} + \frac{{\sigma_1}^4}{2\mu_1 {L_1}^2} + \varkappa^2 m m_1 R,$$

$$\mu = \frac{m_0 m}{m_0 + m}; \quad \mu_1 = m_1 \frac{m_0 + m}{m_0 + m + m_1}; \quad \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} = \varkappa^2 \frac{m_0 m}{2a}; \quad \frac{{\sigma_1}^4}{2\mu_1 {L_1}^2} = \varkappa^2 \frac{m_0 m_1}{2a_1}$$

und der Störungsfunktion

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{{r_1}^3}.$$

Die Gleichungen (XXXI; 24) ändern sich nicht, wenn man L, G, H, F durch einen gleichen Faktor, z. B. m, dividiert. Ebenso bleiben die Gleichungen (XXXI; 26) unverändert gültig, wenn man L_1, G_1, H_1 und F durch m_1 dividiert. Man erhält dann die halbkanonischen Systeme

$$\text{(XXXI; 28a)} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \ \ldots, \ \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}; \quad \sigma = \varkappa \frac{m_0}{\sqrt{m_0 + m}}, \ \mu = \frac{m_0}{m_0 + m},$$

$$\text{(XXXI; 28b)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL_1}{dt} = \dfrac{\partial F_1}{\partial l_1}, \ \ldots, \ \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H_1}; \ \sigma_1 = \varkappa \sqrt{\dfrac{m_0(m_0 + m)}{m_0 + m + m_1}}, \\ \mu_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 + m + m_1} \end{cases}$$

mit den HAMILTONschen Funktionen

$$F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} + \varkappa^2 m_1 R; \quad F_1 = \frac{{\sigma_1}^4}{2\mu_1 {L_1}^2} + \varkappa^2 m R \approx \frac{{\sigma_1}^4}{2\mu_1 {L_1}^2} = F_1(L_1).$$

In F_1 dürfen wir die Störungsfunktion R vernachlässigen, da der Faktor m sehr klein und R selbst wegen der großen Nenner Δ und r_1 klein ist. Die Gleichungen (XXXI; 28b) reduzieren sich daher auf

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dG_1}{dt} = \frac{dH_1}{dt} = \frac{dg_1}{dt} = \frac{dh_1}{dt} = 0$$

und

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial F_1}{\partial L_1} = \frac{{\sigma_1}^4}{\mu_1 {L_1}^3} = \varkappa \sqrt{\frac{m_0(m_0 + m + m_1)}{m_0 + m}} = n_1,$$

deren Lösungen konstante Werte L_1, G_1, H_1, g_1, h_1 und für die mittlere Anomalie der baryzentrischen Sonnenbahn den linearen Ausdruck

$$l_1 = n_1 t + \gamma_1, \qquad (\gamma_1 = \text{const})$$

liefern.

Die Störungsfunktion R kann man sich nach (XXIII; 31) in eine trigonometrische Reihe

$$(\text{XXXI; 29}) \qquad R = \sum C \cos (il + jl_1 + D) = \sum C \cos \Gamma$$

entwickelt denken; die Koeffizienten C sind Funktionen der linearen Elemente L, G, H der Mondbahn und der konstanten Elemente L_1, G_1, H_1 der Sonnenbahn. Die Phasenwinkel D hängen von den Variablen g, h und den Konstanten g_1, h_1 ab.

R ist eine geometrische Größe und deshalb von der Orientierung des Koordinatensystems im Raum unabhängig. Wir können infolgedessen dieses System so wählen, daß die x, y-Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt, die unter den getroffenen Annahmen als fest angesehen werden darf. Ferner möge die Anfangsrichtung der Längenzählung nach dem Perigäum der Sonnenbahn zeigen.

Gemäß (XXV; 19, 20) haben die Argumente Γ der Cosinusterme in (XXXI; 29) die Form

$$\Gamma = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_3 \tilde{\omega} + \alpha_4 \tau + \alpha_5 \tilde{\omega}_1; \qquad \sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 0,$$

wo λ, λ_1 die mittleren Längen von P und P_1, ferner $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}_1$ ihre Perigäumslängen und $\tau = \Omega$ die Länge des auf- oder absteigenden Knotens der Mondbahnebene in bezug auf die Ekliptik bedeuten. Da wir $\tilde{\omega}_1 = 0$ gewählt haben, ist

$$\Gamma = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_3 \tilde{\omega} + \alpha_4 \Omega,$$

und die Summe der ganzzahligen Koeffizienten α_i muß *nicht* verschwinden. Da

$$\lambda = l + g + h; \qquad \lambda_1 = \tilde{\omega}_1 + l_1 = l_1; \qquad \tilde{\omega} = g + h; \qquad \Omega = h$$

ist, können wir schreiben

$$\Gamma = \alpha_1 l + (\alpha_1 + \alpha_3)\, g + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)\, h + \alpha_2 l_1$$

oder

$$\Gamma = p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 l_1$$

mit ganzzahligen p_i, von denen eines, etwa p_1, ohne Einschränkung der Allgemeinheit als positiv angenommen werden darf.

Die Hamiltonsche Funktion des Systems (XXXI; 28a),

$$(\text{XXXI; 30}) \qquad F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} + \varkappa^2 m_1 R = \varkappa^2 \left(\frac{m_0}{2a} + m_1 \sum C \cos \Gamma \right),$$

ist eine Funktion der Variablen L, G, H, l, g, h, der Konstanten L_1, G_1, X_1, die in den Koeffizienten C vorkommen, und von $l_1 = n_1 t + \gamma_1$. Die letztere Größe, die nicht zu den variablen Elementen der Mondbahn gehört, führt die Zeit t explizite in die Hamiltonsche Funktion ein. Um dies zu vermeiden, betrachten wir l_1 als siebente Variable des Problems. Dann würde aber das

System nicht mehr kanonisch sein, denn die Gleichungen

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial l_1}; \quad \frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial L_1}$$

sind zwar gültig für $\Phi = F_1(L_1)$, aber nicht für $\Phi = F$. Es ist dagegen möglich, es kanonisch zu machen, wenn man statt (XXXI; 30)

$$\text{(XXXI; 30a)} \qquad F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} - n_1 K + \varkappa^2 m_1 \sum C \cos \Gamma$$

schreibt, mit K als einer neuen Variablen, die *nicht* in der Störungsfunktion vorkommt. Setzt man dann $l_1 = k$, so kann man dem System (XXXI; 28a) die beiden Gleichungen

$$\text{(XXXI; 31)} \qquad \frac{dK}{dt} = \frac{\partial F}{\partial k}; \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial K} = n_1$$

hinzufügen. Die Gleichungen (XXXI; 28a) und (XXXI; 31) bilden dann zusammen ein vollständiges kanonisches System, dessen Hamiltonsche Funktion die Zeit nicht explizite enthält. Die durch die erste Gleichung (XXXI; 31) willkürlich eingeführte Funktion $K(t)$ dient nur als formale Hilfe und ist für das Problem selbst ohne besondere Bedeutung.

263. Die intermediäre Bahn. Die Delaunayschen Operationen

Aus Symmetriegründen setzen wir nun

$$L = L_1; \quad G = L_2; \quad H = L_3; \quad K = L_4,$$
$$l = l_1; \quad g = l_2; \quad h = l_3; \quad k = l_4.$$

Das System (XXXI; 28a, 31) kann dann

$$\text{(XXXI; 32)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l_i}; \quad \dfrac{dl_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ F = \dfrac{\sigma^4}{2\mu {L_1}^2} - n_1 L_4 + \varkappa^2 m_1 R; \quad R = \sum C \cos \Gamma, \\ \Gamma = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4; \quad C = C(L_1, L_2, L_3) \end{cases}$$

geschrieben werden, und wir nehmen an, daß $p_1 > 0$ ist. Ist $p_1 = 0$, so wird ein anderes $p_i \neq 0$ dessen Rolle übernehmen und als positive ganze Zahl angesehen werden dürfen.

Die Gleichungen (XXXI; 32) bilden ein vollständiges kanonisches System, dessen Hamiltonsche Funktion die Zeit nicht explizite enthält. Man kann sie mit Nutzen verwenden, wenn F irgendeine beliebige Funktion der acht Variablen bedeutet. Setzt man zum Beispiel $R = 0$, so wird die Lösung des

Systems (XXXI; 32) KEPLERsche Ellipsen ergeben, denn aus

$$F = \frac{\sigma^4}{2\mu {L_1}^2} - n_1 L_4$$

leitet man

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{\sigma^4}{\mu {L_1}^3} = n, \quad \frac{dl_4}{dt} = n_1; \quad l_1 = nt + \gamma, \quad l_4 = n_1 t + \gamma_1$$

ab, und alle übrigen Elemente sind konstant, da F ihre konjugiert kanonischen Elemente nicht enthält.

Nehmen wir andererseits an, daß R, außer einem konstanten Term, nur einen einzigen Kosinusterm enthält, so ist dies die Vorbedingung für eine DELAUNAYsche Operation. Man wird etwa eines der durch die analytische Entwicklung der Störungsfunktion gelieferten periodischen Glieder auswählen, das nach erfolgter Integration einen Term gleicher Periode und mit möglichst großer Amplitude hervorzurufen verspricht. Wir werden uns darauf beschränken, an einem formalen Beispiel diesen Eliminationsprozeß zu erläutern. Wir führen statt F die einfachere HAMILTONsche Funktion

$$\text{(XXXI; 33)} \quad F' = \frac{\sigma^4}{2\mu {L_1'}^2} - n_1 L_4' - [\Psi + \Phi \cos (p_1 l_1' + p_2 l_2' + p_3 l_3' + p_4 l_4')]$$

in (XXXI; 32) ein, wobei Φ und Ψ Funktionen von L_1', L_2', L_3' allein sind. Es sind dann die acht Größen L_i', l_i' Variable, die die Elemente der intermediären Bahn als Funktionen der Zeit definieren und Lösungen des kanonischen Systems

$$\text{(XXXI; 34)} \quad \frac{dL_i'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial l_i'}; \quad \frac{dl_i'}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial L_i'}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sind. Um die vollständige Integrabilität dieses Systems zu zeigen, führen wir eine kanonische Transformation aus, durch die ohne Änderung der HAMILTONschen Funktion die L_i', l_i' in Θ_i, ϑ_i übergeführt werden. Solch eine Transformation ist nach Abschnitt 124 kanonisch, wenn

$$\sum_i L_i' dl_i' = \sum_i \Theta_i \, d\vartheta_i$$

ist. Setzen wir speziell

$$\vartheta_1 = \sum_i p_i l_i'; \quad \vartheta_2 = l_2'; \quad \vartheta_3 = l_3'; \quad \vartheta_4 = l_4',$$

dann folgt

$$\begin{aligned} &L_1' \, dl_1' + L_2' \, dl_2' + L_3' \, dl_3' + L_4' \, dl_4' = \\ &= \Theta_1 \sum_i p_i \, dl_i' + \Theta_2 \, dl_2' + \Theta_3 \, dl_3' + \Theta_4 \, dl_4' \end{aligned}$$

und, da wir $p_1 > 0$ vorausgesetzt haben,

$$\text{(XXXI; 35)} \quad \begin{cases} L_1' = p_1 \Theta_1; \; L_2' = p_2 \Theta_1 + \Theta_2; \; L_3' = p_3 \Theta_1 + \Theta_3; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad L_4' = p_4 \Theta_1 + \Theta_4, \\ l_1' = \dfrac{1}{p_1} (\vartheta_1 - p_2 \vartheta_2 - p_3 \vartheta_3 - p_4 \vartheta_4); \quad l_2' = \vartheta_2; \; l_3' = \vartheta_3; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l_4' = \vartheta_4. \end{cases}$$

Die neuen Differentialgleichungen sind dann

$$\text{(XXXI; 36)} \qquad \frac{d\Theta_i}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial \vartheta_i}; \quad \frac{d\vartheta_i}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial \Theta_i}$$

mit der HAMILTONschen Funktion

$$\text{(XXXI; 36a)} \quad F' = \frac{\sigma^4}{2\mu p_1^2 \Theta_1^2} - n_1 (p_4 \Theta_1 + \Theta_4) - [\Psi + \Phi \cos \vartheta_1],$$

die nicht mehr von ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 abhängt. Daher sind Θ_2, Θ_3, Θ_4 Konstante, die durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Insbesondere ist wie zuvor

$$\frac{d\Theta_4}{dt} = 0; \quad \frac{d\vartheta_4}{dt} = n_1; \quad \vartheta_4 = n_1 t + \gamma_1;$$

Θ_4 ist uninteressant und darf in (XXXI; 36a) gestrichen werden.

Es wird also genügen, die Gleichungen

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial \vartheta_1}; \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial \Theta_1}$$

zu lösen, da Θ_2, Θ_3 und ϑ_4 von Anfang an bekannt sind, und die Variablen ϑ_2, ϑ_3 lassen sich dann durch Quadraturen bestimmen, da ihre Ableitungen Funktionen von $\Theta_1(t)$ sind.

Der besseren Übersicht wegen setzen wir jetzt $\Theta_1 = x$, $\vartheta_1 = y$ für die beiden eigentlichen Variablen des Problems. Dann ist

$$F'(x, y) = -[P(x) + Q(x) \cos y],$$

$$P = -\frac{\sigma^4}{2\mu p_1^2 x^2} + n_1 p_4 x + \Psi(x, \Theta_2, \Theta_3), \quad Q = \Phi(x, \Theta_2, \Theta_3)$$

und

$$\text{(XXXI; 37)} \qquad \frac{dx}{dt} = Q \sin y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \cos y.$$

Diese Gleichungen haben das Integral

$$\text{(XXXI; 37a)} \quad -F'(x, y) = P(x) + Q(x) \cos y = C = \text{const},$$

aus dem man unmittelbar folgert, daß

1. x eine periodische Funktion von y mit der Periode 2π ist,
2. x eine gerade Funktion von y ist, da (XXXI; 37a) sich nicht ändert, wenn man y mit $-y$ vertauscht. Man darf daher schreiben

$$\text{(XXXI; 38a)} \qquad x = a_0 + a_1 \cos y + a_2 \cos 2y + a_3 \cos 3y + \cdots$$

und ebenso

$$\text{(XXXI; 38b)} \quad \frac{dy}{dt} = b_0 + b_1 \cos y + b_2 \cos 2y + b_3 \cos 3y + \cdots.$$

Nun ist Q eine sehr kleine Größe. Im Mondproblem ist sie (s. Kapitel XXXIII) mindestens von der Ordnung $n_1{}^2a^2 \approx k^2 m_1 a^2 a_1{}^{-3}$. Daher folgt aus (XXXI; 37, 37a), daß x und dy/dt im allgemeinen um Werte oszillieren, die merklich von Null verschieden sind. Insbesondere wird y im allgemeinen monoton zu- oder abnehmen, d. h., das Argument des ausgewählten periodischen Terms wird alle Werte von 0 bis 2π monoton durchlaufen. Dies ist gewiß richtig, wenn y Vielfache der mittleren Anomalien l oder l_1 oder beider enthält, vorausgesetzt daß der Ausdruck $p_1 n + p_4 n_1$ nicht sehr klein oder gar Null ist. Dieser „Kommensurabilitätsfall" möge hier ausgeschlossen bleiben, da wir uns auf typische Fälle beschränken wollen. In Wirklichkeit ist das Problem sehr komplex, und verschiedene Periodizitäten erfordern unter Umständen verschiedene Eliminationsmethoden (siehe Bd. III des „Traité" von TISSERAND).

Wenn wir annehmen, daß dy/dt immer positiv ist und die b_i mit wachsender Ordnung rasch abnehmen, so wird man statt (XXXI; 38b)

$$dt = (\beta_0 + \beta_1 \cos y + \beta_2 \cos 2y + \cdots)\, dy$$

schreiben dürfen, und der Faktor von dy wird positiv und endlich sein. Durch Integration ergibt sich dann

$$t + c = \beta_0 y + \beta_1 \sin y + \frac{1}{2}\beta_2 \sin 2y + \cdots, \quad (c = \text{const})$$

oder

$$y' = \nu t + \varepsilon = y + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sin iy; \quad \gamma_i = \frac{\beta_i}{i\beta_0}; \quad \nu = \frac{1}{\beta_0}; \quad \varepsilon = \frac{c}{\beta_0}.$$

Wären alle γ_i mit Ausnahme von γ_1 Null, so wäre diese Gleichung mit der KEPLERschen Gleichung identisch und ließe sich mit den in Abschnitt 35 beschriebenen Methoden lösen. Auch wenn $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ nicht verschwinden, aber rasch gegen Null abnehmen, wird man über eine Folge von Näherungen eine Lösung

(XXXI; 39a) $$y = y' + y_1 \sin y' + y_2 \sin 2y' + \cdots$$

finden, und setzt man diese in (XXXI; 38a) ein, so erhält man

(XXXI; 39b) $$x = x_0 + x_1 \cos y' + x_2 \cos 2y' + \cdots .$$

Das Verfahren, die Koeffizienten x_i, y_i durch Näherungsmethoden zu bestimmen, ist sehr umständlich, wenn man es bis zu hohen Ordnungen ausdehnen will, aber verhältnismäßig einfach, wenn die Reihen rasch genug konvergieren.

Wenn wir diese Koeffizienten als Funktionen einer neuen Variablen x' ansehen, so definieren die Gleichungen (XXXI; 39a, b) eine Transformation $x, y \to x', y'$. Diese Transformation wird kanonisch sein und zu

$$x' = \text{const}; \qquad y' = \nu t + \varepsilon$$

führen, wenn die in den neuen Variablen ausgedrückte HAMILTONsche Funktion $F' = F'(x')$ von y' unabhängig ist. Dann ist

$$\text{(XXXI; 40)} \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial y'} = 0, \quad x' = \text{const}; \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial x'} = \text{const} = \nu .$$

Die Konstante x' wird dann eine Funktion der x_i, y_i sein und kann als solche folgendermaßen bestimmt werden:

Eine notwendige Bedingung, daß die Transformation (39a, b) kanonisch sei, ist (s. Abschnitt 123), daß die LAGRANGEsche Klammer

$$\text{(XXXI; 41)} \qquad [x', y'] = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'} = 1$$

ist. Die übrigen Bedingungen, $[x', x'] = [y', y'] = 0$, sind identisch erfüllt. Daher ist (XXXI; 41) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Führt man (XXXI; 39a, b) in (XXXI; 41) ein, so folgt

$$\left[\frac{dx_0}{dx'} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{dx_i}{dx'}\cos iy'\right]\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} iy_i \cos iy'\right] + \sum_{i=1}^{\infty} ix_i \sin iy' \sum_{i=1}^{\infty}\frac{dy_i}{dx'}\sin iy' = 1 .$$

Da diese Beziehung identisch für alle Werte von y' gilt, so verschwinden nach Ausmultiplizieren der Reihen alle periodischen Terme, und es ist daher

$$\frac{dx_0}{dx'} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} iy_i\frac{dx_i}{dx'} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} ix_i\frac{dy_i}{dx'} = \frac{d}{dx'}\left[x_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} ix_iy_i\right] = 1 ,$$

also, wenn man integriert,

$$\text{(XXXI; 42)} \qquad x_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} ix_iy_i = x' + \text{const}.$$

Die Integrationskonstante darf man sich mit x' vereinigt denken, da x' und ε die willkürlichen Konstanten der Lösung von (XXXI; 40) sind.

Die „Operation" ist beendet, sobald die Koeffizienten x_i, y_i und die Konstanten x' und ε bestimmt sind. Es ist dann

$$x = x' + \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cos iy' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} ix_iy_i ,$$

und y wird aus (XXXI; 39a) bestimmt. Alle L_i', l_i' folgen sodann aus (XXXI; 35) teils direkt, teils durch Quadratur über bekannte Funktionen.

264. Allgemeines Iterationsschema für die Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten

R. Broucke[1]) hat ein allgemeines Verfahren zur iterativen Lösung von speziellen und allgemeinen Störungsproblemen in rechtwinkligen Koordinaten entwickelt. Es seien $\mathfrak{q}(x, y, z)$ der heliozentrische Ortsvektor eines gestörten Planeten mit der Masse m, $\mathfrak{q}_i(x_i, y_i, z_i)$ die Ortsvektoren von n Störplaneten mit den Massen m_i (Masse der Sonne $= 1$), ferner $r = |\mathfrak{q}|$, $r_i = |\mathfrak{q}_i|$, $\varrho_i = |\mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}|$. Dann genügt $\mathfrak{q}(t)$ der Differentialgleichung

(XXXI; 43)
$$\ddot{\mathfrak{q}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\,\mathfrak{q} = \frac{\varkappa^2}{1+m}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}}{{\varrho_i}^3} - \frac{\mathfrak{q}_i}{{r_i}^3}\right) = \mathfrak{p}(t); \quad \varkappa^2 = k^2\,(1+m).$$

Allgemeiner kann $\mathfrak{p}(t)$ auch Störbeschleunigungen anderer Art enthalten, etwa solche, die von der Abweichung der Gestalt der Körper von der Kugelform oder von inhomogener Verteilung der Masse in ihrem Innern herrühren oder die durch nichtkonservative Kräfte hervorgerufen werden, wie sie z. B. auftreten, wenn sich der Körper in einem widerstehenden Mittel bewegt („drag", s. Abschnitt 186). Es wird dann $\mathfrak{p}(t)$ irgendeine Funktion der Zeit sein, die nicht unbedingt der Gradient einer Potentialfunktion zu sein braucht.

Es werde ferner angenommen, daß die Abweichung der gestörten Bewegung von einer ungestörten, durch

(XXXI; 44)
$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 + \frac{\varkappa^2}{{r_0}^3}\,\mathfrak{q}_0 = 0$$

definierten, Kegelschnittsbewegung während eines gewissen Zeitraums klein sei. Speziell kann $\mathfrak{q}_0(t)$ die gestörte Bahn zu einer Epoche $t = t_0$ oskulieren, sie kann aber auch so definiert werden, daß sie ohne Oskulation während eines möglichst langen Zeitraums möglichst kleine Störungen

(XXXI; 45)
$$\mathfrak{s} = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}_0$$

übrigläßt. Der Störungsvektor $\mathfrak{s}(t)$ genügt dann der Enckeschen Differentialgleichung (XVIII; 18),

(XXXI; 46)
$$\ddot{\mathfrak{s}} = -\varkappa^2\left(\frac{\mathfrak{q}}{r^3} - \frac{\mathfrak{q}_0}{{r_0}^3}\right) + \mathfrak{p}.$$

Diese Gleichung läßt sich nach Broucke in Form einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung

(XXXI; 47)
$$\ddot{\mathfrak{s}} + \mathfrak{S}\mathfrak{s} = -\varkappa^2\left(\frac{\mathfrak{q}}{r^3} - \frac{\mathfrak{q}_0}{{r_0}^3}\right) + \mathfrak{S}\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}_0) + \mathfrak{p} = \mathfrak{Q}(t)$$

---

[1]) R. Broucke, Perturbations in rectangular coordinates by iteration. Celestial Mech. *1*, 110 (1969).

schreiben, die mit (XXXI; 46) identisch ist und in der $\mathfrak{S}(t)$ eine 3×3-Matrix darstellt, deren Elemente bekannte Skalare sind, die auch Funktionen der Zeit sein können. Auf der rechten Seite kommen außer den bekannten Funktionen $\mathfrak{q}_0$, r_0, $\mathfrak{S}$ der Zeit auch die einstweilen noch unbekannten bzw. nur angenähert bekannten Funktionen $\mathfrak{q}$, r vor. Im übrigen ist aber $\mathfrak{Q}(t)$ von der Ordnung der störenden Massen oder von anderen kleinen Parametern. Die Gleichung (XXXI; 47) läßt sich nach der in Abschnitt 242 beschriebenen Methode lösen, indem man von der vollständig integrablen Gleichung

$$\ddot{\mathfrak{s}}_0 + \mathfrak{S}\mathfrak{s}_0 = 0 \tag{XXXI; 48}$$

ausgeht, mit Hilfe ihrer Lösung $\mathfrak{Q}(t)$ bis auf Abweichungen höherer Ordnung berechnet und dieses Verfahren so lange wiederholt, bis die Rechnung steht. Das Iterationsverfahren wird um so besser konvergieren, je besser die Gestalt der Matrix $\mathfrak{S}$ dem Problem angepaßt ist.

Vorausgesetzt, daß zwei partikuläre Integrale von (XXXI; 48),

$$\mathfrak{s}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{s}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix},$$

bekannt sind, lautet das allgemeine Integral

$$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{k}_1 \mathfrak{s}_0^{(1)} + \mathfrak{k}_2 \mathfrak{s}_0^{(2)}, \tag{XXXI; 49}$$

wenn $\mathfrak{k}_1(a_1, a_2, a_3)$ und $\mathfrak{k}_2(a_4, a_5, a_6)$ zwei konstante Vektoren sind. Man kann die Lösung (XXXI; 49) dann auch

(XXXI; 49a)

$$\mathfrak{s}_0 = \sum_{i=1}^{6} a_i \mathfrak{s}_i = a_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

schreiben, und die Vektoren $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ stellen dann sechs linear unabhängige partikuläre Integrale von (XXXI; 48), ein sogenanntes „Fundamentalsystem“ von Lösungen, dar.

Die Lösungen der gestörten Gleichungen (XXXI; 47) können dann gemäß der Methode der Variation der Konstanten (s. Kapitel XV) in der Form

$$\mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{6} a_i(t)\, \mathfrak{s}_i \tag{XXXI; 50}$$

geschrieben werden, wenn $a_i(t)$ nunmehr (im allgemeinen schwach) veränderliche Größen sind, die als Funktionen der Zeit gewissen Differentialgleichungen

genügen werden. Wir beweisen, daß die beiden vektoriellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\text{(XXXI; 51)} \qquad \sum_{i=1}^{6} \dot{a}_i \mathfrak{s}_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{6} \dot{a}_i \dot{\mathfrak{s}}_i = \mathfrak{Q}(t),$$

die sechs skalaren Differentialgleichungen entsprechen, das Problem lösen. Denn setzt man den Ausdruck (XXXI; 50) in (XXXI; 47) ein, so folgt

$$\sum [\ddot{a}_i \mathfrak{s}_i + 2\dot{a}_i \dot{\mathfrak{s}}_i + a_i (\ddot{\mathfrak{s}}_i + \mathfrak{G}\mathfrak{s}_i)] = \mathfrak{Q}$$

oder, da alle $\mathfrak{s}_i$ Lösungen von (XXXI; 48) sind,

$$\sum \frac{d}{dt} (\dot{a}_i \mathfrak{s}_i) + \sum \dot{a}_i \dot{\mathfrak{s}}_i = \mathfrak{Q}.$$

Die Differentialgleichungen (XXXI; 47) sind demnach erfüllt, wenn (XXXI; 50, 51) gelten.

Die erste Gleichung (XXXI; 51) besagt, daß die Koordinaten von $\mathfrak{s}$ „ideale Koordinaten“ im Sinne der HANSENschen Störungstheorie sind (s. Abschnitt 227). Denn differenziert man (XXXI; 50) nach der Zeit, so folgt

$$\dot{\mathfrak{s}} = \sum (\dot{a}_i \mathfrak{s}_i + a_i \dot{\mathfrak{s}}_i) = \sum a_i \dot{\mathfrak{s}}_i,$$

d. h., beim Differenzieren bleiben die Koeffizienten a_i konstant, auch wenn sie variabel sind.

Durch Auflösung der sechs linearen Gleichungen (XXXI; 51) für die $\dot{a}_i$ erhält man Ausdrücke von der Form

$$\dot{a}_i = f_{i1} Q_1 + f_{i2} Q_2 + f_{i3} Q_3,$$

wenn Q_1, Q_2, Q_3 die rechtwinkligen Koordinaten des Vektors $\mathfrak{Q}$ und die f_{ik} achtzehn bekannte Funktionen der Zeit sind. Die allgemeine Lösung von (XXXI; 47) lautet also formal

$$\text{(XXXI; 52)} \qquad \mathfrak{s} = \sum \mathfrak{s}_i \left[C_i + \int_0^t \sum_{k=1}^{3} f_{ik} Q_k \, dt \right]$$

mit den sechs Integrationskonstanten C_i, und die Lösung von (XXXI; 43) ist dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{s}$.

Die Gleichung (XXXI; 52) dient als Iterationsschema, da das Integral von der Ordnung der störenden Massen oder anderer kleiner Parameter ist. Sei $\mathfrak{Q}^{(n)}$ der Störungsausdruck nach der n-ten Iteration, so ist nach einem weiteren Iterationsschritt

$$\text{(XXXI; 53)} \qquad \mathfrak{s}^{(n+1)} = \sum \mathfrak{s}_i \left[C^{(n)} + \int_0^t \sum_k f_{ik} Q_k^{(n)} \right]$$

ein verbesserter Störungsvektor, der dann zur weiteren Verbesserung der rechten Seite dient.

Man beginnt den Iterationsprozeß mit $n = 0$. Dann sind die $Q_k^{(0)}$ aus der intermediären Lösung bekannte Funktionen der Zeit, und (XXXI; 53) liefert die erste Näherung $\mathfrak{z}^{(1)}$ für den Störungsvektor. Oskuliert die intermediäre Bahn die gestörte im Zeitpunkt $t = 0$, so sind die Integrationskonstanten C_i sämtlich Null. Anderenfalls müssen die Konstanten $C_i^{(n)}$ nach jeder Iteration den Anfangsbedingungen angepaßt werden.

R. Broucke führt vier Beispiele für Iterationsschemata an, die sich durch spezielle Wahl der Matrix $\mathfrak{S}$ unterscheiden:

1. Es sei $\mathfrak{S} = 0$. Dann ist wegen (XXXI; 47) $\ddot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{Q}$ und wegen (XXXI; 48) $\ddot{\mathfrak{z}}_0 = 0$ oder $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 t$. Das Fundamentalsystem unabhängiger partikulärer Lösungen nimmt also die einfache Gestalt

$$\mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{z}_4 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

an, und die Differentialgleichungen (XXXI; 51) haben daher die Form

$$\dot{a}_j + \dot{a}_{j+3} t = 0; \qquad \dot{a}_{j+3} = Q_j, \qquad (j = 1, 2, 3)$$

oder

$$\dot{a}_j = -Q_j t; \qquad \dot{a}_{j+3} = Q_j.$$

Es ist demnach

$$\frac{d\mathfrak{k}_1}{dt} = -t\mathfrak{Q}(t); \quad \frac{d\mathfrak{k}_2}{dt} = \mathfrak{Q}(t),$$

woraus, mit den vektoriellen Integrationskonstanten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$,

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 t = \left[\mathfrak{C}_1 - \int_0^t t\mathfrak{Q}\, dt\right] + t\left[\mathfrak{C}_2 + \int_0^t \mathfrak{Q}\, dt\right]$$

oder auch

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 t + \int_0^t \int_0^t \mathfrak{Q}\, dt^2 \qquad \text{(XXXI; 54)}$$

folgt, da man durch partielle Integration

$$\int t\mathfrak{Q}\, dt = t \int \mathfrak{Q}\, dt - \int\int \mathfrak{Q}\, dt^2$$

erhält. Die Lösung (XXXI; 54) ist trivial, da sie auch unmittelbar durch Integration von $\ddot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{Q}(t)$ folgt. Der hier eingeschlagene Umweg zur Erzielung einer auch ohne Rechnung einzusehenden Lösung ist aber charakteristisch für die Lösung von Problemen mit beliebigen $\mathfrak{S}$-Matrizen und ist hier benutzt worden, damit weniger durchsichtige Probleme kürzer behandelt werden können, ohne daß ihre Analyse an Klarheit verliert.

2. Es sei $\mathfrak{S} = \alpha^2 \mathfrak{E}_3$, wo α^2 eine Konstante und $\mathfrak{E}_3$ die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet. $\mathfrak{S}$ ist also eine konstante Diagonalmatrix mit gleichen Elementen. Dann ist offenbar

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{k}_1 \cos \alpha t + \mathfrak{k}_2 \sin \alpha t$$

mit veränderlichen Vektoren $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, und es ist

$$\begin{aligned} \dot{a}_j \cos \alpha t + \dot{a}_{j+3} \sin \alpha t &= 0, \\ -\alpha \dot{a}_j \sin \alpha t + \alpha \dot{a}_{j+3} \cos \alpha t &= Q_j, \end{aligned} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

woraus

$$\alpha \dot{a}_j = -Q_j \sin \alpha t; \qquad \alpha \dot{a}_{j+3} = Q_j \cos \alpha t$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{k}_1}{dt} = -\mathfrak{Q} \frac{\sin \alpha t}{\alpha}; \quad \frac{d\mathfrak{k}_2}{dt} = \mathfrak{Q} \frac{\cos \alpha t}{\alpha}$$

folgt. Man erhält also

$$\mathfrak{z} = \frac{\cos \alpha t}{\alpha} \left[\mathfrak{C}_1 - \int_0^t \mathfrak{Q} \sin \alpha t \, dt \right] + \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \left[\mathfrak{C}_2 + \int_0^t \mathfrak{Q} \cos \alpha t \, dt \right]$$

oder

$$\text{(XXXI; 55)} \quad \alpha \mathfrak{z} = \mathfrak{C}_1 \cos \alpha t + \mathfrak{C}_2 \sin \alpha t + \int_0^t \mathfrak{Q} \sin \alpha (\tau - t) \, dt,$$

wenn wir mit dem von HANSEN eingeführten Kunstgriff (s. Abschnitt 230) τ unter dem Integralzeichen als konstant ansehen, nach erfolgter Integration aber durch die Variable t ersetzen.

Die Gleichung (XXXI; 55) kann als Iterationsschema für Störungsprobleme dienen, wenn $\alpha = n$ die mittlere Bewegung des gestörten Körpers darstellt und wenn die Störungen periodisch sind. Die intermediäre Bahn ist hier ein gleichförmig durchlaufener Kreis.

3. Es sei $\mathfrak{S} = (\varkappa^2/r_0^3)\, \mathfrak{E}_3$ eine Diagonalmatrix, deren Elemente gleich, aber nicht konstant sind. Die intermediäre Lösung ist hier eine KEPLERsche Ellipse, und die gestörte Lösung ist genau die in Abschnitt 242 beschriebene. Dort ist die wahre Anomalie v als unabhängige Variable anstelle der Zeit benutzt worden, indem man die Referenzbewegung durch

$$q_0 = \mathfrak{R}_1 r_0 \cos v_0 + \mathfrak{R}_2 r_0 \sin v_0$$

ausdrückt. Besser ist es, die exzentrische Anomalie E einzuführen. Dann wird man auch

$$\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{k}_1 (\cos E - e) + \mathfrak{k}_2 \sin E = \mathfrak{k}_1 q_1^* + \mathfrak{k}_2 q_2^*$$

schreiben können, indem man die Konstanten a und $a\sqrt{1 - e^2}$ mit den konstanten Vektoren $\mathfrak{k}_1$ bzw. $\mathfrak{k}_2$ vereinigt. Es ist dann

$$\dot{a}_j q_1^* + \dot{a}_{j+3} q_2^* = 0; \qquad \dot{a}_j \dot{q}_1^* + \dot{a}_{j+3} \dot{q}_2^* = Q_j, \qquad (j = 1, 2, 3)$$

oder

$$\dot{a}_j (q_1^* \dot{q}_2^* - q_2^* \dot{q}_1^*) = -q_2^* Q_j; \quad \dot{a}_{j+3} (q_1^* \dot{q}_2^* - q_2^* \dot{q}_1^*) = q_1^* Q_j.$$

Da aber $q_1^* \dot{q}_2^* - q_2^* \dot{q}_1^* = (1 - e \cos E)\, \dot{E} = n$ ist, wird man besser normierte Funktionen

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos E - e); \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin E$$

einführen. Es ist dann $q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = 1$ und

$$\frac{d\mathfrak{k}_1}{dt} = -q_2 \mathfrak{Q}; \quad \frac{d\mathfrak{k}_2}{dt} = q_1 \mathfrak{Q},$$

woraus

$$\text{(XXXI; 56)} \qquad \mathfrak{z} = q_1 \left(\mathfrak{C}_1 - \int_0^t q_2 \mathfrak{Q}\, dt \right) + q_2 \left(\mathfrak{C}_2 + \int_0^t q_1 \mathfrak{Q}\, dt \right) =$$

$$= q_1 \mathfrak{C}_1 + q_2 \mathfrak{C}_2 + \int_0^t (q_1 \bar{q}_2 - q_2 \bar{q}_1)\, \mathfrak{Q}\, dt$$

folgt. Dabei gelten $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ unter dem Integralzeichen als Konstante, aber nach erfolgter Integration nehmen sie wieder die variablen Werte q_1, q_2 an.

Die Gleichung (XXXI; 56) wurde schon von ENCKE (1854) aufgestellt, aber noch nicht als Iterationsschema benutzt. Er war daher gezwungen, wie wir schon in Abschnitt 242 begründeten, abgesehen von den drei skalaren Differentialgleichungen für die Koordinaten ξ, η, ζ des Störungsvektors $\mathfrak{z}$ eine weitere für die Störung ϱ des Radiusvektors r aufzustellen, ein Übelstand, der vermieden wird, wenn man das Problem durch Iteration der Gleichung (XXXI; 56) löst.

4. Bei allen der drei bisher beschriebenen Varianten unseres Problems ist die Ausgangsnäherung schlecht oder nur für verhältnismäßig kurze Zeiten befriedigend. Diese Methoden erfordern daher eine mehr oder weniger große Anzahl von Iterationen, ehe das Verfahren abgeschlossen werden kann. Dieser Nachteil wird allerdings für progammiertes Rechnen durch die einfachere Gestalt des Iterationsschemas einigermaßen ausgeglichen.

Eine weitere Variante, die sich durch rasche Konvergenz des Iterationsverfahrens auszeichnet, beruht auf der in Abschnitt 243 entwickelten DZIOBEKschen Methode, die von BROUWER in seiner Theorie (Abschnitt 244) gebrauchsfähig gemacht worden ist. Hier begegnen wir, wenn wir die Differentialgleichung für den Störungsvektor wieder in der BROUCKEschen Form (XXXI; 47) schreiben, zum ersten Mal einer nicht diagonalen, aber symmetrischen $\mathfrak{S}$-Matrix

$$\mathfrak{S} = \varkappa^2 \operatorname{grad} \left(\frac{\mathfrak{r}_0}{r_0^3} \right) = \varkappa^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{x_0^2}{r_0^5} & -3\frac{x_0 y_0}{r_0^5} & -3\frac{x_0 z_0}{r_0^5} \\ -3\frac{y_0 x_0}{r_0^5} & \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{y_0^2}{r_0^5} & -3\frac{y_0 z_0}{r_0^5} \\ -3\frac{z_0 x_0}{r_0^5} & -3\frac{z_0 y_0}{r_0^5} & \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{z_0^2}{r_0^5} \end{pmatrix}.$$

Die Störungsgleichungen lauten dann

$$\ddot{\mathfrak{z}} + \mathfrak{G}\mathfrak{z} = \ddot{\mathfrak{z}} + \varkappa^2 \left(\frac{\mathfrak{z}}{r_0^3} - 3 \frac{\mathfrak{r}_0 (\mathfrak{r}_0 \mathfrak{z})}{r_0^5} \right) = \mathfrak{Q}.$$

Ihre Lösung ist nach dem DZIOBEKschen Verfahren möglich, wenn man als Fundamentalsystem von partikulären Lösungen die sechs Vektoren

$$\mathfrak{z}_i = \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

einsetzt, in denen die c_i sechs unabhängige Elemente der intermediären Bahn darstellen. Es ist dann

$$\mathfrak{z} = \sum_i a_i \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_i},$$

und die sechs skalaren Funktionen $a_i(t)$ genügen den Differentialgleichungen (XXIX;35a)

$$\text{(XXXI; 57)} \qquad J \frac{da_i}{dt} = Q_1 \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_i} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_i} \right) + Q_3 \left(\frac{\partial \dot{z}_0}{\partial c_i} \right).$$

Sie sind Lösungen des linearen Gleichungssystems (XXXI; 51), dessen Determinante

$$J = \left| \frac{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)} \right|$$

von Null verschieden sein muß. Die eingeklammerten Größen in (XXXI; 57) bedeuten, wie in (XXIX; 35a, 36), die zu den gleichnamigen Elementen von J gehörigen Unterdeterminanten.

In Abschnitt 244 haben wir gezeigt, daß die Berechnung dieser Unterdeterminanten einfacher ist, wenn die Elemente c_i kanonisch sind. Man kann, wie es BROUWER in seiner Methode tut, die DELAUNAYschen kanonischen Elemente benutzen. Um die ziemlich verwickelte Rechnung abzukürzen, verwendet er die intermediäre Bahnebene als Bezugsebene, so daß $z_0 = \dot{z}_0 = 0$ wird und die Zahl der Freiheitsgrade sich von drei auf zwei vermindert, eine Vereinfachung, die mit einem Verlust an Symmetrie erkauft wird.

Man löst diese Aufgabe einfacher und völlig symmetrisch, wenn man als intermediäre Bahnelemente die rechtwinkligen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten der intermediären Bahn wählt, die der Epoche $t = t_0$ (bzw. $t = 0$) zugehören. Bezeichnen wir diese konstanten Koordinaten mit $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\dot{\bar{x}}_0$, $\dot{\bar{y}}_0$, $\dot{\bar{z}}_0$, so lautet die Matrix von J

$$(J) = \left(\frac{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \dot{\bar{x}}_0, \dot{\bar{y}}_0, \dot{\bar{z}}_0)} \right).$$

Beide Systeme sind kanonisch. Es gelten daher die in Anhang IV bewiesenen und in Abschnitt 244 verwendeten einfachen Beziehungen zwischen den Elementen von J und deren Unterdeterminanten. Man kann also zur Berechnung

der Faktoren der Q_k in (XXXI;57) die in Abschnitt 259 gegebenen Formeln für die partiellen Ableitungen der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ einer ungestörten Kegelschnittsbahn nach den auf die Epoche t_0 bezogenen Anfangsbedingungen $x_0, \ldots, \dot{z}_0$ benutzen, indem man nun, um die Bezeichnungen den hier verwendeten anzugleichen, x, $\dot{x}$, ... durch x_0, $\dot{x}_0$, ... und x_0, $\dot{x}_0$, ... durch $\bar{x}_0$, $\dot{\bar{x}}_0$, ... ersetzt.

Jede der vier BROUCKEschen Varianten des Iterationsschemas kann in der Störungsrechnung verwendet werden. Die vierte, die auf die DZIOBEKschen Störungsgleichungen führt, hat vor den anderen drei den großen Vorzug, daß schon die erste Iteration die Störungen erster Ordnung vollständig liefert, da in diesem Falle (siehe (XXIX;29)) der Vektor $\mathfrak{Q}$ mit dem Vektor der Störbeschleunigung (R_x, R_y, R_z) identisch ist. Diese Variante verspricht also rasche Konvergenz des Iterationsprozesses, während andererseits die einzelnen Iterationsschritte wesentlich komplizierter sind als bei den übrigen drei Annahmen über die Gestalt der $\mathfrak{S}$-Matrix. Wie aber schon weiter oben bemerkt wurde, ist die Frage, ob komplizierter Algorithmus bei rascher Konvergenz oder einfaches Rechenschema bei langsamer Konvergenz vorteilhafter ist, nicht von vornherein zu beantworten, sondern wird von Fall zu Fall durch die Praxis entschieden werden müssen.

Daß sich bei Störungsrechnungen mit rechtwinkligen Koordinaten die Entwicklung von Funktionen nach TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen als besonders vorteilhaft erweist, ist in Abschnitt 248 gezeigt worden. L. CARPENTER hat die iterative Methode auf Grund der letzten der oben beschriebenen Varianten (DZIOBEKsche Form der Störungsgleichungen) ausprobiert und ist bei Planetenstörungen mit drei Iterationen, d. h. hier mit der Berücksichtigung von Störungen dritter Ordnung in den störenden Massen, ausgekommen. Aber auch die erste, sehr primitive Variante führt, wenn auch erst nach zahlreichen Iterationen, rasch zum Ziel, wenn man $\mathfrak{Q}(t)$ in TSCHEBYSCHEFFsche Reihen entwickelt.[1])

Ohne Iteration kommt man in allen Fällen aus, wenn man die Iterationsschemata bei genügend kurzen Schrittweiten für spezielle Störungsrechnungen verwendet.

---

[1]) Siehe auch Zusatz 4 in Anhang VIII.

KAPITEL XXXII

THEORIE DER ALLGEMEINEN STÖRUNGEN AUF GRUND DES VON H. VON ZEIPEL ENTWICKELTEN ELIMINATIONSVERFAHRENS

265. Einführung einer erzeugenden Funktion

In den Abschnitten 262—263 haben wir DÈLAUNAYS Methode zur Lösung des Hauptproblems der Theorie der Mondbewegung in großen Zügen beschrieben. Sie besteht darin, aus der HAMILTONschen Funktion

$$(\text{XXXII}; 1) \qquad F = \sum_{p_1,\ldots,p_4} A_{p_1,\ldots,p_4} \cos\left(p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4\right)$$

die konstanten und periodischen Terme nach und nach zu eliminieren. Diese „Operationen" werden ausgeführt, indem man ein einfaches System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für zwei Variable löst. Jede Operation ist einer kanonischen Transformation äquivalent, durch welche aus der HAMILTONschen Funktion ein periodisches Glied verschwindet und dafür in die intermediäre Lösung einbezogen wird. Dieser Prozeß wird schrittweise fortgeführt, wobei jeder Schritt nach dem gleichen Algorithmus vor sich geht, bis alle wesentlichen Terme der Störungsfunktion eliminiert sind und die intermediäre Lösung die wahre so gut annähert, daß die kleinen noch übrigbleibenden Abweichungen durch Quadratur über die Restterme bestimmt werden können, die genau genug mit Hilfe der ungestörten Koordinaten dargestellt werden.

Diese Methode ist im Prinzip einfach, in der Ausführung aber sehr kompliziert. DELAUNAY hat gezeigt, daß nicht weniger als 48 periodische Terme eliminiert werden müssen, wenn alle Ungleichungen in der Theorie des Mondes in Betracht gezogen werden sollen, die höchstens von der dritten Ordnung bezüglich der kleinen Parameter sind, nach denen sich die Störungsfunktion entwickeln läßt. Dieses Vorgehen ist um so mühsamer, als einzelne Terme, die bereits eliminiert worden sind, bei einer späteren Operation wieder auftauchen, wenn auch mit Koeffizienten einer höheren Ordnung. DELAUNAY fand fünf solcher wiedererscheinenden Periodizitäten, dazu vier weitere, die in der ursprünglichen Störungsfunktion noch fehlten. Die Anzahl aller Operationen, die zur Elimination aller Terme bis zur dritten Ordnung erforderlich waren, war daher 57, und dieses umfangreiche Werk füllt die 882 Seiten des ersten Bandes von DELAUNAYS „Théorie de la Lune". In der Fortsetzung dieser Arbeit wurden noch 440 weitere periodische Glieder mit durchweg sehr kleinen Amplituden durch ein Näherungsverfahren eliminiert.

In den Theorien der großen und kleinen Planeten sowie der natürlichen und künstlichen Satelliten lassen sich die Terme der Störungsfunktion (XXXII; 1) in drei Kategorien aufteilen: 1. die kurzperiodischen Terme (wenigstens eine der Zahlen p_1 und p_4 ist von Null verschieden), 2. die langperiodischen Terme ($p_1 = p_4 = 0$, aber mindestens eine der Zahlen p_2 und p_3 ist von Null verschieden), 3. die konstanten Terme, die zu säkularen Störungen Anlaß geben

(alle $p_i = 0$). Die Umständlichkeit des DELAUNAYschen Verfahrens hat den Wunsch nach schneller fördernden Methoden geweckt. H. VON ZEIPEL[1]) hat in seinen Untersuchungen über die Bewegung eines durch Jupiter gestörten Planetoiden eine solche Methode entwickelt. Sie scheint, unabhängig von ihm, von BROWN und SHOOK[2]) entdeckt worden zu sein. Sie besteht im wesentlichen in der Einführung einer „erzeugenden“[3]) Funktion S, die es gestattet, alle Terme einer der oben genannten drei Kategorien im Verlauf einer einzigen Operation zu eliminieren. Genauer ausgedrückt: die Funktion S definiert eine kanonische Transformation, durch die alle Terme von kurzer Periode aus der HAMILTONschen Funktion verschwinden. Eine zweite erzeugende Funktion S' definiert sodann eine neue Transformation, die alle langperiodischen Terme eliminiert. Dann ist das kanonische System integrabel und führt zu den säkularen Störungen, d. h., die Variablen des linearen Typs sind nach diesen beiden Transformationen konstant, und die Winkelvariablen sind lineare Funktionen der Zeit.

In VON ZEIPELS Methode hängt S von den durch die erste Transformation erzeugten neuen DELAUNAYschen linearen Variablen L', G', H' und den alten Winkelvariablen l, g, h ab, während BROWN und SHOOK S als Funktion von L, G, H und l', g', h' definieren. BROUWER und CLEMENCE haben bemerkt, daß auch zwei andere Möglichkeiten denkbar sind, daß nämlich S entweder von den linearen oder von den Winkelvariablen (vor und nach der Transformation) allein abhängt. Seien λ, λ' die alten und die neuen linearen Variablen, ξ, ξ' die alten und die neuen Winkelvariablen, so sind also vier Definitionen

$$S(\lambda', \xi); \qquad S(\lambda, \xi'); \qquad S(\lambda, \lambda'); \qquad S(\xi, \xi')$$

der erzeugenden Funktion denkbar. Die beiden letzteren sind aber zum Aufbau einer Störungstheorie ungeeignet, während die beiden ersteren gleichwertig sind. Wir werden im folgenden den Typ $S(\lambda', \xi)$ bevorzugen, wie es auch VON ZEIPEL selbst und D. BROUWER und seine Schüler getan haben.

In Abschnitt 188 haben wir bereits die Anwendung dieser Methode in einem speziellen und verhältnismäßig einfachen Fall kennengelernt, nämlich in der Bewegungstheorie eines künstlichen Erdsatelliten im inhomogenen Schwerefeld der abgeplatteten Erde. Dieser Spezialfall gibt bereits eine gute Vorstellung von den Gedankengängen VON ZEIPELS, ohne aber alle charakteristischen Züge der Methode aufzudecken. Es wird daher nicht überflüssig sein, die VON ZEIPELsche Technik noch einmal ex origine und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zu entwickeln. Das wird einen besseren Einblick in diese schöne und tiefgründige analytische Lösungsmethode des Problems der allgemeinen Störungen ermöglichen. Die ursprüngliche Fassung der Methode werden wir, soweit es zu ihrem Verständnis nötig ist, in den beiden nächsten Abschnitten

---

[1]) H. VON ZEIPEL, Recherches sur le mouvement des petites planètes. Stockholm 1916—1917.

[2]) E. W. BROWN und C. A. SHOOK, Planetary Theory. London—New York 1933, Nachdruck New York 1964 (Dover Publications).

[3]) Im Englischen „generating function“ oder „determining function“.

beschreiben. Auf ihrer Grundlage fußen aber neuere Arbeiten, wie die von MUSEN, GIACAGLIA[1]), HORI u. a., die zur Vervollkommnung der VON ZEIPELschen Technik wesentlich beigetragen haben und von denen wir die wichtigsten in weiteren Abschnitten dieses Kapitels behandeln werden.

266. Der Mechanismus der von Zeipelschen Methode. Elimination der kurzperiodischen Terme

Fürs erste beschränken wir uns auf den Fall eines kanonischen Systems von vier Variablen, den DELAUNAYschen Variablen L, G und ihren Konjugierten l, g. Dieses System,

$$\text{(XXXII; 2)}\quad \frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g};\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}$$

entspricht dem Problem der Bewegung eines kleinen Körpers in der Bahnebene eines störenden Körpers, der sich seinerseits in einer ungestörten KEPLERschen Ellipse bewegen möge. Das Variablenpaar H, h ist überflüssig, da $i=0$ und daher $H=G\cos i=G$ ist, während $h=\Omega$ nicht definiert ist. In diesem Spezialfall ist der Mechanismus der Elimination der kurzperiodischen Terme verhältnismäßig einfach und zeigt alle charakteristischen Züge der VON ZEIPELschen Methode. Die Ausdehnung auf das allgemeine Dreikörperproblem macht keine besonderen Schwierigkeiten, wie weiter unten gezeigt werden soll.

Der erste Schritt zur Lösung von (XXXII; 2), die Elimination der kurzperiodischen Terme der Störungsfunktion, d. h. derjenigen Terme, die von der mittleren Länge l abhängen, wird durch eine kanonische Transformation $L, G, l, g \to L', G', l', g'$ bewerkstelligt, die so beschaffen ist, daß sie die HAMILTONsche Funktion F identisch in eine neue HAMILTONsche Funktion F' transformiert, die nicht mehr die mittlere Länge enthält:

$$F(L, G, l, g) \to F'(L', G', g').$$

Diese Transformation wird mit Hilfe der erzeugenden Funktion[2]) $S(L', G', l, g)$ ausgeführt, die die Zeit nicht explizite enthält, so daß [siehe Abschnitt 124, (XIV; 52)] $F \equiv F'$ wird. Es wird angenommen, daß S nach den vier Variablen partiell differenzierbar ist und die Bedingungen a priori

$$\text{(XXXII; 3)}\qquad \frac{\partial S}{\partial l}=L,\quad \frac{\partial S}{\partial g}=G;\quad \frac{\partial S}{\partial L'}=l',\quad \frac{\partial S}{\partial G'}=g'$$

erfüllt. Ferner sollen F und S in TAYLORsche Reihen nach einem kleinen Parameter ε entwickelbar sein, die in der Nachbarschaft von $\varepsilon=0$ konvergieren.[3])

---

[1]) Siehe auch Zusatz 5 in Anhang VIII.

[2]) In Band II ist die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation durchweg mit $w(\xi, g; t)$ bezeichnet worden. Wir bevorzugen hier das Symbol S, das in der Literatur über VON ZEIPELS Methode allgemein verwendet wird.

[3]) In der Theorie der Planeten ist $\varepsilon = m$ die Masse des störenden Körpers. In der Mondtheorie ist die störende Masse (Sonne) sehr groß, aber es gibt verschiedene kleine Parameter, die als proportional zu einer geeignet wählbaren Größe ε angesehen werden dürfen.

Wir schreiben

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots; \quad S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots,$$

wo F_i, S_i die Summe aller Terme von der i-ten Ordnung in bezug auf ε sind. Insbesondere sei

(XXXII; 4) $$S_0 = L'l + G'g.$$

Wenn $S = S_0$ ist, so folgt aus (XXXII; 3, 4)

$$\frac{\partial S_0}{\partial l} = L = L'; \quad \ldots; \quad \frac{\partial S_0}{\partial G'} = g' = g,$$

d. h., $S = S_0$ definiert die identische Transformation.

Vernachlässigt man Terme von höherer als zweiter Ordnung, d. h., setzt man

$$F = F_0 + F_1 + F_2; \quad S = S_0 + S_1 + S_2,$$

so folgt aus (XXXII; 3, 4)

(XXXII; 5)
$$\begin{cases} L = L' + \dfrac{\partial S_1}{\partial l} + \dfrac{\partial S_2}{\partial l}; \quad G = G' + \dfrac{\partial S_1}{\partial g} + \dfrac{\partial S_2}{\partial g}, \\ l' = l + \dfrac{\partial S_1}{\partial L'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial L'}; \quad g' = g + \dfrac{\partial S_1}{\partial G'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial G'} \end{cases}$$

oder, anstatt der beiden letzten Gleichungen (XXXII; 5),

(XXXII; 5a) $$l = l' - \frac{\partial S_1}{\partial L'} - \frac{\partial S_2}{\partial L'}; \quad g = g' - \frac{\partial S_1}{\partial G'} - \frac{\partial S_2}{\partial G'}.$$

Es ist dann

$$F\left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l},\ G' + \frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g},\ l,\ g\right) \equiv F'\left(L', G', g + \frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'}\right)$$

oder, wenn man F und F' in Taylorsche Reihen nach den kleinen Größen $\partial S_1/\partial l + \partial S_2/\partial l$, $\partial S_1/\partial g + \partial S_2/\partial g$, $\partial S_1/\partial G' + \partial S_2/\partial G'$ entwickelt,

(XXXII; 6)

$$\begin{aligned} &F(L', G', l, g) + \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}\right)\frac{\partial F}{\partial L'} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g}\right)\frac{\partial F}{\partial G'} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial L'^2} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial L'\,\partial G'} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial G'^2} + \cdots \equiv \\ &\equiv F'(L', G', g) + \left(\frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'}\right)\frac{\partial F'}{\partial g} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'}\right)^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial g^2} + \cdots. \end{aligned}$$

In dieser Formel haben wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial L'} = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{L=L',G=G'}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L'^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\right)_{L=L',G=G'}; \quad \frac{\partial F'}{\partial g} = \left(\frac{\partial F'}{\partial g'}\right)_{g'=g}; \quad \cdots$$

gesetzt. In der Theorie der Störungen ist speziell — s. (XV; 70a, b) —

$$F_0 = F_0(L) = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial L}\right)_{L=L'} = \frac{dF_0}{dL'}$$

ein totaler Differentialquotient.

Ersetzen wir in (XXXII; 6) auch F' durch $F_0' + F_1' + F_2'$ und vergleichen die Terme gleicher Ordnung auf beiden Seiten, so erhalten wir nach Unterdrückung aller Terme von höherer als zweiter Ordnung

$$\text{(XXXII; 7)} \quad \begin{cases} F_0 \equiv F_0', \\ F_1 + \dfrac{\partial S_1}{\partial l}\dfrac{dF_0}{dL'} \equiv F_1', \\ F_2 + \dfrac{\partial S_1}{\partial l}\dfrac{\partial F_1}{\partial L'} + \dfrac{\partial S_1}{\partial g}\dfrac{\partial F_1}{\partial G'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 \dfrac{d^2F_0}{dL'^2} + \dfrac{\partial S_2}{\partial l}\dfrac{dF_0}{dL'} \equiv \\ \qquad \equiv F_2' + \dfrac{\partial S_1}{\partial G'}\dfrac{\partial F_1'}{\partial g}. \end{cases}$$

Wir erinnern daran, daß in diesen und allen daraus folgenden Gleichungen stets

$$F = F(L', G', l, g) = F(L, G, l, g)_{L=L',G=G'}; \quad F' = F'(L', G', g) = F'(L', G', g')_{g'=g}$$

gesetzt worden ist.

a) *Theorie erster Ordnung.* Wir beschränken uns zunächst auf eine Theorie erster Ordnung, in der nur Terme vom Grade 0 und 1 bezüglich des Parameters ε berücksichtigt werden. Wir setzen ferner $F_1 = F_1^* + \hat{F}_1 + \bar{F}_1$, wo F_1^* die Summe der kurzperiodischen Terme, $\hat{F}_1$ die der langperiodischen Terme und $\bar{F}_1$ den konstanten Teil von F_1 bezeichnet.[1]) Entsprechend setzen wir $F_1' = \hat{F}_1' + \bar{F}_1'$. Dann ergibt die zweite Gleichung (XXXII; 7)

$$F_1^* + \hat{F}_1 + \bar{F}_1 + \frac{\partial S_1}{\partial l}\frac{dF_0}{dL'} \equiv \hat{F}_1' + \bar{F}_1',$$

woraus

$$\text{(XXXII; 8)} \qquad F_1^* + \frac{\partial S_1}{\partial l}\frac{dF_0}{dL'} = 0; \quad \hat{F}_1 = \hat{F}_1'; \quad \bar{F}_1 = \bar{F}_1'$$

---

[1]) F^* enthält in den Argumenten der cos-Glieder l, evtl. auch g und Konstante. $\hat{F}$ enthält nur g und evtl. auch Konstante. $\bar{F}$ ist frei von l und g.

folgt. Aus der ersten Gleichung (XXXII; 8) leiten wir sodann

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} F_1^*$$

ab. Integration ergibt

$$\text{(XXXII; 9)} \qquad S_1 = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} \int F_1^* dl,$$

denn die von l unabhängigen Variablen L', G', g gelten während der Integration als Konstante, und eine Integrationskonstante braucht nicht hinzugefügt zu werden, da nur partielle Ableitungen von S_1 vorkommen.

Aus (XXXII; 5, 5a, 9) folgt, daß in einer Theorie erster Ordnung die alten Variablen als Funktion der neuen aus den Gleichungen

$$\text{(XXXII; 10a)} \quad L = L' - \left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} F_1^*; \quad G = G' - \left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} \int \frac{\partial F_1^*}{\partial g}\, dl,$$

$$\text{(XXXII; 10b)} \quad l = l' + \frac{\partial}{\partial L'}\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} \int F_1^* dl; \quad g = g' + \left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} \int \frac{\partial F_1^*}{\partial G'}\, dl$$

bestimmbar sind.

b) *Theorie zweiter Ordnung.* Berücksichtigen wir zusätzlich auch die Terme zweiter Ordnung, so ergibt die letzte der drei Gleichungen (XXXII; 7)

$$\text{(XXXII; 11)} \qquad F_2 + \Phi_2 + \frac{\partial S_2}{\partial l}\frac{dF_0}{dL'} \equiv F_2' + \frac{\partial S_1}{\partial G'}\frac{\partial F_1'}{\partial g},$$

wenn zur Abkürzung

$$\text{(XXXII; 12)} \qquad \Phi_2 = \frac{\partial S_1}{\partial l}\frac{\partial F_1}{\partial L'} + \frac{\partial S_1}{\partial g}\frac{\partial F_1}{\partial G'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dL'^2}$$

als eine Summe von Termen zweiter Ordnung gesetzt wird. Aus (XXXII; 8) folgt dann

$$\text{(XXXII; 13)} \qquad F_1' \equiv \hat{F}_1' + \bar{F}_1' = \hat{F}_1 + \bar{F}_1$$

und daraus

$$\frac{\partial F_1'}{\partial g} = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}.$$

Statt (XXXII; 11) darf man daher schreiben

$$\text{(XXXII; 14)} \qquad F_2 + \Phi_2 + \frac{\partial S_2}{\partial l}\frac{dF_0}{dL'} \equiv F_2' + \frac{\partial S_1}{\partial G'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}.$$

Die partiellen Ableitungen von S_1 enthalten, wie auch S_1 selbst, nur kurzperiodische Terme. Andererseits enthalten F_1 und die Ableitungen von F_1 Terme aller drei Kategorien. Unter Produkten zwischen zwei kurzperiodischen Funktionen, wie sie in (XXXII; 12) vorkommen, gibt es aber solche von der Form

$$\cos(il + jg)\cos(il + kg) = \frac{1}{2}\cos[2il + (j + k)g] + \frac{1}{2}\cos(j - k)g.$$

Neben kurzperiodischen Termen ($i \neq 0$) enthält Φ also auch langperiodische ($i = 0$) und konstante ($i = 0, j = \pm k$). Infolgedessen dürfen wir setzen

$$F_2 = F_2^* + \hat{F}_2 + \bar{F}_2; \quad \Phi_2 = \Phi_2^* + \hat{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_2; \quad F_2' = \hat{F}_2' + \bar{F}_2'.$$

Sammeln wir auf beiden Seiten von (XXXII; 14) die Terme gleichen Typs und setzen sie gleich, so folgt

$$\text{(XXXII; 15)} \quad \begin{cases} F_2^* + \Phi_2^* + \dfrac{\partial S_2}{\partial l}\dfrac{dF_0}{dL'} = \dfrac{\partial S_1}{\partial G'}\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}, \\ \hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2 = \hat{F}_2'; \quad \bar{F}_2 + \bar{\Phi}_2 = \bar{F}_2', \quad \text{also auch} \\ F_2' = \hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2 + \bar{F}_2 + \bar{\Phi}_2. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (XXXII; 15) gestattet die Bestimmung von S_2 aus

$$\frac{\partial S_2}{\partial l} = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\left(F_2^* + \Phi_2^* - \frac{\partial S_1}{\partial G'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\right).$$

Die Integration ergibt

$$S_2 = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int\left(F_2^* + \Phi_2^* - \frac{\partial S_1}{\partial G'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\right)dl$$

oder, wenn man S_1 aus (XXXII; 9) entnimmt,

$$\text{(XXXII; 16)} \quad S_2 = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int(F_2^* + \Phi_2^*)\,dl - \left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\int\frac{\partial F_1^*}{\partial G'}(dl)^2.$$

Für eine Theorie zweiter Ordnung folgt also aus (XXXII; 5, 5a, 16)

$$\text{(XXXII; 17a)} \quad \begin{cases} L = L' - \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}(F_1^* + F_2^* + \Phi_2^*) - \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'}\,dl, \\ G = G' - \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int\left(\dfrac{\partial F_1^*}{\partial g} + \dfrac{\partial F_2^*}{\partial g} + \dfrac{\partial \Phi_2^*}{\partial g}\right)dl - \\ \qquad - \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\dfrac{\partial}{\partial g}\left(\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\int\dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'}(dl)^2\right), \end{cases}$$

$$\text{(XXXII; 17b)}\quad \begin{cases} l = l' + \dfrac{\partial}{\partial L'}\left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int (F_1^* + F_2^* + \Phi_2^*)\,dl + \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial L'}\left(\left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\int \dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'}(dl)^2\right), \\ g = g' + \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int\left(\dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'} + \dfrac{\partial F_2^*}{\partial G'} + \dfrac{\partial \Phi_2^*}{\partial G'}\right)dl + \\ \qquad + \left(\dfrac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\dfrac{\partial}{\partial G'}\left(\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\int \dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'}(dl)^2\right). \end{cases}$$

c) *Lösung der Gleichungen* (XXXII; 10) *und* (XXXII; 17). In einer Theorie erster Ordnung bestimmt man die alten Winkelvariablen l, g als Funktionen der neuen durch Auflösung der Gleichungen (XXXII; 10b), in einer Theorie zweiter Ordnung durch Lösung von (XXXII; 17b). Diese Gleichungen, in denen die Unbekannten implizite auf den rechten Seiten enthalten sind, können mit Hilfe der LAGRANGEschen Formeln zur Umkehr von Reihenentwicklungen gelöst werden (s. Anhang V). Im Falle von (XXXII; 10b), deren Lösungen genau genug sind, wenn man Terme von der Ordnung 0 und 1 berücksichtigt, genügt es, auf den rechten Seiten $l = l'$, $g = g'$ zu setzen, da die vernachlässigten Glieder von der zweiten Ordnung sind. Im Falle (XXXII; 17b) ist dieses einfache Verfahren nicht zulässig. Hier dürfen wir l, g durch l', g' nur in den Termen zweiter Ordnung ersetzen, d. h. in allen Termen außer F_1^* und $\partial F_1^*/\partial G'$. In diesen Ausdrücken müssen wir jedoch[1])

$$l = l' + \frac{\partial}{\partial L'}\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\left(\int F_1^* dl\right)_{l=l',g=g'}, \quad g = g' + \left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\left(\int \frac{\partial F_1^*}{\partial G'}\,dl\right)_{l=l',g=g'}$$

setzen. Die entsprechenden Ausdrücke für L und G als Funktionen von L', G', l', g' folgen dann aus den Gleichungen (XXXII; 10a) bzw. (XXXII; 17a), wenn man rechts l, g durch die Lösungen von (XXXII; 10b) bzw. (XXXII; 17b) ersetzt.

---

[1]) Beispiel: Es sei $l = l' + \varepsilon[(a + b\varepsilon)\sin l + c\varepsilon \sin 2l]$ mit numerischen Koeffizienten a, b, c. Dann ist, genau genug bis zu Termen mit ε^2,

$$l = l' + a\varepsilon \sin(l' + a\varepsilon \sin l') + \varepsilon^2(b \sin l' + c \sin 2l') =$$

$$= l' + a\varepsilon \sin l' + a\varepsilon \cos l' \cdot a\varepsilon \sin l' + \varepsilon^2(b \sin l' + c \sin 2l') =$$

$$= l' + (a\varepsilon + b\varepsilon^2)\sin l' + \left(\frac{1}{2}a^2 + c\right)\varepsilon^2 \sin 2l'.$$

Die neuen kanonischen Variablen L', G', l', g' lösen das System

$$\text{(XXXII; 18)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial F'}{\partial l'} = 0; & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F'}{\partial L'}; \\ \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{\partial F'}{\partial g'}; & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial F'}{\partial G'}; \end{cases} \qquad F' = F'(L', G', g').$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt $L' = \text{const}$. Die Lösung von (XXXII; 18) reduziert sich demnach auf die eines Systems mit einem Freiheitsgrad:

$$\text{(XXXII; 18a)} \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial g'}; \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial G'}; \quad F' = F'(L_0', G', g')$$

mit $L_0' = \text{const}$. Ist dieses System gelöst, so erhält man l' aus der zweiten Gleichung (XXXII; 18) durch Quadratur.

d) *Das allgemeine planetare Dreikörperproblem.* Der oben beschriebene Mechanismus der Elimination kurzperiodischer Terme nach VON ZEIPEL, für Theorien erster und zweiter Ordnung und in dem einfachen Fall einer ebenen Bewegung, läßt sich auf gewisse Probleme der Bewegung von Planetoiden und künstlichen Satelliten anwenden. Die Ausdehnung dieses Verfahrens auf das räumliche planetare Dreikörperproblem ist ohne zusätzliche Schwierigkeiten möglich. Wir haben dann sechs DELAUNAYsche Elemente $L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1$ des gestörten und sechs entsprechende Elemente $L_2, \ldots, h_2$ des störenden Körpers. Die HAMILTONsche Funktion F hängt von diesen zwölf Elementen ab.

Um die kurzperiodischen (d. h. die mittleren Längen l_1 und l_2 enthaltenden) Terme zu eliminieren, definieren wir eine kanonische Transformation mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$S = S(L_1', L_2', G_1', G_2', H_1', H_2', l_1, l_2, g_1, g_2, h_1, h_2).$$

Wie zuvor, setzen wir $F = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$, $S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots$ und

$$S_0 = L_1'l_1 + L_2'l_2 + G_1'g_1 + G_2'g_2 + H_1'h_1 + H_2'h_2.$$

Außerdem wird angenommen, daß S die Bedingungen a priori

$$\frac{\partial S}{\partial l_i} = L_i; \quad \frac{\partial S}{\partial g_i} = G_i; \quad \frac{\partial S}{\partial h_i} = H_i; \quad \frac{\partial S}{\partial L_i'} = l_i'; \quad \frac{\partial S}{\partial G_i'} = g_i'; \quad \frac{\partial S}{\partial H_i'} = h_i', \quad (i = 1, 2)$$

erfüllt, die (XXXII; 3) entsprechen. Schließlich ist im Störungsproblem

$$F_0 = \frac{{\sigma_1}^4}{2\mu_1 {L_1}^2} + \frac{{\sigma_2}^4}{2\mu_2 {L_2}^2} = F_0(L_1, L_2).$$

Statt der ersten Gleichung (XXXII; 8) löst S_1 jetzt die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(XXXII; 19a)} \qquad \frac{\partial F_0}{\partial L_1'}\frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L_2'}\frac{\partial S_1}{\partial l_2} + F_1^* = 0,$$

während S_2 die Gleichung

$$\text{(XXXII; 19b)} \qquad \frac{\partial F_0}{\partial L_1'}\frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L_2'}\frac{\partial S_2}{\partial l_2} + F_2^* + \Phi_2^* + X_2^* = 0$$

befriedigt, die der ersten Gleichung (XXXII; 15) im ebenen Problem entspricht und in der

(XXXII; 20a)

$$\Phi_2 = \Phi_2^* + \hat{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_2 = \frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial F_1}{\partial L_1'} + \frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial F_1}{\partial L_2'} + \frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial F_1}{\partial G_1'} + \frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial F_1}{\partial G_2'} +$$
$$+ \frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial F_1}{\partial H_1'} + \frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial F_1}{\partial H_2'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\right)^2\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1'^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\right)^2\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_2'^2}$$

Terme aller drei Kategorien und

$$\text{(XXXII; 20b)} \quad X_2 = X_2^* = -\left(\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g_1} + \frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g_2} + \frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial h_1} + \frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial h_2}\right)$$

nur kurzperiodische Glieder enthält.

Sobald (XXXII; 19a) gelöst ist, sind Φ_2 und X_2 bekannt. Die Gleichung (XXXII; 19b) ist vom gleichen Typus wie (XXXII; 19a) und kann auf die gleiche Weise gelöst werden, die weiter unten unter g) beschrieben wird. Sie läßt sich in drei Gleichungen

$$\text{(XXXII; 21)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_0}{\partial L_1'}\dfrac{\partial S_{21}}{\partial l_1} + \dfrac{\partial F_0}{\partial L_2'}\dfrac{\partial S_{21}}{\partial l_2} + F_2^* = 0, \\ \dfrac{\partial F_0}{\partial L_1'}\dfrac{\partial S_{22}}{\partial l_1} + \dfrac{\partial F_0}{\partial L_2'}\dfrac{\partial S_{22}}{\partial l_2} + \Phi_2^* = 0, \\ \dfrac{\partial F_0}{\partial L_1'}\dfrac{\partial S_{23}}{\partial l_1} + \dfrac{\partial F_0}{\partial L_2'}\dfrac{\partial S_{23}}{\partial l_2} + X_2^* = 0 \end{cases}$$

von der Form (XXXII; 19a) aufspalten, die getrennt gelöst werden können. Dann ist $S_2 = S_{21} + S_{22} + S_{23}$. Diese Zerlegungsmethode, durch die verwickelte Ausdrücke in eine Summe einfacherer aufgeteilt werden, läßt sich noch weiter durchführen. So kann in (XXXII; 19a) F_1^* in zwei Teile, F_{1p}^* und F_{1i}^* zerlegt werden; der erste entstammt dem Hauptteil („principal part“) der Störungsfunktion, der zweite dem Nebenteil („indirect part“). Sind dann S_{1p} und S_{1i} die Lösungen der entsprechenden Gleichungen, so ist $S_1 = S_{1p} + S_{1i}$.

Auch die Gleichungen (XXXII; 21) lassen sich auf diese Weise weiter aufspalten. Die Funktionen Φ_2^* und X_2^* lassen sich in je vier Teile zerlegen. Sie sind ja Summen von Produkten $A \cdot B$, und jeder Faktor besitzt Komponenten, die dem Haupt- und dem Nebenteil entstammen. Schließlich läßt sich F_2^* in fünf Summanden aufteilen, von denen zwei eine ähnliche Struktur wie der Hauptteil von F aufweisen, während die übrigen drei die Form des Nebenteils haben. Die Gleichungen (XXXII; 21) können also durch $5+4+4=13$ gleichgebaute, aber einfachere ersetzt werden. Auf die Wiedergabe des sehr umständlichen Beweises müssen wir hier verzichten.

e) *Theorie dritter Ordnung.* In der Theorie der großen Planeten ist es mitunter nötig, auch gewisse Terme dritter Ordnung der Störungsfunktionen zu berücksichtigen. Zum Beispiel gibt in der Theorie der wechselseitigen Störungen von Jupiter und Saturn die genäherte Kommensurabilität der mittleren Bewegungen zu periodischen Termen der dritten Ordnung in den störenden Massen Anlaß, die nicht vernachlässigt werden dürfen (s. Abschnitt 135 und 214). Störungsterme dritter Ordnung vom säkularen und gemischten Typus können ebenfalls Bedeutung erlangen. Wie wir in Abschnitt 135 gezeigt haben, gibt es in einer Theorie erster Ordnung keine säkularen Störungen der großen Halbachsen, und wir erwähnten, wenn auch ohne Beweis, daß POISSON dasselbe auch für eine Theorie zweiter Ordnung bewiesen hat. ANDOYER[1]) hat in Erweiterung der POISSONschen Gedankengänge gezeigt, daß allgemein die säkularen Störungen der Ordnung $n > 2$ in den großen Halbachsen proportional t^{n-2} und die in den mittleren Längen proportional t^{n-1} sind. Kürzlich sind analytische Ausdrücke für diese säkularen Terme, wenn auch unvollständig, von HARETU[2]) und EGINITIS[3]) entwickelt worden, und ihre Resultate wurden von MEFFROY[4]) vervollständigt, der gezeigt hat, daß ein rein säkularer Term proportional t existiert, der dem periodischen Teil der Störungsfunktion entstammt. Es sei noch erwähnt, daß HILL mit Erfolg eine Theorie der Kleinen Planeten bis zu Termen dritter Ordnung in der störenden Masse aufgebaut hat. Schließlich hat DELAUNAY in seiner Theorie des Mondes gezeigt, daß gewisse periodische Ungleichheiten der fünften Ordnung bezüglich der in dieser Theorie benutzten kleinen Parameter noch merklich sind.

Wir beschränken uns darauf, VON ZEIPELS Mechanismus der Elimination der kurzperiodischen Terme bis zur Ordnung ε^3 in abgekürzter Form darzustellen, und zwar tun wir dies wiederum für das ebene Problem mit vier Variablen, wie auch für das allgemeine mit zwölf Variablen.

Im ersten Falle (vier Variable) ergibt die TAYLORsche Entwicklung (XXXII; 7), wenn sie auf Terme dritter Ordnung ausgedehnt wird, die zu-

---

[1]) H. ANDOYER, Cours de mécanique céleste Bd. 2. Paris 1926, Kap. 14.

[2]) S. C. HARETU, Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. Ann. Observ. Paris *18*, I. 1 — I. 39 (1885).

[3]) D. EGINITIS, Mémoires sur la stabilité du système solaire. Ann. Observ. Paris *19*, H. 1 — H. 16 (1889).

[4]) J. MEFFROY, Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire. B.A. 19, fasc. 1, 2, 3, (1955).

sätzliche Gleichung

$$(\text{XXXII}; 22)\quad F_3+\Theta_3+\Omega_3+\frac{\partial S_3}{\partial l}\frac{dF_0}{dL'}=F_3'+\frac{\partial S_1}{\partial G'}\frac{\partial F_2'}{\partial g}+\frac{\partial S_2}{\partial G'}\frac{\partial F_1'}{\partial g}=$$

$$=F_3'+\frac{\partial S_1}{\partial G'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g}+\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g}\right)+\frac{\partial S_2}{\partial G'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}$$

mit

$$(\text{XXXII}; 23)\quad \begin{cases} \Theta_3=\dfrac{\partial S_2}{\partial l}\dfrac{\partial F_1}{\partial L'}+\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\dfrac{\partial F_2}{\partial L'}+\dfrac{\partial S_2}{\partial g}\dfrac{\partial F_1}{\partial G'}+\dfrac{\partial S_1}{\partial g}\dfrac{\partial F_2}{\partial G'}+ \\ \quad+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial L'^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial g}\right)^2\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial G'^2}+\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\dfrac{\partial S_1}{\partial g}\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial L'\partial G'}+ \\ \quad+\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\dfrac{\partial S_2}{\partial l}\dfrac{d^2F_0}{dL'^2}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial l}\right)^3\dfrac{d^3F_0}{dL'^3}, \\ \Omega_3=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial G'}\right)^2\dfrac{\partial^2 F_1'}{\partial g^2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial G'}\right)^2\dfrac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g^2}, \end{cases}$$

wenn wir wegen (XXXII; 13, 15)

$$F_1'=\hat{F}_1+\bar{F}_1,\quad F_2'=\hat{F}_2+\hat{\Phi}_2+\bar{F}_2+\bar{\Phi}_2;\ \frac{\partial F_1'}{\partial g}=\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g},\ \frac{\partial F_2'}{\partial g}=\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g}+\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g}$$

schreiben, wo Φ_2 den Ausdruck (XXXII; 12) bezeichnet.

Sammeln wir die Terme gleicher Kategorie auf beiden Seiten von (XXXII; 22) und setzen sie gleich, so erhalten wir

$$(\text{XXXII}; 24)\quad \begin{cases} \dfrac{dF_0}{dL'}\dfrac{\partial S_3}{\partial l}+F_3^*+\Theta_3^*+\Omega_3^*=\dfrac{\partial S_1}{\partial G'}\left(\dfrac{\partial \hat{F}_2}{\partial g}+\dfrac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g}\right)+\dfrac{\partial S_2}{\partial G'}\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}, \\ \hat{F}_3+\hat{\Theta}_3+\hat{\Omega}_3=\hat{F}_3', \\ \bar{F}_3+\bar{\Theta}_3+\bar{\Omega}_3=\bar{F}_3'. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen dient zur Bestimmung von S_3:

$$S_3=-\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int\left[F_3^*+\Theta_3^*+\Omega_3^*-\frac{\partial S_1}{\partial G'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g}+\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g}\right)-\frac{\partial S_2}{\partial G'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\right]dl$$

oder, wenn man (XXXII; 9, 16) berücksichtigt,

$$(\text{XXXII}; 25)$$

$$S_3=-\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1}\int(F_3^*+\Theta_3^*+\Omega_3^*)\,dl-\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g}+\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g}\right)\int\int\frac{\partial F_1^*}{\partial G'}(dl)^2-$$

$$-\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-2}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\int\int\left(\frac{\partial F_2^*}{\partial G'}+\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial G'}\right)(dl)^2-\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-3}\left(\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g}\right)^2\int\int\int\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G'^2}(dl)^3.$$

Im zweiten Falle (zwölf Variable) bestätigt man leicht, daß S_3 die Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(XXXII; 26)} \qquad \frac{\partial F_0}{\partial L_1'}\frac{\partial S_3}{\partial l_1}+\frac{\partial F_0}{\partial L_2'}\frac{\partial S_3}{\partial l_2}+F_3{}^*+\Theta_3{}^*+\Omega_3{}^*+\Psi_3{}^*=0$$

ist, wenn zur Abkürzung

(XXXII; 26a)

$$\begin{aligned}\Theta_3 = {}& \frac{\partial S_2}{\partial l_1}\frac{\partial F_1}{\partial L_1'}+\frac{\partial S_2}{\partial l_2}\frac{\partial F_1}{\partial L_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial F_2}{\partial L_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial F_2}{\partial L_2'}+\frac{\partial S_2}{\partial g_1}\frac{\partial F_1}{\partial G_1'}+\frac{\partial S_2}{\partial g_2}\frac{\partial F_1}{\partial G_2'}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial F_2}{\partial G_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial F_2}{\partial G_2'}+\frac{\partial S_2}{\partial h_1}\frac{\partial F_1}{\partial H_1'}+\frac{\partial S_2}{\partial h_2}\frac{\partial F_1}{\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial F_2}{\partial H_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial F_2}{\partial H_2'}+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_1'^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_2'^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_1'^2}+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_2'^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1'^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_2'^2}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_1'\partial G_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_1'\partial G_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_1'\partial H_1'}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_1'\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_2'\partial G_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_2'\partial G_2'}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_2'\partial H_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L_2'\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_1'\partial G_2'}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_1'\partial H_1'}+\frac{\partial S_1}{\partial g_1}\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_1'\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_2'\partial H_1'}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial g_2}\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_2'\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial h_1}\frac{\partial S_1}{\partial h_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1'\partial H_2'}+\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\frac{\partial S_2}{\partial l_1}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1'^2}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\frac{\partial S_2}{\partial l_2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_2'^2}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\right)^3\frac{\partial^3 F_0}{\partial L_1'^3}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l_2}\right)^3\frac{\partial^3 F_0}{\partial L_2'^3},\end{aligned}$$

(XXXII; 26b)

$$\begin{aligned}\Omega_3 = -\Bigg[& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\right)^2\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_1{}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\right)^2\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_2{}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\right)^2\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial h_1{}^2}+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\right)^2\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial h_2{}^2}+\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_1\partial g_2}+\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_1\partial h_1}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_1\partial h_2}+\frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_2\partial h_1}+\frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial g_2\partial h_2}+\\ &+\frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial h_1\partial h_2}\Bigg],\end{aligned}$$

(XXXII; 26c)

$$\Psi_3 = \Psi_3^* = -\left[\frac{\partial S_1}{\partial G_1'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g_1} + \frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g_1}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial G_2'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g_2} + \frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g_2}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial H_1'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial h_1} + \frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial h_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S_1}{\partial H_2'}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial h_2} + \frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial S_2}{\partial G_1'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g_1} + \frac{\partial S_2}{\partial G_2'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial g_2} + \frac{\partial S_2}{\partial H_1'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial h_1} + \frac{\partial S_2}{\partial H_2'}\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial h_2}\right]$$

gesetzt wird und Φ den Ausdruck (XXXII; 20a) bezeichnet. Die partiellen Ableitungen von S_1 und S_2 werden aus den Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (XXXII; 19a bzw. 19b) gebildet, die man nach dem weiter unten unter g) beschriebenen Verfahren erhält.

f) In der Störungstheorie (ebenes Problem, vier Variable) ist

$$F_0(L) = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} = \frac{\beta^2}{2L^2},$$

wo $\beta^2 = \sigma^4/\mu$ eine positive Konstante und $L = \sigma\sqrt{a}$ ist (a = große Halbachse des gestörten Körpers). Nach (XV; 60b) ist, wenn heliozentrische Koordinaten zugrunde gelegt werden und wenn m_0, m_1, m_2 die Massen der Sonne, des gestörten und des störenden Körpers sind,

$$\varkappa^2 = k^2(m_0 + m_1); \quad \mu = m_1; \quad \sigma = \varkappa\mu$$

und somit

$$F_0(L) = \frac{\varkappa^4\mu^3}{2L^2} = \frac{\varkappa^2\mu}{2a}.$$

Differenzieren wir nach L, so folgt, wenn $n = \varkappa a^{-3/2}$ die mittlere Bewegung des gestörten Körpers ist,

(XXXII; 27)
$$\begin{cases} \dfrac{dF_0}{dL} = -\dfrac{\beta^2}{L^3} = -\varkappa a^{-3/2} = -n, \\ \dfrac{d^2F_0}{dL^2} = \dfrac{3\beta^2}{L^4} = \dfrac{3n}{L}; \quad \dfrac{d^3F_0}{dL^3} = -\dfrac{12\beta^2}{L^5} = -\dfrac{12n}{L^2}; \quad \cdots \end{cases}$$

Im allgemeinen Problem (zwölf Variable) ist

$$F_0(L_1, L_2) = \frac{{\beta_1}^2}{2{L_1}^2} + \frac{{\beta_2}^2}{2{L_2}^2},$$

und die partiellen Ableitungen nach L_1 und L_2 haben die gleiche Form wie (XXXII; 27). Auch hier ist

$$n_i = \varkappa_i a_i^{-3/2}; \quad L_i = \sigma_i\sqrt{a_i}, \quad (i = 1, 2),$$

und wenn man, was in diesem Falle häufig angebracht ist, JACOBIsche Koordinaten wählt, so entnimmt man $\varkappa_i$ und $\sigma_i = \varkappa_i\mu_i$ als Funktionen der Massen aus (XV; 60a).

Ersetzt man L durch L', so ist n durch n' zu ersetzen, d. h. durch die von den kurzperiodischen Störungen befreiten mittleren Bewegungen. Aus (XXXII; 18) folgt aber $L' = \text{const}$ und daher auch $n' = \text{const}$. Das gleiche gilt, wie leicht einzusehen ist, auch für L_1' und L_2' im Falle von zwölf Variablen. Die Ausdrücke (XXXII; 27) können in die Formeln dieses Abschnitts eingesetzt werden, die Ableitungen von $F_0(L')$ bzw. $F_0(L_1', L_2')$ enthalten.

g) Die partiellen Differentialgleichungen (XXXII; 19a, b) und (XXXII; 21, 26) haben alle die Form

$$n_1' \frac{\partial S}{\partial l_1} + n_2' \frac{\partial S}{\partial l_2} = \sum_{p,q} M_{p,q} \cos (pl_1 + ql_2 + \gamma_{p,q}), \tag{XXXII; 28}$$

in der $M_{p,q}$ eine Funktion der linearen Variablen L_i', G_i', H_i' und $\gamma_{p,q}$ eine Funktion der Winkelvariablen g_i, h_i ist. Die Gleichung (XXXII; 28) hat aber, wie durch Nachrechnen leicht verifiziert wird, die Lösung

$$S = \sum_{p,q} \frac{M_{p,q}}{pn_1' + qn_2'} \sin (pl_1 + ql_2 + \gamma_{p,q}). \tag{XXXII; 29}$$

Die Ableitung von S nach L_1' ergibt, da $n_1' = \beta_1^2/L_1'^3$ ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial L_1'} &= \sum \frac{\partial M_{p,q}}{\partial L_1'} \frac{\sin (pl_1 + ql_2 + \gamma_{p,q})}{pn_1' + qn_2'} + \frac{\partial S}{\partial n_1'} \frac{dn_1'}{dL_1'} = \\ &= \sum \frac{\partial M_{p,q}}{\partial L_1'} \frac{\sin (pl_1 + ql_2 + \gamma_{p,q})}{pn_1' + qn_2'} + \frac{3\beta_1^2}{L_1'^4} \sum \frac{pM_{p,q} \sin (pl_1 + ql_2 + \gamma_{p,q})}{(pn_1' + qn_2')^2}, \end{aligned}$$

und ein entsprechender Ausdruck folgt für $\partial S/\partial L_2'$. Auch die Bildung der übrigen partiellen Ableitungen von S_1, S_2, S_3, die in den oben entwickelten Formeln vorkommen, macht keine Schwierigkeiten und darf dem Leser überlassen bleiben.

267. Elimination der langperiodischen Terme

Nachdem die Aufgabe, die kurzperiodischen Terme der HAMILTONschen Funktion zu eliminieren, gelöst ist, beschäftigen wir uns nunmehr mit dem Problem der Elimination der langperiodischen Glieder, die durch die sehr langsamen Änderungen der DELAUNAYschen Elemente g und h, d. h. der Perihel- und Knotenlängen, entstehen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall der vier Variablen L, G, l, g. Die Erweiterung der Theorie auf das vollständige räumliche Dreikörperproblem mit zwölf Variablen läßt sich dann ohne zusätzliche Schwierigkeiten durchführen.

Wir gehen von den vier kanonischen Differentialgleichungen (XXXII; 18) aus, deren Lösung die von den kurzperiodischen Termen befreiten Variablen

$L' = L_0' = \text{const}$, G', l', g' ergeben. Auf diese Größen wenden wir die kanonische Transformation

$$L', G', l', g' \to L'', G'', l'', g''$$

an, die so beschaffen sein soll, daß die HAMILTONsche Funktion F' identisch in F'' übergeführt wird und daß

(XXXII; 30) $$F'(L', G', g') \equiv F''(L'', G'')$$

ist. Diese Transformation wird mittels der erzeugenden Funktion $S'(L'', G'', l', g')$ ausgeführt, für die a priori

(XXXII; 31) $$\frac{\partial S'}{\partial l'} = L'; \quad \frac{\partial S'}{\partial g'} = G'; \quad \frac{\partial S'}{\partial L''} = l''; \quad \frac{\partial S'}{\partial G''} = g''$$

und, wenn man wie früher $S' = S_0' + S_1' + S_2' + \cdots$ in Terme der Ordnungen 0, 1, 2, ... zerlegt,

(XXXII; 32) $$S_0' = L''l' + G''g'$$

gilt. Aus (XXXII; 32) und der ersten Gleichung (XXXII; 31) folgt

$$L' = L'' + \frac{\partial}{\partial l'}(S_1' + S_2' + \cdots) = L_0' = \text{const};$$

es sind also S_1' und S_2' (wenn man sich auf Theorien erster und zweiter Ordnung beschränkt) von l' unabhängig. Für diese Theorien ergeben die Gleichungen (XXXII; 31) also

(XXXII; 33) $$\begin{cases} L' = L''; & G' = G'' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial g'} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial g'}, \\ l' = l'' - \dfrac{\partial S_1'}{\partial L''} - \dfrac{\partial S_2'}{\partial L''}; & g' = g'' - \dfrac{\partial S_1'}{\partial G''} - \dfrac{\partial S_2'}{\partial G''}, \end{cases}$$

und die Identität (XXXII; 30) läßt sich dann

$$F'\left(L'', G'' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \frac{\partial S_2'}{\partial g'}, g'\right) \equiv F''(L'', G'')$$

schreiben oder, wenn man die linke Seite in eine TAYLORsche Reihe nach dem kleinen Inkrement $\partial(S_1' + S_2')/\partial g'$ entwickelt,

(XXXII; 34)
$$F'(L'', G'', g') + \left(\frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \frac{\partial S_2'}{\partial g'}\right)\frac{\partial F'}{\partial G''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \frac{\partial S_2'}{\partial g'}\right)^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial G''^2} + \cdots \equiv F''(L'', G'').$$

Zerlegt man nun auch $F' = F_0' + F_1' + F_2'$ in Summanden der Ordnungen 0, 1 und 2 in bezug auf den kleinen Parameter ε, so ergibt sich durch Gleichsetzen der Summanden gleicher Ordnung auf beiden Seiten dieser Identität, indem man Terme von höherer als dritter Ordnung vernachlässigt,

$$\text{(XXXII; 35)} \quad \begin{cases} F_0' \equiv F_0'', \\ F_1' \equiv F_1'', \\ F_2' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial g'} \dfrac{\partial F_1'}{\partial G''} \equiv F_2'', \\ F_3' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial g'} \dfrac{\partial F_2'}{\partial G''} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial g'} \dfrac{\partial F_1'}{\partial G''} + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial S_1'}{\partial g'} \right)^2 \dfrac{\partial^2 F_1'}{\partial G''^2} \equiv F_3''. \end{cases}$$

a) *Theorie erster Ordnung.* Die zweite Gleichung (XXXII; 35) schreibt sich, wenn man wieder langperiodische und konstante Terme trennt,

$$F_1' = \hat{F}_1' + \bar{F}_1' = \bar{F}_1'' = F_1'',$$

so daß

$$\text{(XXXII; 36)} \qquad \hat{F}_1' = 0; \qquad \bar{F}_1' = F_1''$$

folgt. Ebenso erhält man aus der dritten Gleichung (XXXII; 35)

$$\text{(XXXII; 37)} \qquad \hat{F}_2' + \bar{F}_2' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'} \frac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''} \equiv \bar{F}_2''$$

oder

$$\hat{F}_2' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'} \frac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''} = 0; \quad \bar{F}_2' = \bar{F}_2'' = F_2'',$$

d. h. wegen (XXXII; 8 und 15)

$$\text{(XXXII; 38)} \quad \hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2 + \frac{\partial S_1'}{\partial g'} \frac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''} = 0; \quad \bar{F}_2 + \bar{\Phi}_2 = F_2''.$$

Die erste Gleichung (XXXII; 38) ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für S_1', deren Lösung

$$\text{(XXXII; 39)} \qquad S_1' = -\left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G''} \right)^{-1} \int (\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\, dg'$$

lautet. Dabei bezeichnet Φ den Ausdruck (XXXII; 12), in dem die partiellen Ableitungen von S_1 nach l und g durch (XXXII; 9) bestimmt sind. In einer Theorie erster Ordnung erhält man also nach (XXXII; 33, 39) die alten

Variablen L', G', l', g' als Funktionen der neuen aus dem Gleichungssystem

$$\text{(XXXII; 40)}\quad \begin{cases} L' = L''; \quad G' = G'' - \left(\dfrac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''}\right)^{-1} (\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2), \\ l' = l'' + \dfrac{\partial}{\partial L''}\left[\left(\dfrac{d\bar{F}_1'}{\partial G''}\right)^{-1} \int (\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\, dg'\right]; \\ g' = g'' + \dfrac{\partial}{\partial G''}\left[\left(\dfrac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''}\right)^{-1} \int (\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\, dg'\right]. \end{cases}$$

b) *Theorie zweiter Ordnung.* Die letzte Gleichung (XXXII; 35) schreibt man

$$F_3' + \Sigma_3 + \frac{\partial S_2'}{\partial g'} \frac{\partial F_1'}{\partial G''} = F_3'',$$

wenn zur Abkürzung

$$\text{(XXXII; 41)}\qquad \Sigma_3 = \frac{\partial S_1'}{\partial g'} \frac{\partial F_2'}{\partial G''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial g'}\right)^2 \frac{\partial^2 F_1'}{\partial G''^2}$$

gesetzt wird. Aus der ersten Gleichung (XXXII; 36) folgt aber $F_1' = \bar{F}_1'$, also

$$\text{(XXXII; 42)}\qquad \hat{F}_3' + \hat{\Sigma}_3 + \bar{F}_3' + \bar{\Sigma}_3 + \frac{\partial S_2'}{\partial g'} \frac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''} = F_3'',$$

und ferner, indem man Terme gleicher Kategorie trennt,

$$\text{(XXXII; 43)}\qquad \hat{F}_3' + \Sigma_3 + \frac{\partial S_2'}{\partial g'} \frac{\partial \bar{F}_1'}{\partial G''} = 0; \quad \bar{F}_3' + \bar{\Sigma}_3 = \bar{F}_3'' = F_3''.$$

Berücksichtigt man die letzte Gleichung (XXXII; 8), die beiden letzten Gleichungen (XXXII; 24) und die erste Gleichung (XXXII; 36), so erhält man statt (XXXII; 43)

$$\text{(XXXII; 44)}\quad \begin{cases} \hat{F}_3 + \hat{\Theta}_3 + \hat{\Omega}_3 + \hat{\Sigma}_3 + \dfrac{\partial S_2'}{\partial g'} \dfrac{\partial \bar{F}_1}{\partial G''} = 0, \\ \bar{F}_3 + \bar{\Theta}_3 + \bar{\Omega}_3 + \bar{\Sigma}_3 = \bar{F}_3'' = F_3'', \end{cases}$$

und die erste Gleichung (XXXII; 44), eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für S_2', hat die Lösung[1])

$$\text{(XXXII; 45)}\qquad S_2' = -\left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G''}\right)^{-1} \int (\hat{F}_3 + \hat{\Theta}_3 + \hat{\Omega}_3 + \hat{\Sigma}_3)\, dg'.$$

Die in Θ und Ω enthaltenen Ableitungen von S_1 und S_2 entnimmt man aus (XXXII; 9, 16), die in Σ enthaltene Ableitung von S_1' aus (XXXII; 39). Die Gleichungen (XXXII; 33) lauten dann für eine Theorie zweiter Ordnung,

---

[1]) Siehe auch Zusatz 6 in Anhang VIII.

wenn man zur Abkürzung

$$\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2 + \hat{F}_3 + \hat{\Theta}_3 + \hat{\Omega}_3 + \hat{\Sigma}_3 = \hat{\Pi},$$

$$s = \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial G''}$$

setzt,

$$\text{(XXXII; 46)} \quad \begin{cases} L' = L''; & G' = G'' - \dfrac{\hat{\Pi}}{s}, \\ l' = l'' + \dfrac{\partial}{\partial L''}\left(\dfrac{1}{s}\int \hat{\Pi}\, dg'\right); & g' = g'' + \dfrac{\partial}{\partial G''}\left(\dfrac{1}{s}\int \hat{\Pi}\, dg\right). \end{cases}$$

c) *Auflösung der Gleichungen* (XXXII; 40 und 46). In einer Theorie erster Ordnung haben die Gleichungen (XXXII; 40) die Form

$$L' = L''; \qquad G' = G'' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'},$$

$$l' = l'' - \frac{\partial S_1'}{\partial L''}; \quad g' = g'' + \frac{\partial S_1'}{\partial G''},$$

und es ist $S_1' = S_1'\,(L'', G'', g')$, da $\partial S_1'/\partial l' = 0$ vorausgesetzt wurde.

Mit Ausnahme der ersten enthalten also diese Gleichungen g' implizite in den Ausdrücken auf der rechten Seite. Um die alten Variablen L', G', l', g' als Funktionen der neuen, L'', G'', l'', g'', auszudrücken, genügt es, auf den rechten Seiten $g' = g''$ zu setzen, da dann nur Terme zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Führt man S_1' durch (XXXII; 39) ein, so erhält man für eine Theorie erster Ordnung nach (XXXII; 40)

$$\text{(XXXII; 47)} \quad \begin{cases} L' = L''; \quad G' = G'' - \dfrac{1}{s}\left(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2\right), \\ l' = l'' + \dfrac{\partial}{\partial L''}\left(\dfrac{1}{s}\int \left(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2\right) dg'\right)_{g'=g''}; \\ g' = g'' + \dfrac{\partial}{\partial G''}\left(\dfrac{1}{s}\int \left(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2\right) dg'\right)_{g'=g''}. \end{cases}$$

In einer Theorie zweiter Ordnung genügt dieses einfache Verfahren nicht. Man wird vielmehr, da S_1' und S_2' von l' unabhängig sind und somit von den alten Variablen nur g' implizite enthalten, die letzte Gleichung (XXXII, 33),

$$\text{(XXXII; 48)} \quad g' = g'' - \frac{\partial S_1'}{\partial G''} - \frac{\partial S_2'}{\partial G''} = g'' + f(L'', G'', g'),$$

mit Hilfe des LAGRANGEschen Entwicklungssatzes (Anhang V) nach g' auflösen und die Lösung $g' = g'\,(L'', G'', g'')$ in die übrigen einsetzen.

Zweckmäßiger ist folgendes Verfahren, das den kleinen Parameter ε nicht explizite in Erscheinung treten läßt und das geschlossene Lösungen gibt, wenn Terme von der dritten Ordnung an vernachlässigt werden. Man darf dann

$\partial S_2'/\partial G'' = (\partial S_2'/\partial G'')_{g'=g''}$ setzen, während man $\partial S_1'/\partial G''$ in eine TAYLORsche Reihe

$$\frac{\partial S_1'}{\partial G''} = \left(\frac{\partial S_1'}{\partial G''}\right)_{g'=g''} + (g' - g'')\,\frac{\partial}{\partial g'}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial G''}\right)_{g'=g''} =$$

$$= \left(\frac{\partial S_1'}{\partial G''}\right)_{g'=g''} - \left(\frac{\partial S_1'}{\partial G''}\,\frac{\partial^2 S_1'}{\partial g'\,\partial G''}\right)_{g'=g''}$$

bis zur zweiten Ordnung einschließlich entwickelt. Man erhält also, wenn man S_1' und S_2' aus (XXXII; 39, 45) entnimmt,

(XXXII; 49a)

$$g' = g'' + \frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{1}{s}\int(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\,dg'\right)_{g'=g''} + \frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{1}{s}\int \hat{\Pi}\,dg'\right)_{g'=g'} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2}{s}\right)_{g'=g''}\frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{1}{s}\int(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\,dg'\right)_{g'=g''}.$$

Ebenso folgt aus

$$l' = l'' - \frac{\partial S_1'}{\partial L''} - \frac{\partial S_2'}{\partial L''},$$

wenn man

$$\frac{\partial S_1'}{\partial L''} = \left(\frac{\partial S_1'}{\partial L''}\right)_{g'=g''} + (g' - g'')\frac{\partial}{\partial g'}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial L''}\right)_{g'=g''}; \quad \frac{\partial S_2'}{\partial L''} = \left(\frac{\partial S_2'}{\partial L''}\right)_{g'=g''}$$

setzt,

(XXXII; 49b)

$$l' = l'' + \frac{\partial}{\partial L''}\left(\frac{1}{s}\int(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\,dg'\right)_{g'=g''} + \frac{\partial}{\partial L''}\left(\frac{1}{s}\int \hat{\Pi}\,dg'\right)_{g'=g''} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial L''}\left(\frac{\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2}{s}\right)_{g'=g''}\frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{1}{s}\int(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\,dg'\right)_{g'=g''}.$$

Schließlich ist

$$G' = G'' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \frac{\partial S_2'}{\partial g'}$$

und

$$\frac{\partial S_1'}{\partial g'} = \left(\frac{\partial S_1'}{\partial g'}\right)_{g'=g''} + (g' - g'')\left(\frac{\partial^2 S_1'}{\partial g'^2}\right)_{g'=g''}; \quad \frac{\partial S_2'}{\partial g'} = \left(\frac{\partial S_2'}{\partial g'}\right)_{g'=g''},$$

also

(XXXII; 49c)

$$G' = G'' + \left(\frac{\partial(S_1' + S_2')}{\partial g'}\right)_{g'=g''} - \left(\frac{\partial S_1'}{\partial G''}\,\frac{\partial^2 S_1'}{\partial g'^2}\right)_{g'=g''} =$$

$$= G'' - \frac{1}{s}\left(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2\right)_{g'=g''} - \left(\frac{\hat{\Pi}}{s}\right)_{g'=g''} -$$

$$- \frac{1}{s}\left(\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial g'} + \frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g'}\right)_{g'=g''}\frac{\partial}{\partial G''}\left(\frac{1}{s}\int(\hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2)\,dg'\right)_{g'=g''}.$$

Die Gleichungen (XXXII; 40) geben die alten kanonischen Variablen G', l', g' als Funktionen der neuen, L'', G'', l'', g'', in einer Theorie erster Ordnung, die Gleichungen (XXXII; 49a, b, c) lösen dasselbe Problem in einer Theorie zweiter Ordnung. Die Gleichung $L' = L''$ gilt unverändert in beiden Theorien.[1])

Die neuen kanonischen Variablen genügen den kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XXXII; 50)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dL''}{dt} = \dfrac{\partial F''}{\partial l''} = 0; & \dfrac{dl''}{dt} = -\dfrac{\partial F''}{\partial L''}; \\ \dfrac{dG''}{dt} = \dfrac{\partial F''}{\partial g''} = 0; & \dfrac{dg''}{dt} = -\dfrac{\partial F''}{\partial G''}; \end{cases} \qquad F'' = F''(L'', G'').$$

Die beiden links stehenden Gleichungen (XXXII; 50) zeigen, daß L'' und G'' konstant sind. Die beiden übrigen ergeben dann, daß l'' und g'' lineare Funktionen der Zeit sind.

d) *Das räumliche Problem.* Alles, was wir betreffs des ebenen Störungsproblems gesagt haben, das durch die vier kanonischen Gleichungen (XXXII; 18) definiert ist, läßt sich ohne Schwierigkeit auf ein System mit den sechs Variablen L, G, H, l, g, h ausdehnen und, allgemeiner, auf das allgemeine planetare Dreikörperproblem, das die Lösung von zwölf kanonischen Differentialgleichungen für die zwölf Variablen L_i, G_i, H_i, l_i, g_i, h_i $(i = 1, 2)$ erfordert und das wir im vorigen Paragraphen schon bezüglich der Elimination der kurzperiodischen Terme behandelt haben. Man kann leicht zeigen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Elimination der langperiodischen Terme, $\hat{F}_1' \equiv 0$, in jedem dieser Fälle erfüllt ist.

Wenn man den Fall des allgemeinen planetaren Dreikörperproblems ins Auge faßt, so erhält man statt der ersten der beiden Gleichungen (XXXII; 38) zur Bestimmung von S_1' die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(XXXII; 51)} \qquad \hat{F}_2 + \hat{\Phi}_2 + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G_1''}\frac{\partial S_1'}{\partial g_1'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G_2''}\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial H_1''}\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial H_2''}\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'} = 0,$$

in der Φ_2 dem Ausdruck (XXXII; 20a) entspricht. Für die Bestimmung von S_2' erhält man statt der ersten Gleichung (XXXII; 44)

$$\text{(XXXII; 52)} \qquad \hat{F}_3 + \hat{\Theta}_3 + \hat{\Omega}_3 + \bar{\Sigma}_3 + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G_1''}\frac{\partial S_2'}{\partial g_1'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial G_2''}\frac{\partial S_2'}{\partial g_2'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial H_1''}\frac{\partial S_2'}{\partial h_1'} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial H_2''}\frac{\partial S_2'}{\partial h_2'} = 0,$$

---

[1]) In einer Theorie dritter Ordnung würde $L' = L''$ nicht mehr gelten, da der Satz von Laplace und Poisson von der säkularen Unveränderlichkeit der großen Achsen für Störungen dritter Ordnung nicht mehr gilt.

wo Θ und Ω durch (XXXII; 26a, b) bestimmt sind und der Ausdruck Σ die erweiterte Form

$$\Sigma_3 = \frac{\partial S_1'}{\partial g_1'}\frac{\partial}{\partial G_1''}\left(\hat{F}_2+\hat{\Phi}_2+\bar{F}_2+\bar{\Phi}_2\right)+\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'}\frac{\partial}{\partial G_2''}\left(\hat{F}_2+\hat{\Phi}_2+\bar{F}_2+\bar{\Phi}_2\right)+$$
$$+\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'}\frac{\partial}{\partial H_1''}\left(\hat{F}_2+\hat{\Phi}_2+\bar{F}_2+\bar{\Phi}_2\right)+\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'}\frac{\partial}{\partial H_2''}\left(\hat{F}_2+\hat{\Phi}_2+\bar{F}_2+\bar{\Phi}_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial g_1'}\right)^2\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_1''^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'}\right)^2\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_2''^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'}\right)^2\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial H_1''^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'}\right)^2\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial H_2''^2}+\frac{\partial S_1'}{\partial g_1'}\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_1''\partial G_2''}+\frac{\partial S_1'}{\partial g_1'}\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_1''\partial H_1''}+$$
$$+\frac{\partial S_1'}{\partial g_1'}\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_1''\partial H_2''}+\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'}\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_2''\partial H_1''}+\frac{\partial S_1'}{\partial g_2'}\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial G_2''\partial H_2''}+$$
$$+\frac{\partial S_1'}{\partial h_1'}\frac{\partial S_1'}{\partial h_2'}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial H_1''\partial H_2''}$$

annimmt.

Die Technik der Lösung der Gleichungen (XXXII; 51, 52) ist die gleiche wie die der Gleichungen (XXXII; 19a, b), und was wir hierüber am Schluß des vorigen Abschnitts gesagt haben, läßt sich fast Wort für Wort auf den vorliegenden Fall übertragen, wenn man bedenkt, daß nunmehr statt der beiden unabhängigen Variablen l_1 und l_2 deren vier, nämlich g_1', g_2', h_1', h_2', auftreten.

268. Vektorielle Lösung des Problems durch P. Musen

Eine geistreiche Variante der in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Eliminationsmethode verdanken wir P. MUSEN[1]). Er verwendet Vektoren und Operatoren, was die Programmierung für Computer wesentlich erleichtert. Auch ist in ihr eine Erweiterung des Rechenschemas auf beliebig viele störende Körper einbegriffen. Der Kern der Methode ist die Einführung zweier Operatoren M und P, von denen der erstere die kurzperiodischen Terme der Störungsfunktion eliminiert, der zweite die säkularen, langperiodischen und kritischen Terme. Unter „kritischen" Termen verstehen wir solche, die eigentlich zu den kurzperiodischen gehören, d. h. in ihren Argumenten die mittleren Längen bzw. Anomalien enthalten, aber wegen der angenäherten Kommensurabilität der mittleren Bewegungen nach der Integration langperiodische Glieder mit kleinen Divisoren, also mehr oder weniger großen Amplituden erzeugen. Bisher ist kaum ein exakt formuliertes Verfahren zur

---

[1]) P. MUSEN, On the POINCARÉ-VON ZEIPEL and BROWN-SHOOK methods of the elimination of the short period terms from a Hamiltonian. NASA TN D-4399, 1968.

Absonderung dieser kritischen Terme bekannt geworden, vielleicht mit Ausnahme der BRENDELschen Methode, von der wir in Abschnitt 239 eine einfache Variante beschrieben haben, die sich auf Störungen erster Ordnung bezieht.

In seiner oben erwähnten Arbeit beschränkt sich MUSEN zunächst auf die Elimination der kurzperiodischen Terme. Während der Niederschrift dieser Zeilen stand die Vollendung der Theorie durch entsprechende Vorschriften für die Elimination der übrigen Terme noch aus. Es dürfte aber nicht überflüssig sein, diesen ersten Teil des Werkes allein zu beschreiben, da in ihm das Prinzip der Methode bereits klar hervortritt und es einmal mehr die Fülle der in VON ZEIPELS Theorie verborgenen Möglichkeiten wie auch das Geschick aufzeigt, mit der MUSEN aus diesen Möglichkeiten Vorteil zieht.

Wir beginnen mit einem System von vier vektoriellen Differentialgleichungen

$$\text{(XXXII; 53)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \nabla_{\mathfrak{y}} F; & \dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = -\nabla_{\mathfrak{x}} F, \\ \dfrac{d\vec{\xi}}{dt} = \nabla_{\vec{\eta}} F; & \dfrac{d\vec{\eta}}{dt} = -\nabla_{\vec{\xi}} F, \end{cases}$$

die das Störungsproblem symbolisieren. Dabei seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ Vektoren mit gleicher Koordinatenanzahl n, ferner $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ andere Vektoren mit ebenfalls gleicher Koordinatenanzahl ν. Im allgemeinen sind n und ν verschieden. In dem planetarischen Dreikörperproblem mit zwölf DELAUNAYschen Variablen wären z. B.

$$\text{(XXXII; 54)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = (L_1, L_2); & \mathfrak{y} = (l_1, l_2), \\ \vec{\xi} = (G_1, G_2, H_1, H_2); & \vec{\eta} = (g_1, g_2, h_1, h_2), \end{cases}$$

d. h. $n = 2$, $\nu = 4$. In den klassischen Theorien der Planetenstörungen hängt die HAMILTONsche Funktion $F(x, \xi; y, \eta)$ von den linearen Variablen x, ξ und den zu ihnen kanonisch-konjugierten Winkelvariablen y, η ab. Die Symbole $\nabla_{\mathfrak{x}}$, $\nabla_{\vec{\xi}}$, $\nabla_{\mathfrak{y}}$, $\nabla_{\vec{\eta}}$ sind die Gradientoperatoren

$$\nabla_{\mathfrak{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right); \quad \ldots; \quad \nabla_{\vec{\eta}} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \eta_\nu}\right),$$

die auf F anzuwenden sind. Ähnlich wie in den vorhergehenden Abschnitten setzen wir

$$\text{XXXII; 55)} \qquad F = F_0(\mathfrak{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} F_j\,(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\,; \mathfrak{y}, \vec{\eta}),$$

wo F_j von der Ordnung j bezüglich eines kleinen Parameters ε ist und F_0 nur von den Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x}$ abhängt. Außerdem darf man schreiben

$$\text{(XXXII; 56)} \qquad F_j = \sum_{\mathfrak{m}, \vec{\mu}} A^{(j)}_{\mathfrak{m}, \vec{\mu}}(\mathfrak{x}, \vec{\xi}) \exp i(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}), \left(i = \sqrt{-1}\right),$$

wo $\mathfrak{m}$ ein Vektor mit n ganzzahligen Koordinaten, $\vec{\mu}$ ein Vektor mit ν ganzzahligen Koordinaten ist und $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{y}$, $\vec{\mu} \cdot \vec{\eta}$ skalare Produkte sind.

Wir definieren nun eine kanonische Transformation

$$\mathfrak{x}, \vec{\xi}\,; \mathfrak{y}, \vec{\eta} \to \mathfrak{x}', \vec{\xi}\,'; \mathfrak{y}', \vec{\eta}'$$

durch eine erzeugende Funktion

$$S(\mathfrak{x}', \vec{\xi}\,'; \mathfrak{y}, \vec{\eta}) = \sum_{j=1}^{\infty} S_j,$$

die nach ihren Variablen differenzierbar sein soll. Wir nehmen an, daß diese Transformation F in eine andere Hamiltonsche Funktion F' überführt, die nicht mehr von $\mathfrak{y}'$ abhängt. Da S die Zeit t nicht explizite enthält, besteht die Identität

$$(\text{XXXII}; 57) \qquad F(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\,; \mathfrak{y}, \vec{\eta}) \equiv F'(\mathfrak{x}', \vec{\xi}\,'; \vec{\eta}').$$

Ferner setzen wir voraus, daß die alten Variablen als Funktionen der neuen durch die impliziten Gleichungen

$$(\text{XXXII}; 58) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \nabla_{\mathfrak{y}} S; & \vec{\xi} = \vec{\xi}\,' + \nabla_{\vec{\eta}} S, \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{y}' - \nabla_{\mathfrak{x}'} S; & \vec{\eta} = \vec{\eta}' - \nabla_{\vec{\xi}\,'} S \end{cases}$$

ausgedrückt werden, die man unschwer als Verallgemeinerungen der Gleichungen (XXXII; 5, 5a) der klassischen Theorie erkennt. Die Identität (XXXII; 57) läßt sich daher schreiben

$$(\text{XXXII}; 59) \qquad F(\mathfrak{x}' + \nabla_{\mathfrak{y}} S, \vec{\xi}\,' + \nabla_{\vec{\eta}} S;\ \mathfrak{y}, \vec{\eta}) \equiv F'(\mathfrak{x}', \vec{\xi}\,'; \vec{\eta} + \nabla_{\vec{\xi}\,'} S),$$

d. h., F ist in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von $\nabla_{\mathfrak{y}} S$, $\nabla_{\vec{\eta}} S$ und F' in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von $\nabla_{\vec{\xi}\,'} S$ entwickelbar. Dann ist

$$\exp(\nabla_{\mathfrak{y}} S \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'} + \nabla_{\vec{\eta}} S \cdot \nabla_{\vec{\xi}\,'})\, F \equiv \exp(\nabla_{\vec{\xi}\,'} S \cdot \nabla_{\vec{\eta}})\, F'$$

oder, wenn man zur Abkürzung die Vektoren mit $n + \nu$ Koordinaten

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{w} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{u}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}' \\ \vec{\xi}\,' \end{pmatrix}$$

einführt,

$$(\text{XXXII}; 60) \quad \exp(\nabla_{\mathfrak{w}} S \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'})\, F \equiv \exp(\nabla_{\vec{\xi}\,'} S \cdot \nabla_{\vec{\eta}})\, F'; \quad S = S(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})$$

mit

$$(\text{XXXII}; 61) \qquad F = \sum_{j=0}^{\infty} F_j; \quad F' = \sum_{j=0}^{\infty} F_j'; \quad S = \sum_{j=1}^{\infty} S_j.$$

Musen definiert nun zwei Operatoren durch

$$(\text{XXXII}; 62) \qquad \begin{cases} T^{(1)} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} T_j^{(1)} = \exp \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nabla_{\mathfrak{w}} S_j \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'}, \\ T^{(2)} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} T_j^{(2)} = \exp \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nabla_{\vec{\xi}\,'} S_j \cdot \nabla_{\vec{\eta}}, \end{cases}$$

wobei auch hier und in der Folge ein Punkt zwischen Vektoren oder zwischen Vektoren und vektoriellen Operatoren das skalare Produkt bezeichnen soll. Wenn man in den Gleichungen (XXXII; 62) Terme gleicher Ordnung auf beiden Seiten gleichsetzt und dies bis zur dritten Ordnung durchführt, so erhält man

$$\text{(XXXII; 62a)}\quad \begin{cases} T_0^{(1)} = 1, \\ T_1^{(1)} = \nabla_{w'} S_1 \cdot \nabla_{u'}, \\ T_2^{(1)} = \nabla_{w'} S_2 \cdot \nabla_{u'} + \frac{1}{2} (\nabla_{w'} S_1 \cdot \nabla_{u'})^2, \\ T_3^{(1)} = \nabla_{w'} S_3 \cdot \nabla_{u'} + (\nabla_{w'} S_1 \cdot \nabla_{u'}) (\nabla_{w'} S_2 \cdot \nabla_{u'}) + \frac{1}{6} (\nabla_{w'} S_1 \cdot \nabla_{u'})^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und

$$\text{(XXXII; 62b)}\quad \begin{cases} T_0^{(2)} = 1, \\ T_1^{(2)} = \nabla_{\vec{\xi}'} S_1 \cdot \nabla_{\vec{\eta}}, \\ T_2^{(2)} = \nabla_{\vec{\xi}'} S_2 \cdot \nabla_{\vec{\eta}} + \frac{1}{2} (\nabla_{\vec{\xi}'} S_1 \cdot \nabla_{\vec{\eta}})^2, \\ T_3^{(2)} = \nabla_{\vec{\xi}'} S_3 \cdot \nabla_{\vec{\eta}} + (\nabla_{\vec{\xi}'} S_1 \cdot \nabla_{\vec{\eta}}) (\nabla_{\vec{\xi}'} S_2 \cdot \nabla_{\vec{\eta}}) + \frac{1}{6} (\nabla_{\vec{\xi}'} S_1 \cdot \nabla_{\vec{\eta}})^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit Hilfe der Operatoren (XXXII; 62) läßt sich die Identität (XXXII; 60)

$$T^{(1)} F \equiv T^{(2)} F'$$

oder

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} F_k \equiv \sum_{j=0}^{\infty} T_j^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} F_k'$$

schreiben, und wenn man wieder Terme gleicher Ordnung auf beiden Seiten gleichsetzt, so gilt

$$\text{(XXXII; 63)}\qquad \sum_{k=0}^{j} (T_{j-k}^{(1)} F_k - T_{j-k}^{(2)} F_k') = 0$$

oder, nacheinander für $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned} &T_0^{(1)} F_0 - T_0^{(2)} F_0' = 0, \\ &T_1^{(1)} F_0 - T_1^{(2)} F_0' + T_0^{(1)} F_1 - T_0^{(2)} F_1' = 0, \\ &T_2^{(1)} F_0 - T_2^{(2)} F_0' + T_1^{(1)} F_1 - T_1^{(2)} F_1' + T_0^{(1)} F_2 - T_0^{(2)} F_2' = 0, \\ &T_3^{(1)} F_0 - T_3^{(2)} F_0' + T_2^{(1)} F_1 - T_2^{(2)} F_1' + T_1^{(1)} F_2 - T_1^{(2)} F_2' + \\ &\qquad + T_0^{(1)} F_3 - T_0^{(2)} F_3' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nun ist $F_0 = F_0'$ wegen $T_0^{(1)} = T_0^{(2)} = 1$. Da wir ferner angenommen haben, daß F_0 und F_0' nur von $\mathfrak{x}$ (bzw. $\mathfrak{x}'$) abhängen, so ist $T_j^{(2)} F_0' = 0$ für $j \geqq 1$. Es ist daher, etwas kürzer,

$$\text{(XXXII; 64)} \quad \begin{cases} F_0 - F_0' = 0, \\ T_1^{(1)} F_0 + F_1 - F_1' = 0, \\ T_2^{(1)} F_0 + T_1^{(1)} F_1 - T_1^{(2)} F_1' + F_2 - F_2' = 0, \\ T_3^{(1)} F_0 + T_2^{(1)} F_1 - T_2^{(2)} F_1' + T_1^{(1)} F_2 - T_1^{(2)} F_2' + \\ \qquad + F_3 - F_3' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

An dieser Stelle seiner Überlegungen führt MUSEN die oben erwähnten Operatoren M und P ein, durch welche die kurzperiodischen Terme der Störungsfunktion von den langperiodischen, kritischen und säkularen Termen getrennt werden. Der Operator M transformiert jede Funktion von der Form

$$\text{(XXXII; 65)} \quad \Phi = \sum_{\mathfrak{m},\vec{\mu}} \Phi_{\mathfrak{m},\vec{\mu}}\left(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\right) \exp i(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}), \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

in

$$\text{(XXXII; 65a)} \quad M\Phi = \sum_{\mathfrak{O},\vec{\mu}} \Phi_{\mathfrak{O},\vec{\mu}}\left(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\right) \exp i(\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}) + \sum_{\mathfrak{m}_j,\vec{\mu}} \Phi_{\mathfrak{m}_j,\vec{\mu}}\left(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\right) \exp i(\mathfrak{m}_j \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}),$$

wo $\mathfrak{m}_j \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}$ kritische Argumente sind, d. h. solche, die allen skalaren Produkten $\mathfrak{m}_j \cdot \nabla_{\mathfrak{x}} F_0(\mathfrak{x})$ der nullten Ordnung entsprechen, die beliebig klein werden, wenn $\mathfrak{x}$ in einem gewissen Gebiet G des n-dimensionalen Raumes liegt und $\mathfrak{m}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ eine gewisse Folge von Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten bezeichnet.[1]) Andererseits wird (XXXII; 65) durch den Operator P in

$$\text{(XXXII; 65b)} \quad P\Phi = \sum_{\mathfrak{m},\vec{\mu}} \Phi_{\mathfrak{m},\vec{\mu}}\left(\mathfrak{x}, \vec{\xi}\right) \exp i(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu} \cdot \vec{\eta}), \quad (\mathfrak{m} \neq \mathfrak{O}, \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_j)$$

transformiert. In anderen Worten: Der Operator M eliminiert aus der Menge der Terme von (XXXII; 65) alle kurzperiodischen, aber nicht kritischen Terme. Der Operator P eliminiert alle übrigen Terme, die säkular, langperiodisch oder kritisch sind. Diese Trennung der Terme beider Kategorien läßt sich nach einem vorgegebenen Auswahlprinzip mit Hilfe eines Computerprogramms durchführen, sofern die Entwicklung der Störungsfunktion in der Form (XXXII; 65) gegeben ist.

Aus der Definition der Operatoren M und P folgt, wenn I den Identitätsoperator bezeichnet, für $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$\text{(XXXII; 66)} \quad M + P = I; \quad M^j = M; \quad MF_j' = F_j'; \quad PF_j' = 0.$$

---

[1]) In (XXXII; 65a) steht $\mathfrak{O}$ für den n-dimensionalen Nullvektor.

Ferner ist noch folgendes zu beachten:

a) Man darf zur Abkürzung[1])

(XXXII; 67) $$n = -\nabla_{\mathfrak{x}} F_0(\mathfrak{x}) = -\nabla_{\mathfrak{x}'} F_0'(\mathfrak{x}')$$

setzen. Diese Formel entspricht in der klassischen Theorie, siehe (XXXII; 27), dem Vektor

$$\mathfrak{n} = (n_1, n_2, \ldots) = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial L_1}, \frac{\partial F_0}{\partial L_2}, \ldots\right); \quad F_0 = F_0(L_1, L_2, \ldots),$$

der die Menge der mittleren Bewegungen repräsentiert. Ferner sind

$$-\mathfrak{m}_j \cdot \nabla_{\mathfrak{x}} F_0(\mathfrak{x}) = m_{j1} n_1 + m_{j2} n_2 + \cdots$$

die kleinen Divisoren im Falle nahezu kommensurabler Bewegungen.

b) Man darf a priori voraussetzen, daß alle S_j ($j = 1, 2, \ldots$) nur kurzperiodische Terme enthalten, ebenso wie die F_j' aus langperiodischen Termen zusammengesetzt sind, die in MUSENS Theorie mit den kritischen und säkularen vereinigt werden. Diese Feststellung entspricht der klassischen Theorie: Würden die S_j die mittleren Längen nicht enthalten, so wäre wegen (XXXII; 8, 15, 19, 24) $F^* = \Phi^* = \cdots = 0$, d. h., F wäre von den mittleren Längen unabhängig.

c) Bezeichnen wir mit $f_i(l, g)$ eine Folge von kurzperiodischen Termen, mit $\varphi_i(g)$ eine Folge von langperiodischen Termen, die in MUSENS Theorie mit säkularen und kritischen Termen vereinigt sind, so können die Produkte

$f_i f_k$ Terme beider Kategorien,

$f_i \varphi_k$ nur kurzperiodische Terme,

$\varphi_i \varphi_k$ nur langperiodische Terme

enthalten. Deswegen ist

$M\ (f_i f_k)$ langperiodisch;	$P\ (f_i f_k)$ kurzperiodisch,
$M\ (f_i \varphi_k) = 0$;	$P(f_i \varphi_k) = f_i \varphi_k$,
$M\ (\varphi_i \varphi_k) = \varphi_i \varphi_k$;	$P\ (\varphi_i \varphi_k) = 0$.

Aus den Regeln a), b), c) folgt für $j \geqq 1$:

(XXXII; 68)

α) $\nabla_{\mathfrak{w}} S_j \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} F_0 = -\mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_j$ ist kurzperiodisch, da der erste Faktor kurzperiodisch, der zweite konstant ist. Daher kann das Produkt $(\nabla_{\mathfrak{w}} S_j \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'})(\nabla_{\mathfrak{w}} S_k \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'}) F_0$ beide Kategorien von Termen enthalten.

---

[1]) Das in (XXXII; 67) eingeführte Symbol u darf nicht mit demselben Zeichen verwechselt werden, das weiter oben für die Dimension der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ verwendet worden ist.

(XXXII; 68)

$$\begin{cases} \beta) \ \text{Für } j \geqq 1 \text{ gilt daher} \\ \quad M T_j^{(1)} F_0 = M(T_j^{(1)} - \nabla_{\mathfrak{w}} S_j \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'}) F_0; \\ \quad P T_j^{(1)} F_0 = -\mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_j + P(T_j^{(1)} - \nabla_{\mathfrak{w}} S_j \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'}) F_0. \\ \gamma) \ \text{Für } j \geqq 1,\ k \geqq 1 \text{ gilt, da } F_k' \text{ langperiodisch ist,} \\ \quad M(T_j^{(2)} F_k') = 0; \quad P(T_j^{(2)} F_k') = T_j^{(2)} F_k'. \end{cases}$$

Wendet man die Operatoren M und P auf die zweite Gleichung (XXXII; 64) an, so erhält man wegen (XXXII; 66, 68)

$$F_1' = M F_1' = M F_1 + M(T_1^{(1)} F_0) = M F_1,$$

$$0 = P F_1' = P F_1 + P(T_1^{(1)} F_0) = P F_1 - \mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_1.$$

Dieselben Operationen lassen sich nacheinander auf alle Gleichungen (XXXII; 64) anwenden, und man erhält, immer unter Beachtung der oben abgeleiteten Regeln, mit $S_j = S_j(\mathfrak{x}', \vec{\xi}'; \mathfrak{y}, \vec{\eta})$ das System

$$\text{a)} \begin{cases} F_1' = M F_1, \\ \mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_1 = P F_1, \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} F_2' = M\left\{\frac{1}{2}(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})^2 F_0 + T_1^{(1)} F_1 + F_2\right\}, \\ \mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_2 = P\left\{\frac{1}{2}(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})^2 F_0 + T_1^{(1)} F_1 - T_1^{(2)} F_1' + F_2\right\}, \end{cases}$$

(XXXII; 69)

$$\text{c)} \begin{cases} F_3' = M\left\{\left[(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})(\nabla_{\mathfrak{y}} S_2 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'}) + \frac{1}{6}(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})^3\right] F_0 + \right. \\ \qquad \left. + T_2^{(1)} F_1 + T_1^{(1)} F_2 + F_3\right\}, \\ \mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_3 = P\left\{\left[(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})(\nabla_{\mathfrak{y}} S_2 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'}) + \frac{1}{6}(\nabla_{\mathfrak{y}} S_1 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}'})^3\right] \times \right. \\ \left. \times F_0 + T_2^{(1)} F_1 + T_1^{(1)} F_2 - T_2^{(2)} F_1' - T_1^{(2)} F_2' + F_3\right\} \text{usw.} \end{cases}$$

Dieses System ist rekursiv, es erlaubt F_j' und S_j zu bestimmen, wenn $F_0', \ldots, F_{j-1}', S_1, \ldots, S_{j-1}$ aus der vorhergehenden Folge von Gleichungen bekannt geworden sind. Die F_j' gewinnt man durch Anwendung des Operators M, die S_j durch Anwendung des Operators P auf bekannte Funktionen. Die S_j lösen lineare partielle Differentialgleichungen von der Form

$$\mathfrak{n} \cdot \nabla_{\mathfrak{y}} S_j(\mathfrak{x}', \xi'; \mathfrak{y}, \vec{\eta}) = \sum_k A_{jk}(\mathfrak{x}', \vec{\xi}') \exp i(\mathfrak{m}_{jk} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu}_{jk} \cdot \vec{\eta}),$$

in denen die Vektoren $\mathfrak{m}_{jk}$ von Null verschieden sind und nicht zu denjenigen gehören, die das Argument $\mathfrak{m}_{jk} \cdot \mathfrak{y}$ kritisch machen. Diese Gleichungen haben die

Lösung

$$\text{(XXXII; 70)} \qquad S_j = \sum_k \frac{A_{jk}(\mathfrak{x}', \vec{\xi}')}{\mathfrak{n} \cdot i\mathfrak{m}_{jk}} \exp i(\mathfrak{m}_{jk} \cdot \mathfrak{y} + \vec{\mu}_{jk} \cdot \vec{\eta}), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Wir kehren nun zu den Gleichungen (XXXII; 58) zurück, die wir nun in der gekürzten Form

$$\text{(XXXII; 71)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \nabla_{\mathfrak{w}} S(\mathfrak{u}'; \mathfrak{w}), \\ \mathfrak{w} = \mathfrak{w}' - \nabla_{\mathfrak{u}'} S(\mathfrak{u}'; \mathfrak{w}) \end{cases}$$

schreiben. Wir nehmen an, daß die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ in einem Vektorraum von $n + \nu$ Dimensionen definiert sind, daß dort die Gradienten $\nabla_{\mathfrak{w}} S$ und $\nabla_{\mathfrak{u}'} S$ analytisch sind und daß die Transformation (XXXII; 71) stetig und regulär ist, d. h., daß es möglich ist, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ als analytische Funktionen von $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{w}'$ zu bestimmen.

Zur Auflösung dieser zwei Systeme von je $n + \nu$ impliziten skalaren Gleichungen benutzt MUSEN die Erweiterung des LAGRANGEschen Theorems (Anhang V) auf Umkehrprobleme mit einer beliebig großen Anzahl von Variablen, wie sie kürzlich von GOOD[1]) und von DEDERICK und CHU[2]) formuliert worden ist. Wir geben hier diese Lösung ohne den sehr komplizierten Beweis an und verweisen auf die in den Fußnoten zitierten Originalabhandlungen. Danach ist

$$\text{(XXXII; 72)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \Lambda(\mathfrak{w}'; -\nabla_{\mathfrak{u}'} S)\, J(-\nabla_{\mathfrak{u}'} S)\, \nabla_{\mathfrak{u}'} S, \\ \mathfrak{w} = \mathfrak{w}' - \Lambda(\mathfrak{w}'; -\nabla_{\mathfrak{u}'} S)\, J(-\nabla_{\mathfrak{u}'} S)\, \nabla_{\mathfrak{w}'} S, \end{cases} \qquad S = S(\mathfrak{u}'; \mathfrak{w}')$$

mit

$$\text{(XXXII; 72a)} \qquad \begin{cases} \Lambda(\mathfrak{w}'; -\nabla_{\mathfrak{u}'} S) = \exp(-\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S), \\ J(-\nabla_{\mathfrak{u}'} S) = \det(\mathfrak{F} + \nabla_{\mathfrak{w}'} \nabla_{\mathfrak{u}'} S), \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{F}$ die $(n + \nu)$-dimensionale Einheitsmatrix bedeutet.

In der Folge zeigen wir kurz, wie MUSEN die Funktionen Λ und J berechnet. Zunächst setzen wir

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j,$$

wobei Λ_j den Term der Ordnung j in der Entwicklung von $\exp(-\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S)$ bezeichnet. Es ist dann

$$\text{(XXXII; 73)} \qquad \begin{cases} \Lambda_0 = 1, \\ \Lambda_1 = -\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_1, \\ \Lambda_2 = -\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_2 + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_1)^2, \\ \Lambda_3 = -\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_3 + (\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_1)(\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_2) - \frac{1}{6} (\nabla_{\mathfrak{w}'} \cdot \nabla_{\mathfrak{u}'} S_1)^3, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

---

[1]) I. J. GOOD, Generalizations to several variables of LAGRANGE's expansion. Proc. Cambridge philos. Soc. *56*, 367 (1960).

[2]) K. G. DEDERICK und E. L. CHU, On n-dimensional TAYLOR and LAGRANGE operators. Arch. rat. Mech. Analysis *16*, 385 (1964).

Um J zu berechnen, benutzt man die Matrizengleichung

$$\det(\mathfrak{F} - \mathfrak{A}) = \exp \mathrm{s} \log(\mathfrak{F} - \mathfrak{A}),$$

in der s$\mathfrak{Y}$ die Spur einer Matrix $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{F}$ die Einheitsmatrix bezeichnet, die die gleiche Dimension wie die Matrix $\mathfrak{A}$ hat. Dieses Theorem ist von LEVERRIER[1]) bewiesen worden und kann leicht durch elementare Rechnung in dem einfachen Fall von 2×2-Matrizen verifiziert werden. Setzen wir

$$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{A}_j,$$

wo $\mathfrak{A}_j$ von der Ordnung j in bezug auf den kleinen Parameter ε ist, so findet man

$$\log(\mathfrak{F} - \mathfrak{A}) = -\left(\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{A}^3 + \cdots\right) =$$

$$= -\mathfrak{A}_1 - \left(\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1^2\right) - \left(\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{3}\mathfrak{A}_1^3\right) - \cdots.$$

Daraus folgt

$$\det(\mathfrak{F} - \mathfrak{A}) = \exp(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots)$$

mit

$$\psi_1 = -\mathrm{s}\mathfrak{A}_1,$$

$$\psi_2 = -\mathrm{s}\left(\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1^2\right),$$

$$\psi_3 = -\mathrm{s}\left(\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{3}\mathfrak{A}_1^3\right),$$

. . . . . .

Es ist daher

$$J[-\nabla_{u'}S(u'; w')] = \det\left[\mathfrak{F} + \sum_{j=1}^{\infty} \nabla_{w'}\nabla_{u'}S(u'; w')\right] = \exp(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots)$$

mit

$$\text{(XXXII; 74)} \quad \begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{s}\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_1, \\ \Phi_2 = \mathrm{s}\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_2 + \frac{1}{2}\mathrm{s}(\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_1)^2, \\ \Phi_3 = \mathrm{s}\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_3 + \mathrm{s}(\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_1)(\nabla_{w'}\nabla_{u'}S_2) + \frac{1}{3}\mathrm{s}(\nabla_{u'}\nabla_{w'}S_1)^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

und man erhält mit den Größen (XXXII; 74)

(XXXII; 75)

$$J[-\nabla_{u'}S(u'; w')] = 1 + \Phi_1 + \left(\Phi_2 + \frac{1}{2}\Phi_1^2\right) + \left(\Phi_3 + \Phi_1\Phi_2 + \frac{1}{6}\Phi_1^3\right) + \cdots,$$

---

[1]) U. J. J. LEVERRIER, Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales. J. Math. (1) *5*, 220 (1840).

und die Gleichungen (XXXII; 72) können dann endgültig in der Form

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\beta} A_{\alpha-\beta}\, J_{\beta-\gamma}\, \nabla_{\mathfrak{u}'} S_\gamma\, (\mathfrak{u}'; \mathfrak{w}'),$$

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}' - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\beta} A_{\alpha-\beta}\, J_{\beta-\gamma}\, \nabla_{\mathfrak{w}'} S_\gamma\, (\mathfrak{u}'; \mathfrak{w}')$$

geschrieben werden, wobei die $A_{\alpha-\beta}$ durch (XXXII; 72), die $J_{\beta-\gamma}$ durch (XXXII; 74, 75) und die S_γ durch (XXXII; 70) auszudrücken sind.

Die Berechnung der erzeugenden Funktionen, die die kurzperiodischen Terme eliminieren, sowie die Berechnung der neuen HAMILTONschen Funktion, die aus diesem Eliminationsverfahren hervorgeht, ergibt sich so mit einem Maximum an Allgemeinheit und läßt sich leicht für elektronische Computer programmieren. Diese Programmierung geschieht mit Hilfe von Differentialoperatoren und den rekurrenten Beziehungen, die sie verknüpfen. Das MUSENsche Verfahren eröffnet, obwohl es bisher noch nicht zu Ende durchgeführt wurde, den Weg zu einer rein analytischen Störungstheorie, deren bisher vorliegende Ergebnisse vielversprechend sind.

269. Verallgemeinerung der von Zeipelschen Theorie nach Hori

G. I. HORI[1]) hat eine neue Variante der VON ZEIPELschen Methode entwickelt, die — in anderem Sinne, als MUSEN es getan hat — eine Verallgemeinerung dieser schönen Theorie der allgemeinen Störungen erzielt. Er bedient sich zu diesem Zwecke kanonischer Transformationen durch LIE-Reihen (s. Kapitel XXIV) und definiert „erzeugende Funktionen", deren Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten viel umfassender sind als diejenigen der von VON ZEIPEL benutzten S-Funktionen. Die HORIsche Theorie der allgemeinen Störungen ist weitgehend unabhängig von der Natur des Systems der kanonischen Differentialgleichungen, das gelöst werden soll.

a) Kanonische Transformationen durch Lie-Reihen. Es seien $f(\xi, \eta)$ und $\varphi(\xi, \eta)$ zwei beliebige Funktionen der $2n$ kanonischen Variablen ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und es sei

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots; \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots,$$

wenn die Summanden f_k, φ_k diejenigen Terme umfassen, die vom Grade k in bezug auf einen kleinen Parameter ε sind. Ferner sei

$$S = \varepsilon\varphi = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots.$$

---

[1]) G. I. HORI, Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. Publ. astron. Soc. Japan *18*, 287 (1966).

Es soll nun eine Transformation $\xi, \eta \to x, y$ vorgenommen werden, die so beschaffen ist, daß die LIE-Reihe

$$\text{(XXXII; 76)} \qquad f(x, y) = e^{D_s} f(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} D_s^{\nu} f(\xi, \eta)$$

mit dem LIE-Operator

$$D_s = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial S}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right) = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right)$$

besteht. Dann ist, wenn $D_s^0 = I$ den Identitätsoperator bezeichnet,

$$\begin{aligned}
&D_s^0 f = f, \\
&D_s^1 f = D_s f = (f, S) = \varepsilon\,(f, \varphi), \\
&D_s^2 f = D_s(D_s f) = \big((f, S), S\big) = \varepsilon^2 \big((f, \varphi), \varphi\big), \\
&D_s^3 f = D_s^2\,(D_s f) = \big(\big((f, S), S\big), S\big) = \varepsilon^3 \big(\big((f, \varphi), \varphi\big), \varphi\big), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

d. h., die rechte Seite von (XXXII; 76) ist eine Summe von POISSONschen Klammerausdrücken (XIV; 81), und der Operator D_s^k ist mindestens von der Ordnung k.

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß die Reihe (XXXII; 76) konvergiert. Wir werden dann zeigen, wie man erreicht, daß die Transformation $\xi, \eta \to x, y$ kanonisch ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß die zunächst noch als willkürlich betrachtete Funktion $\varphi\,(\xi, \eta)$, die von t nicht explizite abhängt, die HAMILTONsche Funktion des Hilfssystems

$$\text{(XXXII; 77)} \qquad \frac{d\xi_i}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sei, dem die Variablen ξ_i, η_i genügen.[1]) Dann ist offenbar

$$D_s f = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{d\tau} \right) = \varepsilon \frac{df}{d\tau},$$

allgemein $D_s^k f = \varepsilon^k d^k f / d\tau^k$, und somit

$$\text{(XXXII; 78)} \qquad f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{d^{\nu} f}{d\tau^{\nu}} \right)_{\varepsilon \to 0} = f[\xi\,(\tau + \varepsilon), \eta(\tau + \varepsilon)].$$

Sofern $f\,(x, y)$ eine eindeutige Funktion ihrer Argumente ist, folgt aus (XXXII; 78)

$$x_j = \xi_j\,(\tau + \varepsilon); \qquad y_j = \eta_j\,(\tau + \varepsilon).$$

---

[1]) τ ist hier nicht speziell die Zeit.

Es handelt sich also um eine sogenannte „infinitesimale Kontakttransformation“[1]), die darin besteht, daß die unabhängige Variable um ein kleines Inkrement ε vermehrt wird, und die offensichtlich kanonisch ist.

b) *Vergleich mit* VON ZEIPEL. Wir betrachten nun die speziellen Fälle $f(\xi, \eta) = \xi_j$ und $f(\xi, \eta) = \eta_j$. Dann ergibt sich

$$D_S\xi_j = (\xi_j, S) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial S}{\partial \eta_i} - \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i}\frac{\partial S}{\partial \xi_i}\right) = \frac{\partial S}{\partial \eta_j},$$

$$D_S\eta_j = (\eta_j, S) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial S}{\partial \eta_i} - \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_i}\frac{\partial S}{\partial \xi_i}\right) = -\frac{\partial S}{\partial \xi_j}$$

und somit

$$D_S^{\nu}\xi_j = D_S^{\nu-1}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}; \quad D_S^{\nu}\eta_j = -D_S^{\nu-1}\frac{\partial S}{\partial \xi_j},$$

also

$$\text{(XXXII; 79)} \qquad \begin{cases} x_j = \xi_j + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}D_S^{\nu}\xi_j = \xi_j + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}D_S^{\nu-1}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \\ y_j = \eta_j + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}D_S^{\nu}\eta_j = \eta_j - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}D_S^{\nu-1}\frac{\partial S}{\partial \xi_j}, \end{cases}$$

Diesen Gleichungen stehen die VON ZEIPELschen (XXXII; 5, 5a) gegenüber, die wir in der Form

$$\text{(XXXII; 80)} \qquad x_j = \xi_j + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_j}; \quad y_j = \eta_j - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j}$$

anschreiben, wo $S = \tilde{S}(\xi, y)$ die erzeugende Funktion darstellt, die von den alten Variablen ξ_j und den neuen Variablen y_j abhängt. Die Gleichungen (XXXII; 79) sind aus der sehr allgemein geformten LIE-Reihe (XXXII; 76) mit der beliebigen erzeugenden Funktion $S(\xi, \eta)$ abgeleitet, die hier nur von den alten Variablen ξ_j, η_j abhängt.[2]) Sie haben verschiedene wertvolle Eigenschaften: Sie sind kanonisch invariant, da sie aus Summen von POISSONschen Klammerausdrücken bestehen, die ihrerseits (s. Anhang VII) kanonisch invariant sind, d. h. ihren Wert durch beliebige kanonische Transformationen nicht ändern. Ferner enthalten die rechten Seiten von (XXXII; 79) nur die alten Variablen. Es ist daher nicht nötig, wie in VON ZEIPELS Theorie die LAGRANGEschen Umkehrformeln anzuwenden.

c) *Neue Theorie der allgemeinen Störungen.* Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen betrachten wir ein dynamisches System

$$\text{(XXXII; 81)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) Siehe D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Methods of celestial mechanics. New York 1961, S. 535ff.

[2]) Siehe auch Zusatz 7 in Anhang VIII.

von kanonischen Differentialgleichungen, deren HAMILTONsche Funktion $F(x, y)$ nur von den Variablen x_i, y_i abhängen möge. Ferner sei ε ein kleiner Parameter von der Ordnung der störenden Massen, und F sei in eine Reihe

$$\text{(XXXII; 82)} \qquad F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y)$$

entwickelbar, in der F_k die Summe aller Terme darstellt, die ε^k als Faktor enthalten. HORI führt nun eine kanonische Transformation $x, y \to \xi, \eta$ mit Hilfe einer erzeugenden Funktion $S(\xi, \eta)$ aus, die noch geeignet zu definieren ist. Die neue HAMILTONsche Funktion sei $F^*(\xi, \eta)$, und wir nehmen an, daß im Sinne von (XXXII; 82) auch

$$\text{(XXXII; 83)} \qquad S(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\xi, \eta),$$

$$\text{(XXXII; 84)} \qquad F^*(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^*(\xi, \eta)$$

sei. Da F die Zeit nicht explizite enthält, haben die Gleichungen (XXXII; 81) das erste Integral $F(x, y) = \text{const}$, und es ist

$$F(x, y) \equiv F^*(\xi, \eta).$$

Wegen (XXXII; 82, 84) ist daher

$$\text{(XXXII; 85)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} F_k^*(\xi, \eta).$$

Wir definieren nun die kanonische Transformation mit Hilfe von S durch LIE-Reihen von der Form (XXXII; 76), d. h., wir setzen

$$\text{(XXXII; 86)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} D_S^{\nu} F_k(\xi, \eta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} F_k^*(\xi, \eta).$$

Sammelt man die Terme gleicher Potenz von ε auf beiden Seiten dieser Identität und setzt sie gleich, so erhält man

$$\text{(XXXII; 87)} \qquad \begin{cases} F_0^* = F_0, \\ F_1^* = F_1 + (F_0, S_1), \\ F_2^* = F_2 + (F_0, S_2) + (F_1, S_1) + \frac{1}{2}\big((F_0, S_1), S_1\big), \\ F_3^* = F_3 + (F_0, S_3) + (F_1, S_2) + (F_2, S_1) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\big((F_0, S_1), S_2\big) + \frac{1}{2}\big((F_0, S_2), S_1\big) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\big((F_1, S_1), S_1\big) + \frac{1}{6}\big(((F_0, S_1), S_1), S_1\big), \end{cases}$$

(XXXII; 87)
$$\begin{cases} F_4^* = F_4 + (F_0, S_4) + (F_1, S_3) + (F_2, S_2) + (F_3, S_1) + \\ \quad + \frac{1}{2}\big((F_0, S_1), S_3\big) + \frac{1}{2}\big((F_0, S_2), S_2\big) + \\ \quad + \frac{1}{2}\big((F_0, S_3), S_1\big) + \frac{1}{2}\big((F_1, S_1), S_2\big) + \\ \quad + \frac{1}{2}\big((F_1, S_2), S_1\big) + \frac{1}{2}\big((F_2, S_1), S_1\big) + \\ \quad + \frac{1}{6}\big(((F_0, S_1), S_1), S_2\big) + \frac{1}{6}\big(((F_0, S_1), S_2,) S_1\big) + \\ \quad + \frac{1}{6}\big(((F_0, S_2), S_1), S_1\big) + \frac{1}{6}\big(((F_1, S_1), S_1), S_1\big) + \\ \quad + \frac{1}{24}\big(((F_0, S_1), S_1), S_1\big), S_1\big), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

d) *Einführung einer neuen unabhängigen Variablen.* Hori führt nun statt t eine neue unabhängige Variable oder „Pseudozeit“ t^* ein, die so beschaffen ist, daß das Hilfssystem von Differentialgleichungen

(XXXII; 88)
$$\frac{d\xi_i}{dt^*} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt^*} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt und lösbar ist. Dann ist

(XXXII; 89)
$$(F_0, S_k) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi_j}\frac{\partial S_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial F_0}{\partial \eta_j}\frac{\partial S_k}{\partial \xi_j}\right) = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial S_k}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial t^*} + \frac{dS_k}{d\eta_j}\frac{d\eta_j}{dt^*}\right) = -\frac{dS_k}{dt^*}.$$

Ebenso gilt, wenn $U(\xi, \eta)$ irgendeine analytische Funktion der ξ_j, η_j ist, $(F_0, U) = -dU/dt^*$ und speziell

$$(F_0, F^*) = -\frac{dF^*}{dt^*} = 0,$$

da F^* die Zeit nicht explizite enthält und $F^* = \text{const}$ das erste Integral des kanonischen Systems

(XXXII; 90)
$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \xi_i}$$

ist, das aus (XXXII; 81) durch die kanonische Transformation $x, y \to \xi, \eta$

hervorgeht. Wegen (XXXII; 90) können wir auch schreiben:

$$(F_0, F^*) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial F_0}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dt} \right) = \frac{dF_0}{dt},$$

also, wenn wir die beiden Ausdrücke für (F_0, F^*) vergleichen und die erste Gleichung (XXXII; 87) berücksichtigen,[1])

$$-\frac{dF^*}{dt^*} = \frac{dF_0}{dt} = \frac{dF_0^*}{dt} = 0.$$

Die Differentialgleichungen (XXXII; 90) haben demnach *zwei* erste Integrale, nämlich

(XXXII; 91) $$F^*(\xi, \eta) = \text{const},$$

(XXXII; 92) $$F_0^*(\xi, \eta) = \text{const}.$$

e) *Einführung von Mittelwerten.* HORI schreibt jeder Funktion $A(t^*)$ ihren Mittelwert

$$A_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t^*)\, dt^*$$

zu und setzt $A(t^*) = A_s + A_p$, so daß $A_p = A(t^*) - A_s$ ist. Ist speziell $A(t^*)$ periodisch mit der Periode T_p, so ist

$$A_s = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} A(t^*)\, dt^*.$$

Dann ist A_p die Summe aller periodischer Terme von A, und $(A_p)_s = 0$. Ebenso ist $(A_s)_p = 0$. Dasselbe gilt auch für nichtperiodische und beschränkte $A(t^*)$, wie leicht zu beweisen ist. Wir werden im folgenden der Einfachheit halber (obwohl dies nicht ganz exakt ist) A_p den periodischen, A_s den konstanten bzw. säkularen Teil von A nennen. Diese Aufspaltung in periodische und säkulare Teile werden wir bei allen Funktionen F_k, F_k^* und S_k vornehmen.

Wegen (XXXII; 89) läßt sich die zweite Gleichung (XXXII; 87)

$$F_1^* = (F_1)_s + (F_1)_p - \frac{dS_1}{dt^*}$$

schreiben; es folgt dann, da nur die letzten beiden Glieder rechts von t^* abhängen,

(XXXII; 93) $$F_1^* = (F_1)_s; \quad \frac{dS_1}{dt^*} = (F_1)_p,$$

---

[1]) Genau genommen ist wegen (XXXII; 90) $dF^*/dt = dF^*/dt^* \cdot dt^*/dt = 0$. Daraus folgt aber $dF^*/dt^* = 0$, falls $dt^*/dt \neq 0$ für alle Werte von t ist, d. h., falls t^* mit t monoton zu- oder abnimmt. Das darf aber vorausgesetzt werden.

und wenn man integriert und die Integrationskonstante mit $(F_1)_s$ vereinigt,

$$S_1 = \int (F_1)_p \, dt^*. \tag{XXXII; 94}$$

Die dritte Gleichung (XXXII; 87) ergibt, wenn man (F_0, S_2) durch (XXXII; 89) und (F_0, S_1) durch die zweite Gleichung (XXXII; 87) ausdrückt,

$$F_2^* = F_2 - \frac{dS_2}{dt^*} + (F_1, S_1) + \frac{1}{2}(F_1^* - F_1, S_1) =$$

$$= F_2 - \frac{dS_2}{dt^*} + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)$$

oder

$$F_2^* = (F_2)_s + (F_2)_p - \frac{dS_2}{dt^*} + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)_s + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)_p.$$

Trennt man wiederum die säkularen Glieder von den periodischen, so erhält man

$$\text{(XXXII; 95)} \quad \begin{cases} F_2^* = (F_2)_s + \dfrac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)_s, \\ S_2 = \displaystyle\int \left\{(F_2)_p + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)_p\right\} dt^*, \end{cases}$$

wo S_1 durch (XXXII; 94) auszudrücken ist.

Die vierte Gleichung (XXXII; 87) ergibt, wenn man (XXXII; 89) und die zweite und dritte Gleichung (XXXII; 87) zu Hilfe nimmt,

$$F_3^* = F_3 - \frac{dS_3}{dt^*} + (F_1, S_2) + (F_2, S_1) + \frac{1}{2}(F_1^* - F_1, S_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}(F_2^* - F_2, S_1) - \frac{1}{4}\big((F_1^* - F_1, S_1), S_1\big) + \frac{1}{6}\big((F_1^* - F_1, S_1), S_1\big) =$$

$$= F_3 - \frac{dS_3}{dt^*} + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_2) + \frac{1}{2}(F_2^* + F_2, S_1) +$$

$$+ \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_1), S_1\big)$$

oder, nach demselben Verteilungsprinzip wie oben,

$$F_3^* = (F_3)_s + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_2)_s + \frac{1}{2}(F_2^* + F_2, S_1)_s + \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_1), S_1\big)_s,$$

$$S_3 = \int \left\{(F_3)_p + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_2)_p + \frac{1}{2}(F_2^* + F_2, S_1)_p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_1), S_1\big)_p\right\} dt^*,$$

wo S_1 durch (XXXII; 94) und S_2 durch (XXXII; 95) auszudrücken sind.

Ebenso lassen sich die Formeln

$$F_4^* = (F_4)_s + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_3)_s + \frac{1}{2}(F_2^* + F_2, S_2)_s + \frac{1}{2}(F_3^* + F_3, S_1)_s +$$
$$+ \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_1), S_2\big)_s + \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_2), S_1\big)_s +$$
$$+ \frac{1}{12}\big((F_2 - F_2^*, S_1), S_1\big)_s + \frac{1}{6}\big(((F_1 - F_1^*, S_1), S_1), S_1\big)_s,$$
$$S_4 = \int\Big\{(F_4)_p + \frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_3)_p + \frac{1}{2}(F_2^* + F_2, S_2)_p +$$
$$+ \frac{1}{2}(F_3^* + F_3, S_1)_p + \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_1), S_2\big)_p +$$
$$+ \frac{1}{12}\big((F_1 - F_1^*, S_2), S_1\big)_p + \frac{1}{12}\big((F_2 - F_2^*, S_1), S_1\big)_p +$$
$$+ \frac{1}{6}\big(((F_1 - F_1^*, S_1), S_1), S_1\big)_p\Big\}\, dt^*$$

ableiten.[1]) Die elementare Rechnung darf dem Leser überlassen bleiben. Aus der ersten Gleichung (XXXII; 93) folgt übrigens $F_1 - F_1^* = (F_1)_p$, so daß einige Terme der F_k^*, S_k sich etwas kürzer schreiben lassen.

Wenn man sich, wie es in der Praxis häufig vorkommt, auf Störungen erster Ordnung beschränkt, also $F_2 = F_3 = \cdots = 0$ setzt, so erhält man einfacher

(XXXII; 96)
$$\begin{cases} F_2^* = \dfrac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_1)_s, \\ S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (F_1^* + F_1, S_1)_p\, dt^*, \\ F_3^* = \dfrac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_2)_s + \dfrac{1}{2}(F_2^*, S_1)_s + \dfrac{1}{12}\big((F_1)_p, S_1), S_1\big)_s, \\ S_3 = \displaystyle\int\Big\{\frac{1}{2}(F_1^* + F_1, S_2)_p + \frac{1}{2}(F_2^*, S_1)_p + \\ \qquad + \dfrac{1}{12}\big((F_1)_p, S_1), S_1\big)_p\Big\}\, dt^*, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir hierfür ein Beispiel bringen.

f) *Der zweite Schritt.* Das gleiche Verfahren läßt sich anwenden, wenn man, von dem System (XXXII; 90) ausgehend, eine weitere kanonische Transfor-

---

[1]) Hierin sind S_1 durch (XXXII; 94), S_2 durch (XXXII; 95) und S_3 durch die letzte Gleichung auf S. 394 auszudrücken.

mation $\xi, \eta \to p, q$ vornimmt, so daß die Differentialgleichungen

$$\text{(XXXII; 97)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F^{**}}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F^{**}}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, deren HAMILTONsche Funktion F^{**} nur von den p, q abhängt. Es ist dann

$$F^{**}(p, q) \equiv F^{*}(\xi, \eta) = \text{const}$$

das erste Integral des Systems (XXXII; 97). Setzt man wieder

$$F^{**} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{**},$$

wenn F_k^{**} die Summe der Terme mit ε^k bezeichnet, so ist speziell wegen (XXXII; 92)

$$F_0^{**}(p, q) \equiv F_0^{*}(\xi, \eta) = \text{const}$$

ein weiteres Integral, und es folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k^{**}(p, q) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{*}(\xi, \eta).$$

Entwickelt man die rechte Seite nach (XXXII; 76) in eine LIE-Reihe mit der erzeugenden Funktion $S^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{*}$, so folgt

$$\text{(XXXII; 98)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{**}(p, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} D_{S^*}^{\nu} F_k^{*}(p, q)$$

mit dem Differentialoperator

$$D_{S^*} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial S^{*}}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial S^{*}}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right).$$

Vergleicht man die Terme gleicher Ordnung in ε auf beiden Seiten von (XXXII; 98), so entsteht die Folge von Gleichungen

$$\text{(XXXII; 99)} \quad \begin{cases} F_1^{**} = F_1^{*}, \\ F_2^{**} = F_2^{*} + (F_1^{*}, S_1^{*}), \\ F_3^{**} = F_3^{*} + (F_1^{*}, S_2^{*}) + (F_2^{*}, S_1^{*}) + \frac{1}{2}\left((F_1^{*}, S_1^{*}), S_1^{*}\right), \\ F_4^{**} = F_4^{*} + (F_1^{*}, S_3^{*}) + (F_2^{*}, S_2^{*}) + (F_3^{*}, S_1^{*}) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\left((F_1^{*}, S_1^{*}), S_2^{*}\right) + \frac{1}{2}\left((F_1^{*}, S_2^{*}), S_1^{*}\right) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\left((F_2^{*}, S_1^{*}), S_1^{*}\right) + \frac{1}{6}\left(((F_1^{*}, S_1^{*}), S_1^{*}), S_1^{*}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\

die sich von der Folge (XXXII; 87) der Form nach dadurch unterscheidet, daß alle Klammerausdrücke, in denen der Index Null vorkommt, fehlen. Anders ausgedrückt: Alle F_k werden mit F_{k+1}^* vertauscht, alle $F_k{}^*$ mit $F_k{}^{**}$ und alle S_k mit $S_k{}^*$.

Man führe nun eine neue unabhängige Variable t^{**} ein, die so beschaffen sein möge, daß die kanonischen Gleichungen

$$\text{(XXXII; 100)} \quad \frac{dp_i}{dt^{**}} = \frac{\partial F_1{}^*}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt^{**}} = -\frac{\partial F_1{}^*}{dp_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Da $F_1{}^*$ der Mittelwert von F_1 ist, ist für die ungestörte Bewegung $F_1{}^* = 0$, also sind in diesem Falle die p_i, q_i die konstanten Elemente der intermediären Bahn. Im Falle der gestörten Bewegung werden also die p_i, q_i langsam veränderlich sein. Aus (XXXII; 100) folgt ferner

$$\text{(XXXII; 101)} \quad (F_1{}^*, S_k{}^*) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1{}^*}{\partial p_j} \frac{\partial S_k{}^*}{\partial q_j} - \frac{\partial F_1{}^*}{\partial q_j} \frac{\partial S_k{}^*}{\partial p_j} \right) = -\frac{dS_k{}^*}{dt^{**}},$$

und es ist daher $dS_k{}^*/dt^{**}$ eine Größe von der Ordnung $k+1$, während per definitionem $S_k{}^*$ selbst von der Ordnung k ist.

Schreiben wir jeder Funktion $A(t^{**})$ den Mittelwert

$$A_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t^{**})\, dt^{**}$$

zu und setzen $A_p = A(t^{**}) - A_s$, so folgt aus der zweiten Gleichung (XXXII; 99) und aus (XXXII; 101)

$$F_2{}^{**} = (F_2{}^*)_s + (F_2{}^*)_p - \frac{dS_1{}^*}{dt^{**}}.$$

Da in dieser Gleichung nur die beiden letzten Glieder rechts von t^{**} abhängen, ergibt sich[1])

$$\text{(XXXII; 102)} \qquad F_2{}^{**} = (F_2{}^*)_s, \qquad S_1{}^* = \int (F_2{}^*)_p dt^{**}.$$

Nach dem gleichen Prinzip und formal genauso wie im ersten Schritt verfährt man weiter und erhält nach und nach

$$F_3{}^{**} = (F_3{}^*)_s + \frac{1}{2} (F_2{}^{**} + F_2{}^*, S_1{}^*)_s,$$

$$S_2{}^* = \int \left\{ (F_3{}^*)_p + \frac{1}{2} (F_2{}^{**} + F_2{}^*, S_1{}^*)_p \right\} dt^{**},$$

---

[1]) Im ersten Schritt der Analyse ergab sich nach (XXXII; 95) $F_2{}^* = (F_2{}^*)_s$ als ein Mittelwert über t^*, so daß $(F_2{}^*)_p = 0$ war. In bezug auf t^{**} ist aber $F_2{}^*$ kein Mittelwert mehr, sondern enthält im allgemeinen eine, wenn auch meist kleine, periodische Komponente.

$$F_4^{**} = (F_4^*)_s + \frac{1}{2}(F_2^{**} + F_2^*, S_2^*)_s + \frac{1}{2}(F_3^{**} + F_3^*, S_1^*)_s +$$
$$+ \frac{1}{12}\big(((F_2^*)_p, S_1^*), S_1^*\big)_s,$$

$$S_3^* = \int\Big\{(F_4^*)_p + \frac{1}{2}(F_2^{**} + F_2^*, S_2^*)_p + \frac{1}{2}(F_3^{**} + F_3^*, S_1^*)_p +$$
$$+ \frac{1}{12}\big(((F_2^*)_p, S_1^*), S_1^*\big)_p\Big\}\, dt^{**},$$

. . . . . .,

worin S_1^* durch die zweite Gleichung (XXXII; 102) uud S_2^* durch die letzte Gleichung auf S. 397 auszudrücken sind. Da F_1^* als die HAMILTONsche Funktion des Systems (XXXII; 100) konstant ist, gilt auch $F_1^{**} = F_1^* = \text{const}$, und das System (XXXII; 97) besitzt daher die drei ersten Integrale

$$F^{**} = \text{const}, \quad F_0^{**} = \text{const}, \quad F_1^{**} = \text{const}.$$

Die bisherigen Überlegungen bilden die ersten beiden Glieder einer Kette von kanonischen Transformationen, die von den kanonischen Gleichungen (XXXII; 81) ausgehen und für jedes Glied die Berechnung einer neuen HAMILTONschen Funktion und einer neuen erzeugenden Funktion erfordern. Dies geschieht jedesmal unter Einführung einer neuen unabhängigen Variablen. Nach jedem Schritt erhöht sich die Zahl der verfügbaren Integrale um eine Einheit, und man wird das Verfahren so lange fortsetzen, bis diese Zahl um eine Einheit kleiner ist als die Ordnung des Systems. Dann ergibt sich die endgültige Lösung durch Quadratur.

270. Ein Beispiel

Eine vollständige Störungstheorie der Planeten oder des Mondes nach der HORIschen Methode liegt bislang nicht vor. Dagegen hat HORI[1]) seine Methode an einem verhältnismäßig einfachen Modell demonstriert. Es handelt sich um einen aus zwei harmonischen Oszillationen bestehenden Schwingungsvorgang in der x_1, x_2-Ebene, der durch eine schwache äußere Kraft gestört wird.

Es sei ein dynamisches System durch die kanonischen Gleichungen

$$\text{(XXXII; 103)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2)$$

---

[1]) G. I. HORI, Non-linear coupling of two harmonic oscillators. Publ. astron. Soc. Japan *19*, 229 (1967).

gegeben, und es seien

$$F = F_0 + F_1; \quad F_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1{}^2 x_1{}^2 + \alpha_2{}^2 x_2{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2), \quad F_1 = -\varepsilon x_1 x_2{}^2,$$

ε ein kleiner Parameter und α_1, α_2 zwei nicht kommensurable positive Konstante. Ähnliche Systeme trifft man in der Theorie der Sternbewegungen innerhalb einer Galaxis an.

Wir nehmen die kanonische Transformation $x, y \to \xi, \eta$ vor. Dann ist wegen der ersten Gleichung (XXXII; 87)

(XXXII; 104)]

$$F_0{}^* = F_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\alpha_1{}^2 \xi_1{}^2 + \alpha_2{}^2 \xi_2{}^2 + \eta_1{}^2 + \eta_2{}^2); \quad F_1(\xi, \eta) = -\varepsilon \xi_1 \xi_2{}^2.$$

Die Pseudozeit t^* wird durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt^*} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt^*} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_i}, \quad (i = 1, 2)$$

definiert. Es ist dann

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi_i} = \alpha_i{}^2 \xi_i; \quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta_i} = \eta_i$$

und daher

(XXXII; 105)
$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^{*2}} + \alpha_i{}^2 \xi_i = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

(XXXII; 106)
$$\xi_i = c_i \cos(\alpha_i t^* + \beta_i)$$

mit den willkürlichen Konstanten c_i und β_i, und aus $\eta_i = d\xi_i/dt^*$ folgt

(XXXII; 107)
$$\eta_i = -\alpha_i c_i \sin(\alpha_i t^* + \beta_i).$$

Aus (XXXII; 104, 106) erhält man

(XXXII; 108)

$$F_1 = -\varepsilon c_1 c_2{}^2 \cos(\alpha_1 t^* + \beta_1) \cos^2(\alpha_2 t^* + \beta_2) =$$
$$= -\frac{1}{4} \varepsilon c_1 c_2{}^2 [2 \cos(\alpha_1 t^* + \beta_1) + \cos\{(\alpha_1 + 2\alpha_2) t^* + \beta_1 + 2\beta_2\} +$$
$$+ \cos\{(\alpha_1 - 2\alpha_2) t^* + \beta_1 - 2\beta_2\}].$$

Da F_1 nur aus periodischen Gliedern besteht, ist

$$F_1{}^* = (F_1)_s = 0$$

und daher

$$(F_1)_p = F_1; \quad S_1 = \int F_1 dt^*.$$

Aus (XXXII; 108) folgt also durch Integration

$$S_1 = -\frac{1}{4}\varepsilon {c_1}{c_2}^2\left[\frac{2}{\alpha_1}\sin(\alpha_1 t^* + \beta_1) + \frac{1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}\sin\{(\alpha_1 + 2\alpha_2)\,t^* + \beta_1 + 2\beta_2\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha_1 - 2\alpha_2}\sin\{(\alpha_1 - 2\alpha_2)\,t^* + \beta_1 - 2\beta_2\}\right].$$

Eliminiert man die trigonometrischen Funktionen durch (XXXII; 106, 107), setzt also

$$\sin(\alpha_i t^* + \beta_i) = -\frac{\eta_i}{\alpha_i c_i};\quad \cos(\alpha_i t^* + \beta_i) = \frac{\xi_i}{c_i},$$

$$\sin 2(\alpha_i t^* + \beta_i) = -2\frac{\xi_i \eta_i}{\alpha_i {c_i}^2};\quad \cos 2(\alpha_i t^* + \beta_i) = 1 - 2\frac{{\eta_i}^2}{{\alpha_i}^2 {c_i}^2},$$

so folgt, wenn man noch dem Glied mit η_i den Faktor

$$1 = \frac{1}{{\alpha_2}^2 {c_2}^2}({\alpha_2}^2 {\xi_2}^2 + {\eta_2}^2)$$

anfügt,

(XXXII; 109) $$S_1 = \frac{\varepsilon}{{\alpha_1}^2({\alpha_1}^2 - 4{\alpha_2}^2)}[({\alpha_1}^2 - 2{\alpha_2}^2)\,\eta_1 {\xi_2}^2 - 2{\alpha_1}^2 \eta_2 \xi_1 \xi_2 - 2\eta_1 {\eta_2}^2].$$

Wegen $F_1^* \equiv 0$, $F_2 = 0$ erhält man aus (XXXII; 95) $F_2^* = {}^1/_2(F_1, S_1)_s$, und da F_1 nur von ξ_1, ξ_2 abhängt, ist

$$(F_1, S_1) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial S_1}{\partial \eta_2}.$$

Aus (XXXII; 104) entnimmt man

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} = -\varepsilon {\xi_2}^2;\quad \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} = -2\varepsilon \xi_1 \xi_2$$

und aus (XXXII; 109)

$$\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} = \varepsilon\frac{({\alpha_1}^2 - 2{\alpha_2}^2)\,{\xi_2}^2 - 2{\eta_2}^2}{{\alpha_1}^2({\alpha_1}^2 - 4{\alpha_2}^2)};\quad \frac{\partial S_1}{\partial \eta_2} = -2\varepsilon\frac{{\alpha_1}^2 \xi_1 \xi_2 + 2\eta_1 \eta_2}{{\alpha_1}^2({\alpha_1}^2 - 4{\alpha_2}^2)}.$$

Somit ist

(XXXII; 110)

$$(F_1, S_1) = \frac{\varepsilon^2}{{\alpha_1}^2({\alpha_1}^2 - 4{\alpha_2}^2)}[(-{\alpha_1}^2 + 2{\alpha_2}^2)\,{\xi_2}^4 + 4{\alpha_1}^2 {\xi_1}^2 {\xi_2}^2 + 2{\xi_2}^2 {\eta_2}^2 + 8\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2].$$

Aus (XXXII; 106, 107) ergibt sich

$$\xi_2^4 = c_2^4 \cos^4(\alpha_2 t^* + \beta_2) = c_2^4 \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2(\alpha_2 t^* + \beta_2) + \frac{1}{8}\cos 4(\alpha_2 t^* + \beta_2)\right],$$

$$\xi_1^2\xi_2^2 = \frac{1}{4} c_1^2 c_2^2 \Big[1 + \cos 2(\alpha_1 t^* + \beta_1) + \cos 2(\alpha_2 t^* + \beta_2) + \\ + \frac{1}{2}\cos 2\{(\alpha_1 + \alpha_2) t^* + \beta_1 + \beta_2\} + \frac{1}{2}\cos 2\{(\alpha_1 - \alpha_2) t^* + \beta_1 - \beta_2\}\Big],$$

$$\xi_2^2\eta_2^2 = \frac{1}{8} c_2^4 \alpha_2^2 [1 - \cos 4(\alpha_2 t^* + \beta_2)],$$

$$\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 = \frac{1}{8} c_1^2 c_2^2 \alpha_1\alpha_2 [\sin 2\{(\alpha_1 + \alpha_2) t^* + \beta_1 + \beta_2\} + \\ + \sin 2\{(\alpha_1 - \alpha_2) t^* + \beta_1 - \beta_2\}].$$

Trennt man die konstanten von den periodischen Gliedern, so ergibt sich aus (XXXII; 110)

(XXXII; 111)

$$F_2^* = \frac{1}{2}(F_1, S_1)_s = \frac{\varepsilon^2}{2\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2)}\left[\left(\alpha_2^2 - \frac{3}{8}\alpha_1^2\right) c_2^4 + \alpha_1^2 c_1^2 c_2^2\right].$$

Ebenso erhält man nach kurzer Rechnung, die dem Leser überlassen werden darf,

(XXXII; 112)
$$S_2 = \frac{1}{2}\int (F_1, S_1)_p \, dt^* =$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{2\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2)}\left[\frac{\xi_1\eta_1}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}\{(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\xi_2^2 - 3\eta_2^2\} + \right.$$
$$+ \xi_2\eta_2\left\{\frac{\alpha_1^2(4\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_2^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\xi_1^2 - \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2}{\alpha_2^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\eta_1^2 + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{5\alpha_1^2 - 8\alpha_2^2}{8\alpha_2^2}\xi_2^2 + \frac{3\alpha_1^2 - 8\alpha_2^2}{8\alpha_2^2}\eta_2^2\right\}\right].$$

Schließlich berechnen wir noch nach (XXXII; 96) mit $F_1^* = 0$, $(F_1)_p = F_1$

$$F_3^* = \frac{1}{2}(F_1, S_2)_s + \frac{1}{2}(F_2^*, S_1)_s + \frac{1}{12}\big((F_1, S_1), S_1\big)_s$$

und erhalten, indem wir die Gleichungen (XXXII; 109—112) benutzen, $F_3^* = 0$. Somit ergibt sich, wenn wir noch aus (XXXII; 104, 106, 107)

$$F_0^* = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 c_1^2 + \alpha_2^2 c_2^2)$$

ableiten,

(XXXII; 113)
$$F^* = \frac{1}{2}(\alpha_1{}^2 c_1{}^2 + \alpha_2{}^2 c_2{}^2) + \varepsilon^2 \frac{\left(\alpha_2{}^2 - \frac{3}{8}\alpha_1{}^2\right) c_2{}^4 + \alpha_1{}^2 c_1{}^2 c_2{}^2}{2\alpha_1{}^2(\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2{}^2)} + O(\varepsilon^4).$$

Die kanonischen Gleichungen (XXXII; 90),

(XXXII; 114)
$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \xi_i}, \quad (i = 1, 2),$$

in denen F^* durch (XXXII; 113) gegeben ist, haben also die ersten Integrale

$$F^* = \text{const}, \quad F_0{}^* = \text{const},$$

d. h., es ist, wenn wir c_1 und c_2 aus (XXXII; 106, 107) bestimmen,

(XXXII; 115)
$$c_i{}^2 = \xi_i{}^2 + \frac{\eta_i{}^2}{\alpha_i{}^2} = \text{const}, \quad (i = 1, 2).$$

Aus (XXXII; 114) folgt, da $F_1{}^* = F_3{}^* \equiv 0$ ist, bis auf Terme vierter und höherer Ordnung,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F_0{}^*}{\partial \eta_i} + \frac{\partial F_2{}^*}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F_0{}^*}{\partial \xi_i} - \frac{\partial F_2{}^*}{\partial \xi_i}.$$

Aus der ersten Gleichung (XXXII; 104) entnehmen wir

$$\frac{\partial F_0{}^*}{\partial \eta_i} = \eta_i; \quad \frac{\partial F_0{}^*}{\partial \xi_i} = \alpha_i{}^2 \xi_i$$

und aus (XXXII; 111, 115)

$$\frac{\partial F_2{}^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\frac{\partial c_i{}^2}{\partial \eta_i} = 2\frac{\eta_i}{\alpha_i{}^2}\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}; \quad \frac{\partial F_2{}^*}{\partial \xi_i} = \frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\frac{\partial c_i{}^2}{\partial \xi_i} = 2\xi_i \frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}.$$

Es ist demnach

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \eta_i\left(1 + \frac{2}{\alpha_i{}^2}\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\right); \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\alpha_i{}^2\xi_i\left(1 + \frac{2}{\alpha_i{}^2}\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\right),$$

woraus

(XXXII; 116)
$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} + \alpha_i{}^2\left(1 + \frac{2}{\alpha_i{}^2}\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\right)^2 \xi_i = 0$$

folgt. Setzen wir

$$\alpha_i{}^2\left(1 + \frac{2}{\alpha_i{}^2}\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_i{}^2}\right)^2 = \alpha_i{}^{*2}, \quad (\alpha_i{}^* > 0),$$

so lautet die allgemeine Lösung von (XXXII; 116)

(XXXII; 117) $$\xi_i = c_i \cos(\alpha_i{}^* t + \beta_i),$$

und aus $d\eta_i/dt = -\alpha_i\alpha_i{}^*\xi_i$ folgt durch Integration

(XXXII; 118) $$\eta_i = -c_i\alpha_i \sin(\alpha_i{}^* t + \beta_i)$$

mit den vier willkürlichen Konstanten $c_i, \beta_i, (i = 1, 2)$. Aus (XXXII; 111) leitet man ab:

$$\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_1{}^2} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\,\frac{c_2{}^2}{\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2{}^2},$$

$$\frac{\partial F_2{}^*}{\partial c_2{}^2} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\,\frac{2\left(\alpha_2{}^2 - \frac{3}{8}\,\alpha_1{}^2\right) c_2{}^2 + \alpha_1{}^2 c_1{}^2}{\alpha_1{}^2(\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2{}^2)},$$

und daraus

(XXXII; 119) $$\alpha_1{}^* = \alpha_1\left(1 + \frac{\varepsilon^2 c_2{}^2}{\alpha_1{}^2(\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2{}^2)}\right),$$

(XXXII; 120)

$$\alpha_2{}^* = \alpha_2\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2(\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2{}^2)}\left\{\left(2\alpha_2{}^2 - \frac{3}{4}\,\alpha_1{}^2\right) c_2{}^2 + \alpha_1{}^2 c_1{}^2\right\}\right].$$

Nachdem (XXXII;114) durch (XXXII;117—120) gelöst worden ist, ergibt sich die Lösung des kanonischen Systems (XXXII;103) mittels der LIE-Reihen (XXXII;79):

$$x_i = \xi_i + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_i} + \frac{\partial S_2}{\partial \eta_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_i}, S_1\right) + O(\varepsilon^3),$$

$$y_i = \eta_i - \frac{\partial S_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial S_2}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_i}, S_1\right) + O(\varepsilon^3),$$

in denen $S_1(\xi, \eta)$ und $S_2(\xi, \eta)$ durch (XXXII;109, 112) auszudrücken sind und die Funktionen $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ durch (XXXII; 117, 118), die $\alpha_i{}^*$ durch (XXXII;119, 120) gegeben sind. Die einfache Rechnung darf dem Leser überlassen bleiben.

KAPITEL XXXIII

THEORIE DER BEWEGUNG DES MONDES. ERSTER TEIL: THEORIE VON DE PONTÉCOULANT

271. Das Hauptproblem. Die Störungsfunktion

Das Hauptproblem („main problem") der Mondtheorie sieht folgende Vereinfachungen vor: 1. Es werden nur drei Massen (m_0 = Erde, m = Mond, m_1 = Sonne) angenommen, die Störungen dieses Systems durch andere Körper (Planeten) also vernachlässigt. 2. Die drei Körper werden als mit Masse belegte Punkte angesehen. 3. Relativistische Effekte werden nicht berücksichtigt.

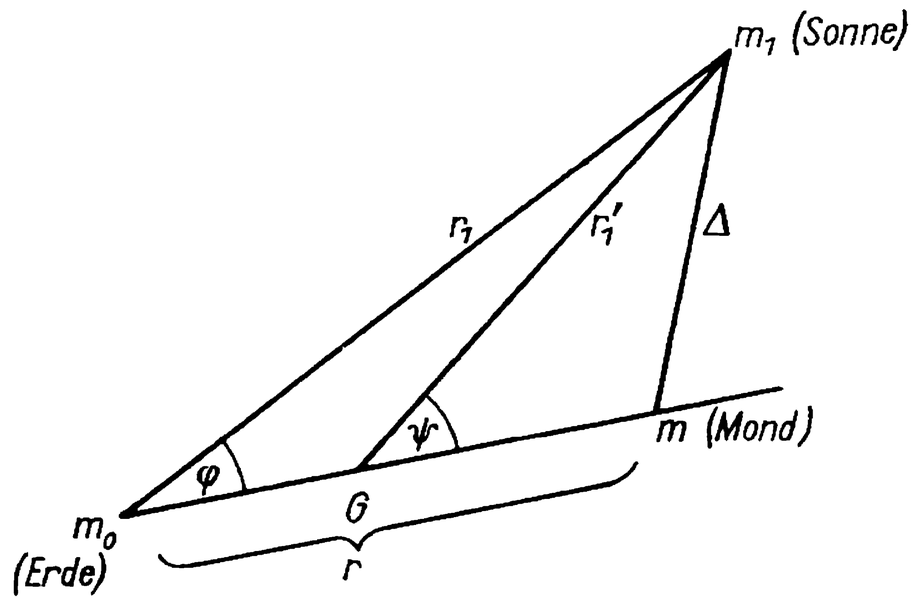

Abb. 17. Hauptproblem der Mondtheorie: JACOBIsche Koordinaten

In Abschnitt 173 haben wir bewiesen, daß in diesem Falle die Bahn der Sonne um den Massenmittelpunkt G zwischen Erde und Mond in einem geozentrischen System mit hinreichender Genauigkeit als eine KEPLERsche Ellipse angesehen werden darf. Bezeichnen wir (Abb. 17) mit $\mathfrak{p}(x, y, z)$ und $\mathfrak{p}_1(x_1, y_1, z_1)$ die geozentrischen Ortsvektoren von Mond bzw. Sonne, mit $\mathfrak{p}_1'(x_1', y_1', z_1')$ den baryzentrischen Ortsvektor der Sonne, mit $r = |\mathfrak{p}|$, $r_1 = |\mathfrak{p}_1|$, $r_1' = |\mathfrak{p}_1'|$ die Beträge dieser Vektoren, so befriedigt $\mathfrak{p}_1'$ mit genügender Genauigkeit die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{p}}_1' + k^2 \frac{m_0 + m + m_1}{r_1'^3} \mathfrak{p}_1' = 0, \tag{XXXIII; 1}$$

deren Lösung bekannt ist. Hingegen gilt für $\mathfrak{p}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{p}} + k^2 \frac{m_0 + m}{r^3} \mathfrak{p} = \mathfrak{F} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{p}} F = k^2 m_1 \left(\frac{\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}}{\Delta^3} - \frac{\mathfrak{p}_1}{r_1^3} \right), \tag{XXXIII; 2}$$

wenn $\Delta = |\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}|$ den Abstand Sonne—Mond bezeichnet. Sei (Abb. 17) φ der Winkel bei m_0, so ist

$$F = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos \varphi}{r_1^2} \right) = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right) \tag{XXXIII; 3}$$

die Störungsfunktion. Da nun

$$\text{(XXXIII; 4)}\quad \begin{cases} r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ \Delta^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \\ \qquad = r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi + r^2 = r_1^2 \left[1 - 2\frac{r}{r_1}\cos\varphi + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right], \end{cases}$$

so ist (s. auch (XXII;6)), wenn $\gamma = r/r_1$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_1}\left[1 - 2\gamma\cos\varphi + \gamma^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r_1}\left[1 + \gamma P_1(\cos\varphi) + \gamma^2 P_2(\cos\varphi) + \cdots\right]$$

unter Verwendung der LEGENDREschen Polynome $P_i(S)$:

$$P_1 = S; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3S^2 - 1); \quad P_3 = \frac{1}{2}(5S^3 - 3S);$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35S^4 - 30S^2 + 3); \cdots$$

für $S = \cos\varphi$. Aus (XXXIII; 3) folgt demnach

$$F = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[(1 + \gamma P_1 + \gamma^2 P_2 + \gamma^3 P_3 + \gamma^4 P_4 + \cdots) - \gamma P_1\right]$$

oder, da nur die partiellen Ableitungen von F nach den Koordinaten von $\mathfrak{p}$ gebraucht werden, der erste Term dieses Ausdrucks also als überflüssig fortfallen darf,

$$\text{(XXXIII; 5)}\quad F = \frac{k^2 m_1}{r_1}\gamma^2(P_2 + \gamma P_3 + \gamma^2 P_4 + \cdots) = F_2 + F_3 + F_4 + \cdots.$$

Da $\gamma = r/r_1 \approx 1/390$ sehr klein und $|P_i| \leqq 1$ ist, konvergiert diese Reihe sehr rasch. Setzt man statt (XXXIII; 2)

$$\ddot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \ldots; \qquad H = k^2\frac{m_0 + m}{r} + F = F_0 + \sum_{i=2}^{\infty} F_i,$$

so ist

$$|F_i| \leqq \frac{m_1}{m_0 + m}\gamma^{i+1} F_0; \quad \frac{m_1}{m_0 + m} \approx \frac{1}{3}\cdot 10^6,$$

und es ergeben sich für die F_i im Vergleich mit F_0 die Abschätzungen

$$|F_2| \leqq \frac{1}{178} F_0; \quad |F_3| \leqq \frac{1}{7}\cdot 10^{-4} F_0; \quad |F_4| \leqq \frac{1}{27}\cdot 10^{-6} F_0; \ldots$$

Man wird also schon F_4 gegen F_0 vernachlässigen dürfen. Der dadurch entstehende Fehler (vgl. Band II, S. 514) ist von der gleichen Ordnung wie derjenige, der entsteht, wenn die baryzentrische Bahn der Sonne als KEPLERsche Ellipse angesehen wird.

Um die Koordinaten von $\mathfrak{p}_1'$, die als Lösungen von (XXXIII; 1) bekannt sind, in den Ausdruck für die Störungsfunktion F einzuführen, setzen wir

$$\text{(XXXIII; 6)}\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1' + \beta\mathfrak{p}; \quad \beta = \dfrac{m}{m_0 + m} \approx \dfrac{1}{82}, \\ r_1^2 = (x_1' + \beta x)^2 + (y_1' + \beta y)^2 + (z_1' + \beta z)^2, \\ \Delta^2 = [x_1' - (1-\beta)x]^2 + [y_1' - (1-\beta)y]^2 + [z_1' - (1-\beta)z]^2 \end{cases}$$

oder, wenn (s. Abb. 17) ψ den Winkel bei G bezeichnet,

$$\text{(XXXIII; 7)}\quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_1'}(1 - 2\delta\cos\psi + \delta^2)^{-1/2}; \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1'}(1 - 2\varepsilon\cos\psi + \varepsilon^2)^{-1/2}$$

mit

$$\delta = (1-\beta)\frac{r}{r_1'}; \qquad \varepsilon = -\beta\frac{r}{r_1'}.$$

Man kann dann statt (XXXIII; 3) auch

$$\text{(XXXIII; 8)}\qquad F = k^2 m_1 \left[\frac{1}{(1-\beta)\Delta} + \frac{1}{\beta r_1}\right]$$

schreiben, denn betrachtet man Δ und r_1 nach (XXXIII; 6) als Funktionen von x, y, z, so ist

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = -(1-\beta)\frac{x_1 - x}{\Delta}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \beta\frac{x_1}{r_1},$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right),$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich auch für $\partial F/\partial y$ und $\partial F/\partial z$ in Übereinstimmung mit (XXXIII; 2).

Entwickelt man die Ausdrücke (XXXIII, 7) nach den LEGENDREschen Polynomen $P_i' = P_i(\cos\psi)$, so entsteht

$$F = \frac{k^2 m_1}{r_1'(1-\beta)}\left[1 + \frac{r}{r_1'}(1-\beta)P_1' + \frac{r^2}{r_1'^2}(1-\beta)^2 P_2' + \cdots\right] + \\ + \frac{k^2 m_1}{r_1'\beta}\left[1 - \frac{r}{r_1'}\beta P_1' + \frac{r^2}{r_1'^2}\beta^2 P_2' - \cdots\right].$$

Unterdrückt man wiederum die von r unabhängigen Terme und sammelt diejenigen mit P_i', so erhält man

$$F = k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1'^3}\left[P_2' + \frac{r}{r_1'}(1-2\beta)P_3' + \frac{r^2}{r_1'^2}(1 - 3\beta + 3\beta^2)P_4' + \cdots\right].$$

(XXXIII; 9)

Will man das sehr kleine Glied mit P_4' nicht ganz vernachlässigen, so genügt es jedenfalls, den von β abhängigen Faktor durch den nur wenig kleineren $(1 - 2\beta)^2$ zu ersetzen. Man könnte dann (XXXIII; 9) ohne ins Gewicht fallenden Fehler durch die einfacher gebaute Reihe

(XXXIII; 9a)
$$F = k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1'^3}[P_2' + \gamma' P_3' + \gamma'^2 P_4' + \cdots] \quad \text{mit} \quad \gamma' = \frac{r}{r_1'}(1 - 2\beta)$$

annähern, in der der sehr kleine Term mit P_4' sich von dem strengen durch einen Faktor von der Ordnung $1 - \beta$ unterscheidet.

In der Praxis wird man großes Gewicht darauf legen müssen, den Koeffizienten $k^2 m_1 r^2 r_1'^{-3}$ des Hauptterms von (XXXIII; 9) möglichst genau zu bestimmen. Das erfordert möglichst genaue Kenntnis der Abstände r und r', deren Ermittlung aus Beobachtungen[1]) schwierig und ungenau ist. Sehr genau bekannt sind dagegen die mittleren Bewegungen $n_1' = n_1$ bzw. n der Sonne und des Mondes in ihren Bahnen. In der elliptischen Bewegung ist

(XXXIII; 10)
$$n^2 = \frac{k^2(m_0 + m)}{a^3}; \quad n_1^2 = \frac{k^2(m_0 + m + m_1)}{a_1'^3}.$$

Nun ist a_1' als große Halbachse einer KEPLERschen Ellipse konstant und kann aus der zweiten Gleichung (XXXIII; 10) ermittelt werden, wenn n_1 und die Verhältnisse der Massen aus Beobachtungen genügend bekannt sind. In der Mondbewegung kann die große Halbachse a auf verschiedene Art definiert werden, so daß dabei ein gewisser Spielraum offensteht. Man könnte z. B. a als die große Halbachse einer zur Zeit $t = t_0$ die gestörte Bahn oskulierenden Ellipse ansehen, aber diese Definition wäre unzweckmäßig, da sie an den Bewegungszustand in einem willkürlich gewählten Zeitpunkt gebunden ist. Im Sinne einer allgemeinen Bewegungstheorie des Mondes ist a als „mittlere Entfernung des Mondes von der Erde" der konstante Teil einer Entwicklung des Radiusvektors r in eine trigonometrische Reihe, die nach Vielfachen der mittleren Anomalien von Mond- und Sonnenbahn fortschreitet. Bevor wir auf diese wichtige Frage (s. Abschnitt 279) eingehen, begnügen wir uns mit einer provisorischen Definition der mittleren großen Halbachse durch die erste Gleichung (XXXIII; 10). Abgesehen von periodischen Termen wird man dann den Faktor von P_2' durch die Konstante

(XXXIII; 11)
$$k^2 m_1 \frac{a^2}{a_1'^3} = \frac{k^2 m_1}{a}\left(\frac{a}{a_1'}\right)^3 = \frac{k^2 m_1}{a}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \frac{m_0 + m}{m_0 + m + m_1}$$

ersetzen können. Mitunter wird auch a_1' durch den von (XXXIII; 10) nur wenig abweichenden Ausdruck

(XXXIII; 12)
$$k^2 m_1 = n_1^2 a_1'^3$$

---

[1]) Neuerdings werden Abstände von Himmelskörpern durch Radarmessungen sehr genau bestimmbar. Für die Definition und exakte numerische Festlegung astronomischer Konstanten eröffnen sich dadurch neue Möglichkeiten.

definiert, während genauer

$$k^2 m_1 = {n_1}^2 {a_1}'^3 \left(1 - \frac{n^2 a^3}{{n_1}^2 {a_1}'^3}\right); \quad \frac{n^2 a^3}{{n_1}^2 {a_1}'^3} = \frac{m_0 + m}{m_0 + m + m_1} \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

ist. Der prozentuale Fehler, der durch die genäherte Formel (XXXIII; 12) entsteht, überträgt sich auf die Amplituden aller von der Störung durch die Sonne bewirkten periodischen Störungsterme. Der bedeutendste dieser Terme, die *Evektion* (Abschnitt 175), hat eine Amplitude von 76.′5, der durch die Verwendung von (XXXIII; 12) entstehende Fehler beträgt 0.″013 in Länge, er ist der einzige, der 0.″01 überschreitet, und liegt beträchtlich unter der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen.

Bei geeigneter Wahl der Einheiten von Länge, Zeit und Masse kann man den Ausdruck (XXXIII; 11) vereinfachen. Schreibt man nach (XXXIII; 12) $k^2 m_1 = {n_1}^2 {a_1}'^3$, so erhält man

$$k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}'^3} = \frac{1}{a} ({n_1}^2 {a_1}'^3) \left(\frac{a}{a_1'}\right)^3 = \frac{1}{a} \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 n^2 a^3.$$

Setzt man nun $n_1/n = \nu \approx 1/13$ und wählt nach DE PONTÉCOULANT (s. Abschnitt 279) die Einheiten so, daß $n^2 a^3 = 1$ wird, dann ergibt sich

(XXXIII; 13) $$k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}'^3} = \frac{\nu^2}{a}.$$

Da nach (XXXIII; 10) $n^2 a^3 = k^2 (m_0 + m)$ ist, erreicht man dies etwa, indem man $k = 1$ und $m_0 + m = 1$ setzt. Die Einheiten sind dann kanonisch (s. Abschnitt 196), und man darf noch über eine der übrigen Einheiten (Länge oder Zeit) frei verfügen. Man kann z. B. die Zeiteinheit so definieren, daß $n = 1$ wird. Dann ist, wenn die siderische Umlaufszeit des Mondes $T = 2\pi/n = 27.^{\mathrm{d}}321661$ ist, in den alten Einheiten (Zeit = mittlerer Tag, Masse = $\odot$)

$$n = 2\pi/T; \qquad m_0 + m = 1/328900.$$

Mithin ist nach dem in Abschnitt 196 beschriebenen Verfahren

$$\tau = 2\pi/T, \qquad \mu = 1/(m_0 + m) = 328900$$

und somit, mit $k = 0.0172021$,

$$\lambda = \left(\frac{\tau^2 \mu}{k^2}\right)^{1/3} = 388.8,$$

d. h., die neue Längeneinheit beträgt 1/388.8 A.E. Sie definiert die mittlere große Halbachse der Mondbahn durch das Massenverhältnis $m_1/(m_0 + m)$ und die siderische Umlaufszeit T des Mondes. Daß diese Definition einer wichtigen astronomischen Konstante nicht die einzig mögliche ist, ist nach dem Vorhergehenden klar und wird in einem der nachfolgenden Abschnitte noch eingehender erörtert werden.

272. Charakteristische Unterschiede zwischen den Theorien der Planeten und des Mondes

Die Theorie der von der Sonne gestörten geozentrischen Bewegung des Mondes und die Theorie der wechselseitigen Störungen der heliozentrischen Bewegungen zweier Planeten sind zwei Spezialfälle des allgemeinen Dreikörperproblems, die sich nur durch die Größenordnung der Massen und der mittleren Entfernungen der beteiligten Körper unterscheiden. Diese Unterschiede sind allerdings so bedeutend, daß die Lösung des Störungsproblems in beiden Fällen unterschiedliche Methoden erfordert. Sie machen sich primär in der Entwicklung der Störungsfunktion bemerkbar.

Wenn wir, wie in Abschnitt 271, die Masse des Zentralkörpers mit m_0, die des gestörten mit m und die des störenden mit m_1 bezeichnen, so sind die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung von m bezüglich m_0 in beiden Fällen die gleichen (XXXIII; 2), und die Störungsfunktion F hat die Gestalt (XXXIII; 3 bzw. 5) oder, wenn JACOBIsche Koordinaten eingeführt werden, d. h. die Bewegung von m_1 auf den Massenmittelpunkt zwischen m_0 und m bezogen wird, die Gestalt (XXXIII; 9 bzw. 9a). Im Falle der wechselseitigen Störungen zweier Planeten oder der Störung eines Planetoiden ($m = 0$) durch Jupiter oder einen anderen der großen Planeten wird man F meistens durch die einfachere Formel (XXXIII; 5) ausdrücken, d. h. heliozentrische Koordinaten verwenden. Der Faktor $1 - 2\beta = (m_0 - m)/(m_0 + m)$ in (XXXIII; 9) unterscheidet sich dann sehr viel weniger von der Einheit als in der Theorie des Mondes, und im Falle der Planetoidenbewegung ist $\beta = 0$. Auch ist die Bewegung des störenden Planeten um G (Abb. 17) nicht, wie in der Mondtheorie, genau genug durch eine KEPLERsche Ellipse darstellbar.

Einer der wesentlichsten Unterschiede zwischen der Theorie der Satelliten (einschließlich der des Mondes) und der Theorie der Planeten besteht in der Größenordnung des Hauptterms von F bezüglich F_0. Dieser Term hat stets die Form (XXXIII; 11). Daß dies auch in den Planetentheorien der Fall ist, bestätigt man leicht an den Entwicklungen des Hauptteils und des Nebenteils der Störungsfunktion, die wir in Kapitel XXV durchgeführt haben. Setzen wir in (XXV; 32) e_1, e_2 und η gleich Null, so lauten die ersten Terme[1]) des Hauptteils Ψ (für $k = 0, \pm 1$ und $A_1 = A_{-1}$)

$$\Psi = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos(\lambda_1 - \lambda) + \cdots$$

und die des Nebenteils ψ [2]) nach (XXV; 43)

$$\psi = \frac{a}{{a_1}^2} \cos(\lambda_1 - \lambda) + \cdots.$$

---

[1]) Statt, wie in Kapitel XXV, m_0, m_1, m_2; a_1, a_2, ... haben wir hier m_0, m, m_1; a, a_1, ... zu setzen.

[2]) Der Nebenteil ψ ist hier nicht mit dem Winkel ψ in Abb. 17 zu verwechseln.

Nun ist aber nach (XXIII; 37, 40a)

$$\frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2}\beta_0^{(1/2)} = \frac{1}{2a_1}b_0^{(1/2)} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{4a_1}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \cdots,$$

$$A_1 = \frac{1}{a_1}b_1^{(1/2)} = \frac{a}{{a_1}^2} + \cdots.$$

Mithin erhält man für die Entwicklung von $F = k^2 m_1 (\Psi - \psi)$ bis zu Gliedern zweiter Ordnung in a/a_1

$$F = k^2 m_1 \left[\left\{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{4a_1}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \frac{a}{{a_1}^2}\cos(\lambda_1 - \lambda) + \cdots\right\} - \left\{\frac{a}{{a_1}^2}\cos(\lambda_1 - \lambda) + \cdots\right\}\right]$$

oder, wenn man den ersten Term fortläßt, der von den Elementen der Bahn des gestörten Planeten nicht abhängt,

$$F = k^2 m_1 \left(\frac{a^2}{4{a_1}^3} + \cdots\right).$$

Andererseits ist nach (XXXIII; 5)

$$F = k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}^3}(P_2 + \cdots) + \text{periodische Glieder},$$

also

$$F = k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}^3}\left[\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right] = k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}^3}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\varphi + \cdots\right).$$

Das größte konstante Glied der Störungsfunktion ist also in beiden Fällen von der gleichen Form, wie zu erwarten war.

Vergleichen wir in (XXXIII; 5) den Faktor von P_2 mit dem ungestörten Term $F_0 = k^2(m_0 + m)/r$ der HAMILTONschen Funktion, so erweist sich der Quotient

$$\frac{|F_2|}{F_0} \leqq \frac{m_1}{m_0 + m}\left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \approx \frac{m_1}{m_0 + m}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 = \frac{m_1(m_0 + m + m_1)}{(m_0 + m)^2}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2$$

in beiden Theorien als von verschiedener Größenordnung. Nehmen wir als extrem ungünstiges Beispiel einen von Jupiter gestörten Planetoiden an, für den $a/a_1 = 0.7$ ist, so erhält man, mit $m_0 = 1$, $m = 0$, $m_1 < 10^{-3}$, $|F_2|/F_0 \leqq \leqq 343 \cdot 10^{-6} \approx 1/3000$, während für den Mond auf Grund unserer Abschätzungen im vorigen Abschnitt $|F_2|/F_0 \leqq 1/178$ erheblich größer ist. In weniger extremen Fällen ist der Größenordnungsunterschied noch weit beträchtlicher.

Für die weitere Entwicklung der Störungsfunktion in den beiden Fällen ist wiederum die Größenordnung des Quotienten a/a_1 entscheidend, der im Falle des Mondes sehr klein ($\approx 1/400$) ist, im Falle der Planetentheorien aber in einzelnen Fällen bis nahe an die Einheit heranreicht. Die Entwicklungen (XXXIII; 5, 9) nach Potenzen von r/r_1 konvergieren also im Falle des Mondes

und der Satelliten der großen Planeten sehr rasch, im Falle der Planeten aber unter Umständen außerordentlich langsam.

Bei der Entwicklung der Störungsfunktion nach Funktionen der mittleren, wahren oder exzentrischen Anomalie wird man also auf die unterschiedliche Größenordnung der Parameter $(a/a_1, e, e_1, J)$ Rücksicht zu nehmen haben. In den Planetentheorien wird man, wie in Kapitel XXV, zunächst nach den Potenzen der kleinen Parameter e, e_1, $\eta = \sin(J/2)$ entwickeln und erst dann die mit diesen kleinen Faktoren behafteten Größen durch die langsam konvergierenden LAPLACEschen Reihen ausdrücken, die nach Potenzen von a/a_1 fortschreiten. Man erhält dann zahlreiche periodische Terme mit meist kleinen Amplituden. In der Theorie des Mondes wird man umgekehrt verfahren: zuerst wird man nach Potenzen des hier sehr kleinen Parameters a/a_1 entwickeln. Diese Reihe wird man schon nach wenigen Gliedern abbrechen dürfen. Wenn man aber nachträglich diese Glieder nach Potenzen der Exzentrizitäten und der Neigung entwickelt, so wird man wegen des verhältnismäßig großen Faktors $k^2 m_1 a^2 a_1^{-3}$ diese Entwicklungen bis zu größeren Ordnungen durchzuführen haben, als dies im Falle der Planetentheorien nötig ist.

In den Planetentheorien, die — je nach der Beschaffenheit der Bahnen der beteiligten Körper — eine große Mannigfaltigkeit von Modellen umfassen, treten besondere Schwierigkeiten auf, wenn Kommensurabilitäten der mittleren Bewegungen „kritische" Terme erzeugen. In der Theorie des Mondes, dessen mittlere Bewegung mit derjenigen der Sonne ausgesprochen inkommensurabel ist, treten solche kritischen Terme nur mit Faktoren hoher Ordnung in den kleinen Parametern auf und haben daher nur geringe Bedeutung. Das gleiche gilt für die säkularen und gemischten Terme, die in den Planetentheorien die genaue Darstellung der Koordinaten des gestörten Körpers zwar für ziemlich lange, aber doch mehr oder weniger beschränkte Zeiträume erlauben, wenn nicht besondere Methoden angewandt werden können, die diese Schwierigkeit umgehen. In der Mondtheorie besteht dies Problem ebenfalls, kann aber dank der hier vorliegenden speziellen Bedingungen mit Hilfe verhältnismäßig einfacher Kunstgriffe gelöst werden. Der tiefere Grund dafür ist, daß die säkularen Terme rasch mit der Zeit anwachsen und sich in Zeiträumen, die man noch unter Kontrolle hat, als Näherungen langperiodischer Glieder erweisen, während sich dies im Falle der Planeten erst in sehr langen Zeiten abspielt, so daß hier die Identifizierung der säkularen Terme mit solchen von sehr langer Periode schwierig ist und weder durch Beobachtungen noch durch theoretische Überlegungen genügend gestützt werden kann.

273. Die Theorie von de Pontécoulant. Die Differentialgleichungen

Das Problem, eine Mondtheorie aufzubauen, die mit den Beobachtungen verträglich ist, hat die Astronomen seit NEWTONS Zeiten unablässig beschäftigt. F. TISSERAND hat im dritten Bande seines „Traité de mécanique céleste" eine nahezu vollständige Übersicht über alle bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts bekannt gewordenen Theorien der Mondbewegung gegeben. Eine gedrängtere Zusammenfassung dieser Arbeiten findet man in der ausge-

zeichneten Einführung in dieses interessante und wichtige Gebiet der Himmelsmechanik von E. W. Brown[1]).

Wir haben in Kapitel XX versucht, das Problem der Mondbewegung mit elementaren analytischen Hilfsmitteln anzugreifen, mit dem Ziel, den Ursprung der hauptsächlichsten periodischen und säkularen Störungen der Mondbewegung durch die Sonne klarzumachen und deren numerische Konstanten größenordnungsmäßig (d. h. bis auf Abweichungen von meist weniger als 10%) abzuschätzen. Grundlagen exakter Theorien sind in den vorhergehenden Kapiteln dieses Bandes schon mehrfach erarbeitet worden: Hansens Theorie (Kapitel XXVII bis XXVIII) wurde zwar hauptsächlich in bezug auf die Planetenstörungen entwickelt, kann aber mit den notwendigen Änderungen auch auf die Mondtheorie angewandt werden — Hansen selbst hat dies mit großem Erfolg getan. Die Exhaustionsmethode von Delaunay (Abschnitt 262—263) bezieht sich in erster Linie auf das Mondproblem, für dessen Lösung auch die Eliminationsverfahren von von Zeipel und anderen nützliche Beiträge geliefert haben (Kap. XXXII). Die Methoden der Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten (Musen, Carpenter u. a.) sind gleichfalls in der Theorie des Mondes verwendet worden, sind allerdings kaum geeignet, die großen periodischen und säkularen Ungleichheiten der Bewegung des Mondes sichtbar werden zu lassen. Schließlich entwickelten wir in Kapitel XXI eine vorläufige Einführung in die Theorie von G. W. Hill, indem wir uns auf ein vereinfachtes Modell des Systems Erde—Mond—Sonne und auf das Problem der „Variation" beschränkten.

In den oben erwähnten Kapiteln erarbeiteten wir die analytischen Gundlagen und den Mechanismus einiger Störungstheorien, ohne auf spezielle Ergebnisse im Falle der Mondbewegung einzugehen. Wir werden dies in den folgenden Abschnitten dieses und der nächsten Kapitel nachholen, indem wir aus der Fülle der in der Literatur bekannt gewordenen Methoden drei Beispiele herausgreifen, in denen die Analyse des Mondproblems mit sehr verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln durchgeführt worden ist (de Pontécoulant, Hill und Hori).

De Pontécoulant[2]) benutzt als abhängige Variable die Polarkoordinaten (r, w, b bzw. $s = \tan b$) des Mondes in einem festen System, etwa dem der mittleren Ekliptik einer bestimmten Epoche. Beschränken wir uns auf das „main problem", so bewegt sich die Sonne in der x,y-Ebene und in einer Keplerschen Ellipse mit bekannten Elementen, und die Störungsfunktion hat die Form (XXXIII; 9a)

(XXXIII; 14)

$$F = k^2 m_1 \Omega; \quad \Omega = \frac{r^2}{{r_1}^3}\left[P_2 + \gamma P_3 + \gamma^2 P_4 + \cdots\right] = \frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{{r_1}^3},$$

---

[1]) E. W. Brown, An introductory treatise on the lunar theory (1896). Nachdruck New York 1960 (Dover Publications).

[2]) De Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde, Bd. 4. Paris 1846.

in der $r_1(=r_1')$ den Radiusvektor der Sonne bezüglich G (Abb. 17, S. 404), ψ den Winkel bei G bedeutet und

$$P_i = P_i(\cos\psi), \quad \gamma = \frac{r}{r_1}(1-2\beta) = \frac{r}{r_1}\,\frac{m_0 - m}{m_0 + m}$$

ist. Da der Mittelwert $a^2 a_1^{-3}$ von $r^2 r_1^{-3}$ durch (XXXIII;11) und daher durch a, die Massen und das Verhältnis der mittleren Bewegungen ausgedrückt werden kann, erscheint r/r_1 explizite nur in den Koeffizienten von P_3, P_4, ... Die Formel (XXXIII;14) darf daher unter der Annahme gebraucht werden, daß das Verhältnis a/a_1, wo auch immer es auftritt, mit dem Faktor $1-2\beta$ zu multiplizieren ist.

Man setze im System der Ekliptik $\varrho = r\cos b$, $s = \tan b$. Dann ist

$$x = \varrho\cos w; \quad y = \varrho\sin w; \quad z = \varrho s,$$

und die Differentialgleichungen der gestörten Mondbewegung,

$$\text{(XXXIII;15)} \quad \ddot{x} + \varkappa^2\frac{x}{r^3} = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \ddot{y} + \varkappa^2\frac{y}{r^3} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \ddot{z} + \varkappa^2\frac{z}{r^3} = \frac{\partial F}{\partial z},$$

lassen sich leicht in diejenigen für ϱ, w, z,

$$\text{(XXXIII;16)} \quad \left\{\begin{array}{rl} \ddot{\varrho} - \varrho\dot{w}^2 + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\varrho = \dfrac{\partial F}{\partial x}\cos w + \dfrac{\partial F}{\partial y}\sin w = \dfrac{\partial F}{\partial \varrho}, & 2\dot{\varrho} \\ 2\dot{\varrho}\dot{w} + \varrho\ddot{w} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{d}{dt}(\varrho^2\dot{w}) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\sin w + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cos w = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial F}{\partial w}, & 2\varrho\dot{w} \\ \ddot{z} + \varkappa^2\dfrac{z}{r^3} = \dfrac{\partial F}{\partial z} & 2\dot{z} \end{array}\right.$$

umwandeln. Multipliziert man diese Gleichungen mit den nebenstehenden Faktoren und addiert die Produkte, so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{w}^2 + \dot{z}^2 - 2\frac{\varkappa^2}{r}\right) = 2\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\dot{\varrho} + \frac{\partial F}{\partial w}\dot{w} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}\right) = 2\frac{\partial F}{dt},$$

da $\varrho\dot{\varrho} = x\dot{x} + y\dot{y}$, $\varrho\dot{\varrho} + z\dot{z} = r\dot{r}$ ist. Das Symbol $\partial F/dt$ bedeutet, daß beim Differenzieren von F die Koordinaten der Sonne als konstant anzusehen sind (s. auch Abschnitt 240). Integriert man diese Gleichung, so ergibt sich, mit $-\varkappa^2/a$ als Integrationskonstante,

$$\text{(XXXIII;17)} \qquad \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{w}^2 + \dot{z}^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) + 2\int \partial F.$$

Diese Formel ist mit der zweiten Gleichung (XXIX;10) identisch, da $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{w}^2$ ist. Ebenso gilt die erste Gleichung (XXIX;10) in der Form

$$\text{(XXXIII;18)} \quad \varrho\ddot{\varrho} + \dot{\varrho}^2 + z\ddot{z} + \dot{z}^2 = r\ddot{r} + \dot{r}^2 = \varkappa^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + k^2 m_1 p + 2\int \partial F,$$

wenn man p durch (XXIX; 5),

$$k^2 m_1 p = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = r\frac{\partial F}{\partial r},$$

definiert. Die Gleichung (XXXIII; 18) folgt auch unmittelbar aus (XXXIII; 16) wenn man die erste und dritte dieser Gleichungen mit ϱ bzw. z multipliziert, die Produkte addiert und die Summe durch Hinzufügung von (XXXIII; 17) ergänzt. Das Ergebnis ist mit (XXXIII; 18) identisch, wenn

(XXXIII; 19) $$r\frac{\partial F}{\partial r} = \varrho\frac{\partial F}{\partial \varrho} + z\frac{\partial F}{\partial z}$$

gesetzt wird. Das ist aber richtig, da

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)$$

ist. Wegen $r\ddot{r} + \dot{r}^2 = {}^1/_2 d^2 r^2/dt^2$ dürfen wir anstatt (XXXIII; 18) auch

(XXXIII; 20) $$\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} = \varkappa^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + r\frac{\partial F}{\partial r} + 2\int \partial F$$

schreiben. Ferner erhält man durch Integration der zweiten Gleichung (XXXIII; 16)

(XXXIII; 21) $$\varrho^2\frac{dw}{dt} = \int \frac{\partial F}{\partial w}\,dt + h$$

mit der willkürlichen Konstante h.

Schließlich kann man, mit $z = \varrho s = rs/\sqrt{1+s^2}$, die letzte Gleichung (XXXIII; 16)

(XXXIII; 22) $$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \frac{\varkappa^2}{r^3}\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

schreiben. Setzt man nun $F(\varrho, w, z) \equiv F'(r, w, s)$ und

$$\varrho = r\cos b = \frac{r}{\sqrt{1+s^2}}; \qquad z = \varrho s = \frac{rs}{\sqrt{1+s^2}},$$

so erhält man, wenn $\delta\varrho$, δw, δz; δr, δw, δs unabhängige Variationen der Variablen von F bzw. von F' darstellen,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \varrho}\delta\varrho + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z \equiv \delta F' = \frac{\partial F'}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F'}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F'}{\partial s}\delta s$$

und, wegen $r^2 = \varrho^2 + z^2$, $s = z/\varrho$,

$$r\delta r = \varrho\delta\varrho + z\delta z; \qquad \delta s = \frac{1}{\varrho}\delta z - \frac{z}{\varrho^2}\delta\varrho.$$

Führen wir diese Beziehungen in F' ein, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho}\delta\varrho + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z \equiv \frac{\partial F'}{\partial r}\left(\frac{\varrho}{r}\delta\varrho + \frac{z}{r}\delta z\right) + \frac{\partial F'}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F'}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\delta z - \frac{z}{\varrho^2}\delta\varrho\right)$$

oder, da $\delta\varrho$, δw, δz willkürliche Größen sind und $F \equiv F'$ ist,

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{z}{\varrho^2}\frac{\partial F}{\partial s};\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial s},$$

während $\partial F/\partial w = \partial F'/\partial w$ unverändert bleibt. Eliminiert man $\partial F/\partial s$ aus diesen beiden Beziehungen, so erhält man (XXXIII;19), führt man die zweite in (XXXIII;22) ein, so ergibt sich

$$\text{(XXXIII; 22a)}\quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \frac{\varkappa^2}{r^3}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial F}{\partial s}.$$

Das System (XXXIII; 20, 21, 22 bzw. 22a) von Differentialgleichungen für r, w, s, das die Grundlage der Theorie von DE PONTÉCOULANT bildet, ist von der fünften Ordnung und erfordert fünf unabhängige Integrationskonstanten. Da es aber bereits zwei Konstante, nämlich h und a, enthält, das ursprüngliche System (XXXIII;15) aber von der sechsten Ordnung ist, wird eine Konstante überflüssig sein und sich als Funktion der übrigen erweisen. In der Tat darf man die sechs unabhängigen Konstanten des Problems mit den sechs Bahnelementen einer ungestörten KEPLERschen Ellipse identifizieren, die zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ die gestörte Bahn oskuliert. Für $t = t_0$ gilt dann

$$h = \varrho_0^2 \dot{w}_0$$

oder, da $x_0 = \varrho_0 \cos w_0$, $y_0 = \varrho_0 \sin w_0$ und z_0 die rechtwinkligen Koordinaten des Oskulationsortes sind,

$$h = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 = \varkappa\sqrt{p_0}\cos i_0 = \varkappa\sqrt{a_0(1-e_0^2)}\cos i_0$$

nach (V;7). Die Konstante h ist daher von den Elementen a_0, e_0, i_0 abhängig.

274. Intermediäre Bahnen

Die Bewegung des Mondes ist seit mehr als zweihundert Jahren sehr genau beobachtet worden, mit dem Ergebnis, daß die mittlere Bewegung in Länge sich praktisch als konstant erwiesen hat. Die Analyse antiker Finsternisdaten (s. Abschnitt 179) hat gezeigt, daß dies auch für die letzten zweitausend Jahre noch gilt, abgesehen von einer sehr kleinen säkularen Beschleunigung von etwa 8″ im Jahrhundert, der eine sehr geringfügige Abnahme der mittleren geozentrischen Distanz entspricht. Wenn wir diese Erscheinung, die gerade noch die Genauigkeitsschwelle sehr exakter Beobachtungen überschreitet, unberücksichtigt lassen, so darf man die mittlere Bewegung und den mittleren

Abstand des Mondes als unveränderlich ansehen. Daraus folgt, daß die Bewegung des Mondes im wesentlichen periodisch ist, d. h. durch eine Folge periodischer Terme dargestellt werden kann. Sie geht also innerhalb eines in bezug auf die Erde definierten räumlichen Gebiets mit unveränderlicher, wenn auch fluktuierender Begrenzung vor sich. Wenn daher in irgendeiner Theorie der Mondbewegung Terme von der Form t^n, $t^n \sin \alpha t$, $t^n \cos \alpha t$ auftreten, die beständig mit der Zeit wachsen, so werden diese Terme durch die Technik der mathematischen Analyse bedingt sein, die notwendigerweise aus einer Folge von Approximationen besteht. Das bedeutet, daß diese Terme, die für sich allein betrachtet eine säkulare Veränderung der Mondbahn vortäuschen, also die Grenzen sprengen, innerhalb derer diese Bahn verläuft, in Wirklichkeit erste Glieder langperiodischer Ausdrücke mit begrenzten Amplituden darstellen. In der Theorie des Mondes wird es immer möglich sein, durch formale Änderung der analytischen Methode solche säkularen Terme auf langperiodische zurückzuführen.

Die wesentlichsten Unterschiede verschiedener Mondtheorien beruhen auf der unterschiedlichen Definition einer intermediären Lösung der Bewegungsgleichungen, d. h. einer intermediären Bahn, die einem vereinfachten und streng lösbaren System von Differentialgleichungen genügt und die eine mehr oder weniger gute Annäherung an die wirkliche Bahn darstellt. Das kann erreicht werden, indem man die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen, z. B. der Gleichungen (XXXIII; 20—22a), durch einfachere Ausdrücke ersetzt. In der Methode von DELAUNAY (Abschnitt 262—263) wird eine erste intermediäre Lösung erzielt, indem man die Störungsfunktion durch ein konstantes und ein periodisches Glied ersetzt. Eine vorteilhaftere Konstruktion einer intermediären Bahn ist die einer KEPLERschen Ellipse mit gleichförmig bewegten Längen des Perigäums und der Knoten. Das erfordert ein langsam um die Polachse der Ekliptik rotierendes Koordinatensystem, in dem die Ebene der intermediären Mondbahn fest bleibt, d. h. durch konstante Neigung und Knotenlänge definiert ist. In dieser Ebene definiert man die intermediäre Bahn selbst als eine KEPLERsche Ellipse mit gleichförmiger und langsamer Drehung der Apsidenlinie. Wenn die Konstanten der Knoten- und Apsidenbewegung zweckmäßig bestimmt worden sind, so wird diese intermediäre Bahn die wahre bis auf verhältnismäßig kleine periodische Abweichungen annähern. Eine andere Methode der Approximation benutzt HILL (s. Kapitel XXI). Er konstruiert eine erste intermediäre Bahn, indem er die Masse des Mondes, die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik, die Exzentrizität der Sonnenbahn und die Parallaxe der Sonne vernachlässigt. Die Differentialgleichungen dieses stark vereinfachten Problems lassen sich dann integrieren und ergeben eine intermediäre Bahn, die mit der wahren eine der größten periodischen Ungleichheiten, die „Variation", gemeinsam hat. Wir werden im Kapitel XXXIV zeigen, wie HILL, mit dieser ersten Annäherung als Basis, eine vollständige Mondtheorie aufbaut.

Die einfachste Form einer intermediären Bahn ist eine feste KEPLERsche Elilpse, die man als Lösung der Bewegungsgleichungen erhält, wenn man die rechten Seiten völlig vernachlässigt. Diese Lösung, etwa eine Ellipse, die zur

Zeit $t = t_0$ die gestörte Bahn oskuliert, ist im Falle der meisten Planetentheorien als erste Näherung ausreichend, doch im Falle des Mondes gilt dies nur für sehr beschränkte Zeiten. Trotzdem lassen sich auch auf dieser Basis Methoden entwickeln, die auf Grund einer ziemlich rasch konvergierenden Folge von Näherungen zum Ziele führen.

275. Die Störungsfunktion. Elliptische Terme

Wählt man als erste Annäherung eine feste KEPLERsche Ellipse, so erhält man die zweite, indem man die Störungsfunktion F als von den ungestörten Koordinaten der beteiligten Körper abhängig ansieht. Dann ist F eine bekannte Funktion der Zeit, und es wird möglich sein, mit Hilfe irgendeiner Methode das System (XXXIII; 20—22a) von Differentialgleichungen zu lösen. Sind diese Lösungen gelungen, so wird man F verbessern, indem man den Koordinaten die Störungen erster Ordnung hinzufügt. Dieser Prozeß, der so oft wie nötig wiederholt wird, ist im Falle des Mondes sicher schlechter konvergent als in den meisten planetarischen Fällen. Wie wir aber an Hand der Theorie von DE PONTÉCOULANT zeigen werden, kann dieses Näherungsverfahren durch gewisse Kunstgriffe abgekürzt werden.

Im Hauptproblem, auf das wir auch im folgenden unsere Überlegungen beschränken wollen, bewegt sich die Sonne in der x, y-Ebene und in einer ungestörten Ellipse, die durch die vier konstanten Elemente a_1, e_1, $\tilde{\omega}_1$, ε_1 bestimmt ist, da $i_1 = 0$ und Ω_1 nicht definiert ist. Die Bewegung des Mondes wird durch die sechs Elemente a, e, i, Ω, $\tilde{\omega}$, ε bestimmt, die in der ersten Näherung konstant, aber in Wirklichkeit Funktionen der Zeit sind. Um die Störungen erster Ordnung zu erhalten, gilt es also, die Gleichungen (XXXIII; 20—22a) mit der Störungsfunktion

$$F = F\,(a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon;\quad a_1, e_1, \tilde{\omega}_1, \varepsilon_1)$$

zu lösen, in der alle zehn Parameter konstant sind. Andererseits ist $F = F_1\,(r, w, s;\ r_1, w_1)$, da $s_1 = \tan b_1 = 0$ ist. Es sei daran erinnert, daß r_1 den Abstand der Sonne von G, dem Massenmittelpunkt zwischen Erde und Mond, bedeutet (s. Abb. 17, S. 404). In Abschnitt 271 bezeichneten wir diesen Abstand mit r_1'.

In F_1 gehören die Koordinaten r, w, s des Mondes in erster Näherung einer ungestörten Ellipse an. Sie sind periodisch mit der Periode $2\pi/n$ und in trigonometrische Reihen entwickelbar, die nach den Sinus oder Kosinus der mittleren Anomalie M fortschreiten. Diese Reihen sind bekannt, ihre Koeffizienten sind Funktionen der Elemente und lassen sich in Potenzreihen nach den kleinen Parametern

$$e \approx 1/18, \quad \eta = \tan i \approx 1/11$$

entwickeln, die wir als klein von der ersten Ordnung ansehen wollen. Im Falle der Sonnenbahn ist $\eta_1 = 0$ und $e_1 \approx 1/60$. Obwohl $e_1^2 \approx 1/3600$ zwischen η^3

und e^3 liegt, also eigentlich von der dritten Ordnung ist, wollen wir der Einfachheit halber auch e_1 zu den Größen erster Ordnung rechnen.

Man kann leicht zeigen, daß r, w, s auf die beiden trigonometrischen Reihen (VII;64) für r/a und (VII;66) für die Mittelpunktsgleichung $\zeta = v - M$ zurückzuführen sind, die man loc. cit. bis zu Termen von der Ordnung e^7 entwickelt findet. Da diese Reihen zur Verfügung stehen, genügt es hier, die Entwicklungen bis zur dritten Ordnung in e und η durchzuführen. Damit wird das Verfahren im Prinzip genügend gekennzeichnet sein.

Aus (VII;64, 66) erhalten wir unter dieser Einschränkung

(XXXIII;23)
$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\cos M - \frac{1}{2}e^2 \cos 2M - \frac{3}{8}e^3 \cos 3M - \cdots,$$

(XXXIII;24)
$$\zeta = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \cdots.$$

Während r durch (XXXIII;23) als Funktion von a, e und M vollständig gegeben ist, hängen die Koordinaten w, s von der Neigung i der Bahnebene ab. In Abb. 18 sei KM die sphärische Spur der Ebene der Mondbahn, M der sphärische Mondort, $u = KM$ das Argument der Breite und $w = \gamma M'$, $b = M'M$ die ekliptikale Länge bzw. Breite des Mondes. Ferner sei $u' = w - \Omega = KM'$ die Projektion von u auf die Ekliptik. Dann ist $u - u'$ die „Reduktion auf die Ekliptik", ein Wert, dessen Betrag (s. Band I, S. 27) $\leqq 0°6.'9$ ist.

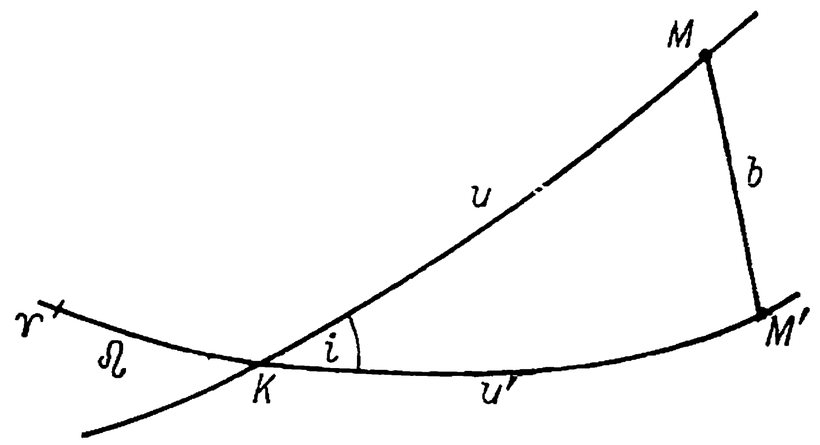

Abb. 18. Intermediäre Mondbahn an der baryzentrischen Sphäre

Aus Abb. 18 leitet man

(XXXIII; 25)
$$\tan u' = \tan u \cos i,$$

(XXXIII; 26)
$$\sin b = \sin u \sin i$$

ab. Um einen Ausdruck für $s = \tan b$ zu finden, benutzt man (XXXIII;26) und erhält, mit $\eta = \tan i$,

$$s = \frac{\sin u \sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 i}} = \frac{\eta \sin u}{\sqrt{1 + \eta^2 \cos^2 u}} =$$

$$= \eta \sin u \left(1 - \frac{1}{2}\eta^2 \cos^2 u + \frac{3}{8}\eta^4 \cos^4 u - \cdots\right)$$

oder, wenn man sich auf Terme bis zur Ordnung η^3 beschränkt,

$$(\text{XXXIII}; 27) \qquad s = \eta \sin u - \frac{1}{8}\eta^3 (\sin u + \sin 3u) + \cdots.$$

Nun ist $u = \tilde{\omega} + v - \Omega$, wenn v die wahre Anomalie des Mondes bezeichnet. Setzt man

$$u_0 = \tilde{\omega} + M - \Omega$$

und nennt diesen Ausdruck das „mittlere Argument der Breite", dann ist

$$u = u_0 + v - M = u_0 + \zeta.$$

Führt man dies in (XXXIII;27) ein, so ergibt sich

$$s = \eta \sin (u_0 + \zeta) - \frac{1}{8}\eta^3 [\sin (u_0 + \zeta) + \sin 3 (u_0 + \zeta)] + \cdots$$

oder endlich, wenn man ζ durch (XXXIII;24) ausdrückt und alle Terme von höherer als dritter Ordnung in e und η vernachlässigt,

$$(\text{XXXIII}; 28) \qquad s = \eta \sin u_0 + 2e\eta \cos u_0 \sin M - e^2\eta \sin u_0 (1 - \cos 2M) + \\ + \frac{5}{4} e^2 \eta \cos u_0 \sin 2M - \frac{1}{8}\eta^3 (\sin u_0 + \sin 3 u_0) + \cdots.$$

Um einen entsprechenden Ausdruck für die ekliptikale Länge w zu finden, schreibe man (XXXIII;25) in der Form

$$\frac{e^{2ju'} - 1}{e^{2ju'} + 1} = \frac{e^{2ju} - 1}{e^{2ju} + 1} \cos i, \quad (j = \sqrt{-1})$$

oder, mit $\sigma = \tan (i/2)$,

$$e^{2ju'} = e^{2ju} \frac{1 + \sigma^2 e^{-2ju}}{1 + \sigma^2 e^{2ju}}.$$

Logarithmiert man, dividiert durch $2j$ und entwickelt nach Potenzen von σ^2, so erhält man

$$(\text{XXXIII}; 29) \qquad u' = u - \sigma^2 \sin 2u + \frac{1}{2}\sigma^4 \sin 4u - \frac{1}{3}\sigma^6 \sin 6u + \cdots.$$

Aus

$$\sigma = \tan \frac{i}{2}; \quad \eta = \tan i = \frac{2\sigma}{1 - \sigma^2}; \quad \sigma^2 + 2\frac{\sigma}{\eta} = 1$$

ergibt sich

$$\sigma = -\frac{1}{\eta} \pm \frac{1}{\eta}\sqrt{1 + \eta^2} = -\frac{1}{\eta} \pm \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \cdots\right)$$

oder, da das positive Zeichen zu nehmen ist, weil σ von der Ordnung η ist,

$$(\text{XXXIII}; 30) \quad \sigma = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{16}\eta^5 - \cdots; \quad \sigma^2 = \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \cdots.$$

Aus (XXXIII; 29, 30) folgt dann

$$w = \Omega + u' = \Omega + u - \frac{1}{4}\eta^2 \sin 2u + \cdots$$

oder, wegen $u = u_0 + \zeta$, $\Omega = \tilde{\omega} + M - u_0$, $M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$,

$$w = nt + \varepsilon + \zeta - \frac{1}{4}\eta^2 \sin 2\,(u_0 + \zeta) + \cdots.$$

Ersetzt man hierin ζ durch (XXXIII;24) und beschränkt sich wiederum auf Terme bis zur dritten Ordnung, so erhält man schließlich

(XXXIII; 31)

$$w = nt + \varepsilon + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \cdots$$

$$-\frac{1}{4}\eta^2 (\sin 2u_0 + 4\, e \cos 2u_0 \sin M) + \cdots.$$

Durch die Reihen (XXXIII;23, 28, 31), die leicht bis zu Termen höherer Ordnung in e und η^2 weiterentwickelt werden können, werden die ungestörten Koordinaten r, w und s als Funktionen von nt, u_0 und M ausgedrückt, die ihrerseits der Zeit proportional sind. Sie sind außerdem Funktionen der Konstanten a, e, $n = \varkappa a^{-3/2}$, $\eta = \tan i$, ε, $\tilde{\omega}$, Ω, die eine intermediäre KEPLERsche Ellipse repräsentieren. Alle periodischen, säkularen und konstanten Terme, die in diesen Formeln auftreten, sind ein für allemal mit den Integrationskonstanten des Problems gegeben und werden im folgenden als „elliptische Terme“ bezeichnet,

276. Ursprung und Beseitigung säkularer Terme

Die Störungsfunktion F, die die durch die Sonne verursachte Störbeschleunigung des Mondes repräsentiert, kann nach (XXXIII;9) genau genug

$$(\text{XXXIII};32) \qquad F = k^2 m_1 \frac{r^2}{{r_1}^3}\left[P_2 + \frac{r}{r_1}P_3 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 P_4 + \cdots\right]$$

geschrieben werden, wenn

$$P_2 = \frac{3}{2}S^2 - \frac{1}{2}; \quad P_3 = \frac{5}{2}S^3 - \frac{3}{2}S; \quad P_4 = \frac{35}{8}S^4 - \frac{15}{4}S^2 + \frac{3}{8}; \cdots$$

die LEGENDREschen Polynome $P(S)$ mit $S = \cos\psi$ darstellen und ψ den Winkel zwischen den baryzentrischen Positionen der Sonne und des Mondes bezeichnet (Abb. 19). Sind $w = \Upsilon M'$, $w_1 = \Upsilon\odot$ die ekliptikalen Längen des Mondes und der Sonne, so ist

$$S = \cos\psi = \cos b \cos(w - w_1)$$

oder, wenn wir, wie in Abschnitt 273 und 275, $s = \tan b$ setzen,

$$S = \frac{\cos(w - w_1)}{\sqrt{1 + s^2}} = \left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 - \frac{5}{16}s^6 + \cdots\right)\cos(w - w_1).$$

Der Faktor $k^2 m_1 r^2 r_1^{-3}$ von F kann, abgesehen von periodischen Termen, durch die Konstante $k^2 m_1 a^2 a_1^{-3}$ angenähert werden. Bei geeigneter Wahl der

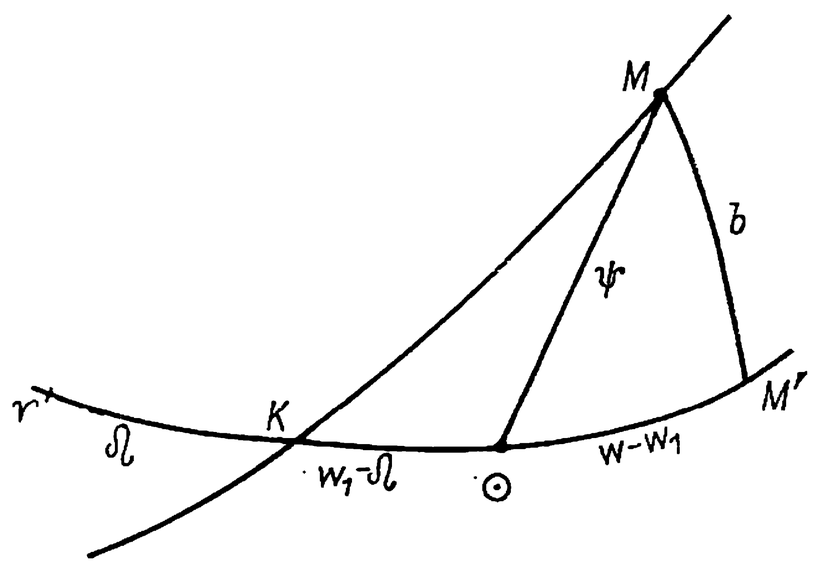

Abb. 19. Instantane Mondbahn (Mondort M und Sonnenort $\odot$ an der baryzentrischen Sphäre)

Einheiten ($k = 1$, $a = 1$, $m_0 + m = 1$) wird dieser Ausdruck mit $n_1^2/n^2 \approx \approx 1/178$ identisch. Da $s \approx 1/11$, $r/r_1 \approx 1/400$ ist, wird man bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen die Entwicklung von P_2 bei dem Gliede mit s^4, die von P_3 bei dem Gliede mit s^2 abbrechen dürfen, während man (s. auch Abschnitt 271) die Terme mit P_4, P_5, ... ganz vernachlässigen kann. Man erhält dann

(XXXIII;33)

$$F = k^2 m_1 \frac{r^2}{4 r_1^3}[1 - 3s^2 + 3s^4 + 3(1 - s^2 + s^4)\cos 2(w - w_1) + \cdots] +$$

$$+ k^2 m_1 \frac{3}{8}\frac{r^3}{r_1^4}\left[\left(1 - \frac{11}{2}s^2\right)\cos(w - w_1) + \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{2}s^2\right)\cos 3(w - w_1) + \cdots\right] + \cdots.$$

Drückt man r, w, s; r_1, w_1 durch ihre elliptischen Werte nach (XXXIII;23, 28, 31) aus, so lassen sich die Differentialgleichungen (XXXIII;20—22a), deren rechte Seiten dann bekannte Funktionen der Zeit sind, nach irgendeinem Näherungsverfahren integrieren und liefern die Koordinaten des Mondes einschließlich der Störungen erster Ordnung durch die Sonne.

Wir werden nun feststellen, daß die Störungen erster Ordnung periodische Terme enthalten, deren Amplituden, wenn auch langsam, proportional der Zeit wachsen, daß diese Terme von säkularem Charakter aber durch eine Modifikation des analytischen Ansatzes vermieden werden können.

Es sei r_0 der elliptische Wert von r. Dann ist in der gestörten Bewegung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \delta u,$$

wo δu ein kleines zeitabhängiges Inkrement von der Ordnung der Störungen bedeutet. Setzt man $r = r_0\ (1 - r_0\delta u + \cdots)$ und vernachlässigt Potenzen von δu, so nimmt die Differentialgleichung (XXXIII;20) für r die Form

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r_0^2 - 2r_0^3\delta u) - \varkappa^2\left(\frac{1}{r_0} + \delta u\right) + \frac{\varkappa^2}{a} = r\frac{\partial F}{\partial r} + 2\int \partial F$$

an. Andererseits gilt für r_0

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}r_0^2 - \varkappa^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{a}\right) = 0,$$

und man erhält als Differenz dieser beiden Gleichungen

$$\text{(XXXIII; 34)} \qquad \frac{d^2}{dt^2}(r_0^3\delta u) + \varkappa^2\delta u = -r\frac{\partial F}{\partial r} - 2\int \partial F.$$

Die rechte Seite läßt sich in eine trigonometrische Reihe

$$\varkappa^2 \sum_{i,j} C_{i,j} \cos\left[(in + jn_1)\,t + D_{i,j}\right]$$

entwickeln, in der i und j ganze Zahlen einschließlich der Null und C, D Funktionen der Bahnelemente des Mondes und der Sonne sind.

Da die Exzentrizität e der Mondbahn klein ist, setzen wir $e\delta u \approx 0$, d. h. $r_0 \approx a$. Dann folgt aus (XXXIII;34), wenn wir durch a^3 dividieren und $\varkappa a^{-3} = n$ setzen,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta u + n^2\delta u = n^2 \sum_{i,j} C_{i,j} \cos\left[(in + jn_1)\,t + D_{i,j}\right].$$

Das ist die Differentialgleichung einer durch periodische Kräfte modulierten Schwingung. Sie besitzt, wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt, das partikuläre Integral

$$\text{(XXXIII; 35)} \qquad \delta u = \sum_{i,j} \frac{n^2 C_{i,j}}{n^2 - (in + jn_1)^2} \cos\left[(in + jn_1)\,t + D_{i,j}\right].$$

Die vollständige Lösung erhält man, indem man die Funktion

$$\chi = a\cos nt + b\sin nt$$

mit willkürlichen Konstanten a und b hinzufügt. Diese Funktion genügt der Differentialgleichung $\ddot{\chi} + n^2\chi = 0$ und kann mit der Lösung der ungestörten Gleichung vereinigt werden.

Wir nehmen nun an, daß die mittleren Bewegungen n, n_1 der beiden Körper nicht kommensurabel seien, was für die Bewegungen von Mond und Sonne zutrifft. Dann gibt es in (XXXIII; 35) keine Terme mit $in + jn_1 = 0$. Es sind dann zwei Fälle möglich:

a) $n \neq in + jn_1$. Dann ist der Nenner des entsprechenden Terms von (XXXIII; 35) von Null verschieden, und es tritt keine Schwierigkeit ein.

b) Wegen der vorausgesetzten Inkommensurabilität ist $n = in + jn_1$ nur möglich, wenn $i = 1$, $j = 0$ sind. Dann verschwindet der Nenner, und der entsprechende Anteil von δu genügt, wenn wir $C_{1,0} = C$, $D_{1,0} = D$ setzen, der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta u + n^2\delta u = n^2\, C \cos(nt + D)$$

mit der partikulären Lösung

$$\text{(XXXIII; 36)} \qquad \delta u = \frac{1}{2}\, C\, nt \sin(nt + D).$$

Die Störungen erster Ordnung von $1/r$ (und demnach auch die von r selbst) enthalten also Terme von der Form $t \sin nt$, $t \cos nt$. Diese Terme sind jedoch, wie schon in Abschnitt 274 erwähnt wurde, durch den besonderen Charakter des mathematischen Ansatzes bedingt und lassen sich durch Änderung der Methode beseitigen. In der Tat läßt sich zeigen, daß die Störungen rein periodisch werden, wenn man als intermediäre Bahn anstelle der festen KEPLERschen Ellipse eine solche mit beweglichen Apsiden- und Knotenlängen wählt.

Um das zu beweisen, versuchen wir zunächst zu klären, warum überhaupt Störungen von der Form (XXXIII; 36), deren Periode $2\pi/n$ ist, durch die Sonne entstehen. Zu diesem Zwecke genügt es, ein stark vereinfachtes Modell zugrunde zu legen: Der Mond möge sich in der Ebene der Ekliptik bewegen ($s = \tan b = 0$), die Bahn der Sonne möge kreisförmig sein ($e_1 = 0$), und die Parallaxe der Sonne möge vernachlässigt werden ($r/r_1 = 0$). Dann reduziert sich (XXXIII; 33) auf

$$F = k^2 m_1 \frac{r^2}{{r_1}^3}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(w - w_1)\right].$$

Setzt man also nach (XXXIII; 12) $k^2 m_1 = {n_1}^2 {a_1}^3$ und auf Grund der obigen Annahmen $r_1 = a_1$, $w_1 = n_1 t + \varepsilon_1$, so wird

$$\text{(XXXIII; 37)} \qquad F = {n^2}_1 r^2\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(w - n_1 t - \varepsilon_1)\right].$$

Der cos-Term liefert aber keinen Beitrag von der Form $\cos(nt + D)$, d. h. keinen von n_1 freien periodischen Term. Solche Terme entstammen also,

wenn überhaupt, dem ersten Gliede von (XXXIII; 37), also dem Anteil $F = {}^1/_4 n_1{}^2 r^2$. Man erhält dann

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} n_1{}^2 r^2; \quad \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F}{dt} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{dt}$$

und daher

$$\int \partial F = \int \frac{\partial F}{dt} dt = \frac{1}{2} n_1{}^2 \int r dr = \frac{1}{4} n_1{}^2 r^2 + \text{const}.$$

Die Differentialgleichung (XXXIII; 20) lautet dann einfacher

$$\text{(XXXIII;38)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} - \varkappa^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = n_1{}^2 r^2 + \text{const},$$

und aus (XXXIII; 21) erhält man mit $s = 0$, $\varrho = r/\sqrt{1+s^2} = r$

$$\text{(XXXIII;39)} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{h}{r^2}.$$

Subtrahiert man (XXXIII; 17) von (XXXIII; 18), so entsteht eine weitere Differentialbeziehung, die aber von (XXXIII; 38, 39) nicht unabhängig sein wird:

$$\text{(XXXIII; 40a)} \qquad \varrho\ddot{\varrho} + z\ddot{z} - \varrho^2 \dot{w}^2 + \frac{\varkappa^2}{r} = k^2 m_1 p = r\frac{\partial F}{\partial r}$$

oder, da $\varrho = r$, $z = 0$, $r\partial F/\partial r = {}^1/_2 n_1{}^2 r^2$ ist,

$$\text{(XXXIII; 40b)} \qquad \frac{\ddot{r}}{r} - \dot{w}^2 + \frac{\varkappa^2}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} n_1{}^2.$$

Die Gleichungen (XXXIII; 39, 40) haben eine partikuläre Lösung, die mit (XXXIII; 38) verträglich sein muß. Wir behaupten, daß

$$r = a(1+\gamma); \qquad w = nt + \varepsilon$$

eine solche Lösung ist, wenn a durch $\varkappa^2 = n^2 a^3$ definiert und γ eine kleine Konstante von der Ordnung der Störungen ist. Dann ist $r = \text{const}$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ und $\dot{w} = h/r^2 = n$. Vernachlässigen wir Potenzen von γ, so folgt aus (XXXIII; 39, 40b)

$$h = na^2(1+2\gamma); \quad -n^2 + n^2(1-3\gamma) = -3n^2\gamma = \frac{1}{2} n_1{}^2$$

und daher[1])

$$\gamma = -\frac{1}{6}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = -\frac{1}{6} m^2 \approx -10^{-3}.$$

---

[1]) Das Symbol $m = n_1/n$, das in der Literatur allgemein benutzt wird, darf nicht mit m = Masse des Mondes verwechselt werden.

Der Mittelwert der Distanz des Mondes in der gestörten Bahn ist also $r = a(1 - {}^1/_6 m^2)$. Das stimmt mit der Formel (XX; 14a) überein, die wir auf anderem Wege gefunden haben. Diese Lösung ist mit (XXXIII; 38) verträglich, da die linke Seite konstant ist und den Wert der Integrationskonstanten auf der rechten Seite bestimmt.

Eine bessere Näherung für r möge nun

$$r = a(1 + \gamma + x)$$

sein, wo x eine kleine periodische Funktion von der Ordnung der Störungen ist. Dann ergibt sich

$$r^2 = a^2 [(1 + \gamma)^2 + 2x(1 + \gamma) + x^2]$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2} = a^2 [\ddot{x}(1 + \gamma + x) + \dot{x}^2] \approx a^2\ddot{x}\,(1 + \gamma),$$

wenn Potenzen und Produkte von x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ vernachlässigt werden. Aus (XXXIII; 38) leitet man dann, mit $\varkappa^2 = n^2a^3$,

$$\ddot{x}(1 + \gamma) + n^2\left(1 - \frac{1}{1 + \gamma + x}\right) - 2{n_1}^2 x\,(1 + \gamma)^2 = \text{const}$$

oder

$$\ddot{x} + n^2\frac{\gamma + x}{(1 + \gamma + x)(1 + \gamma)} - 2{n_1}^2 x\,(1 + \gamma) = \text{const}, \quad ({n_1}^2 = n^2m^2)$$

ab. Entwickelt man den Faktor von $n^2(\gamma + x)$ und vernachlässigt Potenzen von γ, m und x, so folgt

$$\ddot{x} + n^2x\,(1 - 3\gamma - 2m^2) = 0,$$

wenn man die willkürliche Konstante rechts dem konstanten Ausdruck links gleichsetzt. Mit $\gamma = -{}^1/_6 m^2$ ergibt sich dann

$$\ddot{x} + n^2x\left(1 - \frac{3}{2}m^2\right) = 0,$$

eine Differentialgleichung mit der partikulären Lösung

$$x = C\cos(\alpha t + D); \quad \alpha = n\sqrt{1 - \frac{3}{2}m^2} \approx n\left(1 - \frac{3}{4}m^2\right).$$

Da nm^2 sehr klein ist, kann man für ziemlich große Beträge von t genähert

$$x = C\cos\left(nt + D - \frac{3}{4}nm^2t\right) = C\cos(nt + D) + \frac{3}{4}Cnm^2t\sin(nt + D)$$

schreiben, d. h. also, daß bei der Entwicklung von r in eine nach Funktionen der mittleren Anomalie $M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$ fortschreitende Reihe Terme von der Form $t \sin M$, $t \cos M$ auftreten. Aber diese Terme, die ein säkulares Anwachsen der Amplitude vortäuschen, lassen sich auf eine langsame säkulare Abnahme des Phasenwinkels D zurückführen.

Diese heuristische Betrachtung lehrt, daß die Störungen durch die Sonne einen säkularen Effekt haben, der sich dadurch darstellen läßt, daß man die mittlere Anomalie $M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$ durch

$$\text{(XXXIII; 41)} \quad \begin{cases} \varphi = cnt + \varepsilon - \tilde{\omega} = nt + \varepsilon - [\tilde{\omega} + (1 - c)\, nt], \\ c = 1 - \dfrac{3}{4} m^2 \end{cases}$$

ersetzt. Dieser Effekt kann demnach auf zweierlei Weise interpretiert werden: entweder als Verkürzung der mittleren Bewegung durch einen positiven Faktor $c < 1$ oder als ein lineares Fortschreiten des Perigäums mit der Zeit. Die Konstante c wird, wie wir bereits in Abschnitt 176 feststellten, durch $c = 1 - {}^3/_4 m^2$ nur unvollständig dargestellt und würde einen viel zu großen Wert für die Umlaufszeit der Apsiden ergeben. Ein exakter Wert von c ergibt sich erst aus einer vollständigen Mondtheorie durch eine ziemlich langsam konvergierende Reihe

$$1 - c = \frac{3}{4} m^2 + c_3 m^3 + c_4 m^4 + \cdots.$$

Hier weisen wir nur darauf hin, daß $c_3 = 225/32$ zuerst von D'ALEMBERT in seiner „Théorie de la Lune" (1754) angegeben wurde.

Genau entsprechende Überlegungen lassen sich auch auf die Differentialgleichung (XXXIII; 22a) für $s = \tan b$ anstellen. Sie führen zu dem Ergebnis, daß das mittlere Argument der Breite, $u_0 = \tilde{\omega} + M - \Omega = nt + \varepsilon - \Omega$, infolge der Sonnenstörungen in

$$\text{(XXXIII;42)} \quad \begin{cases} \psi = gnt + \varepsilon - \Omega = nt + \varepsilon - [\Omega + (1 - g)\, nt], \\ g = 1 + \dfrac{3}{4} m^2 + \cdots \end{cases}$$

übergeht, d. h., die Knotenlänge nimmt langsam mit der Zeit ab. Die exakte Theorie ergibt

$$1 - g = -\frac{3}{4} m^2 + \frac{9}{32} m^3 - \frac{273}{128} m^4 + \cdots,$$

eine Reihe, die (s. auch Abschnitt 178) viel besser als die für c konvergiert.

Die Einführung der Faktoren c und g in die elliptischen Terme (XXXIII; 23, 28, 31) bedeutet, daß die feste KEPLERsche Ellipse als intermediäre Bahn durch eine solche mit beweglichen Apsiden und Knoten ersetzt wird, die daher bereits einen wichtigen Teil der Störungen einschließt. Diese neue intermediäre Bahn hat den Vorteil, daß in den auf sie bezogenen Störungen die Zeit t nicht mehr außerhalb der Funktionen sin und cos erscheint, d. h., daß säkular-

periodische Glieder in rein periodische übergehen. Ähnliche Überlegungen lassen sich auch auf die sehr langsame Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes anwenden, die (s. Abschnitt 179) durch die sehr langsame Abnahme der Exzentrizität e_1 der Sonnenbahn entsteht. M. MILANKOVIČ[1]) hat durch numerische Integration der Differentialgleichungen für die Variation der Erdbahnelemente über lange Zeiträume festgestellt, daß e_1 zwar gegenwärtig im Abnehmen begriffen ist, aber in Wirklichkeit infolge der säkularen Störungen durch die Planeten unregelmäßige langperiodische Schwankungen ausführt, deren Perioden um einen Mittelwert von rund 10^5 Jahren streuen. Die Exzentrizität der Erdbahn wird also in einigen Zehntausenden von Jahren ein Minimum erreichen und dann wieder zunehmen. Die Beschleunigung der mittleren Mondbewegung ist demnach, in Übereinstimmung mit unseren Betrachtungen über die Stabilität des Sonnensystems in Abschnitt 136, in Wirklichkeit die gegenwärtige Phase einer sehr langperiodischen Erscheinung.

Übrigens ist die durch die säkulare Zunahme von n erzeugte Abnahme der mittleren Mondentfernung außerordentlich gering. Aus $n^2 = \varkappa^2 a^{-3}$ folgt die Variationsgleichung

$$2n\delta n = -3\varkappa^2 a^{-4}\delta a = -3\varkappa^2 n^2 a^{-1}\delta a; \quad \frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\delta n}{n}.$$

Mit $\delta n = 6''/\text{Jhd.}$, $n = 13°.37$, $a = 384 \cdot 10^3$ km ergibt sich

$$\delta a = -87.4 \text{ cm/Jhd.}$$

Wäre die Fallbeschleunigung des Mondes gegen die Erde konstant, so würde die Annäherung des Mondes an die Erde, die proportional t^2 verläuft, in 10^5 Jahren $10^6\,\delta a = 874$ km erreichen. In Wirklichkeit wird dieser Betrag infolge der Abnahme der Fallbeschleunigung nicht erreicht werden.

Ganz anders verhält es sich mit demjenigen Teil der säkularen Beschleunigung von n, der (s. Band II, S. 548) durch die Gezeitenreibung bewirkt wird und dessen Betrag gegenwärtig bei $5''/\text{Jhd.}$ liegen dürfte. Dieser Effekt wird durch die kleine Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit der Erde vorgetäuscht. Die Energie der Erdrotation nimmt also ab, und diese Abnahme wird durch eine Zunahme der Bewegungsenergie des Systems Erde—Mond kompensiert. Diese Energie und ihre Variation sind aber durch

$$E = -\frac{\varkappa^2}{2a}; \quad \delta E = \frac{\varkappa^2}{2a^2}\delta a$$

gegeben, d. h., aus $\delta E > 0$ folgt $\delta a > 0$. Die mittlere Mondentfernung nimmt demnach zu, bis die Gezeitenreibung durch den Mond aufhört, d. h. die Erdrotation der Umlaufszeit des Mondes gleich ist. Jedoch wird dann, vorausgesetzt, daß die physikalischen Bedingungen den heutigen noch vergleichbar sind, die Gezeitenreibung durch die Sonne wirksam bleiben, aber im um-

---

[1]) M. MILANKOVIČ, Kanon der Erdbestrahlung. Belgrad 1941.

gekehrten Sinne: der Abstand des Mondes wird wieder abnehmen, und zwar bis Null. Die Gezeitenreibung ist daher eine der Erscheinungen, die die Stabilität eines himmelsmechanischen Systems zu erschüttern vermögen.

277. Entwicklung der Störungsfunktion

In den Abschnitten 212—216 haben wir die klassische Methode der Entwicklung der Störungsfunktion im Falle des planetaren Dreikörperproblems dargestellt. Explizite führten wir diese Entwicklung bis zu den Termen zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und der gegenseitigen Neigung der beiden Bahnen durch, während die Entwicklung nach Potenzen von $\alpha = a_1/a_2$ durch die LAPLACEschen Koeffizienten $b_k^{(s)}$ bzw. A_k, B_k, ... und deren Ableitungen gegeben ist.

Wie wir bereits in Abschnitt 272 bestätigten, können die Entwicklungen (XXV; 32) des Hauptteils Ψ und (XXV; 43) des Nebenteils ψ der Störungsfunktion ohne weiteres auf die Mondtheorie angewandt werden, wenn wir folgendes beachten:

1. Eine Entwicklung bis zu zweiten Potenzen der kleinen Parameter e_1, e_2, η reicht selbst für eine genäherte Theorie des Mondes nicht aus. Eine genaue Theorie erfordert Berücksichtigung von Termen der fünften und teilweise auch höherer Ordnung.

2. Die Entwicklung der LAPLACEschen Koeffizienten nach Potenzen von α darf, da α sehr klein ist, auf Terme niederer Ordnung beschränkt werden. Im allgemeinen genügt es, diese Reihen bei den Gliedern mit α^3 abzubrechen.

Die Notwendigkeit, Terme höherer Ordnung in den Exzentrizitäten und der Neigung zu berücksichtigen, trägt zu der Schwierigkeit der Mondtheorie entscheidend bei, selbst dann, wenn man sich auf Störungen erster Ordnung beschränkt, also im Argument der Störungsfunktion nur elliptische Terme benutzt. Hier werden wir uns, um den verfügbaren Raum nicht zu überschreiten, mit der expliziten Darstellung der Terme mit e_1, e_2, ${e_1}^2$, ${e_2}^2$, e_1e_2, η^2 und einiger der dritten Ordnung wie $e_1\alpha$, $e_2\alpha$ begnügen, die man aus den Formeln (XXV; 32, 43) direkt ableiten kann, wenn man die obigen Bemerkungen berücksichtigt.

Um die Symbole, die in Kapitel XXV verwendet wurden, denen dieses Kapitels anzugleichen, bezeichnen wir die Masse des Störkörpers mit m_1 (statt m_2), die Exzentrizitäten mit e, e_1 (statt e_1, e_2), die Abstände und großen Halbachsen mit r, r_1; a, a_1 (statt r_1, r_2; a_1, a_2). Ferner führen wir für die Perigäumslängen die Bezeichnungen $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ statt der in (XXV; 32) benutzten Symbole ω_1, ω_2 für die Perihellängen ein. Schließlich bezeichne i (statt J) die gegenseitige Neigung der Bahnebenen, und wir erinnern uns, daß wir in den vorhergehenden Abschnitten $\eta = \tan i$, in Kapitel XXV dagegen $\eta = \sin(i/2)$ gesetzt haben. Nun ist aber $\sin^2(i/2) = {}^1/_4 \tan^2 i - {}^3/_8 \tan^4 i + \cdots$. Vernachlässigen wir also Terme mit $\tan^4 i$, so müssen wir in (XXV; 32) η^2 durch ${}^1/_4\eta^2$ ersetzen.

Entwickelt man die LAPLACEschen Koeffizienten bis zu Termen mit α^3 einschließlich, deren Ableitungen bis zu Termen mit α^2, so erhält man aus (XXIII; 35, 37, 40a) und (XXV; 22)

$$a_1A_0 = 2 + \frac{1}{2}\alpha^2; \quad a_1A_0^{(1)} = \alpha^2; \qquad a_1A_0^{(2)} = \frac{1}{2}\alpha^2; \quad a_1B_0 = 2\alpha + \frac{9}{2}\alpha^3,$$

$$a_1A_1 = \alpha + \frac{3}{8}\alpha^3; \quad a_1A_1^{(1)} = \alpha + \frac{9}{8}\alpha^3; \quad a_1A_1^{(2)} = \frac{9}{8}\alpha^3; \quad a_1B_1 = 3\alpha^2,$$

$$a_1A_2 = \frac{3}{4}\alpha^2; \qquad a_1A_2^{(1)} = \frac{3}{2}\alpha^2; \qquad a_1A_2^{(2)} = \frac{3}{4}\alpha^2; \quad a_1B_2 = \frac{3}{8}\alpha^3,$$

$$a_1A_3 = \frac{5}{8}\alpha^3$$

und kann dann, unter Berücksichtigung der obigen Bemerkungen, die ersten Terme der Störungsfunktion $F = k^2m_1(\Psi - \psi)$ explizite hinschreiben. Dabei ergeben sich zwei bemerkenswerte Tatsachen:

a) Die Terme, die von α frei sind,

$$\frac{1}{a_1}[1 + e_1\cos(\lambda_1 - \tilde{\omega}_1) + {e_1}^2\cos 2(\lambda_1 - \tilde{\omega}_1) + \cdots],$$

hängen ausschließlich von den Bahnelementen der störenden Sonne ab und dürfen fortgelassen werden, da sie zu den partiellen Ableitungen von F nach den Koordinaten des Mondes nicht beitragen.

b) Alle Terme, die den Faktor α in der ersten Potenz enthalten, kommen in Ψ und ψ in der gleichen Form vor und verschwinden daher in der Differenz $\Psi - \psi$.

Alle übrigen Terme haben daher den gemeinsamen Faktor $\alpha^2{a_1}^{-1} = a^2{a_1}^{-3}$, wie wir bereits in Abschnitt 271 festgestellt haben. Die Störungsfunktion hat infolgedessen die Gestalt

(XXXIII; 43)

$$F = k^2m_1\frac{\alpha^2}{a_1}(C_0 + C_1e + C_2e_1 + C_3e^2 + C_4{e_1}^2 + C_5ee_1 + C_6\eta^2 + \cdots),$$

und $C_0, \ldots, C_6$ sind periodische Funktionen der mittleren Längen λ, λ_1, der Perigäumslängen $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1$ und der Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = \tau$ (s. Abschnitt 199). Da wir beabsichtigen, Terme mit α^3 noch mitzunehmen, so folgt, daß die C_i teilweise linear von α abhängen. Das entspricht unserer Vereinbarung, die Glieder mit $P_4, P_5, \ldots$ in (XXXIII; 9) zu vernachlässigen, aber diejenigen mit P_3 noch zu berücksichtigen. Ferner erinnern wir uns, daß der Faktor $\alpha = a/a_1$ dieses Terms mit $1 - 2\beta = (m_0 - m)/(m_0 + m)$ multipliziert zu denken ist. Wir machen aber hiervon im folgenden keinen Gebrauch, da dieser Faktor Terme höherer Ordnung einführt, auf die in unserer genäherten Darstellung der Theorie ohnehin verzichtet wird.

Mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen ist es leicht, aus (XXV; 32) die Formel (XXXIII; 43) mit Einschluß der Terme mit α^3 abzuleiten. Wir werden daher C_0, C_1 und C_2 einschließlich der Glieder mit α entwickeln, $C_3, \ldots, C_6$, die mit Termen zweiter Ordnung in den kleinen Parametern e, e_1 und mit η^2 multipliziert sind, aber auf die von α unabhängigen Anteile beschränken. Dann folgt

(XXXIII; 44)

$$
\begin{cases}
C_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(\lambda - \lambda_1) + \frac{3}{8}\alpha\cos(\lambda - \lambda_1) + \\
\qquad + \frac{5}{8}\alpha\cos 3(\lambda - \lambda_1) + \cdots, \\
C_1 = -\frac{1}{2}\cos(\lambda - \tilde{\omega}) + \frac{3}{4}\cos(3\lambda - 2\lambda_1 - \tilde{\omega}) - \\
\qquad - \frac{9}{4}\cos(2\lambda_1 - \lambda - \tilde{\omega}) - \frac{15}{16}\alpha\cos(\lambda_1 - \tilde{\omega}) - \\
\qquad - \frac{3}{16}\alpha\cos(2\lambda - \lambda_1 - \tilde{\omega}) + \cdots, \\
C_2 = \frac{3}{4}\cos(\lambda_1 - \tilde{\omega}_1) + \frac{21}{8}\cos(3\lambda_1 - 2\lambda - \tilde{\omega}_1) - \\
\qquad - \frac{3}{8}\cos(2\lambda - \lambda_1 - \tilde{\omega}_1) + \\
\qquad + \frac{9}{8}\alpha\cos(2\lambda_1 - \lambda - \tilde{\omega}_1) + \\
\qquad + \frac{3}{8}\alpha\cos(\lambda - \tilde{\omega}_1) + \cdots, \\
C_3 = \frac{3}{8} - \frac{15}{8}\cos 2(\lambda - \lambda_1) - \frac{1}{8}\cos 2(\lambda - \tilde{\omega}) + \\
\qquad + \frac{15}{8}\cos 2(\lambda_1 - \tilde{\omega}) + \frac{3}{4}\cos(4\lambda - 2\lambda_1 - 2\tilde{\omega}) + \cdots. \\
C_4 = \frac{3}{8} - \frac{15}{8}\cos 2(\lambda - \lambda_1) + \frac{9}{8}\cos 2(\lambda_1 - \tilde{\omega}_1) + \\
\qquad + \frac{51}{8}\cos(4\lambda_1 - 2\lambda - 2\tilde{\omega}_1) + \cdots, \\
C_5 = -\frac{3}{4}\cos(\lambda + \lambda_1 - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) - \\
\qquad - \frac{63}{8}\cos(3\lambda_1 - \lambda - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) - \\
\qquad - \frac{3}{8}\cos(3\lambda - \lambda_1 - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) -
\end{cases}
$$

$$
\text{(XXXIII; 44)}\quad
\begin{cases}
& -\frac{3}{4}\cos(\lambda_1-\lambda+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)+\\
& +\frac{9}{4}\cos(3\lambda_1-3\lambda+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)+\\
& +\frac{3}{2}\cos(\lambda-\lambda_1+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)+\cdots,\\
C_6=\frac{3}{8}[&-1-\cos 2(\lambda-\lambda_1)+\cos 2(\lambda-\tau)+\\
& +\cos 2(\lambda_1-\tau)+\cdots].
\end{cases}
$$

Die Formel (XXXIII; 43) enthält, wenn wir e und e_1 als Größen erster, aber α, η^2 als solche zweiter Ordnung ansehen, Terme bis zur dritten Ordnung, aber nicht sämtliche, da z. B. Glieder mit e^3 in dieser Entwicklung noch fehlen. Diese unvollständige Formel, die in einer vollständigen Theorie noch bis zu Termen der fünften Ordnung erweitert werden müßte, genügt aber, die hauptsächlichen Eigenschaften der Mondbewegung im Prinzip zu erläutern.

Die Summe der Koeffizienten jedes der cos-Argumente ist Null, da der Anfangspunkt der Längenzählung noch willkürlich festgelegt werden kann. Wir dürfen daher die fünf Längen λ, λ_1, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ und $\tau = \Omega$ durch vier Differenzen, z. B.

$$\lambda-\lambda_1;\quad \lambda-\tilde{\omega};\quad \lambda_1-\tilde{\omega}_1;\quad \lambda-\Omega$$

ersetzen. Wenn wir dies tun, so können wir den in Abschnitt 276 vorgeschlagenen Kunstgriff anwenden, nämlich $\tilde{\omega}$ und Ω durch

$$\text{(XXXIII; 45)}\quad \tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0+(1-c)\,nt;\quad \Omega=\Omega_0+(1-g)\,nt$$

ausdrücken. Wir schreiben dann

$$\text{(XXXIII; 46)}\quad \xi=\lambda-\lambda_1;\quad \varphi=\lambda-\tilde{\omega};\quad \varphi_1=\lambda_1-\tilde{\omega}_1;\quad \psi=\lambda-\Omega,$$

wobei $\tilde{\omega}$, Ω und daher auch φ, ψ als langsam veränderliche lineare Funktionen der Zeit t durch (XXXIII; 45) definiert sind. Führt man (XXXIII; 46) in (XXXIII; 44) ein, so erhält man

(XXXIII; 47)

$$
\begin{aligned}
F=k^2m_1\frac{a^2}{{a_1}^3}\Big[&\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2\xi+\frac{3}{8}\alpha\cos\xi+\frac{5}{8}\alpha\cos 3\xi+\cdots+\\
&+e\Big\{-\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{3}{4}\cos(2\xi+\varphi)-\frac{9}{4}\cos(2\xi-\varphi)-\frac{15}{16}\alpha\cos(\xi-\varphi)-\\
&-\frac{3}{16}\alpha\cos(\xi+\varphi)+\cdots\Big\}+
\end{aligned}
$$

$$+ e_1\left\{\frac{3}{4}\cos\varphi_1 + \frac{21}{8}\cos(2\xi-\varphi_1) - \frac{3}{8}\cos(2\xi+\varphi_1) + \frac{9}{8}\alpha\cos(\xi-\varphi_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\alpha\cos(\xi+\varphi_1) + \cdots\right\} +$$
$$+ e^2\left\{\frac{3}{8} - \frac{15}{8}\cos 2\xi - \frac{1}{8}\cos 2\varphi + \frac{15}{8}\cos 2(\xi-\varphi) + \frac{3}{4}\cos 2(\xi+\varphi) + \cdots\right\} +$$
$$+ e_1{}^2\left\{\frac{3}{8} - \frac{15}{8}\cos 2\xi + \frac{9}{8}\cos 2\varphi_1 + \frac{51}{8}\cos 2(\xi-\varphi_1) + \cdots\right\} +$$
$$+ ee_1\left\{-\frac{3}{4}\cos(\varphi+\varphi_1) - \frac{63}{8}\cos(2\xi-\varphi-\varphi_1) - \frac{3}{8}\cos(2\xi+\varphi+\varphi_1) - \right.$$
$$- \frac{3}{4}\cos(\varphi-\varphi_1) + \frac{9}{4}\cos(4\xi-\varphi+\varphi_1) + \frac{3}{2}\cos(2\xi-\varphi+\varphi_1) + \cdots\Big\} +$$
$$\left. + \frac{3}{8}\eta^2\{-1-\cos 2\xi + \cos\psi + \cos 2(\xi-\psi) + \cdots\}\right].$$

Wir haben diese neue Form der Störungsfunktion erhalten, indem wir als intermediäre Bahn anstelle der festen KEPLERschen Mondbahnellipse eine solche mit beweglichen Apsiden und Knoten einführten. Die mit Hilfe dieser intermediären Lösung erzielten Störungen erster Ordnung werden dann keine säkular-periodischen Terme mehr enthalten, in denen die Zeit außerhalb der Funktionen sin und cos auftritt. Dazu wird es allerdings nötig sein, exakte Werte der Konstanten c und g zu ermitteln, was wiederum erst nach und nach im Laufe der Entwicklung einer vollständigen Theorie möglich sein wird.

278. Ableitung und Eigenschaften der Ausdrücke für die störenden Kräfte

Zur besseren Übersicht stellen wir die Differentialgleichungen (XXXIII; 20, 21, 22a) für r, w, s noch einmal zusammen:

(XXXIII; 48)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \dfrac{d^2r^2}{dt^2} - \varkappa^2\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{a}\right) = r\dfrac{\partial F}{\partial r} + 2\int \partial F = Q_r, \\ \text{b)} \quad \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{1+s^2}{r^2}\left(\int \dfrac{\partial F}{\partial w}\,dt + h\right) = Q_w, \\ \text{c)} \quad \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\dfrac{rs}{\sqrt{1+s^2}} = \\ \qquad = \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\sqrt{1+s^2}}{r}\dfrac{\partial F}{\partial s} = Q_s. \end{cases}$$

Die rechten Seiten enthalten die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion F nach r, w, s und, in

$$\partial F = \frac{\partial F}{\partial r}\,dr + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw + \frac{\partial F}{\partial s}\,ds = dF - \frac{\partial F}{\partial r_1}\,dr_1 - \frac{\partial F}{\partial w_1}\,dw_1,$$

auch diejenigen nach r_1, w_1. Im folgenden wählen wir die Einheiten durchweg so, daß $\varkappa^2 = 1$ und $n^2a^3 = 1$ sind. Dann ist a durch n, eine aus Beobachtungen sehr genau bekannte Größe, definiert. Die Gleichung (XXXIII; 48c) hat wegen $z = r \sin b = rs/\sqrt{1+s^2}$ die Gestalt $\ddot{z} + zr^{-3} = Q_s$, gehört also zu denjenigen für die rechtwinkligen Koordinaten einer durch schwache Kräfte gestörten Zweikörperbewegung und kann durch irgendeine der früher beschriebenen Methoden approximativ gelöst werden, sofern die Gleichungen für r und w (die letztere vorerst mit $s = 0$) gelöst worden sind. Wir beschränken uns hier auf die Diskussion dieser ersten beiden Gleichungen (XXXIII; 48), in denen die charakteristischen Probleme der Mondtheorie besonders deutlich sichtbar werden und in deren Lösung die wichtigsten Anomalien der Mondbewegung erscheinen.

Wir schreiben (XXXIII; 33 und 47) abgekürzt

$$F = F_1 + F_2 + \cdots = k^2 m_1 \frac{r^2}{{r_1}^3} f_1 + k^2 m_1 \frac{r^3}{{r_1}^4} f_2 + \cdots =$$

$$= k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}^3} g_1 + k^2 m_1 \frac{a^3}{{a_1}^4} g_2 + \cdots,$$

wo die $f_i = f_i(s, w - w_1)$ frei von r, r_1 und die g_i frei von a, a_1 sind. Dann ist

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = a\frac{\partial F}{\partial a} = 2F_1 + 3F_2 + 4F_3 + \cdots,$$

$$r_1\frac{\partial F}{\partial r_1} = a_1\frac{\partial F}{\partial a_1} = -(3F_1 + 4F_2 + 5F_3 + \cdots).$$

Ferner folgt aus (XXXIII; 31) mit $\lambda = nt + \varepsilon$, $\lambda_1 = n_1 t + \varepsilon_1$

$$w = \lambda + f(e, \eta^2, M, u_0); \quad w_1 = \lambda_1 + \zeta_1(e_1, M_1)$$

und daher

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial F}{\partial w_1} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}.$$

Wegen $\xi = \lambda - \lambda_1$ ist also

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -\frac{\partial F}{\partial w_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi}.$$

Infolgedessen ist

$$Q_r = (2F_1 + 3F_2 + \cdots) + 2\left[F + \int (3F_1 + 4F_2 + \cdots)\frac{dr_1}{r_1} + \int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dw_1\right] =$$

$$= 4F_1 + 5F_2 + \cdots + 2\int (3F_1 + 4F_2 + \cdots)\frac{dr_1}{r_1} + 2\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dw_1,$$

$$Q_w = \frac{1 + s^2}{r^2}\left(\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dt + h\right).$$

Aus (XXXIII; 23, 24) folgt

$$\frac{1}{a_1}\frac{dr_1}{r_1} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial (r_1/a_1)}{\partial M_1}\, n_1 dt; \quad dw_1 = \left(1 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial M_1}\right) n_1 dt.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke, die der (als ungestört anzusehenden) Sonnenbewegung angehören, in trigonometrische Reihen nach M_1, so erhält man leicht

(XXXIII; 49)
$$\begin{cases} \dfrac{dr_1}{r_1} = n_1\left(e_1 \sin M_1 + \dfrac{3}{2}\, {e_1}^2 \sin 2M_1 + \cdots\right) dt, \\ dw_1 = n_1\left(1 + 2e_1 \cos M_1 + \dfrac{5}{2}\, {e_1}^2 \cos 2M_1 + \cdots\right) dt \end{cases}$$

explizite bis zu Termen mit ${e_1}^2$.

a) *Diskussion der Differentialgleichung für r.* Die Gleichung (XXXIII; 48a) erhält eine in erster Näherung lineare Form, wenn man sie für $1/r$ umschreibt. Das ist wichtig, da $1/r$ der variable Bestandteil von $\sin \pi_\mathbb{C} = R/r$, dem Sinus der Mondparallaxe (R = Äquatorhalbmesser der Erde), ist. Setzt man, wie in Abschnitt 276,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + x,$$

wo $x = \delta(1/r)$ eine kleine Variable von der Ordnung der Störungen ist, so folgt

$$r^2 = {r_0}^2 - 2{r_0}^3 x + 3{r_0}^4 x^2 - 4{r_0}^5 x^3 + \cdots$$

oder aus (XXXIII; 48a), wenn im folgenden Ableitungen nach der Zeit durch Striche bezeichnet werden,

(XXXIII; 50) $$\frac{1}{2}\left[({r_0}^2)'' - 2({r_0}^3 x)'' + 3({r_0}^4 x^2)'' - \cdots\right] - \left(\frac{1}{r_0} + x\right) + \frac{1}{a} = Q_r.$$

De Pontécoulant setzt zur Abkürzung

$$P = -({r_0}^3 - a^3)\, x + \frac{3}{2}\,({r_0}^4 x^2) - 2({r_0}^5 x^3) + \cdots.$$

Dann kann man (XXXIII; 50), indem man mit $a^{-3} = n^2$ multipliziert, in der Form

$$(\text{XXXIII}; 51) \qquad x'' + n^2 x = n^2 \left[\frac{1}{2} (r_0^2)'' - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{a} \right) + P'' - Q_r \right] = n^2 G$$

schreiben. Das ist eine lineare Differentialgleichung für $x = \delta(1/r)$, die jedoch rechts noch Glieder mit x enthält, die aber von höherer Ordnung sind. Würden wir r_0, w_0 als Koordinaten einer festen KEPLERschen Ellipse betrachten, so wäre die Summe der beiden ersten Terme rechts gleich Null. Das ist aber für die intermediäre Bahn mit beweglichen Apsiden und Knoten nicht der Fall. Man wird dann G anstatt in trigonometrische Reihen nach $\xi = \lambda - \lambda_1$, M, u_0, M_1 in solche nach $\xi, \varphi, \psi; \varphi_1 = M_1$ entwickeln. Diese Reihen enthalten Terme mit den gleichen Argumenten, die in (XXXIII; 47) vorkommen, aber auch andere, die entstehen, wenn man $F_1, F_2, \ldots$ und $\partial F/\partial \xi$ mit den Reihen (XXXIII; 49) multipliziert, in denen M_1 durch φ_1 (das ja nur eine andere Bezeichnung für M_1 ist) ersetzt werden muß.

Wie F in (XXXIII; 47), enthält auch G neben dem Hauptfaktor

$$k^2 m_1 \frac{a^2}{{a_1}^3} = {n_1}^2 a^2 = \frac{m^2}{a}; \qquad m = \frac{n_1}{n},$$

in dem $\alpha = a/a_1$ formal verschwindet bzw. durch die sehr genau bekannte Konstante m ersetzt worden ist, Gruppen von Termen mit den „charakteristischen Faktoren“

$$(\text{XXXIII}; 52) \qquad 1; \quad e, e_1; \quad e^2, ee_1, {e_1}^2, \eta^2; \quad e^3, e^2 e_1, \ldots$$

und, in $F_2, F_3, \ldots$, andere, die auch $\alpha, \alpha^2, \ldots$ enthalten.

Vernachlässigen wir die Terme in G, die x enthalten, so hat die rechte Seite von (XXXIII; 51) die Form

$$n^2 \sum_i C_i \cos(k_i t + D_i),$$

und diese Gleichung hat nach (XXXIII; 35) die partikuläre Lösung

$$x = n^2 \sum_i \frac{C_i}{n^2 - {k_i}^2} \cos(k_i t + D_i).$$

Man erhält also die Lösung nach und nach, indem man aus G sukzessive einzelne Terme $C_i \cos(k_i t + D_i)$ oder auch Gruppen von Termen, die einen der charakteristischen Faktoren (XXXIII; 52) enthalten, herausgreift und diese Teillösungen addiert. Diese Aufspaltung in partielle Lösungen ist wichtig, da dann das Näherungsverfahren, bei dem die bisher vernachlässigten Terme mit $x, x^2, \ldots$ in G nach und nach berücksichtigt werden müssen, sehr vereinfacht wird. Wir werden in den nächsten Abschnitten diese Methode an ausgewählten Beispielen demonstrieren, die besonders einfach und lehrreich sind. Hier begnügen wir uns mit einigen wichtigen Bemerkungen:

1. In einigen Termen ist k_i klein gegen n, z. B. in dem mit $e_1 \cos \varphi_1$ in F_1, denn es ist $\varphi_1 = M_1 = n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1$, $n_1 = (n_1/n)n = mn$, also $k_i = mn$, $n^2 - k_i^2 = n^2(1 - m^2)$. Diese Terme bereiten keine Schwierigkeit, da die Ordnung von x_i die gleiche wie die von C_i bleibt.

2. In anderen Termen ist $n - k_i$ klein von der Ordnung der Störungen, z. B. in dem mit $ee_1 \cos(2\xi - \varphi + \varphi_1)$ in F_1, denn es ist

$$2\xi - \varphi + \varphi_1 = \lambda - \lambda_1 + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1$$

oder wegen $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + (1 - c)\, nt$, $\lambda - \lambda_1 = (1 - m)\, nt + \varepsilon - \varepsilon_1$

$$2\xi - \varphi + \varphi_1 = \left(1 - m + \frac{3}{4} m^2 + \cdots\right) nt + \text{const},$$

wenn wir, wie in Abschnitt 276, $1 - c = {}^3/_4 m^2 + \cdots$ setzen. Daher ist

$$n^2 - k_i^2 = n^2 \left(2m - \frac{5}{2} m^2 + \cdots\right)$$

klein von der Ordnung m. Durch die Integration wird also die Ordnung dieses Gliedes um 1 herabgesetzt.

3. Es kommt auch vor, daß $k_i = n$ ist, z. B. in dem Term $e_1 \alpha \cos(\xi + \varphi_1)$, der zu F_2 gehört. Hier ist

$$\xi + \varphi_1 = \lambda - \lambda_1 + (\lambda_1 - \tilde{\omega}_1) = nt + \text{const}.$$

In diesem Falle würde die Differentialgleichung $x'' + n^2 x = n^2 C \cos(\xi + \varphi_1)$ eine Lösung von der Form (XXXIII; 36) haben, d. h., die Amplitude hätte die Zeit t als Faktor. In Wirklichkeit trifft das nicht zu, da G ja Terme mit x, x^2, ... enthält. Bringt man diese Terme oder einige von ihnen auf die linke Seite, so erhält man

$$x'' + n^2(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\, x = x'' + n^2(1 + \nu)\, x = n^2 H,$$

wo ν, ebenso wie x, von der Ordnung m^2 ist. Enthält also H einen Term mit $\cos(nt + D)$, so wird in x der entsprechende Term

$$\frac{n^2 C}{n^2(1 + \nu) - n^2} \cos(nt + D) = \frac{C}{\nu} \cos(nt + D)$$

erscheinen. Die Amplitude bleibt also endlich, ihre Ordnung wird aber um die von m^2 herabgesetzt sein.

b) *Diskussion der Gleichung für w.* Wir bezeichnen mit w_0, h_0 die (modifizierten) elliptischen Werte von w und h. Dann ist

$$w = w_0 + \delta w; \quad h = h_0 + \delta h.$$

Vernachlässigen wir fürs erste s^2, so kann die Differentialgleichung (XXXIII; 48 b),

$$w_0' + (\delta w)' = \left(\frac{1}{r_0} + x\right)^2 \left(\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dt + h_0 + \delta h\right),$$

oder

(XXXIII; 53)

$$(\delta w)' = \left(\frac{1}{{r_0}^2} + 2\frac{x}{r_0} + x^2\right)\left(\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dt + h_0 + \delta h\right) - {w_0}' =$$

$$= \frac{h_0}{{r_0}^2} - {w_0}' + \left(\frac{1}{{r_0}^2} + 2\frac{x}{r_0} + x^2\right)\left(\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dt + \delta h\right) + \left(2\frac{x}{r_0} + x^2\right) h_0$$

geschrieben werden. Die rechte Seite ist von der Ordnung der Störungen. Der Term $h_0 r_0^{-2} - {w_0}'$, mit $h_0 = \sqrt{a_0(1 - {e_0}^2)} \cos i_0$, würde wegen (XXXIII; 39) verschwinden, wenn die intermediäre Bahn eine feste KEPLERsche Ellipse wäre. Da aber r_0, w_0 modifizierte elliptische Koordinaten sind, wird diese Differenz, wie alle Störungen, von der Ordnung m^2 sein.

Die Gleichung (XXXIII; 53) enthält zwei Unbekannte, δw und δh. Aber die letztere ist eine Konstante, über die noch willkürlich verfügt werden kann. Wir werden das im nächsten Abschnitt tun. Im übrigen enthält die rechte Seite periodische Terme mit denselben Argumenten, die auch in F und x vorkommen. Man erhält dann δw durch eine einfache Integration, die Terme vom Typus $(1/k)\, C \sin(kt + D)$ liefert.

Wenn k klein gegen n ist, so wird also die Ordnung der Amplitude durch die Integration um die Ordnung von k herabgesetzt werden. Für Terme mit kleinem k in $\int (\partial F/\partial \xi)\, dt$, die eine doppelte Integration erfordern, wird aber die Ordnung um zwei Ordnungen k vermindert werden. Die Länge w spricht daher besonders empfindlich auf gewisse periodische Störungen an.

279. Berechnung der Terme, die nur von m abhängen

Unter den Teillösungen der Differentialgleichungen (XXXIII; 51, 53) für $x = \delta(1/r)$ und δw ist die einfachste diejenige, für die die rechten Seiten frei von den charakteristischen Parametern e, e_1, η^2 und α sind, d. h., wir betrachten die intermediären Bahnen des Mondes und der Sonne als Kreise in der gleichen Ebene und vernachlässigen die Parallaxe der Sonne, also die in den Koeffizienten C_i in (XXXIII; 44) auftretenden Terme mit $\alpha = a/a_1$. Andererseits ist der Hauptfaktor der Störungsfunktion, $k^2 m_1 \alpha^2/a_1 = m^2/a$, formal von α unabhängig, da wir in ihm statt α die Größe

$$m = \frac{n_1}{n} = 0.074\,801\,33 \approx 1/13.37$$

eingeführt haben, die von der gleichen Ordnung wie die Exzentrizitäten und die Neigung ist und die sehr genau aus Beobachtungen bestimmbar ist und daher eine wichtige Konstante in der Mondtheorie darstellt.

In der Folge werden wir die Längeneinheit so wählen, daß $a = 1$ und daher auch $n = 1$ ist. Dann reduziert sich für unser Teilproblem die Störungsfunktion auf

$$\text{(XXXIII; 54)} \quad F = F_1 = \frac{m^2}{4}(1 + 3\cos 2\xi); \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{3}{2}m^2 \sin 2\xi,$$

und in den intermediären Bahnen ist dann

$$r_0 = a = 1; \quad w_0 = nt + \varepsilon = t + \varepsilon; \quad r_1 = a_1; \quad w_1 = n_1 t + \varepsilon_1 = mt + \varepsilon_1.$$

Hieraus und aus $\xi = \lambda - \lambda_1$ folgt

$$dr_1 = 0; \quad dw_1 = m dt; \quad \xi = (1 - m)\, t + \varepsilon - \varepsilon_1$$

und daher

$$Q_r = m^2(1 + 3\cos 2\xi) - 3m^3 \int \sin 2\xi \, dt =$$

$$= m^2(1 + 3\cos 2\xi) + \frac{3}{2}\frac{m^3}{1 - m}\cos 2\xi + \gamma,$$

wo γ eine Integrationskonstante bezeichnet, über die noch verfügt werden kann. Ferner ist mit $x = \delta(1/r)$

$$P'' = \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \cdots\right]''$$

und daher wegen (XXXIII; 51)

$$\text{(XXXIII; 55)} \quad x'' + x = P'' - Q_r =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \cdots\right]'' - (m^2 + \gamma) -$$

$$- \frac{3}{2}m^2 \frac{2 - m}{1 - m}\cos 2\xi = a_0 + a_2 \cos 2\xi.$$

Vernachlässigt man in erster Näherung Terme der Ordnung m^4 (wie x^2) und daher auch P'', so hat diese Gleichung die partielle Lösung

$$\text{(XXXIII; 56)} \quad x = b_0 + b_2 \cos 2\xi = a_0 + \frac{a_2}{1 - 4(1 - m)^2}\cos 2\xi$$

mit

$$\text{(XXXIII; 57)} \quad \begin{cases} b_0 = a_0 = -(m^2 + \gamma), \\ b_2 = \dfrac{m^2\left(1 - \frac{1}{2}m\right)}{(1 - m)\left(1 - \frac{8}{3}m + \frac{4}{3}m^2\right)} = m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{137}{18}m^4 + \cdots. \end{cases}$$

Diese Lösung ist bis zu Gliedern mit m^3 genau. Der Term mit m^4 ist unvollständig, da wir in (XXXIII; 55) x^2 vernachlässigt haben, wodurch ein kleiner zusätzlicher Term von der Ordnung m^4 unberücksichtigt geblieben ist.

Dieser zusätzliche Term ist offensichtlich von γ abhängig. Bevor wir uns entschließen, welchen Wert wir dieser willkürlichen Konstanten zubilligen wollen, lösen wir zunächst die Gleichung für die Länge w unter den gleichen Einschränkungen wie oben. Aus (XXXIII; 53) folgt, mit $e = \eta = 0$, $h_0 = a = 1$, $r_0 = w_0' = 1$,

$$(\delta w)' = \int \frac{\partial F}{\partial \xi}\, dt + 2x + \delta h,$$

wenn wir rechts Terme der Ordnung m^4 vernachlässigen. Dann ist

$$(\delta w)' = \frac{3}{2} m^2 \frac{\cos 2\xi}{2(1-m)} + 2(b_0 + b_2 \cos 2\xi) + \delta h$$

und nach Integration

$$\delta w = (2b_0 + \delta h)\, t + \left(\frac{3}{8}\frac{m^2}{(1-m)^2} + \frac{b_2}{1-m}\right) \sin 2\xi + \beta$$

mit β als Integrationskonstante. Da aber

$$w = w_0 + \delta w = t + \varepsilon + \delta w$$

ist, dürfen wir β mit ε vereinigen, das ja auch eine willkürliche (d. h. von den jeweils gewählten Anfangsbedingungen des Problems abhängige) Konstante ist. Wir setzen daher $\beta = 0$.

Auch das Inkrement δh ist frei wählbar. Wir setzen es so fest, daß die mittlere Bewegung $n = 1$ in der gestörten und der intermediären Bewegung den gleichen Wert hat, d. h., daß δw nur periodische Glieder hat. Dann ist

$$\delta h = -2b_0 = 2(m^2 + \gamma)$$

und

(XXXIII; 58) $$\delta w = \left(\frac{11}{8} m^2 + \frac{59}{12} m^3 + \cdots\right) \sin 2\xi.$$

Es bleibt noch δh bzw. γ als Funktion von m zu bestimmen. Das gelingt mit Hilfe der Identität (XXXIII; 40a), die für $\varrho = r$, $z = 0$, $\varkappa^2 = 1$, und wenn man F auf den Anteil (XXXIII; 54) beschränkt, die Form

$$\frac{r''}{r} - (w')^2 + \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$$

annimmt. Bis zu Gliedern mit m^3 ist dann

$$w' = 1 + (\delta w)' = 1 + \left(\frac{11}{4} + \frac{59}{6} m\right) m^2 (1-m) \cos 2\xi,$$

$$(w')^2 = 1 + m^2 \left(\frac{11}{2} + \frac{85}{6} m\right) \cos 2\xi.$$

Ferner gilt, da x^2 von der Ordnung m^4 ist,

$$\frac{1}{r} = 1 + x; \quad r'' = (1 - x + x^2 - \cdots)'' = -x'',$$

$$\frac{r''}{r} = 4b_2(1 - m)^2 \cos 2\xi; \quad \frac{1}{r^3} = 1 + 3x = 1 + 3(b_0 + b_2 \cos 2\xi),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{2}{r^2} F_1 = \frac{m^2}{2}(1 + 3 \cos 2\xi).$$

Mit diesen Werten und mit (XXXIII; 57) folgt

$$4m^2\left(1 + \frac{19}{6}m\right)(1 - 2m) \cos 2\xi - 1 - m^2\left(\frac{11}{2} + \frac{85}{6}m\right)\cos 2\xi +$$

$$+ 1 - 3(m^2 + \gamma) + 3m^2\left(1 + \frac{19}{6}m\right)\cos 2\xi = \frac{1}{2}m^2(1 + 3 \cos 2\xi).$$

Vernachlässigen wir den links auftretenden Term mit m^4, so erweisen sich die Koeffizienten von $\cos 2\xi$ auf beiden Seiten als gleich, wodurch die Richtigkeit der Rechnung bestätigt wird. Die Gleichsetzung der konstanten Terme liefert aber

$$\gamma = -\frac{7}{6}m^2; \qquad \delta h = 2(m^2 + \gamma) = -\frac{1}{3}m^2,$$

und es ist daher

(XXXIII; 59) $$\delta\left(\frac{1}{r}\right) = x = \frac{1}{6}m^2 + \left(m^2 + \frac{19}{6}m^3\right)\cos 2\xi.$$

Diese Ergebnisse stimmen mit denen des Abschnitts 276 überein, wo wir auch periodische Terme in F ausgeschlossen hatten. Wir erhielten dort, mit $a = n = 1$, $h_0 = 1$,

$$r = 1 - x = 1 - \frac{1}{6}m^2; \quad h = 1 + \delta h = 1 - \frac{1}{3}m^2.$$

Die Störungen (XXXIII; 58, 59) sind bis zu Termen mit m^3 genau. Es ist nicht schwierig, diese Formeln bis zu höheren Ordnungen auszudehnen, wenn man die bisher vernachlässigten Terme mit $x^2, x^3, \ldots$ in aufeinanderfolgenden Näherungen nach und nach berücksichtigt. Bis zur Ordnung m^4

erhält man[1])

$$\text{(XXXIII; 60)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{6}m^2 - \dfrac{179}{288}m^4 + \left(m^2 + \dfrac{19}{6}m^3 + \dfrac{131}{18}m^4\right)\cos 2\xi + \\ \qquad + \dfrac{7}{8}m^4 \cos 4\xi, \\ w = t + \varepsilon + \left(\dfrac{11}{8}m^2 + \dfrac{59}{12}m^3 + \dfrac{893}{72}m^4\right)\sin 2\xi + \dfrac{201}{256}m^4 \sin 4\xi \end{cases}$$

für die von e, e_1, η^2 und α unabhängige Teillösung.

Bei der Erweiterung der Analyse bis zu höheren Ordnungen benutzen wir immer dieselben Regeln wie oben, nämlich:

1. Die mittlere Bewegung n der intermediären Bewegung wird immer der „mittleren mittleren Bewegung" des Mondes gleichgesetzt, die aus Beobachtungen während langer Zeiträume genau bekannt ist und daher die Bedeutung einer Integrationskonstanten des gestörten Problems erlangt hat. Dann ist wegen $n^2a^3 = 1$ auch die mittlere große Halbachse der gestörten Mondbahn eine wohlbestimmte Größe.

2. Bei jeder Näherung neu auftretende Konstanten (wie δh und γ in dem oben behandelten Teilproblem) werden immer so bestimmt, daß die Identität (XXXIII; 40a) erfüllt ist. Außerdem stellt diese Identität eine nützliche Kontrolle der Rechnung dar.

280. Berechnung der Terme, die m und die erste Potenz von e enthalten

Um diejenigen Terme von $x = \delta(1/r)$ und δw zu berechnen, die die erste Potenz von e enthalten, beschränken wir die Störungsfunktion F und ihre partielle Ableitung nach ξ auf die Glieder

$$\text{(XXXIII; 61)}\quad \begin{cases} F = F_1 = \dfrac{1}{4}m^2[1 + 3\cos 2\xi - 2e\cos\varphi + 3e\cos(2\xi + \varphi) - \\ \qquad - 9e\cos(2\xi - \varphi)], \\ \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \dfrac{3}{2}m^2[-\sin 2\xi - e\sin(2\xi + \varphi) + 3e\sin(2\xi - \varphi)]. \end{cases}$$

Die ersten Terme, die von e frei sind, dürfen nicht ausgelassen werden, da sie im Laufe der Analyse mit anderen Termen multipliziert werden, die e enthalten und daher zu denjenigen beitragen, die zu ermitteln sind. Wir

---

[1]) Eine kurzgefaßte Skizze zur Bestimmung der Terme mit m^4 hat E. W. Brown, Introductory treatise on the lunar theory (1896). Nachdruck New York 1960 (Dover Publications) gegeben.

setzen nun, wie zuvor, $a = n = 1$, $n_1 = m$ und

$$r_0 = 1 - e\cos\varphi; \quad w_0 = ct + \varepsilon + 2e\cos\varphi; \quad s = 0,$$
$$r_1 = a_1; \quad w_1 = mt + \varepsilon_1,$$

indem wir, wie in (XXXIII; 61), Terme mit e^2, e_1, η, α unterdrücken.

a) *Die Differentialgleichung für x.* Es ist wiederum $dr_1 = 0$, $dw_1 = mdt$. Aus (XXXIII; 48a) folgt dann

$$\text{(XXXIII; 62)} \quad \frac{1}{2}(r^2)'' - \left(\frac{1}{r} - 1\right) = Q_r = 4F + 2m\int\frac{\partial F}{\partial\xi}dt = 4F,$$

wenn wir fürs erste Terme der Ordnung m^3 vernachlässigen. Dann ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + x = 1 + e\cos\varphi + x; \quad \varphi = ct + \varepsilon - \tilde{\omega}; \quad \xi = (1-m)t + \varepsilon - \varepsilon_1,$$

$$r^2 = {r_0}^2 - 2{r_0}^3 x = 1 - 2e\cos\varphi - 2x(1 - 3e\cos\varphi),$$

$$\frac{1}{2}(r^2)'' = ec^2\cos\varphi - x'' + 3e(x\cos\varphi)'',$$

und wir erhalten aus (XXXIII; 61, 62)

$$\text{(XXXIII; 63)} \quad ec^2\cos\varphi - x'' + 3e(x\cos\varphi)'' - (e\cos\varphi + x) = 4F =$$
$$= m^2[1 + 3\cos 2\xi - 2e\cos\varphi + 3e\cos(2\xi + \varphi) -$$
$$- 9e\cos(2\xi - \varphi)].$$

Für x machen wir den Ansatz

$$\text{(XXXIII; 64)} \quad x = \frac{1}{6}m^2 + m^2\cos 2\xi + c_0 e\cos\varphi + c_1 e\cos(2\xi + \varphi) +$$
$$+ c_{-1}e\cos(2\xi - \varphi)$$

mit den in Abschnitt 279 abgeleiteten von e freien Termen und den unbekannten Konstanten c_0, c_1, c_{-1}. Unter Vernachlässigung der Glieder mit e^2 ergibt sich dann

$$ex\cos\varphi = \frac{1}{6}em^2\cos\varphi + \frac{1}{2}em^2[\cos(2\xi + \varphi) + \cos(2\xi - \varphi)]$$

und

$$e(x\cos\varphi)'' = -\frac{1}{6}em^2c^2\cos\varphi - \frac{1}{2}em^2(2 - 2m + c)^2\cos(2\xi + \varphi) -$$
$$- \frac{1}{2}em^2(2 - 2m - c)^2\cos(2\xi - \varphi).$$

Da $c = 1 - O(m^2)$, folgt bei Vernachlässigung der Terme mit m^3, m^4

$$e(x\cos\varphi)'' = -em^2\left[\frac{1}{6}\cos\varphi + \frac{9}{2}\cos(2\xi+\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\xi-\varphi)\right].$$

Dann ist nach (XXXIII; 63, 64)

$$x'' + x = e(c^2-1)\cos\varphi - em^2\left[\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{27}{2}\cos(2\xi+\varphi) + \frac{3}{2}\cos(2\xi-\varphi)\right] -$$
$$- m^2[1 + 3\cos 2\xi - 2e\cos\varphi + 3e\cos(2\xi+\varphi) - 9e\cos(2\xi-\varphi)].$$

Wenn man die Teillösung (XXXIII; 59) für $e = 0$ ausläßt, liefert diese Differentialgleichung für die von e abhängigen Glieder die Lösung

$$x = \left[c^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2\right]\frac{e\cos\varphi}{1-c^2} - \frac{33}{2}m^2\frac{e\cos(2\xi+\varphi)}{1-(2-2m+c)^2} +$$
$$+ \frac{15}{2}m^2\frac{e\cos(2\xi-\varphi)}{1-(2-2m-c)^2}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von e abhängigen Teil des Ansatzes (XXXIII; 64), so erhält man, wiederum bis zur Ordnung m^2 genau, das Gleichungssystem

(XXXIII; 65)
$$\begin{cases} c_0(1-c^2) = c^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2, \\ -8c_1 = -\frac{33}{2}m^2, \\ c_{-1}[1-(2-2m-c)^2] = \frac{15}{2}m^2. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen kann

$$(1-c^2)(1+c_0) = \frac{3}{2}m^2$$

geschrieben werden. Da $1 - c^2$ von der Ordnung m^2 und c_0 mindestens von der Ordnung m ist, folgt, bis zur Ordnung m^2 genau,

(XXXIII; 66)
$$1 - c^2 = \frac{3}{2}m^2; \quad c = 1 - \frac{3}{4}m^2,$$

übereinstimmend mit den Ergebnissen des Abschnitts 276. Die zweite Gleichung (XXXIII; 65) liefert

(XXXIII; 67)
$$c_1 = \frac{33}{16}m^2$$

und die dritte, mit $1 - (2 - 2m - c)^2 = 4m - {}^{11}/_2 m^2 + O(m^3)$,

$$c_{-1} = \frac{15}{8} m + O(m^2). \tag{XXXIII; 68}$$

Während also c_1 und $1 - c$ von der Ordnung m^2 sind, ist der Koeffizient von $\cos(2\xi - \varphi)$ von der Ordnung m. Dieser als „Evektion" bekannte Term (s. Abschnitt 175) gehört (s. Abschnitt 278) zu denjenigen, für die der Nenner $n^2 - k^2$ von der Ordnung m ist. Ein zusätzlicher Term von c_{-1} von der Ordnung m^2 könnte ermittelt werden, wenn die obige Deduktion bis zu Gliedern der Ordnung m^3 genau durchgeführt würde. Dies möge dem Leser überlassen bleiben.

Die erste Gleichung (XXXIII; 64) enthält die Konstante c_0, über die man noch frei verfügen kann. Wir werden das tun, nachdem wir auch die Gleichung (XXXIII; 48 b) für die Länge w gelöst haben.

b) *Die Differentialgleichung für w.* Diese Differentialgleichung, für $s = 0$, kann

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw_0}{dt} + \frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial F}{\partial \xi} dt + \frac{h_0 + \delta h}{r^2}$$

geschrieben werden. Entwickelt man diese Ausdrücke bis zur Ordnung m^2 und e, so erhält man, wenn wiederum $a = n = 1$, $n_1 = m$ und daher auch $h_0 = \sqrt{1 - e^2} \approx 1$ gesetzt wird,

$$\frac{dw_0}{dt} = w_0' = 1 + 2ec \cos \varphi$$

aus (XXXIII; 31) mit $M = \varphi$ und

$$\int \frac{\partial F}{\partial \xi} dt = \frac{3}{4} m^2 \frac{\cos 2\xi}{1 - m} + \frac{3}{2} m^2 e \frac{\cos(2\xi + \varphi)}{2 - 2m + c} - \frac{9}{2} m^2 e \frac{\cos(2\xi - \varphi)}{2 - 2m - c} + \text{const}$$

aus (XXXIII; 61). Ferner ist

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r_0} + x\right)^2 \approx \frac{1}{{r_0}^2} + 2\frac{x}{r_0} = 1 + 2e \cos \varphi + 2x(1 + e \cos \varphi)$$

zu setzen, und man erhält daher als Differentialgleichung für δw

$$1 + 2ec \cos \varphi + (\delta w)' = (1 + 2e \cos \varphi) \left[\frac{3}{4} m^2 \frac{\cos 2\xi}{1 - m} + \frac{3}{2} m^2 e \frac{\cos(2\xi + \varphi)}{2 - 2m + c} - \right.$$
$$\left. - \frac{9}{2} m^2 e \frac{\cos(2\xi - \varphi)}{2 - 2m - c} + \delta h + \text{const}\right] + 1 + 2e \cos \varphi + 2x(1 + e \cos \varphi).$$

Drückt man hierin x durch den Ansatz (XXXIII; 64) aus und führt die oben abgeleiteten Werte für c_1 und c_{-1} ein, so erhält man, wenn man die Integrations-

konstante mit δh vereinigt und Terme mit m^3 und e^2 unterdrückt,

$$(\delta w)' = \left(\delta h + \frac{1}{3}m^2\right) + \frac{11}{4}m^2\cos 2\xi + 2\left[c_0 + \delta h + \frac{1}{6}m^2 - (c-1)\right]e\cos\varphi + \\ + \frac{51}{8}\,em^2\cos(2\xi+\varphi) + \frac{15}{4}\,em\cos(2\xi-\varphi).$$

Der erste Term ist Null, wenn wir wiederum annehmen, daß δw kein säkulares Glied enthält, d. h., es ergibt sich $\delta h = -{}^1/_3 m^2$ wie vorher. Der zweite Term liefert, nach Ausführung der Integration, den Ausdruck (XXXIII; 58) für δw bis zur Ordnung m^2. Der Rest ist der Exzentrizität e proportional. Die Integration ergibt also

$$\delta w = \frac{11}{8}\frac{m^2}{1-m}\sin 2\xi + 2\left[c_0 + \delta h + \frac{1}{2}m^2 - (c-1)\right]\frac{e\sin\varphi}{c} + \\ + \frac{51}{8}\,em^2\frac{\sin(2\xi+\varphi)}{2-2m+c} + \frac{15}{4}\,em\,\frac{\sin(2\xi-\varphi)}{2-2m-c}$$

oder, wenn wir die Terme der Ordnung m^3 (bzw. m^2 in dem Evektionsglied) vernachlässigen und die bereits bekannten Ausdrücke für δh und c einführen,

$$\text{(XXXIII; 69)}\quad \delta w = \frac{11}{8}m^2\sin 2\xi + \frac{2}{c}\left(c_0 + \frac{7}{12}m^2\right)e\sin\varphi + \\ + \frac{17}{8}em^2\sin(2\xi+\varphi) + \frac{15}{4}em\sin(2\xi-\varphi).$$

Da c_0 noch willkürlich ist, setzen wir

$$\text{(XXXIII; 69a)}\qquad c_0 = -\frac{7}{12}m^2.$$

Das bedeutet: wir nehmen an, daß der Term mit $e\sin\varphi$ in der gestörten Bewegung derselbe ist wie in der intermediären Bahn. In anderen Worten: wir bestimmen die Exzentrizität der gestörten Mondbahn aus der großen periodischen Ungleichheit mit der Periode des anomalistischen Monats, deren Amplitude aus Beobachtungen sehr genau bekannt ist. Durch diese Festlegung des Begriffes „Exzentrizität der gestörten Mondbahn", der a priori nicht definiert ist, erhält er eine genaue Bedeutung. Man vergleiche diese Überlegung mit der entsprechenden am Schluß des Abschnitts 176.

Mit den oben abgeleiteten Werten von c, c_0, c_1 und c_{-1} ergeben sich die Störungen von $1/r$ und w nach (XXXIII; 64, 69) zu

$$\text{(XXXIII; 70)}\quad \begin{cases} \delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{1}{6}m^2 + m^2\cos 2\xi - \dfrac{7}{12}\,em^2\cos\varphi + \\ \qquad\qquad + \dfrac{33}{16}\,em^2\cos(2\xi+\varphi) + \dfrac{15}{8}\,em\cos(2\xi-\varphi), \\ \delta w = \dfrac{11}{8}m^2\sin 2\xi + \dfrac{17}{8}em^2\sin(2\xi+\varphi) + \dfrac{15}{4}em\sin(2\xi-\varphi). \end{cases}$$

In diesen Formeln ist jeder Term genau bis zur niedrigsten Ordnung von m und mit Einschluß der von der ersten Potenz der Exzentrizität e abhängigen Glieder.

281. Berechnung der von der ersten Potenz der Neigung abhängigen Terme

Dieselbe Methode, die zur Berechnung derjenigen Terme führt, die von der ersten Potenz der Exzentrizität der Mondbahn abhängen, läßt sich auch auf die Teillösungen anwenden, in denen die charakteristischen Parameter e_1 oder α in der ersten Potenz auftreten. Wir werden diese Fälle daher hier nicht explizite behandeln. Ebenso werden Terme, die höheren Potenzen und Produkten der Parameter e, e_1 α proportional sind, auf entsprechende Weise gefunden, doch wird die Rechnung mit wachsender Ordnung rasch verwickelt. Andererseits verdienen diejenigen Störungsterme, die von der Bahnneigung i des Mondes bzw. von $\tan i = \eta$ abhängen, besondere Beachtung. Man erhält sie durch Lösung der Differentialgleichung (XXXIII; 48c), die wir, wie schon in Abschnitt 278 vermerkt wurde, in der Form

$$\text{(XXXIII; 71)} \qquad z'' + \frac{1}{r^3} z = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

schreiben. Die Diskussion dieser Gleichung ist sehr interessant, weil sie zur Bestimmung der rückläufigen Bewegung der Mondbahnknoten führt. Aus $r^2 = \varrho^2 + z^2$ und $s = z/\varrho$ leitet man

$$\text{(XXXIII; 71a)} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}; \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{s}{z}$$

ab.[1]) Drückt man F durch (XXXIII; 33) aus, setzt mit $n = 1$, $n_1 = m$

$$k^2 m_1 \frac{r^2}{{r_1}^3} = {n_1}^2 r^2 = m^2 r^2$$

und vernachlässigt Terme wie $m^2 s^4$, $m^2 s^2 \alpha$, die von der sechsten Ordnung sind, so erhält man

$$F = \frac{1}{4} m^2 r^2 \left[1 - 3s^2 + 3\,(1 - s^2)\cos 2\,(w - w_1) + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{3}{8} m^2 r^2 \alpha \left[\cos\,(w - w_1) + \frac{5}{3}\cos 3\,(w - w_1) + \cdots\right]$$

---

[1]) Siehe auch die dritte Gleichung auf S. 415.

und die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} m^2 r \left[1 + 3\cos 2(w - w_1) - 3s^2 \{1 + \cos 2(w - w_1)\}\right] +$$
$$+ \frac{3}{4} m^2 r\alpha \left[\cos(w - w_1) + \frac{5}{3}\cos 3(w - w_1)\right],$$
$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{3}{2} m^2 r^2 s \left[1 + \cos 2(w - w_1)\right].$$

Aus (XXXIII; 71, 71a) folgt dann

$$z'' + \frac{z}{r^3} = \frac{1}{2} m^2 z \left[1 + 3\cos 2(w - w_1) - 3s^2 \{1 + \cos 2(w - w_1)\}\right] +$$
$$+ \frac{3}{4} m^2 z\alpha \left[\cos(w - w_1) + \frac{5}{3}\cos 3(w - w_1)\right] -$$
$$- \frac{3}{2} m^2 r^2 \frac{s^2}{z} \left[1 + \cos 2(w - w_1)\right].$$

Wenn wir beabsichtigen, eine Teillösung zu finden, die außer m nur η in erster Potenz enthält, so dürfen wir $z = rs$, $r^2 s^2/z = rs$ setzen und Terme mit zs^2 und $z\alpha$ vernachlässigen. Dann ergibt sich

$$z'' + \frac{z}{r^3} = -m^2 z; \quad z'' + z\left(m^2 + \frac{1}{r^3}\right) = 0$$

oder

$$z'' + z(m^2 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3) = 0,$$

wo $x = \delta(1/r)$ durch die Reihe (XXXIII; 60) auszudrücken ist, also bis zu Termen der Ordnung m^4

(XXXIII; 72)
$$z'' + z\left[1 + \frac{3}{2} m^2 - \frac{9}{32} m^4 + \left(3m^2 + \frac{19}{2} m^3 + \frac{137}{6} m^4\right) \times \right.$$
$$\left. \times \cos 2\xi + \frac{33}{8} m^4 \cos 4\xi\right] = 0.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall homogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Lösungen sind von verschiedenen Autoren angegeben worden, wie von LINDSTEDT, GYLDÉN, PIQUET, ADAMS und anderen, besonders aber von HILL, dessen Mondtheorie im nächsten Kapitel behandelt werden wird. Hier begnügen wir uns damit, Form und Eigenschaft der Lösung vorwegzunehmen, sie bei Beschränkung auf Terme der Ordnung m^4 zu verifizieren und die in der formalen Lösung noch unbestimmt gelassenen Konstanten festzulegen. Die Lösung habe die Form

(XXXIII; 73)
$$z = \eta \left[g_0 \sin\psi + g_{-1} \sin(2\xi - \psi) + g_1 \sin(2\xi + \psi) + \right.$$
$$\left. + g_{-2} \sin(4\xi - \psi) + g_2 \sin(4\xi + \psi)\right],$$

und g_0 sei von der nullten Ordnung, g_{-1} von der ersten, g_1 von der zweiten, g_{-2} von der dritten und g_2 von der vierten Ordnung. Ferner sei, wie früher, $\xi = (1 - m)\,t + \varepsilon - \varepsilon_1$ und nach (XXXIII; 42)

(XXXIII; 73a) $$\psi = gt + \varepsilon - \Omega$$

der modifizierte Ausdruck für das mittlere Argument der Breite des Mondes, der die Knotenbewegung $(1 - g)\,t$ in sich schließt.

Die Konstanten g, g_0, g_{-1}, g_1, g_{-2}, g_2 müssen so bestimmt werden, daß die Gleichung (XXXIII; 72) erfüllt ist. Wir nehmen an, daß g_0 und $\Omega = \Omega_0$ für $t = t_0$ die beiden Integrationskonstanten sind. In der ungestörten Bewegung ist

$$z = r \sin b = r \sin i \sin u.$$

Vernachlässigen wir e, η^2, wie es in einer Teillösung erforderlich ist, die nur die erste Potenz der Neigung berücksichtigt, so darf

$$\sin i = \tan i = \eta; \quad r = 1; \quad u = \psi,$$

d. h. $z = \eta \sin \psi$, gesetzt werden. Vergleichen wir dies mit (XXXIII; 73), so werden wir es vorteilhaft finden, der willkürlichen Konstante g_0 den Wert 1 zu geben. Dann wird das Hauptglied von z, das die Periode des drakonitischen Monats hat, in der gestörten und der intermediären Bewegung gleich sein. Der Begriff „Neigung der gestörten Mondbahn", der a priori nicht definiert ist, ist dann eindeutig durch die Amplitude dieser periodischen Ungleichheit der Mondbewegung festgelegt, die genügend genau aus Beobachtungen bekannt ist.

Allgemeiner nehmen wir an, daß (XXXIII; 72) die Form

(XXXIII; 74) $$z'' + z\,(f_0 + f_2 \cos 2\,\xi + f_4 \cos 4\xi + f_6 \cos 6\xi + \cdots)$$

besitzt, wo die Koeffizienten f_{2j} Potenzreihen

$$f_{2j} = \alpha_{2j} m^{2j} + \alpha_{2j+1} m^{2j+1} + \alpha_{2j+2} m^{2j+2} + \cdots$$

sind, deren Koeffizienten bis zu irgendeiner Ordnung $j = k$ bekannt seien [z. B. $k = 2$, wie in (XXXIII; 72)]. Setzt man dann $g_0 = 1$, so nimmt die Lösung (XXXIII; 73) die Form

(XXXIII; 75a) $$z = \eta \left[\sin \psi + \sum_{j=1}^{\infty} g_{-j} \sin (2j\xi - \psi) + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \sin (2j\xi + \psi)\right]$$

an. Differenziert man diese Gleichung zweimal nach der Zeit, so ergibt sich, mit $\psi' = g$, $\xi' = 1 - m$,

(XXXIII; 75b) $$z'' = -\eta \left[g^2 \sin \psi + \sum_{j=1}^{\infty} g_{-j}\,(2j - 2jm - g)^2 \sin (2j\xi - \psi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} g_j\,(2j - 2jm + g)^2 \sin (2j\xi + \psi)\right].$$

Führt man (XXXIII; 75a, b) in (XXXIII;74) ein, so entsteht eine Identität von der Form

$$\eta\left[h_0 \sin\psi + \sum_{j=1}^{\infty} h_{-j} \sin(2j\xi - \psi) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(2j\xi + \psi)\right] \equiv 0,$$

die nur dann erfüllt ist, wenn alle h verschwinden. Diese Bedingung ergibt unendlich viele lineare Gleichungen für die Unbekannten g_{-j} und g_j ($j = 1, 2, \ldots, \infty$) sowie für g, das allerdings nicht in linearer Form auftritt. Die Lösung dieses Problems schließt die Regel ein, daß die g_{-j}, g_j Potenzreihen von m sind, die mit Gliedern der Ordnung m^{2j-1} bzw. m^{2j} beginnen. Wenn m genügend klein ist und man daher Terme von einer gewissen Ordnung an vernachlässigen kann, so reduziert sich die unendliche Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten auf eine endliche. Vernachlässigen wir Terme von höherer Ordnung als m^4, so bleiben zur Bestimmung der fünf Unbekannten g, $g_{\pm 1}$, $g_{\pm 2}$ die fünf Gleichungen $h_0 = h_{-1} = h_1 = h_{-2} = h_2 = 0$. Elementare Rechnung ergibt

(XXXIII; 76)

$$\begin{cases}
\text{a)}\ h_0 = 1 - g^2 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{32}m^4 - \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3\right)g_{-1} + \\
\qquad + \frac{3}{2}m^2 g_1 = 0, \\
\text{b)}\ h_{-1} = [1 - (2 - 2m - g)^2]\, g_{-1} + \frac{3}{2}m^2 g_{-1} - \\
\qquad - \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3 + \frac{137}{32}m^4\right) = 0, \\
\text{c)}\ h_1 = [1 - (2 - 2m + g)^2]\, g_1 + \frac{3}{2}m^2 g_1 + \\
\qquad + \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3 + \frac{137}{32}m^4\right) = 0, \\
\text{d)}\ h_{-2} = [1 - (4 - 4m - g)^2]\, g_{-2} - \frac{33}{16}m^4 + \\
\qquad + \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3\right)g_{-1} = 0, \\
\text{e)}\ h_2 = [1 - (4 - 4m + g)^2]\, g_2 + \frac{33}{16}m^4 + \frac{3}{2}m^2 g_1 = 0.
\end{cases}$$

Die erste Gleichung liefert, wenn wir fürs erste alle Terme mit m^3, m^4 vernachlässigen, für g den Näherungswert

(XXXIII; 77) $$1 - g^2 = -\frac{3}{2}m^2; \quad g = 1 + \frac{3}{4}m^2,$$

der (XXXIII; 42) entspricht. Mit dieser Näherung erhält man aus (XXXIII; 76b)

$$g_{-1}\,(4m - m^2) = \frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3; \quad g_{-1} = \frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2.$$

In diesen Ausdrücken sind rechts die Terme der Ordnung m^4 bzw. m^3 ausgelassen worden, da sie wegen der Ungenauigkeit von g noch verbesserungsbedürftig wären. Andererseits ergibt (XXXIII; 76c) mit dieser Näherung für g

$$g_1 = \frac{3}{16}m^2 + \frac{7}{8}m^3 + \frac{989}{384}m^4$$

genau bis zur Ordnung m^4. Ebenso genau erhält man aus den Gleichungen (XXXIII; 76d,e) mit den obigen Werten von g_{-1} und g_1

$$g_{-2} = \frac{9}{128}m^3 + \frac{213}{512}m^4; \qquad g_2 = \frac{25}{256}m^4.$$

Setzt man nun g_1 und die Näherung für g_{-1} (die hier genau genug ist, da sie mit einem Ausdruck der Ordnung m^2 multipliziert erscheint) in (XXXIII; 76a) ein, so folgt

$$g^2 = 1 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{237}{64}m^4$$

und daher

(XXXIII; 78)
$$g = 1 + \frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{273}{128}m^4.$$

Mit diesem Wert, der bis zur Ordnung m^4 exakt ist, folgt aus (XXXIII; 76b)

$$g_{-1} = \frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2 + \frac{5389}{1536}m^3$$

genau bis zur Ordnung m^3.

Beschränkt man sich auf Terme bis zur Ordnung ηm^2, so folgt aus (XXXIII; 75a)

$$z = \eta\left[\sin\psi + \left(\frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2\right)\sin(2\xi - \psi) + \frac{3}{16}m^2\sin(2\xi + \psi)\right]$$

und

$$s = \frac{z}{r} = z(1 + x) = z\left(1 + \frac{1}{6}m^2 + m^2\cos 2\xi\right) =$$

$$= \eta\left[\left(1 + \frac{1}{6}m^2\right)\sin\psi + \left(\frac{3}{8}m + \frac{25}{32}m^2\right)\sin(2\xi - \psi) + \frac{11}{16}m^2\sin(2\xi + \psi)\right].$$

282. Theorie von de Pontécoulant. Technik und Übersicht

Wenn wir die Ergebnisse der in den Abschnitten 279—281 erhaltenen Teillösungen mit denen zusammenstellen, die sich auf e_1 und η beziehen, so finden wir folgende genäherten Lösungen der Differentialgleichungen (XXXIII; 48)

mit Beschränkung auf Terme niederer Ordnung:

(XXXIII; 79)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}+\frac{1}{6}m^2-\frac{179}{288}m^4+\left(m^2+\frac{19}{16}m^3+\frac{131}{18}m^4\right)\times\\
&\quad\times\cos 2\xi+\frac{7}{8}m^4\cos 4\xi+\cdots-\frac{7}{12}m^2e\cos\varphi+\\
&\quad+\frac{15}{8}me\cos(2\xi-\varphi)+\frac{33}{16}m^2e\cos(2\xi+\varphi)+\cdots\\
&\quad-\frac{3}{2}m^2e_1\cos\varphi_1+\frac{7}{2}m^2e_1\cos(2\xi-\varphi_1)-\\
&\quad-\frac{1}{2}m^2e_1\cos(2\xi+\varphi_1)+\cdots\\
&\quad-\left(\frac{15}{16}m+\frac{81}{16}m^2\right)\alpha\cos\xi+\frac{25}{64}m^2\alpha\cos 3\xi+\cdots,\\
&\text{b)}\ w=w_0+\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{59}{12}m^3+\frac{893}{72}m^4\right)\sin 2\xi+\\
&\quad+\frac{291}{256}m^4\sin 4\xi+\cdots+\frac{15}{4}me\sin(2\xi-\varphi)+\\
&\quad+\frac{17}{8}m^2e\sin(2\xi+\varphi)+\cdots-3me_1\sin\varphi_1+\\
&\quad+\frac{77}{16}m^2e_1\sin(2\xi-\varphi_1)-\frac{11}{16}m^2e_1\sin(2\xi+\varphi_1)+\cdots\\
&\quad-\left(\frac{15}{8}m+\frac{93}{8}m^2\right)\alpha\sin\xi+\frac{15}{32}m^2\alpha\sin 2\xi+\cdots,\\
&\text{c)}\ z=z_0+\left(\frac{3}{8}m+\frac{41}{32}m^2\right)\eta\sin(2\xi-\psi)+\\
&\quad+\frac{3}{16}m^2\eta\sin(2\xi+\psi)+\cdots,
\end{aligned}\right.$$

wo r_0, w_0, z_0 die (modifizierten) elliptischen Werte der Koordinaten bezeichnen. In diesen Reihen sind die Koeffizienten der Terme, die von den Parametern e, e_1, α und η frei sind, genau bis zur Ordnung m^4, diejenigen der von e, e_1, α abhängigen Terme[1]) genau bis zur Ordnung em^2, e_1m^2 bzw. αm^2, mit Ausnahme der Terme mit cos/sin $(2\xi-\varphi)$, die bis zur Ordnung em genau sind. Schließlich sind die Terme mit η genau bis zur Ordnung ηm^2. Die Elemente e und $\eta = \tan i$ der gestörten Bahn sind so definiert worden, daß der Term $2e\sin\varphi$

[1]) Auch der Term mit $e_1\sin\varphi_1$ ist bis zur Ordnung m^2 genau, da hier der Koeffizient des Gliedes mit m^2 Null ist.

in dem Ausdruck für die Länge w und der Term $\eta \sin \psi$ in dem Ausdruck für z dieselben sind wie in der intermediären Bahn. Die Terme mit diesen Argumenten erscheinen daher nicht in den Störungsausdrücken von (XXXIII; 79 b, c).

DE PONTÉCOULANT hat in seiner „Théorie analytique du Système du Monde" die Exzentrizität e anders definiert, da er seine Ergebnisse mit denen früherer Arbeiten zu vergleichen wünschte, namentlich mit denen von PLANA und DAMOISEAU, die ihrerseits auf LAPLACE zurückgehen. Diese Astronomen bestimmten diese fluktuierende Konstante so, daß in der Lösung (XXXIII; 64) von (XXXIII; 48a),

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + x = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{6} m^2 + c_0 e \cos \varphi + m^2 \cos 2\xi + \cdots,$$

der Term mit $\cos \varphi$ mit dem in der ungestörten Bahn übereinstimmte. Für modifizierte Koordinaten und $a = 1$ ergibt sich aus (XXXIII; 23)

$$r_0 = 1 - \cos \varphi + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2\varphi) + \cdots.$$

Daraus folgt $1/r_0 = 1 + e \cos \varphi + e^2 \cos 2\varphi + \cdots$ und daher

$$\frac{1}{r} = 1 + e \cos \varphi + \frac{1}{6} m^2 + c_0 e \cos \varphi + \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{6} m^2\right) \left(1 + \frac{1 + c_0}{1 + \frac{1}{6} m^2} e \cos \varphi\right) + \cdots.$$

Fordert man also, daß in dem gestörten Ausdruck für $1/r$ die Terme, die kein anderes periodisches Glied als das mit dem Argument φ enthalten, die gleiche Form wie in $1/r_0$ haben, so muß man $c_0 = {}^1/_6 m^2$ setzen und erhält dann[1])

$$\frac{1}{r} = \left(1 + \frac{1}{6} m^2\right) (1 + e \cos \varphi) + \cdots = \frac{1}{a^*} (1 + e \cos \varphi) + \cdots.$$

Diese Annahme für die willkürliche Konstante c_0 unterscheidet sich von (XXXIII; 69a), und der Ausdruck (XXXIII; 69, 70) für die Längenstörung δw nimmt daher die Form

$$\delta w = \frac{11}{8} m^2 \sin 2\xi + \frac{3}{2} m^2 e \sin \varphi + \frac{17}{8} m^2 e \sin (2\xi + \varphi) + \cdots$$

an, in der nun ein kleiner Term vom Typus $e \sin \varphi$ erscheint. Im Laufe der Zeit sind der willkürlichen Konstante c_0 auch noch andere Werte zugeschrieben worden, z. B. $c_0 = 0$. Die Annahme $c_0 = -{}^7/_{12} m^2$, durch die e durch den Hauptterm in Länge definiert wird, ist von DELAUNAY und seither von allen Theoretikern benutzt worden.

---

[1]) Das ergibt, wenn $a = 1$ die große Halbachse der intermediären Bahn ist, für die gestörte Bahn $a^* = 1 - {}^1/_6 m^2 + \cdots$, wie in (XX; 14a).

Die Technik der Entwicklung der Theorie ist bei DE PONTÉCOULANT von derjenigen etwas verschieden, die wir in den vorhergehenden Abschnitten angewandt haben. Wie E. W. BROWN in seiner schon mehrfach zitierten „Introductory treatise" überzeugend gezeigt hat, ist die Aufspaltung der Analyse in Teilprobleme, die nur Terme mit einem einzigen der charakteristischen Parameter berücksichtigen, einfach, klar und übersichtlich, solange man sich auf Parameter erster Ordnung beschränkt, wird aber verwickelt und langwierig, wenn man sie auf Parameter höherer Ordnung wie e^2, ee_1, $e\alpha$, e^3, ee_1^2, ... anwendet. DE PONTÉCOULANT verfährt daher etwas anders. Der Plan seiner Arbeit ist, kurz gefaßt, der folgende:

1. In den Differentialgleichungen für r und w sowie in der Störungsfunktion werden zunächst alle von der Breite, d. h. von η bzw. s, abhängigen Terme unterdrückt. Ferner werden, solange man nur Störungen erster Ordnung betrachtet, Terme wie x^2, x^3, ... vernachlässigt, und die Störungsfunktion F wird als Funktion der modifizierten elliptischen Koordinaten angesehen. Man setzt dann $x = \delta(1/r)$ als eine Reihe an, die aus einer Konstanten und aus periodischen Gliedern mit denselben Argumenten besteht, die auch in F vorkommen, und deren Koeffizienten vorerst unbestimmt bleiben. Setzt man diese Reihe und ihre zweite Ableitung in die Differentialgleichung für x ein, so erhält man, wenn man die Terme mit gleichem Argument beiderseits gleichsetzt, eine Reihe von Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten. Aus diesen lassen sich die Unbekannten berechnen, mit Ausnahme des konstanten Terms und eines der Koeffizienten der periodischen Terme, z. B. des von $e\cos\varphi$, die als Integrationskonstante noch verfügbar bleiben.

2. Der so erhaltene Ausdruck für $\delta(1/r)$ wird in die Differentialgleichung für δw eingeführt. Die neu auftretenden Konstanten, zusammen mit dem noch unbestimmten Koeffizienten von $e\cos\varphi$, lassen sich dann in derselben Weise wie in Abschnitt 279—280 ermitteln. Der konstante Term von x wird wie in Abschnitt 279 aus der Differentialbeziehung (XXXIII; 40a) und durch die Forderung bestimmt, daß die Störung der ekliptikalen Länge kein säkulares Glied enthalten soll. Aus diesem Rechengang geht auch ein genäherter Wert für die Konstante $1 - c$ der Bewegung des Perigäums hervor.

3. Nachdem man so eine erste Näherung für $\delta(1/r)$ und δw erhalten hat, geht man dazu über, die Störungen zweiter Ordnung zu berücksichtigen, indem man die Ausdrücke für die störenden Kräfte durch die Koordinatenstörungen (soweit sie bereits vorliegen) verbessert. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis alle Koeffizienten der Störungsterme bis zu einer gewissen Ordnung von m und der charakteristischen Parameter genau sind. Im allgemeinen begnügt sich DE PONTÉCOULANT damit, die fünfte Ordnung sicherzustellen, doch muß in gewissen Fällen die Untersuchung bis zu höheren Ordnungen weitergeführt werden, dann nämlich, wenn die Potenzreihen nach m schlecht konvergieren oder wenn die Amplituden gewisser periodischer Terme durch die Integration, infolge des Auftretens kleiner Divisoren, in der Ordnung herabgesetzt werden.

4. Jetzt wird auch die Differentialgleichung für z zu lösen sein. Zuerst wird das in Abschnitt 281 beschriebene Verfahren angewandt, indem man höhere

Potenzen von η vernachlässigt. Man erhält dann (gewisse Terme ausgenommen) z bis zur fünften Ordnung genau, wenn die benutzten Ausdrücke für $1/r$ und w bis zur vierten Ordnung genau sind. Sodann können die bisher vernachlässigten Terme mit η^2 in $1/r$ und w durch Methoden berechnet werden, die den in den vorhergehenden Abschnitten verwendeten entsprechen. Ist dies geschehen, so erhält man mit diesen verbesserten Werten des Radiusvektors und der Länge die z-Koordinate einschließlich der Terme mit η^3, und mit diesem verbesserten z wiederum die Terme mit η^4 in $1/r$ und w. DE PONTÉCOULANT schließt dies alternierende Verfahren ab, nachdem er die Glieder mit η^5 gesichert hat. Im Verlauf dieser Näherungsmethode erhält man auch einen genaueren Ausdruck für die Bewegung $1 - g$ der Knoten.

5. Wenn die Lösung des „main problem" bis zu der gewünschten Ordnung genau vorliegt, werden die zusätzlichen Störungen durch die Planeten und infolge der Erdabplattung berechnet. Schließlich widmet DE PONTÉCOULANT einigen Termen mit langer Periode und beträchtlicher Amplitude spezielle Studien, um sie so weit zu verbessern, wie es den praktischen Erfordernissen entspricht. DE PONTÉCOULANT beschreibt sein Annäherungsverfahren nur in den ersten Schritten in extenso und begnügt sich sodann mit der Angabe des Endergebnisses, dessen Vergleich mit den Ergebnissen früherer Theorien befriedigend ausfiel. Die von ihm benutzte und oben in großen Zügen beschriebene Technik zeichnet sich dadurch aus, daß sie ziemlich rasch zu Ergebnissen relativ hoher Genauigkeit führt. Dennoch erfordert sie, wie DE PONTÉCOULANT schreibt, viel Zeit und Mühe.

Die Koeffizienten der periodischen Terme sind allgemein Potenzreihen nach m, aber verschiedene dieser Reihen konvergieren nur langsam trotz des ziemlich kleinen Wertes von m. Dies ist einer der Gründe für die Schwierigkeit der Mondtheorie. Im Falle des Erdmondes ist diese Schwierigkeit gerade noch überwindbar. Das gilt nicht für die Theorien der äußersten Satelliten der großen Planeten. Im Falle Jupiter VIII und IX ist $m \approx 1/6$, also mehr als doppelt so groß wie im Falle des Mondes, und einige der Reihen, die in der Theorie des Mondes schlecht konvergieren, werden divergent sein, so daß andere Methoden nötig sind, um das Problem zu lösen.

Wir geben hier einige der Potenzreihen mit schwacher Konvergenz an:

a) die Potenzreihen für $1 - c$ und $1 - g$ bis zur Ordnung m^7:

$$\text{(XXXIII; 80)} \quad \begin{cases} 1 - c = \dfrac{3}{4} m^2 + \dfrac{225}{32} m^3 + \dfrac{4071}{128} m^4 + \dfrac{265493}{2048} m^5 + \\ \qquad\qquad + \dfrac{12822631}{24576} m^6 + \dfrac{1273925965}{589824} m^7 + \cdots, \\ 1 - g = -\dfrac{3}{4} m^2 + \dfrac{9}{32} m^3 + \dfrac{273}{128} m^4 + \dfrac{9797}{2048} m^5 + \\ \qquad\qquad + \dfrac{199273}{24576} m^6 + \dfrac{6657733}{589824} m^7 + \cdots. \end{cases}$$

Die Konvergenz von $1 - g$ ist offensichtlich besser als die von $1 - c$. Mit $m = 0.0748013$ ergibt sich

Term mit	$1 - c$	$1 - g$
m^2	0.00419643	−0.00419643
m^3	0.00294280	0.00011771
m^4	0.00099570	0.00006677
m^5	0.00030358	0.00001120
m^6	0.00009139	0.00000142
m^7	0.00002830	0.00000015
Summe	0.00855820	−0.00399918
Genauer Wert	0.00857257	−0.00399916

Während $1 - g$, abgesehen von Abrundungsfehlern, durch die bei dem Term mit m^7 abgebrochene Reihe genau genug dargestellt wird, erfordert $1 - c$ zur Erzielung der gleichen Genauigkeit eine Entwicklung, die mindestens noch Terme mit m^{10} umfaßt. Nebenbei bemerkt, werden in einer vollständigen Theorie die Reihen (XXXIII; 80) noch durch unbedeutende Terme ergänzt werden müssen, die e^2, e_1^2, α, η^2 als Faktoren haben.

b) Eine der am schlechtesten konvergierenden Reihen, die in der Mondtheorie vorkommen, ist die des Terms $ee_1 f(m) \sin(2\xi - \varphi + \varphi_1)$ in Länge. Hier ist

$$(\text{XXXIII; 81}) \quad f(m) = -\frac{15}{4}m - \frac{173}{32}m^2 + \frac{49045}{384}m^3 + \frac{29183005}{18432}m^4 + \\ + \frac{2827212637}{221184}m^5 + \frac{470658148655}{5308416}m^6 + \cdots.$$

Die exakte Amplitude dieses Terms beträgt etwa 30″, der letzte Summand von (XXXIII; 81) trägt zu dieser Summe immer noch ungefähr 3″ bei, so daß ein Fehler von mindestens einer Bogensekunde übrigbleibt.

Adams, und nach ihm auch Hill, bemerkten, daß die Konvergenz dieser Reihen etwas besser wird, wenn man $\mu = m/(1 - m)$ statt m einführt. Wir zeigen dies im Falle $1 - g$. Setzt man in der zweiten Gleichung (XXXIII; 80) $m = \mu/(1 + \mu)$, so erhält man

$$1 - g = -\frac{3}{4}\mu^2 + \frac{57}{32}\mu^3 - \frac{123}{128}\mu^4 + \frac{1925}{2048}\mu^5 - \cdots.$$

Das ergibt mit $\mu = 0.080848$, wenn man Terme mit μ^6 vernachlässigt, $1 - g = -0.0039989$ mit einem Fehler von weniger als $3 \cdot 10^{-7}$, während die entsprechende Reihe in m, wenn man sie ebenfalls mit der fünften Ordnung abbricht, $1 - g = 0.0040007$ ergibt, mit einem Fehler von fünfzehn Einheiten der siebenten Dezimale.

KAPITEL XXXIV

THEORIE DER BEWEGUNG DES MONDES. ZWEITER TEIL: THEORIE VON HILL

283. Schwächen der klassischen Mondtheorien und ihre Umgehung durch die Theorie von Hill

Die meisten klassischen Theorien der Mondbewegung führen auf Entwicklungen nach Potenzen von $m = n_1/n$, dem Verhältnis zwischen den mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes. Diese Potenzreihen konvergieren zum Teil sehr langsam, was besonders im Falle der säkularen Bewegung des Perigäums fühlbar wird. Diese Schwierigkeit, die wir im vorigen Kapitel an der Methode von DE PONTÉCOULANT auffällig zeigen konnten, tritt auch in anderen Mondtheorien auf, wie in denen von HANSEN und DELAUNAY. Sie beruht also nicht auf den besonderen technischen Mitteln, die in den verschiedenen Theorien angewandt werden und für sie charakteristisch sind, sondern auf den Konvergenzeigenschaften dieser Potenzreihen. HANSEN hat in der Anwendung seiner Theorie der allgemeinen Störungen (Kapitel 27—28) auf die Bewegung des Mondes diese Konvergenz zu verbessern versucht, indem er von Anfang an den im „Hauptproblem" auftretenden Parametern korrigierende Faktoren anfügte, wodurch er die Ergebnisse seiner Vorgänger verbessern konnte, aber es ist ihm dadurch nicht gelungen, diese Schwierigkeit in befriedigender Weise ganz zu überwinden. G. W. HILL hat gezeigt, wie wir schon in Abschnitt 282 bemerkten, daß die Reihen etwas besser konvergieren, wenn statt m das Verhältnis $\mu = m/(1 - m) = n_1/(n - n_1)$ eingeführt, also die mittlere siderische Bewegung des Mondes durch die synodische ersetzt wird. Zwar ist auch dann in kritischen Fällen die Zahl der Glieder der Potenzreihen, die zu einer ausreichenden Annäherung der Reihensummen notwendig sind, immer noch recht groß. Es ist aber HILLS Verdienst, eine neue Theorie entwickelt zu haben, in der dieser schwache Punkt an den entscheidenden Stellen umgangen wird und die somit den Arbeiten seiner Vorgänger gegenüber einen wesentlichen Vorteil voraus hat.

Bevor wir auf Einzelheiten der HILLschen Überlegungen eingehen, werfen wir einen Blick auf einige seiner Theorie zugrunde liegende Leitgedanken. HILL bezieht die Störungen der Mondbewegung durch die Sonne nicht auf die elliptischen Elemente einer intermediären Bahn, sondern auf rechtwinklige Koordinaten in einem System mit beweglichen Achsen, das sich in der Ebene der Ekliptik gleichmäßig mit der mittleren Bewegung n_1 der Sonne dreht. Ein solches System hat verschiedene Vorteile:

1. Es ist nicht mehr notwendig, von der Entwicklung der Störungsfunktion nach elliptischen Elementen auszugehen.

2. Die Störungen der rechtwinkligen Koordinaten bieten sich bequemer zur Berechnung der Ephemeriden an als die Störungen der elliptischen Elemente.

3. Die rechtwinkligen Koordinaten genügen Differentialgleichungen von rein algebraischer Form, während Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten

trigonometrische Ausdrücke enthalten und daher schwieriger zu behandeln sind.

4. In jeder elliptischen Bewegung lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen der mittleren Anomalie und daher der Zeit viel einfacher darstellen, als dies für Polarkoordinaten der Fall ist, und das gilt auch dann noch, wenn man von elliptischen Referenzbahnen auf gestörte übergeht.

Ein weiterer Vorteil der HILLschen Methode ist, daß sie in der Berechnung der Störungen der Mondbewegung von Anfang an jene Terme isoliert, die nur von m bzw. μ abhängen. Das erreicht HILL, indem er als Referenzbahn jene im rotierenden System einfach-periodische Bewegung einführt, die wir bereits in Kapitel XXI eingehend diskutiert haben: die sogenannte Variationsbahn, die eine der bedeutendsten Anomalien der Mondbewegung, die „Variation", in sich schließt. Wir erinnern den Leser daran, daß diese intermediäre Bahn eine partikuläre Lösung der Differentialgleichungen (XXI; 1),

$$(\text{XXXIV};\,1)\qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \left(3 - \dfrac{1}{r^3}\right)\xi = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}; \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\dfrac{1}{r^3}\eta = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}; \quad \Omega = \dfrac{3}{2}\xi^2 + \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

ist, in denen gegenüber der wahren Mondbewegung folgende Vereinfachungen vorgenommen worden sind:

a) Die Mondmasse wird gegen die Erdmasse vernachlässigt.

b) Die Exzentrizität der Mondbahn und die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik werden gleich Null gesetzt.

c) Die Sonne durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis um den Mittelpunkt der Erde.

d) Die Sonnenparallaxe in bezug auf den Abstand Erde—Mond als Basis, d. h. das Verhältnis $a/a_1 \approx 1/400$, wird in den Störungstermen vernachlässigt.

Schließlich werden die Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit so festgesetzt, daß die Gravitationskonstante $k = 1$, die mittlere Bewegung der Sonne $n_1 = 1$ und der Halbmesser der Sonnenbahn $a_1 = \sqrt[3]{m_1 + m_0}$ ($m_1 =$ = Masse der Sonne, $m_0 =$ Masse der Erde) ≈ 69 ist. Dann gelten die Differentialgleichungen (XXXIV; 1) für die ekliptikalen geozentrischen Koordinaten ξ, η des Mondes im rotierenden System, dessen Umlaufszeit 2π ist und das so orientiert ist, daß der Ort der Sonne beständig auf der ξ-Achse bleibt, und zwar in deren unendlich fernem Punkt. Die Richtung der Störbeschleunigung des Systems Erde—Mond durch die Sonne verläuft also parallel der ξ-Achse, und die Bahnkurven des Mondes sind zur ξ- und zur η-Achse symmetrisch. Da ferner (s. Abschnitt 274) die gestörte Mondbahn auf ein ringförmiges Gebiet um die Erde als Mittelpunkt mit verhältnismäßig eng begrenztem Profil beschränkt ist, wird es zweckmäßig sein, die intermediäre Bahn so zu definieren, daß sie innerhalb dieses Gebiets verläuft und dort eine einfach-periodische Lösung der Differentialgleichungen (XXXIV; 1) darstellt. Diese

sei durch die Anfangsbedingungen

$$(\text{XXXIV};2)\qquad \xi(t_0)=a,\quad \eta(t_0)=0;\quad \dot\xi(t_0)=0,\quad \dot\eta(t_0)=b$$

bestimmt, wo a, b geeignet zu wählende Konstante sind, die nur von $\mu = n_1/(n-n_1) = m/(1-m)$ abhängen. Alle diese als „Variationsbahnen" bezeichneten periodischen Lösungen bilden demnach eine einparametrige Schar mit dem Parameter μ, und die intermediäre Bahn, die der HILLschen Theorie zugrunde liegt, ist durch die aus Beobachtungen sehr genau bekannten Werte n_1 und n der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes definiert.

284. Die Gleichungen des Variationsproblems und ihre Lösung

Die Differentialgleichungen (XXXIV; 1) bilden die Ausgangsposition der HILLschen Theorie. Obwohl ihre partikulären Lösungen, die Schar der Variationsbahnen, in Kapitel XXI eingehend behandelt worden sind, wird es nicht überflüssig sein, die Formulierung dieser Gleichungen und die bei ihrer Analyse angewandte mathematische Methode noch einmal kurz zu umreißen. Das ist schon deswegen wünschenswert, damit der Leser über das Fundament, auf dem die HILLsche Mondtheorie ruht, und über die Definition der Begriffe, die es festigen, nicht im unklaren bleibt, wenn es gilt, auf dieser Grundlage weiterzubauen.

Wir erinnern uns der Gleichungen (XI; 88),

$$(\text{XXXIV};3)\qquad \begin{cases} \ddot\xi - 2n_1\dot\eta = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\[2ex] \ddot\eta + 2n_1\dot\xi = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \end{cases} \qquad \Omega = U + \frac{1}{2}n_1{}^2(\xi^2+\eta^2),$$

für die Koordinaten eines gestörten Körpers in einem rotierenden ξ, η-System, das sich in bezug auf das feste x, y-System um den Koordinatenursprung mit der Winkelgeschwindigkeit n_1 gleichmäßig dreht, wenn $U(x,y) = U(\xi,\eta)$ die Kräftefunktion und $\Omega - U$ das Potential der durch die Drehung bewirkten Zentrifugalbeschleunigung bedeutet. Im Falle der Mondbewegung („main problem") ist, wenn wir die Bahnneigung vernachlässigen, die ξ, η-Ebene mit der festen Ekliptik identisch, es ist

$$(\text{XXXIV};3\text{a})\quad U = k^2\frac{m_0}{r} + F \qquad (m_0 = \text{Masse Erde} + \text{Mond})$$

und die Störungsfunktion nach (XXXIII; 9)

$$(\text{XXXIV};3\text{b})\quad F = k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1{}'^3}\left[P_2' + \frac{r}{r_1'}(1-2\beta)P_3' + \cdots\right].$$

Hierin ist r der geozentrische Ortsvektor des Mondes, r_1' der baryzentrische Ortsvektor der Sonne und $P_2' = {}^3/_2 \cos^2 \psi - 1/2$, wenn ψ den Winkel zwischen den vom Baryzentrum G (Abb. 17, S. 404) ausgehenden Richtungen nach der Sonne und dem Mond bezeichnet. Unterdrücken wir die Terme mit P_3', P_4', ..., die Potenzen des sehr kleinen Faktors r/r_1' enthalten, setzen nach (XXXIII; 12) $k^2 m_1 = n_1^2 a_1'^3$ (a_1' = große Halbachse der elliptischen Sonnenbahn um G) und betrachten die Bahn der Sonne genähert als Kreis mit dem Halbmesser a_1', so ist $r_1' = a_1' = a_1$ gleich dem Mittelwert des Abstandes Erde—Sonne, und es ist

$$F = n_1^2 r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right)$$

nicht mehr von a_1 abhängig. Die Parallaxe der Sonne wird also in den Störungsausdrücken vernachlässigt, was nichts anderes bedeutet, als daß der Ort der Sonne, wie auch in Abschnitt 283 angenommen wurde, in den unendlich fernen Punkt der ξ-Achse verlegt wird. Daraus folgt aber, daß (vgl. Abb. 17) die Winkel ψ und φ einander gleich sind und daß sich nichts ändert, wenn man das ξ, η-System durch Parallelverschiebung (Abb. 20) so verlagert, daß der

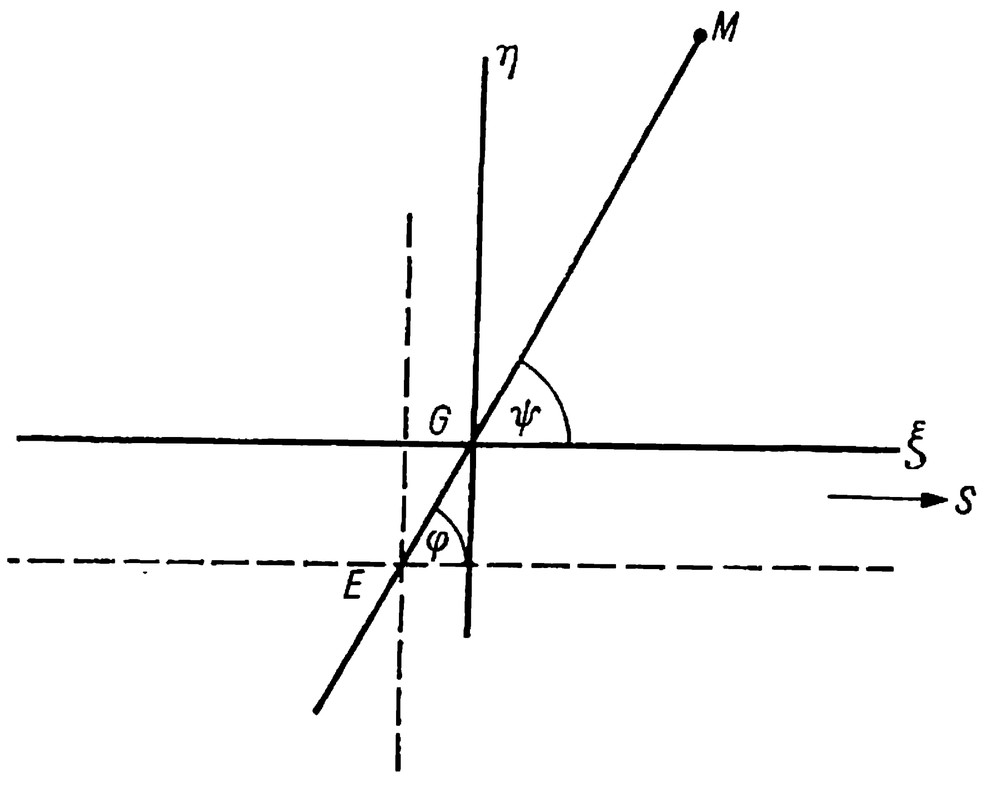

Abb. 20. Rotierendes System
(G = Massenmittelpunkt zwischen Erde E und Mond M;
Sonne S im unendlich fernen Punkt der ξ-Achse)

Koordinatenursprung in E (Erde) statt in G zu liegen kommt. Dann gilt für den Mondort $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$, $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, und es wird

$$F = \frac{1}{2} n_1^2 (3\xi^2 - r^2),$$

$$\Omega = \frac{k^2 m_0}{r} + \frac{1}{2} n_1^2 (3\xi^2 - r^2) + \frac{1}{2} n_1^2 (\xi^2 + \eta^2) = \frac{k^2 m_0}{r} + \frac{3}{2} n_1^2 \xi^2.$$

Die Differentialgleichungen (XXXIV; 3) nehmen dann die Form

$$\text{XXXIV;4)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2n_1\dot{\eta} = \left(3{n_1}^2 - k^2\,\dfrac{m_0}{r^3}\right)\xi = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n_1\dot{\xi} = -\,k^2\,\dfrac{m_0}{r^3}\,\eta = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} \end{cases}$$

an und gehen in (XXXIV; 1) über, wenn man die Einheiten so festlegt, daß $k = 1$, $m_0 = 1$, $n_1 = 1$ ist.

Wählt man andererseits die Zeiteinheit so, daß die synodische Umlaufszeit des Mondes gleich 2π wird, so hat man

$$\tau = vt = (n - n_1)\,t$$

statt der Zeit t zu setzen. Dividiert man also die Gleichungen (XXXIV; 4) durch $(n - n_1)^2$, so folgt, wenn man Ableitungen nach τ durch Striche kennzeichnet und $\mu = n_1/(n - n_1)$ setzt,[1])

$$\text{(XXXIV; 5)} \qquad \begin{cases} \xi'' - 2\mu\eta' = \left(3 - \dfrac{\varkappa^2}{r^3}\right)\mu^2\xi; \\ \eta'' + 2\mu\xi' = -\dfrac{\varkappa^2}{r^3}\,\mu^2\eta; \end{cases} \qquad \varkappa^2 = \frac{k^2 m_0}{{n_1}^2},$$

und diese Gleichungen haben das Jacobische Integral

$$\text{(XXXIV; 6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,(\xi'^2 + \eta'^2) - \Omega = C = \text{const}, \\ \Omega = \mu^2\left(\dfrac{3}{2}\,\xi^2 + \dfrac{\varkappa^2}{r}\right). \end{cases}$$

Die partikulären Lösungen von (XXXIV; 5) mit den Anfangsbedingungen (XXXIV; 2) haben dann die Form (XXI; 4),

$$\xi(\tau) = A_1\cos\tau + A_3\cos 3\tau + A_5\cos 5\tau + \cdots,$$
$$\eta(\tau) = B_1\sin\tau + B_3\sin 3\tau + B_5\sin 5\tau + \cdots.$$

Die Koeffizienten A_{2j+1}, B_{2j+1} sind Potenzreihen in μ, die mit einem Term von der Ordnung $2j$ beginnen und die mit dem für die Mondbewegung gültigen Wert $\mu = 0.08085$ verhältnismäßig rasch konvergieren.

---

[1]) In der Literatur wird meistens $m/(1 - m) = \mathrm{m}$ geschrieben. Da die Symbole m und m leicht verwechselt werden können, ziehen wir die Bezeichnung μ statt m vor. In Kapitel XXI ist die Größe μ mit m bezeichnet worden. Das ist hier nicht angebracht, da wir in Kapitel XXXIII $m = n_1/n$ gesetzt haben. Der Leser möge sich dadurch nicht irritieren lassen.

Diese Lösung wird, unter Verwendung des in Band II, S. 557 beschriebenen und von H. POINCARÉ eingeführten Kunstgriffs, nach der in Abschnitt 180 dargelegten Methode erhalten. Man führt statt ξ, η die komplexen Variablen $u = \xi + i\eta$, $s = \xi - i\eta$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ ein und setzt

$$\zeta = e^{ivt} = e^{i\tau}; \quad \zeta' = i\zeta,$$

also

$$u' = \frac{du}{d\zeta}\zeta' = i\zeta\frac{du}{d\zeta}; \quad u'' = i\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{du}{d\zeta}\right)i\zeta = -\zeta\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{du}{d\zeta}\right),$$

und erhält, wenn man den logarithmischen Operator $D = \zeta d/d\zeta$ verwendet,

$$u' = iDu, \quad u'' = -D^2u; \quad s' = iDs, \quad s'' = -D^2s.$$

Die Variablen $u(\tau), s(\tau)$ genügen dann den Differentialgleichungen (XXI; 12), in denen der (dort mit m bezeichnete) Parameter μ nur rechts vorkommt, während links die Größe p erscheint, die erst nach Lösung dieses Systems durch μ zu ersetzen ist. Diese Lösungen haben die Form

$$u = (1 + u_1\mu^2 + u_2\mu^4 + \cdots)\,\zeta,$$

$$s = (1 + s_1\mu^2 + s_2\mu^4 + \cdots)\,\zeta,$$

und die Konstante K, die der JACOBIschen Konstante C proportional ist, wird mittels der Potenzreihe

$$C = C_0 + C_1\mu^2 + C_2\mu^4 + \cdots$$

dargestellt.

Die Konstanten u_j, s_j, C_j erhält man, wie in Abschnitt 180 gezeigt worden ist, durch ein rasch förderndes Näherungsverfahren, auf dessen Mechanismus wir hier nur hinzuweisen brauchen. Diese Reihen enthalten noch einen unbestimmten Faktor σ (Skalenfaktor genannt), der in Abschnitt 181 als Potenzreihe nach μ bestimmt wird. Durch dieses Verfahren gelingt es, die nur von μ abhängigen Störungsterme zu isolieren, und die in dieser partikulären Lösung auftretenden Potenzreihen konvergieren verhältnismäßig rasch.

Andere Wege zur Lösung des Variationsproblems hat K. STUMPFF vorgeschlagen; sie sind in den Abschnitten 183—185 beschrieben worden. Sie beruhen auf der Analyse der Differentialgleichung dritter Ordnung für den Radiusvektor r und auf der Einführung einer neuen unabhängigen Variablen q durch die Bedingungen $\dot{q} = 1/r$ (Abschnitt 184) bzw. $\dot{q} = \Theta(r)/r$ (Abschnitt 185). Diese Ansätze zu einer neuen Behandlung des Problems sind nur zu ersten Näherungen durchgeführt worden, die teils bis zu Termen mit μ^3, teils bis zu solchen mit μ^4 reichen. Den interessierten Leser werden diese Ergebnisse zu weiterführenden Versuchen ermutigen.

285. Der Variationsbahn benachbarte Lösungen. Die Hillsche Gleichung

Wir schreiben die Differentialgleichungen (XXXIV; 5) wiederum in der Form

$$\text{(XXXIV; 7)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\mu\dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}; \\ \dfrac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\mu\dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}; \\ \Omega = \left(\dfrac{3}{2}\xi^2 + \dfrac{\varkappa^2}{r}\right)\mu^2; \quad \varkappa^2 = \dfrac{k^2 m_0}{{n_1}^2}, \quad \mu = \dfrac{n_1}{\nu} \end{cases} \qquad \tau = \nu(t - t_0), \quad \nu = n - n_1,$$

mit dem Jacobischen Integral

$$\text{(XXXIV; 8)}\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2\right] - \Omega = C,$$

und es sei $\xi_0(\tau)$, $\eta_0(\tau)$ die partikuläre Lösung dieses Systems mit den Anfangsbedingungen (XXXIV; 2), denen die Konstanten μ bzw. $C(\mu)$ und t_0 entsprechen.

Wir betrachten nun eine Lösung $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ in der Nachbarschaft von ξ_0, η_0, d. h., es sei $\xi = \xi_0 + \delta\xi$, $\eta = \eta_0 + \delta\eta$ und $\delta\xi$, $\delta\eta$ seien kleine Inkremente, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Aus (XXXIV; 7) folgt dann

$$\text{(XXXIV; 9)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{d\tau^2}(\delta\xi) - 2\mu\dfrac{d}{d\tau}(\delta\eta) = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial{\xi_0}^2}\delta\xi + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_0\partial\eta_0}\delta\eta, \\ \dfrac{d^2}{d\tau^2}(\delta\eta) + 2\mu\dfrac{d}{d\tau}(\delta\xi) = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_0\partial\eta_0}\delta\xi + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial{\eta_0}^2}\delta\eta \end{cases}$$

und aus (XXXIV; 8)

$$\text{(XXXIV; 10)}\quad \frac{d\xi_0}{d\tau}\frac{d}{d\tau}(\delta\xi) + \frac{d\eta_0}{d\tau}\frac{d}{d\tau}(\delta\eta) - \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_0}\delta\xi - \frac{\partial\Omega}{\partial\eta_0}\delta\eta = \delta C.$$

Da die Gleichungen (XXXIV; 7) unter der Voraussetzung gelten, daß die Parameter i (Neigung), e_1 und a/a_1 als verschwindend klein anzusehen sind, wird die Lösung des Systems (XXXIV; 9) außer dem Parameter μ nur noch die Exzentrizität e einer intermediären Bahn in der ersten Potenz enthalten. Die Variablen $\delta\xi$, $\delta\eta$ führen also auch die mittlere Anomalie und die Bewegung $(1 - c)\,n$ des Perigäums in das Problem ein. Um die letztere auf ihre Hauptterme zurückzuführen, die nur von μ abhängen, ist eine Transformation der Gleichungen (XXXIV; 9) erforderlich. Hill bemerkt zunächst, daß das

System (XXXIV; 9) die partikuläre Lösung

$$\delta\xi = \frac{d\xi_0}{d\tau}; \quad \delta\eta = \frac{d\eta_0}{d\tau}$$

zuläßt, vorausgesetzt, daß $\delta C = 0$ ist. Er führt dann zwei neue Variable p und q durch die Gleichungen

$$\text{(XXXIV; 11)} \qquad \delta\xi = p\frac{d\xi_0}{d\tau} - q\frac{d\eta_0}{d\tau}; \quad \delta\eta = q\frac{d\xi_0}{d\tau} + p\frac{d\eta_0}{d\tau}$$

ein. Die oben angegebene partikuläre Lösung entspricht dann den Bedingungen $p = 1, q = 0$. Führt man (XXXIV; 11) in (XXXIV; 9) ein, so erhält man zwei lineare homogene Differentialgleichungen für $p(\tau)$ und $q(\tau)$, und kombiniert man diese mit dem JACOBIschen Integral (XXXIV; 10), wiederum unter der Bedingung $\delta C = 0$, so läßt sich p eliminieren, und es ergibt sich eine einzige Differentialgleichung für $q(\tau)$. Diese Rechnung wird einfacher, wenn man, wie in Abschnitt 284, die konjugiert komplexen Variablen $u = \xi + i\eta$, $s = \xi - i\eta$ einführt. Dann ist

$$\xi = \frac{1}{2}(u + s); \quad \eta = -\frac{i}{2}(u - s),$$

und ersetzt man die unabhängige Variable τ durch $\zeta = e^{i\tau}$ und benutzt den Operator $D = \zeta d/d\zeta$, so ist wie früher

$$\frac{d}{d\tau} = iD; \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = -D^2,$$

und es entstehen statt (XXXIV; 5) die Gleichungen

$$-\frac{1}{2}D^2(u + s) - \mu D(u - s) = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \frac{\partial\Omega}{\partial u} + \frac{\partial\Omega}{\partial s},$$

$$\frac{i}{2}D^2(u - s) + i\mu D(u + s) = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \frac{\partial\Omega}{\partial s}\right),$$

woraus leicht

$$\text{(XXXIV; 12)} \qquad \begin{cases} D^2u + 2\mu Du + 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial s} = 0, \\ D^2s - 2\mu Ds + 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

folgt. Ebenso erhält man aus (XXXIV; 6)

$$\text{(XXXIV; 13)} \qquad DuDs + 2\Omega + 2C = 0$$

und durch Variation dieser drei Gleichungen

$$\text{(XXXIV; 14)}\quad \begin{cases} D^2\delta u + 2\mu D\delta u + 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0 \partial s_0}\,\delta u + 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}\,\delta s = 0, \\ D^2\delta s - 2\mu D\delta s + 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}\,\delta u + 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0 \partial s_0}\,\delta s = 0, \\ Du_0 D\delta s + Ds_0 D\delta u + 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,\delta u + 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,\delta s = 0. \end{cases}$$

Aus (XXXIV; 11) und aus $\delta u = \delta\xi + i\delta\eta$, $\delta s = \delta\xi - i\delta\eta$, $d/d\tau = iD$ leitet man

$$\text{(XXXIV; 15)}\quad \begin{cases} \delta u = (p + iq)\dfrac{d\xi_0}{d\tau} + (ip - q)\dfrac{d\eta_0}{d\tau} = (ip - q)Du_0, \\ \delta s = (p - iq)\dfrac{d\xi_0}{d\tau} - (ip + q)\dfrac{d\eta_0}{d\tau} = (ip + q)Ds_0 \end{cases}$$

ab. Setzt man zur Abkürzung $p' = ip$, so folgt, wenn man D^2u_0, D^2s_0 durch (XXXIV; 12) ausdrückt,

$$\text{(XXXIV; 16)}\quad \begin{cases} D\delta u = D(p' - q)\,Du_0 + (p' - q)\left(-2\mu Du_0 - 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}\right), \\ D\delta s = D(p' + q)\,Ds_0 + (p' + q)\left(2\mu Ds_0 - 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\right), \\ D^2\delta u = D^2(p' - q)\,Du_0 + 2D(p' - q)\left(-2\mu Du_0 - 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}\right) + \\ \qquad + (p' - q)\left(4\mu^2 Du_0 + 4\mu\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0} - 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0 \partial s_0}\,Du_0 - \right. \\ \qquad \left. - 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}\,Ds_0\right), \\ D^2\delta s = D^2(p' + q)\,Ds_0 + 2D(p' + q)\left(2\mu Ds_0 - 2\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\right) + \\ \qquad + (p' + q)\left(4\mu^2 Ds_0 - 4\mu\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0} - 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}Du_0 - \right. \\ \qquad \left. - 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0 \partial s_0}\,Ds_0\right). \end{cases}$$

Wegen (XXXIV; 15, 16) nehmen die Gleichungen (XXXIV; 14) die Form (XXXIV; 17)

$$\begin{cases} D^2(p'-q)\,Du_0 - 2D(p'-q)\left(2\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0} + \mu Du_0\right) + 4q\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}\,Ds_0 = 0, & \Big| -\dfrac{1}{2}\,Ds_0 \\ D^2(p'+q)\,Ds_0 - 2D(p'+q)\left(2\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0} - \mu Ds_0\right) - 4q\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}\,Du_0 = 0, & \Big| +\dfrac{1}{2}\,Du_0 \\ Dp'Du_0Ds_0 + 2q\left(\mu Du_0Ds_0 - \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,Du_0 + \dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,Ds_0\right) = \dot{0} \end{cases}$$

an. Aus den ersten beiden dieser Gleichungen erhält man ferner, wenn man sie mit den nebenstehenden Faktoren multipliziert und die Produkte addiert,

$$\text{(XXXIV; 18)}\quad D^2qDu_0Ds_0 - 2Dq\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,Du_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,Ds_0\right) + \\ + 2Dp'\left(\mu Du_0Ds_0 - \frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,Du_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,Ds_0\right) - \\ - 2q\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}\,(Du_0)^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}\,(Ds_0)^2\right] = 0.$$

Setzt man nun

$$\text{(XXXIV; 19)}\qquad \mu Du_0Ds_0 - \frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,Du_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,Ds_0 = \Phi$$

und leitet aus der Gleichung (XXXIV; 13)

$$\text{(XXXIV; 20)}\quad D(Du_0Ds_0) = -2D\Omega = -2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\,Du_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}\,Ds_0\right)$$

ab, so läßt sich (XXXIV; 18)

$$\text{(XXXIV; 21)}\quad D^2q + \frac{D(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0}\,Dq + \frac{2\Phi}{Du_0Ds_0}\,Dp' - \\ - \frac{2q}{Du_0Ds_0}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}\,(Du_0)^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}\,(Ds_0)^2\right] = 0$$

schreiben, während die letzte Gleichung (XXXIV; 17)

$$Dp' + 2q\,\frac{\Phi}{Du_0Ds_0} = 0$$

ergibt. Setzt man dies in (XXXIV; 21) ein, so folgt für $q(\tau)$ die Differentialgleichung

$$\text{(XXXIV; 22a)}\qquad D^2q + HDq - Kq = 0,$$

in der zur Abkürzung

$$\text{(XXXIV; 22b)}\quad \begin{cases} H = \dfrac{D(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0}, \\ K = \dfrac{2}{Du_0 Ds_0}\left[\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {u_0}^2}(Du_0)^2 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial {s_0}^2}(Ds_0)^2\right] + \dfrac{4\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} \end{cases}$$

gesetzt ist.

Das ist die „Hillsche Gleichung", deren Koeffizienten durch die intermediäre Variationsbahn bestimmt sind und deren Lösungen daher nur von τ abhängen.

286. Reduzierte Form der Hillschen Gleichung

Die Hillsche Gleichung (XXXIV; 22a, b) läßt sich auf eine einfachere Form zurückführen. Setzt man $q = \varphi\varrho$, so erhält man aus (XXXIV; 22a)

$$\varphi D^2\varrho + 2D\varphi D\varrho + \varrho D^2\varphi + H(\varphi D\varrho + \varrho D\varphi) - K\varphi\varrho = 0$$

oder

$$\text{(XXXIV; 23)}\quad \varphi D^2\varrho + (H\varphi + 2D\varphi)\, D\varrho - (K\varphi - D^2\varphi - HD\varphi)\,\varrho = 0.$$

Da man über eine der beiden Funktionen φ, ϱ frei verfügen kann, bestimmt man φ durch

$$\text{(XXXIV; 24)}\qquad H\varphi + 2D\varphi = 0,$$

woraus

$$HD\varphi + (DH)\,\varphi + 2D^2\varphi = 0$$

und

$$-D^2\varphi - HD\varphi = \left(\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2}DH\right)\varphi$$

folgt. Setzt man also

$$\text{(XXXIV; 25)}\qquad K + \frac{H^2}{4} + \frac{1}{2}DH = \Theta,$$

so nimmt die Hillsche Gleichung die reduzierte Form

$$\text{(XXXIV; 26)}\qquad D^2\varrho - \Theta\varrho = 0$$

an. Da K und H die Größe $Du_0 Ds_0$ im Nenner enthalten und da (XXXIV; 26) aus (XXXIV; 23) folgt, indem man durch φ dividiert, so muß noch gezeigt werden, daß $Du_0 Ds_0$ und φ von Null verschieden sind. In der Tat ist

$$Du_0 Ds_0 = (D\xi_0 + iD\eta_0)\,(D\xi_0 - iD\eta_0) = (D\xi_0)^2 + (D\eta_0)^2$$

und, wegen $D = \frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}$,

$$Du_0 Ds_0 = -\left(\frac{d\xi_0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\eta_0}{d\tau}\right)^2 = -V_0^2$$

gleich dem negativen Quadrat der Geschwindigkeit in der Variationsbahn.

Aus (XXXIV; 22b) folgt sodann

$$H = \frac{D(-V_0^2)}{-V_0^2} = -\frac{1}{V_0^2}\frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}(-V_0^2) = \frac{2}{iV_0}\frac{dV_0}{d\tau} = \frac{2}{i}\frac{d\ln V_0}{d\tau}.$$

Andererseits ist wegen (XXXIV; 24)

$$H = -2\frac{D\varphi}{\varphi} = -\frac{2}{\varphi}\frac{1}{i}\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{2}{i}\frac{d\ln\varphi}{d\tau},$$

woraus $\varphi = 1/V_0$ folgt.

Da für alle Punkte der Variationsbahn die Geschwindigkeit endlich und von Null verschieden ist, ist die Division durch $Du_0 Ds_0$ und φ erlaubt. Die Gültigkeit der HILLschen Gleichung (XXXIV; 26) ist damit für alle Werte von τ bewiesen.

287. Berechnung der Funktion Θ

Die Funktion Θ, die den Kern der HILLschen Gleichung (XXXIV; 26) bildet, hat wegen (XXXIV; 25, 22b) eine recht komplizierte Gestalt. Sie läßt sich auf folgende Weise in eine Form bringen, die eine trigonometrische Entwicklung nach Vielfachen von 2τ ermöglicht.

Aus der ersten Gleichung (XXXIV; 22b) und aus (XXXIV; 20) folgt

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2}DH = -\frac{D^2\Omega}{Du_0 Ds_0} - \left(\frac{D\Omega}{Du_0 Ds_0}\right)^2.$$

Andererseits ist

$$D\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial u_0}Du_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}Ds_0,$$

$$D^2\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial u_0}D^2u_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial s_0}D^2s_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0^2}(Du_0)^2 + 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial s_0^2}(Ds_0)^2.$$

Eliminiert man D^2u_0, D^2s_0 mittels der Gleichungen (XXXIV; 12) und führt Φ durch (XXXIV; 19) ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

(XXXIV; 27)
$$\begin{cases} D^2\Omega = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0^2}(Du_0)^2 + 2\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial s_0^2}(Ds_0)^2 - \\ \qquad - 4\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0} + 2\mu\Phi - 2\mu^2Du_0Ds_0, \\ (D\Omega)^2 = \Phi^2 - 2\mu\Phi Du_0Ds_0 + \mu^2(Du_0Ds_0)^2 + 4\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}Du_0Ds_0, \end{cases}$$

woraus

(XXXIV; 28)
$$\frac{H^2}{4}+\frac{1}{2}DH=-\frac{1}{Du_0Ds_0}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0{}^2}(Du_0)^2+2\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0+\frac{\partial^2\Omega}{\partial s_0{}^2}(Ds_0)^2\right]-$$
$$-\frac{\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}+\mu^2$$

folgt. Aus (XXXIV; 28) und der ersten Gleichung (XXXIV; 22b) erhält man also

(XXXIV; 29) $$\Theta=\frac{1}{Du_0Ds_0}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0{}^2}(Du_0)^2-2\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0+\frac{\partial^2\Omega}{\partial s_0{}^2}(Ds_0)^2\right]+$$
$$+3\frac{\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}+\mu^2.$$

Nun folgt aber aus (XXXIV; 20) $D^2(Du_0Ds_0)=-2D^2\Omega$, demnach aus (XXXIV; 27)

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0{}^2}(Du_0)^2-2\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0+\frac{\partial^2\Omega}{\partial s_0{}^2}(Ds_0)^2=$$
$$=-\frac{1}{2}D^2(Du_0Ds_0)-4\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0+4\frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\frac{\partial\Omega}{\partial s_0}-2\mu\Phi+2\mu^2Du_0Ds_0.$$

Daher kann man statt (XXXIV; 29) auch

$$\Theta=\frac{1}{Du_0Ds_0}\left[4\frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\frac{\partial\Omega}{\partial s_0}-2\mu\Phi+2\mu^2Du_0Ds_0-\frac{1}{2}D^2(Du_0Ds_0)-\right.$$
$$\left.-4\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}Du_0Ds_0\right]+3\frac{\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}+\mu^2$$

oder

(XXXIV; 30)
$$\Theta=4\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial u_0}\frac{\partial\Omega}{\partial s_0}}{Du_0Ds_0}-2\frac{\mu\Phi}{Du_0Ds_0}+3\mu^2-4\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_0\partial s_0}-\frac{1}{2}\frac{D^2(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0}+3\frac{\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}$$

schreiben. Dieser Ausdruck wird durch die folgenden Umformungen auf eine endgültige Gestalt gebracht, die für eine Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen geeignet sein wird.

Setzt man nach (XXXIV; 6)

(XXXIV; 31) $$\Omega=\frac{3}{2}\mu^2\xi^2+\frac{\mu^2\varkappa^2}{r}$$

und

$$\xi = \frac{1}{2}(u+s); \quad \eta = -\frac{i}{2}(u-s); \quad r^2 = us,$$

so erhält man

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_0} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3}s_0 + \dfrac{3}{4}\mu^2(u_0+s_0), \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u_0 \partial s_0} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3} + \dfrac{3}{4}\mu^2. \end{cases}$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen (XXXIV; 12)

$$\text{(b)} \qquad 4\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_0}\dfrac{\partial\Omega}{\partial s_0}}{Du_0 Ds_0} = \left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+2\mu\right)\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-2\mu\right) = \\ = \frac{D^2u_0 D^2s_0}{Du_0 Ds_0} - 2\mu\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right) - 4\mu^2$$

und aus (XXXIV; 19), wenn man $\partial\Omega/\partial u_0$, $\partial\Omega/\partial s_0$ durch (XXXIV; 12) eliminiert,

$$\text{(c)} \qquad -2\mu\frac{\Phi}{Du_0 Ds_0} = 2\mu^2 + \mu\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right),$$

hieraus

$$\text{(d)} \qquad \frac{\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} = \mu^2 + \mu\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)^2.$$

Schließlich ergibt sich unmittelbar

$$\text{(e)} \qquad \frac{D^2(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0} = D\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right) + \left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)^2.$$

Setzt man die Ausdrücke (a) bis (e) in (XXXIV; 30) ein, so folgt nach einfacher Reduktion für Θ die Formel

$$\text{(XXXIV; 32)} \quad \Theta = -\frac{\varkappa^2\mu^2}{{r_0}^3} - \mu^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}+2\mu\right)^2 - \frac{1}{2}D\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right).$$

288. Die Hillschen Reihen

Aus (XXXIV; 32) folgt, daß Θ reell ist, denn auch der letzte Term

$$D\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)=D\left(\frac{D^2u_0Ds_0+D^2s_0Du_0}{Du_0Ds_0}\right)=D\frac{D(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0}=DH=\frac{1}{i}\frac{dH}{d\tau}$$

ist reell, da H rein imaginär ist.

Wir werden zeigen, daß Θ eine gerade Funktion ist, die in eine nach den Kosinus der Vielfachen von 2τ fortschreitende trigonometrische Reihe entwickelt werden kann. Die Berechnung dieser Reihe läßt sich auf die Entwicklung der drei Größen

$$\frac{1}{{r_0}^3};\quad\frac{D^2u_0}{Du_0};\quad\frac{D^2s_0}{Ds_0}$$

nach Potenzen von $\zeta=e^{i\tau}$ zurückführen. Aus (XXXIV; 31) und (XXXIV; 12) folgt

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s_0}=-\frac{1}{2}\frac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3}u_0+\frac{3}{4}\mu^2(u_0+s_0)=-\frac{1}{2}(D^2u_0+2\mu Du_0),$$

also

$$\frac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3}=\frac{D^2u_0+2\mu Du_0+\frac{3}{2}\mu^2s_0}{u_0}+\frac{3}{2}\mu^2.$$

Wie in Abschnitt 180, auf den wir hier verweisen, auseinandergesetzt worden ist, lassen sich die konjugiert-komplexen Koordinaten u_0, s_0 der Variationsbahn in die Potenzreihen (XXI; 11)

$$u_0=\sigma\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j\zeta^{2j+1};\qquad s_0=\sigma\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_{-j}\zeta^{2j-1}=\sigma\sum_j a_{-j-1}\zeta^{2j+1}$$

entwickeln, wenn σ den „Skalenfaktor“ darstellt, dessen Ausdruck als Funktion von μ in Abschnitt 181 bestimmt worden ist.[1]) Wegen $D=\zeta d/d\zeta$ folgt

$$Du_0=\sigma\sum_j a_j(2j+1)\,\zeta^{2j+1};\qquad D^2u_0=\sigma\sum_j a_j(2j+1)^2\zeta^{2j+1},$$

also

$$\frac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3}=\frac{\sum_j\left[(2j+1)^2a_j+2\mu(2j+1)\,a_j+\frac{3}{2}\mu^2a_{-j-1}\right]\zeta^{2j+1}}{\sum_j a_j\zeta^{2j+1}}+\frac{3}{2}\mu^2$$

---

[1]) Wir erinnern nochmals daran, daß der Parameter μ in Kapitel XXI mit m bezeichnet wird.

oder

$$\text{(XXXIV; 33)}\qquad \frac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3} = 1 + 2\mu + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{\sum_j \left[4j(j+1+\mu)\,a_j + \frac{3}{2}\mu^2 a_{-j-1}\right]\zeta^{2j}}{\sum_j a_j\zeta^{2j}}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\text{(XXXIV; 34)}\qquad \frac{D^2u_0}{Du_0} = \frac{\sum_j a_j(2j+1)^2\,\zeta^{2j}}{\sum a_j(2j+1)\,\zeta^{2j}}$$

und

$$\text{(XXXIV; 35)}\qquad \frac{D^2s_0}{Ds_0} = \frac{\sum_j a_{-j-1}(2j+1)^2\,\zeta^{2j}}{\sum a_{-j-1}(2j+1)\,\zeta^{2j}} = \frac{-\sum_j a_j(2j+1)^2\,\zeta^{-2j}}{\sum_j a_j(2j+1)\,\zeta^{-2j}}.$$

Die Ausdrücke in (XXXIV; 33, 34, 35), aus denen wir den Skalenfaktor σ und eine Potenz von ζ herausgehoben haben, erweisen sich also als Quotienten zweier ganzer und gerader Funktionen von ζ und lassen sich daher selber auf ganze und gerade Funktionen von ζ zurückführen.

Setzt man

$$\text{(XXXIV; 36)}\qquad 4j(j+1+\mu)\,a_j + \frac{3}{2}\mu^2 a_{-j-1} = b_j$$

und

$$\text{(XXXIV; 37)}\qquad \frac{\sum_j b_j\zeta^{2j}}{\sum_j a_j\zeta^{2j}} = \sum_j Q_j\zeta^{2j};\quad \sum_j b_j\zeta^{2j} = \sum_j Q_j\zeta^{2j}\cdot\sum_j a_j\zeta^{2j},$$

so folgt

$$\text{(XXXIV; 37a)}\qquad \frac{\mu^2\varkappa^2}{{r_0}^3} = 1 + 2\mu + \frac{3}{2}\mu^2 + \sum_j Q_j\zeta^{2j}.$$

Aus der Gleichung (XXXIV; 37) erhält man durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von ζ auf beiden Seiten

$$\text{(XXXIV; 38)}\qquad \begin{cases} b_0 = a_0Q_0 + a_{-1}Q_1 + a_1Q_{-1} + a_{-2}Q_2 + a_2Q_{-2} + \cdots, \\ b_1 = a_1Q_0 + a_0Q_1 + a_2Q_{-1} + a_{-1}Q_2 + a_3Q_{-2} + \cdots, \\ b_{-1} = a_{-1}Q_0 + a_{-2}Q_1 + a_0Q_{-1} + a_{-3}Q_2 + a_1Q_{-2} + \cdots, \\ b_2 = a_2Q_0 + a_1Q_1 + a_3Q_{-1} + a_0Q_2 + a_4Q_{-2} + \cdots, \\ b_{-2} = a_{-2}Q_0 + a_{-3}Q_1 + a_{-1}Q_{-1} + a_{-4}Q_2 + a_0Q_{-2} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\

($j = 0, 1, 2, \ldots$), und die Gleichungen (XXXIV; 38) lassen sich daher auch

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 Q_0 + (a_1 + a_{-1})\, Q_1 + (a_2 + a_{-2})\, Q_2 + \cdots,\\
b_1 &= a_1 Q_0 + (a_0 + a_2)\, Q_1 + (a_3 + a_{-1})\, Q_2 + \cdots,\\
b_{-1} &= a_{-1} Q_0 + (a_0 + a_{-2})\, Q_1 + (a_1 + a_{-3})\, Q_2 + \cdots,\\
b_2 &= a_2 Q_0 + (a_1 + a_3)\, Q_1 + (a_0 + a_4)\, Q_2 + \cdots,\\
b_{-2} &= a_{-2} Q_0 + (a_{-1} + a_{-3})\, Q_1 + (a_0 + a_{-4})\, Q_2 + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

schreiben. Die Koeffizienten a_j und daher auch die b_j sind aus der Variationstheorie als Potenzreihen nach μ bekannt. Da der Skalenfaktor σ herausfällt, ist es gleichgültig, ob man die Reihen (XXI; 10) mit $a_0 = 1$ oder die Reihen (XXI; 24) zugrunde legt.[1]) Da die a_j, die (wenn wir vom Skalenfaktor absehen) von der Ordnung $m^{2|j|}$ sind, mit wachsendem $|j|$ rasch abnehmen, so lassen sich die Q_j aus diesen Gleichungen leicht durch ein rasch konvergierendes Näherungsverfahren bestimmen. So erhält man Q_0, Q_1, Q_2 bereits sehr genau aus dem System

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 Q_0 + (a_1 + a_{-1})\, Q_1 + (a_2 + a_{-2})\, Q_2,\\
b_1 + b_{-1} &= (a_1 + a_{-1})\, Q_0 + (2a_0 + a_2 + a_{-2})\, Q_1 + (a_1 + a_{-1} + a_3 + a_{-3})\, Q_2,\\
b_2 + b_{-2} &= (a_2 + a_{-2})\, Q_0 + (a_1 + a_{-1} + a_3 + a_{-3})\, Q_1 + (2a_0 + a_4 + a_{-4})\, Q_2,
\end{aligned}$$

dessen symmetrische Determinante in der Hauptdiagonale Terme der nullten Ordnung enthält. Die Q_j sind also Größen von der Ordnung μ^{2j}. Die fehlenden Terme rechts sind von der Ordnung μ^{12} bzw. μ^{10} bzw. μ^8, so daß die Lösung bis zur Ordnung μ^6 genau ist.

Aus (XXXIV; 34, 35) leitet man ferner

$$\text{(XXXIV; 39)} \qquad \frac{D^2 u_0}{D u_0} = \sum_j V_j \zeta^{2j}; \qquad \frac{D^2 s_0}{D s_0} = -\sum_j V_j \zeta^{-2j}$$

ab. In ähnlicher Weise, wie die Q_j aus (XXXIV; 37) erhalten wurden, lassen sich die V_j aus einer der beiden Gleichungen (XXXIV; 39) bestimmen. Die Reihen (XXXIV; 37, 39) werden „HILLsche Reihen“ genannt. Aus ihnen setzt sich nach (XXXIV; 32) die Funktion Θ zusammen, und die Rechnung ergibt dann, daß Θ eine gerade Funktion von 2τ ist. Die HILLschen Reihen, zusammen mit den ganzen Reihen in ζ, die u_0 und s_0 ausdrücken, bestimmen die Lösung des Hauptproblems der Mondtheorie. Für den aus Beobachtungen

---

[1]) In (XXI; 10 bzw. 24) ist die Entwicklung bis zu Termen mit μ^5 bzw. $\mu^{2/3}\mu^5$ durchgeführt worden. Terme höherer Ordnung findet man in der Originalabhandlung von HILL (G. W. HILL, Researches in the lunar theory. Amer. J. Math. *1*, 5, 23, 129 und 245 (1878)) und in anderen Werken, z. B. bei CHARLIER (C. V. L. CHARLIER, Die Mechanik des Himmels, Bd. 2. Leipzig 1907, Nachdruck 1928, S. 160), der noch Terme sechster Ordnung angibt.

sehr genau bekannten Wert

$$\mu = 0.08084\ 89338\ 08312\ \ldots$$

ergibt sich für Θ die trigonometrische Reihe

$$\begin{aligned}\Theta = 1.&15884\ 39395\ 96583\\ -\ 0.&11408\ 80374\ 93807 \cos\ 2\tau\\ +\ &76\ 64759\ 95109 \cos\ 4\tau\\ -\ &1\ 83465\ 77790 \cos\ 6\tau\\ +\ &1088\ 95009 \cos\ 8\tau\\ -\ &20\ 98671 \cos 10\tau\\ +\ &12103 \cos 12\tau\\ -\ &211 \cos 14\tau .\end{aligned}$$

289. Einführung einer unendlichen Determinante

Wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, läßt sich die Funktion Θ, die eine gerade periodische Funktion von 2τ mit der Periode 2π ist, in die trigonometrische Reihe

$$\Theta = \vartheta_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j \cos 2j\tau = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \vartheta_j \zeta^{2j}, \qquad (\vartheta_j = \vartheta_{-j})$$

entwickeln. Die HILLsche Gleichung $D^2\varrho - \Theta\varrho = 0$, die man auch in der Form

$$\text{(XXXIV; 40)} \qquad \frac{d^2\varrho}{d\tau^2} + \Theta\varrho = 0$$

schreiben kann, besitzt, sofern man Θ auf den konstanten Term ϑ_0 beschränkt, die partikuläre Lösung

$$\text{(XXXIV; 41)} \qquad \varrho = \varrho_0 \cos\left(\sqrt{\vartheta_0}\,\tau + l_0\right)$$

mit den willkürlichen Konstanten ϱ_0, l_0. Eine allgemeinere Lösung von (XXXIV; 40) ergibt sich, wenn man

$$\text{(XXXIV; 42)} \qquad \varrho = \varrho_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \cos\left[(2k + c)\,\tau + Q\right]$$

ansetzt, wo c und Q Konstante sind und die q_k als Funktionen der ϑ_j zu betrachten sind, damit (XXXIV; 40) gilt. Es ist dann

$$\text{(XXXIV; 43)} \qquad \frac{d^2\varrho}{d\tau^2} + \Theta\varrho = -\varrho_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k[(2k + c)^2 - \Theta] \cos\left[(2k + c)\,\tau + Q\right].$$

Die partikuläre Lösung (XXXIV; 41) erhält man für $k = 0$, d. h., (XXXIV; 42) geht in

$$\varrho = \varrho_0 q_0 \cos\,(c\tau + Q) = \varrho_0 \cos\left(\sqrt{\vartheta_0}\,\tau + l_0\right)$$

über, so daß dann speziell

$$q_0 = 1; \quad c = \sqrt{\vartheta_0}; \quad Q = l_0$$

wird. Die Lösung (XXXIV; 42) läßt sich, mit $\zeta = e^{i\tau}$,

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_0\left[e^{iQ}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k\zeta^{2k+c} + e^{-iQ}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k\zeta^{-2k-c}\right]$$

schreiben, und die HILLsche Gleichung lautet daher, da sich die Konstante $^1/_2\varrho_0$ heraushebt,

$$e^{iQ}\sum_k [q_k\{(2k+c)^2 - \vartheta_0 - \vartheta_1(\zeta^2+\zeta^{-2}) - \vartheta_2(\zeta^4+\zeta^{-4}) - \cdots\}\,\zeta^{2k+c}] +$$
$$+ e^{-iQ}\sum_k [q_k\{(2k+c)^2 - \vartheta_0 - \vartheta_1(\zeta^2+\zeta^{-2}) - \vartheta_2(\zeta^4+\zeta^{-4}) - \cdots\}\,\zeta^{-2k-c}] = 0.$$

Da diese Gleichung identisch für alle ζ gilt, verschwinden die Koeffizienten gleicher Potenzen von ζ, also ist

$$\text{(XXXIV; 44)}\quad q_k\big((2k+c)^2 - \vartheta_0\big) - \vartheta_1(q_{k+1}+q_{k-1}) - \vartheta_2(q_{k+2}+q_{k-2}) - \\ - \vartheta_3(q_{k+3}+q_{k-3}) - \cdots = 0$$

für $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Von diesen Gleichungen schreiben wir nur die fünf mit $k = -2, -1, 0, +1, +2$ und in ihnen nur die Summanden mit $q_{-2}, q_{-1}, q_0, q_1, q_2$ explizite aus:

$$\text{(XXXIV; 45)}\quad \left\{\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots

Unbekannten ist, auf unendliche Systeme wie das obige auszudehnen. Dabei hat er, bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Theorie des Mondes, zum ersten Male unendliche Determinanten in die mathematische Analysis dynamischer Probleme eingeführt. H. POINCARÉ hat in einer meisterhaften Studie[1]) über HILLS Arbeit streng bewiesen, daß dies gewagte Vorgehen berechtigt ist.

Da $0 < \vartheta_0 < 2$ ist, dürfen wir die Gleichungen (XXXIV; 45) durch $(2k)^2 - \vartheta_0$ dividieren und erhalten dann als Determinante des unendlichen Systems

(XXXIV; 46) $\quad \Delta^{\infty}(c) = 0 =$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \dfrac{(c-4)^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c-2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \dfrac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{c^2-\vartheta_0}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_0}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \dfrac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c+2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \dfrac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c+4)^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

die sich, wenn wir nur den inneren Kern mit fünf Zeilen und Spalten aufschreiben und alle anderen Elemente dieser Determinante unterdrücken, auf die endliche Determinante fünfter Ordnung

$$\Delta^{(5)}(c) = \begin{vmatrix} \dfrac{(c-4)^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} \\ \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c-2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} \\ \dfrac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{c^2-\vartheta_0}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} \\ \dfrac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c+2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} \\ \dfrac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \dfrac{(c+4)^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} \end{vmatrix}$$

[1]) H. POINCARÉ, Sur les déterminants d'ordre infini. Bull. Soc. math. France *14*, 77.

zurückführen läßt. Jede Gleichung $\Delta^{(n)}(c) = 0$ stellt dann eine algebraische Gleichung $2n$-ten Grades dar, deren Lösung einen Näherungswert für c ergibt, der für $n \to \infty$ gegen die Lösung von $\Delta^{(\infty)}(c) = 0$ strebt. Insbesondere ergibt sich aus $\Delta^{(1)}(c) = (c^2 - \vartheta_0)/(-\vartheta_0) = 0$ die spezielle Lösung $c_0 = \sqrt{\vartheta_0}$.

290. Berechnung der Bewegung des Perigäums

Die Gleichung $\Delta^{(\infty)}(c) = 0$ ergibt als Lösung die auf das rotierende System bezogene Bewegung des Perigäums, insoweit sie nur von μ abhängt. HILLS Methode zur Bewältigung dieser Aufgabe ist ein Meisterwerk dieses genialen Mathematikers. Er benutzt zu diesem Zwecke die unendliche Determinante $\Delta_1^{(\infty)}(c)$, die aus $\Delta^{(\infty)}(c)$ entsteht, wenn man jede Zeile mit dem reziproken Wert desjenigen ihrer Elemente multipliziert, das der Hauptdiagonale angehört. Dann ist

(XXXIV; 47) $\Delta_1^{\infty}(c) =$

$$= \begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 1 & \dfrac{-\vartheta_1}{(c-4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{(c-4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{(c-4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_4}{(c-4)^2-\vartheta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\vartheta_1}{(c-2)^2-\vartheta_0} & 1 & \dfrac{-\vartheta_1}{(c-2)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{(c-2)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{(c-2)^2-\vartheta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\vartheta_2}{c_2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{c^2-\vartheta_0} & 1 & \dfrac{-\vartheta_1}{c^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{c^2-\vartheta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\vartheta_3}{(c+2)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{(c+2)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{(c+2)^2-\vartheta_0} & 1 & \dfrac{-\vartheta_1}{(c+2)^2-\vartheta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\vartheta_4}{(c+4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_3}{(c+4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_2}{(c+4)^2-\vartheta_0} & \dfrac{-\vartheta_1}{(c+4)^2-\vartheta_0} & 1 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}$$

und die Elemente der Hauptdiagonale dieser Determinante sind sämtlich 1. Mit (XXXIV; 46) ist sie durch die Beziehung

$$\text{(XXXIV; 48)} \qquad \Delta^{(\infty)}(c) = \Delta_1^{(\infty)}(c) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(c-2k)^2 - \vartheta_0}{(2k)^2 - \vartheta_0}$$

verbunden. Wir benutzen nun die bekannte unendliche Produktformel

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - x^2}{k^2\pi^2}$$

und bemerken, daß

$$\frac{\sin x_1}{x_1} \frac{x_2}{\sin x_2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - {x_1}^2}{k^2\pi^2 - {x_2}^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - x_1}{k\pi - x_2} \frac{k\pi + x_1}{k\pi + x_2}$$

ist. Man kann dann (XXXIV; 48) in der Form

$$\Delta^{(\infty)}(c) = \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c - 2k - \sqrt{\vartheta_0}}{2k - \sqrt{\vartheta_0}} \frac{c - 2k + \sqrt{\vartheta_0}}{2k + \sqrt{\vartheta_0}}$$

schreiben. Setzt man, wie am Schluß des vorigen Abschnitts, $c_0 = \sqrt{\vartheta_0}$, so folgt

$$\Delta^{(\infty)}(c) = \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \frac{c^2 - {c_0}^2}{-{c_0}^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{c - 2k - c_0}{2k - c_0} \frac{c - 2k + c_0}{2k + c_0} \times$$

$$\times \frac{c + 2k - c_0}{-2k - c_0} \frac{c + 2k + c_0}{-2k + c_0} =$$

$$= \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \frac{c^2 - {c_0}^2}{-{c_0}^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - (c - c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi - c_0\frac{\pi}{2}} \frac{k\pi - (c + c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi - c_0\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times \frac{k\pi + (c - c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi + c_0\frac{\pi}{2}} \frac{k\pi + (c + c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi + c_0\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \frac{c^2 - {c_0}^2}{-{c_0}^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - (c - c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi - c_0\frac{\pi}{2}} \frac{k\pi + (c - c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi + c_0\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - (c + c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi - c_0\frac{\pi}{2}} \frac{k\pi + (c + c_0)\frac{\pi}{2}}{k\pi + c_0\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \frac{c^2 - {c_0}^2}{-{c_0}^2} \frac{\sin (c - c_0)\frac{\pi}{2}}{(c - c_0)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (c + c_0)\frac{\pi}{2}}{(c + c_0)\frac{\pi}{2}} \left(\frac{c_0\frac{\pi}{2}}{\sin c_0\frac{\pi}{2}} \right)^2,$$

also

$$\text{(XXXIV; 49)} \qquad \Delta^{(\infty)}(c) = \Delta_1{}^{(\infty)}(c) \frac{\cos c\pi - \cos c_0\pi}{1 - \cos c_0\pi}.$$

Die Hilfsdeterminante $\Delta_1{}^{(\infty)}(c)$ besitzt folgende Eigenschaften, die aus ihrer Struktur folgen:

1. Wenn c eine ihrer Nullstellen ist, so sind auch $\pm c \pm 2k$ Nullstellen, d. h., $\Delta_1{}^{(\infty)}$ ist eine gerade periodische Funktion von c mit der Periode $2k$.

2. Sie besitzt die Pole $\pm c_0 \pm 2k$ auf der reellen Achse der komplexen Ebene.

3. Der unendlich ferne Punkt der reellen Achse ist ein Häufungspunkt von Polen und daher wesentlich singulär.

4. Die imaginäre Achse enthält keine Pole und $\Delta_1^{(\infty)}(i\gamma)$ strebt für $\gamma \to \infty$ gegen 1, da alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale für $\gamma \to \infty$ gegen Null streben.

Diese Eigenschaften besitzt auch die Funktion

$$\varphi(c) = \cot(c + c_0)\frac{\pi}{2} - \cot(c - c_0)\frac{\pi}{2},$$

wovon man sich leicht überzeugt. Es ist daher möglich, eine Konstante A so zu bestimmen, daß die Differenz

$$\text{(XXXIV; 50)} \quad \Delta_1^{(\infty)}(c) - A\left[\cot(c + c_0)\frac{\pi}{2} - \cot(c - c_0)\frac{\pi}{2}\right]$$

weder im Endlichen noch im Unendlichen singuläre Punkte hat und somit, wie aus der Funktionentheorie bekannt ist, gleich einer Konstante B ist. Um B zu berechnen, genügt es, in (XXXIV; 50) $c = \pm i\infty$ zu setzen. Dann ist $\Delta_1^{(\infty)}(\pm i\infty) = 1$. Andererseits ist

$$\text{(XXXIV; 51)} \quad \varphi(c) = \frac{\sin c_0\pi}{\sin^2 c_0\frac{\pi}{2} - \sin^2 c\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin c_0\pi}{\sin^2 c_0\frac{\pi}{2} - \left(\frac{e^{ic\pi/2} - e^{-ic\pi/2}}{2i}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\sin c_0\pi}{4\sin^2 c_0\frac{\pi}{2} + (e^{ic\pi} - 2 + e^{-ic\pi})},$$

also

$$\varphi(i\infty) = \frac{4\sin c_0\pi}{4\sin^2 c_0 - 2 + e^{-\infty} + e^{+\infty}} = 0.$$

Daher ergibt sich

$$\Delta_1^{(\infty)}(c) - A\varphi(c) = B = \Delta_1^{(\infty)}(\pm i\infty) - A\varphi(\pm i\infty) = 1,$$

woraus

$$\text{(XXXIV; 52)} \qquad \Delta_1^{(\infty)}(c) = 1 + A\varphi(c)$$

folgt. Die Gleichung (XXXIV; 49) schreibt sich also

$$\text{(XXXIV; 53)} \qquad \Delta^{(\infty)}(c) = [1 + A\varphi(c)]\frac{\cos c\pi - \cos c_0\pi}{1 - \cos c_0\pi}.$$

Da (XXXIV; 52) für beliebiges c gilt, ist für $c = 0$

$$\Delta_1^{(\infty)}(0) = 1 + 2A \cot c_0 \frac{\pi}{2},$$

woraus

$$A = \frac{\Delta_1^{(\infty)}(0) - 1}{2 \cot c_0 \frac{\pi}{2}}$$

und daher aus (XXXIV; 53)

$$\Delta^{(\infty)}(c) = \left[1 + \frac{\Delta_1^{(\infty)}(0) - 1}{2 \cot c_0 \frac{\pi}{2}} \varphi(c)\right] \frac{\cos c\pi - \cos c_0\pi}{1 - \cos c_0\pi}$$

folgt. Andererseits ist wegen (XXXIV; 51)

$$\frac{\varphi(c)}{2 \cot c_0 \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \sin c_0 \frac{\pi}{2} \cos c_0 \frac{\pi}{2}}{\left(\cot c_0 \frac{\pi}{2}\right)(\cos c\pi - \cos c_0\pi)} = \frac{1 - \cos c_0\pi}{\cos c\pi - \cos c_0\pi}$$

und demnach

$$\Delta^{(\infty)}(c) = \Delta_1^{(\infty)}(0) - 1 + \frac{\cos c\pi - \cos c_0\pi}{1 - \cos c_0\pi} = \Delta_1^{(\infty)}(0) - \frac{1 - \cos c\pi}{1 - \cos c_0\pi}.$$

Da aber $\Delta^{(\infty)}(c) = 0$ ist, erhält man

$$\Delta_1^{(\infty)}(0) = \frac{1 - \cos c\pi}{1 - \cos c_0\pi} = \frac{\sin^2 c\frac{\pi}{2}}{\sin^2 c_0 \frac{\pi}{2}}$$

oder

(XXXIV; 54) $$\sin c \frac{\pi}{2} = \sqrt{\Delta_1^{(\infty)}(0)} \sin c_0 \frac{\pi}{2}.$$

Die Bestimmung der Wurzeln von $\Delta^{(\infty)}(c) = 0$ ist damit auf die Berechnung der speziellen Determinante $\Delta_1^{(\infty)}(0)$ zurückgeführt.

291. Berechnung der unendlichen Determinante $\Delta_1^{(\infty)}(0)$

Aus (XXXIV; 47) folgt für $c = 0$

(XXXIV; 55)

$$S = \Delta_1^{(\infty)}(0) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & 1 & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & 1 & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & 1 & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

und es handelt sich nun darum, diese Determinante nach Potenzen von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ zu entwickeln. Aus Abschnitt 288 folgt, daß die ϑ_j von der Ordnung μ^{2j} sind. HILL schlägt daher folgendes Näherungsverfahren ein: Als Ausgangswert dient die Determinante $S_0 = 1$, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich Null gesetzt werden. In einer ersten Näherung S_1 beschränkt sich die Determinante auf die Hauptdiagonale und die beiden ihr benachbarten Nebendiagonalen, die nur ϑ_0 und ϑ_1 enthalten. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{-\vartheta_1}{(2k)^2 - \vartheta_0} = \alpha_k = \alpha_{-k}, \quad \text{so ist}$$

$$S_1 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_0 & 1 & \alpha_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha_{-1} & 1 & \alpha_{-1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{-2} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Da die Elemente $\alpha_k = \alpha_{-k}$ für große k wie $(2k)^{-2}$ gegen Null abnehmen, kann man S_1 als Grenzwert der Folge

$$1; \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 & \alpha_0 \\ 0 & \alpha_{-1} & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{-1} & 1 & \alpha_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{-2} & 1 \end{vmatrix}; \ldots$$

von Determinanten der Ordnung 1, 3, 5, ... ansehen. Es ist also, wenn wir diese Folge mit $S_1^{(1)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(5)}$, ... bezeichnen,

$$S_1^{(2k+1)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{k-1} & 1 & \alpha_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{k-2} & 1 & \alpha_{k-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \alpha_{-k} & 1 \end{vmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Eliminiert man in bekannter Weise die Elemente unterhalb der Hauptdiagonale, so ergibt sich

$$S_1^{(2k+1)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_k & 0 & \cdots \\ 0 & 1 - \alpha_k\alpha_{k-1} & \alpha_{k-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{\alpha_{k-1}\,\alpha_{k-2}}{1 - \alpha_k\alpha_{k-1}} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

so daß sich diese Determinante als ein Produkt von endlichen Kettenbrüchen

$$S_1^{(2k+1)} = 1 \cdot (1 - \alpha_k\alpha_{k-1}) \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}\,\alpha_{k-2}}{1 - \alpha_k\alpha_{k-1}}\right) \left(1 - \frac{\alpha_{k-2}\,\alpha_{k-3}}{1 - \dfrac{\alpha_{k-1}\,\alpha_{k-2}}{1 - \alpha_k\alpha_{k-1}}}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 - \frac{\alpha_{-k+1}\,\alpha_{-k}}{1 - \dfrac{\alpha_{-k+2}\,\alpha_{-k+1}}{\dots\dots\dots

Setzt man $c_0 = \sqrt{\vartheta_0}$, $p = {}^1/_2 c_0$, so ergibt sich genähert

$$\text{(XXXIV; 56)}\quad S_1 = 1 - \frac{1}{16}\vartheta_1{}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 - p^2)\,[(k+1)^2 - p^2]} =$$

$$= 1 + \frac{1}{32p}\vartheta_1{}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k+1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{p+k} + \frac{1}{p-k-1}\right)\right].$$

Nun ist aber[1])

$$\pi \cot p\pi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p-k}.$$

Der Ausdruck (XXXIV; 56) kann daher

$$S_1 = 1 + \frac{\vartheta_1{}^2}{16p}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right)\pi \cot p\pi$$

oder schließlich

(XXXIV; 57)

$$S_1 = 1 - \frac{\vartheta_1{}^2}{8p\,(4p^2-1)}\,\pi \cot p\pi = 1 + \frac{\vartheta_1{}^2 \pi \cot \frac{\pi}{2}\sqrt{\vartheta_0}}{4\,(1-\vartheta_0)\sqrt{\vartheta_0}} + O(\mu^8)$$

geschrieben werden.

Ähnlich berechnet man eine zweite Näherung S_2, in der von $S = \Delta_1{}^{(\infty)}(0)$ auch diejenigen beiden Nebendiagonalen berücksichtigt werden, die ϑ_2 enthalten. Diese Näherung enthält neben den Termen, die bereits in S_1 vorkommen, auch solche mit $\vartheta_1{}^4$, $\vartheta_1{}^2\vartheta_2$ und $\vartheta_2{}^2$, die alle von der Ordnung μ^8 sind. HILL dehnt seine Untersuchung, die von Schritt zu Schritt mühsamer wird, auch auf die Nebendiagonalen mit ϑ_3 aus und erhält dann S_3, eine Näherung, die auch Terme von der Ordnung μ^{12} berücksichtigt und deren Unsicherheit auf der Vernachlässigung von Termen der Ordnung μ^{16} beruht. Wir verweisen auf die Originalarbeit von HILL, in der diese Rechnung ausführlich wiedergegeben wird, und begnügen uns damit, die ersten zählenden Dezimalen derjenigen Anteile von S hinzuschreiben, die durch Berücksichtigung von ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 jeweils hinzukommen:

Ordnung μ^0 :	$\Delta_1{}^{(\infty)}(0) =$	1.00 ...
Ordnung μ^4 :		+ 0.00180 ...
Ordnung μ^8 :		+ 0.0000001808 ...
Ordnung μ^{12}:		+ 0.000000000644786 ...

[1]) Siehe z.B. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1931, S. 210.

In diesen Zahlen wird die außerordentlich rasche Konvergenz des Verfahrens sichtbar. Der endgültige Wert der Determinante ergibt sich zu

$$\Delta_1^{(\infty)}(0) = 1.00180479202101 12 \ldots$$

Für c erhält man dann aus (XXXIV; 54) die numerische Lösung

(XXXIV; 58) $$c = 1.07158327741 6012.$$

Diese Zahl repräsentiert die Bewegung des Perigäums, sie ist aber, da sie sich auf das rotierende Koordinatensystem bezieht, nicht mit dem Ausdruck identisch, den wir in (XXXIII; 41), bezogen auf ein festes Koordinatensystem, mit dem gleichen Symbol bezeichnet hatten. Setzen wir dort, um den Unterschied sichtbar zu machen, γ statt c,[1]) so ist

(XXXIV; 59) $$nt + \varepsilon - \tilde{\omega} = nt + \varepsilon - [\tilde{\omega}_0 + (1 - \gamma)nt]$$

die mittlere Anomalie des Mondes, bezogen auf das bewegliche Perigäum. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (XXXIV; 42),

$$\varrho = \varrho_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \cos[(2k + c)\tau + Q],$$

und bedenken, daß neben c auch $c + 2k$ eine Nullstelle von $\Delta_1^{(\infty)}(0)$ ist, so dürfen wir das Argument des Kosinus in dieser Formel

(XXXIV; 59a) $$c\tau + Q; \qquad Q = \text{const}$$

schreiben. Da nun $\tau = (n - n_1)t$ ist, so erhält der Ausdruck (XXXIV; 59) die Form

$$\frac{n}{n - n_1}\tau - (1 - \gamma)\frac{n}{n - n_1}\tau + \varepsilon - \tilde{\omega}_0.$$

Vergleicht man also die Ausdrücke (XXXIV; 59 und 59a), so folgt

$$\frac{n}{n - n_1}\gamma\tau + \varepsilon - \tilde{\omega}_0 = c\tau + Q,$$

also, wenn wir $Q = \varepsilon - \tilde{\omega}_0$ setzen,

$$\gamma = c\frac{n - n_1}{n}$$

oder, da $\mu = n_1/(n - n_1)$, $1 + \mu = n/(n - n_1)$ ist,

(XXXIV; 60) $$\gamma = \frac{c}{1 + \mu}.$$

---

[1]) In der Literatur findet man häufig die Bezeichnungen c und c für diese Größe im bewegten bzw. festen System, die aber schlecht zu unterscheiden sind.

Mit dem Wert (XXXIV; 58) für c und dem in Abschnitt 288 angegebenen Wert für μ ergibt sich also

$$\text{(XXXIV; 61)} \qquad \frac{1}{n}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 1 - \gamma = 0.008572573004864.$$

Diese Zahl, in welcher die nur von μ abhängigen Teile der Bewegung des Perigäums zum Ausdruck kommen, bildet die Basis weiterer Untersuchungen von HILL. Die in (XXXIV; 60, 61) nicht enthaltenen Beiträge mit den Faktoren e^2, e^4, ... (e = Exzentrizität der Mondbahn, wie sie in Abschnitt 280 definiert wurde) lassen sich mit Hilfe der Variationen δu, δs bestimmen, die aus den beiden ersten Gleichungen (XXXIV; 14) folgen. Wir können diese Rechnung, die sehr viel Raum beanspruchen würde, hier nicht wiedergeben und verweisen den Leser auf HILLS Originalarbeit.

Es möge zum Schluß noch bemerkt werden, daß HILL sich nicht mit der numerischen Berechnung von c begnügt hat, sondern auch eine analytische Entwicklung nach Potenzen von μ durchgeführt hat, die bis zur elften Potenz genau ist.

292. Die Bewegung der Knoten

Ähnliche Überlegungen wie diejenigen, die zur Berechnung des von μ abhängigen Teils der Perigäumsbewegung geführt haben, lassen sich auch zur Ermittlung der Bewegung der Knoten anstellen. In beiden Fällen genügt es, die Variationsbahn, jene einfach-periodische partikuläre Lösung des Systems (XXXIV; 4), zu variieren. Die der Variationsbahn zugrunde liegende ungestörte Bahn ist, wie in (XXI; 4, 5) gezeigt worden ist, ein in der Ekliptik liegender Kreis. Um die Perigäumsbewegung zu ermitteln, wird man also die Variationsbahn so variieren, daß die ungestörte Bahn exzentrisch ist, aber ihre Exzentrizität als differentielle Größe zu betrachten ist, deren Quadrate vernachlässigt werden können. Zur Berechnung der Knotenbewegung definiert man die der Variationsbewegung benachbarte Lösung so, daß die ungestörte Bewegung in einer Ebene verläuft, die schwach gegen die Ekliptik geneigt ist, während die Parameter e, e_1 und a/a_1 als verschwindend klein angesehen werden. Man wird dann zu den beiden Gleichungen (XXXIV; 4) eine weitere für die räumliche Koordinate ζ im rotierenden und z im festen System hinzuzufügen haben. Da aber ζ und z identisch sind und das Symbol ζ für $\exp(i\tau)$ bereits verbraucht worden ist, wählen wir für den Abstand des Mondes von der Ebene der Ekliptik die Bezeichnung z, um Verwechslungen zu vermeiden, und betrachten z als differentielle Größe, deren Quadrat vernachlässigt werden darf. In den Gleichungen (XXXIV; 4) ist also $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2 = r_0^2 + z^2$ zu setzen, wenn r_0 den Radiusvektor des Mondortes in der Variationsbahn bezeichnet, und es darf

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{r_0^2} + \cdots\right) = \frac{1}{r_0^3}$$

geschrieben werden.

Den beiden Gleichungen (XXXIV; 4) ist dann eine weitere,

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

hinzuzufügen. Es ist aber jetzt

$$\Omega = \frac{k^2 m_0}{r_0} + \frac{3}{2} n_1{}^2 \xi^2 - \frac{1}{2} n_1{}^2 z^2,$$

also

$$\ddot{z} = -\frac{k^2 m_0}{r_0{}^3} z - n_1{}^2 z$$

oder

(XXXIV; 62) $$\ddot{z} + \left(\frac{k^2 m_0}{r_0{}^3} + n_1{}^2\right) z = 0.$$

Setzen wir, wie früher, $\tau = (n - n_1)t$, so ergibt sich statt dessen

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (n - n_1)^{-2} \left(\frac{k^2 m_0}{r_0{}^3} + n_1{}^2\right) z = 0$$

oder, wenn wir, wie in (XXXIV; 7),

$$\mu = \frac{n_1}{n - n_1}; \quad \varkappa^2 = \frac{k^2 m_0}{n_1{}^2}$$

einführen,

(XXXIV; 63) $$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + M z = 0; \quad M = \frac{\varkappa^2 \mu^2}{r_0{}^3} + \mu^2.$$

Es ist aber nach (XXXIV; 37a)

$$\frac{\varkappa^2 \mu^2}{r_0{}^3} = 1 + 2\mu + \frac{3}{2}\mu^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos 2j\tau,$$

also, wenn wir

(XXXIV; 64) $$M = M_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} M_j \cos 2j\tau$$

schreiben,

$$M_0 = 1 + 2\mu + \frac{5}{2}\mu^2; \quad M_j = Q_j.$$

Bis zur 15. Dezimale ergibt sich

$$\begin{aligned} M_0 &= 1.178044571277166, \\ M_1 &= 0.012616846248930, \\ M_2 &= 0.000125776675006, \end{aligned}$$

$$M_3 = 0.000001205939900,$$
$$M_4 = 0.000000011302926,$$
$$M_5 = 0.000000000104375,$$
$$M_6 = 0.000000000000954,$$
$$M_7 = 0.000000000000008.$$

Beschränkt man M auf das Hauptglied M_0, so nimmt (XXXIV; 63) die einfachere Form

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + M_0 z = 0$$

an, deren Lösung

$$z = z_0 \sin\left(\sqrt{M_0}\tau + G\right)$$

mit den willkürlichen Konstanten z_0 und G ist. Eine allgemeinere Lösung erhält man durch den Ansatz

(XXXIV; 65)
$$z = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j \sin\left[(g + 2j)\tau + G\right],$$

woraus

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j (g + 2j)^2 \sin\left[(g + 2j)\tau + G\right]$$

folgt. Wegen (XXXIV; 64, 65) ist daher

$$Mz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{j-k} \sin\left[(g + 2j)\tau + G\right], \quad (M_k = M_{-k}).$$

Die Differentialgleichung (XXXIV; 63) nimmt dann die Form

(XXXIV; 66)
$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{\left[-(g + 2j)^2 + M_0\right] z_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' M_k z_{j-k}\right\} = 0$$

an, wobei $\sum'$ bedeutet, daß der Term mit $k = 0$ entfällt. Aus (XXXIV; 66) folgt aber, daß für beliebige ganze $j \gtreqless 0$

$$\left[-(g + 2j)^2 + M_0\right] z_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' M_k z_{j-k} = 0$$

ist. Zur Bestimmung der Koeffizienten z_j dient also ein System von unendlich vielen linearen und homogenen Gleichungen

(XXXIV; 67)

$$\begin{cases}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots + z_{-2}\left[(g-4)^2 - M_0\right] & - z_{-1}M_1 & - z_0 M_2 & - z_1 M_3 & - z_2 M_4 \cdots = 0, \\
\cdots - z_{-2}M_1 & + z_{-1}\left[(g-2)^2 - M_0\right] & - z_0 M_1, & - z_1 M_2 & - z_2 M_3 \cdots = 0, \\
\cdots - z_{-2}M_2 & - z_{-1}M_1 & + z_0(g^2 - M_0) - z_1 M_1 & - z_2 M_2 \ldots = 0, \\
\cdots - z_{-2}M_3 & - z_{-1}M_2 & - z_0 M_1 & + z_1\left[(g+2)^2 - M_0\right] & - z_2 M_1 \cdots = 0, \\
\cdots - z_{-2}M_4 & - z_{-1}M_3 & - z_0 M_2 & - z_1 M_1 & + z_2\left[(g+4)^2 - M_0\right] \cdots = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{cases}$$

Es gleicht formal genau dem System (XXXIV; 45) und kann daher auch genauso gelöst werden. Dabei ergibt sich g aus der Bedingung, daß die Determinante des Systems verschwindet, also

$$\Delta^{(\infty)}(g) = 0$$

ist. Die Lösung dieser unendlichen Determinantengleichung erhält man auf dieselbe Weise wie die Lösung von $\Delta^{\infty}(c) = 0$, die wir in den Abschnitten 289 bis 291 dargelegt haben. Diese Rechnung ist von J. C. Adams[1]) ausgeführt worden und ergibt

$$g = 1.085171426558189\ldots$$

Daraus folgt für die mittlere Bewegung der Knoten im festen System

$$\text{(XXXIV; 68)} \quad \frac{1}{n}\frac{d\Omega}{dt} = 1 - \frac{g}{1+\mu} = -0.003991645\,34949.$$

293. Die Methode von Brown zur Berechnung der Knotenbewegung

E. W. Brown[2]) hat gezeigt, daß man mit einem elementaren Näherungsverfahren auch ohne das Hilfsmittel der unendlichen Determinanten zum Ziele gelangt.

Man betrachte das System von fünf homogenen linearen Gleichungen für die fünf Größen $z_{-2}, \ldots, z_2$ im zentralen Teil des unendlichen Systems (XXXIV; 67):

(XXXIV; 69)

$$\begin{cases} +z_{-2}[(g-4)^2 - M_0] & -z_{-1}M_1 & -z_0M_2 & -z_1M_3 & -z_2M_4 = 0, \\ -z_{-2}M_1 + z_{-1}[(g-2)^2 - M_0] & -z_0M_1 & -z_1M_2 & -z_2M_3 = 0, \\ -z_{-2}M_2 & -z_{-1}M_1 & +z_0(g^2 - M_0) & -z_1M_1 & -z_2M_2 = 0, \\ -z_{-2}M_3 & -z_{-1}M_2 & -z_0M_1 & +z_1[(g+2)^2 - M_0] & -z_2M_1 = 0, \\ -z_{-2}M_4 & -z_{-1}M_3 & -z_0M_2 & -z_1M_1 & +z_2[(g+4)^2 - M_0] = 0. \end{cases}$$

Man setze, da eine der fünf Unbekannten z_j des Systems willkürlich gewählt werden darf, $z_0 = 1$. Da die z_j, ebenso wie die q_j in (XXXIV; 45), mit wachsendem $|j|$ rasch abnehmen, wird man das Näherungsverfahren mit einem Ausgangswert $g = g_0$ beginnen, den man erhält, wenn alle z_j für $j \neq 0$ gleich Null gesetzt werden. Dann ist $z_0(g^2 - M_0) = 0$ und

$$g = g_0 = \sqrt{M_0} = 1.0853776.$$

---

[1]) J. C. Adams, On the motion of the moon's node in the case when the orbits of the sun and moon are supposed to have no eccentricities, and when their mutual inclination is supposed to be indefinitely small. M. N. *38*, 43 (1877).

[2]) E. W. Brown, On the calculation of the principal parts of the motions of the lunar perigee and node. A. J. *45*, 84 (1936).

Setzt man $z_2 = 0$, so ergeben die zweite und vierte Gleichung (XXXIV; 69) mit $g = g_0$

$$z_{-1}(4 - 4g_0) - M_1 - z_1 M_2 = 0,$$
$$-z_{-1}M_2 - M_1 + z_1(4 + 4g_0) = 0.$$

Vernachlässigt man hierin M_2 gegen M_1, so folgt genähert

(XXXIV; 70)
$$\begin{cases} z_{-1} = \dfrac{M_1}{4 - 4g_0} = -0.03694, \\ z_1 = \dfrac{M_1}{4 + 4g_0} = +0.00151. \end{cases}$$

Ferner ergeben die erste und fünfte Gleichung (XXXIV; 69), wenn man M_4 gegen M_3 vernachlässigt,

$$z_{-2}(16 - 8g_0) - z_{-1}M_1 - M_2 - z_1 M_3 = 0,$$
$$-z_{-1}M_3 - M_2 - z_1 M_1 + z_2(16 + 8g_0) = 0,$$

und man erhält hieraus, mit den Werten (XXXIV; 70) für z_{-1} und z_1,

(XXXIV; 71)
$$\begin{cases} z_{-2} = \dfrac{z_{-1}M_1 + M_2 + z_1 M_3}{16 - 8g_0} = -0.0000465, \\ z_2 = \dfrac{z_1 M_1 + M_2 + z_{-1}M_3}{16 + 8g_0} = 0.0000059. \end{cases}$$

Gibt man nun in der dritten Gleichung (XXXIV; 69) den Größen z_{-2}, z_{-1}, z_1, z_2 die provisorischen Werte (XXXIV; 70, 71), so erhält man für g den verbesserten Wert g_1 aus

$$g_1^2 = M_0 + M_1(z_1 + z_{-1}) + M_2(z_2 + z_{-2}),$$

woraus

$$g_1^2 = 1.1775974; \qquad g_1 = 1.0851716$$

folgt. Mit $g = g_1$ statt g_0 berechnet man die Werte (XXXIV; 70, 71) neu und ermittelt z_{-3}, z_3, indem man das System (XXXIV; 69) nach oben und unten um die Gleichungen

$$z_{-3}[(g - 6)^2 - M_0] - z_{-2}M_1 - z_{-1}M_2 - z_0 M_3 - z_1 M_4 - z_2 M_5 = 0,$$
$$- z_{-2}M_5 - z_{-1}M_4 - z_0 M_3 - z_1 M_2 - z_2 M_1 + z_3[(g + 6)^2 - M_0] = 0$$

erweitert. Führt man diese Rechnung bis zur 8. Dezimale für z_{-1} und z_1 sowie bis zur 10. Dezimale für z_{-3}, z_{-2}, z_2, z_3 durch, so ergibt sich die bessere Näherung

$$\begin{aligned} z_{-3} &= 0.0000001753, \\ z_{-2} &= -0.0000465746, \\ z_{-1} &= -0.03698390, \end{aligned}$$

$$z_1 = 0.00151220,$$
$$z_2 = 0.0000058673,$$
$$z_3 = 0.0000000300.$$

Mit diesen Werten bestimmt man g erneut aus der um die Terme mit z_{-3}, z_3 erweiterten mittleren Gleichung des Systems (XXXIV; 69) und findet

$$g_2{}^2 = 1.1775970255; \qquad g_2 = 1.0851714268.$$

Dieses Näherungsverfahren konvergiert rasch. Nur für z_{-1} ist die erzielte Genauigkeit etwas geringer, da die Näherungsformeln für diese Größe den kleinen Nenner $4 - 4g$ enthalten. Da nämlich $g_0 = M_0 = 1 + m + \cdots$ ist, beginnt die Entwicklung dieses Nenners nach Potenzen von m mit $-4m + + \cdots \approx -0.32$.

Vergleicht man die Näherung g_2 mit dem im vorigen Abschnitt gefundenen genaueren Wert, so findet man, daß ihr Fehler nur drei Einheiten der 10. Dezimale beträgt. Eine dritte Näherung, die auch Gleichungen und Terme mit z_{-4}, z_4 berücksichtigt, würde g bis auf wenige Einheiten der 12. Dezimale genau liefern. Man darf also annehmen, daß durch dieses einfache Verfahren alle zu ermittelnden Größen, nämlich g und die z_j für $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ mindestens bis zur 8. Dezimale fehlerfrei sind.

Brown entwickelt nun eine differentielle Methode, um die Auswertung der Größen g und z_j, falls diese bis zur q-ten Dezimale gesichert sind, so zu verbessern, daß die berichtigten Werte auch in der $2q$-ten Dezimale noch genau sind. Er benutzt dabei die hier erfüllte Voraussetzung, daß die M_k bis zur 15. Dezimale bekannt sind und daß alle M_k für $k > 7$ als verschwindend klein angesehen werden dürfen. Es genügt dann, $2q \leqq 16$, also $q \leqq 8$, zu setzen.

Man betrachte erneut das System (XXXIV; 66) und schreibe es in der Form

$$\text{(XXXIV; 72)} \qquad [(g + 2j)^2 - M_0]z_j - \sum_{k=1}^{\infty} M_k(z_{j-k} + z_{j+k}) = 0.$$

Man nehme ferner an, daß g und die z_j bis zur 8. Dezimale genau gegeben sind. Bezeichnet man diese Näherungswerte mit g_8 bzw. $z_{8,j}$, so sei

$$\text{(XXXIV; 73)} \quad [(g_8 + 2j)^2 - M_0]z_{8,j} - \sum_{k=1}^{\infty} M_k\,(z_{8,j-k} + z_{8,j+k}) = R_j.$$

Man setze nun

$$g - g_8 = \delta g; \qquad z_j - z_{8,j} = \delta z_j$$

und subtrahiere (XXXIV; 73) von (XXXIV; 72), wobei man Quadrate und Produkte von δg, δz_j vernachlässigt. Dann erhält man

$$\text{(XXXIV; 74)} \qquad [(g_8 + 2j)^2 - M_0]\delta z_j - \sum_{k=1}^{\infty} M_k\,(\delta z_{j-k} + \delta z_{j+k}) + + 2z_{8,j}(g_8 + 2j)\,\delta g = -R_j.$$

Multipliziert man (XXXIV; 73) mit δz_j, (XXXIV; 74) mit $z_{8,j}$, subtrahiert die Produkte und beachtet, daß R_j von der Ordnung δz_j, δg ist, so entsteht

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k\{(\delta z_{j-k} + \delta z_{j+k})\, z_{8,j} - (z_{8,j-k} + z_{8,j+k})\, \delta z_j\} - 2z_{8,j}^2(g_8 + 2j)\,\delta g = R_j z_{8,j}.$$

Bildet man nun die Summe dieser Gleichungen über alle j von $-\infty$ bis $+\infty$, so verschwinden die Ausdrücke mit M_k, denn man darf, da Produkte der δz_j vernachlässigt werden können, $z_{8,j}$ durch z_j und $z_{8,j\pm k}$ durch $z_{j\pm k}$ ersetzen. Es ist also

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (z_j \delta z_{j-k} - z_{j+k}\delta z_j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (z_j \delta z_{j+k} - z_{j-k}\delta z_j) = 0.$$

Somit bleibt

$$\delta g = -\frac{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} R_j z_{8,j}}{2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{8,j}^2 (g_8 + 2j)},$$

und es wird $g = g_8 + \delta g$ mit dem früher gefundenen numerischen Wert (XXXIV; 68) übereinstimmen. Die δz_j ergeben sich dann aus den Gleichungen (XXXIV; 74) durch sukzessive Näherungen. Selbstverständlich kann diese elementare Näherungsmethode auch zur Berechnung der Bewegung des Perigäums benutzt werden.

Der Ausdruck (XXXIV; 68) für g liefert das Hauptglied der Bewegung der Mondbahnknoten, das nur von m abhängt. Es bildet die Basis für eine eingehendere Untersuchung, in der diesem Hauptglied noch Terme hinzugefügt werden, die e^2, e_1^2 und $\sin^2 i$ proportional sind, sowie solche, die auch von a/a_1 abhängen. Sie werden auf ähnliche Weise ermittelt wie die Terme mit e^2, e^4, ... in der Bewegung des Perigäums. Wir verweisen dazu auf die Originalabhandlungen von HILL und BROWN.

294. Berechnung der Störungsterme, die von der Exzentrizität der Mondbahn abhängen

Nachdem die nur von μ abhängigen Hauptteile der Bewegungen des Perigäums bzw. der Knoten, d. h. die Konstanten c und g, bekannt geworden sind, sei es numerisch, wie in den vorhergehenden Abschnitten dargelegt, sei es als Potenzreihen nach μ, sind die Vorbedingungen geschaffen, die es erlauben, auch diejenigen Störungsterme der Koordinaten der Mondbahn zu berechnen, die von e, e_1, $\sin i$ (oder $\sin(i/2)$, $\tan i$) und a/a_1 abhängen. Wir müssen uns hier damit begnügen, dieses Vorgehen an einem Beispiel zu demonstrieren, das für den weiteren Ausbau der Theorie charakteristisch ist, nämlich an der Ermittlung derjenigen periodischen Terme, deren Amplituden Funktionen von μ und e allein sind. Es läßt sich zeigen, daß dieses Verfahren, sofern c bzw.

$\gamma = c/(1 + \mu)$ bekannt ist, formal demjenigen entspricht, das zur Ermittlung der Variationsbahn führt und in den Abschnitten 180 und 181 ausführlich beschrieben worden ist.

Wir erinnern daran, daß wir mit ξ, η die Koordinaten des Mondes in der Variationsbahn und im rotierenden System bezeichneten und daß nach (XXI; 4) die Entwicklungen

$$\text{(XXXIV; 75)} \qquad \xi = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} \cos (2j + 1)\tau; \qquad \eta = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1} \sin (2j + 1)\tau$$

gelten. Hier ist

$$\tau = \lambda - \lambda_1 = (n - n_1)t + \varepsilon - \varepsilon_1 = (n - n_1)\,(t - t_0)$$

die Differenz der mittleren Längen von Mond und Sonne. Da ε_1 willkürlich festgesetzt werden darf, sei $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Dann ist, wie es sein muß, $t_0 = -(\varepsilon - \varepsilon_1)/(n - n_1) = 0$ und $t = t_0$, $\tau = 0$ die Zeit des Durchgangs des Mondes durch die positive ξ-Achse.

Für den Radiusvektor der Variationsbahn folgt dann (XXI; 5)

$$r = R_0 + R_2 \cos 2\tau + R_4 \cos 4\tau + \cdots$$

oder auch, wenn a aus $n^2a^3 = k^2m_0$ (m_0 = Massensumme Erde + Mond) bestimmt wird,

$$\frac{a}{r} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} \cos 2j\tau\,.$$

Ferner gilt für die Länge des Mondes in der Variationsbahn, gezählt von der Richtung der positiven ξ-Achse aus, in deren unendlich fernem Punkt der Sonnenort angenommen wird,

$$w = \tau + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2j} \sin 2j\tau\,.$$

Die Koeffizienten b_{2j}, β_{2j} sind Funktionen von μ. Setzen wir wieder $\zeta = \exp(i\tau)$, $i = \sqrt{-1}$, so ist nach (XXI; 11)

$$u = \xi + i\eta = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{2j}\zeta^{2j+1}; \quad s = \xi - i\eta = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{-2j}\,\zeta^{2j-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{-2j-2}\zeta^{2j+1},$$

und es sind die a_{2j} jene Funktionen von μ, die aus der Theorie der Variationsbahn bekannt sind. In Kapitel XXI haben wir sie mit a_j bezeichnet ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Hier ziehen wir die Bezeichnung a_{2j} vor, aus Gründen, die weiter unten bei der Ausdehnung der Theorie auf die von der Exzentrizität abhängigen Terme verständlich werden.

In Abschnitt 180 haben wir die a_{2j} in Form von Potenzreihen nach μ bis zu einer gewissen Ordnung entwickelt, und es ist $a_0 = \sigma$ der in Abschnitt 181 als Funktion von μ bestimmte „Skalenfaktor". In den folgenden Betrachtungen

ist es nicht nötig, ihn zu berücksichtigen, da er in den homogenen Gleichungen zur Bestimmung der a_{2j} herausfällt, und wir setzen daher $a_0 = 1$. Im folgenden beschränken wir uns darauf, die a_{2j} numerisch zu bestimmen. Dann ist es zweckmäßig, das folgende Näherungsverfahren einzuschlagen, das darauf beruht, daß die a_{2j} von der Ordnung $\mu^{|2j|}$ sind, also mit wachsendem $|j|$ sehr rasch kleiner werden. Es gelten dann mit $D = \zeta d/d\zeta$ als dem logarithmischen Operator die Differentialgleichungen (XXI; 12), in denen $p = m$ durch μ zu ersetzen ist:

$$u\left(D^2 s - 2\mu Ds + \frac{9}{4}\mu^2 s\right) + \frac{1}{2} DuDs = -\frac{3}{8}\mu^2(s^2 + 5u^2) + K,$$

$$s\left(D^2 u + 2\mu Du + \frac{9}{4}\mu^2 u\right) + \frac{1}{2} DuDs = -\frac{3}{8}\mu^2(u^2 + 5s^2) + K.$$

Bildet man Summe und Differenz dieser Gleichungen und setzt $K = C/2$, so folgt

(XXXIV; 76)
$$\begin{cases} D^2(us) - DuDs - 2\mu(uDs - sDu) + \frac{9}{4}\mu^2(u+s)^2 = C, \\ D(uDs - sDu - 2\mu us) + \frac{3}{4}\mu^2(u^2 - s^2) = 0. \end{cases}$$

Es ist nun

$$Du = \sum_j (2j+1)\, a_{2j}\zeta^{2j+1}; \quad Ds = \sum_j (2j+1)\, a_{-2j-2}\zeta^{2j+1}$$

und

$$us = \sum_j a_{2j}\zeta^{2j+1} \sum_k a_{-2k-2}\zeta^{2k+1} = \sum_j \sum_k a_{2j}a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2} = \sum_j \sum_k a_{2j}a_{2j-2k}\zeta^{2k},$$

wenn man k mit $k - j - 1$ vertauscht. Ebenso erhält man

$$u^2 = \sum_j \sum_k a_{2j}a_{2k}\zeta^{2j+2k+2} = \sum_j \sum_k a_{2j}a_{2k-2j-2}\zeta^{2k},$$

$$s^2 = \sum_j \sum_k a_{-2j-2}\, a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2} = \sum_j \sum_k a_{2j}a_{2j-2k}\zeta^{2k},$$

$$DuDs = \sum_j \sum_k (2j+1)\,(2k+1)\, a_{2j}a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2} =$$

$$= -\sum_j \sum_k (2j+1)\,(2j-2k+1)\, a_{2j}a_{2j-2k}\zeta^{2k},$$

$$uDs - sDu = \sum_j \sum_k (2k+1)\, a_{2j}a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2} - \sum_j \sum_k (2j+1)\, a_{2j}a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2}$$

$$= \sum_j \sum_k (2k-2j)\, a_{2j}a_{-2k-2}\zeta^{2j+2k+2} =$$

$$= -\sum_j \sum_k (4j-2k+2) a_{2j}a_{2j-2k}\zeta^{2k}, \text{ usw.}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Identitäten (XXXIV; 76) ein und setzt die Koeffizienten von ζ^{2k} gleich Null, so ergibt sich das System von homogenen

Beziehungen

$$\text{(XXXIV; 77)}\quad \begin{cases} \sum\limits_j \left[4k^2 + (2j+1)(2j-2k+1) + 4(2j-k+1)\,\mu + \frac{9}{2}\,\mu^2\right] \times \\ \qquad\qquad \times a_{2j}a_{2j-2k} + \frac{9}{4}\,\mu^2 \sum\limits_j a_{2j}(a_{2k-2j-2} + a_{-2k-2j-2}) = 0, \\ 4k \sum\limits_j (2j-k+1+\mu)\, a_{2j}a_{2j-2k} - \\ \qquad\qquad - \frac{3}{2}\,\mu^2 \sum\limits_j a_{2j}(a_{2k-2j-2} - a_{-2k-2j-2}) = 0 \end{cases}$$

für alle $k \neq 0$, denn für $k = 0$ ist die zweite Gleichung (XXXIV; 77) von der trivialen Form $0 = 0$, während in der ersten auf der rechten Seite C statt Null erscheint. Diese Gleichung dient zur Bestimmung von C, wenn die a_{2j} bekannt sind.

Nun multipliziere man die zweite Gleichung (XXXIV; 77) mit $(2\mu+1)/2k$ und subtrahiere das Produkt von der ersten. Ferner dividiere man die zweite durch $4k$. Dann erhält man für $k \neq 0$

$$\text{(XXXIV; 78)}\quad \begin{cases} \sum\limits_j \left[4k^2 - 1 - 2\mu + \frac{1}{2}\,\mu^2 + 4j^2 - 4jk\right] a_{2j}a_{2j-2k} + \\ \qquad + \frac{\mu^2}{4}\left[9 + \frac{3}{k}\,(2\mu+1)\right] \sum\limits_j a_{2j}a_{2k-2j-2} + \\ \qquad + \frac{\mu^2}{4}\left[9 - \frac{3}{k}\,(2\mu+1)\right] \sum\limits_j a_{2j}a_{-2k-2j-2} = 0, \\ \sum\limits_j (1 - k + \mu + 2j)\, a_{2j}a_{2j-2k} - \\ \qquad - \frac{3}{8}\,\frac{\mu^2}{k} \sum\limits_j (a_{2j}a_{2k-2j-2} - a_{2j}a_{-2k-2j-2}) = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man nun diese beiden Gleichungen mit $k - 1 - \mu$ bzw. $4k^2 - 1 - 2\mu + {}^1/_2\mu^2$, addiert die Produkte und dividiert die Summe durch $-2k\,(4k^2 - 1 - 2\mu + {}^1/_2\mu^2)$, so fällt der Term mit a_0a_{-2k} heraus, und der Koeffizient von a_0a_{2k} wird gleich -1. Man erhält dann die homogene Gleichung

$$\text{(XXXIV; 79)}\quad \sum_j \{[2k, 2j]\, a_{2j}a_{2j-2k} + [2k]\, a_{2j}a_{2k-2j-2} + (2k)\, a_{2j}a_{-2k-2j-2}\} = 0,$$

in der

$$\text{(XXXIV; 79a)}\quad \begin{cases} [2k, 2j] = -\frac{j}{k}\,\frac{8k^2 - 2 - 4\mu + \mu^2 + 4(j-k)\,(k-1-\mu)}{8k^2 - 2 - 4\mu + \mu^2}, \\ [2k] = -\frac{3}{16}\,\frac{\mu^2}{k^2}\,\frac{4k^2 - 8k - 2 - 4(k+2)\mu - 9\mu^2}{8k^2 - 2 - 4\mu + \mu^2}, \\ (2k) = -\frac{3}{16}\,\frac{\mu^2}{k^2}\,\frac{20k^2 - 16k + 2 - 4(5k-2)\,\mu + 9\mu^2}{8k^2 - 2 - 4\mu + \mu^2} \end{cases}$$

Funktionen von μ und den ganzen Zahlen j und $k \neq 0$ sind. Der Nenner hat für keinen Wert von μ reelle Nullstellen, und es ist offensichtlich

$$[2k, 0] = 0, \quad [2k, 2k] = -1.$$

Ferner erkennt man, daß $[2k, 2j]$ von der Ordnung μ^0 ist, während $[2k]$ und $(2k)$ von der Ordnung μ^2 sind. Schreibt man also die Gleichung (XXXIV; 79) nacheinander für $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ auf, bedenkt, daß die a_{2j} von der Ordnung $\mu^{|2j|}$ sind, und beschränkt sich auf Summanden bis zur Ordnung μ^6, so erhält man mit $a_0 = 1$

$$\begin{aligned}
a_2 &= [2, -2]\, a_{-2}a_{-4} + [2, 4]\, a_4a_2 + [2]\,(1 + a_{-2}a_2) + (2)\,(a_{-2}^2 + 2a_{-4}),\\
a_{-2} &= [-2, -4]\, a_{-4}a_{-2} + [-2, 2]\, a_2a_4 + [-2]\,(a_{-2}^2 + 2a_{-4}) +\\
&\quad + (-2)\,(1 + 2a_{-2}a_2),\\
a_4 &= [4, 2]\, a_2a_{-2} + 2\,[4]\, a_2,\\
a_{-4} &= [-4, -2]\, a_{-2}a_2 + 2\,(-4)\, a_2,\\
a_6 &= [6, 2]\, a_2a_{-4} + [6, 4]\, a_4a_{-2} + [6]\,(a_2^2 + 2a_4),\\
a_{-6} &= [-6, -4]\, a_{-4}a_2 + [-6, -2]\, a_{-2}a_4 + (-6)\,(a_2^2 + 2a_4).
\end{aligned}$$

Dieses System ist durch ein einfaches Näherungsverfahren leicht lösbar: Vernachlässigt man zunächst Terme der Ordnung μ^6, so ergeben die ersten beiden Gleichungen bis zur Ordnung μ^5 genau

$$a_2 = [2]; \quad a_{-2} = (-2).$$

Mit diesen Werten berechnet man aus den übrigen Gleichungen a_4, a_{-4} bis zur Ordnung μ^7 sowie a_6, a_{-6} bis zur Ordnung μ^9 genau. Sodann wird man a_2, a_{-2} durch Berücksichtigung der in erster Näherung unterdrückten Terme genauer berechnen können.

Diese numerische Methode zur Bestimmung der Konstanten der Variationsbahn dient als Muster für die weitere Analyse der Mondbewegung, sofern man sich auf Bestimmung der *numerischen Werte* der Amplituden der periodischen von den Exzentrizitäten, der Neigung und der Sonnenparallaxe abhängigen Terme beschränkt. Wir zeigen dieses Verfahren, wie eingangs erwähnt, am Beispiel derjenigen Terme, die von der Exzentrizität der Mondbahn abhängen, insbesondere aber derjenigen, die als charakteristischen Parameter die erste Potenz von e enthalten.

Aus der Gestalt (XXXIII; 47) der Störungsfunktion läßt sich schließen, daß die von μ und e, e^2, ... abhängigen periodischen Terme die Argumente

(XXXIV; 80) $\qquad 2j\xi' + p\varphi \qquad (j, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

haben, in denen wir, um Verwechslungen mit der Koordinate ξ im rotierenden System zu vermeiden, ξ' statt ξ gesetzt haben. Es ist dann

$$\xi' = \lambda - \lambda_1 = (n - n_1)t = \tau$$

die mittlere Längendifferenz zwischen Mond und Sonne, wenn $t = 0$ ($\tau = 0$) die Durchgangszeit durch die positive Abszissenachse des rotierenden Systems bezeichnet. Ferner ist

$$\varphi = \lambda - \tilde{\omega} = \lambda - [\tilde{\omega}_0 + (1 - \gamma)\, nt] = \gamma nt + \varepsilon - \tilde{\omega}_0$$

die (modifizierte, d. h. auf das bewegliche Perigäum bezogene) mittlere Anomalie des Mondes. Ist t_1 der Zeitpunkt des Perigäumsdurchgangs, so ist

$$\varphi = \gamma n\,(t - t_1); \qquad t_1 = -\frac{\varepsilon - \tilde{\omega}_0}{\gamma n} = -\frac{\varepsilon - \tilde{\omega}_0}{c(n - n_1)}$$

oder auch

$$\varphi = c\,(n - n_1)\,(t - t_1) = c\,(\tau - \tau_1); \qquad \tau_1 = -\frac{\varepsilon - \tilde{\omega}_0}{c}.$$

Drückt man die trigonometrischen Funktionen mit den Argumenten (XXXIV; 80) durch Potenzen von $\zeta = \exp(i\tau)$, $\zeta_1 = \exp i(\tau - \tau_1)$ aus, so erhält man, wenn ξ, η wiederum die Koordinaten im rotierenden System bedeuten,

$$u = \xi + i\eta = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_{2j+pc}\, \zeta^{2j+1} \zeta_1^{pc},$$

$$s = \xi - i\eta = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_{-2j-2-pc} \zeta^{2j+1} \zeta_1^{pc}.$$

Statt dessen darf man einfacher

$$u = \sum_j \sum_p A_{2j+pc} \zeta^{2j+1+pc}; \quad s = \sum_j \sum_p A_{-2j-2-pc} \zeta^{2j+1+pc}$$

schreiben, unter dem Vorbehalt, daß nach Übergang auf die reellen Koordinaten in den Argumenten der trigonometrischen Funktionen

$$(2j + 1)\,\tau + pc\,(\tau - \tau_1)$$

statt $(2j + 1 + pc)\,\tau$ gesetzt werden muß.

Die Differentialgleichungen (XXXIV; 76) und alle daraus abgeleiteten Formeln gelten dann formal auch für die der Variationsbahn benachbarten Lösungen, sofern nach wie vor die Parameter e_1, a/a_1 sowie die Neigung der Mondbahn als unendlich klein anzusehen sind. Alle Formeln behalten daher unter dem eben gemachten Vorbehalt ihre Gültigkeit, wenn man statt

$$a; \quad 2j; \quad 2k; \quad \sum_j; \quad \sum_k$$

die neuen Symbole

$$A; \quad 2j + pc; \quad 2k + qc; \quad \sum_j \sum_p; \quad \sum_k \sum_q$$

einführt und wenn j, k, p, q alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, aber der Fall $k = 0$, $q = 0$ auszuschließen ist.[1]) Die homogenen Gleichungen (XXXIV; 79) nehmen dann die Form

$$\begin{aligned}(\text{XXXIV; 81}) \qquad \sum_j \sum_p \{&[2k + qc,\, 2j + pc]\, A_{2j+pc} A_{2j-2k+pc-qc} + \\ &+ [2k + qc]\, A_{2j+pc}\, A_{2k-2j-2+qc-pc} + \\ &+ (2k + qc)\, A_{2j+pc} A_{-2k-2j-2-qc-pc}\} = 0\end{aligned}$$

an, und die Formeln (XXXIV; 79a) behalten, mit den veränderten Symbolen, ihre Gültigkeit. Insbesondere ist

$$[2k + qc,\, 0] = 0; \qquad [2k + qc,\, 2k + qc] = -1,$$

und die Gleichungen (XXXIV; 81) gehen für $p = q = 0$ in (XXXIV; 79) über, wenn $A_0 = 1$ gesetzt wird, und es ist dann $A_{2j} = a_{2j}$.

Die Bestimmung der Koeffizienten A_{2j+pc} aus (XXXIV; 81) ist komplizierter als die der a_{2j} aus (XXXIV; 79), da statt der einfachen Summen Doppelsummen auftreten. Es folgt aber aus der Gestalt der Störungsfunktion, daß A_{2j+cp} von der Ordnung $e^{|p|}\mu^{|2j|}$ ist, wenn e der in Abschnitt 280 definierte Wert der Exzentrizität der Mondbahn ist. Beschränkt man sich also auf Terme, deren Amplituden der ersten Potenz von e proportional sind, so genügt es, in (XXXIV; 81) die innere Summe über $p = \pm 1$ zu erstrecken und in den Summanden nur diejenigen Terme mit $q = \pm 1$ aufzuschreiben, die e höchstens in der ersten Potenz enthalten.

Es kommen dann in (XXXIV; 81) nur noch Unbekannte von der Form

$$A_{2j} = a_{2j}; \quad A_{2j+c} = \alpha_j; \quad A_{2j-c} = \beta_j$$

vor, und es sind α_j, β_j von der Form $ef(\mu)$, wo die $f(\mu)$ Funktionen von der Ordnung $\mu^{|2j|}$ bezeichnen.

Schreibt man die Gleichungen (XXXIV; 81) für $q = +1$ und für $q = -1$ auf, so erhält man unter den oben vereinbarten Einschränkungen:

$$\begin{aligned}\sum_j \{&[2k + c,\, 2j + c]\, \alpha_j a_{2j-2k} + [2k + c,\, 2j]\, a_{2j}\beta_{j-k} + [2k + c]\, (\alpha_j a_{2k-2j-2} + \\ &+ a_{2j}\alpha_{k-j-1}) + (2k + c)\, (a_{2j}\beta_{-k-j-1} + \beta_j a_{-2k-2j-2})\} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_j \{&[2k - c,\, 2j - c]\, \beta_j a_{2j-2k} + [2k - c,\; 2j]\, a_{2j}\alpha_{j-k} + [2k - c]\, (\beta_j a_{2k-2j-2} + \\ &+ a_{2j}\beta_{k-j-1}) + (2k - c)\, (a_{2j}\alpha_{-k-j-1} + \alpha_j a_{-2k-2j-2})\} = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich symmetrischer schreiben, wenn man in einzelnen Summen den Index j durch passende ganze Zahlen vermehrt oder vermindert.

---

[1]) Da c irrational ist, kann $2k + qc$ nur für diesen Fall verschwinden.

Es ergibt sich dann

$$\text{(XXXIV; 82)}\quad \begin{cases} \sum_j \{[2k+c,\, 2j+c]\,\alpha_j a_{2j-2k} + [2k+c,\, 2k-2j]\,\beta_{-j} a_{2k-2j} + \\ \qquad + 2[2k+c]\,\alpha_j a_{2k-2j-2} + 2\,(2k+c)\,\beta_{-j} a_{2j-2k-2}\} = 0, \\ \sum_j \{[-2k-c,\ -2j-c]\,\beta_{-j} a_{2k-2j} + [-2k-c,\ -2j-2k] \times \\ \qquad \times \alpha_j a_{2j-2k} + 2[-2k-c]\,\beta_{-j} a_{2j-2k-2} + \\ \qquad + 2(-2k-c)\,\alpha_j a_{2k-2j-2}\} = 0. \end{cases}$$

Das sind, wenn c und die a_{2j} bekannt sind, zwei Systeme von homogenen linearen Gleichungen für die α_j, β_j, die den Werten $k = -\infty \cdots +\infty$ entsprechen. Da die α_j, β_j von der Ordnung e sind und Terme von der Ordnung e^2 vernachlässigt werden, genügt es, für c den nur von μ abhängigen Hauptteil einzusetzen, dessen numerischer Wert aus der HILLschen Theorie genau bekannt ist. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der α_j, β_j läßt sich also leicht durchführen, wenn in (XXXIV; 82) nur Terme bis zu einer gewissen Ordnung in μ berücksichtigt werden. Da die Gleichungen homogen in den α_j, β_j sind, darf man eine dieser Größen zunächst willkürlich festsetzen. Offenbar kann diese Festsetzung dazu dienen, den Wert der Exzentrizität e, die ja eine Integrationskonstante des Problems darstellt, festzulegen, und man wird das so tun, daß dieser Wert mit demjenigen übereinstimmt, der in Abschnitt 280 definiert wurde. Wir begnügen uns hier mit der folgenden Feststellung: Da die α_j, β_j nur bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor bestimmbar sind, sind insbesondere α_0, β_0 nur durch ihr Verhältnis β_0/α_0 bekannt. Aus jedem der beiden Systeme (XXXIV; 82) findet man demnach die Unbekannten, wenn für α_0 ein willkürlicher Wert eingesetzt wird, und die Ergebnisse werden dann und nur dann miteinander verträglich sein, wenn der für c benutzte Wert korrekt ist. Da α_0 von der Exzentrizität der Mondbahn abhängig ist, kann man diese Größe etwa so festsetzen, daß die Differenz $\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_0(1 - \beta_0/\alpha_0) = 2e$ ist. Die weitere Analyse ergibt, daß das Verhältnis α_0/e von dem oben angenommenen Wert geringfügig abweicht, falls e, wie in Abschnitt 280, durch die Amplitude des Längenterms mit $\sin 2\varphi$ definiert wird.

Die numerischen Werte der Koeffizienten der mit den charakteristischen Parametern e_1, a/a_1 und $\eta = \tan i$ behafteten Terme lassen sich in ähnlicher Weise ermitteln. Wir verweisen den Leser auf die Originalabhandlungen von HILL und E. W. BROWN oder auf die schon mehrfach erwähnte, in den „Dover Publications" als Neudruck erschienene kurzgefaßte Einführung in die Mondtheorie von BROWN, in der die weiteren Schritte der HILLschen Analyse der Mondbewegung wenigstens in großen Zügen beschrieben werden und in der auch, ähnlich wie im dritten Bande von TISSERANDS „Traité de mécanique céleste", andere Mondtheorien, insbesondere die von DELAUNAY und HANSEN, mehr oder weniger ausführlich behandelt werden.

KAPITEL XXXV

THEORIE DER BEWEGUNG DES MONDES. DRITTER TEIL: THEORIE VON HORI

295. Theorie von Hori. Die Differentialgleichungen

G. I. HORI[1]) hat es zum ersten Mal unternommen, eine Theorie des Mondes auf der Grundlage der VON ZEIPELschen Methode aufzubauen, die wir in Kapitel XXXII als Hilfsmittel zur Berechnung der allgemeinen Planetenstörungen kennengelernt haben. Die folgende Darstellung seiner Untersuchungen beschränkt sich auf das Hauptproblem und auf die Bestimmung derjenigen Störungsterme, die von dem Verhältnis n_1/n der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond sowie von der Exzentrizität der Mondbahn abhängen. Es wird also, ähnlich wie bei den HILLschen Untersuchungen (Kapitel XXXIV), sowohl die Exzentrizität der Sonnenbahn als auch die Sonnenparallaxe vernachlässigt. In der Reihenentwicklung der Störungsausdrücke nach Potenzen von n_1/n (oder nach Potenzen von n_1, wenn die Einheiten so gewählt werden, daß $n = 1$ ist) werden die periodischen Terme bis zur vierten, die säkularen bis zur fünften Ordnung in der Exzentrizität e der Mondbahn berücksichtigt werden.

Wir gehen von dem System (XXXI; 28a, b, 31) von kanonischen Differentialgleichungen,

$$\text{(XXXV; 1)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}; \quad \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}; \quad \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h}; \quad \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial k}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}; \quad \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}; \quad \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}; \quad \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial K}, \end{cases}$$

aus, das der DELAUNAYschen Störungstheorie zugrunde liegt. Hier sind L, G, H; l, g, h die DELAUNAYschen kanonischen Elemente der Bahn des gestörten Körpers (Mond), während $k = l_1$ die mittlere Länge des störenden Körpers (Sonne) bezeichnet, die hier als abhängige Variable eingeführt wird, um das explizite Auftreten der Zeit t in der HAMILTONschen Funktion F zu vermeiden. Die zu k konjugiert-kanonische Variable K hat nur formale Bedeutung und kommt in der Störungsfunktion selbst nicht vor. Die HAMILTONsche Funktion hat dann die Form (XXXI; 30, 30a),

$$F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} - n_1 K + \varkappa^2 m_1 R,$$

---

[1]) G. I. HORI, A new approach to the solution of the main problem of the lunar theory. A. J. *68*, 125 (1963).

wo $\varkappa$ (um Verwechslungen mit der Variablen k zu vermeiden) die Gravitationskonstante bedeutet und

$$R = \sum C\,(L, G, H) \cos\,(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k)$$

die Entwicklung der Störungsfunktion versinnbildlicht.

Im Falle des Hauptproblems der Mondbewegung ist nach (XXXIII; 9)

$$(\text{XXXV}; 2) \qquad R = \frac{r^2}{{r_1}^3}\left[P_2' + \frac{r}{r_1}(1 - 2\beta)\,P_3' + \cdots\right]$$

zu setzen, wenn r_1 den Abstand der Sonne vom Baryzentrum G (Abb. 17, S. 404) bedeutet. Um das Prinzip der Horischen Methode deutlich zu machen, genügt es, jene Vereinfachungen einzuführen, die wir auch bei der Beschreibung der Hillschen Theorie zugelassen haben:

1. Die Sonnenbahn um G sei ein Kreis mit dem Halbmesser $r_1 = a_1$.

2. Die Sonnenparallaxe werde vernachlässigt, d. h., das Glied mit r/r_1 in (XXXV; 2) und alle folgenden bleiben unberücksichtigt.

3. Dann darf man (s. Abb. 20, S. 459) den Mittelpunkt der Sonnenbahn in den Erdmittelpunkt verlegen und heliozentrische statt der Jacobischen Koordinaten einführen. Es ist dann $P_2' = P_2 = {}^1/_2\,(3\cos^2\varphi - 1) = {}^1/_4\,(1 + 3\cos 2\varphi)$, wenn φ den Winkel zwischen den geozentrischen Ortsvektoren der Sonne und des Mondes bezeichnet.

Es ist dann mit entsprechender Annäherung

$$R = \frac{r^2}{4{a_1}^3}\,(1 + 3\cos 2\varphi)$$

und, wenn man nach (XXXIII; 12) ${n_1}^2{a_1}^3 = \varkappa^2 m_1$ setzt,

$$F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} - n_1 K + \frac{1}{4}\,{n_1}^2 a^2\left(\frac{r^2}{a^2} + 3\,\frac{r^2}{a^2}\cos 2\varphi\right).$$

Nach (XV; 60b) ist dann, da — s. auch Abschnitt 262 — aus F, σ, μ, L der ursprünglich vorhandene Faktor m (= Mondmasse) herausdividiert worden ist, wodurch sich die Form der Differentialgleichungen (XXXV; 1) nicht ändert, $L = \sigma\sqrt{a}$ und

$$\sigma = \varkappa\sqrt{m_0 + m};\quad \mu = 1;\quad \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} = \frac{\varkappa^4\,(m_0 + m)^2}{2L^2}$$

zu setzen. Ferner ist

$$\varphi = \Omega + \omega + v - k = v + (h + g - k),$$

wenn nach (XV; 72) $g = \omega$ den Perigäumsabstand des Mondes vom Knoten, $h = \Omega$ die Knotenlänge und v die wahre Anomalie des Mondes bedeutet.

Nun sind r/a und v, außer von $e = \sqrt{1 - G^2/L^2}$, allein von der mittleren Anomalie l des Mondes abhängig, so daß F, abgesehen von L, G, H, K, nur von den Winkelvariablen l und $h + g - k$ abhängt. Hori führt daher

$$y_1 = l; \quad y_2 = h + g - k; \quad y_3 = h; \quad y_4 = k$$

als neue Variable ein und bestimmt die zu ihnen kanonisch-konjugierten Variablen x_i durch die Bedingung (XIV; 40) — s. auch Abschnitt 132 —,

$$Ldl + Gdg + Hdh + Kdk = x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + x_3 dy_3 + x_4 dy_4.$$

Daraus folgt aber

$$Ldl + Gdg + Hdh + Kdk = x_1 dl + x_2 d(h + g - k) + x_3 dh + x_4 dk,$$

d. h.

$$L = x_1; \quad G = x_2; \quad H = x_2 + x_3; \quad K = -x_2 + x_4$$

oder

$$x_1 = L; \quad x_2 = G; \quad x_3 = H - G; \quad x_4 = K + G.$$

Nach dieser Transformation lauten die Differentialgleichungen (XXXV; 1)

$$\text{(XXXV; 3)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und die Hamiltonsche Funktion, die sich nicht wesentlich ändert, nimmt die Form

$$\text{(XXXV; 3a)} \quad F = \frac{\sigma^4}{2\mu {x_1}^2} + n_1 (x_2 - x_4) + \frac{{n_1}^2 a^2}{4}\left[\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^2}{a^2}\cos 2(v + y_2)\right]$$

an. In (XXXV; 3a) hängt aber F nicht von y_3 und y_4 ab, da v, wie oben bemerkt, eine Funktion von y_1 und e ist. Demnach ist $x_3 = \text{const}$ und $x_4 = \text{const}$. Das System (XXXV; 3) reduziert sich daher auf die vier Gleichungen

$$\text{(XXXV; 4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1}; & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_2}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_1}; & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{cases}$$

mit

$$\text{(XXXV; 4a)} \qquad F = \frac{\sigma^4}{2\mu {x_1}^2} + n_1 x_2 + \frac{{n_1}^2 a^2}{4}\left[\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^2}{a^2}\cos 2(v + y_2)\right],$$

und nachdem diese Gleichungen gelöst sind, folgt y_3 aus (XXXV; 3, 3a) durch Quadratur und $y_4 = n_1 (t - t_0)$ aus $dy_4/dt = -\partial F/\partial x_4 = n_1$.

Auf die Lösung des Systems (XXXV; 4) baut HORI seine Theorie auf. Diese Gleichungen sind, wie man leicht einsieht, den Differentialgleichungen eines Systems mit rotierenden Achsen äquivalent, dessen sich HILL beim Aufbau seiner im vorigen Kapitel beschriebenen Theorie bedient.

296. Elimination der kurzperiodischen Terme

Zum Zwecke einer kanonischen Transformation $x_i, y_i \to x_i', y_i'$ $(i = 1, 2)$ benutzt HORI nach VON ZEIPEL die erzeugende Funktion

$$S = x_1'y_1 + x_2'y_2 + S_1(x_1', x_2'; y_1, y_2) + S_2(x_1', x_2'; y_1, y_2) + \cdots,$$

wo $S_1, S_2, \ldots$ Ausdrücke von der Ordnung $1, 2, \ldots$ in bezug auf n_1/n sind, eine Größe, die als klein von der ersten Ordnung anzusehen ist. Wählt man die Einheiten so, daß $n = 1$ ist, so kann auch n_1 selbst als kleiner Parameter dienen. Die erzeugende Funktion sei dann, wie in (XXXII; 3), so definiert, daß

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = x_1; \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} = x_2; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1'} = y_1'; \quad \frac{\partial S}{\partial x_2'} = y_2'$$

ist. Hieraus folgt

$$\text{(XXXV; 5)} \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + \dfrac{\partial S_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_2} + \cdots; & x_2 = x_2' + \dfrac{\partial S_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_2} + \cdots, \\ y_1' = y_1 + \dfrac{\partial S_1}{\partial x_1'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial x_1'} + \cdots; & y_2' = y_2 + \dfrac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial x_2'} + \cdots. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $F'(x_1', x_2'; y_2')$ die neue HAMILTONsche Funktion, die nun die kurzperiodische Variable y_1' nicht mehr enthält, und es sei

$$\text{(XXXV; 6)} \qquad F(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv F'(x_1', x_2'; y_2').$$

Bezeichnen wir nun mit F_i, F_i' die Summe der Terme in F, F', die von der Ordnung i in bezug auf n_1 sind, so folgt aus (XXXV; 4a)

$$\text{(XXXV; 7)} \quad F_0 = \frac{\sigma^4}{2\mu x_1^2}; \quad F_1 = n_1 x_2; \quad F_2 = \frac{1}{4} n_1^2 a^2 \left[\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^2}{a^2}\cos 2(v + y_2)\right].$$

Wegen (XXXV; 6, 7) ist dann

(XXXV; 8)

$$F_0(x_1) + F_1(x_2) + F_2(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv F_0'(x_1') + F_1'(x_2') + \sum_{i=2}^{\infty} F_i'(x_1', x_2'; y_2').$$

Setzt man (XXXV; 5) in (XXXV; 8) ein, so erhält man

(XXXV; 9)

$$F_0\left(x_1' + \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial y_1} + \cdots\right) + F_1\left(x_2' + \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial y_2} + \cdots\right) +$$
$$+ F_2\left(x_1' + \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial y_5} + \cdots,\ x_2' + \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial y_2} + \cdots;\ y_1, y_2\right) \equiv$$
$$\equiv F_0'(x_1') + F_1'(x_2') + F_2'\left(x_1', x_2';\ y_2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial x_2'} + \cdots\right) +$$
$$+ F_3'\left(x_1', x_2';\ y_2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial x_2'} + \cdots\right) +$$
$$+ F_4'\left(x_1', x_2';\ y_2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial x_2'} + \cdots\right) +$$
$$+ F_5'\left(x_1', x_2';\ y_2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5}{\partial x_2'} + \cdots\right).$$

Durch TAYLORsche Entwicklung bis zu Termen fünfter Ordnung einschließlich ergibt sich aus (XXXV; 9)

(XXXV; 10)

$$F_0(x_1') + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y_1} + \frac{\partial S_4}{\partial y_1} + \frac{\partial S_5}{\partial y_1}\right)\frac{dF_0}{dx_1'} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + 2\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_3}{\partial y_1} + 2\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_4}{\partial y_1} + 2\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\frac{\partial S_3}{\partial y_1}\right]\frac{d^2F_0}{dx_1'^2} +$$
$$+ \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^3 + 3\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + 3\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2\frac{\partial S_3}{\partial y_1} + 3\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2\right]\frac{d^3F_0}{dx_1'^3} +$$
$$+ \frac{1}{24}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^4 + 4\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^3\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right]\frac{d^4F_0}{dx_1'^4} + \frac{1}{120}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^5\frac{d^5F_0}{dx_1'^5} + F_1(x_2') +$$
$$+ \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial S_2}{\partial y_2} + \frac{\partial S_3}{\partial y_2} + \frac{\partial S_4}{\partial y_2}\right)\frac{dF_1}{dx_2'} + F_2(x_1', x_2'; y_1, y_2) +$$
$$+ \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial F_2}{\partial x_1'} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial S_2}{\partial y_2} + \frac{\partial S_3}{\partial y_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial x_2'} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right]\frac{\partial^2F_2}{\partial x_1'^2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_2}{\partial y_2} + \frac{\partial S_2}{\partial y_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2F_2}{\partial x_1'\partial x_2'} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)^2 + 2\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\frac{\partial S_2}{\partial y_2}\right]\frac{\partial^2F_2}{\partial x_2'^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^3\frac{\partial^3F_2}{\partial x_1'^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{\partial S_1}{\partial y_2}\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1'^2 \partial x_2'} + \frac{1}{2}\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)^2 \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1' \partial x_2'^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)^3 \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2'^3} \equiv$$

$$\equiv F_0'(x_1') + F_1'(x_2') + F_2'(x_1', x_2'; y_2) +$$

$$+ F_3'(x_1', x_2'; y_2) + F_4'(x_1', x_2'; y_2) + F_5'(x_1', x_2'; y_2) +$$

$$+ \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_3}{\partial x_2'}\right)\frac{\partial F_2'}{\partial y_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\right)^2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial x_2'}\right]\frac{\partial^2 F_2'}{\partial y_2^2} +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\right)^3 \frac{\partial^3 F_2'}{\partial y_2^3} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2'}\right)\frac{\partial F_3'}{\partial y_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\right)^2 \frac{\partial^2 F_3'}{\partial y_2^2} + \frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\frac{\partial F_4'}{\partial y_2}.$$

Würde man F auf $F_0 + F_1$ reduzieren, so wären die Gleichungen (XXXV; 4) integrabel und eine Transformation überflüssig, so daß bis auf Störungsterme zweiter und höherer Ordnung

$$x_1 = x_1', x_2 = x_2'; \quad y_1 = y_1', y_2 = y_2'$$

wäre. Daraus folgt $S_1 \equiv 0$. Die Gleichungen (XXXV; 10) schreiben sich daher einfacher

$$F_0(x_1') + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y_1} + \frac{\partial S_4}{\partial y_1} + \frac{\partial S_5}{\partial y_1}\right)\frac{dF_0}{dx_1'} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\frac{\partial S_3}{\partial y_1}\right]\frac{d^2 F_0}{dx_1'^2} +$$

$$+ F_1(x_2') + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y_2} + \frac{\partial S_3}{\partial y_2} + \frac{\partial S_4}{\partial y_2}\right)\frac{dF_1}{dx_2'} + F_2(x_1', x_2'; y_1, y_2) +$$

$$+ \left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial F_2}{\partial x_1'} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y_2} + \frac{\partial S_3}{\partial y_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial x_2'} \equiv$$

$$\equiv F_0'(x_1') + F_1'(x_2') + F_2'(x_1', x_2'; y_2) + F_3'(x_1', x_2'; y_2) + F_4'(x_1', x_2'; y_2) +$$

$$+ F_5'(x_1', x_2'; y_2) + \left(\frac{\partial S_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_3}{\partial x_2'}\right)\frac{\partial F_2'}{\partial y_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2'}\frac{\partial F_3'}{\partial y_2}.$$

Durch Gleichsetzung der Terme gleicher Ordnung auf beiden Seiten dieser Identität erhält man dann

(XXXV; 11)
$$\begin{cases} 1.\ F_0(x_1') = F_0'(x_1') = \dfrac{\sigma^4}{2\mu x_1'^2}, \\ 2.\ F_1(x_2') = F_1'(x_2') = n_1 x_2', \\ 3.\ \dfrac{\partial S_2}{\partial y_1}\dfrac{dF_0}{dx_1'} + F_2(x_1', x_2'; y_1, y_2) = F_2'(x_1', x_2'; y_2), \\ 4.\ \dfrac{\partial S_3}{\partial y_1}\dfrac{dF_0}{dx_1'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_2}\dfrac{dF_1}{dx_2'} = F_3'(x_1', x_2'; y_2), \end{cases}$$

$$(\text{XXXV};11)\quad \begin{cases} 5.\ \dfrac{\partial S_4}{\partial y_1}\dfrac{dF_0}{dx_1'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 \dfrac{d^2F_0}{dx_1'^2} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y_2}\dfrac{dF_1}{dx_2'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1'} + \\ \quad + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2'} = F_4'(x_1', x_2'; y_2) + \dfrac{\partial S_2}{\partial x_2'}\dfrac{\partial F_2'}{\partial y_2}, \\ 6.\ \dfrac{\partial S_5}{\partial y_1}\dfrac{dF_0}{dx_1'} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial S_3}{\partial y_1}\dfrac{d^2F_0}{dx_1'^2} + \dfrac{\partial S_4'}{\partial y_2}\dfrac{dF_1}{dx_2'} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1'} + \\ \quad + \dfrac{\partial S_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2'} = F_5'(x_1', x_2'; y_2) + \dfrac{\partial S_3}{\partial x_2'}\dfrac{\partial F_2'}{\partial y_2} + \dfrac{\partial S_2}{\partial x_2'}\dfrac{\partial F_3'}{\partial y_2}. \end{cases}$$

297. Bestimmung von S_2 und F_2'

Wir nehmen a priori an, daß alle Terme von $S_2, S_3, \ldots$ periodisch in y_1 sind. Dann folgt aus der dritten Gleichung (XXXV; 11)

$$(\text{XXXV};12)\qquad \frac{\partial S_2}{\partial y_1}\frac{dF_0}{dx_1'} = -F_{2p}(x_1', x_2'; y_1, y_2),$$

$$(\text{XXXV};13)\qquad F_2'(x_1', x_2'; y_2) = F_{2s}(x_1', x_2'; y_1, y_2),$$

wenn F_{2p} die Gesamtheit der Terme von F_2 darstellt, die periodisch in y_1 sind, und F_{2s} die Gesamtheit der von y_1 unabhängigen Terme bezeichnet. Nun ist aber nach (VII; 64), mit $M = l$ als der mittleren Anomalie des Mondes,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \cdots\right)\cos M - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \cdots\right)\cos 2M - \\ - \left(\frac{3}{8}e^3 - \cdots\right)\cos 3M - \cdots$$

und nach (VII; 43), wenn wir die BESSELschen Funktionen als Potenzreihen nach e einsetzen,

$$\frac{x}{a} = \frac{r}{a}\cos v = -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2 + \cdots\right)\cos M + \\ + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \cdots\right)\cos 2M + \left(\frac{3}{8}e^2 - \cdots\right)\cos 3M + \cdots.$$

Aus Entwicklungen von der Form

$$\xi = a_0 + a_1\cos M + a_2\cos 2M + a_3\cos 3M + \cdots$$

folgt aber

$$(\xi^2)_s = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots),$$

also, wenn Terme von der Ordnung e^6 an vernachlässigt werden,

$$\left(\frac{r}{a}\right)_s^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2; \quad \left(\frac{r}{a}\cos v\right)_s^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)_s^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2v\right]_s = \frac{1}{2} + 2e^2,$$

da in beiden Fällen nur gerade Potenzen von e auftreten und der Term mit e^4 verschwindet. Es ist also

$$\left(\frac{r^2}{a^2}\cos 2v\right)_s = (1 + 4e^2) - \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + O(e^6) = \frac{5}{2}e^2 + O(e^6).$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (VII; 43)

$$\left(\frac{r^2}{a^2}\sin 2v\right)_s = 0$$

und daher aus (XXXV; 7), bis auf Terme von sechster und höherer Ordnung,

$$\text{(XXXV; 14)} \qquad F_{2s} = \frac{1}{4}n_1{}^2a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^2\cos 2y_2\right),$$

$$\text{(XXXV; 15)} \qquad F_{2p} = F - F_{2s} = \frac{1}{4}n_1{}^2a^2\,(A + B\cos 2y_2 + C\sin 2y_2)$$

mit

$$\text{(XXXV; 16)} \quad A = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right); \quad B = 3\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2v - \frac{15}{2}e^2;$$

$$C = -3\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2v.$$

Drückt man die drei Größen (XXXV; 16) als Funktionen der exzentrischen Anomalie E aus, so ergibt sich mit Hilfe der bekannten Formeln (III; 52)

$$A = -e^2 - 2e\cos E + \frac{1}{2}e^2\cos 2E,$$

$$B = -3e^2 - 6e\cos E + 3\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)\cos 2E,$$

$$C = \sqrt{1 - e^2}\,(6e\sin E - 3\sin 2E).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\text{(XXXV; 17)} \qquad A^{(1)} = \int A dy_1; \quad B^{(1)} = \int B dy_1; \quad C^{(1)} = \int C dy_1,$$

so folgt wegen $dy_1 = (1 - e\cos E)\,dE$ nach einfacher Rechnung

(XXXV; 18)
$$\begin{cases} A^{(1)} = \left(-2e + \frac{3}{4}e^3\right)\sin E + \frac{3}{4}e^2\sin 2E - \frac{1}{12}e^3\sin 3E, \\ B^{(1)} = \left(-\frac{15}{2}e + \frac{15}{4}e^3\right)\sin E + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}e^2\right)\sin 2E + \\ \qquad\qquad + \left(-\frac{1}{2}e + \frac{1}{4}e^3\right)\sin 3E, \\ C^{(1)} = \sqrt{1-e^2}\left[-\frac{15}{4}e^2 - \frac{15}{2}e\cos E + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^2\right)\cos 2E - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}e\cos 3E\right]. \end{cases}$$

Aus (XXXV; 12) entnimmt man

(XXXV; 19)
$$S_2 = -\frac{1}{\frac{dF_0}{dx_1'}}\int F_{2p}(x_1', x_2'; y_1, y_2)\,dy_1,$$

und hieraus folgt nach (XXXV; 15, 17), wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{dF_0}{dx_1'} = -n$$

ist,

(XXXV; 20)
$$S_2 = \frac{n_1^2 a^2}{4n}\left(A^{(1)} + B^{(1)}\cos 2y_2 + C^{(1)}\sin 2y_2\right).$$

Die neue HAMILTONsche Funktion F_2' schreibt sich dann wegen (XXXV; 13, 14)

(XXXV; 21)
$$F_2' = \frac{1}{4}n_1^2 a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^2\cos 2y_2\right).$$

In (XXXV; 20, 21) sind die Größen $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ durch ihre Werte (XXXV; 18) zu ersetzen, während a, e, E als Funktionen von x_1, x_2, y_1 auszudrücken und x_1, x_2 durch x_1', x_2' zu ersetzen sind.

298. Bestimmung von S_3 und F_3'

Aus der vierten Gleichung (XXXV; 11) entnimmt man

(XXXV; 22)
$$\frac{\partial S_3}{\partial y_1}\frac{dF_0}{dx_1'} = -\frac{\partial S_2}{\partial y_2}\frac{dF_1}{dx_2'},$$

(XXXV; 23)
$$F_3'(x_1', x_2'; y_2) = 0.$$

Aus der Gleichung (XXXV; 22), die man auch

$$-n\frac{\partial S_3}{\partial y_1}+n_1\frac{\partial S_2}{\partial y_2}=0$$

schreiben kann, folgt

(XXXV; 24)
$$S_3=\frac{n_1}{n}\int\frac{\partial S_2}{\partial y_2}dy_1.$$

Nun ist wegen (XXXV; 20)

(XXXV; 25)
$$\frac{\partial S_2}{\partial y_2}=\frac{{n_1}^2a^2}{4n}(-2B^{(1)}\sin 2y_2+2C^{(1)}\cos 2y_2),$$

also

$$\int\frac{\partial S_2}{\partial y_2}dy_1=\frac{{n_1}^2a^2}{4n}(-2\sin 2y_2\int B^{(1)}dy_1+2\cos 2y_2\int C^{(1)}dy_1).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$B^{(2)}=\int B^{(1)}dy_1,\quad C^{(2)}=\int C^{(1)}dy_1,$$

so ergibt eine leichte Rechnung, die dem Leser überlassen bleibe, aus den beiden letzten Gleichungen (XXXV; 18)

(XXXV; 26)
$$\begin{cases} B^{(2)}=\frac{33}{8}e^2-\frac{27}{16}e^4+\left(\frac{33}{4}e-\frac{27}{8}e^3\right)\cos E+ \\ \qquad+\left(-\frac{3}{4}-\frac{19}{8}e^2+e^4\right)\cos 2E+ \\ \qquad+\left(\frac{5}{12}e+\frac{1}{24}e^3\right)\cos 3E+\left(-\frac{1}{16}e^2+\frac{1}{32}e^4\right)\cos 4E, \\ C^{(2)}=\sqrt{1-e^2}\left[\left(-\frac{33}{4}e+3e^3\right)\sin E+\right. \\ \qquad+\left(\frac{3}{4}+\frac{11}{4}e^2\right)\sin 2E+\left(-\frac{5}{12}e-\frac{1}{4}e^3\right)\sin 3E+ \\ \qquad\left.+\frac{1}{16}e^2\sin 4E\right]. \end{cases}$$

Aus (XXXV; 24, 25) folgt dann

(XXXV; 27)
$$S_3=\frac{{n_1}^3a^2}{2n^2}(-B^{(2)}\sin 2y_2+C^{(2)}\cos 2y_2),$$

wo $B^{(2)}$ und $C^{(2)}$ durch die Ausdrücke (XXXV; 26) zu ersetzen sind.

299. Bestimmung von S_4, F_4' und F_5'

In der fünften Gleichung (XXXV; 11) trennen wir wiederum die periodischen und die von y_1 unabhängigen Terme, indem wir die ersteren durch den Index p, die letzteren durch den Index s kennzeichnen. Dann ist

(XXXV; 28)
$$n\frac{\partial S_4}{\partial y_1} = n_1\frac{\partial S_3}{\partial y_2} + \left[\frac{1}{2}\frac{d^2F_0}{dx_1'^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1'}\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2'}{\partial y_2}\frac{\partial S_2}{\partial x_2'}\right]_p,$$

(XXXV; 29)
$$F_4'(x_1', x_2'; y_2) = \left[\frac{1}{2}\frac{d^2F_0}{dx_1'^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_1'}\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial y_2}\right]_s.$$

Hori setzt zur Abkürzung

(XXXV; 30)
$$A + B\cos 2y_2 + C\sin 2y_2 = D,$$

(XXXV; 31)
$$-B^{(1)}\sin 2y_2 + C^{(1)}\cos 2y_2 = \Delta.$$

Dann ist wegen (XXXV; 15)

(XXXV; 32)
$$F_{2p} = \frac{1}{4}n_1^2a^2D$$

und wegen (XXXV; 20, 21, 25)

(XXXV; 33)
$$\frac{\partial S_2}{\partial y_1} = \frac{n_1^2a^2}{4n}D;\quad \frac{\partial S_2}{\partial y_2} = \frac{n_1^2a^2}{2n}\Delta;\quad \frac{\partial F_2'}{\partial y_2} = -\frac{15}{4}n_1^2a^2e^2\sin 2y_2.$$

Nun folgt aber aus

$$L = x_1;\quad G = x_2;\quad a^2 = \frac{x_1^4}{\sigma^4};\quad n = \frac{\sigma^4}{x_1^3};\quad e = \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{x_1^2}};$$

$$\frac{d}{de}(E - e\sin E) = \frac{dM}{de} = 0,$$

wenn $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ gesetzt wird,

(XXXV; 34)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}(n_1^2a^2) = 4\dfrac{n_1^2}{n};\quad \dfrac{dE}{de} = \dfrac{a}{r}\sin E, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}f(e) = \dfrac{\eta^2}{ex_1}\dfrac{\partial f}{\partial e};\quad \dfrac{\partial}{\partial x_2}f(e) = -\dfrac{\eta}{ex_1}\dfrac{\partial f}{\partial e}. \end{cases}$$

Aus (XXXV; 32) erhält man mit Hilfe der Beziehungen (XXXV; 34)

(XXXV; 35)
$$\frac{\partial F_{2p}}{\partial x_1'} = \frac{1}{4}\frac{n_1^2}{n}\left(4D + \frac{\eta^2}{e}\frac{\partial D}{\partial e}\right),$$

(XXXV; 36)
$$\frac{\partial F_{2p}}{\partial x_2'} = -\frac{1}{4}\frac{n_1^2\eta}{en}\frac{\partial D}{\partial e}.$$

Ebenso ergibt sich aus (XXXV; 14)

$$(\text{XXXV}; 37) \qquad \frac{\partial F_{2s}}{\partial x_1'} = \frac{1}{4}\frac{{n_1}^2}{n}\left[7 + 3e^2 + 15(1 + e^2)\cos 2y_2\right],$$

$$(\text{XXXV}; 38) \qquad \frac{\partial F_{2s}}{\partial x_2'} = -\frac{1}{4}\frac{{n_1}^2}{n}\eta(3 + 15\cos 2y_2).$$

Außerdem folgt aus (XXXV; 20)

$$(\text{XXXV}; 39) \quad \frac{\partial S_2}{\partial x_2'} = -\frac{{n_1}^2\eta}{4n^2e}\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial e} + \frac{\partial B^{(1)}}{\partial e}\cos 2y_2 + \frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}\sin 2y_2\right).$$

Übrigens ist, wie schon in (XXXII; 27) gezeigt wurde,

$$(\text{XXXV}; 40) \qquad \frac{d^2F_0}{dx_1'^2} = \frac{3n}{x_1'} = \frac{3}{a^2}.$$

Man erhält dann aus den ersten beiden Gleichungen (XXXV; 33) und aus (XXXV; 35, 36, 39, 40)

$$(\text{XXXV}; 41) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2F_0}{dx_1'^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_1'}\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial y_2} =$$

$$= \frac{{n_1}^4a^2}{16n^2}\left[\frac{11}{2}D^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{e}\frac{\partial D^2}{\partial e} - 2\frac{\eta}{e}\Delta\frac{\partial D}{\partial e}\right].$$

Ferner folgt aus den drei Gleichungen (XXXV; 33) und aus (XXXV; 37, 38)

(XXXV; 42)

$$\frac{\partial F_{2s}}{\partial x_1'}\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{2s}}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2'}{\partial y_2}\frac{\partial S_2}{\partial x_2'} =$$

$$= \frac{{n_1}^4a^2}{16n^2}\Big[(7 + 3e^2)\,D - 6\eta\Delta - \frac{15}{2}\eta e\frac{\partial C^{(1)}}{\partial e} +$$

$$+ \{15(1 + e^2)\,D - 30\eta\Delta\}\cos 2y_2 -$$

$$- \frac{15}{2}\eta e\left\{2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial e}\sin 2y_2 - \frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}\cos 4y_2 + \frac{\partial B^{(1)}}{\partial e}\sin 4y_2\right\}\Big].$$

Die in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke auf den rechten Seiten von (XXXV; 41, 42) lassen sich nach (XXXV; 16, 18, 30, 31) in der Form

$$(\text{XXXV}; 43) \quad \frac{11}{2}D^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{e}\frac{\partial D^2}{\partial e} - 2\frac{\eta\Delta}{e}\frac{\partial D}{\partial e} =$$

$$= M_1 + N_1\cos 2y_2 + P_1\sin 2y_2 + Q_1\cos 4y_2 + R_1\sin 4y_2$$

bzw.

(XXXV; 44)

$$(7+3e^2)\,D-6\eta\Delta-\frac{15}{2}\eta e\frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}+\{15(1+e^2)\,D-30\eta\Delta\}\cos 2y_2-$$
$$-\frac{15}{2}\eta e\left\{2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial e}\sin 2y_2-\frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}\cos 4y_2+\frac{\partial B^{(1)}}{\partial e}\sin 4y_2\right\}=$$
$$=M_2+N_2\cos 2y_2+P_2\sin 2y_2+Q_2\cos 4y_2+R_2\sin 4y_2$$

schreiben. Dabei ist

$$M_1=\frac{a}{r}\left[-\frac{49}{4}+\frac{873}{4}e^2-\frac{4347}{32}e^4+\left(-145e+\frac{523}{4}e^3-\frac{857}{32}e^5\right)\cos E+\right.$$
$$+\left(11-\frac{5}{4}e^2-\frac{321}{16}e^4\right)\cos 2E+\left(\frac{21}{4}e-\frac{85}{16}e^3-\frac{1761}{64}e^5\right)\cos 3E+$$
$$\left.+\left(-\frac{11}{4}e^2+\frac{357}{32}e^4\right)\cos 4E+\left(\frac{45}{16}e^3-\frac{145}{64}e^5\right)\cos 5E-\frac{3}{16}e^4\cos 6E\right],$$

$$N_1=\frac{a}{r}\left[\frac{333}{4}e^2-\frac{237}{8}e^4+\left(-22e+\frac{103}{4}e^3-\frac{195}{8}e^5\right)\cos E+\right.$$
$$+\left(-4+\frac{147}{2}e^2-\frac{139}{2}e^4\right)\cos 2E+\left(-\frac{105}{4}e-\frac{219}{8}e^3+\frac{33}{16}e^5\right)\cos 3E+$$
$$\left.+\left(-4+\frac{105}{4}e^2-\frac{13}{8}e^4\right)\cos 4E+\left(\frac{5}{4}e-\frac{43}{8}e^3+\frac{33}{16}e^5\right)\cos 5E\right],$$

$$P_1=\eta\frac{a}{r}\left[\left(\frac{35}{2}e-\frac{185}{4}e^3\right)\sin E+(4-61e^2+31e^4)\sin 2E+\right.$$
$$+\left(\frac{105}{4}e+\frac{63}{2}e^3\right)\sin 3E+\left(4-\frac{97}{4}e^2-\frac{29}{4}e^4\right)\sin 4E+$$
$$\left.+\left(-\frac{5}{4}e+\frac{19}{4}e^3\right)\sin 5E\right],$$

$$Q_1=\frac{a}{r}\left[\frac{615}{32}e^4+\left(-\frac{81}{4}e+\frac{207}{2}e^3-\frac{2451}{32}e^5\right)\cos E+\right.$$
$$+\left(-\frac{81}{2}+\frac{681}{4}e^2-\frac{1911}{16}e^4\right)\cos 2E+$$
$$+\left(-\frac{783}{8}e+\frac{279}{16}e^3+\frac{1413}{64}e^5\right)\cos 3E+$$

$$+\left(\frac{135}{4}+30e^2-\frac{1209}{32}e^4\right)\cos 4E+\left(-\frac{165}{8}e+\frac{285}{16}e^3-\frac{75}{64}e^5\right)\cos 5E+$$
$$+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{16}e^4\right)\cos 6E\Big],$$

$$R_1=\eta\frac{a}{r}\Big[\left(\frac{81}{4}e-90e^3\right)\sin E+\left(\frac{81}{2}-150e^2+\frac{243}{4}e^4\right)\sin 2E+$$
$$+\left(\frac{783}{8}e+\frac{63}{2}e^3\right)\sin 3E+\left(-\frac{135}{4}-\frac{375}{8}e^2+\frac{81}{8}e^4\right)\sin 4E+$$
$$+\left(\frac{165}{8}e-\frac{15}{2}e^3\right)\sin 5E+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}e^2\right)\sin 6E\Big]$$

und

$$M_2=\frac{a}{r}\Big[\left(121e-\frac{1443}{4}e^3+\frac{1053}{8}e^5\right)\cos E+\left(-\frac{69}{2}e^2+\frac{339}{2}e^4\right)\cos 2E+$$
$$+\left(-\frac{67}{4}e^3-12e^5\right)\cos 3E+\frac{15}{8}e^4\cos 4E\Big],$$

$$N_2=\frac{a}{r}\Big[\left(-33e-\frac{165}{2}e^3+\frac{81}{2}e^5\right)\cos E+(12+18e^2+60e^4)\cos 2E+$$
$$+(-3e-6e^3-6e^5)\cos 3E+\left(-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^4\right)\cos 4E\Big],$$

$$P_2=\eta\frac{a}{r}\Big[\left(33e+\frac{63}{2}e^3\right)\sin E+\left(-12-24e^2-\frac{27}{2}e^4\right)\sin 2E+$$
$$+\left(3e+\frac{15}{2}e^3\right)\sin 3E+\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{4}e^4\right)\sin 4E\Big],$$

$$Q_2=\frac{a}{r}\Big[\left(-\frac{135}{4}e^3+\frac{135}{8}e^5\right)\cos E+\left(-\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{2}e^4\right)\cos 2E+$$
$$+\left(15e-\frac{45}{4}e^3\right)\cos 3E+\left(-\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{8}e^4\right)\cos 4E\Big],$$

$$R_2=\eta\frac{a}{r}\Big[\frac{135}{4}e^3\sin E+\left(\frac{15}{2}e^2-\frac{75}{4}e^4\right)\sin 2E+\left(-15e+\frac{15}{4}e^3\right)\sin 3E+$$
$$+\left(\frac{15}{2}e^2-\frac{15}{8}e^4\right)\sin 4E\Big].$$

Um F_4' zu berechnen, wird man aus den rechten Seiten der Gleichungen (XXXV; 43, 44) diejenigen Terme absondern, die von y_1 nicht abhängen

und die wir durch den Index s kennzeichnen. Dann ist

$$\left(\frac{a}{r}\right)_s = 1 \text{ nach (VII; 45)}; \quad \left(\frac{a}{r}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} jE\right)_s = 0 \text{ für ganze } j \geqq 1,$$

und man erhält daher

$$(\text{XXXV; 45}) \qquad F_4'(x_1', x_2'; y_2) = \frac{n_1{}^4 a^2}{16n^2}\left[-\frac{49}{4} + \frac{873}{4}e^2 - \frac{4347}{32}e^4 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{333}{4}e^2 - \frac{237}{8}e^4\right)\cos 2y_2 + \frac{615}{32}e^4 \cos 4y_2\right].$$

Bezeichnet man ferner diejenigen Terme der rechten Seiten von (XXXV; 43, 44) mit dem Index p, die von y_1 abhängen, so ist

$$(\text{XXXV; 46}) \quad n\frac{\partial S_4}{\partial y_1} = n_1\frac{\partial S_3}{\partial y_2} + \frac{n_1{}^4 a^2}{16n^2}[M_{1p} + M_2 + (N_{1p} + N_2)\cos 2y_2 +$$
$$+ (P_{1p} + P_2)\sin 2y_2 + (Q_{1p} + Q_2)\cos 4y_2 +$$
$$+ (R_{1p} + R_2)\sin 4y_2],$$

und man erhält

$$(\text{XXXV; 47}) \quad \begin{cases} M_{1p} + M_2 = \frac{a}{r}\left[\left(-24e - 230e^3 + \frac{3355}{32}e^5\right)\cos E + \right. \\ \quad + \left(11 - \frac{143}{4}e^2 + \frac{2391}{16}e^4\right)\cos 2E + \\ \quad + \left(\frac{21}{4}e - \frac{353}{16}e^3 - \frac{2529}{64}e^5\right)\cos 3E + \\ \quad + \left(-\frac{11}{4}e^2 + \frac{417}{32}e^4\right)\cos 4E + \\ \quad \left. + \left(\frac{45}{16}e^3 - \frac{145}{64}e^5\right)\cos 5E - \frac{3}{16}e^4 \cos 6E\right], \\ N_{1p} + N_2 = \frac{a}{r}\left[\left(-55e - \frac{227}{4}e^3 + \frac{129}{8}e^5\right)\cos E + \right. \\ \quad + \left(8 + \frac{183}{2}e^2 - \frac{19}{2}e^4\right)\cos 2E + \\ \quad + \left(-\frac{117}{4}e - \frac{267}{8}e^3 - \frac{63}{16}e^5\right)\cos 3E + \\ \quad + \left(-4 + \frac{99}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^4\right)\cos 4E + \\ \quad \left. + \left(\frac{5}{4}e - \frac{43}{8}e^3 + \frac{33}{16}e^5\right)\cos 5E\right], \end{cases}$$

(XXXV;47)

$$
\begin{aligned}
P_{1p} + P_2 &= \eta \frac{a}{r}\left[\left(\frac{101}{2}e - \frac{59}{4}e^3\right)\sin E + \right.\\
&\quad + \left(-8 - 85e^2 + \frac{35}{2}e^4\right)\sin 2E + \\
&\quad + \left(\frac{117}{4}e + 39e^3\right)\sin 3E + \\
&\quad + \left(4 - \frac{91}{4}e^2 - 8e^4\right)\sin 4E + \\
&\quad \left. + \left(-\frac{5}{4}e + \frac{19}{4}e^3\right)\sin 5E\right],\\
Q_{1p} + Q_2 &= \frac{a}{r}\left[\left(-\frac{81}{4}e + \frac{279}{4}e^3 - \frac{1911}{32}e^5\right)\cos E + \right.\\
&\quad + \left(-\frac{81}{2} + \frac{651}{4}e^2 - \frac{1551}{16}e^4\right)\cos 2E + \\
&\quad + \left(-\frac{663}{8}e + \frac{99}{16}e^3 + \frac{1413}{64}e^5\right)\cos 3E + \\
&\quad + \left(\frac{135}{4} + \frac{45}{2}e^2 - \frac{1029}{32}e^4\right)\cos 4E + \\
&\quad + \left(-\frac{165}{8}e + \frac{285}{16}e^3 - \frac{75}{64}e^5\right)\cos 5E + \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{16}e^4\right)\cos 6E\right],\\
R_{1p} + R_2 &= \eta \frac{a}{r}\left[\left(\frac{81}{4}e - \frac{225}{4}e^3\right)\sin E + \right.\\
&\quad + \left(\frac{81}{2} - \frac{285}{2}e^2 + 42e^4\right)\sin 2E + \\
&\quad + \left(\frac{663}{8}e + \frac{141}{4}e^3\right)\sin 3E + \\
&\quad + \left(-\frac{135}{4} - \frac{315}{8}e^2 + \frac{33}{4}e^4\right)\sin 4E + \\
&\quad + \left(\frac{165}{8}e - \frac{15}{2}e^3\right)\sin 5E + \\
&\quad \left. + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{4}e^2\right)\sin 6E\right].
\end{aligned}
\tag{XXXV;47}
$$

Wegen (XXXV; 27) ist

$$\text{(XXXV; 48)} \qquad \frac{\partial S_3}{\partial y_2} = \frac{{n_1}^3 a^2}{n^2}\,(-B^{(2)}\cos 2y_2 - C^{(2)}\sin 2y_2)\,.$$

Setzt man nun

$$\text{(XXXV; 49)} \qquad B^{(3)} = \int B^{(2)} dy_1\,, \quad C^{(3)} = \int C^{(2)} dy_1$$

und

$$\text{(XXXV; 50)} \qquad \begin{cases} (M_{1p} + M_2)^{(1)} = \int (M_{1p} + M_2)\, dy_1\,; \ldots; \\ (R_{1p} + R_2)^{(1)} = \int (R_{1p} + R_2)\, dy_1\,, \end{cases}$$

so erhält man aus (XXXV; 46), wenn man (XXXV; 48, 49, 50) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \text{(XXXV; 51)} \quad S_4 = {} & \frac{{n_1}^4 a^2}{n^3}\,(-B^{(3)}\cos 2y_2 - C^{(3)}\sin 2y_2) + \frac{{n_1}^4 a^2}{16 n^3} \times \\ & \times [(M_{1p} + M_2)^{(1)} + (N_{1p} + N_2)^{(1)}\cos 2y_2 + (P_{1p} + P_2)^{(1)} \times \\ & \times \sin 2y_2 + (Q_{1p} + Q_2)^{(1)}\cos 4y_2 + (R_{1p} + R_2)^{(1)}\sin 4y_2]\,. \end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung, die dem Leser überlassen werden darf, ergibt für die Koeffizienten der Terme in (XXXV; 51) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} B^{(3)} = {} & \left(\frac{69}{8}e - \frac{101}{16}e^3 + \frac{19}{16}e^5\right)\sin E + \left(-\frac{3}{8} - \frac{161}{48}e^2 + \frac{4}{3}e^4\right)\sin 2E + \\ & + \left(\frac{19}{72}e + \frac{121}{288}e^3 - \frac{11}{64}e^5\right)\sin 3E + \left(-\frac{13}{192}e^2 + \frac{1}{384}e^4\right)\sin 4E + \\ & + \left(\frac{1}{160}e^3 - \frac{1}{320}e^5\right)\sin 5E\,, \\ C^{(3)} = {} & \eta\left[\frac{69}{16}e^2 - \frac{13}{16}e^4 + \left(\frac{69}{8}e - \frac{13}{8}e^3\right)\cos E + \right. \\ & + \left(-\frac{3}{8} - \frac{85}{24}e^2 + \frac{11}{16}e^4\right)\cos 2E + \left(\frac{19}{72}e + \frac{53}{96}e^3\right)\cos 3E + \\ & \left. + \left(-\frac{13}{192}e^2 - \frac{1}{32}e^4\right)\cos 4E + \frac{1}{160}e^3\cos 5E\right], \\ (M_{1p} + M_2)^{(1)} = {} & \left(-24e - 230e^3 + \frac{3355}{32}e^5\right)\sin E + \\ & + \left(\frac{11}{2} - \frac{143}{8}e^2 + \frac{2391}{32}e^4\right)\sin 2E + \\ & + \left(\frac{7}{4}e - \frac{353}{48}e^3 - \frac{843}{64}e^5\right)\sin 3E + \left(-\frac{11}{16}e^2 + \frac{417}{128}e^4\right) \times \\ & \times \sin 4E + \left(\frac{9}{16}e^3 - \frac{29}{64}e^5\right)\sin 5E - \frac{1}{32}e^4\sin 6E\,, \end{aligned}$$

$$(N_{1p}+N_2)^{(1)}=\left(-55e-\frac{227}{4}e^3+\frac{129}{5}e^5\right)\sin E+$$
$$+\left(4+\frac{183}{4}e^2-\frac{19}{4}e^4\right)\sin 2E+\left(-\frac{39}{4}e-\frac{89}{8}e^3-\frac{21}{16}e^5\right)\sin 3E+$$
$$+\left(-1+\frac{99}{16}e^2-\frac{1}{32}e^4\right)\sin 4E+\left(\frac{1}{4}e-\frac{43}{40}e^3+\frac{33}{80}e^5\right)\sin 5E,$$

$$(P_{1p}+P_2)^{(1)}=\eta\left[-\frac{101}{4}e^2+\frac{59}{8}e^4+\left(-\frac{101}{2}e+\frac{59}{4}e^3\right)\cos E+\right.$$
$$+\left(4+\frac{85}{2}e^2-\frac{35}{4}e^4\right)\cos 2E+\left(-\frac{39}{4}e-13e^3\right)\cos 3E+$$
$$\left.+\left(-1+\frac{91}{16}e^2+2e^4\right)\cos 4E+\left(\frac{1}{4}e-\frac{19}{20}e^3\right)\cos 5E\right],$$

$$(Q_{1p}+Q_2)^{(1)}=\left(-\frac{81}{4}e+\frac{279}{4}e^3-\frac{1911}{32}e^5\right)\sin E+$$
$$+\left(-\frac{81}{4}+\frac{651}{8}e^2-\frac{1551}{32}e^4\right)\sin 2E+$$
$$+\left(-\frac{221}{8}e+\frac{33}{16}e^3+\frac{471}{64}e^5\right)\sin 3E+$$
$$+\left(\frac{135}{16}+\frac{45}{8}e^2-\frac{1029}{128}e^4\right)\sin 4E+\left(-\frac{33}{8}e+\frac{57}{16}e^3-\frac{15}{64}e^5\right)\times$$
$$\times\sin 5E+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{32}e^4\right)\sin 6E,$$

$$(R_{1p}+R_2)^{(1)}=\eta\left[-\frac{81}{8}e^2+\frac{225}{8}e^4+\left(-\frac{81}{4}e+\frac{225}{4}e^3\right)\cos E+\right.$$
$$+\left(-\frac{81}{4}+\frac{285}{4}e^2-21e^4\right)\cos 2E+\left(-\frac{221}{8}e-\frac{47}{4}e^3\right)\times$$
$$\times\cos 3E+\left(\frac{135}{16}+\frac{315}{32}e^2-\frac{33}{16}e^4\right)\cos 4E+$$
$$\left.+\left(-\frac{33}{8}e+\frac{3}{2}e^3\right)\cos 5E+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}e^2\right)\cos 6E\right].$$

In den Ausdrücken $C^{(3)}$, $(P_{1p}+P_2)^{(1)}$ und $(R_{1p}+R_2)^{(1)}$ fällt auf, daß außer den Termen mit $\cos jE$ ($j\geqq 1$) eine nur von e abhängige Integrationskonstante auftritt. Der Grund ist, daß nach (VII; 40)

$$\cos E=-\frac{e}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos iy_1$$

außer periodischen Termen mit y_1 eine Konstante enthält, während dies für $\cos jE$ $(j > 1)$ und $\sin jE$ $(j \geqq 1)$ nicht der Fall ist. Da S_4 aber nur periodische Terme mit y_1 enthält, muß nach der Integration $\cos E$ durch $\cos E + {}^1/_2 e$ ersetzt werden. Andererseits ist diese Integrationskonstante nicht überflüssig, da e von x_1' und x_2' abhängt und die Theorie auch Ableitungen von S nach diesen Variablen erfordert.

Um einen Ausdruck für F_5' abzuleiten, benutzen wir die sechste Gleichung (XXXV; 11) und entnehmen ihr die von y_1 unabhängigen Terme. Das führt auf

$$(\text{XXXV}; 52) \quad F_5'(x_1', x_2'; y_2) = \left(\frac{d^2F_0}{dx_1'^2}\frac{\partial S_2}{\partial y_1}\frac{\partial S_3}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_1'}\frac{\partial S_3}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_2'}\frac{\partial S_3}{\partial y_2}\right)_s.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(\text{XXXV}; 53) \qquad -B^{(2)}\cos 2y_2 - C^{(2)}\sin 2y_2 = T,$$

so folgt aus (XXXV; 27) mit (XXXV; 31, 53)

$$(\text{XXXV}; 54) \qquad \frac{\partial S_3}{\partial y_1} = \frac{n_1{}^3a^2}{2n^2}\Delta; \quad \frac{\partial S_3}{\partial y_2} = \frac{n_1{}^3a^2}{n^2}T.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (XXXV; 40, 15, 20, 35, 36 und 54), so erhält man (XXXV; 52) in der Form

$$F_5'(x_1', x_2'; y_2) = \frac{3}{a^2n}F_{2p}\frac{n_1{}^3a^2}{2n^2}\Delta + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_1'}\frac{n_1{}^3a^2}{2n^2}\Delta + \frac{\partial F_{2p}}{\partial x_2'}\frac{n_1{}^3a^2}{n^2}T =$$

$$= \frac{n_1{}^3a^2}{n^2}\left[\frac{3}{2a^2n}\frac{n_1{}^2a^2}{4}D\Delta + \frac{1}{2}\Delta\frac{n_1{}^2}{4n}\left(4D + \frac{\eta^2}{e}\frac{\partial D}{\partial e}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{n_1{}^2\eta}{en}\frac{\partial D}{\partial e}T\right] = \frac{n_1{}^5a^2}{16n^3}\left(14D\Delta + 2\frac{\eta^2}{e}\Delta\frac{\partial D}{\partial e} - 4\frac{\eta}{e}T\frac{\partial D}{\partial e}\right),$$

woraus schließlich, mit Hilfe der Gleichungen (XXXV; 30, 31, 53)

(XXXV; 55)

$$F_5'(x_1', x_2'; y_2) = \frac{n_1{}^5a^2}{16n^3}\left[-\frac{97}{2} + \frac{2335}{4}e^2 - \frac{1545}{8}e^4 + \right.$$

$$\left. + \left(-18 + \frac{247}{2}e^2 - \frac{43}{2}e^4\right)\cos 2y_2 + \left(-\frac{189}{4}e^2 + \frac{117}{8}e^4\right)\cos 4y_2\right]$$

folgt. Damit ist die neue HAMILTONsche Funktion F' bis zur fünften Ordnung bekannt. Wir dürfen auf die Berechnung von S_5 verzichten, deren partielle Ableitungen nur gebraucht würden, wenn man die Gleichungen (XXXV; 11) um eine weitere für F_6' vermehrte. Andererseits können dann nach (XXXV; 5) die periodischen Variablen nur bis zur vierten Ordnung entwickelt werden, was wir auch am Anfang dieses Kapitels vorgesehen hatten.

300. Berechnung der alten kanonischen Variablen als Funktionen der neuen

Da $S_1 \equiv 0$ ist und da wir vereinbart haben, die Entwicklungen von S mit der vierten Ordnung in n_1 bzw. n_1/n abzubrechen, schreiben wir die Gleichungen

(XXXV; 5)

$$\text{(XXXV; 56)} \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y_1} + \dfrac{\partial S_4}{\partial y_1}; \quad x_2 = x_2' + \dfrac{\partial S_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y_2} + \dfrac{\partial S_4}{\partial y_2}, \\ y_1 = y_1' - \dfrac{\partial S_2}{\partial x_1'} - \dfrac{\partial S_3}{\partial x_1'} - \dfrac{\partial S_4}{\partial x_1'}; \quad y_2 = y_2' - \dfrac{\partial S_2}{\partial x_2'} - \dfrac{\partial S_3}{\partial x_2'} - \dfrac{\partial S_4}{\partial x_2'}. \end{cases}$$

Aus (XXXV; 20, 27, 51) entnimmt man

$$\frac{\partial S_2}{\partial y_1} = \frac{n_1^2 a^2}{4n} (A + B\cos 2y_2 + C\sin 2y_2),$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial y_1} = \frac{n_1^3 a^2}{2n^2} (-B^{(1)}\sin 2y_2 + C^{(1)}\cos 2y_2),$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial y_1} = \frac{n_1^4 a^2}{n^3} (-B^{(2)}\cos 2y_2 - C^{(2)}\sin 2y_2) + \frac{n_1^4 a^2}{16n^3} [M_{1p} + M_2 + (N_{1p} + N_2)\cos 2y_2 + (P_{1p} + P_2)\sin 2y_2 + (Q_{1p} + Q_2)\cos 4y_2 + (R_{1p} + R_2)\sin 4y_2]$$

und

$$\frac{\partial S_2}{\partial y_2} = \frac{n_1^2 a^2}{2n} (-B^{(1)}\sin 2y_2 + C^{(1)}\cos 2y_2),$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial y_2} = \frac{n_1^3 a^2}{n^2} (-B^{(2)}\cos 2y_2 - C^{(2)}\sin 2y_2),$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial y_2} = \frac{2n_1^4 a^2}{n^3} (B^{(3)}\sin 2y_2 - C^{(3)}\cos 2y_2) + \frac{n_1^4 a^2}{8n^3} [-(N_{1p} + N_2)^{(1)}\sin 2y_2 + (P_{1p} + P_2)^{(1)}\cos 2y_2 - (Q_{1p} + Q_2)^{(1)}\sin 4y_2 + (R_{1p} + R_2)^{(1)}\cos 4y_2].$$

Aus $L = x_1' = \sigma\sqrt{a}$, $\sigma = k\sqrt{m_0 + m}$, $n = \sigma a^{-3/2}$ folgt

$$\frac{a^2}{n} = \frac{L^4}{\sigma^4}\frac{L^3}{\sigma^4} = \frac{L^7}{\sigma^8}; \quad \frac{a^2}{n^2} = \frac{L^{10}}{\sigma^{12}}; \quad \frac{a^2}{n^3} = \frac{L^{13}}{\sigma^{16}},$$

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{a^2}{n}\right) = \frac{7L^6}{\sigma^8} = \frac{7a^2}{Ln}, \quad \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{10a^2}{Ln^2}, \quad \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{a^2}{n^3}\right) = \frac{13a^2}{Ln^3}$$

oder, da $L = \sigma\sqrt{a} = na^2$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{a^2}{n}\right) = \frac{7}{n^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{10}{n^3}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{a^2}{n^3}\right) = \frac{13}{n^4}.$$

Hieraus, aus (XXXV; 20, 27, 51) und $e = \sqrt{1 - x_2'^2/x_1'^2}$ erhält man dann

$$\frac{\partial S_2}{\partial x_1'} = \frac{7n_1^2}{4n^2}\left(A^{(1)} + B^{(1)}\cos 2y_2 + C^{(1)}\sin 2y_2\right) +$$
$$+ \frac{n_1^2\eta^2}{4n^2e}\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial e} + \frac{\partial B^{(1)}}{\partial e}\cos 2y_2 + \frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}\sin 2y_2\right),$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x_1'} = \frac{5n_1^3}{n^3}\left(-B^{(2)}\sin 2y_2 + C^{(2)}\cos 2y_2\right) +$$
$$+ \frac{n_1^3\eta^2}{2n^3e}\left(-\frac{\partial B^{(2)}}{\partial e}\sin 2y_2 + \frac{\partial C^{(2)}}{\partial e}\cos 2y_2\right),$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial x_1'} = \frac{13n_1^4}{n^4}\left(-B^{(3)}\cos 2y_2 - C^{(3)}\sin 2y_2\right) +$$
$$+ \frac{n_1^4\eta^2}{n^4e}\left(-\frac{\partial B^{(3)}}{\partial e}\cos 2y_2 - \frac{\partial C^{(3)}}{\partial e}\sin 2y_2\right) +$$
$$+ \frac{13n_1^4}{16n^4}\left[(M_{1p} + M_2)^{(1)} + (N_{1p} + N_2)^{(1)}\cos 2y_2 +\right.$$
$$+ (P_{1p} + P_2)^{(1)}\sin 2y_2 + (Q_{1p} + Q_2)^{(1)}\cos 4y_2 +$$
$$\left. + (R_{1p} + R_2)^{(1)}\sin 4y_2\right] +$$
$$+ \frac{n_1^4\eta^2}{16n^4e}\left[\frac{\partial}{\partial e}(M_{1p} + M_2)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial e}(N_{1p} + N_2)^{(1)}\cos 2y_2 +\right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial e}(P_{1p} + P_2)^{(1)}\sin 2y_2 + \frac{\partial}{\partial e}(Q_{1p} + Q_2)^{(1)}\cos 4y_2 +$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial e}(R_{1p} + R_2)^{(1)}\sin 4y_2\right]$$

und

$$\frac{\partial S_2}{\partial x_2'} = -\frac{n_1^2\eta}{4n^2e}\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial e} + \frac{\partial B^{(1)}}{\partial e}\cos 2y_2 + \frac{\partial C^{(1)}}{\partial e}\sin 2y_2\right),$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x_2'} = -\frac{n_1^3\eta}{2n^3e}\left(-\frac{\partial B^{(2)}}{\partial e}\sin 2y_2 + \frac{\partial C^{(2)}}{\partial e}\cos 2y_2\right),$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial x_2'} = -\frac{{n_1}^4\eta}{n^4 e}\left(-\frac{\partial B^{(3)}}{\partial e}\cos 2y_2 - \frac{\partial C^{(3)}}{\partial e}\sin 2y_2\right) -$$

$$-\frac{{n_1}^4\eta}{16n^4 e}\left[\frac{\partial}{\partial e}(M_{1p}+M_2)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial e}(N_{1p}+N_2)^{(1)}\cos 2y_2 +\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial e}(P_{1p}+P_2)^{(1)}\sin 2y_2 + \frac{\partial}{\partial e}(Q_{1p}+Q_2)^{(1)}\cos 4y_2 +$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial e}(R_{1p}+R_2)^{(1)}\sin 4y_2\right].$$

Die so erhaltenen Werte der partiellen Ableitungen von S_2, S_3 und S_4 nach den Variablen y_1, y_2, x_1', x_2' sind dann in die rechten Seiten der Gleichungen (XXXV; 56) einzusetzen.

Die beiden letzten Gleichungen (XXXV; 56) bilden ein implizites System zur Berechnung von y_1 und y_2, das nach den Methoden der Reihenumkehr für Funktionen mit zwei Variablen zu lösen ist. HORI hat diese Rechnung nicht effektiv ausgeführt, sondern sich mit dem Hinweis begnügt, daß dazu eine Methode sukzessiver Approximationen benutzt werden kann. Man könnte eine Lösung auch mit Hilfe der von DEDERICK und CHU entwickelten Formeln erzielen, die wir in Abschnitt 268 bei Gelegenheit der MUSENschen Verallgemeinerung der VON ZEIPELschen Methode angegeben haben. Sind diese beiden Gleichungen einmal gelöst, so können y_1 und y_2 als Funktionen von x_1', x_2', y_1', y_2' in die rechten Seiten der ersten beiden Gleichungen (XXXV; 56) eingesetzt werden. Damit sind im Rahmen der angestrebten Genauigkeit die alten Variablen als Funktionen der neuen bekannt, und die Elimination der kurzperiodischen Terme ist damit abgeschlossen.

Man bemerke, daß die partiellen Ableitungen von S_2, S_3 und S_4 nach x_1' und x_2' die kleine Exzentrizität e in der ersten Potenz im Nenner enthalten. Das ist aber nicht mehr in der Summe $y_1 + y_2$ der Fall. In der Tat ist

$$\frac{\eta^2}{e} - \frac{\eta}{e} = \frac{\eta}{e}(\eta - 1)$$

und sodann

$$(1+\eta)(1-\eta) = 1 - \eta^2 = 1 - (1-e^2) = e^2,$$

woraus

$$\eta - 1 = -\frac{e^2}{1+\eta}; \quad \frac{\eta^2}{e} - \frac{\eta}{e} = -\frac{e\eta}{1+\eta}$$

folgt. Diese Bemerkung ist sehr wichtig, da $y_1 + y_2 = h + g + l - k$ die mittlere synodische Bewegung des Mondes darstellt, wenn wir von der sehr kleinen „Reduktion auf die Ekliptik“ (s. Band I, S. 27 und Band II, S. 545) absehen.

301. Elimination der langperiodischen Terme

Die Elimination der kurzperiodischen Terme hat das System (XXXV; 1) der kanonischen Gleichungen der Bewegung des Mondes auf das kanonische System

$$\text{(XXXV; 57)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1'}{dt} = \dfrac{\partial F'}{\partial y_1'}; & \dfrac{dx_2'}{dt} = \dfrac{\partial F'}{\partial y_2'}, \\ \dfrac{dy_1'}{dt} = -\dfrac{\partial F'}{\partial x_1'}; & \dfrac{dy_2'}{dt} = -\dfrac{\partial F'}{\partial x_2'} \end{cases}$$

mit $F' = F_0' + F_1' + \cdots + F_5'$ zurückgeführt. Dabei ist

$$F_0' = \frac{\sigma^4}{2x_1'^2}; \quad F_1' = n_1 x_2',$$

und F_2', F_4', F_5' sind durch die Gleichungen (XXXV; 21, 45, 55) definiert, in denen man die Größen a, e, n, η, y_2 durch Striche kennzeichnen sollte, während $F_3' \equiv 0$ ist. Da F' nicht von y_1' abhängt, folgt $x_1' = \text{const}$, und die Lösung von (XXXV; 57) erhält man daher aus einem System von einem Freiheitsgrad für x_2' und y_2' und aus einer Quadratur für y_1', sobald x_2' und y_2' als Funktionen der Zeit bekannt geworden sind.

Hori führt nun eine kanonische Transformation $x_1', x_2', y_1', y_2' \to x_1'', x_2'', y_1'', y_2''$ aus, von der x_1' nicht betroffen wird, und er führt zu diesem Zwecke eine erzeugende Funktion $S'(x_1', x_2''; y_1', y_2')$ ein, die er nach Potenzen des kleinen Parameters n_1 entwickelt, indem er

$$S' = x_1' y_1' + x_2'' y_2' + S_1'(x_1', x_2''; y_2') + S_2'(x_1', x_2''; y_2') + \cdots$$

setzt, wo S_1', S_2', ... vom Grade 1, 2, ... bezüglich n_1 sind und von y_1' nicht abhängen. Er schreibt

$$x_2' = \frac{\partial S'}{\partial y_2'}; \quad y_1'' = \frac{\partial S'}{\partial x_1'}; \quad y_2'' = \frac{\partial S'}{\partial x_2''},$$

woraus

$$\text{(XXXV; 58)} \qquad \begin{cases} x_2' = x_2'' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \cdots, \\ y_1'' = y_1' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_1'} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_1'} + \cdots, \\ y_2'' = y_2' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_2''} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_2''} + \cdots \end{cases}$$

folgt. Er setzt ferner voraus, daß durch diese Transformation F' in eine neue Hamiltonsche Funktion F'' übergeführt wird, die nicht mehr von y_2'' abhängt,

und daß die Identität

(XXXV; 59)

$$F'(x_1', x_2' : y_2') \equiv F''(x_1', x_2'') = F_0'' + F_1'' + F_2'' + \cdots + F_5'' + \cdots$$

besteht, in der F_0'', F_1'', …, F_5'' vom Grade 0, 1, …, 5 bezüglich n_1 sind. Man kann also schreiben:

$$\begin{aligned} &F_0'(x_1') + F_1'(x_2') + F_2'(x_1', x_2'; y_2') + F_4'(x_1', x_2'; y_2') + F_5'(x_1', x_2'; y_2') \equiv \\ &\quad \equiv F_0''(x_1') + F_1''(x_2'') + F_2''(x_1', x_2'') + F_3''(x_1', x_2'') + \\ &\qquad + F_4''(x_1', x_2'') + F_5''(x_1', x_2''), \end{aligned}$$

d. h. wegen der ersten Gleichung (XXXV; 58)

$$\begin{aligned} &F_0'(x_1') + F_1'\left(x_2'' + \frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5'}{\partial y_2'}\right) + \\ &\quad + F_2'\left(x_1', x_2'' + \frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5'}{\partial y_2'}; y_2'\right) + \\ &\quad + F_4'\left(x_1', x_2'' + \frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5'}{\partial y_2'}; y_2'\right) + \\ &\quad + F_5'\left(x_1', x_2'' + \frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \cdots + \frac{\partial S_5'}{\partial y_2'}; y_2'\right) \equiv \\ &\equiv F_0''(x_1') + F_1''(x_2'') + F_2''(x_1', x_2'') + F_3''(x_1', x_2'') + \\ &\quad + F_4''(x_1', x_2'') + F_5''(x_1', x_2''). \end{aligned}$$

Entwickelt man die linke Seite in TAYLORsche Reihen bis zu Termen fünfter Ordnung, so folgt hieraus

(XXXV; 60)

$$\begin{aligned} &F_0'(x_1') + F_1'(x_2'') + \left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_3'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_4'}{\partial y_2'}\right)\frac{\partial F_1'}{\partial x_2''} + \\ &\quad + F_2'(x_1', x_2''; y_2') + \left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \frac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\right)\frac{\partial F_2'}{\partial x_2''} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\right)^2 + 2\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\right]\frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2} + \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\right)^3\frac{\partial^3 F_2'}{\partial x_2''^3} + F_4'(x_1', x_2''; y_2') + \\ &\quad + \frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_4'}{\partial x_2''} + F_5'(x_1', x_2''; y_2') \equiv \\ &\equiv F_0''(x_1') + F_1''(x_2'') + F_2''(x_1', x_2'') + F_3''(x_1', x_2'') + \\ &\quad + F_4''(x_1', x_2'') + F_5''(x_1', x_2'') \end{aligned}$$

und, wenn man Terme gleicher Ordnung auf beiden Seiten sammelt,

$$
\text{(XXXV; 61)}\qquad
\begin{cases}
1.\ F_0'(x_1') = F_0''(x_1') = \dfrac{\sigma^4}{2x_1'^2}, & [\sigma^2 = k^2(m_0+m)] \\
2.\ F_1'(x_2'') = F_1''(x_2'') = n_1 x_2'', \\
3.\ \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_1'}{\partial x_2''} + F_2'(x_1', x_2''; y_2') = F_2''(x_1', x_2''), \\
4.\ \dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_1'}{\partial x_2''} + \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_2'}{\partial x_2''} = F_3''(x_1', x_2''), \\
5.\ \dfrac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_1'}{\partial x_2''} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_2'}{\partial x_2''} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\right)^2\dfrac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2} + \\
\qquad + F_4'(x_1', x_2''; y_2') = F_4''(x_1', x_2''), \\
6.\ \dfrac{\partial S_4'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_1'}{\partial x_2''} + \dfrac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_2'}{\partial x_2''} + \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2} + \\
\qquad + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\right)^3\dfrac{\partial^3 F_2'}{\partial x_2''^3} + \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\dfrac{\partial F_4'}{\partial x_2''} + \\
\qquad + F_5'(x_1', x_2''; y_2') = F_5''(x_1', x_2'').
\end{cases}
$$

Trennt man, nach dem gleichen Prinzip wie früher, die Terme, die periodisch in y_2 sind, von denjenigen, die y_2 nicht enthalten, so ergibt sich aus der dritten Gleichung (XXXV; 61)

$$
\text{(XXXV; 62)}\qquad n_1\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + F_{2p}'(x_1', x_2''; y_2') = 0,
$$

$$
\text{(XXXV; 63)}\qquad F_{2s}'(x_1', x_2''; y_2') = F_2''(x_1', x_2'').
$$

Aus (XXXV; 21, 63) folgt

$$
\text{(XXXV; 64)}\qquad F_2'' = \frac{1}{4}n_1^2a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)
$$

mit

$$
a = \frac{x_1'^2}{\sigma^2};\quad x_1' = \sigma\sqrt{a} = na^2;\quad e = \left(1-\frac{x_2''^2}{x_1'^2}\right)^{1/2}
$$

und aus (XXXV; 21, 62)

$$
n_1\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \frac{15}{8}n_1^2a^2e^2\cos 2y_2' = 0,
$$

woraus man durch Integration

$$
\text{(XXXV; 65)}\qquad S_1' = -\frac{15}{16}n_1a^2e^2\sin 2y_2'
$$

erhält.

Ebenso zerfällt die vierte Gleichung (XXXV; 61) in die beiden Beziehungen

$$n_1 \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} \frac{\partial F_2'}{\partial x_2''} \right)_p = 0, \tag{XXXV; 66}$$

$$\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} \frac{\partial F_{2p}'}{\partial x_2''} \right)_s = F_3''(x_1', x_2''). \tag{XXXV; 67}$$

Nun folgt aus (XXXV; 21, 65) und der letzten Beziehung (XXXV; 34)

$$\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} = -\frac{15}{8} n_1 a^2 e^2 \cos 2y_2'; \frac{\partial F_{2p}'}{\partial x_2''} = -\frac{15}{4} \frac{n_1^2 a^2 \eta}{x_1'} \cos 2y_2' = -\frac{15}{4} \frac{n_1^2}{n} \eta \cos 2y_2',$$

so daß

$$\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} \frac{\partial F_{2p}'}{\partial x_2''} \right)_s = \frac{225}{64} \frac{n_1^3 a^2 e^2 \eta}{n}$$

ist. Aus (XXXV; 67) ergibt sich also

$$F_3'' = \frac{225}{64} \frac{n_1^3 a^2 e^2 \eta}{n} \tag{XXXV; 68}$$

mit $\eta = x_2''/x_1'$, $e^2 = 1 - \eta^2$. Aus (XXXV; 21) entnimmt man ferner

$$\frac{\partial F_2'}{\partial x_2''} = \frac{1}{4} n_1^2 a^2 \left(-3 \frac{x_2''}{x_1'^2} - 15 \frac{x_2''}{x_1'^2} \cos 2y_2' \right),$$

also

$$\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_1'} \frac{\partial F_2'}{\partial x_2''} \right)_p = \frac{45}{32} \frac{n_1^3 a^2 e^2 \eta}{n} \left(\cos 2y_2' + \frac{5}{2} \cos 4y_2' \right)$$

und daher wegen (XXXV; 66)

$$S_2' = -\frac{45}{64} \frac{n_1^2 a^2 e^2 \eta}{n} \left(\sin 2y_2' + \frac{5}{4} \sin 4y_2' \right). \tag{XXXV; 69}$$

Die fünfte Gleichung (XXXV; 61) zerfällt in

$$n_1 \frac{\partial S_3'}{\partial y_2'} + \left[\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} \frac{\partial F_2'}{\partial x_2''} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} \right)^2 \frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2} \right]_p + F_{4p}'(x_1', x_2''; y_2') = 0, \tag{XXXV; 70}$$

$$\left[\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'} \frac{\partial F_{2p}'}{\partial x_2''} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'} \right)^2 \frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2} \right]_s + F_{4s}'(x_1', x_2''; y_2') = F_4''(x_1', x_2''). \tag{XXXV; 71}$$

Aus (XXXV; 21, 65, 69) entnimmt man

$$(\text{XXXV};72)\quad \frac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_2'}{\partial x_2''}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\right)^2\frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2}=\frac{1}{128}\frac{n_1^4a^2}{n^2}\left[\frac{675}{2}e^2-\frac{3375}{8}e^4+\right.$$
$$+\left(\frac{3915}{4}e^2-\frac{25785}{16}e^4\right)\cos 2y_2'+\left(675\,e^2-\frac{6075}{8}e^4\right)\cos 4y_2'+$$
$$\left.+\left(\frac{3375}{4}e^2-\frac{16875}{16}e^4\right)\cos 6y_2'\right]$$

und aus (XXXV; 45, 71, 72)

$$(\text{XXXV};73)\quad F_4''=\frac{1}{128}\frac{n_1^4a^2}{n^2}\left(-98+\frac{4167}{2}e^2-\frac{12069}{8}e^4\right)$$

sowie aus (XXXV; 45, 70, 72)

$$(\text{XXXV};74)\quad S_3'=-\frac{1}{128}\frac{n_1^3a^2}{n^2}\left[\left(\frac{6579}{8}e^2-\frac{29577}{32}e^4\right)\sin 2y_2'+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{675}{4}e^2-\frac{4845}{32}e^4\right)\sin 4y_2'+\left(\frac{1125}{8}e^2-\frac{5625}{2}e^4\right)\sin 6y_2'\right].$$

Aus (XXXV; 21) ergibt sich unmittelbar $\partial^3 F_2'/\partial x_2''^3=0$. Die sechste Gleichung (XXXV; 61) zerfällt daher in

$$(\text{XXXV};75)\quad n_1\frac{\partial S_4'}{\partial y_2'}+\left(\frac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_2'}{\partial x_2''}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_4'}{\partial x_2''}\right)_p+$$
$$+F_{5p}'(x_1',x_2'';y_2')=0,$$

$$(\text{XXXV};76)\quad \left(\frac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_{2p}'}{\partial x_2''}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_{4p}'}{\partial x_2''}\right)_s+$$
$$+F_{5s}'(x_1',x_2'';y_2')=F_5''(x_1',x_2'').$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (XXXV; 21, 45, 65, 69, 74), so erhält man nach kurzer Rechnung

(XXXV; 77)

$$\frac{\partial S_3'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_2'}{\partial x_2''}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial S_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial^2 F_2'}{\partial x_2''^2}+\frac{\partial S_1'}{\partial y_2'}\frac{\partial F_4'}{\partial x_2''}=\frac{1}{1024}\frac{n_1^5a^2\eta}{n^3}\left[\frac{138645}{4}e^2-\right.$$
$$-\frac{674865}{16}e^4+\left(\frac{144747}{2}e^2-\frac{363573}{4}e^4\right)\cos 2y_2'+$$
$$+\left(\frac{102735}{2}e^2-\frac{271845}{4}e^4\right)\cos 4y_2'+$$
$$+\left(\frac{30375}{2}e^2-\frac{31725}{2}e^4\right)\cos 6y_2'+$$
$$\left.+\left(\frac{50625}{4}e^2-\frac{354375}{16}e^4\right)\cos 8y_2'\right],$$

ferner aus (XXXV; 55, 76, 77)

$$(\text{XXXV}; 78) \qquad F_5'' = \frac{1}{16}\frac{n_1^5 a^2 \eta}{n^3}\left(-\frac{97}{2} + \frac{288085}{256}e^2 - \frac{872625}{1024}e^4\right)$$

und aus (XXXV; 55, 75, 77)

(XXXV; 79)

$$S_4' = -\frac{1}{1024}\frac{n_1^4 a^2 \eta}{n^3}\left[\left(-576 + \frac{160555}{4}e^2 - \frac{369077}{8}e^4\right)\sin 2y_2' + \right.$$
$$+\left(\frac{96687}{8}e^2 - \frac{268101}{16}e^4\right)\sin 4y_2' + \left(\frac{10125}{4}e^2 - \frac{10575}{4}e^4\right)\sin 6y_2' +$$
$$\left. +\left(\frac{50625}{32}e^2 - \frac{354375}{128}e^4\right)\sin 8y_2'\right].$$

Damit sind, bis zur vierten Ordnung für die erzeugende Funktion S' und bis zur fünften Ordnung für die neue HAMILTONsche Funktion F'' alle Ausdrücke in analytischer Form gegeben, was praktisch in einer genäherten Mondtheorie ausreicht.

Zur Berechnung der alten kanonischen Variablen x_2', y_1', y_2' als Funktionen der neuen x_2'', y_1'', y_2'', dienen die Gleichungen

$$(\text{XXXV}; 80) \qquad \begin{cases} x_2' = x_2'' + \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'} + \dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'} + \dfrac{\partial S_3'}{\partial y_2'} + \dfrac{\partial S_4'}{\partial y_2'}, \\ y_1' = y_1'' - \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_1'} - \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_1'} - \dfrac{\partial S_3'}{\partial x_1'} - \dfrac{\partial S_4'}{\partial x_1'}, \\ y_2' = y_2'' - \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_2''} - \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_2''} - \dfrac{\partial S_3'}{\partial x_2''} - \dfrac{\partial S_4'}{\partial x_2''}, \end{cases}$$

in denen die partiellen Ableitungen von $S_1', \ldots, S_4'$ aus den Formeln (XXXV; 65, 69, 74, 79) zu entnehmen sind. So erhält man aus (XXXV; 65)

$$(\text{XXXV}; 81) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S_1'}{\partial y_2'} = -\dfrac{15}{8} n_1 a^2 e^2 \cos 2y_2', \\ \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_1'} = -\dfrac{15}{8}\dfrac{n_1}{n}(1+e^2)\sin 2y_2', \quad \dfrac{\partial S_1'}{\partial x_2''} = \dfrac{15}{8}\dfrac{n_1}{n}\eta \sin 2y_2', \end{cases}$$

aus (XXXV; 69)

$$(\text{XXXV}; 82) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S_2'}{\partial y_2'} = -\dfrac{45}{32}\dfrac{n_1^2 a^2 e^2}{n}\eta\left(\cos 2y_2' + \dfrac{5}{2}\cos 4y_2'\right), \\ \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_1'} = -\dfrac{45}{32}\dfrac{n_1^2}{n^2}\eta(1+2e^2)\left(\sin 2y_2' + \dfrac{5}{4}\sin 4y_2'\right), \\ \dfrac{\partial S_2'}{\partial x_2''} = \dfrac{45}{32}\dfrac{n_1^2}{n^2}\left(1 - \dfrac{3}{2}e^2\right)\left(\sin 2y_2' + \dfrac{5}{4}\sin 4y_2'\right), \end{cases}$$

aus (XXXV; 74)

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial S_3'}{\partial y_2'} &= -\frac{1}{128}\frac{{n_1}^3 a^2 e^2}{n^2}\left[\left(\frac{6579}{4}-\frac{29577}{16}e^2\right)\cos 2y_2' + \right.\\
&\quad +\left(675-\frac{4845}{8}e^2\right)\cos 4y_2' + \\
&\quad \left.+\left(\frac{3375}{4}-\frac{16875}{16}e^2\right)\cos 6y_2'\right],\\
\frac{\partial S_3'}{\partial x_1'} &= -\frac{1}{128}\frac{{n_1}^3}{n^3}\left[\left(\frac{6579}{4}+\frac{23055}{8}e^2-\frac{88731}{16}e^4\right)\sin 2y_2' + \right.\\
&\quad +\left(\frac{675}{2}+\frac{5955}{8}e^2-\frac{14535}{16}e^4\right)\sin 4y_2' + \\
&\quad \left.+\left(\frac{1125}{4}+\frac{3375}{8}e^2-\frac{16875}{16}e^4\right)\sin 6y_2'\right],\\
\frac{\partial S_3'}{\partial x_2''} &= \frac{1}{128}\frac{{n_1}^3}{n^3}\eta\left[\left(\frac{6579}{4}-\frac{29577}{8}e^2\right)\sin 2y_2' + \right.\\
&\quad +\left(\frac{675}{2}-\frac{4865}{8}e^2\right)\sin 4y_2' + \\
&\quad \left.+\left(\frac{1125}{4}-\frac{5625}{8}e^2\right)\sin 6y_2'\right]
\end{aligned}\right. \qquad \text{(XXXV; 83)}
$$

und aus (XXXV; 79)

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial S_4'}{\partial y_2'} &= -\frac{1}{1024}\frac{{n_1}^4 a^2}{n^3}\eta\left[\left(-1152+\frac{160555}{2}e^2-\frac{369077}{4}e^4\right)\times\right.\\
&\quad \times\cos 2y_2' + \left(\frac{96687}{2}e^2-\frac{268101}{4}e^4\right)\cos 4y_2' + \\
&\quad +\left(\frac{30375}{2}e^2-\frac{31725}{2}e^4\right)\cos 6y_2' + \\
&\quad \left.+\left(\frac{50625}{4}e^2-\frac{354375}{16}e^4\right)\cos 8y_2'\right],\\
\frac{\partial S_4'}{\partial x_1'} &= -\frac{1}{1024}\frac{{n_1}^4}{n^4}\eta\left[\left(\frac{146731}{2}+\right.\right.\\
&\quad \left.+216849e^2-369077e^4\right)\sin 2y_2' + \\
&\quad +\left(\frac{96687}{4}+\frac{107667}{2}e^2-\frac{268101}{2}e^4\right)\sin 4y_2' + \\
&\quad \left.+\left(\frac{10125}{2}+\frac{29475}{2}e^2-21150e^4\right)\sin 6y'_2\right],
\end{aligned}\right. \qquad \text{(XXXV; 84)}
$$

$$
(\mathrm{XXXV};84)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial S_4'}{\partial x_2''} = \dfrac{1}{1024}\dfrac{{n_1}^4}{n^4}\Bigg[\Bigg(\dfrac{161707}{2} - \dfrac{1219819}{4}e^2 + \\
\qquad + \dfrac{1845385}{8}e^4\Bigg)\sin 2y_2' + \\
\quad + \Bigg(\dfrac{96687}{4} - \dfrac{826263}{8}e^2 + \dfrac{1340505}{16}e^4\Bigg)\sin 4y_2' + \\
\quad + \Bigg(\dfrac{10125}{2} - \dfrac{72675}{4}e^2 + \dfrac{52875}{4}e^4\Bigg)\sin 6y_2' + \\
\quad + \Bigg(\dfrac{50625}{16} - \dfrac{253125}{16}e^2 + \dfrac{1771875}{128}e^4\Bigg)\sin 8y_2'\Bigg].
\end{cases}
$$

Zusammen mit der Gleichung $x_1' = x_1''$ dienen (XXXV; 81—84) dazu, die alten Variablen nach (XXXV; 80) als Funktionen der neuen analytisch auszudrücken. Die dritte Gleichung (XXXV; 80) ist aber in y_2' transzendent. Man wird sie mit Hilfe der LAGRANGEschen Umkehrformel (Anhang V) für Funktionen mit einer Variablen lösen. Sie ist von der Gestalt

$$y_2' = y_2'' + n_1 f(x_2'', y_2'),$$

wo x_2'' die Rolle eines Parameters spielt. Man erhält, bis zu Termen fünfter Ordnung in bezug auf n_1,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{XXXV};85)\qquad y_2' = {} & y_2'' + n_1 f(x_2'', y_2'') + \frac{{n_1}^2}{2}\frac{d}{dy_2''}[f(x_2'', y_2'')]^2 + \\
& + \frac{{n_1}^3}{6}\frac{d^2}{dy_2''^2}[f(x_2'', y_2'')]^3 + \frac{{n_1}^4}{24}\frac{d^3}{dy_2''^3}[f(x_2'', y_2'')]^4 + \\
& + \frac{{n_1}^5}{120}\frac{d^4}{dy_2''^4}[f(x_2'', y_2'')]^5,
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{XXXV};86)\qquad f(x_2'', y_2'') = {} & \Bigg[\frac{15}{8}\frac{\eta}{n} - \frac{45}{32}\frac{n_1}{n^2}\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right) - \\
& - \frac{1}{128}\frac{{n_1}^2}{n^3}\eta\left(\frac{6579}{4} - \frac{29577}{8}e^2\right) - \\
& - \frac{1}{1024}\frac{{n_1}^3}{n^4}\left(\frac{161707}{2} - \frac{1219819}{4}e^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1845385}{8}e^4\right)\Bigg]\sin 2y_2'' +
\end{aligned}
$$

$$+\left[-\frac{225}{128}\frac{n_1}{n^2}\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)-\frac{1}{128}\frac{{n_1}^2}{n^3}\eta\left(\frac{675}{2}-\frac{4845}{8}e^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1024}\frac{{n_1}^3}{n^4}\left(\frac{96687}{4}-\frac{826263}{8}e^2+\frac{1340505}{16}e^4\right)\right]\sin 4{y_2}''+$$
$$+\left[-\frac{1}{128}\frac{{n_1}^2}{n^3}\left(\frac{1125}{4}-\frac{5625}{8}e^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1024}\frac{{n_1}^3}{n^4}\left(\frac{10125}{2}-\frac{72675}{4}e^2+\frac{52875}{4}e^4\right)\right]\sin 6{y_2}''-$$
$$-\frac{1}{1024}\frac{{n_1}^3}{n^4}\left(\frac{50625}{16}-\frac{253125}{16}e^2+\frac{1771875}{128}e^4\right)\sin 8{y_2}''$$

ist. Die vier Größen

$$\frac{d}{d{y_2}''}[f({x_2}'', {y_2}'')]^2;\quad \frac{d^2}{d{y_2}''^2}[f({x_2}'', {y_2}'')]^3;\quad \frac{d^3}{d{y_2}''^3}[f({x_2}'', {y_2}'')]^4;$$
$$\frac{d^4}{d{y_2}''^4}[f({x_2}'', {y_2}'')]^5$$

lassen sich leicht aus (XXXV; 86) ableiten und in die rechte Seite von (XXXV; 85) einfügen. Damit ist ${y_2}'$ als Funktion von ${x_1}''$, ${x_2}''$, ${y_2}''$ bekannt und kann dann in die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (XXXV; 80) eingetragen werden.

302. Berechnung der säkularen Störungen

Nach Elimination der langperiodischen Terme ist (XXXV; 57) au fdas kanonische System

$$\text{(XXXV; 87)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d{x_1}'}{dt}=\dfrac{\partial F'''}{\partial {y_1}''}=0; & \dfrac{d{x_2}''}{dt}=\dfrac{\partial F'''}{\partial {y_2}''}=0, \\ \dfrac{d{y_1}''}{dt}=-\dfrac{\partial F'''}{\partial {x_1}'}; & \dfrac{d{y_2}''}{dt}=-\dfrac{\partial F'''}{\partial {x_2}''} \end{cases}$$

zurückgeführt, wobei, wegen der beiden ersten Gleichungen (XXXV; 61) und der Gleichungen (XXXV; 64, 68, 73, 78),

$$\text{(XXXV; 88)}\quad F''' = \frac{\sigma^4}{2{x_1}'^2}+n_1{x_2}''+\frac{1}{4}{n_1}^2a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+\frac{225}{64}\frac{{n_1}^3a^2e^2}{n}\eta+$$
$$+\frac{1}{128}\frac{{n_1}^4a^2}{n^2}\left(-98+\frac{4167}{2}e^2-\frac{12069}{8}e^4\right)+$$
$$+\frac{1}{16}\frac{{n_1}^5a^2}{n^3}\eta\left(-\frac{97}{2}+\frac{288085}{256}e^2-\frac{872625}{1024}e^4\right)$$

zu setzen ist. Aus (XXXV; 87) folgt

(XXXV; 89) $$x_1' = x_1'' = \text{const}; \quad x_2'' = \text{const}$$

und daher

$$\frac{dy_1''}{dt} = -\frac{\partial F'''}{\partial x_1'} = \text{const}, \quad \frac{dy_2''}{dt} = -\frac{\partial F'''}{\partial x_2''} = \text{const},$$

also

(XXXV; 90) $$y_1'' = -\frac{\partial F'''}{\partial x_1'} t + y_{10}''; \quad y_2'' = -\frac{\partial F'''}{\partial x_2''} t + y_{20}''.$$

Die Größen x_1', x_2'', y_{10}'', y_{20}'' sind die vier willkürlichen Integrationskonstanten des Systems (XXXV; 87).

Aus (XXXV; 88) folgt

(XXXV; 91)
$$-\frac{\partial F'''}{\partial x_1'} = n - \frac{1}{4}\frac{n_1^2}{n}(7 + 3e^2) - \frac{225}{32}\frac{n_1^3}{n^2}\eta(1 + 2e^2) - \frac{1}{128}\frac{n_1^4}{n^3}\left(3187 + \frac{21267}{2}e^2 - \frac{36207}{4}e^4\right) - \frac{1}{1024}\frac{n_1^5}{n^4}\eta\left(\frac{213589}{2} + \frac{2008225}{4}e^2 - \frac{872625}{2}e^4\right)$$

und

(XXXV; 92)
$$-\frac{\partial F'''}{\partial x_2''} + n_1 = \frac{3}{4}\frac{n_1^2}{n}\eta + \frac{225}{32}\frac{n_1^3}{n^2}\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right) + \frac{1}{128}\frac{n_1^4}{n^3}\eta\left(4167 - \frac{12069}{2}e^2\right) + \frac{1}{1024}\frac{n_1^5}{n^4}\left(\frac{294293}{2} - 434220e^2 + \frac{4363125}{16}e^4\right).$$

Die rechte Seite von (XXXV; 91) stellt die mittlere Bewegung der mittleren Anomalie dar, die rechte Seite von (XXXV; 92) die mittlere Bewegung der Länge des Perigäums. Die Summe dieser beiden Ausdrücke ergibt die mittlere Bewegung der mittleren Länge, die HORI mit dem Symbol n_D bezeichnet. Wenn e — eine Größe, die HORI die „mittlere Exzentrizität" nennt — gleich Null gesetzt wird, so erhält man für die mittlere Bewegung der Perigäumslänge aus (XXXV; 92) den Ausdruck

(XXXV; 93)
$$\frac{3}{4}\frac{n_1^2}{n} + \frac{225}{32}\frac{n_1^3}{n^2} + \frac{4167}{128}\frac{n_1^4}{n^3} + \frac{294293}{2048}\frac{n_1^5}{n^4},$$

und für n_D kann man schreiben

$$n_D = n - \frac{n_1^2}{n} + O\left(\frac{n_1^3}{n^2}\right),$$

woraus

$$n = n_D + \frac{n_1^2}{n_D} + O\left(\frac{n_1^3}{n_D^2}\right)$$

folgt. Setzt man dies in (XXXV; 93) ein, so folgt für die mittlere Bewegung der Länge des Perigäums, bis zur fünften Ordnung einschließlich, wenn wir $m = n_1/n_D$ setzen,

$$\frac{1}{n_D}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{32}m^3 + \frac{4071}{128}m^4 + \frac{265493}{2048}m^5 + \cdots.$$

Diese Formel stimmt genau mit derjenigen überein, die DELAUNAY in seiner Theorie des Mondes erhalten hat und die daher durch die Methode von H. VON ZEIPEL, die der HORIschen Technik zugrunde liegt, bestätigt wird. Die mittlere Exzentrizität e in der HORIschen Theorie ist übrigens, wie hier nur vermerkt werden soll, nicht mit derjenigen von DELAUNAY identisch. Vielmehr ist der DELAUNAYsche Wert

$$e_D{}^2 = e^2\,[1 + O(m^4) + e^2O\,(m^4) + \cdots].$$

Die HORIsche Theorie erweist sich als sehr kompakt. Ihre Ausdehnung auf Terme der sechsten und siebenten Ordnung in n_1/n hat HORI und einer seiner Schüler mit Rechenanlagen vom Typ Mark 4 A und Okitac 5090 unternommen. Der Gebrauch einer Computeranlage würde es ohne Schwierigkeit gestatten, die Rechnung auch bis zur achten und neunten Ordnung durchzuführen.

KAPITEL XXXVI

AKTUELLE PROBLEME UND METHODEN DER ALLGEMEINEN STÖRUNGSRECHNUNG

303. Unterschiede älterer und moderner Methoden der Himmelsmechanik

An den Arbeiten der Astronomen des vorigen Jahrhunderts, die sich mit den Störungsproblemen der Himmelsmechanik beschäftigten, fasziniert immer wieder die ungeheure Geduld, mit der diese Männer, wie LEVERRIER, HANSEN, DE PONTÉCOULANT, DELAUNAY, HILL und andere, in mitunter jahrzehntelanger, mühevoller Anstrengung die Lösung einer Aufgabe bis zur Vollendung angestrebt und erreicht haben. Diese bewunderungswürdige Geduld war nötig und konnte aufgebracht werden in einer Epoche, in der diese Probleme noch nicht mit der von der Praxis geforderten Genauigkeit gelöst waren und der Forscher, der sich mit ihnen beschäftigte, noch ziemlich isoliert und auf die beschränkten Hilfsmittel seiner Zeit angewiesen, nur in mühevoller Arbeit die gesteckten Ziele erreichen konnte.

Heute haben sich der Aufgabenkreis der Himmelsmechanik und die Methoden der Erarbeitung der Lösung der anfälligen Probleme entscheidend geändert, in erster Linie dank der Computertechnik, die mühsame und langwierige Rechnungen, die unsere Vorgänger mit primitiven Hilfsmitteln ausführen mußten, erleichtert und zum Teil vollautomatisch übernimmt. Darüber hinaus haben leicht zugängliche Zeitschriften und rege Zusammenarbeit in Symposien und auf Tagungen dafür gesorgt, daß der Wissenschaftler, aus seiner Isolation befreit, ständig über die in allen Teilen der Welt erreichten Fortschritte und über neu auftauchende Ideen unterrichtet wird. Das gegenwärtige Zeitalter der Himmelsmechanik steht daher, abgesehen von den wichtigen Problemen der Raumfahrt, im Zeichen der Intensivierung aller Bestrebungen, die zu einer Verallgemeinerung und Vereinfachung der technischen Methoden beitragen, mit denen Störungsprobleme streng, schnell und sicher gelöst werden können.

Ein sehr instruktives Beispiel hierfür bieten die drei vorhergehenden Kapitel, in denen wir die genäherte (intermediäre) Lösung des Hauptproblems der Mondbewegung nach drei verschiedenen Methoden aufgezeigt haben, deren Entstehungszeiten um 1840, 1880 und 1960 liegen und die daher einen Eindruck von der zeitlichen Entwicklung der Methoden und ihrer mathematischen Grundlagen sowie der Ausrichtung der angewandten Techniken auf den Gebrauch von Rechenanlagen vermitteln. Ein entsprechendes Bild ergibt sich, wenn wir die Geschichte der Störungstheorien der Planetenbewegung verfolgen, deren wichtigste Abschnitte in diesem Band behandelt werden. Die klassischen Theorien von LAPLACE—LEVERRIER und HANSEN beruhen noch ganz auf den im 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erarbeiteten dynamischen, geometrischen und analytischen Methoden. Das machtvolle Instrument der HAMILTON-JACOBIschen Theorie, die Benutzung kanonischer Variabler und kanonischer Transformationen wird, zunächst bei der mühe-

vollen schrittweisen Elimination einzelner Störungsterme, in der DELAUNAY-schen Störungstheorie sichtbar. Viel später hat VON ZEIPEL, der die in der HAMILTON-JACOBIschen Theorie verborgenen Möglichkeiten klarer erkannt und mit schöpferischer Einsicht benutzt hat, auf ihr seine geistvolle Technik der simultanen Elimination kurzperiodischer, langperiodischer und säkularer Terme aufgebaut. Einen weiteren Schritt vorwärts bedeuten die Arbeiten von MUSEN, der, um die inzwischen zu großer Vollkommenheit entwickelte Computertechnik ins Spiel zu bringen, brauchbare iterative Programme zur Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten geschaffen und auch das VON ZEIPELsche Verfahren in Hinblick auf diese neuen technischen Möglichkeiten umgeformt hat.

Immerhin ist damit die Grenze des Möglichen und Erstrebenswerten noch nicht erreicht. Gewisse Unzulänglichkeiten der VON ZEIPELschen Methode, die bereits von HORI in seiner Lösung des Hauptproblems der Mondbewegung erkannt und umgangen worden sind, blieben in den neueren Fassungen der Planetentheorien bestehen. Die Beseitigung dieser Schwächen war im Falle einer intermediären Lösung des Mondproblems infolge dessen besonderer Struktur noch verhältnismäßig leicht, während im Falle der allgemeinen Störungen der Planeten, wo es sich um ein Vielkörperproblem handelt, große Schwierigkeiten bestehen bleiben. Wir werden in den nächsten Abschnitten zunächst die Wege erläutern, die A. DEPRIT beschritten hat, um diese Schwierigkeiten zu überwinden. Anschließend soll eine kurze Übersicht über neue Arbeiten und Ideen folgen, die künftige Fortschritte in der Himmelsmechanik versprechen.

304. Die Schwächen der Methode von H. von Zeipel

G. HORI hat einige Unbequemlichkeiten in VON ZEIPELS Methode umgehen können und dadurch auch Grundlagen für eine neue Theorie der allgemeinen Störungen geschaffen. Seine Ideen hat A. DEPRIT wieder aufgegriffen und in eine mathematisch befriedigendere und allgemeinere Form gebracht. Er hebt, vollständiger als HORI dies getan hat, die schwachen Punkte der VON ZEIPELschen Methode hervor und sucht sie, mit aller wünschenswerten Strenge und unter sehr allgemeinen Bedingungen, durch eine neue Störungstheorie zu beseitigen. Diese beruht, ähnlich der Mondtheorie von HORI, auf kanonischen Transformationen, die durch LIE-Reihen definiert und durch erzeugende Funktionen konstruiert werden. Im allgemeinsten Fall hängen diese explizite von der Zeit und von einem kleinen Parameter ε von der Ordnung der störenden Massen ab, nach dessen Potenzen die in dieser neuen und machtvollen Theorie auftretenden Reihenentwicklungen fortschreiten.

Die VON ZEIPELsche Technik beruht, wie wir gesehen haben, auf der Einführung einer erzeugenden Funktion, die gleichzeitig von den alten und den durch kanonische Transformation entstehenden neuen Variablen abhängt, wobei eine dieser Variablengruppen die konjugierte der anderen darstellt. Wie DEPRIT bemerkt, leidet diese Theorie an drei Unzulänglichkeiten: Zu-

nächst lassen sich die Gleichungen, aus denen die alten Variablen als Funktionen der neuen (oder umgekehrt) zu ermitteln sind, nur mit Hilfe von Inversionsformeln lösen, z. B. der Lagrangeschen, deren Verwendung im Falle mehrerer Gruppen von kanonischen Variablen schwierig ist. Das ist aber der Fall in einer allgemeinen Planetentheorie, in der *mindestens* zwei solcher Variablengruppen (die des gestörten und eines störenden Körpers) bestehen. Ferner gilt die Inversionsformel nur für die kanonischen Variablen selbst, nicht aber, wie schon Hori bemerkt hat, für Größen, die Funktionen der alten Variablen sind und durch Reihenentwicklung nach Potenzen des kleinen Parameters ausgedrückt werden. Schließlich, wenn auch in der von Zeipelschen Theorie die kanonische Form der Differentialgleichungen nach jeder Transformation erhalten bleibt, gilt dies nicht für gewisse Eigenschaften der kanonischen Variablen, die in einer für die praktische Verwendung brauchbaren Theorie erhalten bleiben sollten. Hierfür ein Beispiel:

Man bezeichne mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ die neuen konjugiert kanonischen Vektoren, die Konfiguration und Momente des Systems darstellen, mit $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ die entsprechenden alten Vektoren, mit H die Hamiltonsche Funktion des Systems und mit $W(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}; \varepsilon)$ die erzeugende Funktion im Sinne von Zeipels. Dann sind die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ mit den $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ durch Gleichungen von der Form

$$\text{(XXXVI; 1)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\, \mathfrak{y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t), \\ \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\, \mathfrak{Y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t) \end{cases}$$

miteinander verknüpft. Die Hamiltonsche Funktion habe die Form

$$H(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\, H_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, t),$$

und W lasse sich durch die Potenzreihe

$$W(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\, W_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y})$$

ausdrücken, wobei $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{Y})$ das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{Y}$ bedeutet und die Bedingungen

$$\text{(XXXVI; 2)} \qquad \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}} = \mathfrak{X}(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \mathfrak{X}; \quad \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{Y}} = \mathfrak{y}(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \mathfrak{y}$$

bestehen. Die Frage ist: Wird man die Funktion W so bestimmen können, daß nach Anwendung der Formeln (XXXVI; 2) und Substitution in (XXXVI; 1) die Koeffizienten $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{Y}^{(n)}$ analytische Funktionen von $\mathfrak{Y}$ sind? Dies Problem ist in der Tat reell und nach Untersuchungen von D. Barton[1]) ein

[1]) D. Barton, On literal developments of the lunar theory with the aid of a computer. A. J. *72*, 1281 (1967).

schwerwiegendes Hindernis, wenn die VON ZEIPELsche Technik mit Hilfe von Computeranlagen durchgeführt werden soll.

Die Theorie von DEPRIT, die wir in den Abschnitten 305—308 in ihren wesentlichen Zügen darlegen werden, wird einen Weg zeigen, wie diese Schwierigkeiten überwunden werden können.

305. Kanonische Abbildungen durch Lie-Reihen

Es seien $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ zwei ν-dimensionale Vektoren, deren Koordinaten y_j, Y_j kanonisch konjugiert sind, und es sei ferner eine „erzeugende Funktion" $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ gegeben. Dann ist

$$L_W f = (f; W) = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial W}{\partial Y_j} - \frac{\partial f}{\partial Y_j} \frac{\partial W}{\partial y_j} \right)$$

der POISSONsche Klammerausdruck[1]) für die Funktionen $f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ und $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ über den Phasenraum $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$. Wir bezeichnen diesen Ausdruck, der durch Anwendung des Operators L_W auf die Funktion f erhalten wird, als deren durch W erzeugte LIE-Ableitung.

Es gelten dann für irgendwelche analytische Funktionen $f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ und $g(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ die aus den Eigenschaften der POISSONschen Klammern leicht herleitbaren Regeln

$$\text{(XXXVI; 3)} \quad \begin{cases} \text{a) } L_W(\alpha f + \beta g) = \alpha L_W f + \beta L_W g, \quad (\alpha, \beta \text{ reelle Konstante}), \\ \text{b) } L_W(fg) = f L_W g + g L_W f, \\ \text{c) } L_W(f; g) = (f; L_W g) + (L_W f; g). \end{cases}$$

Ist $V(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ eine andere erzeugende Funktion, so ist

$$\text{(XXXVI; 4)} \qquad L_V L_W = L_W L_V + L_{(W;V)}.$$

Die Operatoren L_W und L_V sind also nicht vertauschbar. Wiederholte Anwendung des Operators L_W ergibt, wenn man $L_W{}^0 f = f$, $L_W{}^1 = L_W$ setzt,

$$L_W{}^n f = L_W L_W{}^{n-1} f,$$

und aus (XXXVI; 3) folgen die allgemeinen Regeln

$$\text{(XXXVI; 5)} \quad \begin{cases} \text{a) } L_W{}^n(\alpha f + \beta g) = \alpha L_W{}^n f + \beta L_W{}^n g, \\ \text{b) } L_W{}^n(fg) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_W{}^m f L_W{}^{n-m} g, \\ \text{c) } L_W{}^n(f; g) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (L_W{}^m f;\ L_W{}^{n-m} g). \end{cases}$$

---

[1]) Wir bezeichnen hier und in den folgenden Abschnitten den POISSONschen Klammerausdruck für zwei Funktionen f und g stets mit $(f; g)$, d. h., wir benutzen das Semikolon als Trennungszeichen, um Verwechslungen mit Argumenten von Funktionen zweier Vektoren, wie z. B. $f(\mathfrak{g}, \mathfrak{Y})$, zu vermeiden.

Nun sei W so beschaffen, daß an jeder Stelle des Phasenraums $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ der LIE-Operator

$$\exp(\varepsilon L_W) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} {L_W}^n \tag{XXXVI; 6}$$

existiert und in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ analytisch ist. Dann ergibt sich aus (XXXVI; 5) unmittelbar

$$\begin{cases} \text{a) } \exp(\varepsilon L_W)(\alpha f + \beta g) = \alpha \exp(\varepsilon L_W) f + \beta \exp(\varepsilon L_W) g, \\ \text{b) } \exp(\varepsilon L_W) fg = \exp(\varepsilon L_W) f \cdot \exp(\varepsilon L_W) g, \\ \text{c) } \exp(\varepsilon L_W)(f; g) = \big(\exp(\varepsilon L_W) f; \exp(\varepsilon L_W) g\big). \end{cases} \tag{XXXVI; 7}$$

Aus (XXXVI; 7c) folgt, wegen Anhang VII, daß die durch die LIE-Reihen

$$\mathfrak{x} = \exp(\varepsilon L_W)\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{X} = \exp(\varepsilon L_W)\mathfrak{Y} \tag{XXXVI; 8}$$

definierte Transformation $\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}; \varepsilon \to \mathfrak{x}, \mathfrak{X}$ kanonisch ist.[1])

Es gebe nun eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})$, die nicht explizite von ε abhängt. Dann erhält man durch die Transformation (XXXVI; 8)

$$\bar{f}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = f[\mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon), \mathfrak{X}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)]$$

und

$$(\bar{f}; W) = \sum_{k=1}^{\nu} \left[(x_k; W) \frac{\partial f}{\partial x_k} + (X_k; W) \frac{\partial f}{\partial X_k} \right] \tag{XXXVI; 9}$$

oder, was dasselbe ist,

$$L_W \bar{f} = (f_{\mathfrak{x}} \cdot L_W \mathfrak{x}) + (f_{\mathfrak{X}} \cdot L_W \mathfrak{X}). \tag{XXXVI; 9a}$$

Aus (XXXVI; 8) folgt aber

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} {L_W}^{n+1} \mathfrak{y} = L_W \mathfrak{x}, \quad \frac{d\mathfrak{X}}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} {L_W}^{n+1} \mathfrak{Y} = L_W \mathfrak{X},$$

also aus (XXXVI; 9, 9a)

$$L_W \bar{f} = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial X_k} \frac{dX_k}{d\varepsilon} \right) = \frac{d\bar{f}}{d\varepsilon}.$$

Wiederholtes Differenzieren ergibt

$$\frac{d^n \bar{f}}{d\varepsilon^n} = {L_W}^n \bar{f}; \quad \left(\frac{d^n \bar{f}}{d\varepsilon^n} \right)_{\varepsilon=0} = {L_W}^n f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}).$$

Schreibt man andererseits $\bar{f}$ als TAYLORsche Entwicklung nach Potenzen von ε,

$$\bar{f}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n \bar{f}}{d\varepsilon^n} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} {L_W}^n f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}), \tag{XXXVI; 10}$$

---

[1]) $\mathfrak{x}$ ist ein Vektor mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, $\mathfrak{X}$ ein Vektor mit den Komponenten $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$.

so gilt die Transformationsformel

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) = \exp(\varepsilon L_W)\, f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}), \tag{XXXVI; 11}$$

die eine Verallgemeinerung von (XXXVI; 8) darstellt. Insbesondere ist

$$W[\mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon), \mathfrak{X}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)] = W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}),$$

denn es ist ja nach (XXXVI; 11)

$$W(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) = \exp(\varepsilon L_W)\, W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = \left(1 + \varepsilon L_W + \frac{\varepsilon^2}{2} L_W{}^2 + \cdots\right) W = W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}),$$

da $L_W{}^n W = 0$ für $n \geqq 1$ ist. Die Formel (XXXVI; 11) schließt also ein, daß die erzeugende Funktion W nach der Transformation (XXXVI; 8) ihre Form nicht ändert.

DEPRIT hat gezeigt, daß der Abbildung (XXXVI; 8) die inverse

$$\mathfrak{y} = \exp(\varepsilon L_{-W})\, \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{Y} = \exp(\varepsilon L_{-W})\, \mathfrak{X} \tag{XXXVI; 12}$$

gegenübersteht. Den Beweis möge der Leser in der Originalabhandlung von DEPRIT[1]) nachlesen.

306. Die Depritschen Operatoren Δ_W und E_W

Wir betrachten nun den Fall, daß $f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$ und $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$ explizite von ε abhängen. DEPRIT führt dann den Operator

$$\Delta_W = L_W + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

ein. Man sieht unmittelbar, daß die Regeln (XXXVI; 3) und (XXXVI; 5) auch für Δ_W statt L_W gelten, während statt (XXXVI; 4) die Operatorengleichung

$$\Delta_V \Delta_W = \Delta_W \Delta_V + L_{(W;V)} + L_{(\partial W/\partial \varepsilon - \partial V/\partial \varepsilon)}$$

gilt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führt DEPRIT das Symbol

$$f^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, 0) = [\Delta^n_{W(\mathfrak{y},\mathfrak{Y},\varepsilon)} f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)]_{\varepsilon=0} \tag{XXXVI; 13}$$

ein. Es liege nun die formale Potenzreihenentwicklung

$$E_W f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, 0)$$

---

[1]) A. DEPRIT, Canonical transformations depending on a small parameter. Celestial Mech. *1*, 12 (1969).

vor. Dann gelten für den Operator E_W die leicht beweisbaren Regeln

$$\text{(XXXVI; 14)} \qquad \begin{cases} \text{a) } E_W(\alpha f + \beta g) = \alpha E_W f + \beta E_W g\,, \\ \text{b) } E_W(fg) = E_W f \cdot E_W g\,, \\ \text{c) } E_W(f;g) = (E_W f; E_W g)\,. \end{cases}$$

Aus (XXXVI; 14c) ergibt sich unmittelbar, daß die formalen Reihenentwicklungen

$$\text{(XXXVI; 15)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = E_W \mathfrak{y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\varepsilon^n}{n!}\, \mathfrak{y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, 0), \\ \mathfrak{X} = E_W \mathfrak{Y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\varepsilon^n}{n!}\, \mathfrak{Y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, 0) \end{cases}$$

eine vollständige kanonische Abbildung $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$, $\varepsilon \to \mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ darstellen. Das folgt wegen der kanonischen Invarianz der Poissonschen Klammern (Anhang VII) aus

$$(\mathfrak{x}; \mathfrak{X}) = (E_W \mathfrak{y}; E_W \mathfrak{Y}) = E_W(\mathfrak{y}; \mathfrak{Y}).$$

Allgemeiner beweist man leicht, daß für eine Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ die Regel

$$\text{(XXXVI; 16)} \qquad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon) = f(E_W \mathfrak{y}, E_W \mathfrak{Y}, \varepsilon) = E_W f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$$

gilt. Sie erlaubt, eine Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ und ε mittels der kanonischen Transformation (XXXVI; 15) und der erzeugenden Funktion $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$ in eine solche mit den Argumenten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$, und ε umzuformen.

Die Transformation (XXXVI; 15) läßt folgende Deutung zu: Man kann zeigen, daß die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, als Funktionen von ε, die für $\varepsilon \to 0$ in $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ übergehen, den kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XXXVI; 17)} \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{d\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{X}}; \quad \frac{d\mathfrak{X}}{d\varepsilon} = -\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}}$$

genügen. Sei nämlich $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ eine Funktion der Variablen (XXXVI; 15) und ε, dann ist, wenn (XXXVI; 17) gilt,

$$L_W f = (f; W) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial W}{\partial X_k} - \frac{\partial f}{\partial X_k} \frac{\partial W}{\partial x_k} \right) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial X_k} \frac{dX_k}{d\varepsilon} \right) =$$

$$= \frac{df}{d\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon},$$

also

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \Delta_W f, \quad \text{ebenso} \quad \frac{d^n f}{d\varepsilon^n} = \Delta_W{}^n f.$$

Andererseits folgt aus (XXXVI; 15) durch TAYLORsche Entwicklung nach ε

$$\mathfrak{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n \mathfrak{x}}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\Delta_W{}^n \mathfrak{x})_{\varepsilon=0},$$

$$\mathfrak{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n \mathfrak{X}}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\Delta_W{}^n \mathfrak{X})_{\varepsilon=0},$$

und diese Ausdrücke sind wegen (XXXVI; 13) mit (XXXVI; 15) identisch, wenn die Startbedingung $(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})_{\varepsilon \to 0} \to (\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ gilt.

307. Berechnung der Koeffizienten einer Depritschen Transformation

Die Funktionen $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$ und $f(\mathfrak{y}\ \mathfrak{Y}), \varepsilon)$ seien durch Potenzreihen nach ε,

(XXXVI; 18)
$$\begin{cases} \text{a)}\ W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}), \\ \text{b)}\ f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}), \end{cases}$$

ausgedrückt. Es wird dann wegen (XXXVI; 14, 16) möglich sein, die Koeffizienten W_{n+1} und die Koeffizienten $f^{(n)}$ der durch W erzeugten kanonischen Transformation (XXXVI; 16) nach und nach zu berechnen, wenn die f_n vorgegeben sind.

Um die Bezeichnungen abzukürzen, setzt DEPRIT

$$L_{W_p} = L_p', \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

Nun folgt aus (XXXVI; 18b)

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_{n+1}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}); \quad \left(\frac{\partial^n f}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = f_n$$

und

$$L_W f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W f_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}).$$

Wegen

(XXXVI; 19) $$f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\Delta_W{}^n f)_{\varepsilon=0}; \quad \Delta_W = L_W + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

ist aber

$$L_W f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[L_W \left(L_W + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)^n f\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$$

und

$$(\text{XXXVI}; 20)\quad \Delta_W f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[f_{n+1}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}),$$

wenn zur Abkürzung

$$(\text{XXXVI}; 21)\qquad f_n^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_{n+1}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$$

gesetzt wird. Es folgt dann aus (XXXVI; 21) speziell

$$f_0^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_1 + L_1 f_0 = f_1 + (f_0; W_1).$$

Ebenso erhält man nach einfacher Rechnung, die dem Leser überlassen werden darf,

$$\Delta_W{}^2 f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}),$$

wenn man zur Abkürzung

$$f_n^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_{n+1}^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$$

schreibt. Hieraus folgt aber

$$f_0^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)} = f_1^{(1)} + (f_0^{(1)}; W_1),$$

und es ist nach (XXXVI; 21)

$$f_1^{(1)} = f_2 + L_1 f_1 + L_2 f_0 = f_2 + (f_1; W_1) + (f_0; W_2),$$

so daß sich

$$f_0^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_2 + 2(f_1; W_1) + (f_0; W_2) + \big((f_0; W_1); W_1\big)$$

ergibt. Allgemein erhält man bei Fortsetzung dieses Verfahrens

$$(\text{XXXVI}; 22)\qquad \Delta_W{}^k f(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n^{(k)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$$

mit

$$f_n^{(k)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_{n+1}^{(k-1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}),$$

woraus speziell

$$f_0^{(k)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = f_1^{(k-1)} + L_1 f_0^{(k-1)}$$

folgt.

Den Gebrauch der oben abgeleiteten Formeln veranschaulicht DEPRIT durch das in Abb. 21 gezeichnete Schema, dessen Form an das PASCALsche Dreieck erinnert.

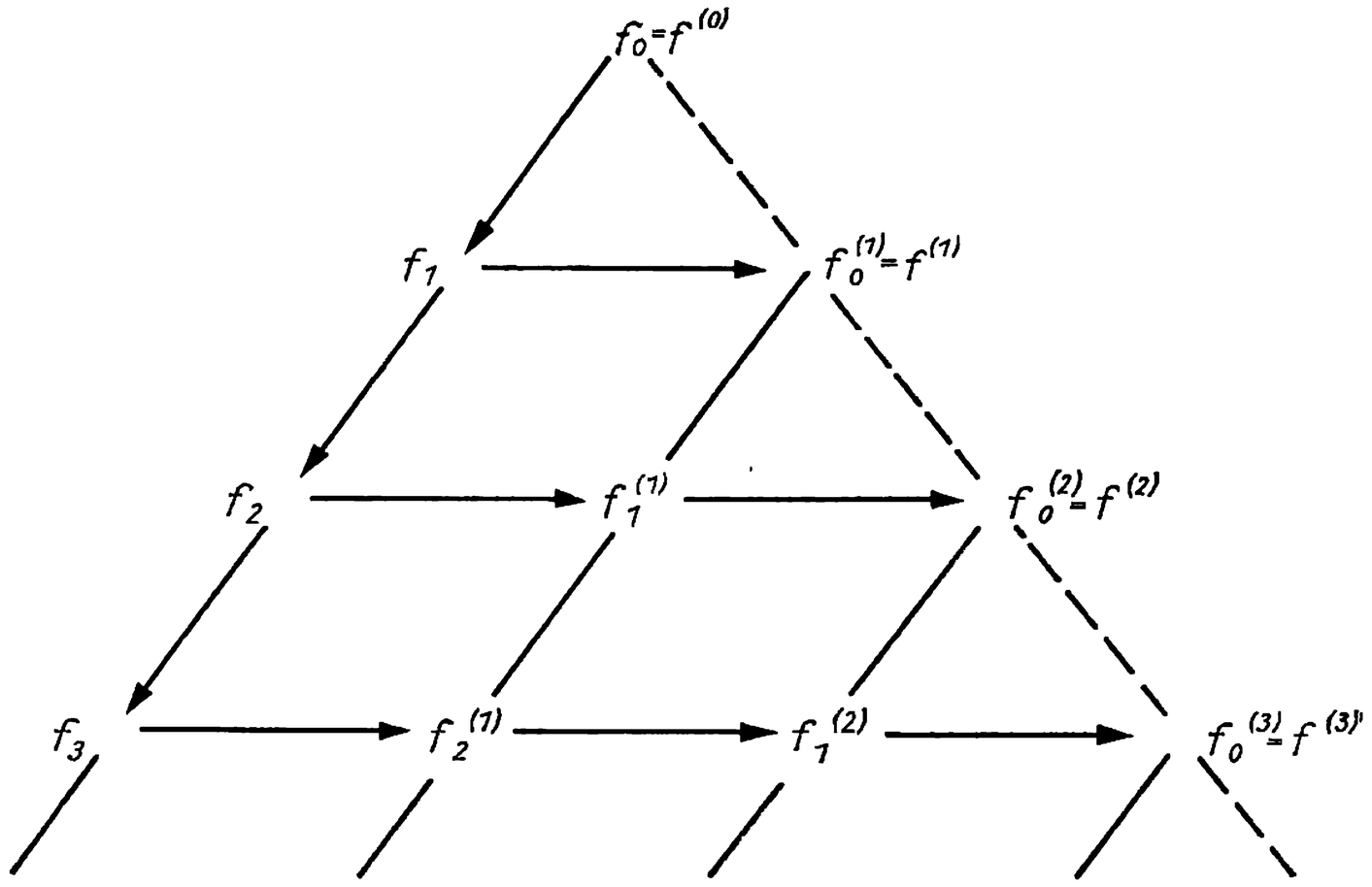

Abb. 21. Das Depritsche Rekursionsschema

Angenommen, die Koeffizienten W_{n+1}, f_n der Entwicklungen (XXXVI; 18a, b) seien gegeben. Dann berechnet man die Koeffizienten $f_n^{(k)}$, die zur Ermittlung der Transformation (XXXVI;16) gebraucht werden, mit Hilfe des folgenden Rekursionsverfahrens:

Die Funktionen $f_n = f_n^{(0)}$ auf der ersten Diagonale links seien gegeben. Außerdem seien alle Funktionen, die oberhalb der durch f_n gehenden Horizontale liegen, bekannt. Dann lassen sich die noch unbekannten Funktionen dieser Horizontalen, nämlich

$$f_{n-1}^{(1)},\ f_{n-2}^{(2)},\ \ldots,\ f_0^{(n)}$$

berechnen. Nach und nach erhält man auf Grund der oben abgeleiteten Beziehungen:

(XXXVI; 23)
$$\begin{cases} f_0^{(1)} = f_1^{(0)} + L_1 f_0^{(0)}, & \text{(erste Ordnung)} \\ \left.\begin{aligned} f_1^{(1)} &= f_2^{(0)} + L_1 f_1^{(0)} + L_2 f_0^{(0)}, \\ f_0^{(2)} &= f_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)}, \end{aligned}\right\} & \text{(zweite Ordnung)} \\ \left.\begin{aligned} f_2^{(1)} &= f_3^{(0)} + L_1 f_2^{(0)} + 2L_2 f_1^{(0)} + L_3 f_0^{(0)}, \\ f_1^{(2)} &= f_2^{(1)} + L_1 f_1^{(1)} + L_2 f_0^{(1)}, \\ f_0^{(3)} &= f_1^{(2)} + L_1 f_0^{(2)}, \end{aligned}\right\} & \text{(dritte Ordnung)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei $f_n^{(0)} = f_n$ und $f_0^{(n)} = f^{(n)}$ gesetzt werden darf.

Sei nun insbesondere $\mathfrak{y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, 0)$ einer der Koeffizienten der Entwicklung (XXXVI; 15). Dann ist nach (XXXVI; 20)

$$\Delta_W \mathfrak{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathfrak{y}_n{}^{(1)},$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_n{}^{(1)} &= \left[\frac{d^n}{d\varepsilon^n} \Delta_W(\mathfrak{y}, \varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d^n}{d\varepsilon^n} \Delta_{W_1+\varepsilon W_2+{}^1/_2\varepsilon^2 W_3+\ldots}\mathfrak{y}\right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \left[\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\left(\Delta_{W_1} + \varepsilon\Delta_{W_2} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\Delta_{W_3} + \cdots\right)\mathfrak{y}\right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \left[\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\left(L_1 + \varepsilon L_2 + \frac{\varepsilon^2}{2!} L_3 + \cdots\right)\mathfrak{y} + \frac{\partial^n \mathfrak{y}}{\partial \varepsilon^n}\right]_{\varepsilon=0} = L_{n+1}\mathfrak{y}, \end{aligned}$$

da ja $\mathfrak{y}$ von ε nicht abhängt. Man findet daher nach (XXXVI; 23)

(XXXVI; 23a)
$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{y}^{(1)} = L_1\mathfrak{y}, & \text{(erste Ordnung)} \\ \left.\begin{array}{l} \mathfrak{y}_1{}^{(1)} = L_2\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{y}^{(2)} = \mathfrak{y}_1{}^{(1)} + L_1\mathfrak{y}^{(1)}, \end{array}\right\} & \text{(zweite Ordnung)} \\ \left.\begin{array}{l} \mathfrak{y}_2{}^{(1)} = L_3\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{y}_1{}^{(2)} = \mathfrak{y}_2{}^{(1)} + L_1\mathfrak{y}_1{}^{(1)} + L_2\mathfrak{y}^{(1)}, \\ \mathfrak{y}^{(3)} = \mathfrak{y}_1{}^{(2)} + L_1\mathfrak{y}^{(2)}, \end{array}\right\} & \text{(dritte Ordnung)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Entsprechende Rekursionsformeln gelten für die $\mathfrak{Y}$.

308. Anwendung auf die Theorie der Planetenstörungen

Es sei ein vektorielles System kanonischer Differentialgleichungen,

(XXXVI; 24)
$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}}; \quad \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{x}}; \quad H = H(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$$

gegeben, in dem die Hamiltonsche Funktion H von einem kleinen Parameter ε von der Ordnung der störenden Massen, nicht aber explizite von der Zeit t abhängen möge, und es sei H in eine konvergente Reihe nach Potenzen von ε,

$$H(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon) = H_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \varepsilon H_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \frac{\varepsilon^2}{2!} H_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \cdots,$$

entwickelbar. Es soll nun eine kanonische Transformation $\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon \to \mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon$ vorgenommen werden, die in bezug auf ε in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$

analytisch sei und die so beschaffen ist, daß die neue HAMILTONsche Funktion

$$K(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = K_0(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \varepsilon K_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \frac{\varepsilon^2}{2!} K_2(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \cdots$$

ebenfalls in eine nach Potenzen von ε fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Außerdem seien dieser Funktion gewisse Bedingungen eingeprägt, die H nicht erfüllt und die dem besonderen Problem eigentümlich sind, das zu lösen man sich vorgenommen hat: Unterdrückung gewisser Klassen von periodischen Termen, Elimination einer gewissen Anzahl von Winkelvariablen, Regularisation usw.

Man nehme etwa an, daß die alten Variablen $\mathfrak{x}, \mathfrak{X}$ die Koordinaten des Ortes bzw. die Momente oder die linearen bzw. die Winkelvariablen repräsentieren, daß sie als Funktionen der neuen Variablen $\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$ den Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 25a)} \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \varepsilon \mathfrak{y}^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!} \mathfrak{y}^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \cdots + \dfrac{\varepsilon^n}{n!} \mathfrak{y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \cdots, \\ \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} + \varepsilon \mathfrak{Y}^{(1)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!} \mathfrak{Y}^{(2)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \cdots + \dfrac{\varepsilon^n}{n!} \mathfrak{Y}^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) + \cdots \end{cases}$$

genügen und daß umgekehrt die $\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$ als Funktionen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{X}$ durch die inversen Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 25b)} \quad \begin{cases} \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \varepsilon \mathfrak{x}^{(1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!} \mathfrak{x}^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \cdots, \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} + \varepsilon \mathfrak{X}^{(1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!} \mathfrak{X}^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \cdots \end{cases}$$

darstellbar sind. Außerdem sei die erzeugende Funktion W durch die Reihe (XXXVI; 18a) definiert.

Es handelt sich nun darum, das System vektorieller kanonischer Differentialgleichungen

$$\text{(XXXVI; 26)} \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \mathfrak{Y}}; \quad \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \mathfrak{y}},$$

das aus dem System (XXXVI; 24) mit Hilfe der Transformation (XXXVI; 25a) entsteht, so aufzubauen, daß es mit (XXXVI; 24) gleichzeitig gilt. Die HAMILTONschen Funktionen $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})$ und $K(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$, die durch die genannte Transformation auseinander hervorgehen, sind identisch, da sie die Zeit t nicht explizite enthalten. Die erzeugende Funktion $W(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$, die diese Transformation vermittelt, sowie die neue HAMILTONsche Funktion K sind so zu bestimmen, daß (XXXVI; 26) erfüllt ist *und* daß die vorgesehenen Bedingungen, von denen oben die Rede war, befriedigt werden.

Aus der Identität

$$K(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) \equiv H[\mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon), \mathfrak{X}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon), \varepsilon]$$

ergibt sich, wenn wir die Transformation (XXXVI; 25a) mit Hilfe von W so definieren, daß, wie in (XXXVI; 15),

$$\mathfrak{x} = E_W \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{X} = E_W \mathfrak{Y}$$

gilt, nach dem Vertauschungssatz (XXXVI; 16)

$$K(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon) = H[E_W \mathfrak{y}, E_W \mathfrak{Y}, \varepsilon] = E_W(H)$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} K_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} H^{(n)}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$$

ist, und es ist daher $K_n = H^{(n)}$.

Man kann nun das in Abschnitt 307 entwickelte Rekursionsverfahren zur Berechnung der $H^{(n)}$ anwenden. Es ist zunächst

(XXXVI; 27) $$H^{(0)} = H_0 = K_0.$$

Sodann folgt für die Terme erster Ordnung nach (XXXVI; 23 und 23a)

(XXXVI; 28)
$$\begin{cases} K_1 = H^{(1)} = H_1 + L_1 H_0 = H_1 + (H_0; W_1), \\ \mathfrak{y}^{(1)} = L_1 \mathfrak{y} = (\mathfrak{y}; W_1) = \dfrac{\partial W_1}{\partial \mathfrak{Y}}, \\ \mathfrak{Y}^{(1)} = L_1 \mathfrak{Y} = (\mathfrak{Y}; W_1) = -\dfrac{\partial W_1}{\partial \mathfrak{y}}. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (XXXVI; 28) ist, wenn K_1 als bekannt vorausgesetzt wird, eine lineare partielle Differentialgleichung für W_1, die nach dem gleichen Verfahren gelöst werden kann, das wir in Kapitel XXXII zur Berechnung der Funktionen S_k, S_k' verwendet haben. Ist $W_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y})$ bekannt, so ergeben sich $\mathfrak{y}^{(1)}$ und $\mathfrak{Y}^{(1)}$ aus den beiden letzten Gleichungen (XXXVI; 28).

Entsprechend erhält man für die Berechnung der Koeffizienten zweiter Ordnung zunächst aus (XXXVI; 23)

(XXXVI; 29)
$$\begin{aligned} K_2 = H^{(2)} &= H_2 + L_1 H_1 + L_2 H_0 + L_1 H_1 + L_1^2 H_0 = \\ &= H_2 + 2(H_1; W_1) + (H_0; W_2) + \big((H_0; W_1); W_1\big) = \\ &= \tilde{H}_1 + (H_0; W_2), \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck $\tilde{H}_1 = H_2 + 2(H_1; W_1) + \big((H_0; W_1); W_1\big)$ mit W_1 bekannt ist. Sodann folgt aus (XXXVI; 23a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_1^{(1)} &= L_2 \mathfrak{y} = (\mathfrak{y}; W_2) = \frac{\partial W_2}{\partial \mathfrak{Y}}, \\ \mathfrak{y}^{(2)} &= \mathfrak{y}_1^{(1)} + L_1 \mathfrak{y}^{(1)} = \mathfrak{y}_1^{(1)} + (\mathfrak{y}^{(1)}; W_1), \\ \mathfrak{Y}_1^{(1)} &= L_2 \mathfrak{Y} = (\mathfrak{Y}; W_2) = -\frac{\partial W_2}{\partial \mathfrak{y}}, \\ \mathfrak{Y}^{(2)} &= \mathfrak{Y}_1^{(1)} + (\mathfrak{Y}^{(1)}; W_1), \end{aligned}$$

und diese Größen werden berechenbar, wenn W_2 aus der partiellen Differentialgleichung (XXXV; 29) bestimmt worden ist, wobei K_2 den geforderten Bedingungen entsprechend zu konstruieren ist. Dies wird im allgemeinen ein Näherungsverfahren erfordern, wofür A. DEPRIT und A. ROM ein praktisches Beispiel[1]) bis in alle Einzelheiten durchgeführt haben.

Dieses Verfahren läßt sich leicht bis zu höheren Ordnungen fortsetzen. DEPRIT hat auch den Fall diskutiert, daß H die Zeit explizite enthält. Dann gilt die Identität $K \equiv H$ nicht mehr, sondern es ist

$$K(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t, \varepsilon) = H[\mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t, \varepsilon), \dot{\mathfrak{x}}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t, \varepsilon), t, \varepsilon] + R(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, t),$$

wo

$$R = \varepsilon R_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} R_2 + \cdots$$

eine von den nichtkonservativen Kräften herrührende Restfunktion ist. Die Ausdehnung der Theorie auf diesen allgemeineren Fall ist nicht schwierig; der interessierte Leser sei auf DEPRITS Abhandlung verwiesen.

Der Formalismus der DEPRITschen Methode eröffnet für die Lösung himmelsmechanischer Probleme ein neues Feld. Er ermöglicht insbesondere eine Revision der BROUWERschen Theorie der künstlichen Satelliten, die um die Erde kreisen und deren Bewegung infolge der Anisotropie des irdischen Gravitationsfeldes gestört wird.[2]) Ebenso verspricht diese Methode neue Möglichkeiten zur Lösung der Resonanz- und Librationsfälle im Dreikörperproblem.

309. Der Dreiecksalgorithmus von Mersman

Wir haben in Abschnitt 269 und in den Abschnitten dieses Kapitels zwei verschiedene Varianten der VON ZEIPELschen Methode kennengelernt, die von HORI bzw. DEPRIT vorgeschlagen worden sind und, obwohl sie sich sehr voneinander unterscheiden, doch gewisse Kennzeichen gemeinsam haben: Beide verwenden kanonische Transformationen mit Hilfe von LIE-Reihen und benutzen eine erzeugende Funktion, die (im Gegensatz zu VON ZEIPEL) nur von den neuen Variablen abhängt. MERSMAN[3]) hat eine neue Methode zur Bestimmung der erzeugenden Funktion und der neuen HAMILTONschen Funktion entwickelt, die derjenigen von DEPRIT ähnlich ist: Sie führt auf ein Schema, das im wesentlichen dem in Abb. 21, S. 540, aufgezeichneten entspricht. MERSMAN bezeichnet daher sein Verfahren als „Dreiecksalgorithmus". Seine Formeln sind einfacher als die entsprechenden von DEPRIT, andererseits zeigen sie eine gewisse Verwandtschaft mit denjenigen von HORI.

---

[1]) A. DEPRIT und A. ROM, The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities, Celestial Mech. *2*, 166 (1970).

[2]) Siehe Abschnitt 188.

[3]) W. A. MERSMAN, A new algorithm for the LIE transformation. SIDA (Summer Institute of Dynamical Astronomy), Austin/Texas 1970.

Während DEPRIT in seiner Erweiterung der VON ZEIPELschen Methode einen einzigen Parameter ε benutzt, führt MERSMAN deren zwei, τ und ε, ein. Wenn diese beiden in einen gewissen Zusammenhang miteinander gebracht werden, ergibt sich der DEPRITsche Algorithmus.

Der Parameter τ sei durch die kanonischen Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 30)} \qquad \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{d\tau} = -\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert, wo $T(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine Funktion der Vektoren $\mathfrak{x}\ (x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{y}\ (y_1, \ldots, y_n)$ ist. Dieses System werde einer kanonischen Transformation $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \to \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ unterworfen, die durch die LIE-Reihe

$$\text{(XXXVI; 31)} \qquad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} D^j f\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

definiert ist. Die Operatoren D^j sind durch die Folge

$$D^0 f = f; \quad D^1 f = (f; T) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial T}{\partial q_i} \right); \quad \ldots; \quad D^j f = D^1 D^{j-1} f$$

gegeben, wobei f irgendeine stetige und so oft wie nötig differenzierbare Funktion der Variablen x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bedeutet. Ist speziell $f = x_i$ oder $f = y_i$, so erhält man die Gleichungen

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} D^j q_i; \quad y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} D^j p_i,$$

die für $\tau = 0$ in $x_i = q_i$ bzw. $y_i = p_i$ übergehen.

Aus (XXXVI; 30) ergibt sich durch Umkehrung

$$f(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} (-D)^j f\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

also in den obigen Spezialfällen

$$q_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} (-D)^j x_i; \quad p_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} (-D)^j y_i.$$

Der Beweis, der auf den Eigenschaften der LIE-Reihen und auf der kanonischen Invarianz der POISSONschen Klammern beruht, ist leicht. Der Leser sei auf die Abhandlungen von HORI und DEPRIT verwiesen.

MERSMAN betrachtet nun ein System kanonischer Differentialgleichungen

$$\text{(XXXVI; 32)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

und wendet auf die Vektoren $\mathfrak{x}\,(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{y}\,(y_1, \ldots, y_n)$ die kanonische Transformation $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \to \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ an, die nach (XXXVI; 31) durch

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} D^j F\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \tag{XXXVI; 33}$$

definiert ist, und er setzt

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \equiv E(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}). \tag{XXXVI; 34}$$

Vergleicht man diese Überlegungen mit denjenigen DEPRITS, vergleicht man insbesondere die äquivalenten Gleichungen (XXXVI; 17, 24) mit den Gleichungen (XXXVI; 31, 32), so erkennt man, daß T die erzeugende Funktion der kanonischen Transformation ist, die hier zugrunde liegt.

Ferner sei ε ein kleiner Parameter, nach dessen Potenzen die Funktionen F, T und E entwickelbar seien:

$$\begin{cases} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j F_j\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T_j\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}), \end{cases} \tag{XXXVI; 35}$$

$$E(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j E_j\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}). \tag{XXXVI; 36}$$

Ebenso gelte für den Operator D die Entwicklung

$$D = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j D_j = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} D_{m+1} \tag{XXXVI; 37}$$

mit

$$D_j f = (f; T_j), \quad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Offenbar kommt es darauf an, explizite Ausdrücke für die E_j zu finden. Aus den Formeln (XXXVI; 33—37) sowie aus der Gleichung, die man erhält, wenn man in (XXXVI; 35) die Variablen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ ersetzt, folgt

$$\begin{aligned} DF\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} D_{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \varepsilon^{n'+1} \sum_{m=0}^{n'} D_{m+1} F_{n'-m}\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \varepsilon^{n'+1} F_{1,n'}\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}), \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$F_{1,j}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{m=0}^{j} D_{m+1} F_{j-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

gesetzt wird. Hieraus leitet man ab:

$$\frac{1}{2} D^2 F(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \varepsilon^{n'+1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} D_{m+1} F_{1,n'}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{n''=0}^{\infty} \varepsilon^{n''+2} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n''} D_{m+1} F_{1,n''-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{n''=0}^{\infty} \varepsilon^{n''+2} F_{2,n''}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

mit

$$F_{2,j}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{j} D_{m+1} F_{1,j-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}).$$

Allgemein erhält man

(XXXVI; 38) $$\frac{1}{k!} D^k F\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{n^{(k)}=0}^{\infty} \varepsilon^{n^{(k)}+k} F_{k,n^{(k)}}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

mit

(XXXVI; 38a) $$F_{k,j}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{j} D_{m+1} F_{k-1,j-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}),$$

wobei per definitionem $F_{0,n-m} = F_{n-m}$ für $n - m \geqq 0$ ist.

Aus (XXXVI; 33, 34, 36, 38) folgt sodann

(XXXVI; 39) $$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j E_j\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m \sum_{n'=0}^{\infty} \varepsilon^{n'+m} F_{m,n'}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{n'=0}^{\infty} \varepsilon^{n'} \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m \varepsilon^m F_{m,n'}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{m=0}^{j} \tau^m \varepsilon^m F_{m,j-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}).$$

Läßt man vorerst die Frage nach der Konvergenz der so erhaltenen Entwicklungen beiseite, so darf man nach MERSMAN den Sonderfall betrachten, daß die (an sich voneinander unabhängigen) Parameter τ und ε durch die Beziehung $\tau\varepsilon = 1$ miteinander verknüpft sind. Dann folgt aus (XXXVI; 39)

(XXXVI; 40) $$E_j(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{m=0}^{j} F_{m,j-m}\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}).$$

Diese Gleichung erlaubt die E_j explizite durch die $F_{m,j-m}$ auszudrücken. Diese aber folgen aus den F_i und T_i rekursiv nach (XXXVI; 38), und zwar ist

$$\text{1. Ordnung} \quad \begin{cases} F_{0,1} = F_1, \\ F_{1,0} = D_1 F_0 = (F_0; T_1), \end{cases}$$

$$\text{2. Ordnung} \quad \begin{cases} F_{0,2} = F_2, \\ F_{1,1} = D_1 F_1 + D_2 F_0 = (F_1; T_1) + (F_0; T_2), \\ F_{2,0} = \frac{1}{2} D_1 F_{1,0} = \frac{1}{2} \big((F_0; T_1); T_1\big), \end{cases}$$

$$\text{3. Ordnung} \quad \begin{cases} F_{0,3} = F_3, \\ F_{1,2} = D_1 F_2 + D_2 F_1 + D_3 F_0 = (F_2; T_1) + (F_1; T_2) + (F_0; T_3), \\ F_{2,1} = \frac{1}{2} D_1 F_{1,1} + \frac{1}{2} D_2 F_{1,0} = \\ \qquad = \frac{1}{2}\big((F_1; T_1); T_1\big) + \frac{1}{2}\big((F_0; T_2); T_1\big) + \frac{1}{2}\big((F_0; T_1); T_2\big), \\ F_{3,0} = \frac{1}{3} D_1 F_{2,0} = \frac{1}{6} \big(((F_0; T_1); T_1); T_1\big), \end{cases}$$

. . . . . ;

und nach (XXXVI; 40) ist dann

$$\text{(XXXVI; 41)} \qquad E_j = F_{0,j} + F_{1,j-1} + F_{2,j-2} + \cdots + F_{j,0}.$$

Der MERSMANsche Dreiecksalgorithmus läßt sich also durch das Schema

$$\begin{array}{lccccccc}
E_0 \leftarrow & F_{0,0} & F_{0,1} & F_{0,2} & F_{0,3} & F_{0,4} & F_{0,5} \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
E_1 \leftarrow & F_{1,0} & F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & F_{1,4} & \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\
E_2 \leftarrow & F_{2,0} & F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & & \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\
E_3 \leftarrow & F_{3,0} & F_{3,1} & F_{3,2} & & & \\
 & \swarrow & \swarrow & & & & \\
E_4 \leftarrow & F_{4,0} & F_{4,1} & & & & \\
 & \swarrow & & & & & \\
E_5 \leftarrow & F_{5,0} & & & & & \\
 & \vdots & & & & &
\end{array}$$

symbolisch darstellen, und die $F_{k,j}$ sind Elemente einer unendlichen Matrix, in der die Indizes k die Reihen, die Indizes j die Spalten bezeichnen.

Die Gleichungen (XXXVI; 40 bzw. 41) stellen für $j = 1, 2, \ldots$ partielle Differentialgleichungen für die Teile T_j der erzeugenden Funktion T dar, die

sukzessive gelöst werden können, wenn die E_j (ähnlich wie die K_j der DEPRIT-schen Methode) auf Grund der Bedingungen vorgegeben sind, die der neuen HAMILTONschen Funktion E auferlegt werden, oder wenn sie durch ein geeignetes Näherungsverfahren auf Grund dieser Bedingungen nach und nach aufgebaut werden.

MERSMAN hat auch den Fall betrachtet, daß F von der Zeit t explizite abhängt. Das kommt in der Theorie des Mondes und der künstlichen Erdsatelliten vor, wo t linear in einer Winkelvariablen λ auftritt. Im Falle der Mondtheorie ist λ die mittlere Anomalie der Sonne, im Falle der Theorie der Satelliten die Rektaszension des Meridians von Greenwich. Man führt diese Fälle auf den vorhergehenden zurück, indem man $\lambda = y_{n+1}$ setzt und für x_{n+1} die zu λ konjugierte kanonische Variable ξ einführt. Die HAMILTONsche Funktion F ist dann durch $F^* = F - \nu\xi$ mit $\nu = d\lambda/dt$ zu ersetzen. Dieses Verfahren entspricht genau demjenigen, das in DELAUNAYS Störungstheorie (Abschnitt 262) benutzt worden ist: Dort wurde, um das explizite Auftreten von t in den Störungsgleichungen zu vermeiden, den sechs kanonischen DELAUNAYschen Variablen ein neues konjugiert-kanonisches Paar K, k hinzugefügt, das den Differentialgleichungen (XXXI; 31) genügt, während die HAMILTONsche Funktion F durch $F^* = F - Kdk/dt$ ersetzt wurde.

In dem MERSMANschen Verfahren ist in einem solchen Fall statt des Operators D_k der durch die Gleichung

$$\Delta_k f = D_k f + \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial T_k}{\partial p_{n+1}}$$

definierte Operator Δ_k zu verwenden. Der Leser, den diese Frage interessiert, sei auf MERSMANS Bericht verwiesen, den er am „Summer Institute of Dynamical Astronomy" in Austin (Texas) im Juni 1970 vorgelegt hat und der zur Veröffentlichung vorgesehen ist.

310. Zusammenhang zwischen den Theorien von Mersman und Deprit

Führt man die Operatoren β_j und β_{kj} durch die Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 42)} \quad \begin{cases} \beta_m = \sum_{k=0}^{m} \beta_{k,m-k}\,, & (k = 1, 2, \ldots, j) \\ \beta_{k,j} = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{j} D_{m+1}\beta_{k-1,j-m}\,, & (j = 0, 1, 2, \ldots) \\ \beta_{0,0} = 1, \quad \beta_{0,j} = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ein, so läßt sich (XXXVI; 41) in der Form

$$\text{(XXXVI; 43)} \qquad E_j(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{m=0}^{j} \beta_m F_{j-m}$$

schreiben, und man kann nach und nach Ausdrücke für $\beta_1, \beta_2, \ldots$ berechnen. Man findet mit (XXXVI; 42)

$$\text{(XXXVI; 44)} \quad \begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \beta_1 = \beta_{1,0} = D_1, \\ \beta_2 = \beta_{1,1} + \beta_{2,0} = D_2 + \frac{1}{2} D_1^2, \\ \beta_3 = \beta_{1,2} + \beta_{2,1} + \beta_{3,0} = D_3 + \frac{1}{2} D_1 D_2 + \frac{1}{2} D_2 D_1 + \frac{1}{6} D_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Benutzt man anstelle des MERSMANschen Algorithmus den von DEPRIT, so sind die E_j durch die Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 45)} \qquad E_j(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \sum_{m=0}^{j} \frac{\alpha_m}{m!} F_{j-m}$$

definiert. Die Operatoren α_m haben die Form

$$\text{(XXXVI; 46)} \qquad \alpha_j = \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} G_k \alpha_{j-k}, \quad j = 1, 2, \ldots; \ \alpha_0 = 1$$

und die G_k sind nach KAMEL[1]) mit den DEPRITschen Operatoren L_j durch die Gleichungen

$$\text{(XXXVI; 47)} \quad G_1 = L_1; \quad G_j = L_j - \sum_{m=0}^{j-2} \binom{j-1}{m} L_{m+1} G_{j-m-1}; \qquad (j = 2, 3, \ldots)$$

verbunden. Wir erinnern uns, daß (s. Abschnitt 305)

$$L_j f = (f; W_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial W_j}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial W_j}{\partial q_i} \right)$$

ist, wenn die W_j die Terme der DEPRITschen erzeugenden Funktion bedeuten, die den T_j in der MERSMANschen Theorie entsprechen.

Es folgt aus (XXXVI; 43, 45), daß die Transformationen von DEPRIT und MERSMAN dann und nur dann identisch sind, wenn

$$\text{(XXXVI; 48)} \qquad \frac{\alpha_m}{m!} = \beta_m$$

ist. Aus (XXXVI; 47) ergibt sich

$$\begin{aligned} G_1 &= L_1, \\ G_2 &= L_2 - L_1^2, \\ G_3 &= L_3 - 2L_2 L_1 - L_1 L_2 + L_1^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

---

[1]) A. A. KAMEL, Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. Celestial Mech. *1*, 190 (1969).

und hieraus wegen (XXXVI; 46)

$$\text{(XXXVI; 49)}\quad \begin{cases} \alpha_0 = 1, \\ \alpha_1 = G_1 = L_1, \\ \alpha_2 = 2G_1\alpha_1 + G_2 = L_2 + L_1{}^2, \\ \alpha_3 = 3G_1\alpha_2 + 3G_2\alpha_1 + G_3 = L_3 + L_2L_1 + 2L_1L_2 + L_1{}^3, \\ \dots\dots\dots\

gelungen, diese Äquivalenzbedingungen zu ermitteln. Er beweist, daß

$$W(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon) = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X})\right]_{\mathfrak{y}=\mathfrak{y}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)},$$

wenn $\mathfrak{x} = \partial S/\partial \mathfrak{X}$ ist. Er zeigt außerdem, daß die Transformation, die $S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ in $W(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ überführt, formal umkehrbar ist. Wir werden im folgenden dieses wichtige Theorem beweisen.

Die DEPRITsche erzeugende Funktion W ist so beschaffen, daß

$$\text{(XXXVI; 50)} \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{d\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{X}}; \quad \frac{d\mathfrak{X}}{d\varepsilon} = -\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}}$$

gilt, wobei $\mathfrak{x}(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{X}(X_1, \ldots, X_n)$ zwei Vektoren bedeuten, deren konjugiert kanonische Koordinaten mit den neuen Vektoren $\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$ durch Beziehungen

$$\text{(XXXVI; 51)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon); \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}, \varepsilon)$$

verbunden sein mögen, die für $\varepsilon \to 0$ in $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$, $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ übergehen. Die erzeugende Funktion $S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ sei nach VON ZEIPEL durch

$$\text{(XXXVI; 52)} \qquad \mathfrak{x} = \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{X}}; \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{y}}$$

definiert. Wir machen zwei Annahmen: 1. Die zweite Gleichung (XXXVI; 51) sei mit der Lösung der zweiten Gleichung (XXXVI; 52) nach $\mathfrak{X}$ identisch. 2. Die Gleichungen (XXXVI; 52) gehen für $\varepsilon \to 0$ in $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$ über. In der Tat ist ja nach VON ZEIPEL der störungsfreie Teil von S (s. auch XXXII; 4)

$$S_0 = (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{X}) = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j.$$

Die erste Annahme setzt voraus, daß die JACOBIsche Matrix

$$\mathfrak{S} = (S_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial X_j}\right), \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht singulär ist, d. h., es gibt zu $\mathfrak{S}$ die inverse Matrix

$$\mathfrak{A} = (A_{jk}) = \mathfrak{S}^{-1},$$

so daß das Produkt

$$\text{(XXXVI; 53)} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$$

die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Für $k = 1, 2, \ldots, \nu$ ist also

$$\sum_{j=1}^{\nu} S_{ij} A_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Diese linearen Gleichungen liefern die Elemente der Kehrmatrix $\mathfrak{A}$, wenn die Elemente von $\mathfrak{S}$ gegeben sind.

Differenziert man die Gleichungen (XXXVI; 52) nach ε und den X_i, so erhält man, sofern die y_i und Y_i als Konstante gelten,

$$\text{(XXXVI; 54a)} \qquad dx_i = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j}\, dX_j + \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial \varepsilon}\, d\varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

$$\text{(XXXVI; 54b)} \qquad dY_i = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial X_i}\, dX_j + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \varepsilon}\, d\varepsilon = 0.$$

Führt man neben $\mathfrak{S}$ die symmetrische quadratische Matrix

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j}\right),$$

ferner die Spaltenvektoren

$$d\mathfrak{x} = (dx_i); \quad d\mathfrak{X} = (dX_i); \quad d\mathfrak{Y} = (dY_i) = 0,$$

$$\mathfrak{t} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial \varepsilon}\right); \quad \mathfrak{s} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \varepsilon}\right)$$

ein, so lassen sich die Gleichungen (XXXVI; 54a, b) auch

$$\text{(XXXVI; 55a)} \qquad d\mathfrak{x} = \mathfrak{T} d\mathfrak{X} + \mathfrak{t} d\varepsilon,$$

$$\text{(XXXVI; 55b)} \qquad d\mathfrak{Y} = \mathfrak{S} d\mathfrak{X} + \mathfrak{s} d\varepsilon = 0$$

schreiben. Multipliziert man (XXXVI; 55b) mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}^{-1}$, so ergibt sich wegen (XXXVI; 53)

$$d\mathfrak{X} + \mathfrak{A}\mathfrak{s} d\varepsilon = 0, \quad \frac{d\mathfrak{X}}{d\varepsilon} = -\mathfrak{A}\mathfrak{s},$$

und setzt man dies in (XXXVI; 55a) ein, so folgt

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\varepsilon} = -\mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{t}.$$

Für die Koordinaten selbst erhält man also die Summenformeln

$$\text{(XXXVI; 56a)} \qquad \frac{dx_i}{d\varepsilon} = -\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} A_{jk} \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_k} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial \varepsilon},$$

$$\text{(XXXVI; 56b)} \qquad \frac{dX_i}{d\varepsilon} = -\sum_{j=1}^{\nu} A_{ji} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \varepsilon}.$$

Diese Formeln gestatten einen Vergleich mit (XXXVI; 50),

$$\text{(XXXVI; 57)} \qquad \frac{dx_i}{d\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial X_i}; \quad \frac{dX_i}{d\varepsilon} = -\frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Hierdurch ist ein Zusammenhang zwischen S und W gegeben, der sich auf die Berechnung der partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variablen stützt, die durch implizite Beziehungen zusammenhängen. Wir werden im folgenden zeigen, wie die Auswertung dieser Formeln zu dem SHNIADschen Theorem führt.

Es sei $\tilde{G}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ eine Funktion, in der $\mathfrak{x}$ die durch (XXXVI; 52) gegebene Funktion von $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{X}$, ε ist. Ferner sei $G(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ die gleiche Funktion, in der $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ ersetzt wird. Es ist dann

$$\text{(XXXVI; 58a)} \qquad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial G}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

$$\text{(XXXVI; 58b)} \qquad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial G}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial X_i}.$$

Man differenziere nun die erste Gleichung (XXXVI; 52) nach $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{X}$. Dann erhält man für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\text{(XXXVI; 59)} \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k \partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k \partial X_i} dX_i$$

oder

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{S} d\mathfrak{y} + \mathfrak{T} d\mathfrak{X}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(A_{jk}) = \mathfrak{A}$, so folgt

$$d\mathfrak{y} = \mathfrak{A} d\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\mathfrak{T} d\mathfrak{X}$$

oder

$$dy_j = \sum_{k=1}^{\nu} A_{jk} dx_k - \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} A_{jk} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k \partial X_i} dX_i$$

und hieraus

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = A_{ji}; \quad \frac{\partial y_j}{\partial X_i} = -\sum_{k=1}^{\nu} A_{jk} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k \partial X_i}.$$

Die Gleichungen (XXXVI; 58a, b) lassen sich also

$$\text{(XXXVI; 60)} \qquad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{\nu} A_{ji} \frac{\partial G}{\partial y_j}; \quad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} A_{jk} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k \partial X_i} \frac{\partial G}{\partial y_j}$$

schreiben. Die rechten Seiten der Gleichungen (XXXVI; 60) haben dieselbe Form wie (XXXVI; 56b) für $-dX_i/d\varepsilon$ und (XXXVI; 56a) für $dx_i/d\varepsilon$, wenn

$$\text{(XXXVI; 61)} \qquad \frac{\partial G}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial G}{\partial X_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial \varepsilon}$$

gesetzt wird. Daraus folgt aber

$$\tilde{G} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}$$

und wegen (XXXVI; 57)

$$\text{(XXXVI; 62)} \qquad W = \left(\frac{\partial S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{y}(\mathfrak{x},\mathfrak{Y},\varepsilon)},$$

wie behauptet.

Diese letzte Gleichung drückt die Beziehung zwischen den erzeugenden Funktionen S (VON ZEIPEL) und W (DEPRIT) aus. Ist $S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ gegeben, so berechnet man $\partial S/\partial \varepsilon$ und $\partial S/\partial \mathfrak{X}$. Man setzt dann $\mathfrak{x} = \partial S/\partial \mathfrak{X}$ und entnimmt dieser Gleichung, die nichts anderes ist als (XXXVI; 52), den Ausdruck für $\mathfrak{y}$ als Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, ε. Dies führt man in $\partial S/\partial \varepsilon$ ein und erhält so W aus (XXXVI; 62). Ist umgekehrt W gegeben, so erhält man S aus (XXXVI; 62) durch die Quadratur $S = \int W(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)\, d\varepsilon$ unter der Bedingung, daß für $\varepsilon = 0$ $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ übergeht.

H. SHNIAD zeigt sodann, wie man effektiv und in formaler Weise S als Funktion von W und umgekehrt ausdrücken kann. Man setze

$$\text{(XXXVI; 63)} \qquad S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon) = (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} S_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}),$$

wo $(\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{X})$ das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{X}$ darstellt. Dann ergibt sich nach (XXXVI; 52)

$$\text{(XXXVI; 64)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial S_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{X})}{\partial \mathfrak{X}}.$$

Um (XXXVI; 63) nach $\mathfrak{y}$ aufzulösen, setzt man

$$\text{(XXXVI; 65)} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mathfrak{y}^{(j)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) = \mathfrak{x} + \delta$$

an, wo δ eine Zusatzfunktion von der Ordnung der Störungen ist. Man hat dann

$$S_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}) = S_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{X})_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} + \left(\frac{\partial S_n}{\partial \mathfrak{y}}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} \delta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S_n}{\partial \mathfrak{y}^2}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} \delta^2 + \cdots$$

und erhält somit

$$\text{(XXXVI; 66)} \qquad \frac{\partial S_n(\mathfrak{y}, \mathfrak{X})}{\partial \mathfrak{X}} = \left(\frac{\partial S_n}{\partial \mathfrak{X}}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} + \left(\frac{\partial^2 S_n}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{y}}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} \delta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 S_n}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{y}^2}\right)_{\mathfrak{y}=\mathfrak{x}} \delta^2 + \cdots.$$

Aus (XXXVI; 64, 65, 66) entnimmt man

$$\text{(XXXVI; 67)} \qquad \begin{cases} y_i^{(1)} + \dfrac{\partial S_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})}{\partial X_i} = 0, \\ y_i^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \dfrac{\partial^2 S_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})}{\partial X_i \partial x_k} y_k^{(1)} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial S_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{X})}{\partial X_i} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Funktionen $y_i^{(j)}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$ sind also sukzessive durch die Gleichungen (XXXVI; 67) bestimmbar. Aus (XXXVI; 63, 67) erhält man ferner

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} &= S_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_1}{\partial x_i} (\varepsilon y_i^{(1)} + \varepsilon^2 y_i^{(2)} + \varepsilon^3 y_i^{(3)} + \cdots) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{2} [\varepsilon^2 y_i^{(1)} y_k^{(1)} + \varepsilon^3 (y_i^{(1)} y_k^{(2)} + y_i^{(2)} y_k^{(1)}) + \cdots] + \cdots + \\ &+ \varepsilon \Big[S_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_2}{\partial x_i} (\varepsilon y_i^{(1)} + \varepsilon^2 y_i^{(2)} + \cdots) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{2} (\varepsilon^2 y_i^{(1)} y_k^{(1)} + \cdots) + \cdots \Big] + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Big[S_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_3}{\partial x_i} (\varepsilon y_1^{(1)} + \cdots) + \cdots \Big] + \cdots\end{aligned}$$

und hieraus wegen (XXXVI; 67)

(XXXVI; 68)

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} &= S_1 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_1}{\partial x_i} \Big[-\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial X_i} + \varepsilon^2 \Big(\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_i \partial x_k} \frac{\partial S_1}{\partial X_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial X_i} \Big) + \cdots \Big] + \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{2} \Big(\varepsilon^2 \frac{\partial S_1}{\partial X_i} \frac{\partial S_1}{\partial X_k} + \cdots \Big) + \cdots + \\ &+ \varepsilon \Big[S_2 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_2}{\partial x_i} \Big(-\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial X_i} + \cdots \Big) + \cdots \Big] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [S_3 + \cdots] + \cdots .\end{aligned}$$

Aus (XXXVI; 62, 68) erhält man, wenn man

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}$$

setzt,

(XXXVI; 69)
$$\begin{cases} W_1 = S_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}), \\ W_2 = S_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_1}{\partial X_i} \frac{\partial S_1}{\partial x_i}, \\ W_3 = S_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) - 2 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_1}{\partial X_i} \frac{\partial S_2}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial S_1}{\partial x_i} \frac{\partial S_2}{\partial X_i} + \\ \qquad + 2 \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_i \partial x_k} \frac{\partial S_1}{\partial x_i} \frac{\partial S_1}{\partial X_k} + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial S_1}{\partial X_i} \frac{\partial S_1}{\partial X_k}, \\ \cdots\cdots\cdots\

Die Gleichungen (XXXVI; 69) zeigen, daß jedes W_j, $j = 1, 2, \ldots$, in der Form $W_j = S_j + K_j$ geschrieben werden kann, wo K_j eine Funktion von S_1, S_2, ..., S_{j-1} ist. Aus (XXXVI;69) leitet man umgekehrt ab:

$$\text{(XXXVI; 70)} \quad \begin{cases} S_1 = W_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}), \\ S_2 = W_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial X_i} \frac{\partial W_1}{\partial x_i}, \\ S_3 = W_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) + 2\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial X_k} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} \frac{\partial W_2}{\partial X_k} + \\ \quad + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial X_k} \frac{\partial W_1}{\partial X_i} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} \frac{\partial W_1}{\partial X_i} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_i \partial X_k} + \\ \quad + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} \frac{\partial W_1}{\partial x_i} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_i \partial X_k}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die zu (XXXVI; 69) inversen Gleichungen (XXXVI; 70) zeigen, daß $S_j = W_j + M_j$ geschrieben werden kann, wo M_j eine Funktion von W_1, W_2, ..., W_{j-1} ist.

Das Theorem von SHNIAD kann man folgendermaßen kurz formulieren: Es seien $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ zwei Systeme kanonischer Variabler und ε ein kleiner Parameter von der Ordnung der Massen in einer Störungstheorie. Ferner sei $W(\mathfrak{x}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ die erzeugende Funktion der Transformation $\mathfrak{x}, \mathfrak{X} \to \mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$ im Sinne von DEPRIT, $S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ die erzeugende Funktion nach VON ZEIPEL. Dann sind die Methoden von DEPRIT und VON ZEIPEL dann und nur dann äquivalent, wenn zwischen W und S die Relation (XXXVI; 62) besteht und $\mathfrak{y}$ als Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, ε durch die implizite Gleichung

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial S(\mathfrak{y}, \mathfrak{X}, \varepsilon)}{\partial \mathfrak{X}}$$

ausgedrückt wird. Die Transformation, die S in W überführt, ist umkehrbar.

ANHANG

Ia. Weitere Berichtigungen zu Band I

Ib. Berichtigungen zu Band II

II. Harmonische Analyse

III. Hauptachsentransformation homogener quadratischer Formen

IV. Sätze über Transformationen, insbesondere kanonische

V. Der LAGRANGEsche Entwicklungssatz

VI. Entwicklung nach TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen

VII. Kanonische Invarianten

VIII. Nach Redaktionsschluß eingegangene Zusätze

I a. Weitere Berichtigungen zu Band I

S. 45, Tabelle: In der Spalte n_t (*Newcomb*) für Jupiter: 299.27 statt 229.27.

S. 129, Formel (III; 92): $\Delta U = 0$.

S. 216, Zeile 3 von unten: $c_3\mu_0\tau^2z^3$ statt $c_3\mu_0\tau^2z^2$,

letzte Zeile: $z + c_2\sigma_0\tau z^2 + c_3\varepsilon_0\tau^2z^3 = 1$.

S. 296, Formel (VII; 21):

$$r = r_0\Big[1 + \sigma_0\tau + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \sigma_0^2)\tau^2 + \frac{1}{2}\sigma_0(3\sigma_0^2 - 3\varepsilon_0 - \mu_0)\tau^3 + \cdots$$

$$= r_0\Big[1 + \eta_0 + \frac{1}{2}(\zeta_0 - \eta_0^2) + \frac{1}{2}\eta_0(3\eta_0^2 - 3\zeta_0 - \xi_0) + \cdots.$$

S. 303, erste Zeile: $J_{-\nu-n}(-ve)$ statt $J_{\nu-n}(-ve)$,

Zeile 2 von oben: $J_{\nu-n}(ve)$ statt $J_{-\nu-n}(ve)$,

Zeile 9 von oben:

$$\frac{2}{\nu}\frac{dJ_\nu(ve)}{d(ve)} = \frac{2}{\nu^2}\frac{dJ_\nu(ve)}{de} \quad \text{statt} \quad \frac{2}{\nu}\frac{dJ(ve)}{d(ve)} = \frac{2}{\nu^2}\frac{dJ(ve)}{de},$$

letzte Zeile: $a(e - \cos E)$ statt $a(1 - e\cos E)$.

S. 305, Zeile 2 von oben: $J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$ statt $J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$.

S. 314, Formel (VII; 66), Zeile 2:

$$\frac{17}{192}e^6 \quad \text{statt} \quad \frac{17}{96}e^6.$$

I b. Berichtigungen zu Band II

S. 22, Zeile 9 von oben: $-\dot{u}_k$ statt $-u_k$,

Zeile 13ff. von oben: Neben dem Formelsystem fehlt die Numerierung (XI; 10).

S. 25, Formel (XI; 13), zweite Zeile:

$$\frac{m_i}{r_{i1}^3}, \frac{m_j}{r_{j1}^3} \quad \text{statt} \quad \frac{m_i}{r_{i1}}, \frac{m_j}{r_{j1}}.$$

S. 26, Formel (XI; 15), zweite Zeile:

$$\frac{m_i}{r_{ik}^3} \quad \text{statt} \quad \frac{m_i}{r_{ik}}.$$

S. 40, Formel (XI; 50), zweite Zeile:

$$\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\vartheta}\cos^2\varphi) \quad \text{statt} \quad \frac{d}{dt}\,(r^2\vartheta\cos^2\varphi).$$

S. 54, Zeile 14 von oben:

$$\mathfrak{p}_2\left(a\,\frac{m_1}{m_1+m_2},\,0,\,0\right) \quad \text{statt} \quad \mathfrak{p}_2\left(0,\,a\,\frac{m_1}{m_1+m_2},\,0\right).$$

S. 93, Formel (XII; 32a), erste Zeile: $= 2s_k$ statt $= s_k$.

S. 100, Zeile 5 von oben: $= -r_i\sigma_i\,[3\,(\varepsilon_i^* - \sigma_i^2) + \mu_i] + r_i\gamma_i$.

S. 157, Zeile 16 von oben: „eng an die“ statt „eng um die“.

S. 176, Formel (B): $\dot{\xi} - n\eta$ statt $\xi - n\eta$.

S. 186, Formel (XIV; 52): $\frac{\partial w}{\partial t}$ statt $\frac{\partial w}{dt}$.

S. 210, Zeile 13 von unten: $(\alpha_i, \alpha_k) = -(\alpha_k, \alpha_i)$ statt $(\alpha_i, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_i)$.

S. 239, Zeile 4 von unten: $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}$ statt $\frac{d\varphi}{\partial\alpha_2}$.

S. 240, Zeile 4 von oben: $\frac{di}{dt}$ statt $\frac{\partial i}{\partial t}$.

S. 261, Zeile 14 von unten: $|h_2 - h_1| = \pi$ statt $|h_2 - h_1| = \pi/2$.

S. 262, Zeile 15 von unten: $h_2 - h_1 = \pm\pi$ statt $h_2 - h_1 = \pm\pi/2$.

S. 280, Zeile 3 von unten: $b_0^{(1/2)}$ und $b_1^{(1/2)}$ statt $b_0^{(1)}$ und $b_1^{(1)}$.

S. 367, Zeile 14 von oben: $\nabla^{m+1}f_m$ statt $\nabla^{2m-2}f_m$.

S. 418, Formel (XVIII; 111): $\frac{r_2^2 - r_1^2}{2a_1^3}$ statt $\frac{r_2^2 - r_1^2}{a_1^2}$.

S. 522, Zeile 10 von oben: $c = 2369''.9 = 39'29''.9$ statt $c = 236''.9 = 39'29''.99$.

S. 545, Zeile 9 von oben: „Bahnneigung“ statt „Bahnebene“.

S. 550, Zeile 10 von unten: w^3 statt w^4.

S. 613, Zeile 14 von oben lies: $\frac{\partial\bar{F}_{10}}{\partial G''} = -\frac{3}{4}\,n_0''\gamma_0'\eta'^{-4}\,(5\cos^2 i'' - 1)$.

S. 634, Zeile 7 von oben: „kleiner“ statt „größer“.

S. 650, Zeile 21 von unten; in der Spalte r_{2i}*:* 1.1677237 statt 0.1677237.

S. 659, Zeile 15 von unten: $\overline{\Delta\Omega}$ statt $\overline{\Delta\tilde{\omega}}$.

S. 664, Zeile 20 von oben: „Aeronautics“ statt „Aeronautic“.

II. Harmonische Analyse

Eine Funktion $f(t)$, die der Funktionalgleichung

$$f(t + p) = f(t)$$

genügt, heißt periodisch mit der Periode p. Sie läßt sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen in eine konvergente trigonometrische Reihe (FOURIER-Reihe)

$$f(t, \alpha) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\alpha t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\alpha t, \quad \alpha = \frac{2\pi}{p}$$

entwickeln, deren Koeffizienten (FOURIER-Koeffizienten oder harmonische Konstituenten) die Integralform

$$(1) \qquad a_i = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos i\alpha t dt; \quad b_i = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin i\alpha t \, dt$$

haben. Diese strengen Werte lassen sich durch endliche Summen annähern, wenn eine Anzahl über die Periode p gleichabständig verteilte Ordinaten (Stützwerte) der Funktion $f(t)$ numerisch vorliegt. Wir wählen die Zeiteinheit gleich $1/p$ der Periode und bezeichnen die Stützwerte mit

$$y_0 = f(0); \quad y_1 = f(1); \quad \ldots; \quad y_{p-1} = f(p-1); \quad y_p = f(p) = y_0,$$

so daß p unabhängige Ordinaten $y_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, p-1)$ gegeben sind. Man unterscheidet zwei Fälle:

1. $p = 2n + 1$ ist ungerade. Dann gilt

$$y_\nu = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos i\nu\alpha + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin i\nu\alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2n+1},$$

und die $2n + 1$ Koeffizienten a_i, b_i lassen sich als Funktionen der $2n + 1$ Stützwerte eindeutig durch die Summen

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad a_0 = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{2n} y_\nu; \quad a_i = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{2n} y_\nu \cos i\nu\alpha; \quad b_i = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{2n} y_\nu \sin i\nu\alpha, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausdrücken.

2. $p = 2n$ ist gerade. Dann gilt

$$y_\nu = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cos i\nu\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \sin i\nu\alpha + \frac{1}{2} a_n \cos n\nu\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{n},$$

und die Koeffizienten a_i, b_i erhält man eindeutig aus den $2n$ Stützwerten in Form der Summen

$$\text{(2b)} \quad a_0 = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu; \quad a_i = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \cos i\nu\alpha; \quad b_i = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \sin i\nu\alpha;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu y_\nu.$$

Die Näherungen (2a, b) stellen die strengen Werte (1) der FOURIER-Koeffizienten bis zur Ordnung n um so besser dar, je größer n und je kleiner i ist. In den praktischen Anwendungen wird man, um Zeit und Mühe zu sparen, n möglichst klein wählen, aber groß genug, damit die Annäherung möglichst gut ist. Zu diesem Zwecke wird man darauf achten, daß die a_i, b_i, die im allmeinen mit wachsender Ordnung, wenn auch nicht immer monoton, abnehmen, für die größten Ordnungen, d. h. für kleine $n - i$, sehr klein ausfallen, da man dann annehmen darf, daß in der strengen Entwicklung (1) die Koeffizienten mit $i > n$ praktisch verschwinden. Trifft dies für ein anfangs gewähltes n nicht zu, so wird man die Rechnung mit einem größeren n wiederholen, am besten mit dem doppelten, da man dann die bereits vorliegenden Rechenergebnisse mit verwenden kann. Man wird auch gerades $p = 2n$ bevorzugen, möglichst $p = 4n$, da dann infolge der symmetrischen Eigenschaften der trigonometrischen Faktoren eine Zusammenfassung von Summanden mit gleichen Absolutwerten der Faktoren weitgehend möglich ist. In der Störungstheorie der Planeten und Planetoiden wird man bei der Entwicklung der Störungsfunktion nach Funktionen der mittleren, wahren und exzentrischen Anomalie des gestörten Planeten (s. Abschnitt 236 und 239) meist mit 24 über die Periode verteilten Stützwerten auskommen. Da $p = 24$ reich an ganzzahligen Teilern ist, ergeben sich für den Handrechner zahlreiche Erleichterungen („Faltung" der Ordinatenfolge, Bildung von „Summenreihen"[1]). Ein ausführliches Rechenschema für 24 Stützwerte findet man in der in Abschnitt 239 erwähnten Arbeit von E. RABE[2]). Rechenschemata für $p = 3, 4, 5, \ldots, 40$ und für eine Auswahl längerer Perioden sowie zahlreiche Rechenbeispiele enthalten die „Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung" von K. STUMPFF[3]).

Die für den Handrechner so wichtige Aufspaltung des Rechenschemas in verschiedene Schemata für die Koeffizienten verschiedener Ordnung zum

---

[1]) K. STUMPFF, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937.

[2]) E. RABE, Eine zweckmäßige Methode zur Berechnung der allgemeinen Störungen der Planeten. A. N. *273*, 209 (1942).

[3]) K. STUMPFF, Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung. Berlin 1939.

Zwecke der Verminderung der Anzahl der zu bildenden Produkte hat auch im Zeitalter der elektronischen Rechnung ihre Bedeutung beibehalten. Man sieht das sehr deutlich an dem großen Interesse, das in neuerer Zeit den Methoden der sogenannten „FFT“ (fast Fourier transform) entgegengebracht wird.[1])

In der Störungstheorie, sofern es sich um die Berechnung von Störungen erster Ordnung handelt, enthält die Störungsfunktion zwei unabhängige periodische Variable — etwa die mittleren Anomalien oder Längen des gestörten und des störenden Körpers. Dann liegt eine Funktion von der Form

$$(3) \qquad f(t, \alpha, \beta) = \sum_{i,j} K_{ij} \cos (i\alpha t + j\beta t + k_{ij}), \quad \alpha = \frac{2\pi}{p}, \quad \beta = \frac{2\pi}{q},$$

mit den Perioden p und q vor, und die Größen K_{ij}, k_{ij} sind in erster Näherung als Konstante anzusehen. Man wird dann (3) in vier Teilreihen

$$(4) \qquad f(t, \alpha, \beta) = \sum A_{ij} \cos i\alpha t \cos j\beta t + \sum B_{ij} \cos i\alpha t \sin j\beta t + \\ + \sum C_{ij} \sin i\alpha t \cos j\beta t + \sum D_{ij} \sin i\alpha t \sin j\beta t$$

zerlegen, und jede dieser unendlichen trigonometrischen Reihen soll durch eine endliche Summe angenähert werden. Um das dazu nötige Verfahren zu demonstrieren, nehmen wir an, daß die Periode p gleich der siderischen Umlaufszeit des gestörten, die Periode q gleich derjenigen des störenden Planeten sei, jeweils in den ungestörten (oskulierenden) Bahnen. Man teile dann p in $2n$, q in $2m$ gleiche Teile und berechne mit den ungestörten Elementen der beiden Körper $4mn$ Ordinaten der zu entwickelnden Funktion $f(t)$. Sei nun μ eine der $2m$ über die Umlaufzeit des störenden Planeten verteilten Abszissen, so entspricht diesem festen Wert von μ eine Folge von $2n$ Ordinaten $f_{\nu\mu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1$), die nach dem oben beschriebenen Verfahren durch die endliche trigonometrische Summe

$$(5) \qquad f_{\nu\mu} = \frac{1}{2} a_{0\mu} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i\mu} \cos i\nu\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i\mu} \sin i\nu\alpha + \frac{1}{2} a_{n\mu} \cos n\nu\alpha$$

mit den nach (2b) zu berechnenden Koeffizienten dargestellt werden kann.

Solche Reihen erhält man für jedes $\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1$, und man kann dann jede der $2m$-gliedrigen Folgen

$$a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{im}; \quad b_{i1}, \ldots, b_{i,m-1}$$

wiederum durch eine endliche FOURIERsche Reihe mit $2m$ Gliedern darstellen. Führt man diese Reihen in (5) ein, so ergibt sich eine $4mn$-gliedrige Doppelsumme, durch die (4) approximiert wird.

---

[1]) J. W. COOLEY, The fast FOURIER transform algorithm and its applications. Proceedings of SHARE *XXIX*, Miami (Florida) 1967, S. 3.

III. Hauptachsentransformation homogener quadratischer Formen

Es sei eine homogene quadratische Form

$$(1) \qquad F(x, y, z) = \gamma_{11}x^2 + \gamma_{22}y^2 + \gamma_{33}z^2 + 2\gamma_{12}xy + 2\gamma_{23}yz + 2\gamma_{31}zx$$

gegeben, und es werde eine orthogonale Transformation

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{q}; \quad \mathfrak{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gesucht, die den Vektor $\mathfrak{p}(x, y, z)$ in $\mathfrak{q}(\xi, \eta, \zeta)$ überführt, so daß $F(x, y, z)$ in

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2$$

übergeht.

Ist $\mathfrak{A}' = (a_{ki})$ die zu $\mathfrak{A}$ konjugierte Matrix, so ist wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}; \quad |\mathfrak{E}| = 1$$

die Einheitsmatrix, und es ist

$$(2) \qquad \sum_j a_{ij}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Ferner gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{A}'\mathfrak{p}$ oder explizite

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ \eta = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ \zeta = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Es soll nun

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = \\ = \lambda_1(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + \lambda_2(a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + \\ + \lambda_3(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = F(x, y, z) \end{aligned}$$

sein. Führt man die Quadrate aus, so folgt wegen (1)

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \lambda_1a_{11}^2 + \lambda_2a_{12}^2 + \lambda_3a_{13}^2; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \lambda_1a_{11}a_{21} + \lambda_2a_{12}a_{22} + \lambda_3a_{13}a_{23}, \\ \gamma_{22} &= \lambda_1a_{21}^2 + \lambda_2a_{22}^2 + \lambda_3a_{23}^2; \quad \gamma_{23} = \gamma_{32} = \lambda_1a_{21}a_{31} + \lambda_2a_{22}a_{32} + \lambda_3a_{23}a_{33}, \\ \gamma_{33} &= \lambda_1a_{31}^2 + \lambda_2a_{32}^2 + \lambda_3a_{33}^2; \quad \gamma_{31} = \gamma_{13} = \lambda_1a_{31}a_{11} + \lambda_2a_{32}a_{12} + \lambda_3a_{33}a_{13} \end{aligned}$$

oder allgemein

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \lambda_1a_{i1}a_{k1} + \lambda_2a_{i2}a_{k2} + \lambda_3a_{i3}a_{k3} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j a_{ij}a_{kj}.$$

Multipliziert man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{i1} &= \lambda_1 a_{i1} a_{11} + \lambda_2 a_{i2} a_{12} + \lambda_3 a_{i3} a_{13},\\ \gamma_{i2} &= \lambda_1 a_{i1} a_{21} + \lambda_2 a_{i2} a_{22} + \lambda_3 a_{i3} a_{23},\\ \gamma_{i3} &= \lambda_1 a_{i1} a_{31} + \lambda_2 a_{i2} a_{32} + \lambda_3 a_{i3} a_{33}\end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\end{aligned}$$

mit den nebenstehenden Faktoren und addiert die Produkte, so erhält man wegen der Orthogonalitätsbedingungen (2)

$$\gamma_{i1} a_{1j} + \gamma_{i2} a_{2j} + \gamma_{i3} a_{3j} = \lambda_j a_{ij},$$

also für $i = 1, 2, 3$ die drei Beziehungen

$$\begin{aligned}\gamma_{11} a_{1j} + \gamma_{12} a_{2j} + \gamma_{13} a_{3j} &= \lambda_j a_{1j},\\ \gamma_{21} a_{1j} + \gamma_{22} a_{2j} + \gamma_{23} a_{3j} &= \lambda_j a_{2j},\\ \gamma_{31} a_{1j} + \gamma_{32} a_{2j} + \gamma_{33} a_{3j} &= \lambda_j a_{3j}\end{aligned}$$

oder

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases}(\gamma_{11} - \lambda_j)\, a_{1j} + \gamma_{12} a_{2j} + \gamma_{13} a_{3j} = 0,\\ \gamma_{21} a_{1j} + (\gamma_{22} - \lambda_j)\, a_{2j} + \gamma_{23} a_{3j} = 0,\\ \gamma_{31} a_{1j} + \gamma_{32} a_{2j} + (\gamma_{33} - \lambda_j)\, a_{3j} = 0.\end{cases}$$

Das sind drei homogene lineare Gleichungen, aus denen (bis auf einen gemeinsamen Faktor) die Größen a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} bestimmt werden können, falls die Determinante des Systems verschwindet, also

$$\text{(5)} \qquad \begin{vmatrix}\gamma_{11} - \lambda_j & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \lambda_j & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - \lambda_j\end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Bedingung gilt aber für $j = 1, 2, 3$, so daß sämtliche neun Elemente der Matrix (a_{ik}) als Lösungen von Systemen der Form (4) erhalten werden, wenn λ_1, λ_2, λ_3 die Lösungen der kubischen Gleichung (5) sind. Das ist die „säkulare Gleichung", die (s. Abschnitt 220) nur reelle Wurzeln besitzt.

Die willkürlichen Faktoren, die den Lösungen von (4) gemeinsam sind, kann man so bestimmen, daß die Orthogonalitätsbedingungen (2) erfüllt sind. Es genügt, dafür zu sorgen, daß $a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + a_{3j}^2 = 1$ ist. Man wird dann, falls $a_{1j} \neq 0$ ist,

$$a_{1j}^2 (1 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2) = 1; \quad \beta_{12} = \frac{a_{2j}}{a_{1j}}; \quad \beta_{13} = \frac{a_{3j}}{a_{1j}}$$

setzen.

IV. Sätze über Transformationen, insbesondere kanonische

A. Es sei

$$x_i = x_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine Transformation, und es sei die Funktionaldeterminante

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)}\right| \neq 0. \tag{1}$$

Dann existiert die Umkehrung

$$q_i = q_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$J' = \left|\frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right| = \frac{1}{J}.$$

Setzt man vorübergehend

$$z_i = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

so ist für jedes i und für $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} = e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Das System (2) enthält also n lineare Gleichungen für die n partiellen Ableitungen $\partial z_i/\partial x_k$, und die Determinante dieses Systems ist identisch mit (1). Schreibt man abgekürzt

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_j} = a_{kj}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = b_{ik},$$

so ist $J = |a_{kj}|$, $J' = |b_{ik}|$. Seien ferner A_{kj} die Unterdeterminanten der Elemente a_{kj} in J, so haben die Lösungen von (2), wenn wieder z_i durch q_i ersetzt wird, die Form

$$b_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}A_{kj} = \frac{1}{J}\,A_{ki}.$$

Ist $J = 1$, was immer der Fall ist, wenn die Transformation kanonisch ist, so ist $b_{ik} = A_{ki}$ oder

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right), \tag{3}$$

wenn die runde Klammer bedeutet, daß die zum Element $\partial x_k/\partial q_i$ in $J = |\partial x_k/\partial q_i|$ gehörige Unterdeterminante gemeint ist. Sei z. B.

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

ein kanonisches System von Differentialgleichungen und

$$(5)\qquad \begin{cases} x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n; \quad p_1, \ldots, p_n), \\ y_i = y_i(q_1, \ldots, q_n; \quad p_1, \ldots, p_n) \end{cases}$$

eine kanonische Transformation, die (4) in

$$(6)\qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

mit unveränderter HAMILTONscher Funktion H überführt, und ist

$$(7)\qquad \begin{cases} q_i = q_i(x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n), \\ p_i = p_i(x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

die Lösung der Gleichungen (5), die immer existiert, da ja

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n; \quad p_1, \ldots, p_n)} \right| = 1 \neq 0$$

ist, dann gelten die $4n$ Beziehungen

$$(8)\qquad \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right); \quad \frac{\partial q_i}{\partial y_k} = \left(\frac{\partial y_k}{\partial q_i}\right); \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right); \quad \frac{\partial p_i}{\partial y_k} = \left(\frac{\partial y_k}{\partial p_i}\right).$$

B. Es seien wieder (4) und (6) zwei Systeme von kanonischen Differentialgleichungen, die durch die Transformationen (5) bzw. (7) auseinander hervorgehen. Dann kann man schreiben

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial q_i}{\partial y_k} \dot{y}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{\partial q_i}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} \right),$$

$$\dot{p}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial p_i}{\partial y_k} \dot{y}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{\partial p_i}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right); \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right),$$

und wegen (6) ist dann für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_k} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} - \frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_k} \left(\frac{\partial q_i}{\partial y_k} + \frac{\partial x_k}{\partial p_i} \right) \equiv 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial y_k} - \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \equiv 0. \end{cases}$$

Diese $2n$ homogenen linearen Gleichungen für die $2n$ Größen $\partial H/\partial x_k$, $\partial H/\partial y_k$ sollen identisch für alle Zeiten erfüllt sein. Vorausgesetzt, daß keine dieser

Größen identisch verschwindet, werden diese Identitäten dann und nur dann gelten, wenn

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial y_k}{\partial p_i}, & \dfrac{\partial q_i}{\partial y_k} = -\dfrac{\partial x_k}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial y_k}{\partial q_i}, & \dfrac{\partial p_i}{\partial y_k} = \dfrac{\partial x_k}{\partial q_i} \end{cases}$$

ist. Vergleicht man (10) mit (8), so folgt

$$(11)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x_k}{\partial q_i}\right) = \dfrac{\partial y_k}{\partial p_i}; & \left(\dfrac{\partial y_k}{\partial q_i}\right) = -\dfrac{\partial x_k}{\partial p_i}, \\ \left(\dfrac{\partial x_k}{\partial p_i}\right) = -\dfrac{\partial y_k}{\partial q_i}; & \left(\dfrac{\partial y_k}{\partial p_i}\right) = \dfrac{\partial x_k}{\partial q_i}. \end{cases}$$

V. Der Lagrangesche Entwicklungssatz

Die Gleichungen (XXXII; 10b, 17b) sind von der Form

$$(1)\qquad l = l' + \varepsilon\varphi_1(l, g); \quad g = g' + \varepsilon\varphi_2(l, g),$$

wo ε ein kleiner Parameter ist und φ_1, φ_2 beliebig oft differenzierbare Funktionen ihrer Argumente sind. Im Falle des allgemeinen Störungsproblems sind ähnliche Gleichungssysteme

$$y_i = x_i + \varepsilon\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

zu lösen, in denen die Unbekannten y_i als Funktionen der x_i und von ε implizite enthalten sind. LAGRANGE hat für $i = 1$ eine Lösung durch Reihenentwicklung nach Potenzen von ε angegeben. Ein Spezialfall, der offenbar diese Überlegungen veranlaßt hat, ist die KEPLERsche Gleichung

$$E = M + e \sin E,$$

aus der, bei genügend kleinem e, die exzentrische Anomalie E als Funktion der mittleren Anomalie M durch Reihenentwicklung zu bestimmen ist.

Für $i = 1$ ist also aus

$$(2)\qquad y = x + \varepsilon\varphi(y)$$

$y = y(x, \varepsilon)$ oder auch eine beliebig oft differenzierbare Funktion $F(y) = F(x, \varepsilon)$ durch eine nach Potenzen von ε fortschreitende Reihe zu ermitteln. LAGRANGES Lösung lautet

$$(3)\qquad F(y, \varepsilon) = F_x + \varepsilon\left(\varphi_x \frac{dF_x}{dx}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d}{dx}\left(\varphi_x{}^2 \frac{dF_x}{dx}\right) + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\varphi_x{}^3 \frac{dF_x}{dx}\right) + \cdots,$$

wenn $F_x = F(x, 0)$, $\varphi_x = \varphi(x, 0)$ gesetzt wird. Betrachtet man zunächst F als Funktion von ε bei konstant gehaltenem x, so existiert in der Umgebung von $\varepsilon = 0$ die TAYLORsche Entwicklung

$$F(\varepsilon) = F_0 + \varepsilon(AF)_0 + \frac{\varepsilon^2}{2!}(A^2F)_0 + \frac{\varepsilon^3}{3!}(A^3F)_0 + \cdots, \tag{4}$$

wo $A = \partial/\partial\varepsilon$ einen Differentialoperator bezeichnet. Ferner sei $D = \partial/\partial x$ ein weiterer Differentialoperator. Dann ist, wenn man diese beiden Operatoren auf (2) anwendet,

$$Ay = \varphi + \varepsilon\frac{d\varphi}{dy}Ay; \quad Dy = 1 + \varepsilon\frac{d\varphi}{dy}Dy,$$

und diese Gleichungen sind miteinander verträglich, wenn

$$Ay = \varphi Dy$$

ist. Für irgendeine Funktion $F(y)$ gilt demnach

$$AF = \frac{dF}{dy}Ay = \frac{dF}{dy}\varphi Dy = \varphi DF. \tag{5}$$

Durch vollständige Induktion beweist man leicht, daß auch

$$A^nF = D^{n-1}(\varphi^n DF) \tag{6}$$

ist. Bedenkt man, daß $F = F_x$, $\varphi = \varphi_x$ für $\varepsilon = 0$ gilt, so folgt (3) aus (4), wenn man dort (6) einsetzt. Insbesondere ist für $F(y) = y$, $F(x) = x$

$$y = x + \varepsilon\varphi_x + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dx}(\varphi_x{}^2) + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^2}{dx^2}(\varphi_x{}^3) + \cdots.$$

Im Falle der KEPLERschen Gleichung ist $y = E$, $x = M$, $\varphi(y) = \sin y$ und $\varepsilon = e$. Dann erhält man

$$E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2!}\frac{d}{dM}\sin^2 M + \frac{e^3}{3!}\frac{d^2}{dM^2}\sin^3 M + \cdots.$$

Der allgemeine Fall, in dem implizite Gleichungssysteme mit mehreren Variablen,

$$y_i = x_i + \varepsilon\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

nach den y_i zu lösen sind, ist schwieriger. BROWN und SHOOK[1]) geben eine Lösung für den speziellen Fall $i = 3$, $\varphi_i = c_i\varphi$, $c_i = \text{const}$ an, die man auf demselben Wege erhält wie die für $i = 1$. Für beliebige Funktionen φ_i, die *nicht*

[1]) E. W. BROWN und C. A. SHOOK, Planetary theory. London—New York 1933, Nachdruck New York 1964 (Dover Publications), S. 39ff.

einer einzigen Funktion φ proportional sind, geben sie eine Entwicklung der y_i bis zu Termen mit ε^2 einschließlich. Eine vollständige Lösung des Systems (7) wurde von I. J. Good[1]) gefunden und in Abschnitt 266 benutzt.

Eine allgemeine Lösung des Umkehrproblems (7) läßt sich auch mit Hilfe der Lie-Reihen nach der in Abschnitt 208 beschriebenen Methode durchführen. Sie gibt allerdings nicht, wie der Lagrangesche Entwicklungssatz, unmittelbar Reihenentwicklungen nach Potenzen von ε, doch ist es nicht schwierig, solche Entwicklungen nachträglich herzuleiten, wenn die Anzahl der Variablen klein ist und wenn man die Entwicklung bei niedrigen Potenzen von ε, etwa bei Termen mit ε^2 oder ε^3, abbrechen darf. Dieses Verfahren sei hier für zwei Variable, etwa $y_1 = l$, $y_2 = g$ wie in (1), kurz skizziert. Es handelt sich also darum, das System

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - \varepsilon\varphi_1(y_1, y_2); & \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} = x_{ik}; \quad \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = \varphi_{ik} \\ x_2 = y_2 - \varepsilon\varphi_2(y_1, y_2); & \end{cases}$$

umzukehren. Es hat die Jacobische Matrix

$$J = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12} \\ x_{21}, & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon\varphi_{11}, & -\varepsilon\varphi_{12} \\ -\varepsilon\varphi_{21}, & 1 - \varepsilon\varphi_{22} \end{pmatrix} = (\Phi_{ik}),$$

deren Determinante

$$|J| = (1 - \varepsilon\varphi_{11})\,(1 - \varepsilon\varphi_{22}) - \varepsilon^2\varphi_{12}\varphi_{21} = 1 - \varepsilon(\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \varepsilon^2(\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21})$$

$\neq 0$ ist, wenn ε klein genug ist, und es existiert dann die Umkehrung

$$y_i = y_i\,(x_1, x_2)$$

mit der inversen Jacobischen Matrix

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}, \quad y_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Nun ist nach Anhang IV,A für 2×2-Matrizen

$$y_{ik} = \frac{1}{|J|}\, A_{ki},$$

wenn A_{ki} die Unterdeterminante des Elements x_{ki} in $|J|$ ist. Also ist

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon\varphi_{22} & \varepsilon\varphi_{12} \\ \varepsilon\varphi_{21} & 1 - \varepsilon\varphi_{11} \end{pmatrix} = \Psi_{ik},$$

---

[1]) I. J. Good, Generalization of several variables of Lagrange's equation. Proc. Cambridge philos. Soc. *56*, 385 (1960).

und man beweist durch Nachrechnen leicht, daß

$$J \cdot J^{-1} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Nach Abschnitt (208) genügen dann die Funktionen $y_i = y_i(x_1, x_2)$ den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \Psi_{ik}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i = \xi_i$, $y_i = \eta_i$, und ihre Lösungen sind

$$y_i = e^{[(x_1-\xi_1)D_1+(x_2-\xi_2)D_2]}\,\eta_i$$

mit den vertauschbaren LIE-Operatoren

$$D_1 = \Psi_{11}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \Psi_{21}\frac{\partial}{\partial \eta_2}; \quad D_2 = \Psi_{12}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \Psi_{22}\frac{\partial}{\partial \eta_2}.$$

VI. Entwicklung nach Tschebyscheffschen Polynomen

Die TSCHEBYSCHEFFschen Polynome $T_n(x)$ sind durch

$$T_n(x) = \cos\,(n \operatorname{arc}\cos x)$$

definiert oder, was auf dasselbe führt, durch

$$T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots,$$

d. h., wenn man wieder

$$\cos\varphi = x; \quad \sin^2\varphi = 1 - x^2$$

setzt, durch

$$(1) \qquad T_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots.$$

Hieraus leitet man für die ersten Polynome

$$(2) \qquad \begin{cases} T_0 = 1, \\ T_1 = x, \\ T_2 = 2x^2 - 1, \\ T_3 = 4x^3 - 3x, \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ab. Die Summe der Koeffizienten ist 1 für alle T_n.

Die Folge der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome ist orthogonal; es gilt für die Belegungsfunktion $(1 - x^2)^{-1/2}$ und das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$, $\pi \geqq \varphi \geqq 0$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m T_n}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad m = n \neq 0, \\ \pi & \text{für} \quad m = n = 0. \end{cases}$$

Sie ist auch vollständig,[1] [2]) d. h., jede im Intervall $[-1, +1]$ gegebene stetige oder stückweise stetige und beschränkte Funktion $f(x)$ läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe mit konstanten Koeffizienten

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots \tag{3}$$

entwickeln. Die Reihe (3) ist mit der trigonometrischen Reihe

$$f(\cos\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots \tag{4}$$

identisch, und es ist aus der Theorie der FOURIERschen Reihen bekannt, daß für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi \tag{4a}$$

ist.

Für die TSCHEBYSCHEFFschen Polynome gelten folgende Regeln und **Sätze:**

1. Aus $T_n(x) = \cos nx$ folgt der Produktsatz

$$2T_n(x)\, T_m(x) = T_{n+m} + T_{n-m}, \quad (n > m) \tag{5}$$

$$2T_n^2(x) = 1 + T_{2n}$$

und die Rekursionsformel

$$T_n(x) - 2xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x) = 0\,. \tag{6}$$

---

[1]) C. LANCZOS, Applied analysis. London 1957.

[2]) F. G. TRICOMI, Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

2. Jede Potenz x^n läßt sich als lineare Funktion von TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen darstellen. Aus (2) folgt

$$(7)\qquad \begin{cases} x = T_1(x), \\ x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2), \\ x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3), \\ x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

3. Durch unbestimmte Integration nach x folgt aus (2) und (7)

$$(8)\qquad \begin{cases} \int T_0 dx = x = T_1, \\ 2\int T_1 dx = \frac{T_2}{2} + \frac{1}{2}, \\ 2\int T_2 dx = \frac{T_3}{3} - T_1, \\ 2\int T_3 dx = \frac{T_4}{4} - \frac{T_2}{2} - \frac{3}{4}, \\ 2\int T_4 dx = \frac{T_5}{5} - \frac{T_3}{3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die bei der Integration über ungerade T_n auftretenden Konstanten lassen sich mit den Integrationskonstanten vereinigen und fallen bei bestimmter Integration mit diesen heraus. Für $n > 1$ gilt daher

$$(9)\qquad 2\int T_n dx = \frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} + \text{const.}$$

4. Aus $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$ folgt, für $-1 \leqq x = \cos\varphi \leqq +1$,

$$(10)\qquad |T_n(x)| \leqq 1.$$

5. Für ganzzahlige positive m ist

$$(11)\qquad T_n(\cos m\varphi) = \cos(nm\varphi) = T_{nm}, \quad T_n(\cos m\varphi) = T_m(\cos n\varphi).$$

VII. Kanonische Invarianten

Unter „kanonischen Invarianten" versteht man Funktionen von kanonischen Variablen dynamischer Systeme, die ihren Wert nicht ändern, wenn die Variablen einer beliebigen kanonischen Transformation unterworfen werden. So sind z. B. die HAMILTONschen Funktionen kanonischer Systeme von Differentialgleichungen kanonisch invariant, wenn sie die Zeit bzw. die unabhängige Variable nicht explizite enthalten.

Insbesondere sind die POISSONschen Klammerausdrücke

$$(X, Y)_{x,y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial y_i} - \frac{\partial X}{\partial y_i} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \right)$$

kanonisch invariant, wenn $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ irgend zwei analytische Funktionen der $2n$ kanonischen Variablen x, y sind. Vollzieht man die kanonische Transformation $x, y \to q, p$, so wird der neue Wert der POISSONschen Klammer

$$(X, Y)_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right)$$

sein, und es ist

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} + \frac{\partial X}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right).$$

Das gleiche gilt für die partiellen Ableitungen von Y. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
(X, Y)_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ & \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right) - \\
& - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial p_i} \right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) \Bigg\} = \\
= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ & \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) + \\
& + \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) + \\
& + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial Y}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} - \frac{\partial y_j}{\partial p_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) + \\
& + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial Y}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial p_i} - \frac{\partial y_j}{\partial p_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) \Bigg\} = \\
= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ & \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial x_k} (x_j, x_k) + \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial y_k} (x_j, y_k) + \\
& + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial Y}{\partial x_k} (y_j, x_k) + \frac{\partial X}{\partial y_j} \frac{\partial Y}{\partial y_k} (y_j, y_k) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber nach (XV;17) für kanonische Variable

$$(x_j, x_k) = (y_j, y_k) = 0,$$

$$(x_j, y_k) = -(y_j, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = k, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq k, \end{cases}$$

woraus die Behauptung

$$(X, Y)_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial y_i} - \frac{\partial X}{\partial y_i} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \right) = (X, Y)_{x,y}$$

folgt.

VIII. Nach Redaktionsschluß eingegangene Zusätze

Vorbemerkung (Von Peter Stumpff)

Aus technischen Gründen konnte nur eine Umbruchkorrektur gelesen werden. Hierbei habe ich folgende Informationsquellen berücksichtigt: Die von meinem Vater Karl Stumpff hinterlassene Zweitschrift des Manuskripts mit zugehörigen Entwürfen und Notizen, seine Korrespondenz mit Dr. Jean Meffroy sowie eine mir vom Verlag freundlicherweise überlassene Photokopie des Verlagsmanuskripts. Die zwischen diesen Quellen bestehenden Diskrepanzen waren glücklicherweise in den meisten Fällen trivialer Natur. Nur wo dies nicht der Fall war, habe ich durch Nachrechnen in der näheren oder weiteren Umgebung der betreffenden Stellen oder durch Heranziehen der mir verfügbaren Literatur eine Aufklärung zu erreichen versucht. Soweit der in den Umbruchbögen vorgesehene Platz ausreichend war, habe ich Text und Formeln entsprechend geändert oder ergänzt, ohne dies zu vermerken. An einigen wenigen Stellen war dies aber nicht möglich, so daß ich durch Fußnoten auf die in diesem Teil des Anhangs zusammengestellten Zusätze verweisen mußte. — Wie im Vorwort von Karl Stumpff bereits mitgeteilt, wurden die Kapitel XXXII, XXXIV—XXXVI von Dr. Meffroy in französischer Sprache entworfen. Die Korrespondenz zwischen den Autoren umfaßt mehr als 80 Briefe wissenschaftlichen Inhalts und den Austausch vieler Manuskriptentwürfe in französischer bzw. englischer Sprache. Diese äußerst fruchtbare Zusammenarbeit begann Anfang 1969 und erreichte ihren Höhepunkt erst in den Monaten vor meines Vaters Tod; sie war durch die räumliche Trennung der Autoren und die daraus folgende zeitraubende Notwendigkeit zur brieflichen Lösung aller auftauchenden Probleme sehr erschwert und wurde zudem überschattet durch die zunehmende Verschlechterung des Befindens meines Vaters. — Dr. Meffroys ursprüngliche Konzepte waren viel umfangreicher, als es der verfügbare Platz erlaubte. Mein Vater mußte daher eine Auswahl treffen, wobei er sich von dem Gesichtspunkt leiten ließ, der das Gesamtwerk wesentlich beeinflußt hat: nämlich sich auf solche Gegenstände zu beschränken, die auf dem verfügbaren Platz genügend klar und verständlich dargestellt werden können. Die Korrekturen dieser Kapitel wurden zuerst von mir, dann abschließend von Dr. Meffroy gelesen; dabei ergab sich für Dr. Meffroy die Notwendigkeit zur Verfassung zweier weiterer, klärender Zusätze (5 und 6). Den ebenfalls auf Dr. Meffroy zurückgehenden Zusatz 7 hatte mein Vater noch selber formuliert; er hatte ihn offensichtlich noch in den Text auf S. 390 einfügen lassen wollen. Da dies technisch nicht mehr möglich war, erscheint er in diesem Teil des Anhanges, wobei ich die vorkommenden Gleichungen mit (XXXII; 80a—80h) durchnumeriert habe, um den sehr wesentlichen Zusammenhang mit dem Text auf S. 390 im Anschluß an die Gleichung (XXXII; 80) hervorzuheben.

Zusatz 1 (vgl. die Fußnote auf S. 197)

Zur besseren Klarstellung der Bedeutung der Operatoren $\bar{R}$ bzw. $\overline{\partial R/\partial \zeta}$ mögen die folgenden Bemerkungen dienen. Es ist $s = q \sin \Upsilon - p \cos \Upsilon$ eine ideale Koordinate, somit $ds/dt = q \cos \Upsilon + p \sin \Upsilon$ und auch $du/dt = r_0 (q \cos \Upsilon + p \sin \Upsilon)/a_0$. Man erhält u aus du/dt, indem man q,p konstant läßt. Die Funktion du/dt ist aber von t sowohl in den q, p als auch in r_0, v_0 abhängig. Würde man diese Funktion in eine nach trigonometrischen Funktionen der mittleren Anomalie fortschreitende Reihe entwickeln und dann integrieren, so würde sich diejenigen Terme, die zu integrieren, mit denjenigen, die konstant zu halten sind, in unübersichtlicher Weise vermischen. Mit Einführung der Funktionen $R(t, \zeta)$ bzw. $R_0(t, \tau)$ werden diese Terme getrennt und erst nach erfolgter Integration wieder als Funktion miteinander vereinigt. — Ähnliches gilt für $\overline{W}$, $\overline{\partial W/\partial \zeta}$ im Zusammenhang mit dv/dt, da auch v ideal ist.

Zusatz 2 (vgl. die Fußnote auf S. 267)

In dieser Formel (XXIX; 75) ist die Zeit t so eingeführt worden, daß $t = 0$ ist im Perihel der intermediären Bahn. Ist dies nicht der Fall, sondern im Perihel $t = t_0 \neq 0$, so tritt eine Konstante $3t_0(K_1 ae - K_3)$ hinzu, die mit K_4 vereinigt werden kann.

Zusatz 3 (vgl. die Fußnote 3 auf S. 316)

Sowohl hier wie auch loc. cit. (NASA TN D-4447) ist die Bezeichnungsweise des Abschnitts 184 nicht eingehalten; dort war $r''' + \alpha^2 r' = r^2 f(q) = g(q)$ gesetzt worden. Um mit Abschnitt 184 konsistent zu sein, müßten in (XXX; 79) und den folgenden Gleichungen f durch rf, f_0 durch $r_0 f_0$, f' durch $r'f + rf'$ und f_0' durch $r_0' f_0 + r_0 f_0'$ ersetzt werden.

Zusatz 4 (vgl. die Fußnote auf S. 357)

Ein besonders instruktives Beispiel dafür, daß es auch möglich ist, klassische Methoden der allgemeinen Störungsrechnung mit Hilfe iterativer Computerprogramme durchzuführen, hat F. K. SEIDELMANN[1]) an Hand der Störungstheorie von P. A. HANSEN (Kapitel XXVII—XXVIII) gegeben. Frühere Versuche, HANSENS Methode zu programmieren, z. B. der von L. CARPENTER[2]), waren erfolgreich für die Berechnung der Störungen erster Ordnung, erwiesen sich aber fortschreitend komplizierter für Störungen höherer Ordnung, da die Programme für jede Ordnung verschieden waren, also eine iterative Rechnung mittels eines einzigen Programms nicht möglich war. Der Vorteil der iterativen Methode liegt nicht nur darin, daß der gleiche Algorithmus für jeden Iterationsschritt verwendet wird, der zur Mitberücksichtigung der Störungseinflüsse einer

---

[1]) P. K. SEIDELMANN, An iterative method of general perturbations programmed for a computer. Celestial Mech. *2* (1970).

[2]) L. CARPENTER, Computation of general planetary perturbations I—III. NASA TN D-1898 (1963), D-2852 (1965), D-3087 (1966).

höheren Ordnung führt, sondern auch darin, daß die schließlich erreichte Genauigkeit allein auf der Sorgfalt beruht, die dem letzten Schritt der Rechnung gewidmet ist, während sie nicht durch etwaige Ungenauigkeiten der durch die Störungen erster Ordnung verbesserten intermediären Bahn beeinflußt wird. Es wird also nicht nötig sein, ganz von vorn zu beginnen, wenn eine neue Störungsrechnung mit verbesserten Ausgangsdaten vorgenommen werden soll.

Zusatz 5 (vgl. die Fußnote 1 auf S. 360)

Von G. E. O. GIACAGLIA[1]) stammt eine Verfeinerung der VON ZEIPELschen Methode, die in gewisser Weise von dem in Abschnitt 269 behandelten MUSENschen Verfahren abweicht. GIACAGLIAS Analyse hätte wohl verdient, in dieses Kapitel aufgenommen zu werden. Dies war aus Zeitgründen leider nicht mehr möglich. Wir beschränken uns daher auf eine sehr kurze Darstellung der wesentlichen Punkte. Die HAMILTONsche Funktion $F(L, l, \varepsilon)$ eines Systems von $2n$ kanonischen Gleichungen in L_i, l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wobei ε einen kleinen dimensionslosen Parameter bedeutet, sei durch

$$F = \lim_{N\to\infty} F_N, \quad F_X = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k F_k(L, l)$$

gegeben. Die kanonische Änderung der Variablen L, l in L', l' sei definiert durch die erzeugende Funktion $S(L', l, \varepsilon)$ mit $\partial S/\partial L' = l'$, $\partial S/\partial l = L$ und $S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k(L', l)$. Die neue HAMILTON-Funktion $F'(L', l', \varepsilon)$ ist daher identisch gleich F. GIACAGLIA zeigt, daß für jedes $k = 0, 1, 1, \ldots$

$$(1) \qquad F_k - F_k' + \sum_{m=1}^{k} \sum_{(m)} \left(\prod_{p=1}^{N} \sum_{j_p=1}^{n} \right) C(m; j_1, \ldots, j_N) \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{N} \left(\frac{\partial S_{j_p}}{\partial l_{i_p}} \frac{\partial^N F_{k-m}}{\partial L_{i_1} \cdots \partial L_{i_N}} - \frac{\partial S_{j_p}}{\partial L'_{i_p}} \frac{\partial^N F'_{k-m}}{\partial l'_{i_1} \ldots \partial l'_{i_N}} \right) = 0$$

mit

$$C(m; j_1, \ldots, j_N) = \frac{j_1 j_2 \cdots j_N}{m(m - j_1)\,(m - j_1 - j_2) \cdots (m - j_1 - \cdots - j_{N-1})}.$$

Dabei sind $j_1, j_2, \ldots, j_N$ und $m - j_1, m - j_1 - j_2, \ldots, m - j_1 - \cdots - j_{N-1}$ positive ganze Zahlen, die Größe $m - j_1 - \cdots - j_N$ ist identisch gleich Null, und $\sum_{(m)}$ ist eine Summation, die sich auf alle j_p erstreckt, deren Summe gleich m ist.

GIACAGLIA nennt (1) „die VON ZEIPELsche partielle Differentialgleichung", und er erhält aus ihr für jedes k die neue HAMILTONsche Funktion F_k' und die

---

[1]) G. E. O. GIACAGLIA, Notes on the VON ZEIPELS method. GSFC Document X-547-64-161 (1964).

erzeugende Funktion S_k. Unter der weiteren Annahme, daß F' die Variablen $l_1', \ldots, l_p'$ mit $p < n$ eliminiert, erhält er die HAMILTONsche Funktion F' $(L_{10}', \ldots, L_{p0}', L_{p+1}', \ldots, L_n', l_{p+1}', \ldots, l_n')$ mit den willkürlichen Konstanten $L_{10}', \ldots, L_{p0}'$, und zeigt, daß die $2n$ kanonischen Gleichungen in L_i', l_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ für die zwei Fälle $p = n$ und $p = n - 1$ mit elementaren analytischen Methoden lösbar sind. GIACAGLIA nimmt ferner an, daß $L_i - L_i' = O(\varepsilon)$; $l_i - l_i' = O(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sind und daß F_0 nur von $L_1, \ldots, L_q$ abhängt (mit $q < n$), und kommt so auf VON ZEIPELS Ergebnisse. Letztere stellen sich damit als ein Spezialfall der viel allgemeineren und verfeinerten Theorie von GIACAGLIA heraus.

Zusatz 6 (vgl. die Fußnote auf S. 375)

Die Gleichungen (XXXII; 39) und (XXXII; 45) zeigen, daß in VON ZEIPELS Methode für die erzeugende Funktion S', die die langperiodischen Terme eliminiert, folgende Regeln gelten: In einer Theorie erster Ordnung ist sie gegeben durch den Quotienten aus Termen vom Grade 2 und Termen vom Grade 1 bezüglich des kleinen Parameters ε; in einer Theorie zweiter Ordnung ist sie gegeben durch den Quotienten aus Termen vom Grade 2 und Termen vom Grade 1 sowie durch den Quotienten aus Termen vom Grade 3 und Termen vom Grade 1 (immer bezüglich ε). Mit anderen Worten: Die Elimination der langperiodischen Terme mit VON ZEIPELS Theorie erfordert, daß die HAMILTON-Funktion F in einer Theorie erster Ordnung bis zu Termen 2. Grades in ε und in einer Theorie zweiter Ordnung bis zu Termen 3. Grades in ε berechnet werden muß. Bei der Elimination kurzperiodischer Terme ist die Situation verschieden; hier braucht die erzeugende Funktion S, mit der die Elimination vorgenommen wird, in einer Theorie erster Ordnung nur bis zu Termen 1. Grades in ε und in einer Theorie zweiter Ordnung nur bis zu Termen 2. Grades in ε berechnet zu werden. Man sieht dies an (XXXII; 9) und (XXXII; 16), die den Gleichungen (XXXII; 39) und (XXXII; 45) entsprechen. Insofern ist also die Elimination der langperiodischen Terme komplizierter als die der kurzperiodischen; sie verlangt sogar die Erfüllung der Bedingung $\hat{F}_1' \equiv 0$ (vgl. die erste der Gleichungen (XXXII; 36)), während bei der Elimination der kurzperiodischen Terme eine ähnliche Bedingung nicht besteht.

Zusatz 7 (vgl. die Fußnote auf S. 390)

Wenn wir $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$ setzen und Terme von höherer Ordnung als ε^2 vernachlässigen, so können wir (XXXII; 79) in der Form

$$\text{(XXXII; 80a)} \quad \begin{cases} x_j = \xi_j + \dfrac{\partial S_1}{\partial \eta_j} + \dfrac{\partial S_2}{\partial \eta_j} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \eta_j}, S_1\right) + O(\varepsilon^3), \\ y_j = \eta_j - \dfrac{\partial S_1}{\partial \xi_j} - \dfrac{\partial S_2}{\partial \xi_j} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \xi_j}, S_1\right) + O(\varepsilon^3) \end{cases}$$

schreiben. Ihnen stehen die Gleichungen (XXXII; 80) der VON ZEIPELschen Theorie gegenüber, die man auch

$$x_j = \xi_j + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_j}\left(\xi, \eta - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}\right), \quad y_j = \eta_j - \frac{\partial \tilde{S}'}{\partial \xi_j}\left(\xi, \eta - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}\right)$$

schreiben kann, oder, wenn wir bis zur 2. Ordnung in ε entwickeln,

$$\text{(XXXII; 80b)} \quad \begin{cases} x_j = \xi_j + \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial y_j} + \dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial y_j} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial y_j \, \partial \eta_k} + O(\varepsilon^3), \\ y_j = \eta_j - \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_j} - \dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \xi_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial \xi_j \, \partial \eta_k} + O(\varepsilon^3). \end{cases}$$

Setzt man in (XXXII; 80a und 80b) die Ausdrücke für $x_j - \xi_j$. $y_j - \eta_j$ gleich, so erhält man bis auf Ausdrücke von höherer als 2. Ordnung

$$\frac{\partial S_1}{\partial \eta_j} + \frac{\partial S_2}{\partial \eta_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_j}, S_1\right) = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial y_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial y_j \partial \eta_k},$$

$$-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_j} - \frac{\partial S_2}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_j}, S_1\right) = -\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \xi_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial \xi_j \, \partial \eta_k}.$$

Beachten wir, daß $y_j - \eta_j = O(\varepsilon)$ ist, und nehmen wir an, daß $\partial \tilde{S}_1/\partial y_j$, $\partial \tilde{S}_2/\partial y_j$ kontinuierlich in y_j sind, so erhalten wir für die beiden ersten Ordnungen

$$\text{(XXXII; 80c)} \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \eta_j}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_j},$$

$$\text{(XXXII; 80d)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_2}{\partial \eta_j} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \eta_j}, S_1\right) = \dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \eta_j} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial y_j \, \partial \eta_k} \\ -\dfrac{\partial S_2}{\partial \xi_j} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \xi_j}, S_1\right) = -\dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \xi_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial \xi_j \, \partial \eta_k}. \end{cases}$$

Aus (XXXII; 80c) folgt, wenn wir die willkürliche Integrationskonstante fortlassen,

$$\text{(XXXII; 80e)} \qquad S_1 = \tilde{S}_1.$$

Ersetzt man also S_1 durch $\tilde{S}_1$ auf der linken Seite von (XXXII; 80d), so erhält man nach leichter Reduktion

$$\text{(XXXII; 80f)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_2}{\partial \eta_j} = \dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \eta_j} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \eta_k}\right), \\ -\dfrac{\partial S_2}{\partial \xi_j} = -\dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \xi_j} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k} \dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \eta_k}\right) \end{cases}$$

oder, wiederum ohne die entbehrliche Integrationskonstante,

$$\text{(XXXII; 80g)} \qquad S_2 = \tilde{S}_2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi_k}\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \eta_k}.$$

Die Gleichungen (XXXII; 80e und 80g) ergeben den Zusammenhang zwischen S_1, S_2 (HORI) und $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ (VON ZEIPEL), wenn in den letzteren Funktionen y durch η ersetzt wird.

Diese Rechnung kann leicht bis zu höheren Ordnungen in ε fortgesetzt werden. In der Theorie der Planeten und der künstlichen Satelliten ist es nicht nötig, über die dritte Ordnung hinauszugehen.

Ferner erhalten wir aus (XXXII; 80e und 80g)

$$\text{(XXXII; 80h)} \qquad \tilde{S}_2 = S_2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S_1}{\partial \xi_k}\frac{\partial S_1}{\partial \eta_k}.$$

In Gleichung (XXXII; 80g) wird S_2 durch $\tilde{S}_1$ und $\tilde{S}_2$ ausgedrückt, während umgekehrt $\tilde{S}_2$ in Gleichung (XXXII; 80h) aus S_1 und S_2 folgt.

LITERATURVERZEICHNIS

A. Lehrbücher und Gesamtdarstellungen

ANDOYER, H.: Cours de mécanique céleste, Band I und II. Paris 1923 und 1926.

BAKER jr., R. L. M., und M. W. MAKEMSON: An introduction to astrodynamics. New York—London 1960.

BRENDEL, M.: Theorie der kleinen Planeten, Band I und II. Berlin 1898 und 1908.

BROUWER, D., und G. M. CLEMENCE: Methods of celestial mechanics. New York 1961.

BROWN, E. W.: An introductory treatise on the lunar theory (1896); Neudruck New York 1960 (Dover Publications).

—, und C. A. SHOOK: Planetary theory. London—New York 1933; Neudruck New York 1964 (Dover Publications).

BUCERIUS, H.: Vorlesungen über Himmelsmechanik, Band I und II. Mannheim 1966.

CHILMI, H. F.: Qualitative Methoden beim n-Körperproblem der Himmelsmechanik. Berlin 1961.

DANBY, J. M. A.: Fundamentals of celestial mechanics. New York 1962.

DZIOBEK, O.: Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung. Leipzig 1888; Nachdruck (engl.) New York 1962 (Dover Publications).

—: Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. 2. Braunschweig 1902.

GRÖBNER, W.: Die LIE-Reihen und ihre Anwendungen. Berlin 1960.

HALPHEN, G. H.: Traité des fonctions elliptiques, Band II. Paris 1888.

HANSEN, P. A.: Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Leipzig 1857—1859.

HAPPEL, H.: Das Dreikörperproblem. Leipzig 1941.

HARZER, P.: Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten. Leipzig 1895.

KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1931.

KOWALEWSKI, G.: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909.

LANCZOS, C.: Applied analysis. London 1957.

LEGENDRE, A. M.: Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, Band 2. Paris 1829.

LIE, S.: Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig 1888.

MAGNUS, W., und F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1948.

OGORODNIKOV, K. F.: Dynamics of stellar systems. Oxford 1965 (Original: Огородников, К. Ф.: Динамика звездных систем. Moskau 1958).

PLUMMER, H. C.: An introductory treatise on dynamical astronomy (1918); Neudruck New York 1960 (Dover Publications).

POINCARÉ, H.: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Band I bis III. Paris 1892 bis 1899; Neudruck New York 1960 (Dover Publications).

Pontécoulant, de: Théorie analytique du système du monde, Band 4. Paris 1846.

Siegel, C. L.: Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956 (russ. Übers.: Зигель, К. Л.: Лекции по небесной механике. Moskau 1959).

Smart, W. M.: Celestial mechanics. London—New York—Toronto 1953.

Stumpff, K.: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937.

—: Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung. Berlin 1939.

Szebehely, V.: Theory of orbits — The restricted problem of three bodies. New York 1967.

Tisserand, F.: Traité de mécanique céleste, Band 4. Paris 1896.

Tricomi, F. G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

Wintner, A.: The analytical foundation of celestial mechanics. London 1941.

B. Abhandlungen und kleinere Veröffentlichungen

Abkürzungen:

AIAA	= American Institute of Aeronautics and Astronautics
A.J.	= Astronomical Journal, New York
A.J.UdSSR	= Astronomisches Journal der UdSSR (Астономический Журнал), Moskau
A.N.	= Astronomische Nachrichten, Berlin
Astron. Papers	= Astronomical Papers of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Washington
B.A.	= Bulletin astronomique, Paris
B.A.W.	= Bayerische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse (Abhandlungen bzw. Sitzungsberichte), München
B.I.A.	= Bulletin des Instituts für theoretische Astronomie (Бюллетень Института теоретической Астрономии), Leningrad
BSRL	= Boeing Scientific Research Laboratories
C.R.	= Comptes rendus des Séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris
GSFC	= Goddard Space Flight Center (NASA), Greenbelt/Ma.
IBM	= International Bureau Machines Corporation, Cambridge/Mass.
J.O.	= Journal des Observateurs, Paris
JPL	= Jet Propulsion Laboratories, Seattle/Wash.
M.N.	= Monthly Notices of the royal astronomical Society, London
NASA CR	= National Aeronautics and Space Administration Contractor Reports
NASA TN	= National Aeronautics and Space Administration Technical Notes
NASA TR	= National Aeronautics and Space Administration Technical Reports

Adams, J. C.: On the motion of the moon's node in the case when the orbits of the sun and moon are supposed to have no eccentricities, and when their mutual inclination is supposed to be indefinitely small. M. N. *38*, 43—49 (1877).

ARENSTORF, R. F.: A new method of perturbation theory and its application to satellite problems of celestial mechanics. J. reine angew. Math. *221*, 113 (1966).
—: New periodic solutions in the plane three body problem corresponding to elliptic motion in the lunar theory. J. differential Equations *4*, 202 (1968).

BARTON, D.: On literal developments of the lunar theory with the aid of a computer. A. J. *72*, 1281—1287 (1967).

BILIMOVITCH, A.: Über die Anwendung der PFAFFschen Methode in der Störungstheorie. A. N. *273*, 161 (1942).

BRENDEL, M.: Zur Theorie der großen Planeten. A. N. *250*, 177 (1933).
—: Über eine neue Methode zur Ermittlung der Planetenstörungen. J. reine angew. Math. *172*, 219 (1935).

BROUCKE, R.: Computation of perturbations in rectangular coordinates. JPL Space Programs Summary 37/49, Bd. 3.
—: Solution of the *N*-body problem with recurrent power series. JPL Space Programs Summary 37/37, Bd. 4.
—: Regularization of the plane restricted three body problem. Icarus *4*, 8 (1965).
—: On changes of independent variable in dynamical systems and application to regularization. Icarus *7*, 221 (1967).
—: Stability of periodic orbits in the elliptic three body problem. AIAA J. *7*, 1003 (1969).
—: Perturbations in rectangular coordinates by iteration. Celestial Mech. *1*, 110 (1969).

BROUWER, D.: Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates. A. J. *51*, 37 (1944).
—, und G. M. CLEMENCE: Numerical development of the disturbing function by correction of an approximate development. A. J. *52*, 64 (1946).

BROWN, E. W.: On the calculation of the principal parts of the motions of the lunar perigee and node. A. J. *45*, 84—88 (1936).
—: The stellar problem of three bodies. M. N. *97*, 56 (1936).
—, und D. BROUWER: Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis. Trans. astron. Observ. Yale 6, Part 5, 73—157 (1937).

BRUMBERG, V. A.: The series of polynomials in the problem of three bodies. NASA CR 5-12457 (1966).

BURDET, C. A.: Regularization of the two body problem. J. appl. Math. Physics *18*, 434 (1967).
—: Theory of KEPLER motion — The general perturbed two-body problem. J. appl. Math. Physics *19*, 345 (1968).

CARPENTER, L.: Computation of general planetary perturbations, Part I—III. NASA TN D-1898 (1963); D-2852 (1965); D-3078 (1966).
—: Planetary perturbations in CHEBYSHEV series. NASA TN D-3168 (1966).
—, und K. STUMPFF: Über periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem und in der Nähe der Kommensurabilitäten vom Typus $(k + 1)/k$. A. N. *291*, 25 (1968).

CHARNOW, M. L.: The development of HANSEN's coordinates in the lunar problem by the method of iteration. NASA TN D-3378 (1966).

CLEMENCE, G. M.: Unsolved problems in satellite theory. US Naval Observ. Reprint No. 20 (1961).

ARENSTORF, R. F.: A new method of perturbation theory and its application to satellite problems of celestial mechanics. J. reine angew. Math. *221*, 113 (1966).
—: New periodic solutions in the plane three body problem corresponding to elliptic motion in the lunar theory. J. differential Equations *4*, 202 (1968).

BARTON, D.: On literal developments of the lunar theory with the aid of a computer. A. J. *72*, 1281—1287 (1967).

BILIMOVITCH, A.: Über die Anwendung der PFAFFschen Methode in der Störungstheorie. A. N. *273*, 161 (1942).

BRENDEL, M.: Zur Theorie der großen Planeten. A. N. *250*, 177 (1933).
—: Über eine neue Methode zur Ermittlung der Planetenstörungen. J. reine angew. Math. *172*, 219 (1935).

BROUCKE, R.: Computation of perturbations in rectangular coordinates. JPL Space Programs Summary 37/49, Bd. 3.
—: Solution of the *N*-body problem with recurrent power series. JPL Space Programs Summary 37/37, Bd. 4.
—: Regularization of the plane restricted three body problem. Icarus *4*, 8 (1965).
—: On changes of independent variable in dynamical systems and application to regularization. Icarus *7*, 221 (1967).
—: Stability of periodic orbits in the elliptic three body problem. AIAA J. *7*, 1003 (1969).
—: Perturbations in rectangular coordinates by iteration. Celestial Mech. *1*, 110 (1969).

BROUWER, D.: Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates. A. J. *51*, 37 (1944).
—, und G. M. CLEMENCE: Numerical development of the disturbing function by correction of an approximate development. A. J. *52*, 64 (1946).

BROWN, E. W.: On the calculation of the principal parts of the motions of the lunar perigee and node. A. J. *45*, 84—88 (1936).
—: The stellar problem of three bodies. M. N. *97*, 56 (1936).
—, und D. BROUWER: Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis. Trans. astron. Observ. Yale 6, Part 5, 73—157 (1937).

BRUMBERG, V. A.: The series of polynomials in the problem of three bodies. NASA CR 5-12457 (1966).

BURDET, C. A.: Regularization of the two body problem. J. appl. Math. Physics *18*, 434 (1967).
—: Theory of KEPLER motion — The general perturbed two-body problem. J. appl. Math. Physics *19*, 345 (1968).

CARPENTER, L.: Computation of general planetary perturbations, Part I—III. NASA TN D-1898 (1963); D-2852 (1965); D-3078 (1966).
—: Planetary perturbations in CHEBYSHEV series. NASA TN D-3168 (1966).
—, und K. STUMPFF: Über periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem und in der Nähe der Kommensurabilitäten vom Typus $(k + 1)/k$. A. N. *291*, 25 (1968).

CHARNOW, M. L.: The development of HANSEN's coordinates in the lunar problem by the method of iteration. NASA TN D-3378 (1966).

CLEMENCE, G. M.: Unsolved problems in satellite theory. US Naval Observ. Reprint No. 20 (1961).

Clenshaw, C. W.: The numerical solution of linear differential equations in Chebyshev series. Proc. Cambridge philos. Soc. *53*, 134 (1957).

Contopoulos, G.: On the existence of a third integral of motion. Contributions astron. Dep. Univ. Thessaloniki No. 10 (1963).

Cooley, J. W.: The fast Fourier transform algorithm and its applications. Proc. SHARE *XXIX*, 3 — 145, Miami (Florida) 1967.

Danby, J. M. A.: Integration of the equations of planetary motion in rectangular coordinates. A. J. *67*, 287 (1962).

Dederick, K. G., und E. L. Chu: On n-dimeńsional Taylor and Lagrange operators. Arch. rat. Mech. Analysis *16*, 385 (1964).

Deprit, A.: Canonical transformations depending on a small parameter. BSRL (1968); Celestial Mech. *1*, 12 (1969).

—, und A. Deprit-Bartholomé: The matrizants of the Keplerian motion. B. A. (3) *3*, 315 (1968).

—, und J. Henrard: The Trojanian manifold — Survey and conjectures. BSRL math. Note No. 622 (1969).

—, J. Henrard, J. Palmore und J. F. Price: The Trojan manifold in the system Earth — Moon. M. N. *137*, 311 (1967).

—, J. Henrard, J. F. Price und A. Rom: Birkhoff's normalization. BSRL math. Res. (1968); Celestial Mech. *1*, 222 (1969).

—, und E. Rabe: Periodic Trojan orbits for the resonance 1/12. A. J. *74*, 317 (1969).

—, und A. Rom: The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities. Celestial Mech. *2*, 166 (1970).

Dubošin, G. N.: (Über gegenwärtige Probleme der Himmelsmechanik). B. I. A. *11*, 1 (1967) (russ. mit franz. Referat); Veröff. staatl. astron. Sternberg-Inst. Moskau *36*, 3 (1967) (russ.).

Eckert, W. J., D. Brouwer und G. M. Clemence: Coordinates of the five outer planets 1653—2060. Astron. Papers *12* (1951).

—, und D. A. Eckert: The literal solution of the main problem of the lunar theory. A. J. *72*, 1299 (1967).

Eginitis, D.: Mémoires sur la stabilité du système solaire. Ann. Observ. Paris *19*, H. 1 bis H. 16 (1889).

Fleury, W.: Integrationstheorie von Krylow-Bogoljubow und gestörte Kepler-Bewegung. Zürich 1969.

Giacaglia, G. E. O.: Notes on the von Zeipel's method. GSFC Document X-547-64-161 (1964).

Good, I. J.: Generalization to several variables of Lagrange's equation. Proc. Cambridge philos. Soc. *56*, 367 (1960).

Goodyear, W.: A general method of variation of parameters for numerical integration. A. J. *70*, 524 (1965).

—: Completely general closed-form solution for coordinates and partial derivatives of the two-body problem. A. J. *70*, 189 (1965).

—: A general method for the computation of Cartesian coordinates and partial derivatives of the two-body problem. NASA CR No. 522 (1966).

Gorjačev, N. N.: (Über die Halphensche Methode der Berechnung säkularer Störungen)» Trudy Univ. Tomsk (1937) (russ.).

HAGIHARA, Y.: Application of a matrix method to integration problems in celestial mechanics, in: Festschrift für E. STRÖMGREN. Kopenhagen 1940, S. 58.

HARETU, S. C.: Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. Ann. Observ. Paris *18*, J. 1—J. 39 (1885).

HERRICK, S.: The fixing of the Gaussian gravitational constant and the corresponding geometrical gravitational constant, in: J. KOVALEVSKY ed., Le système des constantes astronomiques (21. Symposium der IAU), Paris 1965, S. 95.

HILL, G. W.: A method of computing absolute perturbations. A. N. *83*, 209 (1874).
—: Researches in the lunar theory. Amer. J. Math. *1*, 5, 23, 129 und 245 (1878).

HORI, G. I.: A new approach to the solution of the main problem of the lunar theory. A. J. *68*, 125 (1963).
—: Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. Publ. astron. Soc. Japan *18*, 287 (1966).
—: Non-linear coupling of two harmonic oscillators. Publ. astron. Soc. Japan *19*, 229 (1967)

JACOBI, C. G.: Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommende Gleichung numerisch aufzulösen. Crelles J. reine angew. Math. *30*, 51 (1846).

JAROV-JAROVOJ, M. S.: On the application of HANSEN's ideal coordinates. A. J. UdSSR *37*, 908 (1960) (russ. mit engl. Referat).

KAMEL, A. A.: Expansion formulae in canonical transformations. Celestial Mech. *1*, 190 (1969).

KIKUCHI, S.: Commensurability and critical inclination. A. N. *289*, 241 (1967).

KUSTAANHEIMO, P.: Spinor ring algebra. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 92 (1962).
—: Über die energetischen Identitäten der KEPLER-Bewegung. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 99 (1963).
—: Spinor regularization of the KEPLER motion. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 102 (1964).
—: Die Spinordarstellung der energetischen Identitäten der KEPLER-Bewegung. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 111 (1966).
—: Relativistic spinor regularization of the KEPLER motion and relativistic motors. Ann. Acad. sci. Fennicae *A 6*, 250 (1967).
—, und V. S. NUOTI: Lectures on celestial mechanics I. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 117 (1966).
—, und V. S. NUOTI: Relativistic theories of gravitation I. One-body problem. Publ. astron. Observ. Helsinki No. 128 (1967).
—, und E. STIEFEL: Perturbation theory of KEPLER motion based on spinor regularization. J. reine angew. Math. *218*, 204 (1965).

LAHAYE, E.: Sur la résolution du problème des trois corps par des itérations convergentes réelles. Publ. Inst. Astron. Bruxelles No. 4 (1937).

LEVERRIER, U. J. J.: Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales. J. Math. (1) *5*, 220 (1840).
—: Recherches Astronomiques. Ann. Observ. Paris, Mém. 1, 2, 4—6, 10—14 (1855—1877).

LEVI-CIVITÀ, T.: Sur la régularisation du problème des trois corps. Acta math. *42*, 99 (1918).
—: Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. Opere mat. [Bologna] *2*, 411 (1956).

MEFFROY, J.: Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire. B. A. (2) *19*, 1 (1955).

MEFFROY, P.: Sur l'existence effective du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. B. A. (2) *21*, 261 (1958).
—: Partie périodique de la fonction perturbatrice et nouveau terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. B. A. (2) *23*, 149 (1960).
—: Sur l'élimination des termes à courte période par la méthode de VON ZEIPEL dans une théorie planétaire du premier ordre. C. R. *260*, 1571 und 1863 (1965).
—: Sur un mode de résolution direct des équations canoniques résultant de l'élimination des termes à courte période d'une théorie planétaire générale du premier ordre. C. R. *263*, 145 (1966).
—: On VON ZEIPEL's method in general planetary theory. Research in Space Science, Special Report No. 220, Smithsonian astrophys. Observ. Cambridge/Mass. (1966).
—: Sur la méthode de VON ZEIPEL en théorie planétaire générale. B. A. (3) *2*, 343 (1967).
—: On the elimination of the short period terms of a first order general planetary theory through VON ZEIPEL's method. GSFC Document X-641-67-318, 1967.
—: On a generalization of the development of the disturbing function. GSFC Document X-641-67-442 (1967).
—: On a generalization of the elimination of the short period terms of a first order general planetary theory through VON ZEIPEL's method and HORI canonical variables. GSFC Document X-641-68-230 (1968).
—: Sur un nouveau processus d'élimination des termes périodiques par la méthode de VON ZEIPEL pour les théories du premier et du second ordre. C. R. *269*, 309 (1969).
—: Sur une solution analytique des équations canoniques de HORI résultant de l'élimination des termes à courte période dans une théorie planétaire générale du premier ordre. C. R. *269*, 1047 (1969).
—: Sur une généralisation de la solution analytique du système d'équations canoniques de HORI résultant de l'élimination des termes à courte période d'une théorie planétaire générale du premier ordre. C. R. *270*, 166 (1970).

MERSMAN, W. A.: A unified treatment of lunar theory and artificial satellite theory. NASA TN D-5459 (1969).
—: A new algorithm for the LIE transformation. SIDA (Summer Institute of dynamical astronomy), Austin/Texas 1970.

MUSEN, P.: Application of HANSEN's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth. J. geophys. Res. *64*, 2271 (1959).
—: On a modification of HANSEN's lunar theory. J. geophys. Res. *68*, 1439 (1963).
—: A discussion of HALPHEN's method of secular perturbations and its application to the long range effects in the motion of celestial bodies. Rev. Geophysics *1*, 85 (1963).
—: On a modification of HILL's method of general planetary perturbations. J. O. *47*, 73 (1964).
—: On the general perturbations of the position vectors of a planetary system. J. O. *48*, 11 (1965).
—: On the high order effects in the methods of KRYLOV-BOGOLUBOV and POINCARÉ. J. astronaut. Sci. *12*, 129 (1965).
—: Some possible modifications of BROUWER's theory of the general perturbations in rectangular coordinates. J. geophys. Res. *71*, 5997 (1966).
—: On the numerical theory of satellites with highly inclined orbits. J. O. *49*, 54 (1966).
—: Application of KRYLOV-BOGOLUBOV method to the solution of the stellar three body problem. J. astronaut. Sci. *13*, 177 (1966).
—: Investigations in HANSEN's planetary theory. B. A. (3) *3*, 361 (1968).

MUSEN, P.: On the POINCARÉ-VON ZEIPEL and BROWN-SHOOK method of the elimination of the short period terms from a Hamiltonian. NASA TN D-4399 (1968).
—: A discussion of HILL's method of secular perturbations and its application to the determination of the zero-rank effects in non-singular vectorial elements of planetary motion. Celestial Mech. *2*, 41 (1970).
—, and L. CARPENTER: On the general planetary perturbations in rectangular coordinates. J. geophys. Res. *68*, 2727 (1963).

POINCARÉ, H.: Sur les déterminants d'ordre infini. Bull. Soc. math. France *14*, 77.

RABE, E.: Eine zweckmäßige Methode zur Berechnung der allgemeinen Störungen der Planeten. A. N. *273*, 209 (1942).

RÖSSLER, M.: Analytische Störungstheorie im Dreikörperproblem mit Hilfe von regularisierenden Variablen. Zürich 1966.

SCHEIFELE, G.: Verallgemeinerte kanonische Transformation zur Abbildung von KEPLER-Bewegungen auf harmonische Oszillatoren und zugehörige Störungstheorie. Zürich 1968.

SCHUBART, J., und P. STUMPFF: On an N-body problem of high accuracy for the computation of ephemerides of minor planets and comets. Veröff. astron. Recheninst. Heidelberg Nr. 18, Karlsruhe 1966.

SCHÜTTE, K., und P. ESCHER: Numerische Untersuchungen und Vorausberechnungen für einfache Rendez-vous-Manöver bei elliptischen Zielbahnen. Astronautik *1*, 1 (1969).

SCONZO, P.: Application of LIE series to the solutions of celestial mechanics problems. Publ. IBM Corp., Cambridge/Mass. 1967.
—: A heuristic approach to the introduction of a universal variable. Mem. Soc. astron. Ital. *38*, 85 (1967).
—, A. R. LE SCHACK und R. TOBEY: Symbolic computation of f- and g-series by computer. A. J. *70*, 269 (1965).

SEIDELMANN, P. K.: An iteration method of general perturbations programmed for a computer. Celestial Mech. *2*, 134 (1970).

SHNIAD, H.: The equivalence of VON ZEIPEL mappings and LIE transforms. Celestial Mech. *2*, 114 (1970).

STEFFENSEN, J. F.: On the restricted problem of three bodies. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. *30*, No. 18 (1956).
—: On the problems of three bodies in the plane. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. *31*, No. 3 (1957).

STIEFEL, E., M. RÖSSLER, J. WALDVOGEL und C. A. BURDET: Report to NASA on methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics. Zürich 1966.

STUMPFF, K.: Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. A. N. *273*, 105 (1942).
—: Hauptgleichung und Entwicklungssätze in punktmechanischen Problemen, insbesondere in der Zweikörperbewegung. A. N. *280*, 97 (1952).
—: Neue Wege zur Bahnberechnung der Himmelskörper. Fortschr. Physik *1*, 554 (1954).
—: On the application of LIE series to the problems of celestial mechanics. NASA TN D-4460 (1968).
—: On the application of spinors to the problems of celestial mechanics. NASA TN D-4447 (1968).
—, und E. H. WEISS: A fast method of orbit computation. NASA TN D-4470 (1968).

Stumpff, K. und E. H. Weiss: Application of an N-body reference orbit. J. astronaut. Sci. *15*, 257 (1968).

Stumpff, P.: A numerical analysis of the motion of periodic comet Brooks 2, in: Chebotarev, G. A., et al. ed.: The motion, evolution of orbits, and origin of comets (45. Symposium der IAU). Dordrecht 1972, S. 156.

Sundman, K. F.: Démonstration nouvelle du théorème de Poisson sur l'invariabilité des grands axes, in: Festschrift für E. Strömgren, Kopenhagen 1940, S. 263.

Szebehely, V.: Selection of regularizing functions. A. J. *72*, 370 (1967).

Waldvogel, J.: Die Verallgemeinerung der Birkhoffschen Regularisation für das räumliche Dreikörperproblem. Zürich 1966; B. A. (3) *2*, 295 (1967).

Weiss, E. H.: A new method for computing the state transition matrix. J. astronaut. Sci. *16*, No. 3, 121—125 (1969).

Wilkens, A.: Über das Problem der mehrfachen Kommensurabilitäten im Sonnensystem. Sitz.-Ber. B. A. W. 71 (1933).

—: Die Erweiterung des Laplace-Lagrangeschen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die kommensurablen und nahezu kommensurablen Bewegungsformen. Sitz-Ber. B. A. W. 195 (1934).

—: Untersuchungen zur Hekuba-Bewegung und analoger Bewegungsformen. Abh. B. A. W. NF, No. 27 (1935).

—: Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems. Abh. B. A. W. 61 (1959).

—: Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegung der Planetoiden des Hekuba-Typs im Raum. Sitz.-Ber. B. A. W. math.-nat. Klasse, 101—127 (1963).

Witt, G.: Die Koeffizienten der Störungsfunktion. A. N. *269*, 74 (1939).

Zeipel, H. von: Entwicklung der Störungsfunktion. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band VI. 2.

—: Recherches sur le mouvement des petites planètes. Stockholm 1916—1917.

NAMEN- UND SACHREGISTER

Abplattung 17, 454
Abstand Erde—Mond, mittlerer 407
Abstände des Mondes und der Sonne, Verhältnis der mittleren geozentrischen 18
Abstandsmessung mittels Radar 407
ADAMS, J. C. 447, 455, 487
Affinoren 81
—, Dyadeneigenschaft 81
—, nichtdyadische 83, 85
—, Vertauschbarkeit 82f.
ALEMBERT, J. LE ROND D' 426
Algorithmus, DEPRITscher 540, 550
Algorithmus, MERSMANscher Dreiecks- 544ff., 550
Amplituden der Störungsterme des Hauptteils 98f.
—, Divisoren 99
analytische Funktionen, Umkehrung mittels LIE-Reihen 71ff.
ANDOYER, H. 368
Anfangsbedingungen, Zusammenhang mit den Integrationskonstanten 268, 274f.
Anfangswerte der Bahn 30f.
Anomalie, mittlere, Differentialgleichung für die Störung 36
—, wahre 27
Apsidenbewegung, säkulare Beschleunigung 17
Apsidenrichtung, Bestimmung 300
Argument der Breite 27
—, mittleres 419
Assoziativgesetz der Operatorenrechnung 60
Astronomische Einheit 23
Aufsuchungsephemeride 30

Bahn, Anfangswerte 30f.
—, genäherte 319
—, geradlinige 299
—, intermediäre *siehe* intermediäre Bahnen
—, oskulierende *siehe* oskulierende Bahnen
—, periodische *siehe* periodische Bahnen
Bahnebene, Abrollen der intermediären auf der gestörten 171
Bahnebene, Krümmung der gestörten 173
—, instantane 27
— —, Neigung gegen die Ekliptik 27
—, intermediäre 39, 115
—, Neigung *siehe* Neigung der Bahnebene
—, oskulierende 26f.
—, wahre Länge in der gestörten 28
Bahnelemente der oskulierenden Bahn, gestörte 26
—, intermediäre 42
—, kanonische 26, 247
—, mittlere 275
—, oskulierende 38, 111
—, Störungen 30
Bahnneigung *siehe* Neigung der Bahnebene
BARTON, D. 533
Beschleunigung, säkulare 17
BESSELsche Funktionen 206f., 276, 278, 280, 504
Bewegung, gleichförmige Kreis- 25
—, harmonische 292
— in widerstehenden Medien 33
—, mittlere 15
— —, Verkürzung 426
—, Regularisierung 307
—, relative 25, 306
—, ungestörte 26
— von künstlichen Erdsatelliten in der oberen Atmosphäre 307
— von Raumsonden 33, 324
— von Satelliten 17, 33
— — — um abgeplattete Planeten 33
Bewegungsgleichungen 20f., 35, 306
— gestörter Planeten 304
— in der LAGRANGEschen Form 28
— in Spinorform 306
—, simultane Integration 32
—, symmetrische Form 22
BIRKNER 8
BRENDEL, M. 119, 163, 201, 223, 380
BRENDELsche Variable 224f.
BROUCKE, R. 8, 230, 350, 353f.
BROUWER, D. 8, 32, 47, 135, 201, 230, 241, 246, 254, 268, 275, 283, 355f., 359, 390, 544

Brown, E. W. 47, 341, 359, 412, 441, 453, 487, 489f., 570
Burdet, C. A. 313

Carpenter, L. 8, 19, 230, 241, 254f., 268, 275, 277, 280, 282f., 357, 412, 577
c-Funktionen 70, 287, 291, 293, 297, 330
charakteristische Gleichung *siehe* säkulare Gleichung
Charlier, C. V. L. 43
Chu, E. L. 386, 519
Clemence, G. M. 32, 135, 201, 230, 246, 275, 283, 359, 390
Clenshaw, C. W. 278
Cowell, R. H. 327

Damoiseau 452
Danby, J. M. A. 241
Dederick, K. G. 386, 519
Delaubay, Ch. E. 9, 87, 341, 358f., 366, 368, 416, 456, 497, 530ff.
Delaunaysche Exhaustionsmethode 341ff., 358, 412, 498, 549
— kanonische Elemente (Variable) 26, 35f., 342, 356, 359f., 498, 549
— Mondtheorie 341ff., 358, 498
— —, Anzahl der Terme 358
— Operationen 341, 345f., 358f.
— Störungstheorie *siehe* Delaunaysche Exhaustionsmethode
departure point 28, 41, 172, 175, 177, 199
Deprit, A. 532ff., 536, 538f., 544ff., 550, 555, 557
Depritsche erzeugende Funktion W 534, 552
— Operatoren 536f.
Depritscher Algorithmus *siehe* Depritsches Rekursionsschema
Depritsches Rekursionsschema 540, 550
Determinante $\Delta_1^\infty(0)$ 480
— —, numerischer Wert 483
— $\Delta^\infty(c)$ 473ff., 487
— $\Delta^5(c)$ 475
—, unendliche *siehe* Determinante $\Delta_1^\infty(0)$
determining function *siehe* erzeugende Funktion
Differentialgleichung der gedämpften Schwingung 314
—, Enckesche 350
— für den Spinor 310
Differentialgleichung für die Störung der mittleren Anomalie (Länge) 36
— für r 434
— für w 436
—, Mersmansche partielle 550
— von Zeipelsche partielle 578
— zweiter Ordnung, Lösung mittels Lie-Operatoren 65
Differentialgleichungen der säkularen Störungen 125ff., 128
— der ungestörten Bewegung 66
—, Dziobeksche 241ff., 263, 357
— für die gestörten Elemente 111
—, halbkanonische 35, 126, 343
— in der Horischen Mondtheorie 500
— in Polarkoordinaten 25ff.
— in Spinalform 308
—, Linearisierung und Regularisierung 8, 284ff.
Differentialgleichungssystem erster Ordnung, autonomes 64, 336
—, Lösung mittels Lie-Operatoren 63
—, nichtautonomes 64
Differentialoperator 58ff.
—, gewöhnlicher 59, 63
—, linearer 58ff., 61
—, logarithmischer 59, 77f., 119, 121
—, totaler 59
Differentiation, logarithmische 123
—, numerische 58
Differenzenschema, Enckesches 325
Differenzoperator 58
Distributivgesetz der Operatorenrechnung 60
Divisoren in den Amplituden der Störungen 99
—, kleine 16, 453
drakonitischer Monat 448
Dreiecksalgorithmus von Mersman 544ff., 550
Dreikörperproblem, allgemeines planetares 366
—, eingeschränktes 19
—, planetares 125
—, reduziertes 114, 118, 337
—, Resonanz- und Librationsfälle 544
Dyaden 80f., 145, 161f.
—, Distributivgesetz der Multiplikation 82f.
—, Integral über 84
—, konjugierte 82

Dyaden, Multiplikation 81ff.
—, Skalar von 82
—, symmetrische 82, 85
—, Vektor von 82
—, Vertauschbarkeit 82
dyadisches Produkt, Umkehrbarkeit 81f.
Dziobek, O. 8, 160, 230, 241, 246, 254, 355ff.
Dziobeksche Differentialgleichungen (Störungsgleichungen) 241ff., 263, 357

ebenes Problem, Elimination der kurzperiodischen Terme 360ff., 371
—, Elimination der langperiodischen Terme 373
Eckert, W. J. 32, 283
Eginitis, D. 368
Einheiten, kanonische 24
— von Länge, Zeit und Masse 23f., 408
Einheitssysteme 19ff.
—, dreidimensionale Mannigfaltigkeit 24
Ekliptik 39, 41, 125
—, feste 38
—, Reduktion auf die 418, 519
Ekliptikalsystem 41
Elimination der kurzperiodischen Terme 360ff., 371, 561ff.
— der langperiodischen Terme 372ff., 520ff.
Ellipsen 299
—, Keplersche 15f., 37, 311
elliptische Funktionen 154ff., 158, 160
— Integrale 47f., 148f.
— Lösungen 286f.
— Terme 420
Encke, F. 230, 241, 327
Enckesche Differentialgleichung 350
— Methode 322
Enckesches Differenzenschema 325
Energie, kinetische 26f.
Energiesatz 298
Entfernung Mond—Erde, mittlere 407
Entwicklung bei kleinen Exzentritäten 94ff.
— bis zur zweiten Ordnung in den Exzentrizitäten 122
— der Koordinaten in Potenzreihen 319
— der Laplaceschen Koeffizienten in Potenzreihen 45ff.
— der mittleren Anomalien (Längen) nach trigonometrischen Funktionen 86
Entwicklung der Störungsfunktion 35, 54, 86, 93, 119, 124, 207, 410
—, formale 58
— nach Tschebyscheffschen Polynomen 275ff., 572ff.
— von $\gamma_k^{(s)}$ in einen Kettenbruch 51, 56
Ephemeriden der fünf äußeren Planten 32
—, maximale Rechengenauigkeit 32
Ephemeridenrechnung 30ff.
—, strenge 31
Erdabplattung 17, 454
Erdbahn, langperiodische Schwankung der Exzentrizität 427
Erde, Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit 427
Erde—Mond, mittlere Entfernung 407
—, Trajektorie 327
Erdgestalt, Einfluß der Abweichung von der Kugelform 31
Erdsatelliten, künstliche, Bewegung in der oberen Atmosphäre 307
— —, Theorie 24
erzeugende Funktion 359f., 388
—, Depritsche 534, 552
Euler, L. 86
Evektion 408, 444
Exhaustionsmethode, Delaunaysche 341ff., 358, 412, 498, 549
Explorer 33, 327
Exzentrizität der Erdbahn, langperiodische Schwankung 427
— der gestörten Mondbahn 445
— der Mondbahn 490, 494
—, mittlere 529f.
Exzentrizitäten, Entwicklung bei kleinen 94ff.
—, Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in den 122
—, kleine 94ff., 109
—, säkulares Verhalten im System der großen Planeten 130
—, verschwindende 109

Fallbewegung 299
—, geradlinige 286
Fallunterscheidungen für α^2 286
Flächensatz (-integral) 298, 305, 312
Fokalhyperbel 160
Fourier-Koeffizienten 43, 49, 562f.
—, Integralform 43
Fourier-Reihe 44, 562, 564

FOURIERsche Kosinusreihe 43f.
Frühlingspunkt 38
Fundamentalsystem von Lösungen 351

GAUSS, C. F. 51
GAUSS-HALPHENsche Methode 154
GAUSSsche Formeln 39
GAUSSscher Kettenbruch für $\gamma_k^{(s)}$ 52ff.
GAUSSscher Wert der Gravitationskonstante 23f.
GAUSSsches Theorem 8, 140ff., 144
generating function *siehe* erzeugende Funktion
Gesamtstörungen 324
Gezeitenreibung 427
GIACAGLIA, G. E. O. 360, 578f.
gleichförmige Kreisbewegung 25
GOOD, I. J. 386, 571
GOODYEAR, W. H. 71, 329ff., 335
GORJAČEV, N. N. 140
Gradient der skalaren Potentialfunktion 147
— des Skalars einer Dyade 85
Gradientoperator 79f., 255
Gravitationskonstante 23f.
Grenzwerte der Folbe $b_k^{(s)}$ bei festem α und s 49f.
GRÖBNER, W. 8, 58ff., 336, 340
GYLDÉN, H. 119, 163, 201, 223, 447

halbkanonische Differentialgleichungen 35, 126, 343
HALPHEN, G. H. 8, 140, 154, 158, 162
HAMILTON, W. R. 15
HAMILTON-JACOBIsche Theorie 531f.
HAMILTONsche Funktion 29, 247, 343ff., 498, 578f.
—, Aufspaltung in kurzperiodische, langperiodische und konstante Terme 362
— in der HORIschen Mondtheorie 500
— mit expliziter Zeitabhängigkeit bei DEPRIT 544
— mit expliziter Zeitabhängigkeit bei MERSMAN 549
—, Vereinfachung durch Orthogonaltransformation 135
HANSEN, P. A. 8, 119, 163, 167, 174, 177, 185, 187, 195, 201, 203, 223f., 229, 239, 241, 352, 354, 412, 456, 497, 531
HANSENsche Theorie der Planetenbewegung 28, 163ff., 577
— W-Funktion 184, 186, 226
HANSENscher Kunstgriff 239, 253
HARETU, S. C. 368
harmonische Analyse 209, 562ff.
— Bewegung 292
— Konstituenten *siehe* FOURIER-Koeffizeiten
— Schwingung 314
HARZER, P. 8, 138, 140
Hauptachsentransformation 147
Hauptebene 88
Hauptgleichung 70, 288, 297
—, Lösung 73
Hauptkoordinatenebene 88
Hauptproblem 33, 342, 404ff., 412, 417, 454, 456, 458, 498
Hauptteil der Störungsfunktion 21, 37, 42, 90ff., 100, 367, 409, 428
—, Amplituden der Störungsterme 98f.
—, Entwicklung 207
—, Entwicklung bei verschwindender Exzentrizität 93
—, Entwicklung bis zu Termen zweiter Ordnung 98ff.
—, Entwicklung nach Funktionen der wahren Anomalien 121
—, Glieder erster Ordnung 18, 101
—, Glieder nullter Ordnung 101
—, Glieder zweiter Ordnung 18, 102
Hecuba-Lücke 19
HERRICK, S. 23, 34
Hilda-Gruppe 18
HILL, G. W. 181, 230, 265, 341, 368, 412, 416, 455ff., 472, 480, 482, 484, 490, 497, 501, 531
HILLsche Gleichung 462, 466, 473f.
— —, Gültigkeit 467
— —, reduzierte Form 466f.
— Mondtheorie 9, 316, 456ff.
— —, Voraussetzungen 457
— Reihen 470ff.
Himmelsmechanik, prakt. Aufgaben 15ff.
—, stellare 17ff.
—, zukünftige Entwicklung 19
holomorphe Funktion 59
— Reihe 61
HORI, G. I. 9, 360, 388, 391ff., 398, 412, 498, 500f., 519f., 529f., 532f., 544f.
HORIsche Mondtheorie 498ff.
—, Differentialgleichungen 500
—, HAMILTONsche Funktion 500
—, Voraussetzungen 499

Hyperbel 299
—, Fokal- 160
hyperbolische Lösungen 286f.
hypergeometrische Funktion 46, 51, 122, 162
—, (GAUSSsche) Transformation 46f.

ideale Koordinaten 168, 173, 175ff., 184, 193, 245, 352
indirect part *siehe* Nebenteil der Störungsfunktion
Inertialsystem 20, 22, 37
Integral über eine Dyade 84
Integration, numerische 18, 35, 58
—, simultane 32f.
Integrationskonstanten, numerische Werte 125
—, Zusammenhang mit den Anfangsbedingungen 268, 274f.
intermediäre Bahnen (Integrale, Lösungen) 15, 19, 22, 25, 86f., 222, 304, 319, 415
—, bewegliche 426
—, Definitionsmöglichkeiten 275, 416
— der Planeten 125
—, feste, scheinbare säkulare Störungen 423
—, gleichförmig durchlaufener Kreis als 354
— in der HILLschen Mondhteorie 457
—, KEPLERsche Ellipse als 15f., 37, 311, 354
—, kreisförmige, von Sonne und Mond 437
—, Spinkoordinaten 315
—, Variation der Elemente 275
—, Wahl der Elemente 274f.
Invarianten 113
—, kanonische 575f.
—, lokale 67, 234, 330
Iterationsschema für die Störungsrechnung 350ff.
—, Beispiele 353ff.
Iterationsverfahren 31, 321f.

JACOBI, C. G. J. 8, 15, 135ff., 138
JACOBIsche Konstante 461
— Koordinaten 35, 342, 371, 404, 409, 499
— Lösung der Säkulargleichung 135ff.
— Matrix 71, 76, 552, 571
JACOBIsches Integral 312, 460, 462f.
Jupiter, Störung des Kometen Brooks 234
—, Störungen durch 30, 91, 206
Jupitersatelliten 17, 454
Jupiter—Saturn, Divisoren der Störamplituden 99
—, Kommensurabilität 15f., 101

KAMEL, A. A. 550
kanonische Bahnelemente 26, 247
— —, DELAUNAYsche 26, 35f., 342, 356, 359f., 498, 549
— Einheitensysteme 24
— Gleichungen 29
— Invarianten 575f.
— Transformationen durch LIE-Reihen 388
— Variable 29, 87
kanonisches Differentialgleichungssystem mit 4 Variablen 360, 373
— — mit 12 Variablen 366, 378
Kegel, Schnitt mit einer Ebene 151
—, Schnitt mit einer Kugel 155
Kegelschnittsbewegungen als intermediäre Lösungen des Störungsproblems 341
Kegelschnittselemente, oskulierende 34
KEPLERsche Bewegungsgleichungen für das räumliche Problem in Spinorform 340ff.
— Ellipsen, intermediäre 15f., 37, 311
— Gleichung 72, 569
— —, Lösung 73
KEPLERsches Gesetz, drittes 23
Kettenbruchentwicklung, GAUSSsche, für $\gamma_k^{(s)}$ 51, 56
Klammerausdrücke, LAGRANGEsche 349
—, POISSONsche 389f., 534, 545, 575
Kleinkörper, Theorie 16
KNOPP, K. 482
Knoten 27, 41
Knotenbewegung 484ff.
—, Definition der Variationsbahn 484
—, Hauptglied 490
—, Methode von BROWN 487ff.
—, numerische Werte 454
—, unendliche Determinante $\Delta_1^{\infty}(0)$ 487
Knotendreieck 114
Knotenlänge 38
—, Abnahme 426
Kometen, Theorie 16
Kommensurabilität der mittleren Bewegungen 15, 125, 276, 411
Kommensurabilitätsfall Jupiter—Saturn 15f., 101, 368
kommutatives Gesetz der Operatorenrechnung 60
— — für Dyaden 81f., 85

konjugierte Dyade 82
konservative Kräfte 306, 312
Kontakttransformation, infinitesimale 390
Konvergenzbedingungen für LIE-Reihen 63
Koordinaten, absolute 20, 30
—, Entwicklung in Potenzreihen 319
—, heliozentrische 35, 499
—, ideale 168, 173, 175ff., 184, 193, 245, 352
—, inertiale 20, 22, 37
—, JACOBIsche 35, 342, 371, 404, 409, 499
—, LEVI-CIVITÀsche 296, 298, 303, 316
—, rechtwinklige 30, 319ff.
—, relative 21, 30, 37
Koordinatensystem, begleitendes 141, 154
—, rotierendes 459
KOVALEVSKY, J. 23
KOWALEWSKI, G. 130
Kräfte, konservative 306, 312
—, nichtkonservative 307, 312, 544
Kraftvektor der säkularen Störungen 145ff.
Kreisbahnen 299
Kreisbewegung, gleichförmige 25
kritische Terme 276ff., 379f., 383, 411
Krümmung der gestörten Bahnebene 173
kurzperiodische Terme 360, 362, 383
—, Elimination 360ff., 371, 501ff.
KUSTAANHEIMO, P. 8, 310f., 307f., 314

LAGRANGE, J. L. 15, 86, 114, 533
LAGRANGEsche Klammerausdrücke 349
— Umkehrformeln *siehe* LAGRANGEscher Entwicklungssatz
LAGRANGEscher Entwicklungssatz 377, 386, 390, 527, 569ff.
LANCZOS, C. 573
LANDENsche Transformation 47, 225f.
Länge, Einheit 23f., 408
—, mittlere, Differentialgleichung für die Störung 36
— —, Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen 86
—, wahre 27
— —, in der gestörten Bahnebene 28
langperiodische Terme 101, 276f., 362, 372, 383
—, Elimination 372ff., 520ff.
LAPLACE, P. S. 8, 86, 452, 531
LAPLACE-POISSONscher Satz 378
LAPLACEsche Koeffizienten 8, 42, 54, 56, 91, 124, 208, 270, 428f.
— —, Ableitungen 54, 98
LAPLACEsche Koeffizienten, Entwicklung nach Potenzreihen 45ff.
— —, fundamentale 47
— —, Rekursionsformel 45, 50
— Reihen 411
LEGENDRE, A. M. 48
LEGENDREsche Polynome 405f., 420f.
LEVERRIER, U. J. J. 8, 58, 86, 89, 91, 118, 387, 531
LEVI-CIVITÀ, T. 294
LEVI-CIVITÀsche Koordinaten 296, 297ff., 303, 316
— Transformation 294f., 297
Liberationen 544
LIE, S. 59
LIE-Operator 59ff., 64, 68, 72, 76, 535
— des KEPLER-Problems 66
— für die Lösung der Hauptgleichung 73
— für die Lösung der KEPLERschen Gleichung 72
—, n-fache Anwendung 60
—, Vertauschbarkeit 60, 76
— zur Lösung des Schwingungsproblems 65f.
— zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung 63
— zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung 65 *siehe auch* Differentialoperator
LIE-Reihen 8, 59, 61, 64, 68, 336f., 388ff., 532, 534f., 544f., 571
—, gleichmäßige Konvergenz 63
—, kanonische Transformation durch 388ff.
—, Konvergenzbedingungen 63
—, Umkehrung analytischer Funktionen mittels 71ff.
—, Vertauschungssatz 62ff.
LINDSTEDT 447
Linearisierung von Differentialgleichungen 8, 284ff.
lokale Invarianten 67, 234, 330

MAGNUS, W. 47
main problem *siehe* Hauptproblem
Masse, Einheit 23f., 408
—, störende, der Sonne 18
Massenaustausch 18
Massenverhältnis Mond—Erde 16
Matrix (A), Beträge der Elemente 138
— —, größtes Element für die 8 großen Planeten 138

MEFFROY, J. 9f., 368
Merkur—Venus, ζ für 90
MERSMAN, W. A. 544f., 547, 549ff.
MERSMANsche partielle Differentialgleichung 550
MERSAMERscher Dreiecksalgorithmus 544ff.
Meteore, Theorie 16
MILANKOVIČ, M. 427
Mittelpunktsgleichung 418
Mittelwerte, Einführung nach HORI 393
Mond, kreisförmige intermediäre Bahnen 437
—, Störungen durch den 30
Mond—Erde, Massenverhältnis 16
Mond—Sonne, Verhältnis der mittleren geozentrischen Abstände 18
Mondbahn, Einfluß der Gezeitenreibung auf die Stabilität 18, 428
—, Exzentrizität 490, 494
—, Exzentrizität der gestörten 445
—, mittlere große Halbachse 408
—, Neigung der gestörten 448
—, scheinbare säkulare Veränderung 416
Mondbewegung *siehe* Mondtheorie
Mondentfernung, Abnahme der mittleren 427
Mondgestalt, Einfluß der Abweichung von der Kugelform 31
Mondtheorie 9, 17, 404ff., 456ff., 498ff.
—, DELAUNAYsche 341ff., 358, 498
—, DE PONTÉCOULANTsche 404ff.
—, Hauptproblem *siehe* Hauptproblem
—, HILLsche 9, 316, 456ff.
—, HORIsche 498ff.
—, Unterschiede zur Theorie der Planeten 409ff.
MUSEN, P. 8, 34, 140, 154, 162f., 230, 241, 254f., 268, 275, 282, 360, 379ff., 386, 388, 412, 532
MUSENscher M-Operator 383
— P-Operator 383
— T-Operator 381

Nebenteil der Störungsfunktion 21, 37, 42, 90, 109, 367, 409, 428
—, Entwicklung 124
—, Terme 37
Neigung der Bahnebene 38, 134
—, Beschränktheit für lange Zeiten 134
— der gestörten Mondbahn 448
Neigung, gegenseitige 38f., 134
Neptun—Pluto, ζ für 90
NEWCOMB, S. 56
NEWTON, I. 15, 86, 411
n-Körperproblem, allgemeines 320
n-Körper-Programm 33

OBERHETTINGER, F. 47
OGORODNIKOV, K. F. 10
Operator der totalen Differentiation 59
—, Differential-, *siehe* Differentialoperator
—, Differenz- 58
—, LIE- *siehe* LIE-Operator
—, logarithmischer 59, 77f., 119, 121
—, Verschiebungs- 58
Operatoren, Vertauschbarkeit 61
Operatorenrechnung, algebraische Regeln 60
Orthogonaltransformation, Vereinfachung der HAMILTONschen Funktion durch 135
Oskulationsepoche 38
oskulierende Bahnen 275
—, gestörte Elemente 26
Kegelschnittselemente 34

Pallas 91
Parabel 299
parabolische Lösungen 286
PASCALsches Dreieck 539
Perigäum, lineares Fortschreiten mit der Zeit 426
Perigäumsbewegung des Mondes 462, 476ff.
—, Definition der Variationsbahn 484
—, numerischer Wert 454, 483
Perigäumslänge, mittlere Bewegung 529f.
Perihelabstand vom Knoten 41
Perihellänge 27, 41
periodische Bahnen des Drei- und Mehrkörperproblems 19
— Terme 37, 87, 99, 111, 126, 276f.
periodischer Teil 393
Phasenraum 34
PIQUET 447
PLANA 452
Planeten, abgeplattete, Bewegung um 33
—, äußere, Ephemeriden 32
—, gegenseitige Neigung der Bahnebenen 134
—, gestörte, Bewegungsgleichungen 304
—, große, Bewegung 15

Planeten, abgeplattete, säkulares Verhalten der Exzentrizitäten 130
— —, Störungen 99, 135
—, intermediäre Bahnen 125
—, Stabilität der Bahn 132
Planetenbewegung, HANSENsche Theorie 28, 163ff.
Planetentheorien, Unterschiede zur Mondtheorie 409ff.
Planetoiden, Aufsuchungsephemeride 30
—, Theorie 16
PLUMMER, H. C. 154
POINCARÉ, H. 15, 87, 461, 475
POINCARÉsche kanonische Elemente 36, 43, 87, 126, 248
POISSON, S. D. 368
POISSONsche Klammerausdrücke 389f., 534, 545, 575
Polarkoordinaten, Differentialgleichungen in 25ff.
—, Störungsrechnung in 28, 163ff.
PONTÉCOULANT, DE 9, 411f., 415, 417, 434, 452ff., 456, 531
Potentialfunktion 20, 25, 28
Potenzreihen, Entwicklung der Koordinaten in 319
—, Entwicklung der LAPLACEschen Koeffizienten in 45ff.
Präzessionskonstante 32
principal part *siehe* Hauptteil der Störungsfunktion
Produkt, dyadisches 80ff.
—, unbestimmtes, zweier Vektoren 80
Pseudozeit 69, 86, 202, 224, 284, 286f., 297, 314, 392

RABE, E. 223f., 563
Radar, Abstandsmessung mit 407
Raumfahrt, praktische Bedürfnisse 322
räumliches Problem, Elimination der kurzperiodischen Terme 366, 371f.
—, Elimination der langperiodischen Terme 378f.
—, KEPLERsche Bewegungsgleichungen in Spinform 304ff.
—, ungestörtes 304ff.
Raumsonden, Bewegung 33, 324, 327
Rechenzeit 33, 327
Reduktion auf die Ekliptik 418, 519
Referenzebene, unveränderliche 88
Regularisierung der Bewegung 307
Regularisierung von Differentialgleichungen 8, 284ff.
Rekursionsformel für die LAPLACEschen Koeffizienten 45, 50 *siehe auch* Iterationsverfahren
Relativbewegung 25, 306
relativistische Effekte 17, 33
Resonanzbewegung 544
Reststörungen 324
ROM, A. 544
RÖSSLER, M. 313, 316
Rotationsgeschwindigkeit der Erde, Abnahme 427
rotierendes Koordinatensystem 459

säkulare Beschleunigung 17
— Gleichung 8, 130, 135, 153, 159, 566
— —, genaue Lösung 139
— —, JACOBIsche Lösung 135ff.
— —, Wurzeln 133
— Störungen, Differentialgleichungen 125ff., 128
— —, Kraftvektor 145ff.
— Terme 101, 106ff., 109, 125ff., 276f., 383, 420ff., 528ff.
säkularer Teil 393
Satelliten, Bewegung 17
—, künstliche 24, 30, 307
Saturn, Störungen durch 206
Saturnsatelliten 17
SCHACK, A. R. LE 68
SCHUBART, J. 32
Schwingung, gedämpfte 293, 314
—, harmonische 314
Schwingungsproblem, Lösung mittels LIE-Operatoren 65f.
SCONZO, P. 68, 336
SEIDELMANN, F. K., Störungsrechnung mit iterativen Computerprogrammen 577
SHNIAD, H. 551, 555
SHNIADsches Theorem 557
SHOOK, C. A. 359, 570
Singularität beim Zusammenstoß 286
Skalar einer Dyade 82
Sonne, kreisförmige intermediäre Bahn 437
—, störende Masse beim Mondproblem 18
—, Störungen durch die 30
spin 301
Spinor 301, 304, 311
—, Differentialgleichung für den 310
—, vierdimensionaler 304

Spinorgleichungen 315
—, linearisierte, bei einer Parabel als intermediärer (oskulierender) Bahn 316
—, Linearisierung 313ff.
Spinorkoordinaten der intermediären Bahn 315
Spinorraum 303, 313
Stabilität der Planetenbahnen 132
state transition matrix *siehe* $\mathfrak{T}$-Matrix
STEFFENSEN, J. F. 319
STEFFENSEN-BROUCKE, Methode von 319ff., 336
stellare Himmelsmechanik 17ff.
STIEFEL, E. 313f.
Störbeschleunigung 21, 27
Störungen, allgemeine 35
— der mittleren Anomalie 87
— durch Jupiter 30, 91, 206
— durch Mond und Sonne 30
— durch Saturn 206
— erster Ordnung 18, 42, 87
—, genäherte 324
—, gesamte 324
— höherer Ordnung 18
—, langperiodische 15f. *siehe auch* langperiodische Terme
—, langperiodische 21 *siehe auch* periodische Terme
—, rein periodische 87
—, Rest- 324
—, säkulare 8, 21, 87, 125, 154 *siehe auch* säkulare Terme
— —, der großen Planeten 135
—, wechselseitige, der großen Planeten 99
— zweiter Ordnung 18
Störungsfunktion 21, 29, 35f., 42, 86f., 109, 112
—, Entwicklung 35, 54, 86, 93, 119, 124, 207, 410
—, Hauptteil *siehe* Hauptteil der Störungsfunktion
—, Kategorien der Terme 358
—, Nebenteil *siehe* Nebenteil der Störungsfunktion
—, säkularer Teil 100, 107, 126 *siehe auch* säkulare Terme
Störungsgleichungen in Polarkoordinaten 25ff.
— in Spinorform 306ff., 313ff.
—, DZIOBEKsche 241ff., 263, 357
Störungsglieder, Divisoren der Amplituden 99
—, dritter Ordnung 99
Störungsrechnung (-theorie), allgemeine 19, 25, 358ff.
—, allgemeines Problem 371f.
—, DELAUNAYsche *siehe* DELAUNAYsche Exhaustionsmethode
— dritter Ordnung 368ff.
—, ebenes Problem 371 *siehe auch* ebenes Problem
— erster Ordnung 362, 374
—, Iterationsschema 350ff.
—, Kegelschnittsbewegungen als intermediäre Lösungen 341
—, klassische Methode 86ff.
—, numerische 30
—, praktische Aufgaben 15ff.
—, spezielle 18, 35
— zweiter Ordnung 363, 375
STUMPFF, K. 19, 316, 322, 461, 563
STUMPFF, P. 32, 34
SUNDMAN, K. 8
SYLVESTER, J. J. 130
TAYLORsche Entwicklung einer Funktion von mehreren Variablen 75, 77ff.
— Reihe 63, 77
Tensoren, dreistufige 262
TISSERAND, F. 118, 201, 223, 348, 411, 497
$\mathfrak{T}$-Matrix 328f., 331
—, Approximationsfehler 336
— für den gestörten Körper 334
—, inverse 333
—, ungestörte 330ff.
TOBEY, R. 68
Transformation, affine 81
— der hypergeometrischen Funktion 401.
—, Hauptachsen- 147
—, ideale 167f.
—, infinitesimale Kontakt- 390
—, kanonische 247f., 346, 567
— —, durch LIE-Reihen 388
—, LAGRANGEsche 225f.
—, LANDENsche 47, 225f.
—, LEVI-CIVITÀsche 294f., 297
—, Orthogonal- 135
TRICOMI, F. G. 47, 573
trigonometrische Funktionen, Entwicklung nach 86
— Reihen 42

TSCHEBYSCHEFFsche Polynome 275f., 278, 282, 357, 572f.
— —, Entwicklung in 275ff., 572ff.
— Reihen 275ff., 572ff.
— —, Multiplikation 282, 573

unveränderliche Ebene (UVE) 15f., 125
— Referenzebene 88

Variable, BRENDELsche 224f.
—, kanonische 29, 87
—, konjugiert-kanonische 29
—, linearisierende 19
—, regularisierende 19, 305
Variation (Variationsbahn des Mondes) 412, 457
— der Konstanten 241, 244, 290
Variationen der Anfangsbedingungen 34
—, kleine, im Zweikörperproblem 328
Variationsbahn 457f.
—, Definition bei der Berechnung der Perigäums- und Knotenbewegung 484
—, Länge des Mondes in der 491
—, numerische Methode zur Bestimmung der Konstanten 494
—, Radiusvektor 491
Vektor einer Dyade 82
Verbesserungsverfahren 31
Verschiebungsoperator 58
Vertauschbarkeit von Affinoren und Dyaden 82f.
Vertauschbarkeit von LIE-Operatoren 60, 76
Vertauschungssatz für LIE-Reihen 62ff.
Verträglichkeitsbedingungen 61
Vierkörperproblem (Erde, Mond, Sonne, Raumsonde) 327

WALDVOGEL, J. 313
WEIERSTRASSsche elliptische Funktionen 154ff.
— Funktion 157
WEISS, E. H. 322, 329, 333
Whittemora 324
WITT, G. 47

ZEIPEL, H. VON 9, 47, 341, 359, 366, 368, 380, 388, 501, 519, 530, 532f., 544, 555, 557
ZEIPELsche Methode, VON 360ff., 498, 545
—, Entwicklungsparameter ε 360
—, Verallgemeinerung nach HORI 388ff.
Zeit, Einheit 23f., 408
—, fiktive 179
—, Pseudo- *siehe* Pseudozeit
—, reduzierte 179
Zusammenstoß 33, 286
Zweikörperbewegung, relative 284ff., 291
Zweikörperproblem 297ff., 327ff.
—, Lösung in LEVI-CIVITÀschen Koordinaten 297ff.
—, Variation der Bewegung 327ff.