MATHEMATISCHE LEHRHEFTE

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. L. PETERS

PROF. DR. F. A. WILLERS

ZAHLZEICHEN UND RECHNEN IM WANDEL DER ZEIT

VOLK UND WISSEN VERLAG · BERLIN / LEIPZIG · 1949

Bestell-Nr. 17087 Preis [redacted] DM (br.) · 1. bis 5. Tausend · Lizenz Nr. 334 1000/48 – II 61
Satz und Druck: Leipziger Druckhaus, Leipzig (M 115)

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Wir schreiben heute die größten Zahlen mit zehn Zeichen, die – abgesehen von den drei ersten – mit dem Inhalt des betreffenden Begriffes nichts zu tun haben. Die erste Ziffer ist aus einem senkrechten Strich, die zweite und dritte sind aus zwei bzw. drei in einem Zuge geschriebenen waagerechten entstanden. Jedes der anderen Zeichen könnte für irgendeine beliebige Zahl stehen. Zum Beispiel könnte das Zeichen 4 ebensogut eine Sechs, eine Acht oder irgendeine andere Zahl bedeuten. Die Möglichkeit, beliebig große Zahlen mit diesen wenigen Zeichen zu schreiben, beruht auf der Positionsschreibweise. Eine Drei vor eine Vier gestellt, bedeutet nicht mehr drei Einer, sondern drei Zehner; stellt man noch eine Zwei davor, kommen zwei Hunderter dazu; setzt man, durch einen Strich, ein Komma oder einen Punkt getrennt, eine Fünf hinter die Vier, hat man fünf Zehntel hinzugefügt. So kommt man zu den Dezimalbrüchen. Jede Ziffer hat also nicht nur einen Ziffernwert, sondern auch einen Stellenwert.
Unser Zahlensystem ist ein Dezimalsystem; die Einheit jeder folgenden Stufe entspricht zehn Einheiten der vorhergehenden. Daß die meisten Kulturen zu diesem Dezimalsystem gekommen sind, rührt daher, daß dem Menschen als natürliche Rechenmaschine die zehn Finger mitgegeben sind. Man bezeichnet daher das Zehnersystem als natürliches System. Als natürlich kann man auch noch das Vigesimalsystem (Grundzahl 20) bezeichnen. Die Völker, die es benutzen, haben eben an Zehen und Fingern zählen gelernt. Reste eines solchen Systems finden sich noch im Französischen (80 = quatre-vingt). Ein vollständiges Vigesimalsystem hatten die Maya, wovon später zu reden sein wird.
Die Verzifferung der Zahlen, die in manchen Kulturen so weit geht, daß man für jede Zahl ein besonderes Zeichen hat, einen Buchstaben oder irgendein anderes Zeichen, dessen Herkunft man meist nicht angeben kann, ist sicher nicht die älteste Schreibweise der Zahlen. Diese älteste Aufzeichnung von Zahlen wird, unabhängig von der Schrift, im allgemeinen früher als diese entstanden sein. Die Zahl wurde durch Nebeneinanderreihen des gleichen Zeichens, etwa von Kerben, Knoten, senkrechten oder waagerechten Strichen in entsprechender Anzahl dargestellt. Diese Reihungen, die bei großer Zahl der Zeichen unübersichtlich werden, wurden dann später durch Querstriche oder in anderer Weise zu Bündeln zusammengefaßt, meist zu fünf oder zehn, wenigstens da, wo man nach dem Dezimalsystem zählte. Man zeichnete die Zahlen also etwa so auf, wie vor gar nicht langer Zeit der Kellner die getrunkenen Gläser Bier auf dem Untersatz vermerkte. Bei fortgeschrittenen Kulturen wählte man dann für die einzelnen Stufen des Zahlensystems besondere Zeichen.

Beide Arten der Zahlenschreibweise, die Verzifferung und die Reihung, eventuell mit der Bündelung, können mit der Positionsschreibweise verbunden sein. Bei uns ist es die Verzifferung, bei den Maya die Reihung und Bündelung. Das wichtigste bei der vollständigen Stellenschreibweise ist, daß man ein besonderes Zeichen für unbesetzte Stellen hat, also eine Null. Wer diese Null erfunden hat, weiß man nicht; man weiß nicht einmal, wann und wo sie erfunden ist. Jedenfalls ist ihre Erfindung eine der größten Geistestaten der Menschheit. Wahrscheinlich ist sie in Indien und vielleicht unabhängig davon in Amerika erfunden worden; denn auch die Maya haben ein vollständiges Positionssystem.
Beginnend mit der Frühzeit, soll hier nun ein kurzer Überblick über die Schreibweise der Zahlen bei den verschiedenen Kulturvölkern gegeben werden. Dabei soll auch kurz ihrer Rechenmethoden gedacht werden. Allerdings kann wegen des großen Stoffumfanges nur eine kleine Auswahl betrachtet werden, sowohl was die in Frage kommenden Kulturvölker betrifft – hier wurden im wesentlichen nur die größeren Mittelmeerkulturen behandelt, da ja nur diese wesentlich unsere Kultur beeinflußt haben, und auch hier wurde z. B. auf Phönizier und verwandte semitische Volksstämme nur kurz hingewiesen – als auch, was den bei den einzelnen Kulturen betrachteten Stoff betrifft, bei dem nur die großen Linien aufgezeigt wurden. Am Schluß soll dann noch kurz auf die Zahlenschreibweise der Maya eingegangen werden, um das einzige, außer dem unsrigen ausgebildete, vollständige Positionssystem vorzuführen.

DIE BABYLONIER

Ältere Zahlensysteme

Wenden wir uns nun den einzelnen Kulturvölkern zu. Eine der ältesten Mittelmeerkulturen, von der Aufzeichnungen auf uns gekommen sind, ist die des Zweistromlandes. An der Mündung des Euphrat und Tigris wohnte dort ein Volk oder ein Völkergemisch, die Sumerer, von deren Leben und hoher Kultur um etwa 3000 v. Chr. wir uns durch die Ergebnisse der Ausgrabungen in ihrer Hauptstadt Ur, die die Amerikaner nach dem ersten Weltkriege veranstalteten, ein Bild machen können. Zur Aufzeichnung benutzten die Sumerer Tontäfelchen, in die zunächst mit spitzem Griffel bildartige Zeichen eingeritzt wurden. Ihre Schrift war also ursprünglich eine Bilderschrift. Später wurden dann diese Bilder aus keilförmigen Eindrücken zusammengesetzt, die durch das Einpressen eines schräggehaltenen kantigen Griffels erzielt wurden. Nach und nach verloren die Zeichen immer mehr ihre Bildform und wurden einfach den entsprechenden Gegenständen und Begriffen zugeordnet. Diese Keilschrift wurde anfangs von oben nach unten geschrieben, auf der rechten Seite der Täfelchen beginnend, später wegen der Unbequemlichkeit des Schreibens horizontal von links nach rechts. Die Täfelchen wurden also im Gegenzeigersinn um 90° gedreht. Dabei behielten aber die Zeichen ihre Richtung auf der Tafel bei, so daß sie gegenüber früher auf der Seite lagen. Da sie ihre Bildhaftigkeit verloren hatten, machte das nichts aus. Daß tatsächlich eine solche Drehung erfolgte, geht daraus hervor, daß auch bei den Inschriften an Fels- und Tempelwänden die Schriftrichtung geändert wurde. Da das Einmeißeln in Stein und das Eindrücken in Ton dem Wesen nach nicht sehr verschieden sind, haben die Schriftzeichen auf den Tontäfelchen und

Abb. 1 Tontäfelchen mit Zahlzeichen aus der Zeit um 3000 v. Chr.

in Inschriften die gleiche Form, anders als z. B. bei den Ägyptern, wo die Zeichen der Inschriften und die der Papyrusrollen sich stark unterscheiden.

Die Zahlzeichen wurden zunächst nicht mit kantigem, sondern mit rundem Griffel geschrieben, die Zahlen von eins bis neun durch Aneinanderreihen von Halbovalen, die durch schräges Eindrücken des runden Griffels entstanden, die Zehner durch senkrechtes Eindrücken, so daß kreisförmige Vertiefungen entstanden. Abb. 1 zeigt in der mittleren Spalte von unten nach oben die Zahlen von eins bis neun, oben rechts zwei Zehner. Die Abbildung gibt eins der ältesten Tontäfelchen wieder, das man auf rund 3000 v. Chr. datiert. Es wurde bei Grabungen in Fara, dem alten Surupak, 25 km nördlich von Uruk gefunden. Über die Einer und Zehner kam man zunächst kaum hinaus. Für eine unbegrenzte Vielheit benutzte man einen Kreisring, der später gelegentlich auch Hundert bedeutete. Neben diesen Zeichen gab es schon früh Individualbezeichnungen für einige einfache Brüche, wie sie Abb. 2 in der mittleren Spalte zeigt. Das Zeichen für einhalb deutet offenbar ein halbgefülltes Gefäß an.

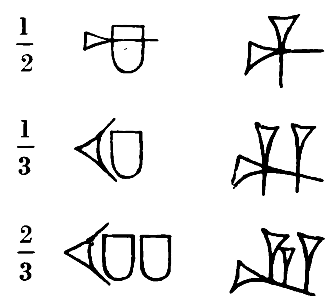
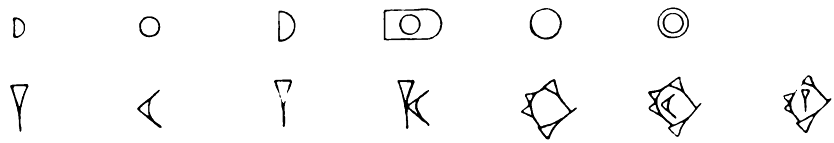


Abb. 2 Individualbezeichnungen für einige Brüche

Entstehung des Sexagesimalsystems

Diese Zeichen werden natürlich vor allem als Maßzahlen für Gewichte (Geld), Längen, Flächen usw. verwendet. Es scheinen sich nun unabhängig voneinander Maße für große, mittlere und kleine Gewichte, Längen und Flächen ausgebildet zu haben, auf die man dann, unabhängig voneinander, diese Maßzahlen angewendet hat, bei Zusatz der Bezeichnung oder, wenn diese selbstverständlich war, auch ohne diese. Allmählich muß sich nun das Bedürfnis geltend gemacht haben, die Maße für verschiedene Gruppen der gleichen Größenart aufeinander zu beziehen, insbesondere die Bruchteile der größeren in Einheiten der kleineren auszudrücken. Bei Einführung einer solchen Umwandlungszahl wird man vielleicht als vorteilhaft folgendes beachtet haben:

1. Die bisherige Größe der verschiedenen Einheiten muß nach Möglichkeit erhalten bleiben.
2. Für die viel benutzten Bruchteile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ wird man runde, ganze Vielfache der kleineren Einheit zu erhalten suchen.
3. Die Umwandlungszahl soll sich möglichst an das schon in geringem Umfang ausgebaute Zehnersystem anschließen.
4. Für alle Gebiete soll möglichst die gleiche Umwandlungszahl gelten bzw. ein kleiner Bruchteil dieser Zahl.



1	10	60	$10 \cdot 60$	60^2	$10 \cdot 60^2$	60^3
aš	u	gi-eš	geš-u	šár	šár-u	šár-gal

Abb. 3 Zahlzeichen der Sumerer, obere Reihe in alter und untere Reihe in neuerer Form

Eine solche Zahl war offenbar die Sechzig. Sie empfahl sich außerdem dadurch, daß sich so eine runde Zahl für die Anzahl der Tage im Jahre ergab, die zu 360 Tagen und fünf oder sechs Festtagen angesetzt wurde. Letztere wurden nicht gezählt. Ganz ausgeprägt findet man diese Umwandlungszahl bei den Gewichten und damit bei dem Geld, das ja bestimmte Gewichte Silbers benutzte: 60 Šekel (1 Šekel etwa 9,5 g) sind eine Mine; 60 Minen sind ein Talent. Weniger ausgeprägt ist diese Umwandlungszahl bei den Längenmaßen: 60 Gar (1 Gar etwa 6 m) sind 1 uš-giš, während 30 Fingerbreiten gleich einer Elle gleich $^1/_{12}$ Gar sind; bei den Flächenmaßen sind 60 Šekel[1] gleich einem Sar = (Gar)^2.
Diese sexagesimale Struktur, die sich ursprünglich nur auf zwei, höchstens drei Stufen beschränkte, wurde auf das ganze Zahlensystem ausgedehnt. Man bekam so ein ausgeprägtes Sexagesimalsystem mit dezimaler Unterstruktur. Dieses System, das wir noch heute in unserer Winkel- und Zeiteinteilung haben, ist also kein natürliches, sondern ein künstlich entstandenes System. Zunächst wurden für die beiden Einheiten jeder Rangstufe besondere Zeichen benutzt, wie sie die oberste Reihe in Abb. 3 zeigt. Sie wurden einfach aneinandergereiht. Bald wurden sie ebenso wie die Schriftzeichen mit kantigem Griffel geschrieben. Man erhielt die Zahlzeichen, die in der zweiten Reihe von Abb. 3 stehen, und für die drei Individualzeichen der Brüche die in der dritten Spalte von Abb. 2 aufgezeichneten Formen. Auch jetzt wurden die Zahlen durch die entsprechende Anzahl von Keilen und Winkelhaken usw. dargestellt, wobei diese aber in Gruppen zusammengefaßt wurden, wie man es auf den folgenden Abbildungen sieht.

Positionsschreibweise

In der neuen Schreibweise ist die Sechzig nur ein gegenüber dem Zeichen für eins vergrößerter Keil. In vielen Fällen wird nun die Bezeichnung der Einheit, z. B. die des Gewichtes, als selbstverständlich fortgeblieben sein. Durch großen und kleinen Keil werden die beiden Einheiten noch unterschieden. Aber wenn es sich nur um eine Größenart gehandelt hat, etwa um Minen, so wird der Größenunterschied der Zeichen bald vernachlässigt; man hat auch in dem Fall bei $10 \cdot 60$ den größeren Keil

[1] Die gleiche Bezeichnung für ein Gewicht und ein Flächenmaß rührt daher, daß die Flächenmaße ursprünglich Saatmaße waren. Die Flächengröße wird durch die zu seiner Bestellung nötige Getreidemenge bestimmt.

fortgelassen und nur den Winkelhaken geschrieben. Nur durch die Stellung zueinander konnte man die Rangstufe erkennen. Das wurde allmählich weiter ausgebaut und führte zu einem relativen Positionssystem, in dem allerdings die Null fehlt. Den Stellenwert mußte man aus dem Zusammenhang entnehmen, was natürlich die Lesbarkeit mathematischer Texte nicht gerade erhöht. Abb. 4 zeigt so die Zahl

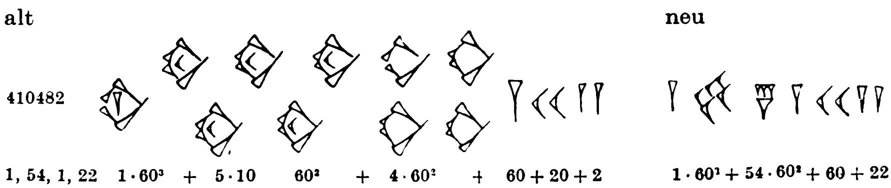


Abb. 4 Schreibweise der Zahl 410482 in alter und in Positionsschreibweise

410482 in der alten und neuen Schreibweise. In der neuen könnte sie auch als $60^4 + 54 \cdot 60^3 + 60^2 + 22 \cdot 60$ gelesen werden, also als 24628920 oder als $60^4 + 54 \cdot 60^2 + 60 + 22 = 13154482$ usw. Gelegentlich wird eine fortfallende Rangstufe durch einen etwas größeren Zwischenraum angedeutet, aber durchaus nicht immer. Erst im dritten vorchristlichen Jahrhundert taucht in astronomischen Tabellen ein Lückenzeichen in Form von zwei schräggestellten kleinen Keilen auf, wie es die nebenstehende Abb. 5 in der ersten Spalte in der fünften und sechsten Zeile von oben und der vierten Zeile von unten zeigt. In dieser Tabelle gibt die erste Spalte Grade, die zweite Minuten und die dritte Sekunden. Die Zeichen der letzten Spalte entsprechen unseren Vorzeichen + und −, in der fünften Zeile von oben und der vierten von unten deuten sie den Übergang von + zu − bzw. − zu + an.

Bei dieser Schreibweise ergibt sich nun ganz von selbst, daß die Anzahl der vorkommenden kleineren Einheiten als Bruchteil der größeren aufgefaßt werden kann. Bestärkt wird diese Auffassung noch durch die Unbestimmtheit der absoluten Stellenfestsetzung. Man kam so zum Sexagesimalbruch. Die Zahl in Abb. 4 würde sich also z. B. auch $6841^{22}/_{60}$ lesen lassen. Infolge dieser Entstehung der Sexagesimalbrüche kannten die Babylonier ähnlich wie die Ägypter nur echte Brüche, also solche, deren Nenner größer als der Zähler ist. Man hat somit neben der Schreibweise einiger Brüche, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, durch Individualzeichen eine solche in Form von Sexagesimalbrüchen, die sich auf Brüche mit dem Nenner 60^n bezieht. Daneben kommt aber auch eine algorithmische Schreibweise vor, z. B. $= \frac{1}{4}$, wo die Zahl, deren reziproker Wert zu nehmen ist, direkt hingeschrieben wird.

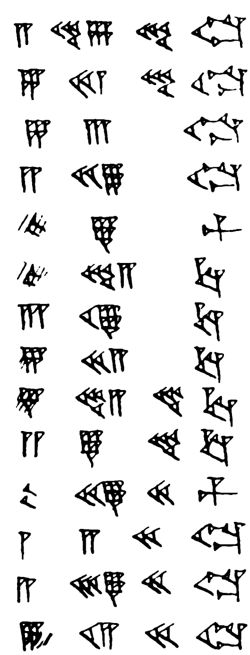


Abb. 5 Vierte Spalte der Vorderseite einer Tafel mit astronomischen Tabellen aus der Zeit um 200 v. Chr. mit Lückenzeichen in der ersten Spalte

Tabellentexte

Für das Rechnen mit diesen Zahlen hat man nun umfangreiche Tabellen, vor allem für die Bildung des Reziproken, das ja für die Division von Wichtigkeit ist. Diese Tabellen fangen z. B. so an:

1 da	$\frac{2}{3}$-bi	40
suriabi		30
igi 3		20
igi 4		15 usw.

Suriabi bedeutet, daß zu halbieren, igi, daß das Reziproke der dahinterstehenden Zahl zu nehmen ist. Die Bruchteile sind hier also in der Zahl der nächst kleineren Einheit gegeben. Daneben gibt es umfangreiche Multiplikationstabellen, wie z. B. Abb. 6 eine für die Zahl 18 zeigt. Es ist Vorder- und Rückseite eines solchen Täfelchens dargestellt, das darunter der Deutlichkeit wegen noch einmal in Strichzeichnung wiedergegeben ist. Diese Tabellentäfelchen darf man sich nicht sehr groß vorstellen – etwa 4 × 6 cm –, so daß sie bequem in der hohlen Hand zu halten sind. Den Aufbau der Tabelle verfolgt man leicht an der Abbildung. Aufgezeichnet ist das Produkt von 18 mit den Zahlen von eins bis zwanzig, dreißig ... bis sechzig. Das Zeichen = ara übt die Funktion eines Multiplikationszeichens aus. Von 18×4 ab erkennt man die Positionsschreibweise. Nicht besetzte Stellen werden z. B. bei der Multiplikation mit 10, 20, ... 60 (50 fehlt merkwürdigerweise) einfach fortgelassen. Während zunächst noch der Größenunterschied in den Zahlzeichen der beiden Stufen zu bemerken ist, fällt dieser weiterhin ganz fort. Ferner beachte man, daß ähnlich wie im Lateinischen (undeviginti) 19 durch Abziehen einer Eins von zwan-

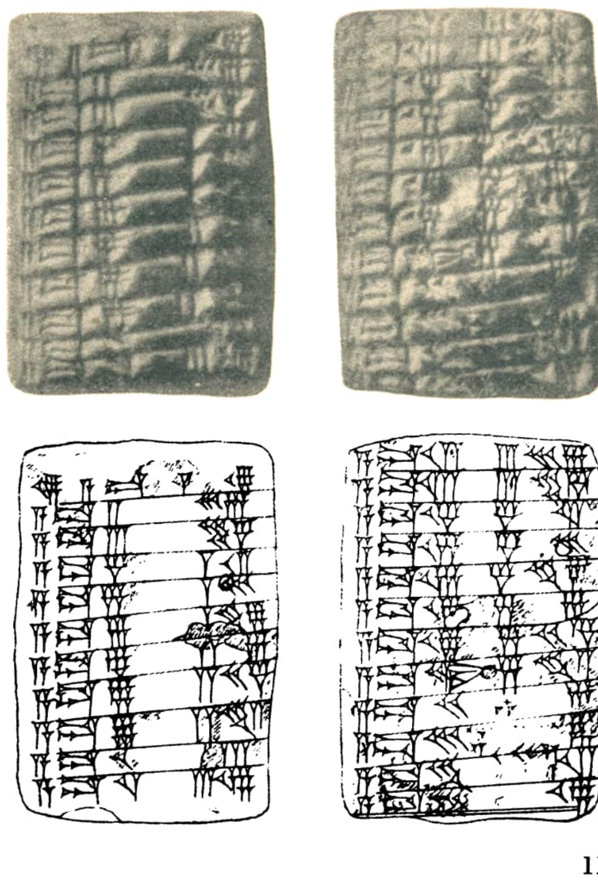


Abb. 6 Vorder- und Rückseite einer Tontafel aus der Tempelbibliothek von Nipur etwa um 1350 v. Chr. (Einmaleins mit der Zahl 18)

zig geschrieben wird. (Rückseite, 5. Zeile von unten.) = lal entspricht dem Minuszeichen. In anderen Tabellen findet man eine entsprechende Schreibweise, z. B. für 37, 38, 39; bis zu drei Einheiten werden so abgezogen. Solche Multiplikationstabellen hat man in der Hauptsache für die in den Reziprokentabellen auftretenden Zahlen. Außer diesen Tabellen für einzelne Zahlen gibt es noch solche, die eine große Reihe von Multiplikationstabellen zusammenfassen, manchmal damit auch noch Tabellen für die Reziproken, Quadrate, Kuben usw. vereinigen. Aber auch andere Tabellen, z. B. für Quadrat- und Kubikwurzeln, $n^3 + n^2$, hat man gefunden. Mit Hilfe dieser Tabellen hat sich eine ausgeprägte mathematische Rechentechnik bei den Babyloniern entwickelt, die bis zur Lösung von biquadratischen Gleichungen, von solchen dritten Grades usw. geht. Tafeln mit solchen mathematischen Texten sind in großer Zahl in den verschiedensten Museen erhalten. Die heute bekannten Texte reichen von etwa 2400 über die Zeit des Hammurapi (2000 v. Chr.), aus der eine große Zahl der wichtigsten, die bei Uruk, Kis und Nippur gefunden wurden, stammen, bis in die Zeit der Seleukiden, d. h. das zweite vorchristliche Jahrhundert. Die Entwicklung der Maß- und Zahlensysteme geht ebenso wie die Ausbildung der Schrift in die sumerische Zeit zurück. Die eigentlich mathematischen Fragestellungen scheinen etwa seit der Mitte des dritten Jahrtausends v. Chr. aus der systematischen Beschäftigung der Akkader mit den übernommenen Kulturgütern entstanden zu sein.

Die Keilschrift[1]

Dazu noch ein kurzes Wort über die Keilschrift. Nachdem schon im dritten Jahrtausend eine immer stärkere Semitisierung eingesetzt hatte, unterwarfen um 2000 herum die semitischen Akkader die weder semitischen noch indogermanischen Sumerer vollständig und übernahmen ihre Kultur und damit ihre Schrift. Den Sprachtypus der Sumerer kann man als agglutinierend bezeichnen, d. h. die Sprache hat meist einsilbige Wörter mit konstanten Vokalen, deren Flexion durch angehängte Silben (Suffixe) oder vorgesetzte Silben (Präfixe) erfolgt. Die Sprache der Akkader ist dagegen eine flektierende Sprache von ausgesprochen semitischem Typ. Das Charakteristische jeden Wortes sind drei Konsonanten. Die Flexion erfolgt durch die Verschiedenheit dreier dazwischen eingefügter oder angehängter Vokale. Bei der Übernahme der sumerischen Schrift bleibt den Zeichen der einsilbige Lautwert erhalten, und so wird die Schrift bei den Akkadern zu einer Art Silbenschrift. Daneben werden die Zeichen auch in ihrer ursprünglichen Bedeutung, aber mit akkadischer Bezeichnung benutzt. Diese ideographische Schreibweise nimmt in den mathematischen Texten mit der Zeit einen immer größeren Umfang an und führt so zu einer Art Formelschreibung, die das Lesen dieser Texte erleichtert.

[1] Die Entzifferung der Keilschrift wurde 1802 durch Grotefend mit Hilfe sog. Bilinguen begonnen, das sind zweisprachige Inschriften, die babylonische und altpersische Texte nebeneinander brachten. Altpersisch war eine damals schon bekannte indogermanische Sprache. Von Nutzen war dabei auch die Kenntnis des allgemeinen Baus der semitischen Sprachen aus dem Hebräischen und Arabischen.

DIE ÄGYPTER

Die Hieroglyphen

Ein anderes frühes Kulturzentrum des Mittelmeeres ist Ägypten. Der allgemeinen Meinung nach hat man dort eine reine Bilderschrift. Das ist aber nur sehr bedingt der Fall. Es ist nur so, daß die Schriftzeichen mehr die Bildform bewahrt haben als bei den Babyloniern. Handelt es sich bei einem Zeichen wirklich um den dargestellten Gegenstand, so ist das durch ein besonderes Zeichen, einen Strich angegeben; sonst entsprechen die Bilder Konsonantenverbindungen oder einzelnen Konsonanten, so daß diese Zeichen geradezu die Rolle von Buchstaben spielen. Sie werden oft neben die mehrkonsonantigen gesetzt, um diese zu ergänzen. Die Schrift der Denkmäler ist hier verschieden von der sich schon im alten Reich entwickelnden Kursivschrift, der sog. hieratischen Schrift, die mit dem Pinsel unter Benutzung von schwarzer und roter Tusche auf Papyrus geschrieben wurde. Ursprünglich wurde von oben nach unten geschrieben, später in Horizontalreihen, meist von rechts nach links. Dabei

Abb. 7 Relief aus der Grabkammer des Ptahhotep um 2700 v. Chr. mit Besitzstandsangaben auf der linken Seite

behielten aber die Schriftzeichen, anders als in Babylon, ihre Richtung gegen den Leser bei. Das mußte geschehen, weil hier die Schriftzeichen noch mehr oder weniger Bildcharakter hatten. Auch bei der Hieroglyphenschrift der Denkmäler ist die Schriftrichtung später horizontal, meist von rechts nach links, bei Inschriften aus Symmetriegründen zum Teil auch von links nach rechts. Man erkennt die Richtung daran, daß die Figuren immer dem Leser entgegenblicken. Aus der hieratischen Schrift, die insbesondere für religiöse Dokumente benutzt wurde, wird später durch weitere Verschleifung die demotische, die bis etwa in das erste nachchristliche Jahrhundert benutzt wird[1].

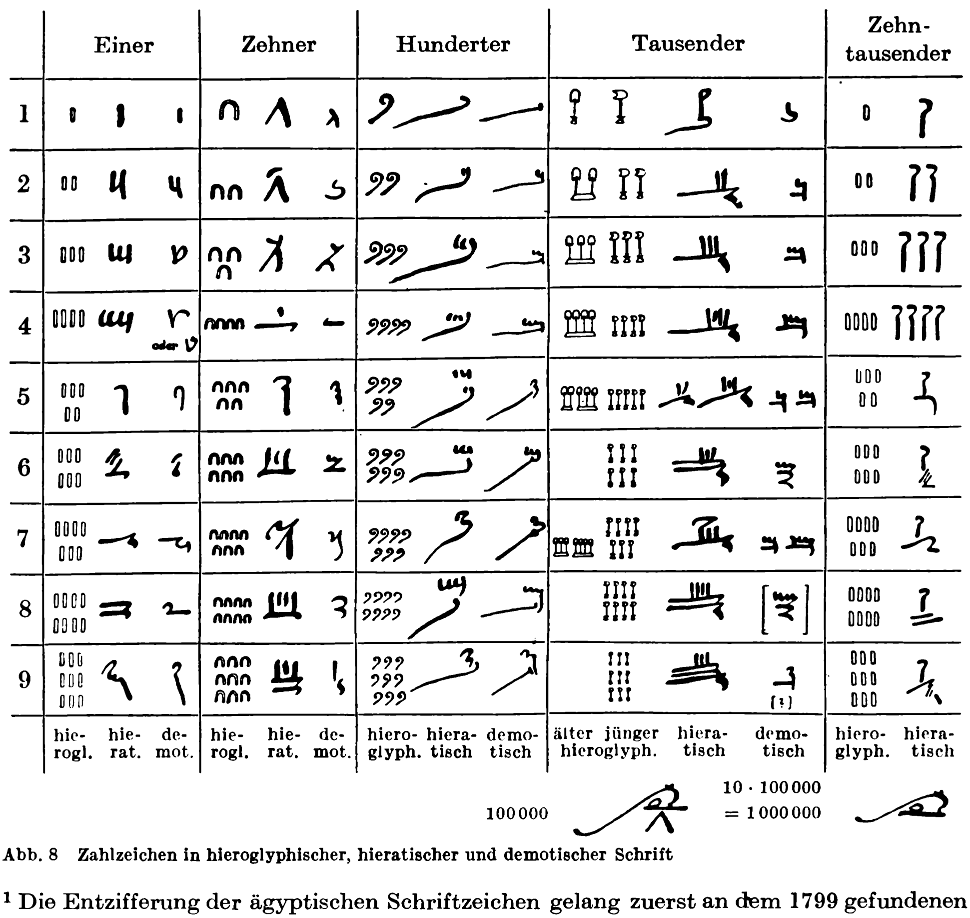


Abb. 8 Zahlzeichen in hieroglyphischer, hieratischer und demotischer Schrift

[1] Die Entzifferung der ägyptischen Schriftzeichen gelang zuerst an dem 1799 gefundenen Stein von Rosette, der den gleichen Text in hieroglyphischer, demotischer und griechischer Schrift enthält. Bald nach Auffindung des Steines lehrte der Physiker Th. Young, derselbe, der als erster eine Erklärung der optischen Interferenzerscheinungen mit Hilfe der Wellentheorie des Lichtes gab, seine demotische Inschrift zu lesen. Er konnte auch schon einige Hieroglyphen deuten. Die vollkommene Entzifferung des hieroglyphischen Schriftsatzes gelang dann 1822 Champollion.

Altägyptische Bruchzeichen

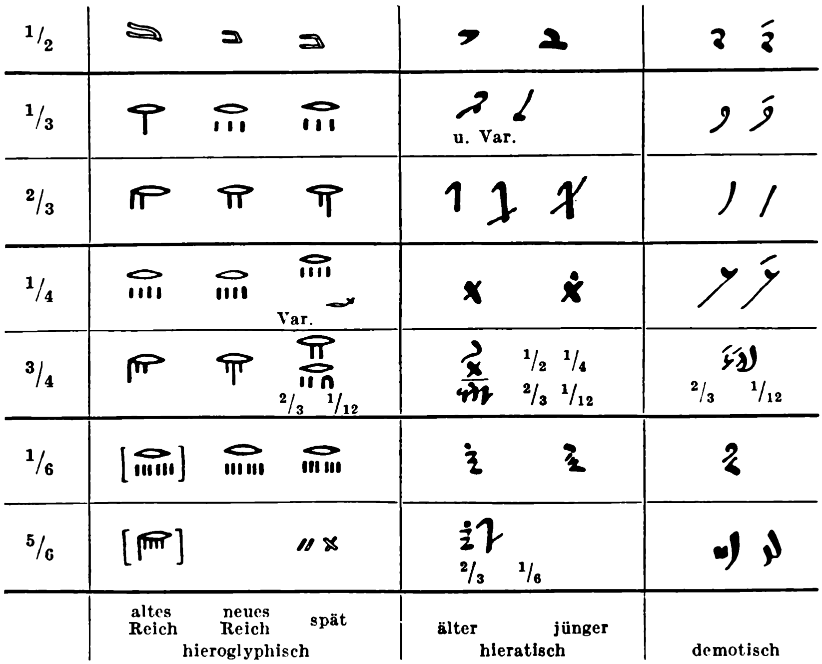


Abb. 9 Individualzeichen für Brüche

Das Zahlensystem der Ägypter

Das Zahlensystem der Ägypter ist streng dezimal. Für jede Stufe gibt es in den Hieroglyphen ein besonderes Zahlzeichen, das dann in seiner Stufe aneinandergereiht wird, und zwar werden die Einer durch Striche, die Zehner durch Hufeisen, die Hunderter durch aufgewickelte Meßbänder, die Tausender durch Lotosblumen, die Zehntausender durch Finger, die Hunderttausender durch Kaulquappen dargestellt. Abb. 7 zeigt ein Stück aus dem in der Grabkammer des Ptahhotep abgebildeten Totenopfer. Vor den Gänsen links sind Besitzstandsziffern angebracht (oben 121200, unten 120000). Die vorliegende Darstellung stammt aus der fünften Dynastie (etwa 2700 v. Chr.). Doch finden sich derartige Darstellungen schon in den Grabkammern der ersten Dynastie (3300–2900 v. Chr.). Die höheren Zahlzeichen treten erst nach und nach auf, bedeuten zunächst eine große Vielfachheit und werden dann erst das Zeichen für eine bestimmte Zahl. Sie verschwinden später auch wieder, als die geistig höherstehende Schicht in Ägypten sich immer mehr aus Mitgliedern ausländischer Nationen zusammensetzte. Im Koptischen zum Beispiel ist das Zeichen für 10000 wieder das Zeichen für eine sehr große Menge geworden.

In der Kursivschrift werden diese Zeichen, wenigstens bis zu 10000, durch Verschleifung fast ganz verziffert, wie man aus Abb. 8 sieht, wobei allerdings Reste der Darstellung durch Reihung erhalten bleiben.
Von 10000 bis 40000 hat man wieder reine Reihung, und von 50000 ab geht die Schreibweise in eine benannte Stellenschrift über, wie man es ähnlich schon bei den ersten Hundertern und Tausendern hat. Die Abbildung zeigt noch die hieratischen Zeichen für 10^5 und 10^6.
Eine Bruchbezeichnung kennt das Ägyptische im allgemeinen nur für Stammbrüche. Bei den Hieroglyphen setzt man unter das Zeichen für Mund den Nenner des Bruches. Da der Zähler immer 1 ist, braucht dieser nicht geschrieben zu werden. Bei der hieratischen Schrift wurde das Zeichen für Mund durch einen Punkt ersetzt. Doch gibt es, wie im Babylonischen, für einige kleinere Brüche auch Individualzeichen, wie Abb. 9 zeigt. Die Zeichen für $^3/_4$ und $^5/_6$ kommen allerdings sehr selten vor. Sonst ist der einzige Bruch, der nicht den Zähler 1 hat, $^2/_3$; er spielt in der ägyptischen Rechentechnik die gleiche Rolle wie die Stammbrüche. In der hieratischen Schrift hat man auch noch ein Individualzeichen für $^1/_4$.

Das Rechnen der Ägypter

Die Kenntnis der ägyptischen Mathematik vermitteln uns in der Hauptsache zwei große Papyrusrollen: das nach seinem früheren Besitzer benannte Papyrus Rhind, auch Rechenbuch des Ahmes genannt (32 cm hoch, $5^1/_2$ m lang), etwa aus der Zeit um 1700 v. Chr., und eine in Moskau aufbewahrte kleinere Papyrusrolle von 8 cm Höhe und etwa der gleichen Länge. Die Schwierigkeit der ägyptischen Mathematik liegt noch ganz auf dem Gebiete des numerischen Rechnens. Im wesentlichen wird hier die Multiplikation und die Division durch Verdoppelung und Halbierung ausgeführt. Eine ganz besondere Praxis beherrscht die Bruchrechnung. Sie operiert nur mit Stammbrüchen. Die Zerlegung anderer Brüche in Stammbrüche erfolgt in ganz bestimmter Weise. Die ersten Spalten des Papyrus Rhind geben Tabellen für diese Zerlegung. Abb. 10 zeigt die zweite Spalte dieser Tabelle mit der Zerlegung von $^2/_{17} = {}^1/_{12} + {}^1/_{51} + {}^1/_{68}$; $^2/_{19} = {}^1/_{12} + {}^1/_{76} + {}^1/_{114}$; $^2/_{21} = {}^1/_{14} + {}^1/_{42}$; $^2/_{23} = {}^1/_{12} + {}^1/_{276}$; $^2/_{25} = {}^1/_{15} + {}^1/_{75}$ und $^2/_{27} = {}^1/_{18} + {}^1/_{54}$. Die ersten drei Zeilen dieser Spalte sind nochmals mit Übersetzung in Hieroglyphen und darunter geschriebenen indischen Ziffern in der nächsten Abb. 11 wiedergegeben. Darin bedeutet $\dot{2}\dot{1} = {}^1/_{12}$, $\dot{1}\dot{5} = {}^1/_{51}$, $\dot{3}1 = 1^1/_3$, $\ddot{3} = {}^2/_3$ usw. Auf das Rechnen mit diesen Stammbruchzerlegungen einzugehen und auf die Prinzipe, nach denen diese Zerlegung erfolgt, würde hier zu weit führen. Bis auf die Zeichen in der oberen rechten Ecke enthält Abb. 10 nur Zahlzeichen, die sich mit Hilfe der Tabelle 8 lesen lassen.
Darüber, wie bei den Babyloniern und den Ägyptern praktisch gerechnet wurde, weiß man so gut wie nichts. Es ist möglich, daß auch dort schon Rechenbretter benutzt wurden, von denen später noch zu sprechen sein wird. Für die Ägypter kann man das aus einer Bemerkung von Herodot schließen.

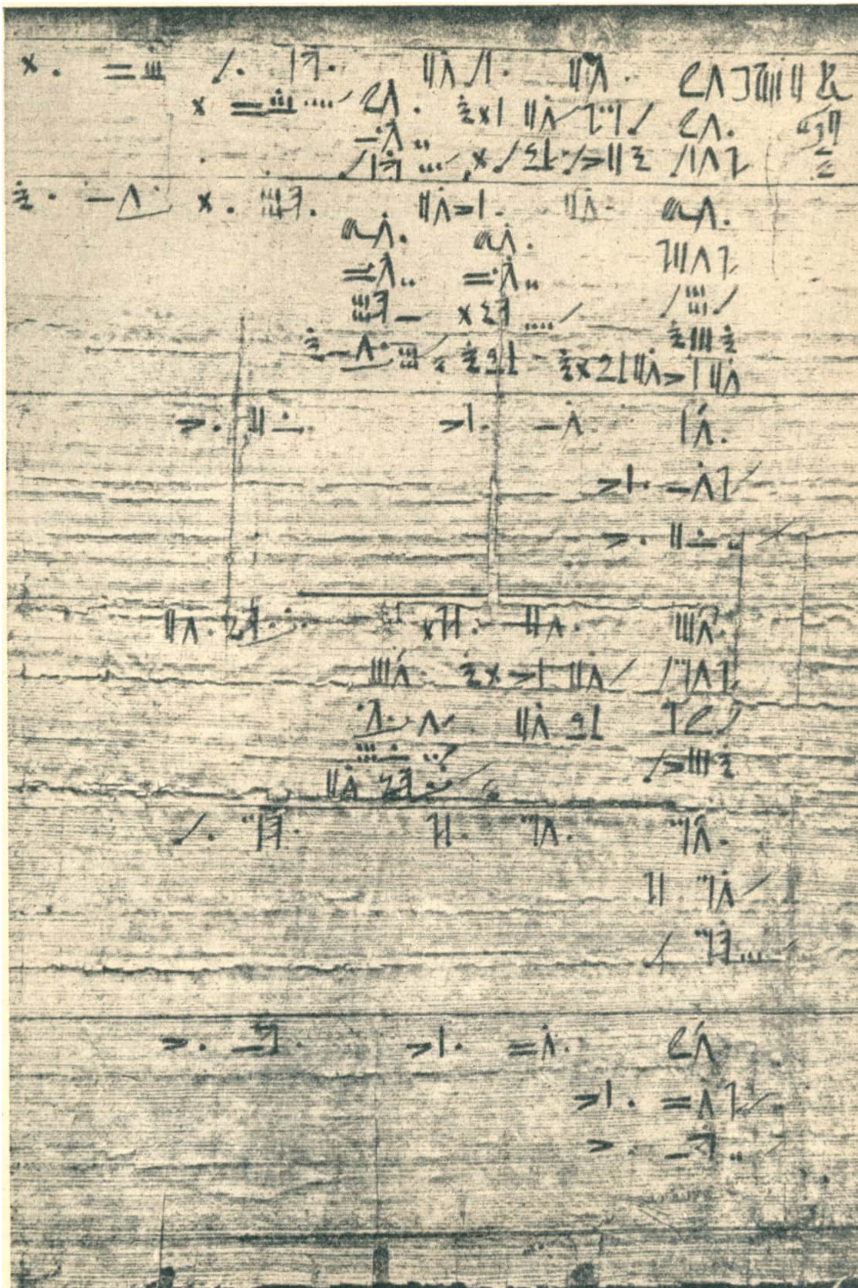
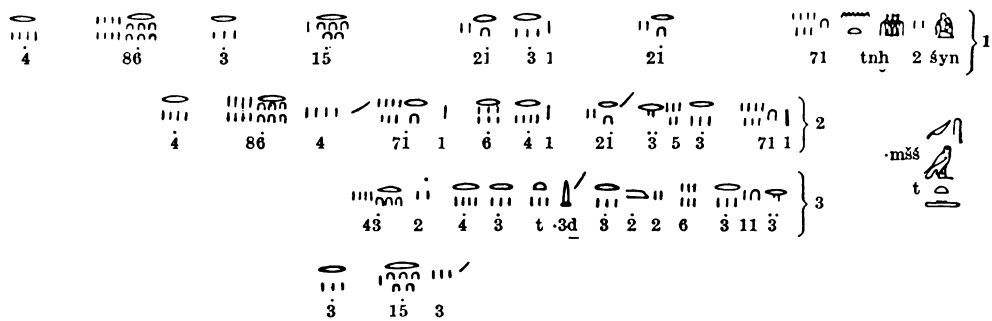


Abb. 10 Die zweite Spalte des Papyrus Rhind mit der $2/n$-Tabelle von $n = 17$ bis $n = 25$



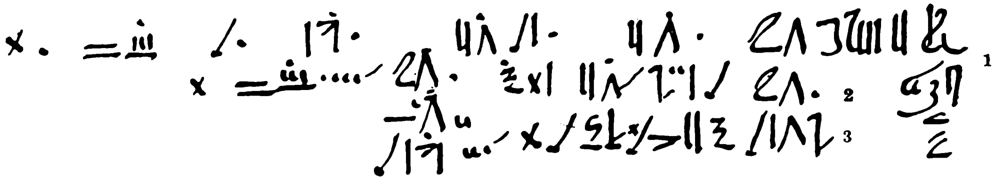


Abb. 11 Die ersten drei Zeilen von Abb. 10 mit Übersetzung in Hieroglyphen und in heutige Zahlschrift
Dabei bedeuten: $\dot{2}$i = 1/12, 1$\dot{5}$ = 1/51, $\ddot{3}$ = 2/3 usw.

ZAHLZEICHEN DER GRIECHEN

Herodianische Zahlzeichen

Übergeht man die Phönizier, die, vielleicht angeregt durch die Schreibweise der Ägypter, etwa im 14. Jahrhundert v. Chr. die Buchstabenschrift erfanden und die ebenso wie die anderen semitischen Völkergruppen ihre Zahlen wie die jonischen Griechen mit Buchstaben bezeichneten, so ist als nächstes die Zahlenschreibweise der Griechen zu betrachten. Diese hatten zwei verschiedene Arten von Zahlzeichen. Die eine Art bezeichnet man als herodianische Zahlen, weil sie von dem Grammatiker

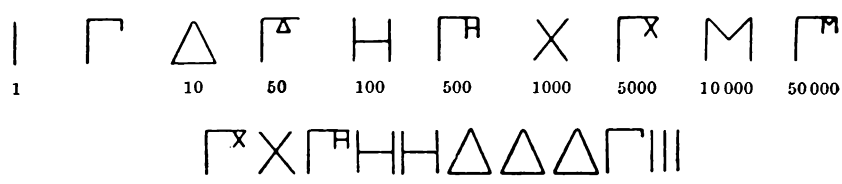


Abb. 12 Herodianische Zahlzeichen

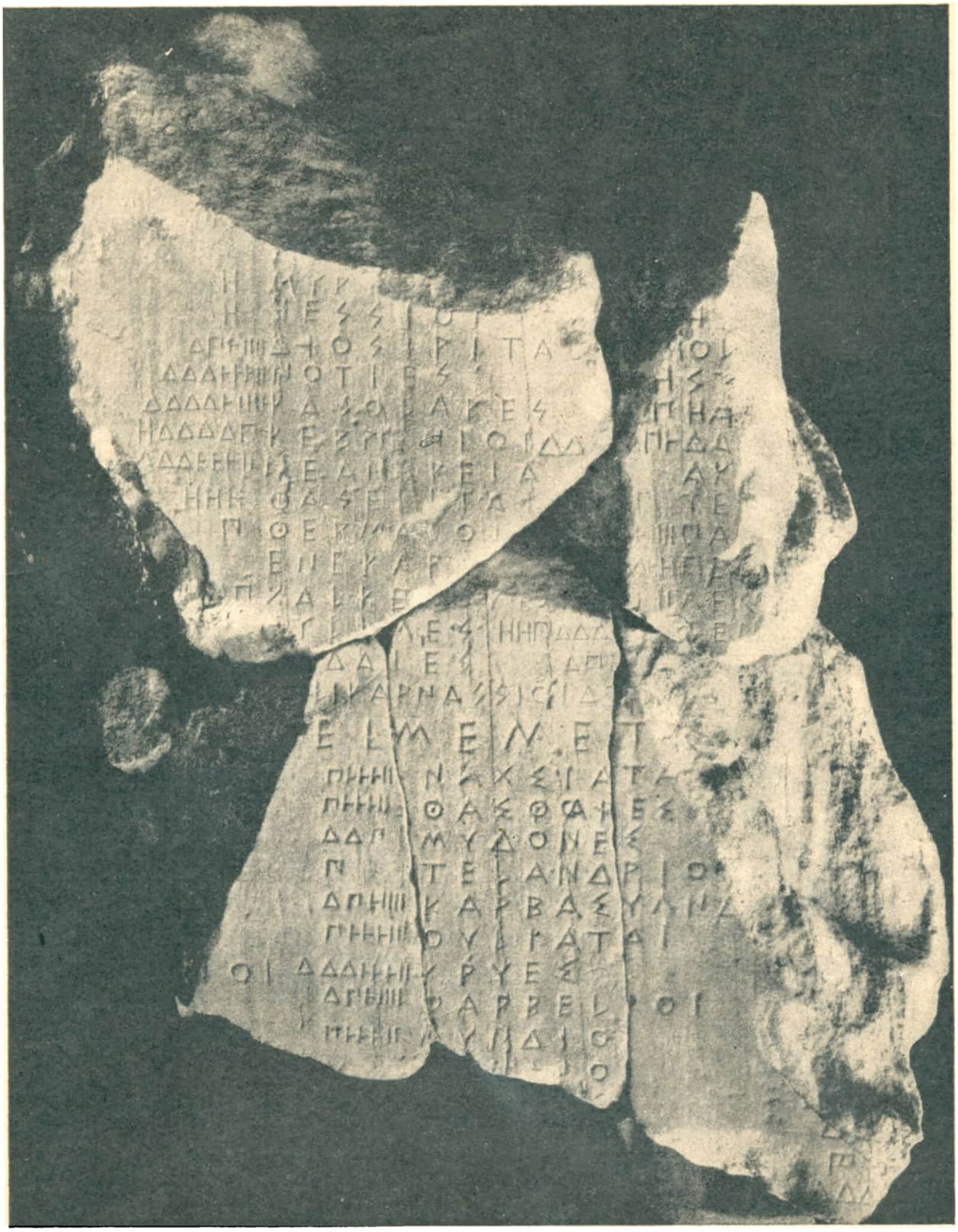


Abb. 13 Attische Tributlisten von der Akropolis mit zahlreichen Zahlzeichen

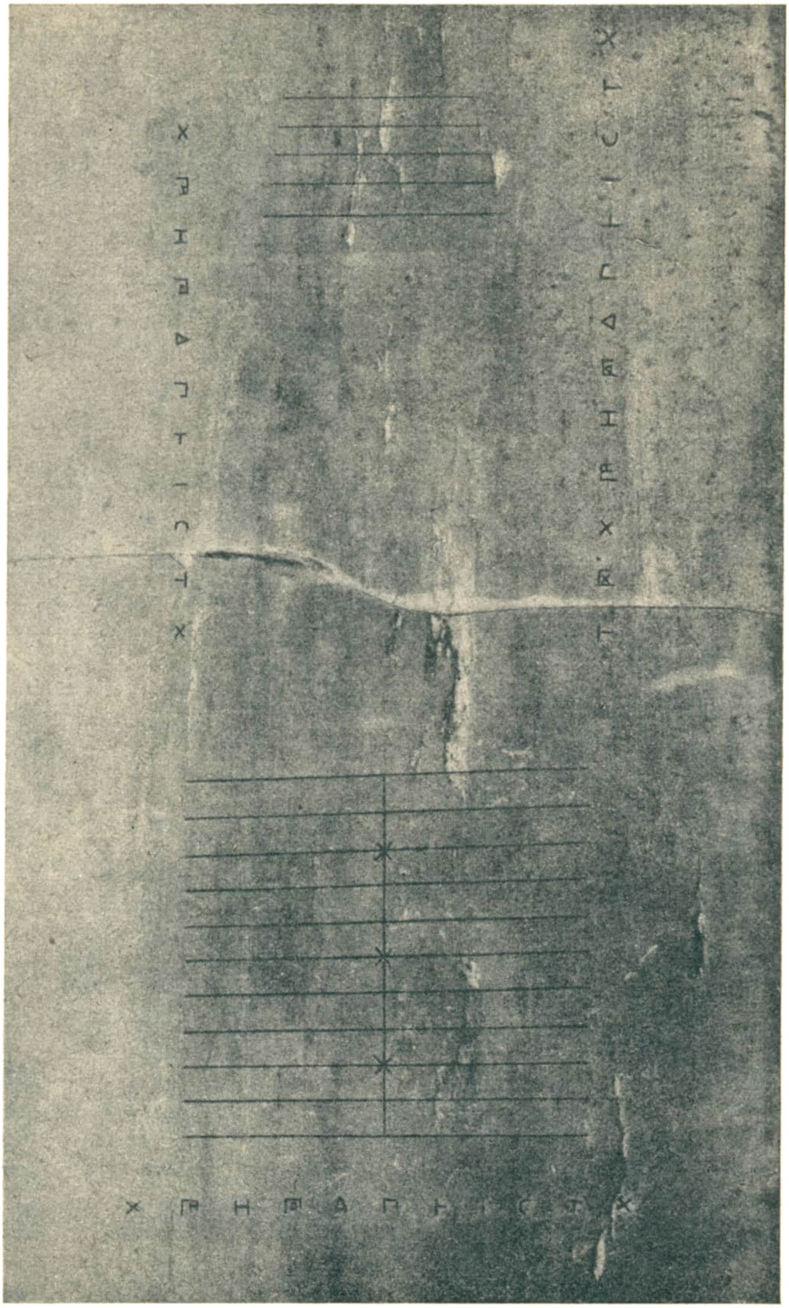


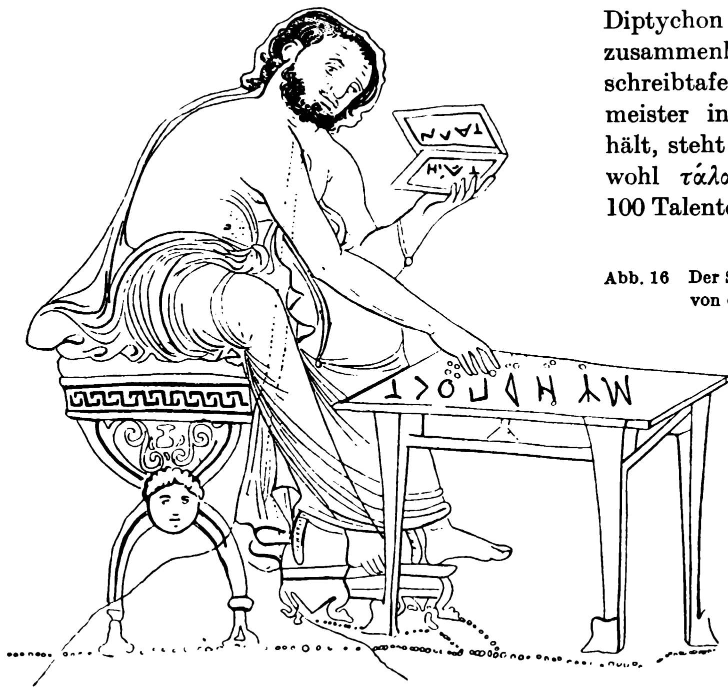
Abb. 14 Die Salaminische Rechentafel

Herodian um 200 n. Chr. überliefert wurden. Sie benutzten die Anfangsbuchstaben 5: Π (Πέντε); 10: Δ (Δέκα); 100: H (Ἑκατόν); 1000: X (Χίλιοι); 10000: M (Μύριοι) der griechischen Zahlwörter und bilden für 50, 500 usw. daraus Abkürzungen, wie es Abb. 12 zeigt. Diese Zeichen finden sich auf attischen Inschriften von etwa 550 bis 100 v. Chr. und waren zur Zeit des Perikles in amtlichem Gebrauch. Abb. 13 zeigt als Beispiel eine auf der Akropolis gefundene Tributliste, in der die Zahlungen der einzelnen Tributverpflichteten aufgezeichnet sind. Statt der Einer ist das Zahlzeichen für Drachme ⊢ eingetragen, jeder Strich dahinter bedeutet einen Obolus. Sie finden sich unter anderem auch auf der sog. salaminischen Rechentafel, einer Marmortafel in der Größe 149 × 75 × 7,5 cm, die als Rechenbrett für Geldrechnung diente. Außer den oben angegebenen Zeichen findet man noch das Zeichen T für ein Talent, das 60000 Drachmen (⊢) zählte. Die letzten vier Zeichen sind: I für einen Obolus, der $^1/_6$ Drachme gilt, C für einen halben, T für einen viertel und X für einen achtel Obolus. Letzterer hieß auch Chalkus. Diese Zeichen wurden auch ohne Bezug auf den Münzwert für die Brüche $^1/_6$, $^1/_{12}$, $^1/_{24}$ und $^1/_{48}$ gebraucht.

Das praktische Rechnen

Diese Zahlenschreibweise war, ähnlich wie die römische, für das praktische Rechnen wenig geeignet. Die Durchführung von Rechnungen erfolgte daher in Griechenland, wie in Rom, auf Rechenbrettern mit Rechensteinen. Die dabei vorzunehmenden Operationen waren ähnlich denen beim Rechnen auf den Linien, wie es die älteren deutschen Rechenbücher beschreiben. Später wird darauf zurückzukommen sein. Das Bild eines Rechners am Brett ist uns im Schatzmeister der Dariusvase aufbewahrt, die bei Canosa, dem alten Cannusium, in Apulien gefunden wurde und die sich jetzt im Museo nazionale in Neapel befindet. In dem unteren der drei Bildstreifen sieht man in der Mitte den Schatzmeister, dem von rechts Tribut bringende Männer nahen. In Abb. 16 ist der Schatzmeister noch einmal herausgezeichnet. Auf dem Rechentisch sind die Zahlzeichen für 50, 500 usw. nicht besonders angegeben, wie es auf der salaminischen Tafel geschehen ist. Bedeutet, wie das später der Fall ist, ein Rechenstein über den Zahlzeichen das Fünffache eines darunterliegenden, so ist die Zahl 1731 Drachmen 4 Obolus gelegt. Auf dem

Abb. 15 Die Dariusvase aus dem Museo nazionale in Neapel



Diptychon (einer doppelten, zusammenlegbaren Wachsschreibtafel), die der Schatzmeister in der linken Hand hält, steht *TAΛNTA:H*, was wohl *τάλαντα ʿεκατόν*, also 100 Talente heißen soll.

Abb. 16 Der Schatzmeister von der Dariusvase

Die jonischen Zahlzeichen

Die andere, von Milet ausgehende Schreibweise, die unter Benutzung einiger älterer Buchstaben den Buchstaben Zahlwert gibt, bezeichnet man als jonische (Abb. 17). Dabei werden Multiplikationen mit tausend durch einen Strich links vom Buchstaben gekennzeichnet. Verwendet werden durchgehend nur große Buchstaben. Für die Brüche $^1/_2$ und $^2/_3$ gibt es besondere Individualzeichen; sonst bedeutet ein Strich rechts oben, daß die Zahl Nenner eines Stammbruches ist. Im Text vorkommende Zahlen werden durch Überstreichen hervorgehoben. Diese Zahlbezeichnung findet sich seit dem fünften vorchristlichen Jahrhundert und drängt die andere immer mehr zurück. In staatlichen Dokumenten kommt sie seit 150 v. Chr. vor. In Athen werden die Buchstabenzahlen 50 n. Chr. amtlich. Vielfach findet man sie auf Münzen; so steht auf der abgebildeten athenischen Münze der Insel Samos, die um 430 v. Chr. geprägt wurde, ein $\Theta = 9$ und auf der Rückseite des weiterhin abgebildeten Tetradrachmon des Königs Antiochus VI. (145–142 v. Chr.) aus dem 170. Jahr der Seleukidenherrschaft $OP = 170$. Ähnlich ist das Alter auf nebenstehendem Grabstein angegeben, auf dem es heißt: (Euporos) der Freigelassene des Epinikos erfreute sich eines Alters von 55 (NE) Jahren.
Buchstabenzahlen verbreiteten sich durch die Alexanderzüge im ganzen vorderen Orient. Später übernahmen sie die Araber, und in Byzanz hält man bis zur Türken-

Zahlwert	Griechisch	Gotisch	Zahlwert	Griechisch	Gotisch	Zahlwert	Griechisch	Gotisch	Zahlwert	Griechisch
1	Α	𐌰	10	Ι	𐌹 𐌹̈	100	͵Ρ	𐍂	1000	͵Α
2	Β	𐌱	20	Κ	𐌺	200	Σ	𐍃	2000	͵Β
3	Γ	𐌲	30	Λ	𐌻	300	Τ	𐍄		
4	Δ	𐌳	40	Μ	𐌼	400	Υ	𐍅	$^1/_2$	∠
5	Ε	𐌴	50	Ν	𐌽	500	Φ	𐍆	$^2/_3$	ω
6	F	𐌵	60	Ξ	𐌾	600	Χ	𐍇		
7	Ζ	𐌶	70	Ο	𐌿	700	Ψ	𐍈		
8	Η	𐌷	80	Π	𐍀	800	Ω	𐍉		
9	Θ	𐌸	90	Ϙ	𐍁	900	Ϡ	𐍊		

Abb. 17 Griechische und gotische Buchstaben als Zahlzeichen

herrschaft, also bis ins 15. Jahrhundert, an ihnen fest. Auch Ulfilas übernahm bei seiner Bibelübersetzung ins Gotische diese Buchstabenzahlen. Abb. 21 zeigt die Vorderseite des Blattes 114 des Codex argenteus Upsaliensis, die ein Stück aus dem Evangelium des Johannes enthält. Am Rande findet man die Versnummern, unten im ersten Bogen die gleichen Nummern, in den anderen drei Bogen die der Parallelstellen aus den drei anderen Evangelien.

Abb. 18 Athenische Münze der Insel Samos mit Zahlzeichen

Abb. 19 Tetradrachme aus der Zeit der Seleukidenherrschaft mit Zahlzeichen

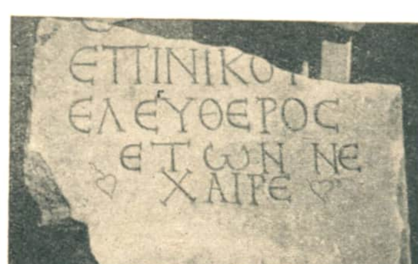


Abb. 20 Grabstein mit Altersangabe (Aufnahme Prof. Klaffenbach)

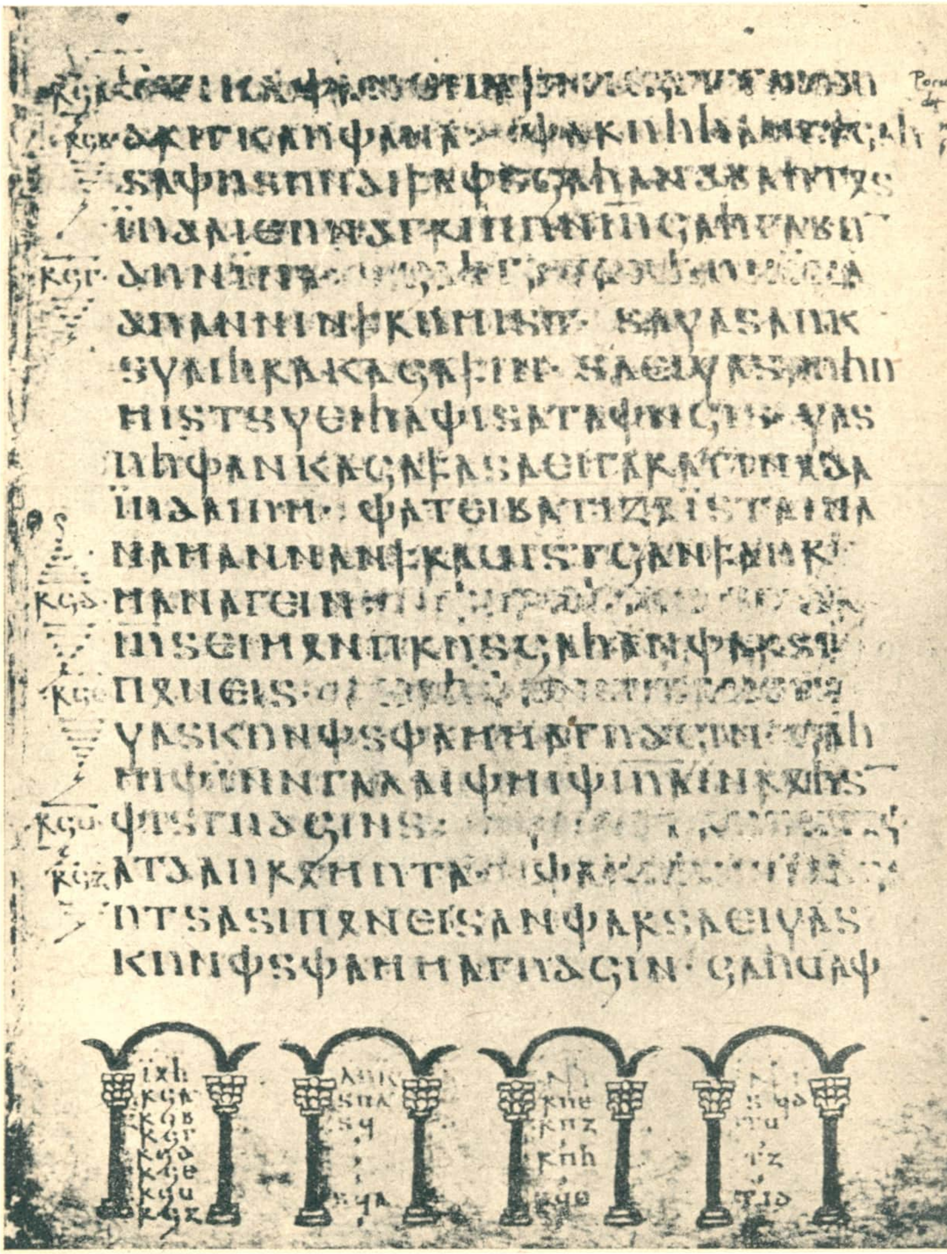


Abb. 21 Vorderseite von Blatt 114 des Codex argenteus Upsaliensis

Gematria

Die Schreibweise der Zahlen durch Buchstaben führte vor allem bei den Juden, aber auch bei anderen Völkern zu einer Pseudowissenschaft, der Gematria. Man ordnete dem Ding oder Namen die Zahl zu, die sich dadurch ergab, daß man die Buchstaben als Zahlen las und diese addierte. Personen und Dinge mit gleichem Zahlwert brachte man dann zueinander in Beziehung. So ist wohl die Zahl des Tieres entstanden, von der es in der Offenbarung Johannes 13, 18 heißt: »Wer Verstand hat, der überlege die Zahl des Tieres, denn es ist eines Menschen Zahl, und seine Zahl ist sechshundert sechs und sechzig.« Es ist möglich, daß sie sich auf den Kaiser Nero bezieht, denn »Neron käsar« in hebräischer Schrift, in der ja nur die Konsonanten geschrieben werden, hat diesen Zahlwert. Das Wort Amen hat den Zahlwert 99 ($\alpha = 1$, $\mu = 40$, $\varepsilon \doteq 8$, $\nu = 50$). Daher findet man in mittelalterlichen Manuskripten am Ende von Gebeten gelegentlich diese Zahl.

RÖMISCHE ZAHLZEICHEN IM ALTERTUM

Form der Zahlzeichen

Die römischen Zahlzeichen, wenigstens für die kleineren Zahlen, sind zur Genüge bekannt, da sie ja noch heute auf Inschriften usw. benutzt werden. Sie scheinen aus Zeichen, die sich durch Einkerben ergaben, entstanden zu sein und haben für die einzelnen Stufen, aber auch für die Halbstufen besondere Zeichen, so für 5 die obere Hälfte des Zeichens für 10. Auf Münzen, insbesondere etruskischen, findet man dafür aber auch die untere Hälfte verwendet. Das Zeichen für 50 ist keinesfalls ein L, wodurch es später ersetzt wurde. Eine ältere Form dieses Zeichens, einen Strich mit einem Bogen darunter, zeigt die in Abb. 22 wiedergegebene Tafel aus dem Jahre 132 v. Chr., die im Forum popilii in Lukanien gefunden wurde. (Übersetzung im Anhang, S. 78.) Auch die Zeichen für hundert und tausend sind nicht die Anfangsbuchstaben der entsprechenden Zahlwörter, die später besonders im Mittelalter dafür verwendet wurden. Tausend wurde durch eine eingeklammerte 1 (I) bezeichnet oder auch in einem Zuge durch das Zeichen ∞, das wir heute für Unendlich gebrauchen. Diese Zeichen haben eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Form des M. Kommt M in alten Inschriften vor, so ist es immer eine Abkürzung des Wortes mille. Das Zeichen für 500 ist die Hälfte des Zeichens für tausend, eine 1 mit einer Klammer I) wurde dann später das D.

Schreibweise großer Zahlen

Doppelte Einklammerung der Eins gibt das Zeichen für 10000 und dreifache das für 100000. So zeigt die nächste Abb. 23 einen Teil einer Inschrift aus dem Jahre

41 v. Chr. mit der Kostenangabe 380000 Sesterze. Ein Sesterz, der ungefähr den Wert von 10 Pfennigen hat, hat $2^1/_2$ Aß (S = semis = $^1/_2$). Diese Zahlen findet man zum Beispiel auch als Nummern auf den drei römischen Denaren des C. Calpurnius Piso 64 v. Chr. mit dem Kopf des Apollo (Abb. 24). Dort steht 5000, 10000 und 50000. Zahlzeichen für größere Zahlen gab es zunächst nicht, wie man aus Abb. 25 ersieht. Sie gibt das Bruchstück einer Inschrift von der Columna rostrata auf dem Forum romanum zur Erinnerung an den Sieg über die Karthager bei Mylae 260 v. Chr. wieder. Sie wurde etwa 50 n. Chr. errichtet. Ihre unteren Zeilen geben die Beute an, als Gesamtbeute werden eine große Zahl (sichtbar sind 21) von 100000 Aß angegeben. Um diese Zeit tauchen dann aber auch Zeichen für größere Zahlen auf, z. B. für eine Million eine eingeklammerte und überstrichene $\overline{)\mathrm{X}(}$. Auf der Abb. 26, die Teile einer in Ostia gefundenen Tafel wiedergibt, die etwa aus der Zeit 100 n. Chr. stammen

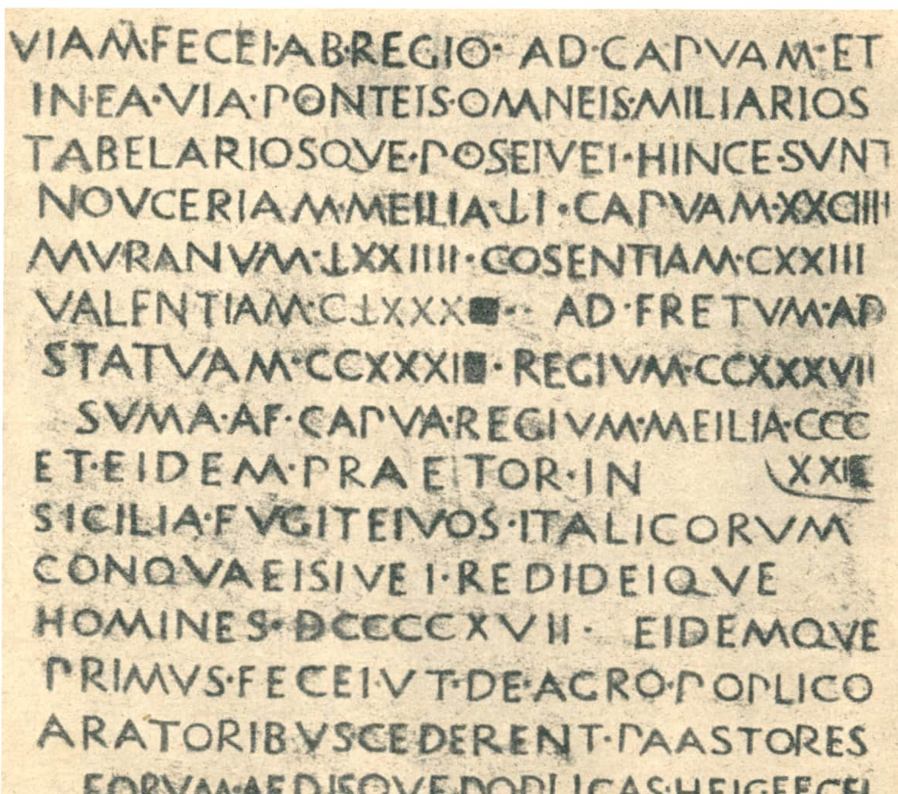


Abb. 22 Tafel aus dem Jahre 132 v. Chr., gefunden bei Forum popilii in Lukanien (Übersetzung S. 78)

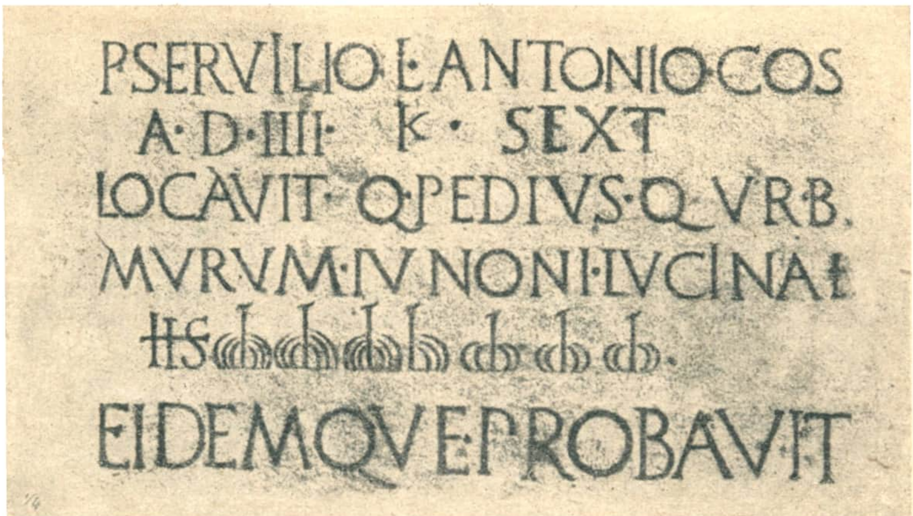


Abb. 23 Inschrift mit der Kostenangabe: 380000 Sesterze

Abb. 24 Denare des C. Calpurnius Piso vom Jahre 64 v. Chr. mit Nummern

dürfte, wird gesagt, daß der Kaiser Tiberius 100 Millionen Sesterze zur Beseitigung der beim Brande des Circus maximus am 1. November 36 entstandenen Schäden gegeben hat[1].

[1] Für diejenigen Leser, die sich für die Schriftform interessieren, sei bemerkt, daß die Schrift in Abb. 22 eine frühe römische Kapitalschrift ist, bei der die Strichdicke überall die gleiche ist und die keine Schraffuren hat, d. h. keine kleinen Querstriche an den Enden der Hauptstriche, z. B. oben und unten am T oder am Anfang und Ende vom N. Aus dieser Schrift entwickelt sich dann die Quadrata, wie sie etwa Abb. 23 und 25 zeigen und wie sie in der vollkommensten Form die berühmte Inschrift an der Trajanssäule aufweist. Hier bestehen Unterschiede in den Strichdicken, und die Buchstaben weisen Schraffuren auf. In Abb. 26 erkennt man schon einen Übergang von der Quadrata zur Rustika. Man beachte zum Beispiel den Rückstrich oben rechts am V. Erst etwa hundert Jahre später ist diese Schrift voll ausgebildet; die hier noch vorhandene quadratische Form der Buchstaben wird schmäler, und die Ausführung ist flüchtiger. Eine ähnliche Entwicklung zeigt auch die griechische Schrift, wie ein Vergleich von Abb. 13 und 20 erkennen läßt.

Abb. 25 Inschrift von der Columna rostrata aus der Zeit um 50 n. Chr. zur Erinnerung an den Seesieg über die Karthager bei Mylae. 260 v. Chr.

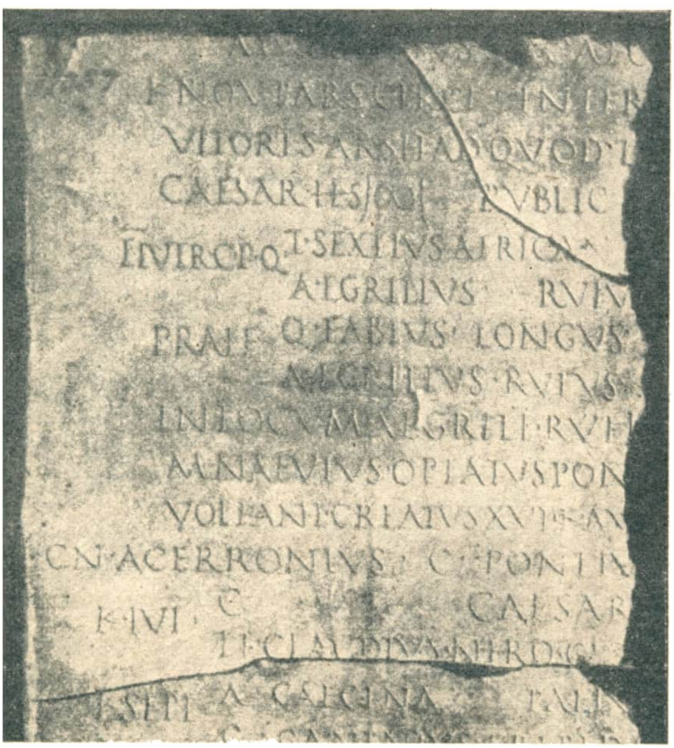


Abb. 26 Inschrifttafel aus der Zeit um 100 n. Chr., gefunden in Ostia

Praktisches Rechnen

So systematisch diese Zahlenbezeichnung aufgebaut ist, so wenig eignet sie sich für das wirkliche Rechnen, wie man vielleicht selbst einmal an einer Multiplikationsaufgabe erproben möge. Dafür wurde auch bei den Römern der Abacus, das Rechenbrett, gebraucht. Aus römischen Schriftstellern kann man entnehmen, daß die Römer ursprünglich Rechenbretter mit auflegbaren Rechensteinen hatten. In spätrömischer Zeit benutzte man einen Handabacus (Abb. 27), in dem statt der aufzulegenden Rechensteine in Schlitzen verschiebbare Knöpfe benutzt werden. Jeder Knopf in einem der oberen Schlitze bedeutet das Fünffache eines solchen in dem entsprechenden

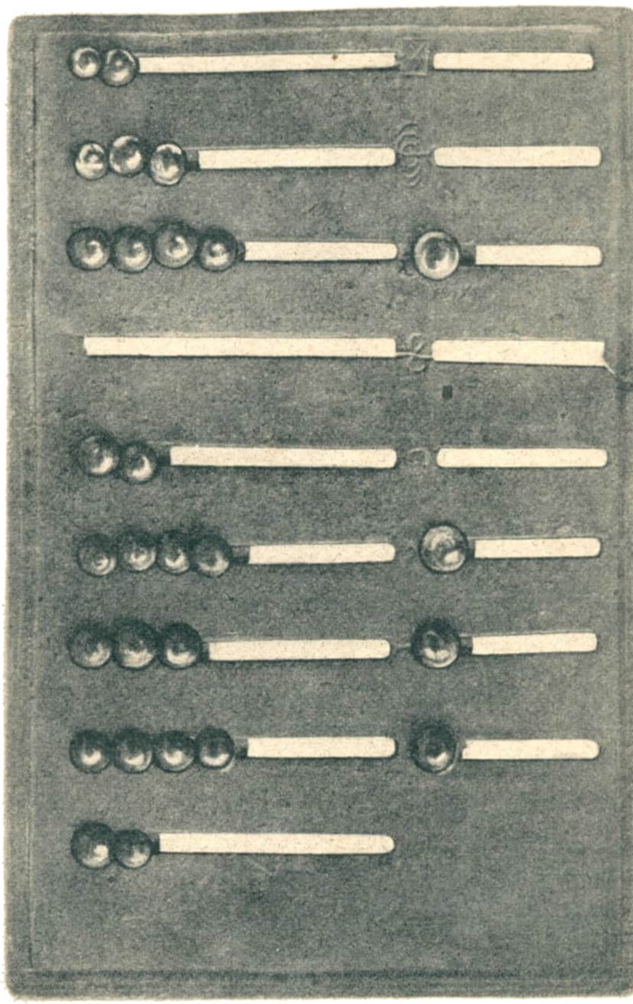


Abb. 27 Römischer Handabacus für Geldrechnung

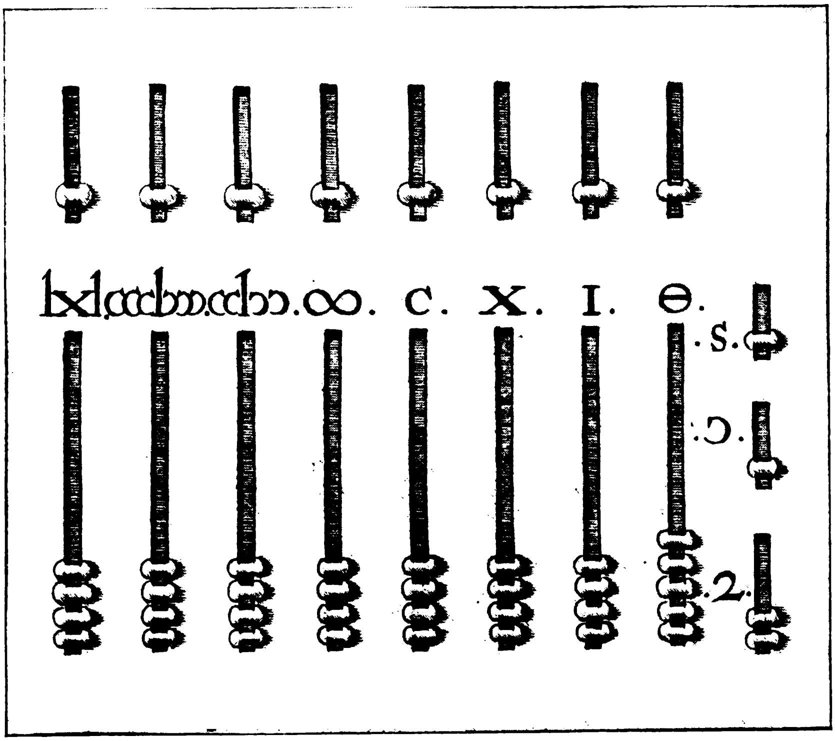


Abb. 28 Römischer Handabacus in der Darstellung von Velser (1682)

unteren. Das abgebildete Exemplar wird in Paris im »Cabinet des médailles« aufbewahrt. Die einzelnen Schlitze sind von links nach rechts mit $\overline{)\mathrm{X}(}$ $= 10^6$, ..., 1000 ... bis 1 bezeichnet. Dann kommt der Schlitz für Unzen (12 Unzen = 1 Aß). Er enthielt ursprünglich fünf statt vier Knöpfe, wie die anderen Schlitze. Der letzte Schlitz war durch Querstege in drei Teile geteilt, über bzw. neben denen die Bezeichnungen für

die Semiunzia $= {}^{1}/_{24}$ Aß
den Sicilicus $= {}^{1}/_{48}$ Aß
und die Sextula $= {}^{1}/_{144}$ Aß

stehen. In den beiden oberen Teilen bewegten sich ein, im unteren zwei Knöpfe, wie die dem Buch von Velser, das 1682 in Nürnberg gedruckt wurde, entnommene Abbildung 28 zeigt. Wie die Babylonier mit Sexagesimalbrüchen rechneten, so die Römer auf Grund der Einteilung von einem Aß in 12 Unzen mit Duodezimalbrüchen. Diese Bruchrechnung machte sich allmählich von der Verbindung mit dem Geld frei. Sämtliche elf Bruchteile hatten eigene Namen, z. B. ${}^{11}/_{12}$ = deunx, ${}^{10}/_{12}$ = dextans, ${}^{9}/_{12}$ = dodrans usw.

Die subtraktive Bezeichnung, die schon bei den Babyloniern auftrat und die man in den Zahlwörtern der Römer findet (18 = duodeviginti, 19 = undeviginti), wird gelegentlich in der Schreibweise angewendet, aber nicht immer; z. B. findet man XVIIII und XIX, XXXX und XL usw. Ausgeprägter ist diese Schreibweise bei den Etruskern, wobei zu beachten ist, daß diese von rechts nach links schreiben.

RÖMISCHE ZAHLZEICHEN IM MITTELALTER

Ersatz der Zahlzeichen durch kleine Buchstaben

Die römischen Zahlzeichen wurden ebenso wie der Abacus vom Mittelalter übernommen. Jetzt wurde eine Multiplikation mit tausend durch Überstreichen angedeutet. Außerdem trat eine Ersetzung der Zahlzeichen durch Buchstaben, und zwar durch kleine Buchstaben ein; z. B. wurde X durch x, V durch v oder das damals gleich geschriebene u ersetzt. Daher: Jemandem ein X für ein U vormachen, d. h. ihm das

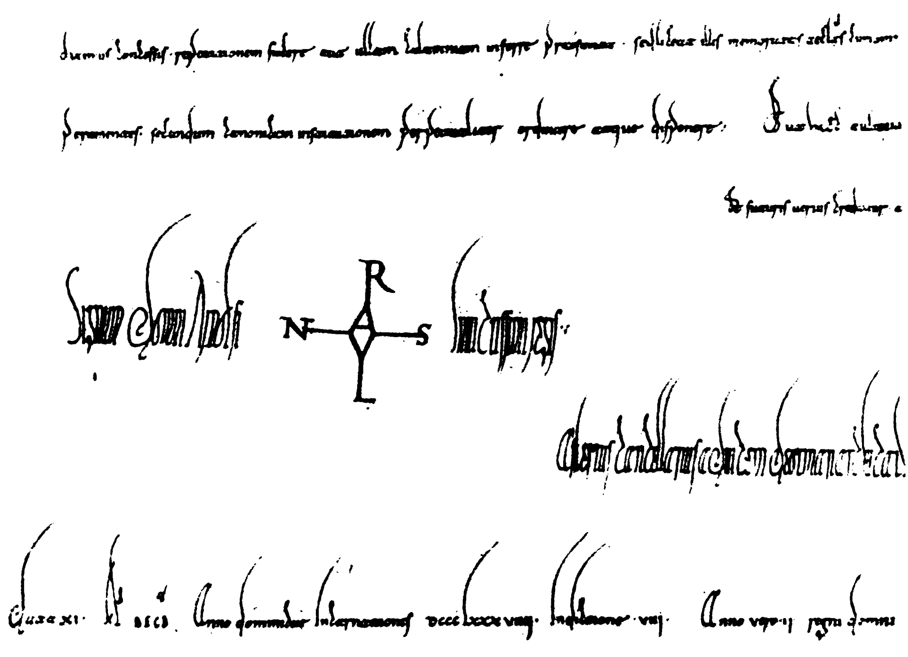


Abb. 29 Datierung und Unterschrift einer Urkunde Arnulfs von Kärnten

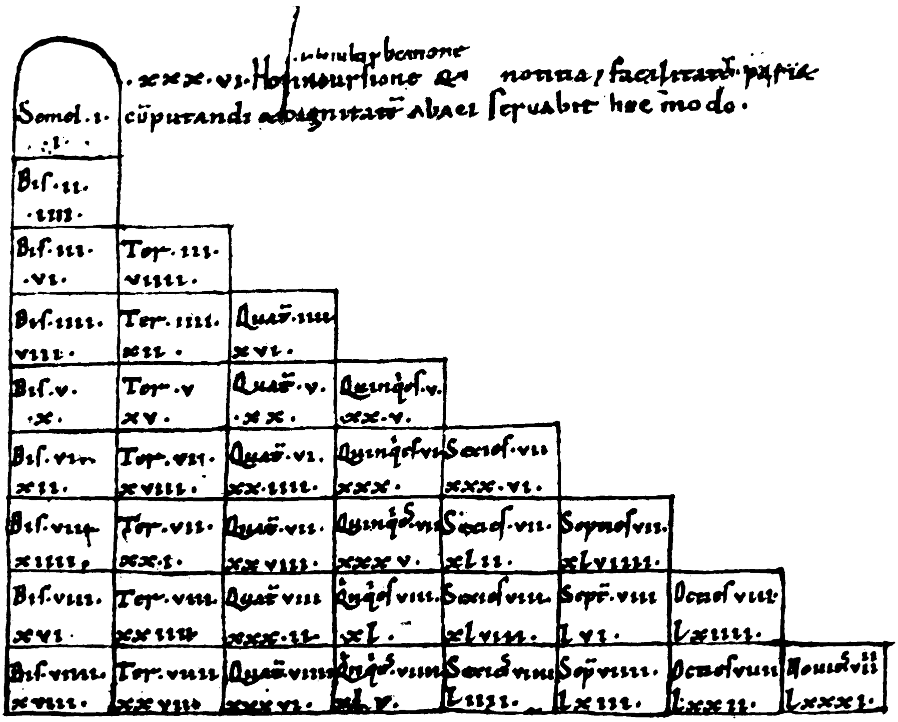


Abb. 30 Pythagoreische Tafel aus einem Tractatus de abaco des 12. Jahrhunderts (Cod. mon. lat. 14689, Blatt 50, Vorderseite)

Doppelte anrechnen. Die Zahlzeichen unterscheiden sich kaum noch von der Schrift. Das zeigt z. B. die hier abgebildete Datierung einer Urkunde Arnulfs von Kärnten (die Urkunden Karls des Großen sind nur vom soundsovielten Jahre seiner Regierung datiert), die aus dem Jahre 889, dem 11. Jahre seiner Regierung stammt, wie man in der unteren Zeile liest. Die Einer sind durch i ersetzt, nur der letzte, um Fälschungen zu vermeiden, durch ein j. Interessant ist vielleicht eine Bemerkung über die Art, wie die Kaiser, die ja meistens nicht schreiben konnten, eine Unterschrift vollzogen. Der Schreiber zeichnete das Kreuz und setzte an die Enden der Arme die Hauptkonsonanten des Namens, z. B. bei Karl dem Großen (Carolus) C, R, L, S, oben beginnend im Gegenzeigersinne herumgehend. Der Kaiser vollzog dann die Unterschrift dadurch, daß er die Raute mit dem Querstrich einzeichnete. Diese gibt die Vokale A, O, U des Namens. Man erkennt bei den Urkunden oft deutlich an der Färbung, daß diese Raute zum mindesten mit anderer Tinte eingezeichnet ist.
Bei gewissen Formen des Rechenbrettes (s. u.) brauchte man das Einmaleins, das meistens in einem Schema, das ebenso wie das Rechenbrett (Mensa pythagorea oder Arcus pythagoreus) pythagoreische Tafel hieß, aufgezeichnet wurde. Abb. 30 zeigt

eine solche Tafel aus einer Handschrift des 12. Jahrhunderts, einer Abschrift des wahrscheinlich von Gerbert (dem Erzieher des Hohenstaufenkaisers Otto II., der von 999–1003 als Sylvester II. auf dem päpstlichen Stuhle saß) herrührenden Tractatus de abaco. Auch hier eine vollkommene Verschriftung der Zahlzeichen. Die erste Spalte gibt das Einmaleins mit 2 (bis = zweimal), die zweite mit 3 (ter = dreimal) usw. Man kann auch die Zeilen betrachten, dann gibt z. B. die untere die Vielfachen von 9 usw. (Cod. mon. lat. 14689).

Schreibweise größerer Zahlen

Eine Art der Schreibweise größerer Zahlen zeigt die nächste Abb. 31. Es ist die schematische Darstellung eines fünfzehnspaltigen Rechenbrettes aus dem Tractatus de abaco Gerlandi (Cod. mon. lat. 14689, Blatt 100, Rückseite, unterer Rand). Dabei ist die Bezeichnung von 10^{10} bis 10^{12} nicht konsequent, anscheinend durch die Verständnislosigkeit des Abschreibers, wie das oft in derartigen Handschriften vorkommt. Die Überstreichungen sind in dieser Tafel überflüssig. Sie bedeuten hier keine Multiplikation mit tausend. Im Text kommt die Überstreichung allerdings vielfach vor, um die Zahlen von den Buchstaben zu unterscheiden, was jetzt bei der Verschriftung der Zahlen nötig sein konnte.

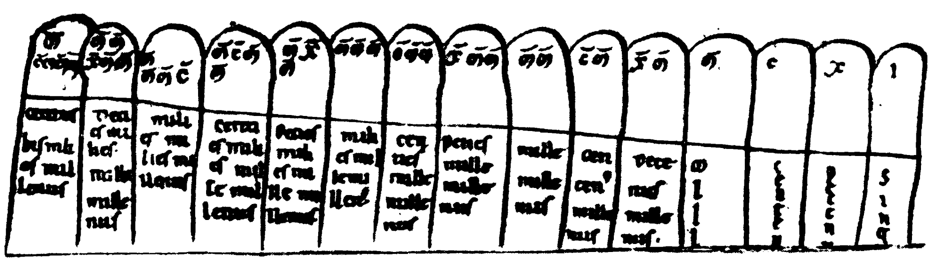


Abb. 31 Schema eines Rechenbrettes aus dem Tractatus de abaco Gerlandi (Cod. mon. lat. 14689, Blatt 100, Rückseite)

Abb. 32 Schema eines Rechenbrettes aus einer Abschrift der sog. Geometrie des Boëthius (13. Jahrhundert) (Cod. mon. lat. 23511, Blatt 40, Vorderseite)

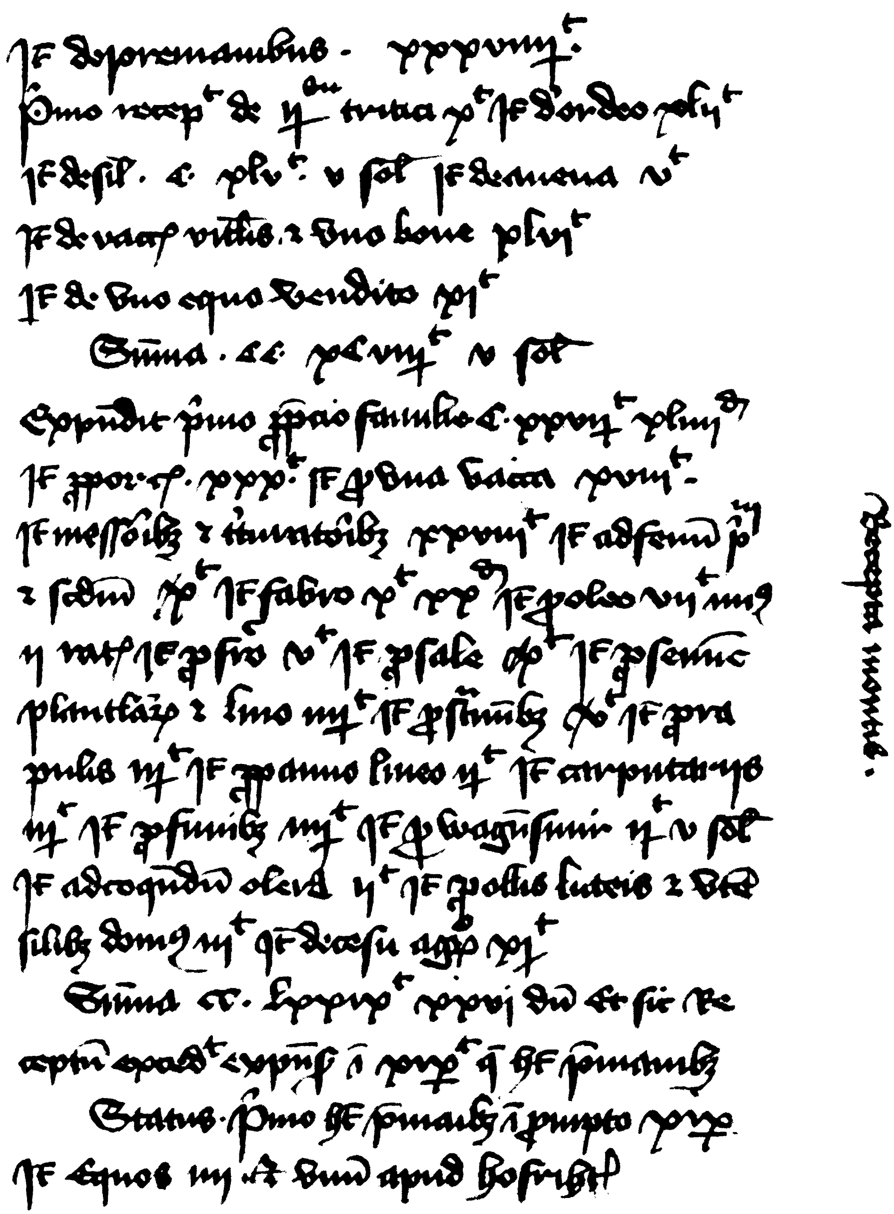


Abb. 33 Rechnungsbuch des Klosters Heilsbronn von 1395 (Blatt 153, Vorderseite, erste Spalte) (Übersetzung S. 78/79)

Konsequenter ist die Bezeichnung der Zahlen auf einer anderen Darstellung eines Rechenbrettes ebenfalls aus einer Handschrift jener Zeit (Cod. mon. lat. 23511, Blatt 40, Vorderseite). Hier bedeuten die Überstreichungen tatsächlich eine Multiplikation mit tausend. Auf die merkwürdigen in der zweiten Reihe stehenden Zeichen, die sog. Apices, wird später zurückzukommen sein.

Verschriftung der Zahlzeichen

Zunächst noch einige Beispiele für die Angleichung der Zahlzeichen an die Schrift. Auf der Abb. 33, die ein Stück einer Seite aus dem in mittelalterlichem Latein mit vielen Abkürzungen (Abbreviaturen) geschriebenen Rechnungsbuch des Klosters Heilsbronn aus dem Jahre 1395 gibt (Blatt 153, Vorderseite, Spalte 1), wird man auf den ersten Blick die Zahlzeichen kaum erkennen. Erst bei genauerem Hinsehen findet man überall Zahlen. Dabei fällt auf, daß bei einer Reihe dieser Zahlen die letzte der Ziffern einen Querstrich trägt, daß also etwas davon abgestrichen ist. Das ist auch in der Tat der Fall, denn dieser Strich bedeutet, daß von dieser letzten Einheit nur die Hälfte zu nehmen ist. Es bedeutet z. B. iij̶ = $2^1/_2$ oder, wie man auch heute noch sagt, drittehalb. So findet man am Ende der ersten Zeile $38^1/_2$, als Summe in der sechsten $297^1/_2$, am Ende

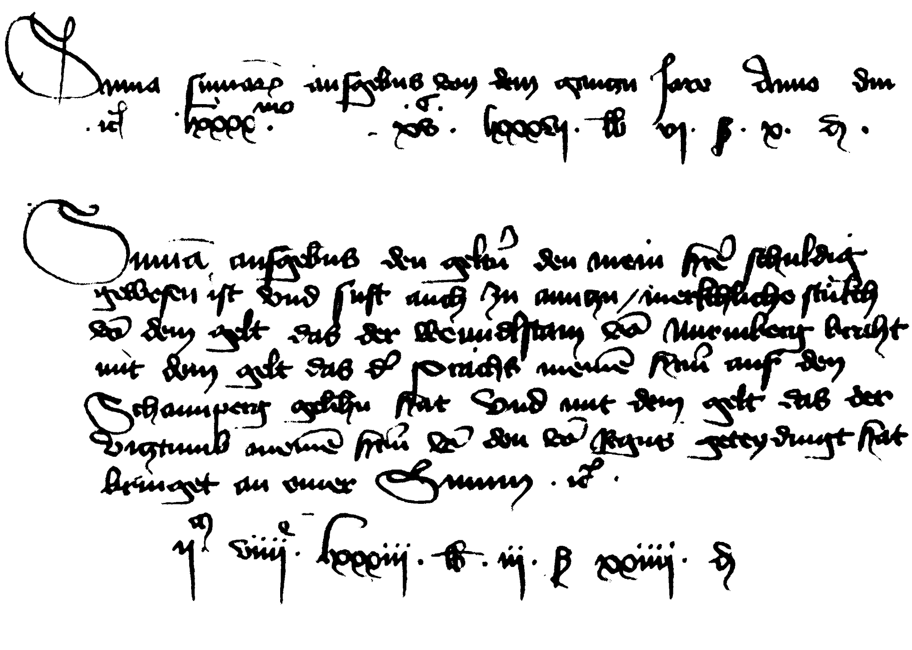


Abb. 34 Aus Blatt 78, Rückseite, und Blatt 108, Vorderseite, der Bücher des Klosters Straubing aus den Jahren 1390–92 (Übersetzung S. 80)

Abb. 35 Grabplatte des Th. Brun aus der Augustinerkirche zu Erfurt mit der Jahreszahl 1462

der fünftletzten $10\frac{1}{2}$, in der Mitte der drittletzten $18\frac{1}{2}$ usw. Dieses Abstreichen findet man später gelegentlich auch bei unserer heutigen Zahlenschreibweise angewendet (s. Abb. 47).

Abb. 34 zeigt einige Zeilen aus den in deutscher Sprache geschriebenen Büchern des Klosters Straubing aus der Zeit von 1390–1392. In der ersten Probe (Blatt 78, Rückseite) steht 1586 Pfund 6 Schilling 10 Pfennig, in der zweiten unten (Blatt 106, Vorderseite) 2983 Pfund 3 Schilling 24 Pfennig. Unterhalb hundert hat man also die alte Reihung und Bündelung beibehalten, oberhalb ist ein Ansatz zur Stellenschreibweise mit Bezeichnung der Stellen durch die oben angefügten kleinen Buchstaben gemacht. Dabei schreibt man, wie man spricht, fünfzehnhundert, aber zweitausendneunhundert. Hier macht sich also schon der Einfluß der indischen Stellenschreibweise bemerkbar.

Auch in Inschriften dieser Zeit, z. B. in den Umschriften der Tumben und Grabplatten, nehmen die Zahlzeichen vollkommen die Form der verwendeten Schriftzeichen an (Abb. 35).

Das Rechenbrett

Aufzeichnen von Zahlenangaben und Rechnen ist etwas ganz Verschiedenes. Für das eigentliche Rechnen, insbesondere das Multiplizieren und Dividieren, benutzte man auch im Mittelalter den von den Römern übernommenen Abacus. Freilich hört man davon im frühen Mittelalter kaum, aber um 1100 herum wird er in mehreren Abhandlungen erwähnt und, wie schon gezeigt wurde, auch schematisch abgebildet. Damals wurde das Rechnen auf dem Brett in den Klöstern gelehrt, war also nur eine Angelegenheit der Gelehrten. Im 13. Jahrhundert drang dann aber diese Rechenmethode mehr und mehr in das kaufmännische Leben ein. Dabei änderte das Brett etwas seine Form. Aus den vertikalen Spalten wurden horizontale Zeilen. Die Zeile für die niedrigste Einheit war die unterste. Die Rechensteine wurden durch Rechen-

Von der Haußrechnung. 7

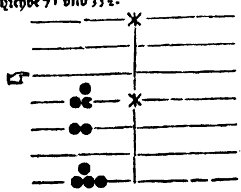
Von dem Multipliciren. VII.

MUltipliciren mit Rechenpfenningen/ vnnd diuidiren/ist ein leicht vnd schlecht ding/so du das greiffen verstehst/dauon ich erst oben gesagt hab. Wiltu nu ein zal multipliciren mit einer andern/so leg der selbigen eine (welche du wilt) auff die linien / vnd die andere schreib mit der kreyden/gantz/vnd auch halb. Denn wo dein gelegte zal hat einen Rechenpfenning auff einem spacio/da wirstu müssen die halbe zal brauchen. Aber fur einen yeden Rechenpfenning auff den linien/müstu die gantzen zal brauchen oder hin über legen.

So nu dein zal gelegt ist/so greiff auff die höchste lini dar auff du etwas kanst auffheben/wenn es gleich nur ein halbs were. So offt du nu einen Rechenpfenning auffhebst von der lini die du greyffst/so offt müstu dein geschribne zal gantz hinüber legen/ gegen deinem finger/das ist/eben auff die lini die du greiffst. So offt du aber einen Rechenpfenning auffhebst vom spacio vnder der lini die du greiffst/so offt müstu dein geschribene zal nur halb hinüber legen/wie du im nachfolgenden exemplo sehen solt.

Exemplum.

Ich soll 7208 multipliciren mit 71. so lege ich 7208. vnnd schreybe 71 vnd 35½.

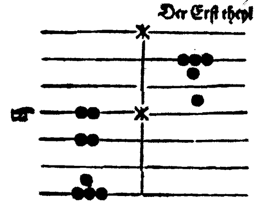


Diß ist der erst griff dises exempels/ Nemlich auff die 5 lini / vnd da finde ich ein halbs/ da fur lege ich hinüber 35½. so werdens 355000 wie du sihest in der nachfolgenden verzeichnis.

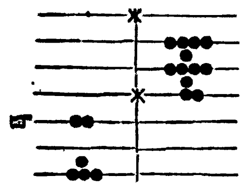
C y Diß

a

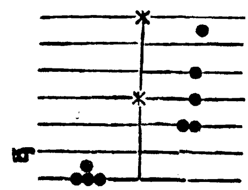
Der Erst theyl



Diß ist der ander griff/Nemlich auff der vierden lini/vnd da finde ich 2/da fur lege ich hinüber 71 zwey mal/ so werdens 497000.



Diß ist der drit griff Nemlich auff die dritte lini / da finde ich abermal 2 da fur lege ich hinüber aber mal/ zwei mal 71/so werdens dein 511200. wie du sihest in der nachfolgenden verzeichnis.



Diß ist der vierde griff/Nemlich auff die 2 lini/ vnd da finde ich ein halbs / da fur lege ich hinüber 35½ so werdens 511555. wie du hernach sihest.

Diß

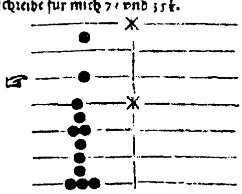
b

Der Erst theyl

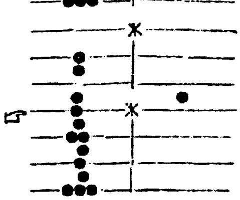
Aber also diuidiret man. Die zal welche man teylen soll / legt man auff die linien/vnd den theyler schreibt man mit der kreyden gantz/vnd halb. Darnach greyfft man hinauff/so ferne man kan/ doch also/das man den teyler auffs wenigst halb möge finden vnd auffheben. So man aber den teyler nur halb auffhebet / legt man einen Rechenpfenning hinüber / vnder die lini die man greifft/ Nemlich in das nechst spacium vnder deinem gryff/als ein halbs. So offt man aber den teyler gantz auffhebet/legt man einen Rechenpfenning hinüber auff die lini die man greyfft.

Exemplum.

Ich soll 511768 diuidiren/durch 71. so leg ich 511768 vnd schreibe fur mich 71 vnd 35½.



Diß ist der erst griff dises exempli/ Nemlich auff die 5 lini / vnnd da finde ich den teiler halb/ darfur lege ich ein halbs hinüber / so werden 5000. Es bleiben aber noch 156768. wie folget.

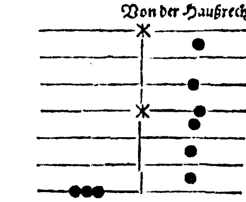


Diß ist der ander gryff/Nemlich auff die 4 lini/ vnd da finde ich also 156. darinnen ich den teyler finde zweymal/darumb leg ich da fur zwey hinüber / so werdens 7000. vnnd bleiben noch 14768.

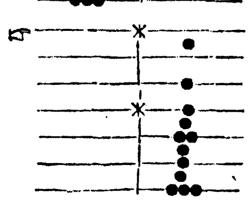
Diß

c

Von der Haußrechnung. 8



Diß ist der fünffte vnd letzte griff dises exempels Nemlich auff die erste oder vnderste lini / vnd da find ich 3 / darumb lege ich 71 dreymal hinüber / so werdens 511768 wie du hie sihest hernachfolgen/vnd das ist die gantze summa diser Multiplicatz.



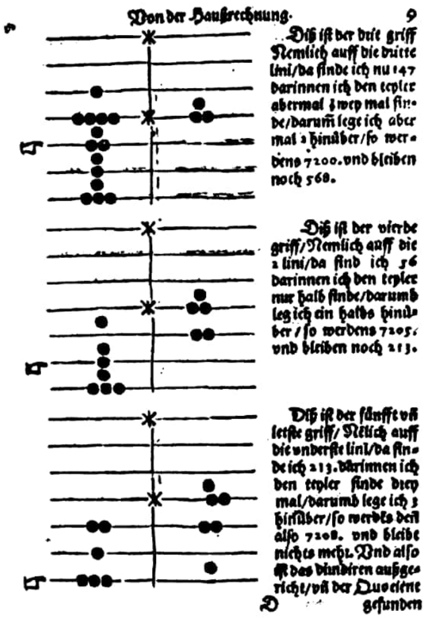
Vnd so du sie diuidirest durch 71. so kompt dir 7208. vnd also wirt diß exemplum probiret Auch so du die selbig summ diser multiplicatz/ diuidirest durch 7208. so kompt dir 71. vnnd ist diß auch ein probatz/ etc.

Vom Diuidiren. VIII.

DUrch das diuidiren/oder teilen/findet man wie offt der teyler gefunden werde in der zal die man teylet. So ist nu die zal welche man findet durch das teilen/ der Quotient. Aber der teyler ist die zal durch welche man teylet. So wirt nu die zal die man diuidirt/ geteylet in etliche teil/welche vnder jnen selbs einander gleich sind/ vnd zeiget der teyler in im selbs/ wie vil der selbigen teyl sein müssen. Aber der Quocient zeiget in im selbs/ wie groß ein yeder teyl sein müsse.

Aber

d



Von der Haußrechnung. 9

Diß iſt der drit griff Nemlich auff die dritte lini/da finde ich nu 147 darinnen ich den teyler abermal zwey mal finde/darumb lege ich aber mal 2 hinüber/ſo werdens 7200. vnd bleiben noch 568.

Diß iſt der vierde griff/Nemlich auff die 2 lini/da find ich 56 darinnen ich den teyler nur halb finde/darumb leg ich ein halbs hinüber / ſo werdens 7205. vnd bleiben noch 213.

Diß iſt der fünfft vñ letſte griff/ Nẽlich auff die vnderſte lini/da finde ich 213. darinnen ich den teyler finde drey mal/darumb lege ich 3 hinüber/ſo werdēs deñ alſo 7208. vnd bleibe nichts mehr. Vnd alſo iſt das diuidiren außgericht/vñ der Quocient

D gefunden

e

Der Erſt theyl

gefunden 7208. durch den teyler 71 ꝛc.

So aber im diuidiren etwas auffs aller letſt vberbleibt / ſo wirt das ſelbig der zeler eines bruchs/vnnd der teyler wirt des ſelbigē bruchs nenner/wie ich hernach gnugſam dauon ſagen werde/Nemlich ſo die Regel Detri/ mit gantzen zalen/ wirt auß gericht ſein.

So du aber dein teylung wilt probiren/ob ſie recht ſey zu gegangen/ſo multiplicir den Teiler/vñ Quocient vndereinander/ ſo du nu recht haſt gehandelt/ſo muß dir auß ſollichem multiplicieren widerkommen die zal welche du diuidiret oder geteylet haſt. Als ſo du 71 vnnd 7208 durcheinander multiplicireſt/ſo muß dir kommen 511768 ꝛc.

Von der Regel Detri. IX.

DEtri iſt ein Regel/ welche dir in allen gemeinen Rechnungen fein anzeiget / wenn du multiplicieren müſſeſt oder diuidiren/ vnnd was du müſſeſt multiplicieren oder diuidiren / ſo anderſt dir ein ſolliche Haußrechnung furfallet / die da ſolliche ding fodert/ als da ſind Multiplicatz vnd Teylung.

Es wirt aber in einer yeden ſollichen furfallenden Haußrechnung/die furgab oder auffgab / geteylet in dreyerley zalen / durch welche man darnach findet die rechtſchüldige zal/welche man ſuchet. Eine heiſſet man die zal der frag. Ein andere nennet man den Teyler/ ꝛc.

So

f

Abb. 36a bis f Beschreibung des Rechnens auf den Linien aus Michael Stifels deutscher Arithmetik

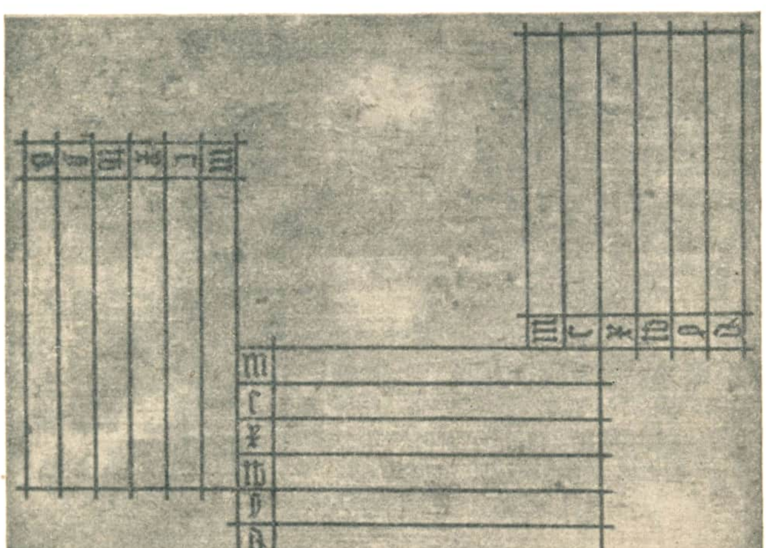


Abb. 37 Rechentisch der Dreierherren aus dem 16. Jahrhundert im Museum zu Basel

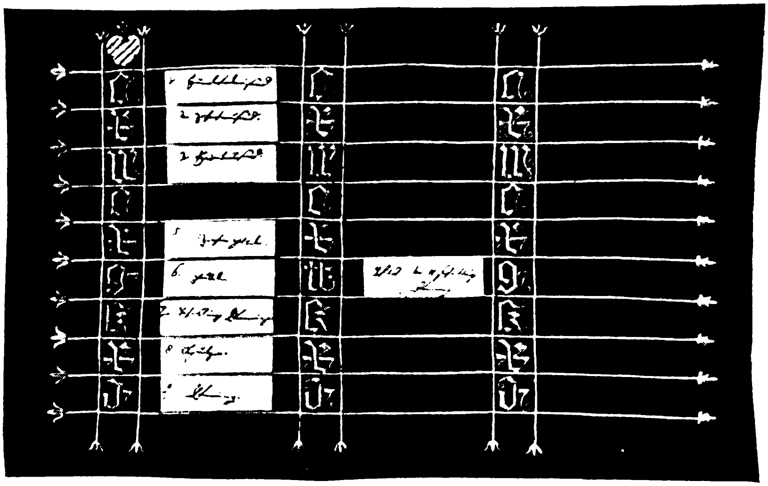


Abb. 38 Rechentuch aus dem bayrischen Nationalmuseum

marken aus Metall ersetzt, die die verschiedensten Prägungen aufwiesen und zum Beispiel auch zur politischen Propaganda benutzt wurden. Sie wurden in der Hauptsache in Nürnberg hergestellt. Diese Rechenmünzen wurden nicht mehr in die Zwischenräume zwischen die Linien gesetzt, sondern auf diese Linien. Eine zwischen zwei Linien liegende Rechenmarke hatte den fünffachen Wert einer solchen, die auf der Linie darunter lag. Das Rechnen auf den Linien, wie es jetzt heißt, wird in allen Rechenbüchern des 15. bis 17. Jahrhunderts beschrieben. Wie zum Beispiel das Multiplizieren und Dividieren geschah, mag man aus den in Abb. 36 wiedergegebenen Seiten der deutschen Arithmetik des Michael Stifel entnehmen, die 1545 erschien.
Lange hat sich diese leichtverständliche und nicht schwierige Rechenmethode, die das Multiplizieren und das Dividieren anschaulich auf das Addieren und das Subtrahieren zurückführt, vor allem im Volk gehalten. Das letzte Rechenbuch, das das Rechnen auf den Linien beschreibt, ist das von Leonhard Christoph Sturm, »Kurzer Begriff der gesamten Mathesis«, das 1707 in Frankfurt a. d. O. erschien. In den Oberharzer Bergwerken wurde zum Beispiel noch Anfang des 18. Jahrhunderts auf den Linien gerechnet.
Die dazu erforderlichen Linien wurden meist mit Kreide auf den Tisch gezeichnet. Dieses Liniensystem wurde häufig durch einen oder mehrere Vertikalstriche aufgeteilt, so daß man zwei und mehr Zahlen nebeneinander darstellen konnte. Die Tausend und Million zugeordneten Linien wurden auf einer dieser Querlinien durch ein Kreuz gekennzeichnet (s. Abb. 51). Für die Geldrechnung, die nicht auf dem reinen Dezimalsystem aufgebaut ist, haben sich einige Rechentische und Rechentücher erhalten; so findet man im Basler Museum noch die Rechentische der Dreierherren, die bis 1798 die Aufsicht über das Geld- und Münzwesen der Stadt führten, wohl aus dem 16. Jahrhundert, erhalten. Die Zeilen sind bezeichnet mit M, C, X, lb = libra (Pfund), solidi (Schillinge) und denarii (Pfennige).

Im Münchner Nationalmuseum befinden sich Rechentücher. Sie sind aus grünem Tuch mit aufgenähten blaßgelben Schnüren und gestickten gelben Buchstaben (Abb. 38). Bei ihnen ist die oberste Zeile für die Hunderttausender, die nächste für die Zehntausender usw., die sechste für die Gulden (einer zu 7 Schillingen) und in der Mitte für Pfund (eines zu 8 Schillingen), die weiteren drei für Schillinge, Kreuzer und Pfennige. Diese Tücher wurden mitgenommen, wenn im Auftrage der bayrischen Landstände auswärts Rechnungen zu prüfen waren. Bei diesen Rechentischen und Tüchern wurden allerdings die Rechenpfennige nicht auf die Linien, sondern in alter Art dazwischen gelegt.

DIE INDISCH-ARABISCHEN ZAHLZEICHEN

Unsere heutige Zahlenschreibweise ist eine reine Stellenschrift. Nur die Einer sind verziffert. Die Rangstufe wird nicht, wie z. B. bei den Chinesen, besonders hingeschrieben, sondern durch die Stellung der Ziffern zueinander bezeichnet, also ganz ähnlich wie beim Rechenbrett. Das Wesentliche ist aber, daß man ein besonderes Zeichen, nämlich die Null, für eine nicht besetzte Rangstufe hat. Mit Einführung der Null (im Mittelalter cyphra genannt) und später des Dezimalkommas wird die Stellenschreibweise zu einer absoluten und bleibt nicht, wie bei den Babyloniern, relativ.

Die Zahlzeichen der Inder

Die heute gebrauchten Zahlzeichen sind nach allgemeiner Annahme in Indien entstanden, etwa im 8. Jahrhundert nach Babylon gekommen und haben von dort ihren Weg ins Abendland gefunden. Obwohl dem vielfach widersprochen ist, scheint diese Annahme doch richtig zu sein. Es gibt eine große Zahl verschiedener Zahlenschreibweisen bei den Indern. Die Vorfahren der heutigen Zahlzeichen finden sich in einer Höhle des Nana-Ghat-Hügels und in Höhlen bei Nasik. Diese Inschriften stammen aus dem zweiten oder ersten vorchristlichen Jahrhundert. Sie haben besondere Zeichen für alle Einer und alle Zehner; von Hundert ab geht die Bezeichnung in eine benannte Stellenschrift über. Es sind Zahlzeichen ohne Stellenwert und ohne Null (Abb. 39). Über die Entstehung dieser Zeichen weiß man so gut wie nichts. Man hat sie in Verbindung mit chinesischen, sumerischen, hieratischen, phönizischen, persischen, griechischen usw. Zahlzeichen zu bringen versucht. Jedenfalls ist man heute wohl der Ansicht, daß sie nicht indischen Ursprungs sind. Zahlzeichen mit Stellenwert lassen sich zuerst in Indien, bestimmt etwa 815 n. Chr. auf der Torkhede-Kupferplatte feststellen. Die Null tritt zuerst 876 n. Chr. in einer Inschrift bei Gwalior auf, wo 70 und 350 mit einer Null geschrieben sind. Sie war aber sicher schon früher bekannt; z. B. gibt der indische Mathematiker Brahmagupta (geb. 598) Vorschriften über das Rechnen mit Null in einer Form, die erkennen läßt, daß der Gebrauch der Null schon seit langem bekannt war. Bezeichnet wird die Null durch einen Kreis oder im Arabischen durch einen Punkt, um hier eine Verwechslung mit der 5 zu vermeiden (Abb. 39).

Indisch-arabische Zahlzeichen

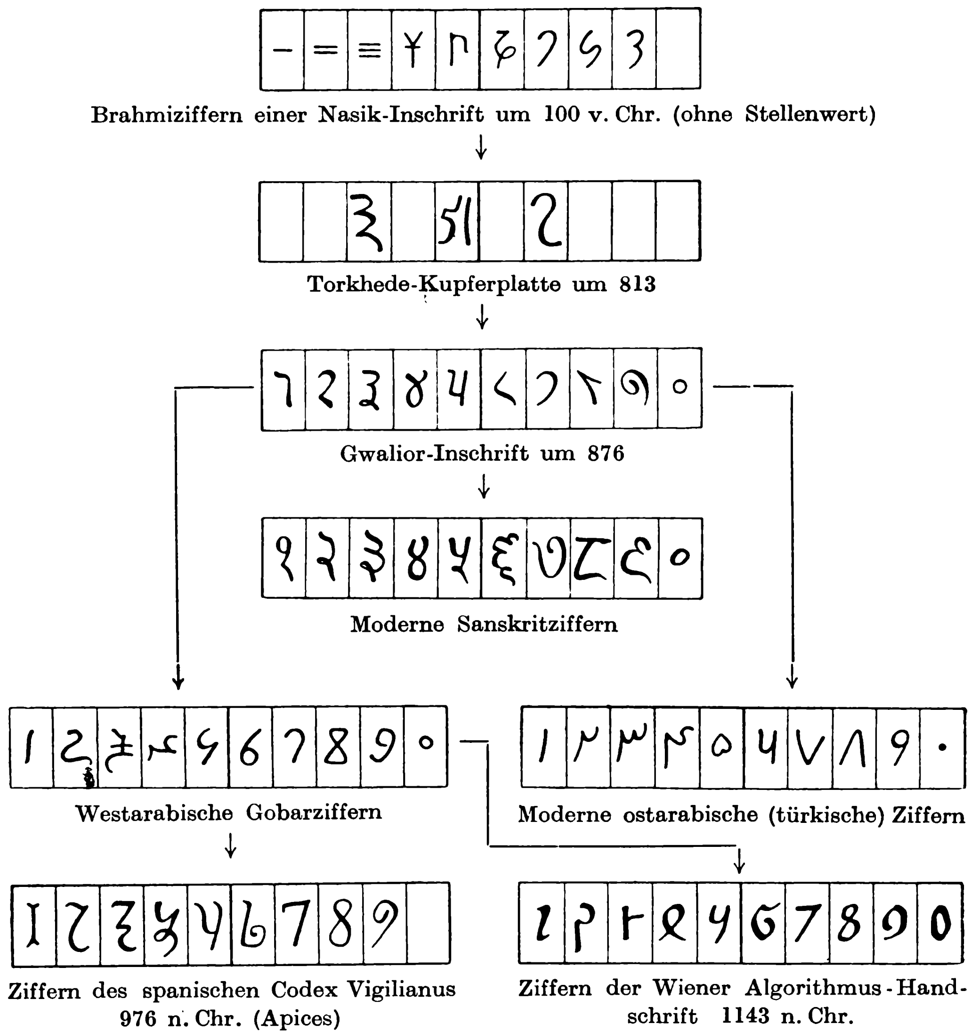


Abb. 39 Stammbaum unserer heutigen Zahlzeichen

Verbreitung der Zahlzeichen durch die Araber

Außerhalb Indiens tauchen diese Zahlzeichen zuerst um 650 in Mesopotamien auf. Um 700 waren sie sehr wahrscheinlich in Damaskus noch nicht bekannt, denn der Kalif Walid ordnete damals für die Steuerverwaltung zwar den Gebrauch der arabischen Schrift, aber die Verwendung der griechisch-jonischen Zahlzeichen an.

Bestimmt finden sie sich um 820 in Bagdad, wo unter der Regierung des Kalifen Abdullah el Mamun, des Sohnes Harun al Raschids, der Mathematiker Mohamed ibn Musa al-Chowarazmi ein Buch über ihren Gebrauch schrieb, das von Adelhard of Bath (um 1120) oder wahrscheinlicher von Robert of Chester (um 1140) in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts als »Liber Algorithmi de numero Indorum« ins Lateinische übersetzt wurde. Nicht unwahrscheinlich ist es, daß die Zahlzeichen schon in vorarabischer Zeit durch Kaufleute in Alexandrien bekannt wurden, allerdings wohl ohne Null.
Für die Verbreitung der indischen Zahlzeichen und des Rechnens mit ihnen haben dann vor allem die Araber gesorgt (Hedschra 622), deren reger Handelsverkehr mit Indien auch wissenschaftliche Verbindungen anknüpfte. Bei ihnen kommen allmählich zwei Formen von Ziffern in Gebrauch, die von ihnen als »indische« bezeichnet wurden: die, aus denen die heutigen türkischen Ziffern hervorgehen, und die Gobarziffern (Staubziffern), die zuerst ohne Null mit einer Stellenbezeichnung durch darübergesetzte Punkte auftreten. Zuerst wurden sie nebeneinander gebraucht. Später wurden erstere in der Hauptsache von den Ostarabern, letztere von den Westarabern (Spanien, Marokko) benutzt. Beide gehen auf indische Formen zurück.

Die Apices

Vielleicht durch den Handelsverkehr über Alexandrien vermittelt, treten Ende des 10. Jahrhunderts den Gobarziffern ähnliche Zahlzeichen in dem spanischen Codex Vigilianus aus dem Jahre 976 auf. Diese Zeichen lernte wohl um 980 bei seinem Aufenthalt in Barcelona der schon erwähnte Gerbert, der spätere Papst Sylvester II., kennen, der Ende des 10. Jahrhunderts eine Schrift über das Rechenbrett mit senkrechten Kolonnen verfaßte (vgl. Abb. 31 und 32). In die Spalten wurden Rechensteine (apices) gelegt, die mit Zahlzeichen beschrieben waren, und zwar wahrscheinlich mit diesen neuen Zahlzeichen. Die Zahlen bekamen durch das Hineinlegen in die Kolumnen den entsprechenden Stellenwert. Die Null war Gerbert unbekannt. Nach dieser Art der Verwendung bekamen die Zahlzeichen ihren Namen. Ihre merkwürdig steife Form erklärt sich wohl daraus, daß sie nicht geschrieben wurden, sondern ein für allemal auf die Steine gezeichnet waren. Abb. 40 zeigt die schematische Darstellung eines solchen Rechenbretts aus einer Handschrift der sog. Geometrie des Boëthius (Cod. mon. lat. 13021, Blatt 197); in der zweiten Zeile stehen diese Apices (s. Abb. 32). Darüber findet man die merkwürdigen, vielleicht durch Verdrehung arabischer Zahlworte entstandenen Namen dieser Zeichen: 1. igin, 2. andras, 3. ormis, 4. arbus, 5. quimas, 6. caltis, 7. zenis, 8. zemenia, 9. celentis. Mit Sipos bezeichnete man ein in der zweiten Spalte abgebildetes Merksteinchen, mit dem die Spalte, in der man gerade rechnete, festgelegt wurde. Um noch kurz auf die weiteren Zahlzeichen der Abbildung einzugehen: Die dritte Zeile gibt in römischen Zahlzeichen die Werte der Einheiten der einzelnen Spalten. Dabei sind allerdings dem Schreiber zahlreiche Fehler unterlaufen. Die vierte bis sechste sollen immer die Hälfte der darüberstehenden geben. Die siebente Zeile gibt in der Hauptsache die Zeichen,

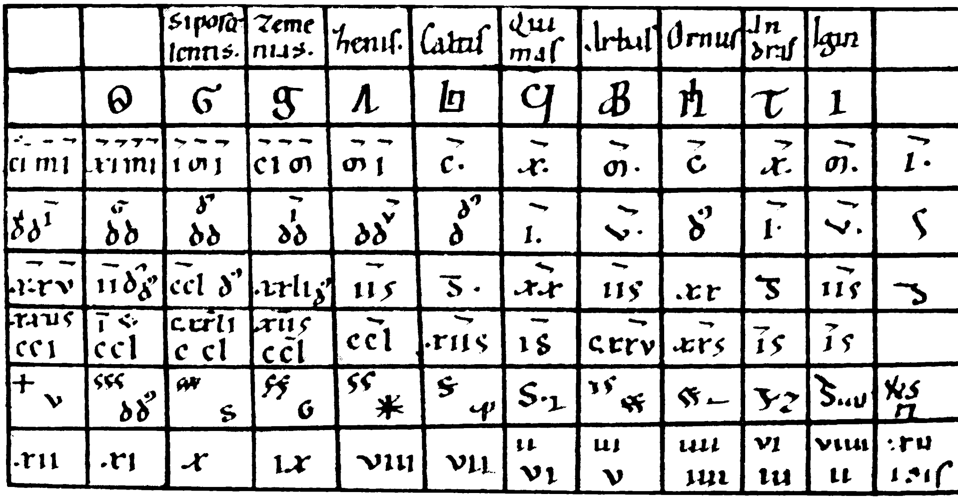
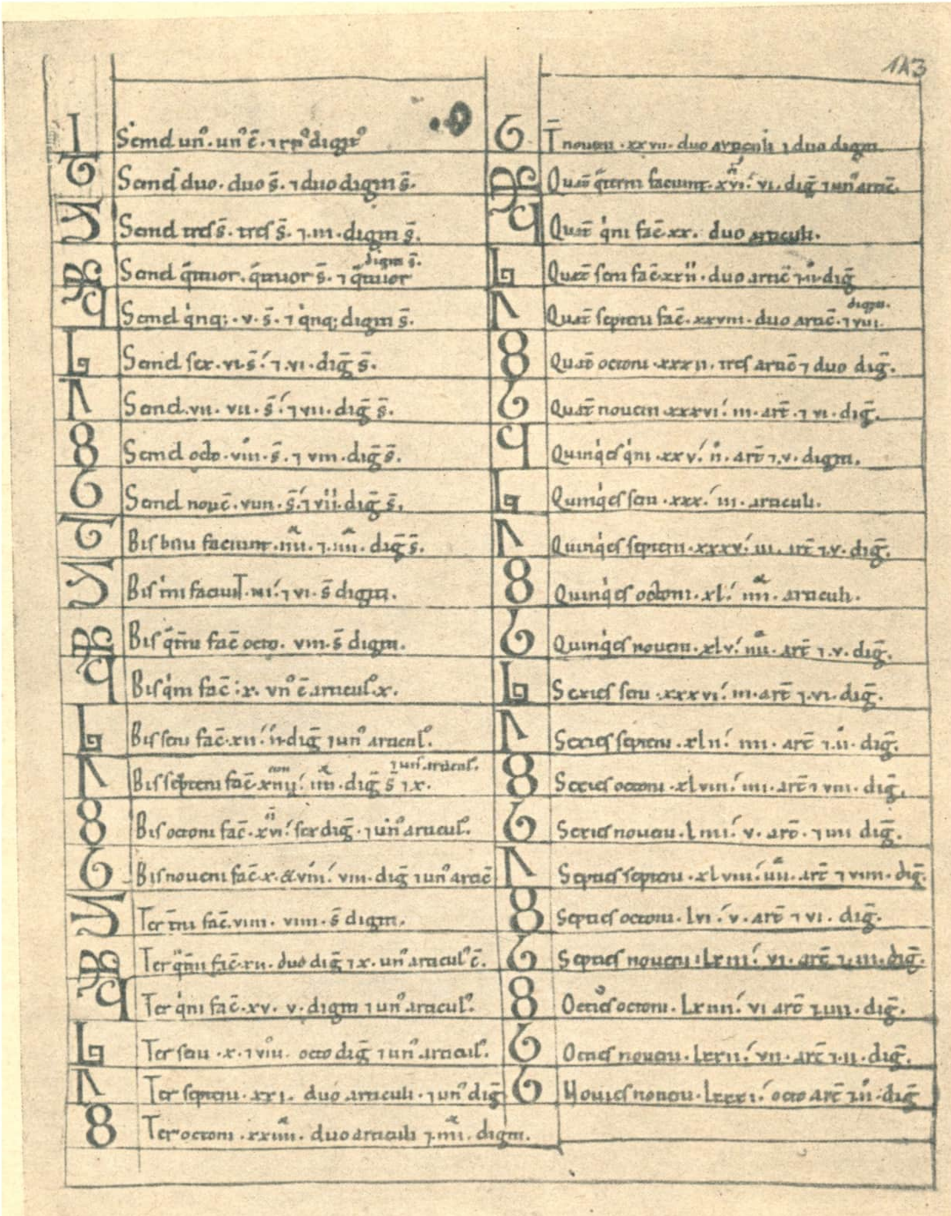


Abb. 40 Schematische Darstellung des Rechenbrettes aus einer sog. Geometrie des Boëthius (Cod. mon. lat. 13021, Blatt 197)

die den Zwölfteln des Aß entsprechen und die als Bezeichnung für die Duodezimalbrüche benutzt wurden. In der letzten Zeile endlich stehen von rechts nach links die Nummern der Spalten.

Pythagoreische Tafeln

Diese Zuteilung einer bestimmten Zahl zu einem Rechenstein war gegenüber der Art des gewöhnlichen Brettrechnens mit unbezifferten Steinen, wie es oben z. B. von Stifel beschrieben wurde, kein Fortschritt. Denn während man dort durch einfaches Hinzufügen und Fortnehmen Multiplikation und Division ausführen konnte, mußte man hier das kleine Einmaleins können und mußte entsprechend die Rechensteine auswechseln. Die Handschriften über diese Rechentafeln enthalten daher auch alle dieses Einmaleins meist in Form einer pythagoreischen Tafel (s. Abb. 30), manchmal aber auch in anderer Form. So zeigt Abb. 41 das sog. Einmaleins des Othlo (Pater im Kloster St. Emeran zu Regensburg), etwa aus dem Jahre 1060. In der ersten Spalte erkennt man die Apices, die die Zeilen der einzelnen Stücke des Einmaleins zählen. Die erste Reihe lautet z. B.: 1. Semel unus unus est et unus digitus. (Einmal eins ist eins oder ein Einer.) Als digiti, Fingerzahlen, bezeichnete man damals die Einer, während die Zehner articuli (Knöchelzahlen) genannt wurden. Wohl eine Erinnerung an das Rechnen mit den Fingern. Die letzte Zeile lautet: Novies novem lxxxi octo articuli et duo digiti. (Neunmal neun ist 81, 8 Zehner und 2 Einer.) Also so ganz vertraut ist der Schreiber mit dem Einmaleins doch nicht. Auch in der ersten und vierten Zeile der zweiten Spalte befinden sich Schreibfehler.



1	Semel unum. unum est. i.e. digitus	9	Ter novem. xxvii. duo articuli i duo digiti.
2	Semel duo. duo s. i duo digiti s.	4	Quater quattuor faciunt. xvi. vi. dig. i unum artic.
3	Semel tres s. tres s. i. iii. digiti s.	5	Quater quinque fac. xx. duo articuli.
4	Semel quattuor. quattuor s. i quattuor digiti s.	6	Quater sex fac. xxiiii. duo artic. iiii. dig.
5	Semel quinque. v. s. i quinque digiti s.	7	Quater septem fac. xxviii. duo artic. i viii. digiti.
6	Semel sex. vi. s. i vi. dig. s.	8	Quater octo. xxxii. tres artic. i duo dig.
7	Semel vii. vii. s. i vii. dig. s.	9	Quater novem. xxxvi. iii. art. i vi. dig.
8	Semel octo. viii. s. i viii. dig. s.	5	Quinquies quinque. xxv. ii. art. i v. digiti.
9	Semel novem. viiii. s. i viiii. dig. s.	6	Quinquies sex. xxx. iii. articuli.
2	Bis bini faciunt. iiii. i. iiii. dig. s.	7	Quinquies septem. xxxv. iii. art. i v. dig.
3	Bis tres faciunt. vi. i vi. s. digiti.	8	Quinquies octo. xl. iiii. articuli.
4	Bis quattuor fac. octo. viii. s. digiti.	9	Quinquies novem. xlv. iiii. art. i v. dig.
5	Bis quinque fac. x. unum est articulus x.	6	Sexies sex. xxxvi. iii. art. i vi. dig.
6	Bis sex fac. xii. ii. dig. i unum articul.	7	Sexies septem. xlii. iiii. art. i ii. dig.
7	Bis septem fac. xiiii. iiii. dig. s. i x. (i unum articul.)	8	Sexies octo. xlviii. iiii. art. i viii. dig.
8	Bis octo fac. xvi. sex dig. i unum articul.	9	Sexies novem. liiii. v. art. i iiii. dig.
9	Bis novem fac. x et viii. viii. dig. i unum artic.	7	Septies septem. xlviiii. iiii. art. i viiii. dig.
3	Ter tres fac. viiii. viiii. s. digiti.	8	Septies octo. lvi. v. art. i vi. dig.
4	Ter quattuor fac. xii. duo dig. i x. unum articul. e.	9	Septies novem. lxiii. vi. art. i iii. dig.
5	Ter quinque fac. xv. v. digiti i unum articul.	8	Octies octo. lxiiii. vi. art. i iiii. dig.
6	Ter sex. x. i viii. octo dig. i unum articul.	9	Octies novem. lxxii. vii. art. i ii. dig.
7	Ter septem. xxi. duo articuli. i unum dig.	9	Novies novem. lxxxi. octo art. i i. dig.
8	Ter octo. xxiiii. duo articuli i iiii. digiti.		

Abb. 41 Einmaleins des Othlo (Cod. mon. lat. 14137, Blatt 113)

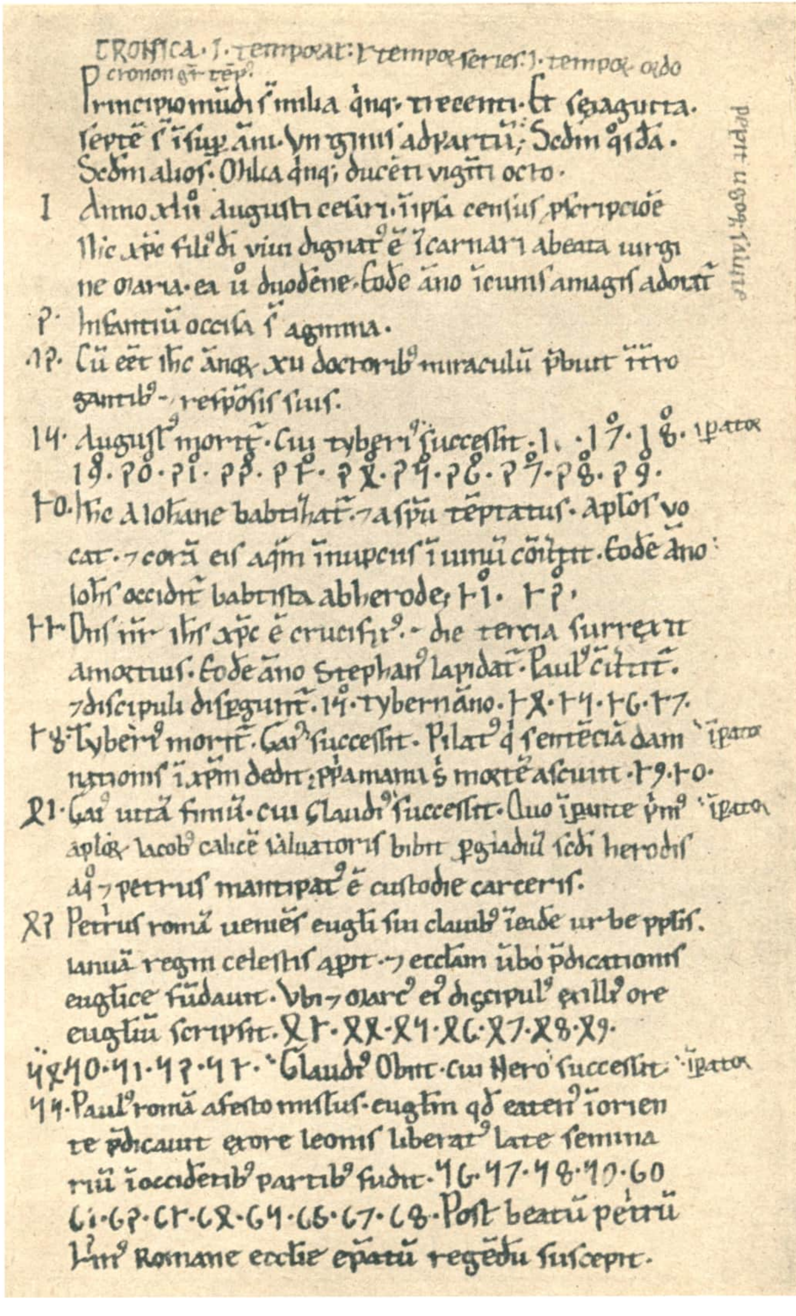


Abb. 42 Erste Seite der Annales Ratisbonenses des Hugo von Lerchenfeld aus dem 12. Jahrhundert (Cod. mon. lat. 14733) (Übersetzung S. 80 bis 82)

Neue Form der indischen Ziffern im Abendland

Die erste Berührung des Abendlandes mit den indischen Ziffern blieb ohne jede Folge. Erst auf einem anderen Wege, wahrscheinlich über Sizilien und Italien und durch die Kreuzzüge, vielleicht auch über die Zentrale arabischer Wissenschaft, Toledo, das 1080 fiel und dann von vielen Gelehrten des Abendlandes, insbesondere englischen, viel besucht wurde, drangen die indischen Ziffern wirklich ein, allerdings in einer neuen Form. Beim Rechnen wurden bei den Arabern mit Staub bestreute Rechenbretter benutzt, in den die Ziffern in Gobarform geschrieben wurden. Jede ließ sich, wenn sie nicht mehr gebraucht wurde, leicht fortlöschen. Erst die Erfindung der Null machte das Rechnen unabhängig vom Abacus und damit von der Unterlage. Im Orient wich das Brettrechnen sehr bald dem Stellenwertrechnen, zunächst meist auf Pergament oder Papyrus. Dabei wurden die Rechenmethoden einfach übernommen, nur trat an die Stelle des Auswischens das Ausstreichen. Erst später trat diese Umstellung im Westen ein, wo ja auch der Kulturaufschwung später einsetzte (Universität Cordoba 976). Einen gewissen Einfluß übte bei dieser Umstellung auch die Beschaffung eines geeigneten Schreibmaterials neben dem Pergament aus. (Erste Papierfabrik in Bagdad 974, in Spanien 1154.) Durch die Westaraber vermittelt, kam dann die Kenntnis des Positionsrechnens ins Abendland und wurde dort vor allem auch durch den Liber Algorithmi de numero Indorum bekannt. Damit kamen auch, wie erwähnt, die anderen Formen der Zahlzeichen. Aus diesen neuen Formen gehen dann in stetiger Entwicklung unsere heutigen Ziffern hervor. Sie finden sich zuerst in einer Wiener Algorithmus-Handschrift vom Jahre 1143, die ein Auszug aus dem Liber Algorithmi ist. Unter Algorithmus versteht man damals das Rechnen mit den neuen Zahlzeichen. Die Person des großen arabischen Mathematikers war vergessen, aber sein Name lebte

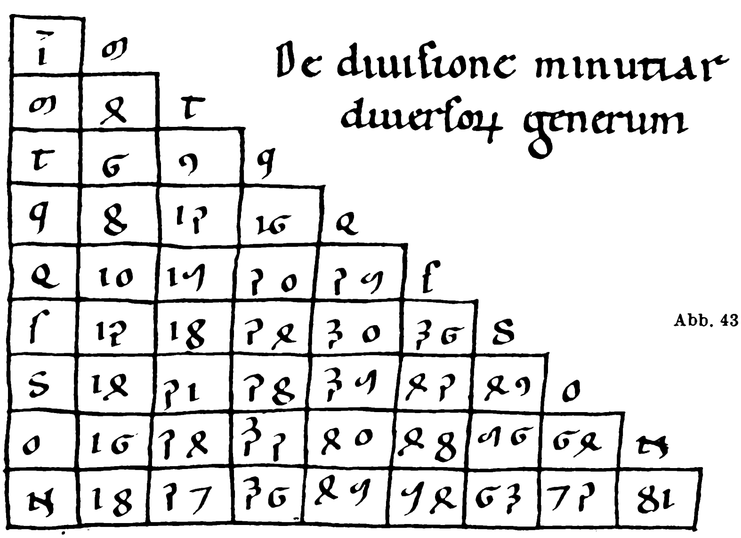


Abb. 43 Pythagoreische Tafel aus dem 13. Jahrhundert (Cod. mon. lat. 13021, Blatt 28, Vorderseite)

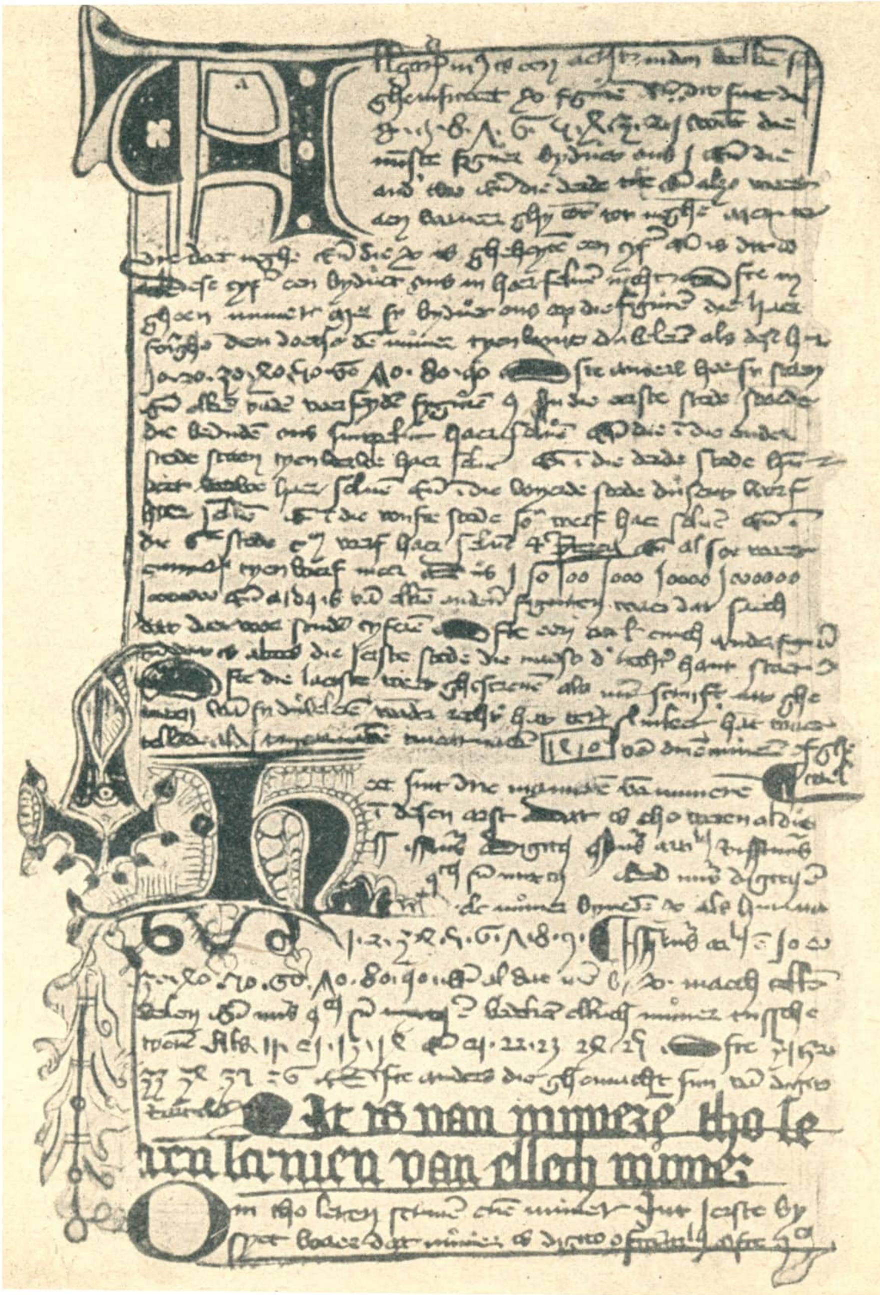
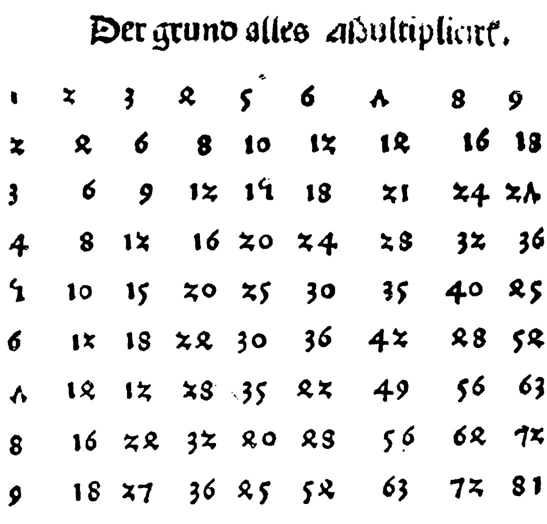


Abb. 44 Erste Seite des Hildesheimer Rechenbuches
(Univ.-Bibliothek Basel F, VII, 12, Blatt 169, Vorderseite) (Übersetzung S. 82)

weiter in der Bezeichnung der von ihm gelehrten Rechenmethode. Wer seine Methode anwandte, hieß Algorithmiker im Gegensatz zu den Abacisten, die das Rechenbrett benutzten. Als Beispiel für die neue Form der Zahlzeichen sei hier die erste Seite einer nichtmathematischen Schrift aus jener Zeit abgebildet, aus der Regensburger Chronik des Hugo von Lerchenfeld, die genau die gleichen Zahlen wie die Wiener Handschrift benutzt. (Cod. mon. lat. 14733, Blatt 25, Vorderseite.) Da steht z. B. in der zehnten Zeile: 15 Augustus moritur, cui Tiberius successit (15 starb Augustus, dem Tiberius folgte). Dann folgen die Zahlen von 16 bis 29. Weiterhin sind sämtliche Jahreszahlen bis 68 (nur 30 statt 40) aufgeführt. Ein Vergleich der Zahlzeichen auf Abb. 39 zeigt, daß die heutigen Ziffern für 2 und 3, die, wie erwähnt, aus den waagerechten Strichen der Brahmischrift hervorgegangen sind, die in einem Zuge geschrieben wurden, bei den ostarabischen Ziffern um 90° gedreht sind. Die 3 hat im Abendland zunächst eine auffällige Form, besonders aber weichen 4 und 5 von der heutigen Schreibweise ab; aber auch 2 weicht stärker ab als etwa die 2 der Gobarschrift. Später wird die 2 durch ein Z ersetzt (Abb. 50). 6, 7 und 9 haben ihre Form eigentlich von Anfang an ziemlich unverändert behalten, nur ist in der indischen 6 die Schleife durchgezogen. Die 8 hat ihre heutige Form schon in der Gobarschrift.

Im 13. Jahrhundert nimmt dann die 3 nahezu die heutige Form an. Abb. 43 zeigt eine pythagoreische Tafel aus einer astronomischen Handschrift dieses Jahrhunderts (Cod. mon. lat. 13021, Blatt 28, Vorderseite). In der ersten Spalte und auf den Treppenstufen stehen die Anfangsbuchstaben der lateinischen Zahlwörter, in den anderen Fächern die entsprechenden Zahlzeichen. 2, 4, 5 haben noch die alte Form.

Als Probe aus der Mitte des 15. Jahrhunderts sei die erste Seite des sog. Hildesheimer Rechenbuches abgebildet, das sich in der Universitätsbibliothek Basel befindet. Es ist eine Nachschrift des Stiftschülers Bernardus aus dem Jahre 1445 oder kurz vorher, das älteste in einer deutschen Mundart geschriebene Rechenbuch. Der mit dem großen H anfangende Absatz lautet: Heet sint dre manieren von numeren in desen arst (kunst). Dat is tho weten aldus (also) / Numerus digitus Numerus articulus Numerus / compositus siue mixtus. Aend num. digitus en (ist) elc. (jede) numerus byneden IX als


Der grund alles Multiplicirt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Abb. 45 Pythagoreische Tafel aus dem Bamberger Rechenbuch vom Jahre 1483

hiirna / 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Numerus articulus en 10, 20, / 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Aend al dat men by X maech / delen. Aend num. compos. siue mixtus en bedekent elkich numerus tusschen / tynen Als 11, 12, 13, 14 Aend 21, 22, 23, 24, 25. / Ofte 31, 32, / 33, 34, 35, 36 Ofte anders die ghemacht sun van digito / et articolo. *It is van numeren tho le- / ren scrien von ellech numer.* (Folgendes ist über das Schreiben der Zahlen zu lernen.) Hier hat die 2 ihre heutige Form, während 4 und 5 noch die alte Form haben. Die 7 sieht etwas unbekannt aus, sie ist nach vorn übergekippt.

Gedruckte Zahlzeichen

Mit dem Einsetzen des Druckes nehmen nun die Ziffern feste Formen an, die sie fast unverändert bis in die Gegenwart behalten. Die nebenstehende Abbildung zeigt die pythagoreische Tafel aus dem Bamberger Rechenbuch, das von Jacob Peetzensteiner in Bamberg im Jahre 1483 gedruckt wurde. Von dem ältesten, ebenfalls von Peetzensteiner 1482 gedruckten Rechenbuch des NürnbergerRechenmeisters Ulrich Wagner sind nur wenige Blätter erhalten. Das einzige tadellos erhaltene Exemplar des Buches von 1483 befindet sich in der Bibliothek des früheren Ratsgymnasiums zu Zwickau. Es ist ein etwa 9 × 9 cm großes, schön in Leder gebundenes Bändchen. Nebeneinander werden hier noch die beiden Zahlformen für 4, 5 und 7 gebraucht. Im Rechenbuch von Widmann von Eger, »Behēde und hubsche Rechenung auff allen kauffmannschafft, Leipzig 1489«, der übrigens als erster an der Leipziger Universität 1486 mathematische Vorlesungen hielt, finden sich

Abb. 46 Tabelle aus der Arithmetik des Calander aus dem Jahre 1491

	½		1		1½		2		2½		3		3½		4		4½		5		5½	
½	0	2	0	4	0	6	0	8	0	10	0	12	0	14	0	16	0	18	0	20	0	22
1	0	4	0	8	0	12	0	16	0	20	0	24	0	28	0	32	0	36	0	40	0	42
1½	0	6	0	8	0	18	0	24	0	30	0	36	0	42	0	48	0	54	0	60	1	2
2	0	8	0	16	0	24	0	32	0	40	0	42	0	56	1	0	1	8	1	16	1	24
2½	0	10	0	26	0	30	0	40	0	50	0	60	1	6	1	16	1	26	1	36	1	46
3	0	12	0	24	0	36	0	48	0	60	1	8	1	20	1	32	1	44	1	56	2	4
3½	0	14	0	24	0	42	0	56	1	6	1	20	1	34	1	48	1	62	2	12	2	26
4	0	16	0	38	0	48	1	0	1	16	1	32	1	48	2	0	2	16	2	32	2	48
4½	0	18	0	36	0	54	1	8	1	26	1	44	1	62	2	16	2	34	2	52	3	6
5	0	20	0	40	0	60	1	16	1	36	1	56	2	12	3	32	2	52	3	8	3	28
5½	0	22	0	44	1	2	1	24	1	46	2	4	2	26	3	48	3	6	3	28	3	50
6	0	24	0	48	1	8	1	32	1	56	2	12	2	40	3	0	3	24	3	48	4	8
6½	0	26	0	52	1	14	1	40	2	2	2	28	2	54	4	16	3	42	4	4	4	30
7	0	28	0	56	1	20	1	48	2	12	2	40	3	4	4	32	3	60	4	24	4	52
7½	0	30	0	60	1	26	1	56	2	22	2	52	3	18	4	48	4	14	4	44	5	10
8	0	32	1	0	1	32	2	0	2	32	[illegible]	0	3	32	4	0	4	35	5	0	5	32
8½	0	34	1	4	1	38	2	8	2	42	3	12	3	46	4	16	4	50	5	20	5	54
9	0	36	1	8	1	44	2	16	2	52	3	24	3	60	4	32	5	4	5	40	6	12

Abb. 47 Tabelle aus einer Visierkunst (Cod. mon. germ. 740)

nur die neuen Formen. In Italien benutzte man schon sehr früh nur diese. Als Beispiel sei hier aus der Arithmetik des Calander eine Tabelle zur Umrechnung von Denaren in Solidi und Denare wiedergegeben. Wie in allen frühen Drucken ist auch hier durch Unter- und Oberlängen für die gute Unterscheidbarkeit der Ziffern gesorgt. Es sind nicht immer die gleichen Ziffern, die nach unten oder oben über die normale Zeilenhöhe hinausragen. Hier haben z. B. 3, 5, 9 Unter-, die 6 Oberlängen. In anderen Drucken ragen z. B. auch 4 und 8 nach oben über die Zeile hinaus. Die Bezeichnung des abgestrichenen Halben hat man damals auch auf die neuen Zahlzeichen übertragen, wie das oben abgebildete Stück einer Tabelle aus einer Visierkunst zeigt (Cod. mon. germ. 740), aus der man zu bestimmten Ausmaßen eines Fasses seinen Inhalt in Eimern und Maßen entnehmen kann (1 Visiereimer = 64 Maß).

Das Eindringen der neuen Zahlzeichen

Als erster lehrte im Abendland Lionardo von Pisa (Fibonacci) das Rechnen mit den neuen Zahlzeichen in seinem Liber abaci vom Jahre 1202. Kaufmännische Kreise in

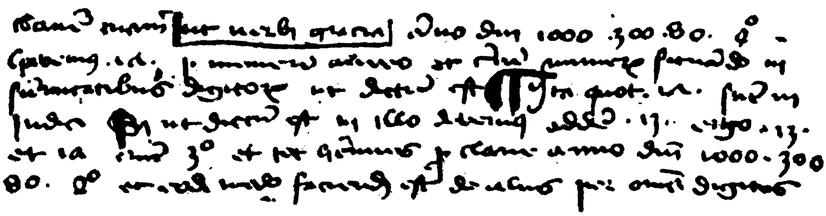


Abb. 48 Aus einer Handschrift vom Jahre 1384

Italien erfaßten die Vorteile dieses Rechnens sehr bald und benutzten es in der Buchführung. Für die Bankhäuser in Florenz wurde aber 1299 die Benutzung dieser Zahlzeichen verboten mit der Begründung, daß sie sich leicht fälschen ließen. In den Kontobüchern wurden die Beträge jetzt wieder in römischen Ziffern gebucht, aber, wie man aus gelegentlichen Nebenrechnungen sieht, die Rechnungen doch in der neuen Art durchgeführt. Auch in Frankreich und England führten sich bald die neuen Zahlzeichen und die neuen Rechenmethoden ein. In Deutschland drang das neue Rechnen im 13. Jahrhundert von Italien aus ein, überall natürlich zunächst in die Kreise der Gelehrten. Das Volk konnte sich nur sehr langsam mit den neuen Zahlzeichen befreunden. Es hatte sich zu sehr an die »Alt deutsch Zahl«, wie man die römischen Zahlzeichen damals nannte, gewöhnt. Zum Beispiel sind die Bergrechnungen des Städtchens Buchholz noch 1543 in römischen Ziffern geschrieben, die Jahreszahlen allerdings in indischen. Die älteste deutsche Münze mit Positionsziffern stammt aus dem Jahre 1458. Gelegentlich werden auch die neuen Zahlzeichen angewendet, ohne daß man den Vorteil erfaßt, der in der Positionsschreibweise liegt. So findet man zum Beispiel in dem oben (Abb. 48) abgebildeten Abschnitt aus einem Rechenbuch aus dem Jahre 1384 diese Zahl in der ersten und den beiden letzten Zeilen in der Form 1000.300.80.4 geschrieben. Während, wie wir sahen, das Bamberger Rechenbuch von 1483 schon die neue Zahlenschreibweise verwendete, benutzten die weit verbreiteten Rechenbücher des Oppenheimer Stadtschreibers Jacob Köbel von 1514 noch die römischen auch für Brüche. Vor allem ist es die Null, die Schwierigkeiten macht. Sie ist an sich nichts und ändert doch den Wert einer Ziffer, hinter der sie steht, ganz gewaltig. Man streitet sich auch darum, ob die Null, wie die anderen neun Zeichen, eine Zahl ist. Zur Erklärung dieser merkwürdigen Tatsache muß da gelegentlich schon die Allmacht des lieben Gottes herhalten.

Als dann die neuen Zeichen allmählich doch in das Volk drangen, da kam es oft vor, daß man sie mit den alten Zahlzeichen vermengte. So zeigt z. B. Abb. 49 das holzgeschnittene Siegel des Augsburger Pfarrers Molitor mit der Umschrift: Siegel des Johannis, Pfarrer zu St. Mauritius in Augsburg,

Abb. 49 Holzschnittsiegel des Augsburger Pfarrers Molitor

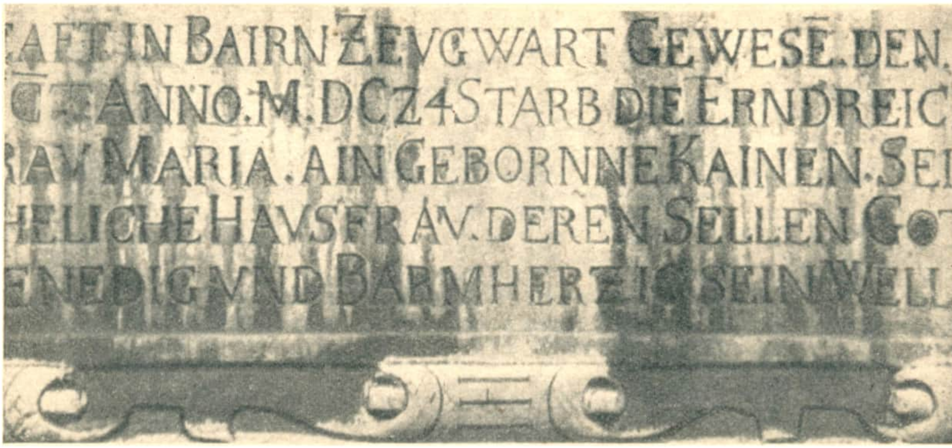


Abb. 50 Ausschnitt aus einem Grabstein an der Münchener Frauenkirche aus dem Jahre 1624 (Aufnahme G. Thiemig)

im Jahre MCD7. Die Jahrhunderte sind in römischen Ziffern gegeben, dann folgt das neue Zahlzeichen für 7. Dieses sollte wahrscheinlich in Stellenschreibweise die Zehner angeben, und die Einer sollten handschriftlich hinzugefügt werden. Noch im 17. Jahrhundert findet man Beispiele für solche Vermischung. So ist auf einer Grabplatte an der Außenseite der Münchner Frauenkirche in der Mitte der zweiten Zeile als Jahreszahl MDC24 angegeben, wie man aus dem in Abb. 50 abgebildeten Ausschnitt erkennt. Dabei ist die Zwei durch ein Z ersetzt.

Das Rechnen mit den neuen Zahlzeichen

Wie schon gesagt, verbreitete sich auch das Rechnen mit diesen neuen Ziffern nur sehr langsam. Zunächst stand es gleichberechtigt neben dem altgewohnten Rechnen auf dem Brett, wie man aus einer Abbildung aus der Margaritha philosophica, einem Sammelwerk des Gregor Reisch vom Jahre 1503, erkennt. Zur Linken der Arithmetica sitzt Pythagoras, der dem Mittelalter als Erfinder des Rechenbrettes galt, und rechnet auf den Linien. Auf den Linien auf seiner linken Seite hat er die Zahl 1241, auf seiner rechten 82 gelegt. Hier erkennt man deutlich die Form eines solchen Rechenbrettes. Zur Rechten der Arithmetica, deren Kleid mit den neuen Zahlzeichen geschmückt ist, sitzt Boëthius vor einem Tisch mit aufgeschriebenen indischen Ziffern und rechnet mit der Feder. Boëthius galt damals als Erfinder dieser Rechnungsart. Er führt anscheinend eine Division in der Art des damals üblichen Überwärtsdividierens aus, doch geben die hingeschriebenen Ziffern keinen Sinn. Offenbar sieht also Reisch beide Methoden als gleichwertig an.
Auch alle in jener Zeit erscheinenden Rechenbücher bringen beide Arten des Rechnens, ausgehend von dem leichteren Rechnen auf der Linie. Es wird das meistens aus-

drücklich im Titel hervorgehoben, so in dem Rechenbuch des berühmten Annaberger Rechenmeisters Adam Riese, dessen erste Auflage 1522 in Erfurt erschien. Auf seinem Titelblatt ist gezeigt, wie sich drei Männer über die beiden Arten des Rechnens unterhalten. Das Titelblatt eines anderen Rechenbuches von Riese (im ganzen hat er vier

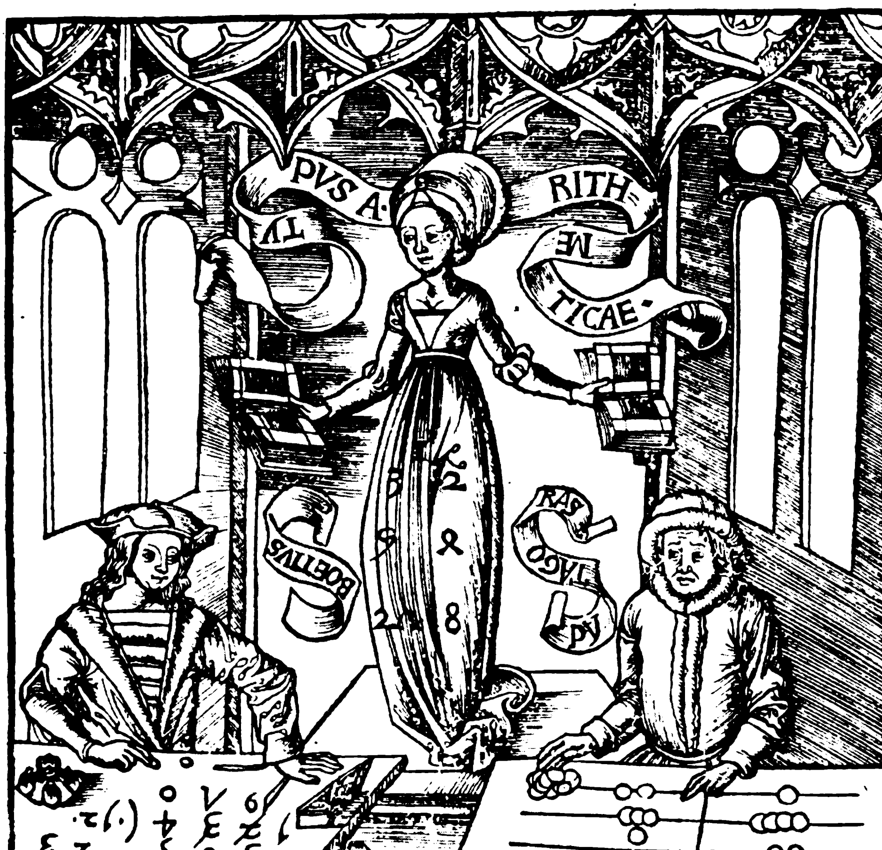


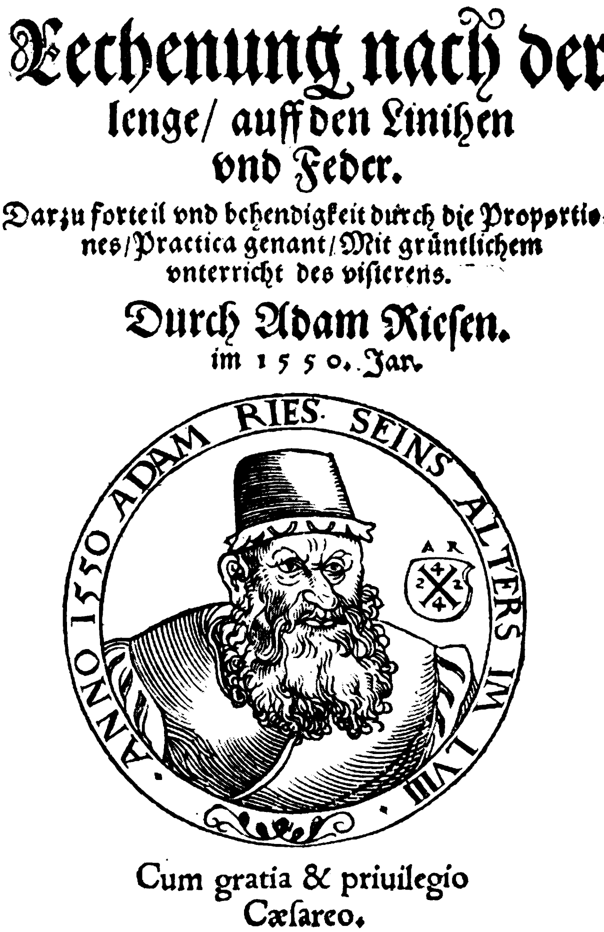
Abb. 51 Arithmetica aus der Margaritha philosophica des Gregor Reisch vom Jahre 1503

Abb. 52 Titel des Rechenbuches von Adam Riese von 1522 (2. Aufl. 1529)

solcher Bücher herausgegeben) zeigt das Bild des Achtundfünfzigjährigen. Gerade seine Bücher haben viel zur Verbreitung des Rechnens mit den neuen Ziffern beigetragen. Abb. 54 zeigt das Titelblatt des englischen Rechenbuches von Recorde: The Ground of Arts vom Jahre 1543. Hier unterhalten sich Algorithmiker und Abacisten anscheinend recht lebhaft über Vor- und Nachteile der beiden Arten des Rechnens. Allmählich aber neigt sich die Waage immer mehr zugunsten des neuen Rechnens. Schon auf Blatt 4 der Stiche »Die sieben freien Künste« von H. S. Beham aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts wendet die Arithmetica dem Rechenbrett den Rücken und zeigt auf eine Tafel mit den neuen Zahlzeichen.

Schriftformen

Ehe auf die wichtigsten Methoden des Rechnens mit den neuen Zahlzeichen eingegangen wird, sei einiges über die Schriftformen in unseren Abbildungen gesagt. Die Urkunde Abb. 29 ist in karolingischen Minuskeln geschrieben, einer Schriftform, die durch die Schriftreform Karls des Großen (Alcuin) eingeführt worden ist. Hier ist sie durch Ober- und Unterlängen verziert, wie es damals in der königlichen Kanzlei üblich war. Auch die Abb. 30, 31 und 40–42 zeigen diese Schriftform. Später entstand, vielleicht über die sog. Rundgotik, daraus die gotische Schrift. Abb. 33 und 34 zeigen die gotische Kurrentschrift, während die Umschrift des Grabsteines in Abb. 35 in



Rechenung nach der
lenge/ auff den Linihen
vnd Feder.
Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportio=
nes/Practica genant/ Mit grüntlichem
vnterricht des visierens.
Durch Adam Riesen.
im 1550. Jar.

ADAM RIES SEINS ALTERS IM LVIII ANNO 1550

A R

Cum gratia & priuilegio
Cæsareo.

Abb. 53 Titel eines anderen Rechenbuches von Adam Riese von 1550

sog. Textur, einer besonderen Form der gotischen Minuskeln, geschrieben ist. Auch das Hildesheimer Rechenbuch (Abb. 44) ist in gotischer Kurrentschrift geschrieben, mit Ausnahme der Zeilen 3 und 4 von unten (gotische Minuskeln). Aus der gotischen Schrift entwickelten sich die Fraktur und die Schwabacher, die neben der Antiqua für die ersten Drucke benutzt wurden. Zum Beispiel sind die Titelblätter der beiden Rieseschen Rechenbücher in Fraktur gedruckt. Nur zeigt die zweite Zeile in Abb. 52 Rundgotik und die letzten beiden Zeilen und die Bildumschrift in Abb. 53 eine Antiqua. Letztere ist eine Schriftform, die von den Humanisten entwickelt wurde, und

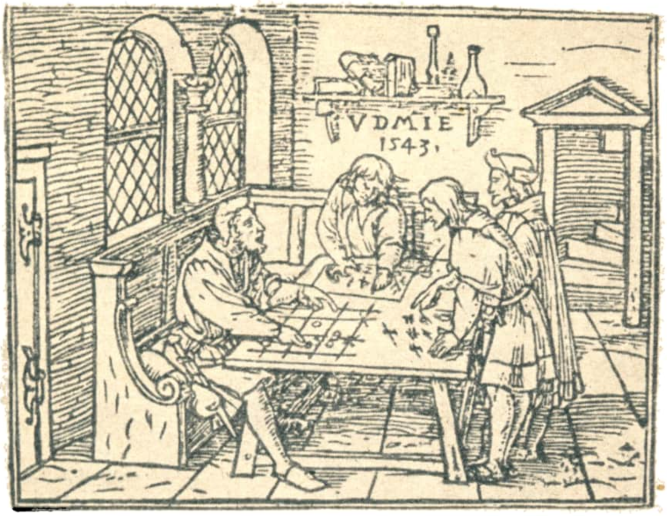


Abb. 54 Vom Titelblatt von Recorde: Ground of Arts (1543)

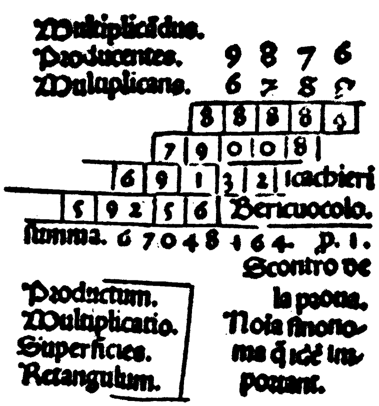
Abb. 55 Arithmetica, Stich von H. S. Beham aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts

zwar in Nachahmung der Schrift, in der man die antiken Texte vorfand. Man hielt sie für Urschriften und erkannte nicht, daß man Abschriften in karolingischen Minuskeln vor sich hatte: Die geschriebene Antiqua ist eine so ausgezeichnete Nachahmung dieser Schrift, daß man die Manuskripte dieser Zeit oft nur schwer von alten unterscheiden kann. Dazu kann z. B. der I-Punkt dienen, den die älteren Handschriften nicht haben.

Die Rechenmethoden

Wie rechnete man nun mit diesen neuen Zahlzeichen?[1] Über *Addition* und *Subtraktion* ist kaum etwas zu sagen. Diese beiden Rechnungsarten wurden meistens wie heute ausgeführt. Auch die heute als öster-

[1] Im Mittelalter sprach man von sieben oder gar von neun Grundrechenarten (species). So zählt Sacrobosco (um 1250) die folgenden auf: Numerieren, Addieren, Subtrahieren,



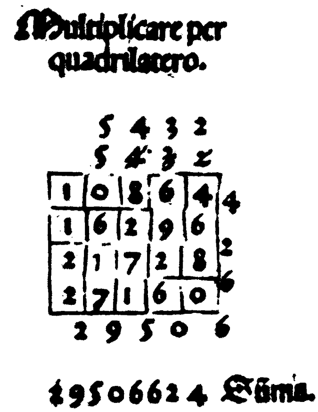


Abb. 56 und 57 Aus der Summa des Luca Pacioli von 1494

reichische Subtraktion bezeichnete Methode des Aufaddierens vom Subtrahenden zum Minuenden findet sich schon damals, so z. B. bei Buteo (1559).

Der *Multiplikation* haftete zunächst noch manches vom Rechnen auf dem Brett an, wovon hier nicht gesprochen werden soll. Aber auch zu ihren Methoden ist einiges zu bemerken. Es soll an Hand der folgenden Abbildungen aus der Summa de Arithmetica, Geometria, Proportionalita des Luca Pacioli geschehen, die 1494 in Venedig als erstes Werk dieser Art in der Landessprache gedruckt wurde. Pacioli führt nicht weniger als acht Methoden des Multiplizierens auf. Daneben gab es aber noch eine Reihe von Abarten. Auf die vier wichtigsten der von ihm angeführten soll hier hingewiesen werden. Abb. 56 zeigt die Multiplikation von 9876 mit 6789. Wie heute wird erst mit 9 multipliziert und das Teilprodukt hingeschrieben. 9 wird gestrichen. Dann wird mit 8 malgenommen, das Teilprodukt um eine Stelle nach links verschoben aufgezeichnet und 8 gestrichen usw. Zahlen gleicher Stufe stehen jetzt untereinander. In dem Druck ist allerdings in der letzten Zeile eine zu große Verschiebung eingetreten. Die Teilprodukte können nun stellenweise von oben nach unten addiert werden. Diese unserer heute meist angewandten Methode entsprechende Art wird von Pacioli als »Multiplicatio bericocoli vel scachierij« bezeichnet. Die erste Bezeichnung (bericocolo = Honigkuchen) war in Florenz, wo diese Kuchen eine der Zahlenanordnung ähnliche Form hatten, die zweite (scacchiere = Schachbrett) in Venedig üblich. Die Methode findet sich in ähnlicher Form schon um 1150 bei den Arabern.

Beim Multiplizieren im Quadrat (quadrilatero = vierseitig), das in Abb. 57 dargestellt ist, wo 5432 · 5432 berechnet ist, werden die Teilprodukte nicht eingerückt.

Verdoppeln, Halbieren, Multiplizieren, Dividieren, Rechnen mit Progressionen und Wurzelziehen. Pacioli (1494) läßt schon Verdoppeln und Halbieren fort und kommt so zu sieben Grundrechenarten. Seit Gemma Frisius (1540) spricht man nur noch von vier, wie es ja heute in den Rechenbüchern auch meist der Fall ist.

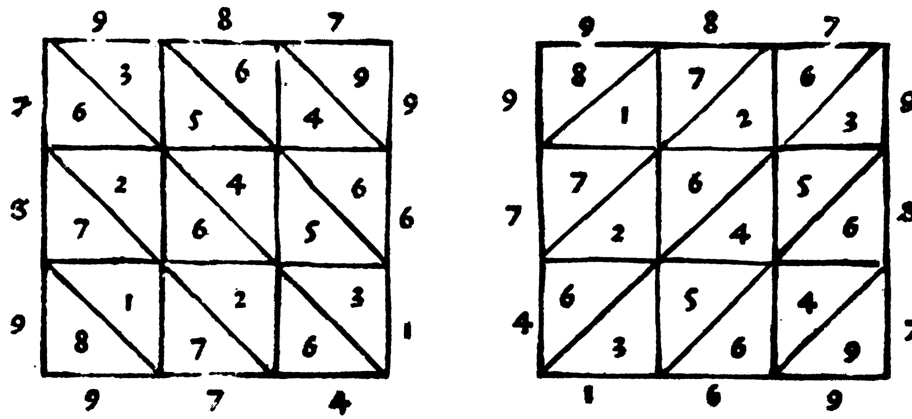


Abb. 58 und 59 Aus der Summa des Luca Pacioli von 1494

Zahlen gleicher Stufe stehen jetzt also auf von links oben nach rechts unten abfallenden Geraden. Längs dieser muß addiert werden: das Produkt steht jetzt unter und auf der rechten Seite des Quadrates. Diese Methode wird oft mit der in den nächsten Abbildungen dargestellten Gelosia-Methode zusammengenommen, so z. B. von Tartaglia (1556). Die Anordnung im Quadrat findet sich auch bei der Gelosia-Methode (gelosia = Jalousie), die die nächsten beiden Abbildungen zeigen, in denen 987 mit 987 multipliziert ist. In Abb. 58 stehen die Faktoren über dem Quadrat und an der linken Quadratseite von unten nach oben. Hier werden die Teilprodukte nicht gebildet, sondern die sich aus dem kleinen Einmaleins ergebenden Produkte werden in die durch die Diagonale geteilten Quadrate eingetragen, die Zehner unter, die Einer über der Diagonale. Die Zahlen zwischen zwei Diagonalen gehören dann der gleichen Stufe an und werden addiert. Das Produkt steht unten und rechts und wird von links unten nach rechts oben gelesen.

Ganz ähnlich ist die in Abb. 59 dargestellte Methode. Hier stehen die Faktoren über dem Quadrat und an seiner rechten Seite von oben nach unten, das Produkt an der linken Seite und darunter. Es wird von links oben nach rechts unten gelesen. Die Zehner stehen über, die Einer unter den Diagonalen. Die Addition erfolgt in der nach links abfallenden Richtung. Meist wird die in Abb. 59 dargestellte Methode angewendet. Aus ihr sind später die Neperschen Rechenstäbe entstanden. Die Methode findet sich schon bei den Indern um 1150, verbreitete sich von dort nach China (1593) und über Persien zu den Arabern, von denen sie längere Zeit vor anderen Methoden bevorzugt wurde. Von dort kam sie im 14. Jahrhundert nach Italien.

Weiter findet man noch die Methode der Multiplikation über Kreuz (per crocetta oder per casella; crocetta = kleines Kreuz, casella = kleines Haus), bei der keine Zwischenprodukte hingeschrieben zu werden brauchen. Schon die Araber kennen sie um 900 herum. Abb. 60 zeigt oben, wie man so 37^2 berechnet. Man multipliziert zunächst die durch den rechten Strich verbundenen Einer. Das gibt 9 Einer, die notiert werden. Die 4 Zehner werden zu den sich bei der Multiplikation längs der gekreuzten Linien ergebenden Zehnern hinzugenommen. Man hat also $21 + 21 + 4 = 46$ Zehner. 6 wird notiert und 4 zu den $3 \cdot 3 = 9$ Hunderten addiert. Diese 13 Hunderter werden hingeschrieben, und damit hat man das Quadrat von 37. Die darunterstehenden beiden Figuren zeigen, wie man auch drei- und vierstellige Zahlen in dieser Weise multiplizieren kann. Heute pflegt man das etwas anders zu machen. Man schreibt den einen Faktor in umgekehrter Ziffernfolge auf einen schmalen Papierstreifen und legt diesen so unter den anderen Faktor, daß die Einer unter den Einern stehen, multipliziert die übereinanderstehenden Zahlen, notiert die Einer und schiebt den Streifen um eine Stelle nach links: Jetzt stehen unter den Zehnern des ersten die Einer des zweiten und unter den Einern des ersten die Zehner des zweiten Faktors. Durch Multiplikation übereinanderstehender Zahlen, Addition und Hinzunahme der von den Einern herkommenden Zehnern erhält man die Zehner, deren letzte Ziffer notiert wird. Wieder wird der Streifen um eine Einheit nach links verschoben und die Hunderter ausgerechnet usw.

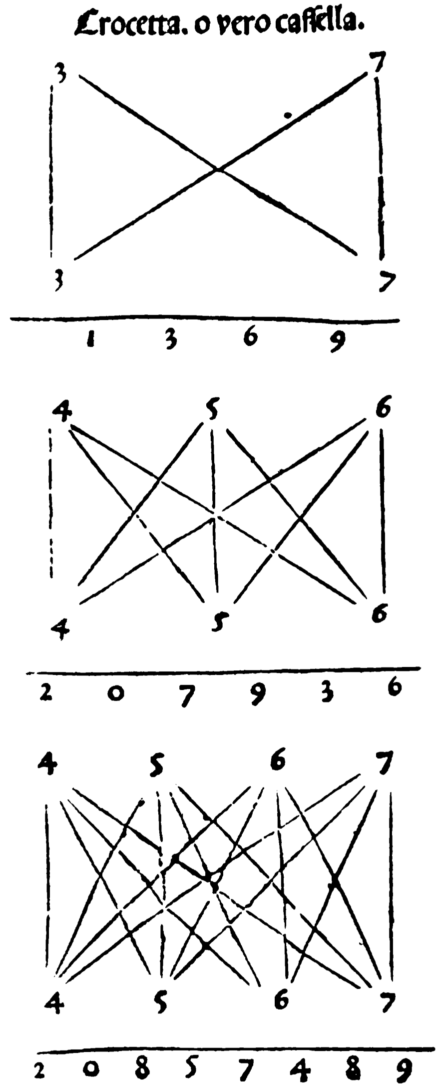
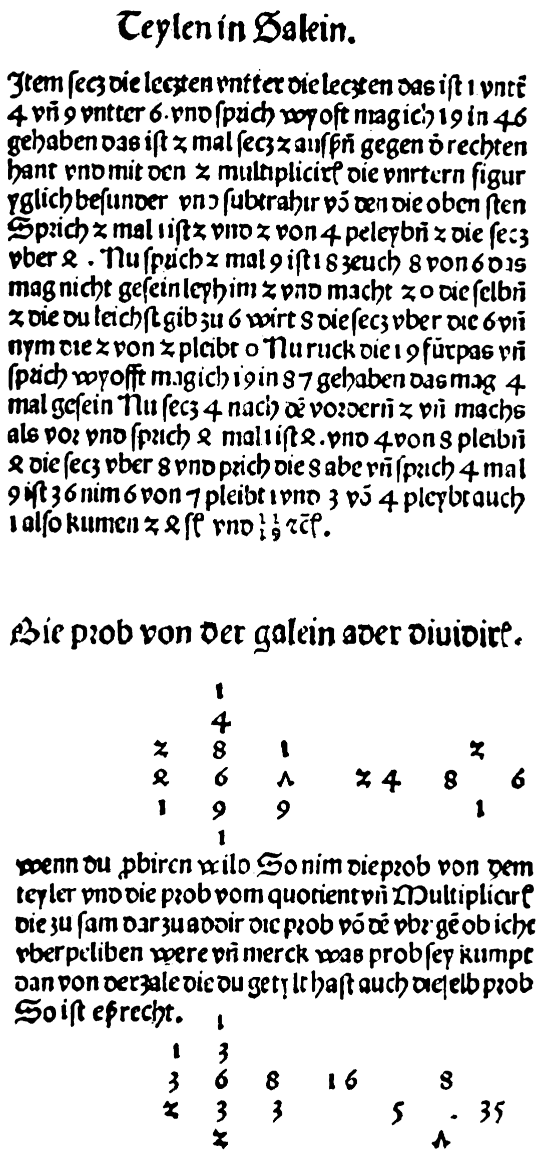


Abb. 60 Aus der Summa des Luca Pacioli von 1494

Die Division. Wesentlich anders als heute wurde damals die Division ausgeführt. Man bezeichnet die Methode als Galley-Methode (Teilen in Salein). Sie findet sich schon bei den Arabern um 825, ist die bis ins 17. Jahrhundert am häufigsten gebrauchte Methode und soll noch heute in den maurischen Schulen Nordafrikas gelehrt werden. Über diese auch als Überwärtsdividieren bezeichnete Rechnungsart möge das Bamberger Rechenbuch berichten, aus dem hier die Rückseite von Blatt 12 und die Vorderseite des nächsten Blattes abgebildet sind. Die einzelnen Stadien der Division von 467:19 sind die folgenden:

						4		1 4
2 467 19	2;	28 467 19	2;	28 467 199 1	24;	28 467 199 1	24;	281 467 199 1	24.

Das Resultat ist also 24 Rest 11.



Teylen in Galein.

Item secz die lecztẽ vntter die leczten das ist 1 vntẽ 4 vñ 9 vntter 6 · vnd sprich wyoft mag ich 19 in 46 gehaben das ist 2 mal secz 2 aussẽ gegen d rechten hant vnd mit dẽ 2 multiplicirt die vnntern figur yglich besunder vn̄ subtrahir võ dẽ die obẽ stẽ Sprich 2 mal 1 ist 2 vnd 2 von 4 peleybñ 2 die secz vber 4 · Nu sprich 2 mal 9 ist 18 zeuch 8 von 6 dz mag nicht gesein leyh im 2 vnd macht 2 0 die selbñ 2 die du leichst gib zu 6 wirt 8 die secz vber die 6 vñ nym die 2 von 2 pleibt 0 Nu ruck die 19 fürpas vñ sprich wyofft mag ich 19 in 87 gehaben das mag 4 mal gesein Nu secz 4 nach dẽ vordern 2 vñ machs als vor vnd sprich 4 mal 1 ist 4 · vnd 4 von 8 pleibñ 4 die secz vber 8 vnd sprich die 8 abe vñ sprich 4 mal 9 ist 36 nim 6 von 7 pleibt 1 vnd 3 võ 4 pleybt auch 1 also kumen 24 ſt vnd $\frac{11}{19}$ tel.

Die prob von der galein oder diuidirt.

wenn du ꝓbiren wilt So nim die prob von dem teyler vnd die prob vom quotient vñ Multiplicirt die zu sam dar zu addir die prob võ dẽ vbrigẽ ob icht vberpeliben were vñ merck was prob sey kumpt dan von der zale die du getylt hast auch die selb prob So ist es recht.

In Abb. 61 ist dann noch in der Mitte unten 368 : 23 gerechnet. Dieses Überwärtsdividieren ist, worauf schon Maximus Planudes (gest. 1310 in Byzanz) hinweist, nicht sehr übersichtlich. Besonders schwer ist die Nachprüfung wegen der vielen durchstrichenen Zahlen. Daher bürgerte sich eine andere Methode ein, die als »a danda« bezeichnet wurde und die sich in der heutigen Form etwa um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Italien findet. Es ist das unsere heute angewandte Methode. Ihr Name kommt daher, daß man nach Subtraktion des Teilproduktes die nächste Ziffer herunternimmt und zum Rest »gibt« (dare = geben). Ein Beispiel $53497 : 83 = 644\,{}^{45}/_{83}$ zeigt die nebenstehende Abbildung aus der Arithmetik des Calander von 1491. Darunter ist dann noch

$\frac{3}{8} : 60 = \frac{1}{160}$; $\quad 137\frac{1}{2} : 12 = 11\frac{11}{24}$;
$60 : \frac{3}{8} = 160$ und $\frac{2}{5} : \frac{7}{9} = \frac{18}{35}$

gerechnet. Diese Art des Dividierens führte sich zunächst nicht ein, doch übte dieses italienische Dividieren zum Beispiel die seit dem ersten Viertel des 15. Jahrhunderts blühende Wiener Ma-

Abb. 61 Aus dem Bamberger Rechenbuch von 1483 (Blatt 12, Vorderseite, und Blatt 13, Rückseite)

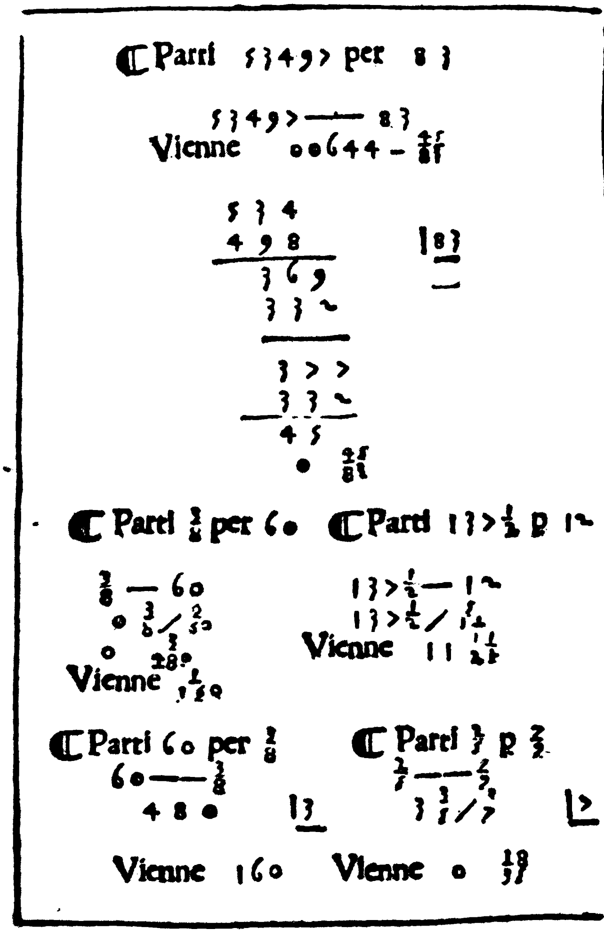


Abb. 62 Aus der Arithmetik des Calander von 1491 (Division in der heute üblichen Form)

thematikerschule (Johannes von Gmunden, gest. 1442; Georg Peurbach, gest. 1461; Regiomontanus, gest. 1476). Etwas später findet sich dann auch eine Abart dieses Unterwärtsdividierens, bei der man die einzelnen Teilprodukte nicht hinschreibt. Man bezeichnet sie wohl als die abgekürzte Methode a danda (Cataldi 1602).
Das Quadratwurzelziehen geschah ähnlich wie noch heute unter Benutzung der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Auf weitere Rechenmethoden, insbesondere auf das kaufmännische Rechnen in Regeldetri, Zins-, Termin-, Gewinn- und Verlust-, Rabatt-, Tara-, Mischungs-, Gesellschafts-, Wechselrechnung usw. einzugehen, würde hier zu weit führen. Natürlich werden diese Rechnungsarten eingehend in den Rechenbüchern jener Zeit an Beispielen erläutert.

Weitere Entwicklung des Zahlenrechnens

Bezeichnung der Dezimalbrüche. Zum Schluß noch einige Bilder zur weiteren Entwicklung des Zahlenrechnens. Zunächst: Wie wurden die Dezimalbrüche bezeichnet? In unserem absoluten Positionssystem ist eine eindeutige Bezeichnung der Dezimalbrüche möglich; in einem relativen, wie es die Babylonier hatten, war es das nicht. Im 16. Jahrhundert wurden die Dezimalbrüche, ähnlich wie wir es heute tun, durch einen Strich von den ganzen Zahlen abgetrennt. Das zeigt Abb. 63, die dem Exempelbüchlein von Christoph Rudolff aus dem Jahre 1530 entnommen ist. Sie gibt die Ausrechnung der Aufgabe: »Wan man vom hundert zu jährliche zyns gebē soll 5 fl., wieuil zins un zinßzins ertragē 375 fl. zehen jarlang?« Zinsen und Kapital werden hier

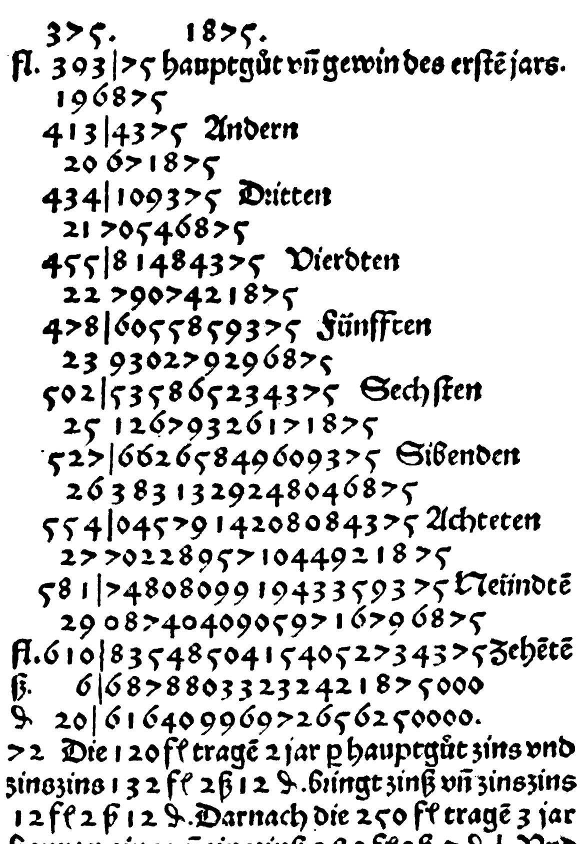
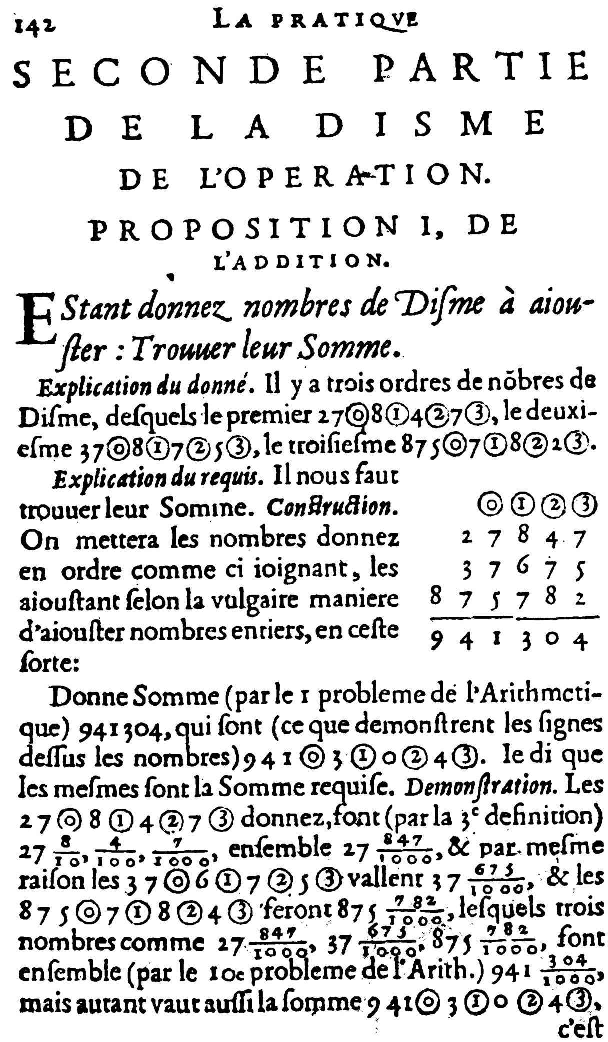

375. 1875.
fl. 393|75 hauptgůt vñ gewin des erstē jars.
196875
413|4375 Andern
20671875
434|109375 Dritten
2170546875
455|81484375 Vierdten
2279074218 75
478|6055859375 Fünfften
23930279296875
502|5358652343 75 Sechsten
25126793261718 75
527|66265849609375 Sibenden
263831329248046875
554|0457914208084375 Achteten
277022895710449218 75
581|7480809919433593 75 Neüntē
2908740409059716796875
fl. 610|835485041540527343 75 Zehētē
ß. 6|68788033232421875000
h. 20|616409969726562 50000.
72 Die 120 ff tragē 2 jar p hauptgůt zins vnd
zinszins 132 ff 2 ß 12 h. bringt zinß vñ zinszins
12 ff 2 ß 12 h. Darnach die 250 ff tragē 3 jar
hauptg. zins vñ zinszinß 289 ff 3 ß 7 h ½. Vnd
ist halber zins des vierdtē jars 7 ff 1 ß 26. h 7/16
b ij

Abb. 63 Dezimalbruchbezeichnung aus dem Exempelbüchlein des Christoff Rudolff von 1530 (Berechnung der Zinseszinsen von 375 Gulden zu 5%)



142 LA PRATIQVE

SECONDE PARTIE DE LA DISME

DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à aiouster : Trouuer leur Somme.

Explication du donné. Il y a trois ordres de nõbres de Disme, desquels le premier 27 (0) 8 (1) 4 (2) 7 (3), le deuxiesme 37 (0) 8 (1) 7 (2) 5 (3), le troisiesme 875 (0) 7 (1) 8 (2) 2 (3).

Explication du requis. Il nous faut trouuer leur Somme. *Construction.* On mettera les nombres donnez en ordre comme ci ioignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

	(0)	(1)	(2)	(3)
	27	8	4	7
	37	6	7	5
8	75	7	8	2
9	41	3	0	4

Donne Somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 (0) 3 (1) 0 (2) 4 (3). Ie di que les mesmes sont la Somme requise. *Demonstration.* Les 27 (0) 8 (1) 4 (2) 7 (3) donnez, font (par la 3e definition) $27 \frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, ensemble $27 \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 (0) 6 (1) 7 (2) 5 (3) vallent $37 \frac{675}{1000}$, & les 875 (0) 7 (1) 8 (2) 4 (3) feront $875 \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres comme $27 \frac{847}{1000}$, $37 \frac{675}{1000}$, $875 \frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941 \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 (0) 3 (1) 0 (2) 4 (3), c'est

Abb. 64 Dezimalbruchbezeichnung aus »La Disme« von Simon Stevin 1585 (Übersetzung S. 83)

von Jahr zu Jahr berechnet. Eine andere Bezeichnung der Stellen des Dezimalbruches durch eingekreiste Ziffern findet sich in der Arithmetik des Stevin (Kaufmann, später Ingenieur im Staatsdienst, geb. 1548 in Brügge, gest. 1620 in Leiden). Er hat als erster die Lehre von den Dezimalbrüchen systematisch behandelt, und zwar in einer kleinen flämisch geschriebenen Schrift »De Thiende«, die noch im gleichen Jahre in französischer Übersetzung als »La Disme« erschien und seiner Practique d'arithmétique vom Jahre 1585 als Anhang angefügt wurde.

MICHAELIS STIFELII

Primo subtraho 10 de 8, & non inuenio numerum aliquem supra 0, id est, supra nihil, quem ponere possim iusta subtractionis lege. Nam si ille à quo debet fieri subtractio, esset maior eo qui subtrahitur (ut si loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum uerum. Sic si ille numerus à quo fieri debet subtractio, esset æqualis ei qui subtrahitur (ut si loco 8 ponerentur 10) tunc relinqueretur 0. i. nihil, (quod mediat inter numeros ueros & numeros absurdos) Iam uero cum numerus subtrahendus maior sit eo à quo fit subtractio, restat ut numerus infra 0, id est, infra nihil, ponatur, uidelicet 0 — 2. Sic simili ratione postea subtraho 0 — 5 de 0 — 3, & inuenio 0 + — 3. i. numerum supra nihil, seu numerum uerum.

Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, ijs uti quæ sunt, & ijs quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, & sicut supra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræsentari uidetur in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis oculis abeã. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repetendum uidetur.

¶ Qualiacunqꝫ facit progressio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & subtrahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8, Sic — 3, additum ad 6, facit 3.

Abb. 65a Blatt 249, Vorderseite, der Arithmetica integra des Michael Stifel von 1544 (Übersetzung S. 83/84)

ARITHMETICAE LIBER III. 250

cit 3. Est autem —3 exponens ipsius $\frac{1}{8}$, sicut 6 est exponens numeri 64, & 3 est exponens numeri 8.

Item sicut $\frac{1}{8}$ diuidens 64, facit 512: sic —3 subtractum de 6 facit 9. Est autem 9 exponens numeri huius 512.

Item sicut 64 diuidens $\frac{1}{8}$ facit $\frac{1}{512}$. sic 6 subtracta de —3 relinquit —9. Est autem —9 exponens fractionis huius $\frac{1}{512}$.

Et sic patet pulcherrimum iudicium de minutijs unitatis abstractæ, & de ijs quæ Euclides, Boëtius, & alij senserũt de indiuisibilitate unitatis. De qua re etiam primo libro disputaui, uidelicet minutias unitatis habendas esse pro numeris fictis.

Sed qua ratione fit, ut —24 diuisum per —6 faciat +4? Respondeo. Ea ratione qua ex uno minuto diuiso per unum sextum (quod incredibiliter minus est millesima parte unius minuti) fiunt horæ 777600000, facientes fere 88716 annos. Item (ut familiarius simile ponam) ea ratione qua $\frac{1}{2}$ diuisa per $\frac{1}{4}$ facit 2. Nouerunt etiam indocti $\frac{1}{4}$ ß contineri sub $\frac{1}{2}$ ß bis. Sic unum sextũ continet sub uno minuto toties, 777600000. (cum unum minutum tot faciat sexta) & sic contrahitur ad quotientem istum aduerbialem, denominatio ista temporis, uidelicet horarum, ut deinde tot horæ faciant annos 88716. Sic dum diuido —24 per —6, tunc dico —6 contineri sub —24 quater. Et iste quotiens sic notandus uenit +4. Quãdo enim subtraho —6 de —24, tunc remanet —18. Et sic semel subtraxi —6 de —24. Subtraho igitur —6 de —18, & remanet —12: & sic 2, id est, bis subtraxi —6 de —24. Tertio subtraho —6 de —12, & remanet —6. atq; ita ternarium feci subtrahendo. Quarta igitur subtractione facta, 4 produxi, remanente 0. Vides aũt ut in absurdis numeris omnia fiant absurde siue inuerse: scilicet, in ueris numeris ita fit, ut subtractione minuantur, in absurdis uero numeris ita uidisti fieri, ut subtractione augeantur. Quod cum ita sit, necesse erit ut additione minuantur, ut —6 ad —4, facit —10. &c.

Habes itaq; ex his fontem rationum de omnibus quæstioni

rr ij bus

Abb. 65b Blatt 250, Rückseite, der Arithmetica integra des Michael Stifel von 1544 (Übersetzung S. 83/84)

Zur Erfindung der Logarithmen

Heute kommt man zum Logarithmieren durch die zweite Umkehrung des Potenzierens und gewinnt so die Regeln für das Rechnen mit Logarithmen. Ursprünglich ist man aber auf die Vereinfachung des Zahlenrechnens mit Hilfe von Logarithmen durch die Gegenüberstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe gekommen. Um 1500 herum findet man in den damaligen Mathematikbüchern solche Gegenüberstellungen. In moderner Schreibweise also zwei Reihen der Form

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \end{array}$$

so z. B. in Chuquets Triparty von 1484, in der schon erwähnten Summa des Luca Pacioli von 1494 usw. Die Glieder der ersten Reihe werden als Ordnungszahlen bezeichnet. Es wird dann darauf hingewiesen, daß das Produkt zweier Glieder der unteren Reihe ein Glied ergibt, dessen Ordnungszahl gleich der Summe der Ordnungszahlen der Faktoren ist. Michael Stifel (geb. in Eßlingen 1486, gest. in Jena 1567) setzte in seiner Arithmetica integra von 1544 diese Reihe nach links fort. Die Reihen finden sich z. B. auf Blatt 249, Rückseite, und Blatt 250, Vorderseite, die hier abgebildet sind. Sie zeigen, wie Stifel die negativen Zahlen einführt und wie er die Vorteile, die die Einführung dieser Zahlen bringt, gerade an der Gegenüberstellung dieser beiden Reihen zeigt. Außerdem erläutert er auf der zweiten Seite die Division negativer Zahlen durch negative Zahlen an einem Beispiel.
In Buch I, Blatt 55, Vorderseite, Zeile 8ff. spricht er noch ausführlicher über die Reihen. Er sagt: »1. Addition in der arithmetischen Reihe entspricht Multiplikation in der geometrischen... 2. Subtraktion in der arithmetischen entspricht in der geometrischen Division... 3. Der einfachen Multiplikation in der arithmetischen entspricht Multiplikation in sich (Potenzieren) in der geometrischen... 4. Division in der arithmetischen Reihe entspricht Wurzelziehen in der geometrischen, so ist dem Halbieren das Quadratwurzelziehen zugeordnet...«
Aus solcher Gegenüberstellung sind die ersten Logarithmentafeln entstanden. Für das praktische Rechnen ist diese Beziehung aber nur brauchbar, wenn die Zahlen in der geometrischen Reihe enger liegen, wenn also deren Quotient sich nur wenig von 1 unterscheidet. Solche Tafeln sind unabhängig voneinander von John Napier und dem Hofmechaniker Jost Bürgi in Kassel (geb. 1552, gest. 1632) berechnet worden. Letzterer nahm 1,0001 als Quotienten. Seine Tafeln erschienen 1620 als Progreßtabulen in Prag. Es sind eigentlich Antilogarithmentafeln, d. h. die Eingangszahlen, für die die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Zahlen konstant sind, sind die Logarithmen, die Bürgi nach der Druckfarbe als »Rothe Zahlen« bezeichnet, während in der Tafel als Funktionen dieser roten Zahlen die Numeri als »Schwarze Zahlen« aufgezeichnet sind. Es ist also gerade umgekehrt wie bei unseren heutigen Tafeln. Bürgi hatte seine Tafeln schon in den ersten Jahren des 17. Jahrhunderts berechnet, zögerte aber mit der Herausgabe trotz des Drängens von Kepler. Als sie dann endlich erschienen, waren sie schon veraltet, denn inzwischen hatte Briggs im Jahre 1617 seine für das praktische Rechnen bequemeren Tafeln der Zehnerlogarithmen heraus-

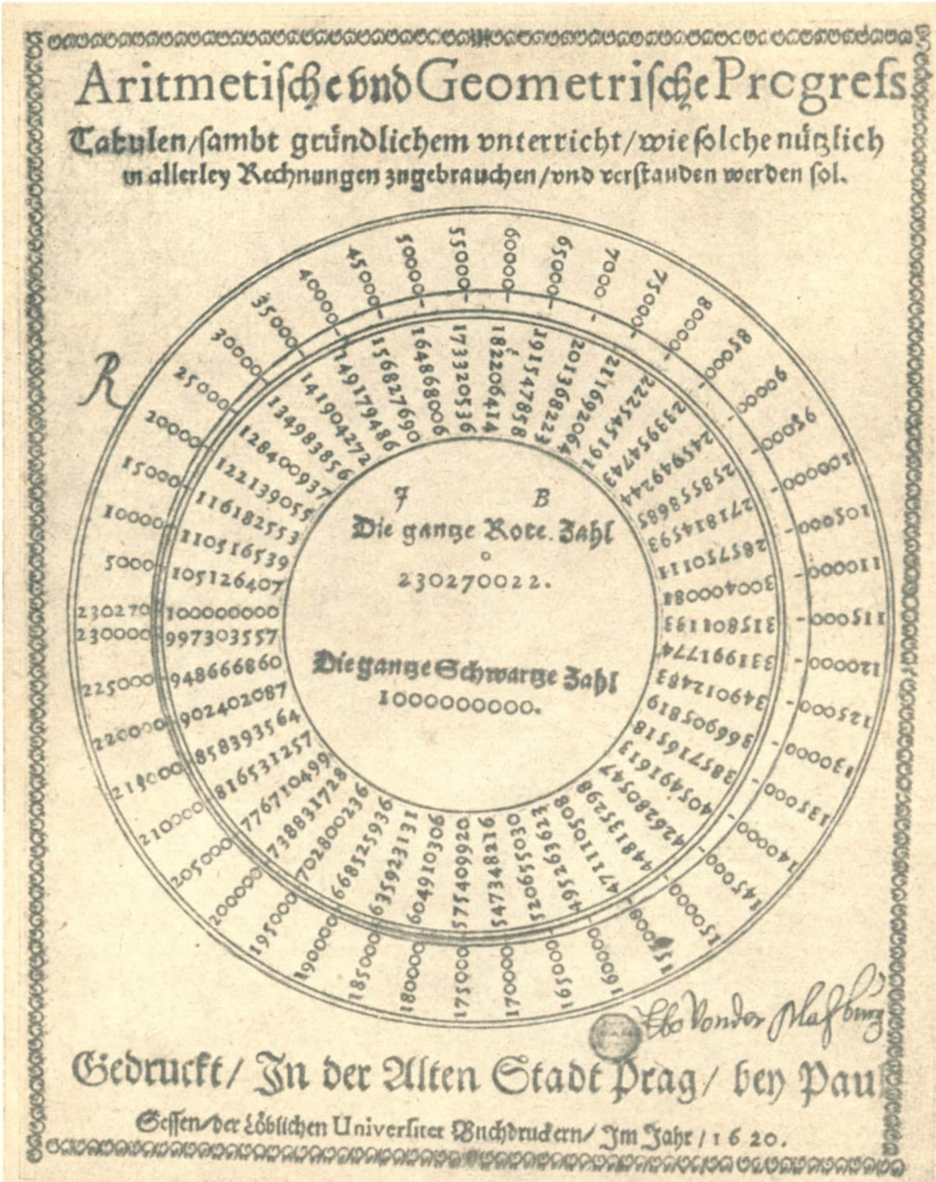


Abb. 66a Titelblatt der Progreßtabulen von Bürgi 1620

	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	1010.4966	101511230	102020032	102531384	103045299	10356179
10	····10000	····11277	····15067	····21981	····30234	···41637	····55603	····72140
20	····20001	····21228	··· 25168	····31524	····40437	····51891	····65909	····8250[illegible]
30	····30003	····31350	·· ·35274	····41687	····50641	····62146	····76216	····92861
40	····40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72402	····86523	103603221
50	····50010	····51487	····55479	····61006	····71052	····82660	····96832	····13581

Abb. 66 b Anfang der Progreßtabulen von Bürgi 1620

gebracht. Auch die Erfindung anderer Rechenhilfsmittel, wie die des Rechenstabes durch Gunter und Oughtred (um 1620) und die der Rechenmaschinen durch Pascal (1641) und durch Leibniz (etwa 1670), die heute den Gebrauch der Logarithmentafeln weitgehend verdrängt haben, fällt in jene Zeit.

VOLKSZIFFERN

Fingerzahlen

Schließlich sei noch über einige bei manchen Völkern gebräuchliche Zahlbezeichnungen berichtet. Zur Verständigung über Preise, aber auch zum Rechnen, wurden schon im Altertum, z. B. bei den Römern, insbesondere auch überall im Mittelalter wie noch heute auf den Märkten Arabiens und Ostafrikas Fingerzahlen benutzt, d. h. man ließ den einzelnen Zahlen bestimmte Stellungen der Finger entsprechen. Entstanden sind diese Zahlzeichen vielleicht durch das Abzählen mit dem rechten Zeigefinger an den Fingern der linken Hand. Jedenfalls werden für die Bezeichnung der kleineren Zahlen 1 bis 100 die Finger der linken Hand, und zwar für die Einer der 3. bis 5., für die Zehner Zeigefinger und Daumen benutzt. Zur Darstellung der Zahlen von 100 bis 10 000 werden dann die Finger der rechten Hand in den gleichen Stellungen verwendet. So versteht man, was es bedeutet, wenn z. B. der römische Dichter Juvenal in der zehnten Satire von einem sehr alten Manne sagt, daß er zum Zählen seiner Jahre schon die rechte Hand zur Hilfe nehmen müsse (suos jam dextra computat annos). Auch andere griechische und römische Schriftsteller, wie Herodot, Plinius, Ovid, erwähnen die Fingerzahlen. Die erste Aufzeichnung dieser Zahlzeichen findet sich bei dem englischen Benediktiner Beda (673–735). In späteren Rechenbüchern sind sie dann mehrfach wiedergegeben. Die Abb. 67 ist zum Beispiel der Summa des Pacioli (1494) entnommen. Mit der Verbreitung des Rechnens mit den indischen Ziffern verschwinden die Fingerzahlen dann mehr und mehr. In Deutschland werden sie zum letztenmal als Merkwürdigkeit bei J. Leupold, Theatrum arithmetico-geometricum 1740 abgebildet (Abb. 68). Hier findet man auch die Darstellung größerer

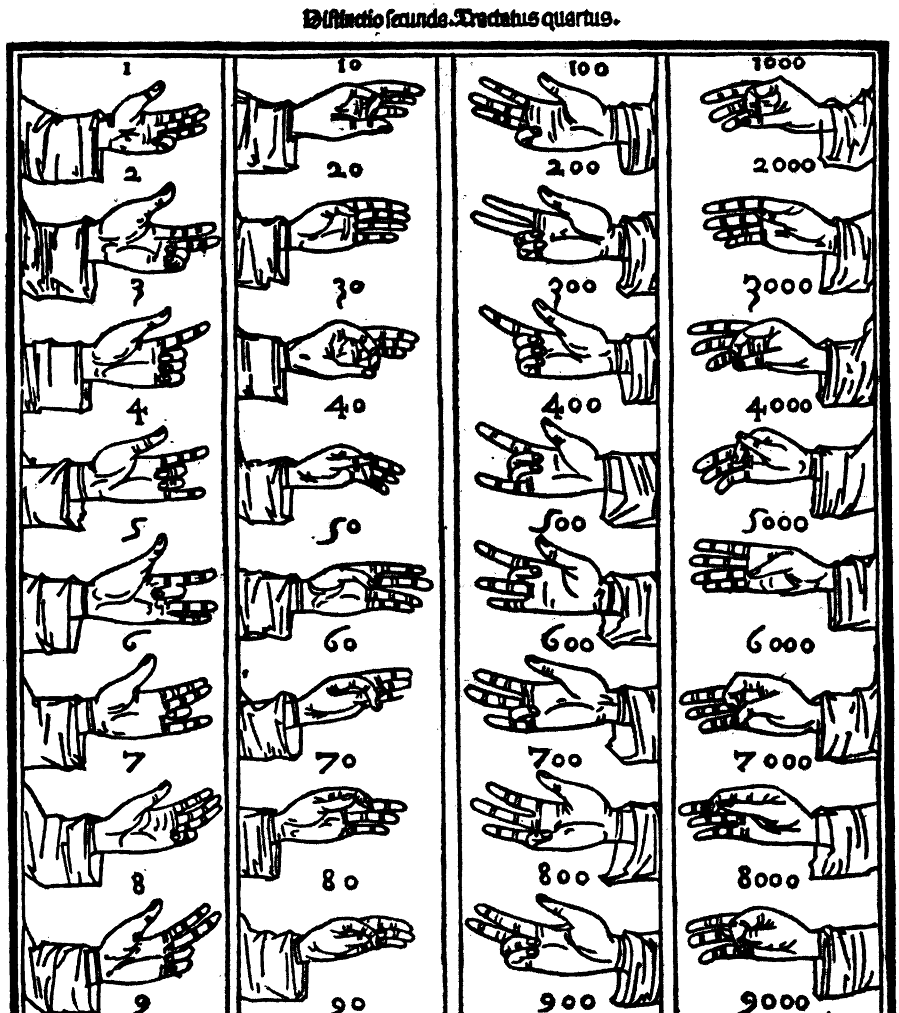


Abb. 67 Fingerzahlen aus der Summa des Luca Pacioli von 1494

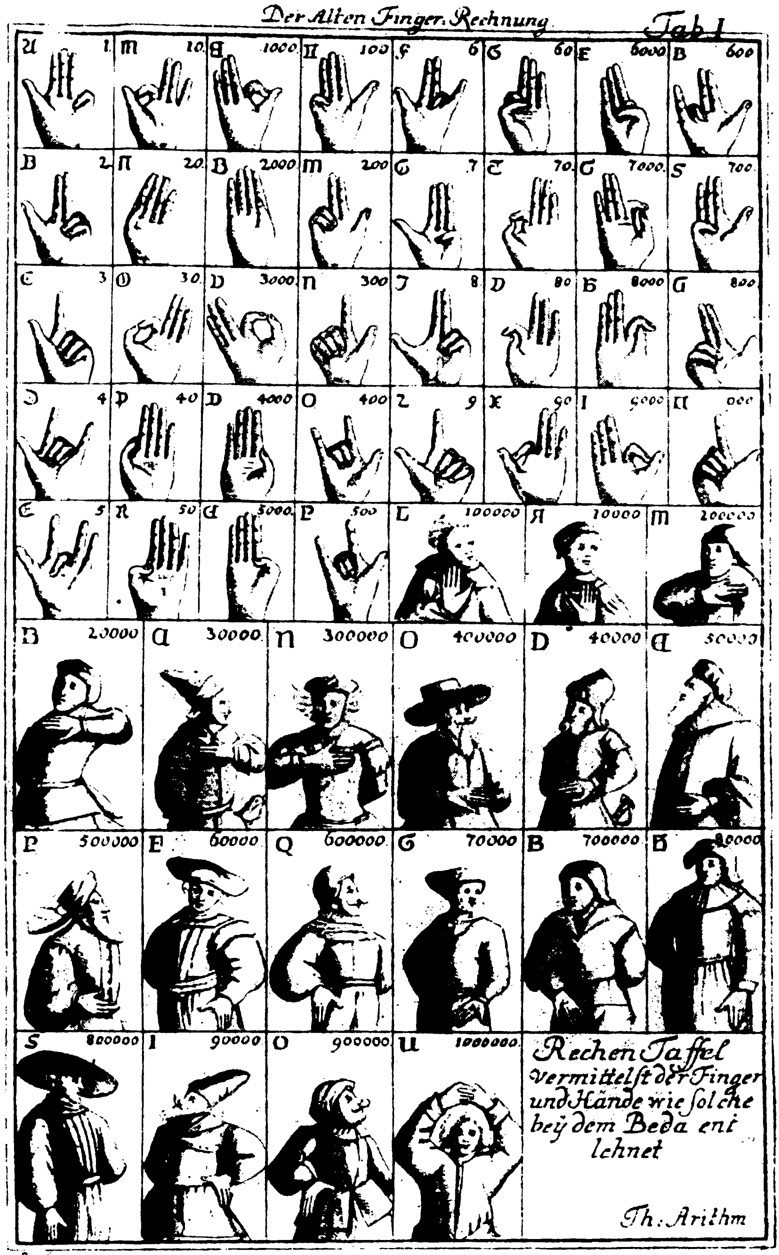


Abb. 68 Fingerzahlen nach Leupold 1740

Zahlen. Während die Zeichen für die Zahlen von 1 bis 100 festliegen, wechseln die für die größeren Zahlen; so sind z. B. bei Pacioli und Leupold gegenüber den Angaben nach Beda in dem Codex Alcobatiensis (um 1200) in der Nationalbibliothek in Madrid die Hunderter und Tausender vertauscht.

Runen als Zahlzeichen

Neben diesen Zahlzeichen wurden im Volk auch Buchstaben, insbesondere Runen als Zahlen benutzt. Abb. 69 gibt die Zahlwerte der jüngeren nordischen Runen und die Form einiger Bauernzahlen an. Von letzteren wird später die Rede sein. Die nächste Abbildung zeigt die Monate Januar und Februar eines stabförmigen Runenkalenders aus dem Oldenburger Landesmuseum. Die Abbildungen der ersten Reihe beziehen sich auf Heilige, Festtage usw. In den links stehenden Kreisringen ist durch die Zahl der Striche die Länge des Tages (oben) und der Nacht (unten) in diesen Monaten angegeben. Die zweite Reihe zeigt die sieben sich wiederholenden Tages-

Runen als Zahlzeichen; Bauernzahlen

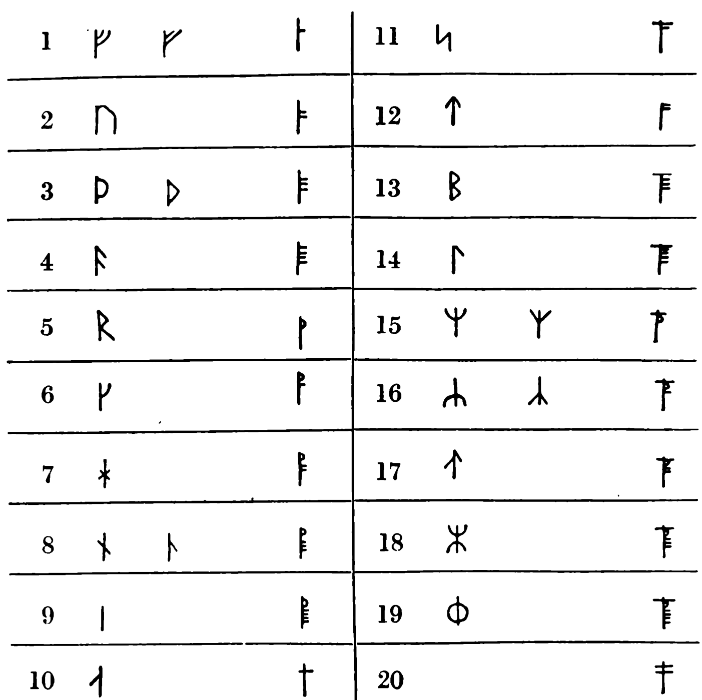


Abb. 69
Zahlwerte der neueren Runen und Bauernzahlen

Zahlwerte der jüngeren nordischen Runen (Spalte 2) und aus eingekerbten Zeichen entstandene steirische Bauernzahlen (Spalte 3)

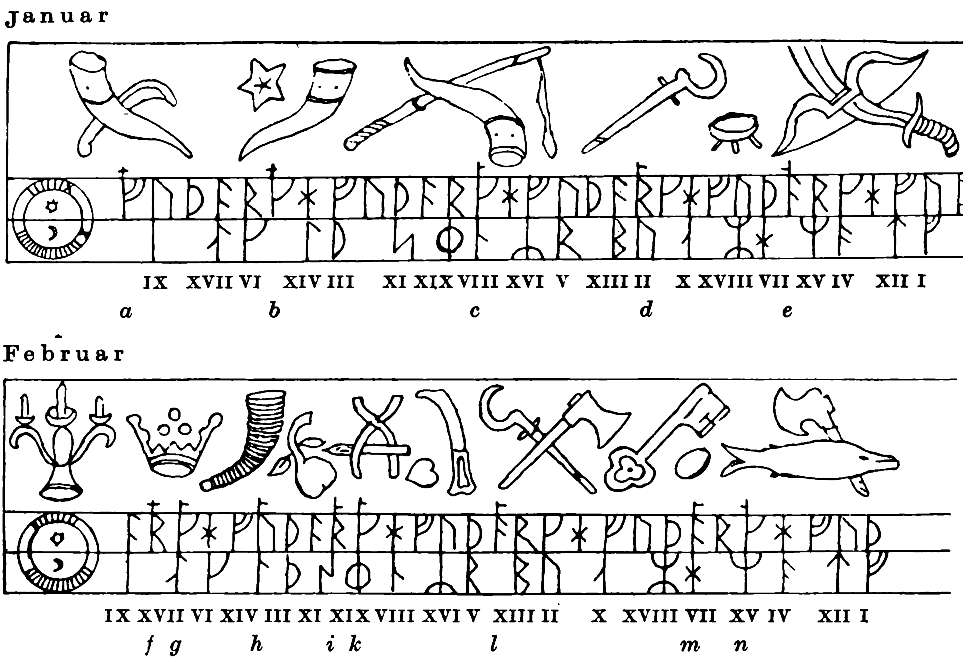


Abb. 70 Januar und Februar auf dem Oldenburger stabförmigen Runenkalender

runen der Wochentage. Durch nach oben herausragende Kreuze usw. sind die Festtage angegeben. Die untere Reihe gibt Zahlen in Runenform für die Mondrechnung. Den Monat Juli aus einem anderen Runenkalender, dem sog. Kalender von Bologna aus dem Jahre 1514, zeigt die Abb. 71. Die in der ersten Reihe stehenden Tagesrunen haben etwas andere Form wie die in Abb. 69 gegebenen. Über die Figuren und die unteren 3 Zeilen ist das gleiche zu sagen wie über den Oldenburger Kalender.

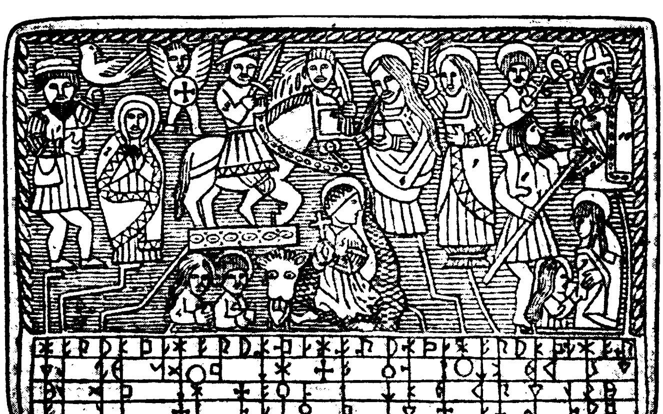


Abb. 71 Kalender von Bologna (Juli)

Bauernzahlen

In weiten Teilen Deutschlands findet man sog. Bauernzahlen, die aus Kerbformen entstanden sind, ähnlich wie die römischen Ziffern. Man findet sie zum Beispiel in einem steirischen Bauernkalender, von dem hier der Monat September abgebildet ist. Statt der Tagesrunen stehen hier Buchstaben. Die Zahlen für die Mondrechnung haben hier aber die Form von Bauernzahlen. Dieselben Formen findet man in anderen Teilen Deutschlands. So zeigt die nächste Abbildung eine Sonnenuhr vom Marienportal der Marienkirche in Gelnhausen. An die einzelnen Stundenlinien ist die zugehörige Zeit in solchen Zahlzeichen geschrieben. Man kann wohl annehmen, daß diese Sonnenuhr gleich bei dem Bau des Portales angebracht wurde. Dann würden diese Zahlzeichen hier aus dem ersten Viertel des 13. Jahrhunderts stammen. Als späteres Beispiel der Bauernzahlen zeigt Abb. 74 die Monate Oktober bis Dezember eines Kalenders aus dem Pustertal. Er bestand aus vier Holztafeln. Die Wochentage sind durch schwarze Dreiecke gekennzeichnet, die Sonntage durch einen Winkel. Vor jedem

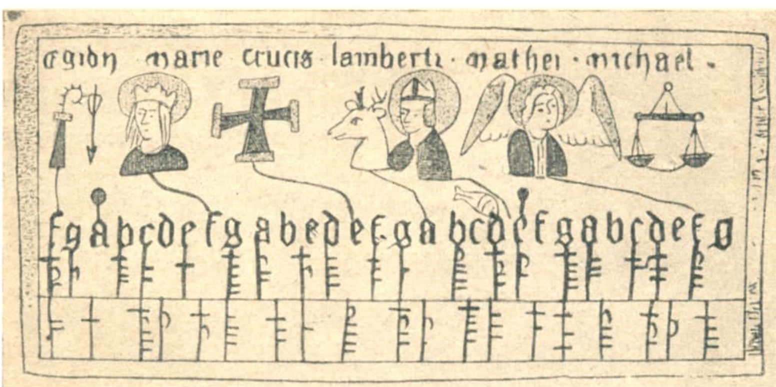


Abb. 72 September aus einem steirischen Bauernkalender von 1398

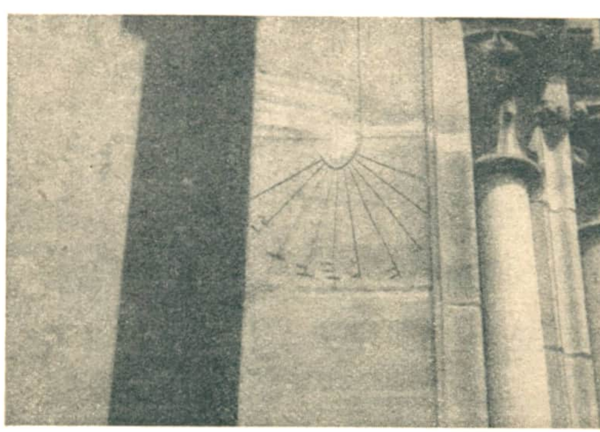


Abb. 73 Sonnenuhr von der Marienkirche in Gelnhausen

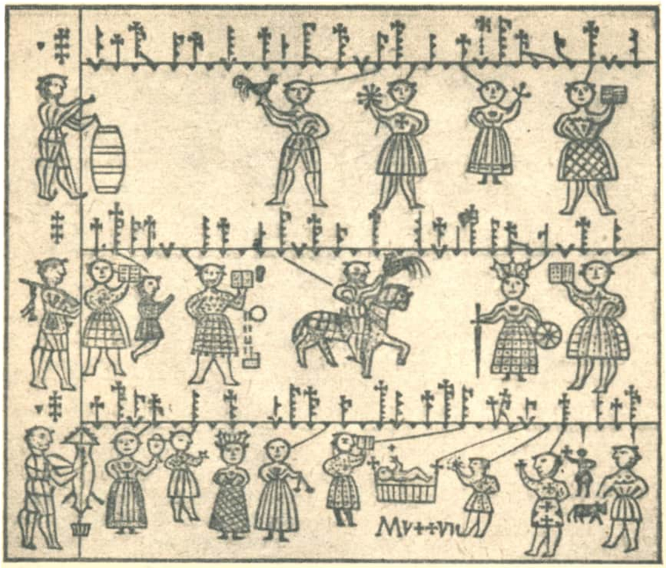


Abb. 74. Kalender aus dem Pustertal

Monat steht links das Monatsbild und die Angabe der Zahl der Tage des betreffenden Monats. Die Figuren beziehen sich auch hier auf die Kalenderheiligen; z. B. ist der 11. November dem heiligen Martin geweiht. Die Zahlen über den waagerechten Geraden betreffen die Mondrechnung. Besonders interessant ist unten die Angabe der Jahreszahl. Für tausend steht ein M, das folgende V bedeutet 500, also eine lateinische Ziffer mit Stellenwert, dann folgen zwei Zehner in Bauernzahlen, und VII ist wieder in römischen Ziffern gegeben.

DIE ZIFFERN DER MAYA

Zum Schluß sei noch kurz auf das zweite bekanntgewordene vollständige Positionssystem eingegangen, das, wie erwähnt, die Stellenschreibweise mit der Darstellung der Zahlen durch Reihung und Bündelung verbindet. Es findet sich bei den Maya, dem bekannten Kulturvolk Mittelamerikas. Als Franziscus de Cordoba 1517 mit seinen Spaniern in Yukatan landete, war die Kultur dieses Volkes durch Seuchen und Kriege der vorhergehenden Jahrhunderte schon fast vernichtet. Die Kenntnis der Mayakultur kam durch Aufzeichnungen des Bischofs von Merida, Diego von Lando, aus dem Jahre 1565 auf uns. Zwei Blüteperioden soll diese Kultur gehabt haben, die eine im 6., die andere im 11. bis 13. Jahrhundert n. Chr.
Das Zahlensystem der Maya ist ursprünglich wie das anderer Völker des gleichen Kulturkreises, z. B. der Tolteken, ein reines Vigesimalsystem. Die Tolteken z. B.

haben Zahlzeichen für 1, 20, 400 und 8000, durch deren Aneinanderreihung die Zahlen dargestellt wurden. In der Kalenderrechnung, mit der sich die Maya offenbar sehr eingehend beschäftigten, ist dieses System beim Übergang von der zweiten zur dritten Stufe durchbrochen. Eine Einheit der dritten Stufe hatte 18 Einheiten der zweiten, also $18 \times 20 = 360$ Einheiten der ersten Stufe. Da das Jahr bei den Maya, ähnlich wie bei einigen alten Mittelmeervölkern, 360 Tage hatte, die in 18 Monate zu 20 Tagen eingeteilt wurden, paßte sich ein solches Zahlensystem der Zeitrechnung sehr gut an. Alle höheren Stufen haben wieder die Umwandlungszahl 20.

In jeder Stufe werden die Zahlen mittels nebeneinandergereihter Punkte wiedergegeben. Diese werden zu 5 gebündelt durch einen Strich dargestellt. Also bedeutet z. B. $\overset{\cdots}{=}$ die Zahl 13. Gelegentlich sind die Zahlzeichen auch um 90° gedreht. Auf manchen Denkmälern sind die einzelnen Stufen durch merkwürdige Kopfformen dargestellt, die für jede Stufe eine besondere Gestalt haben. Man hat hier also eine benannte Stellenschrift. Die nebenstehende Abbildung gibt eine solche Zahl wieder. Das oberste große Zeichen ist die sog. Einführungsglyphe. Dann kommen in den nächsten drei Reihen:

in der ersten	Reihe links	9 baktuns (Zyklen)	=	9.	144000
	rechts	14 katuns	=	14.	7200
in der zweiten	Reihe links	12 tuns	=	12.	360
	rechts	4 uinals	=	4.	20
in der dritten	Reihe links	17 kins	=	17.	1
	rechts	12 Caban (Tage)			

Die Zyklen sind durch zwei verschiedene Zählungen der Monate bedingt und umfassen je 7200 Monate. Caban ist der Name eines Monats, in dem es sich also um den zwölften Tag handelt. Wie die Nachprüfung ergeben hat, muß es sich bei den tuns um einen Fehler des Bildhauers handeln. Es müssen wahrscheinlich 13 tuns sein, so daß die Zahl der Monate seit Beginn der Zeitrechnung der Maya, seit dem 14. Oktober 3373 v. Chr. nach dem Gregorianischen Kalender gerechnet, 1 401 577 Monate beträgt. Näher auf die Kalenderrechnung hier einzugehen, würde zu weit führen.

In Schreibschrift geschriebene Zahlenzeichen finden sich zum Beispiel in der bekannten Dresdener Mayahandschrift, von der hier nach der Reproduktion von Foerstemann (Leipzig 1880)

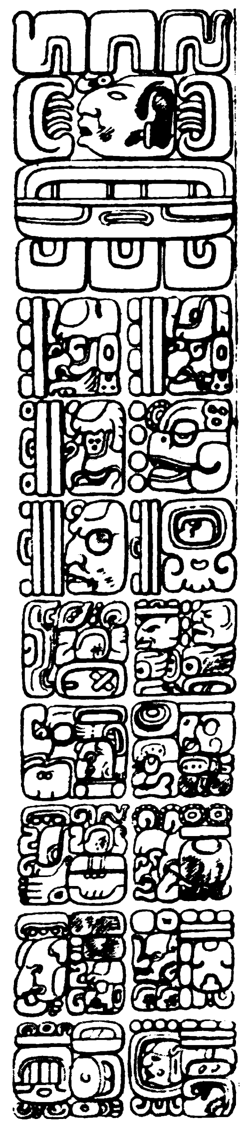


Abb. 75 Mayaziffern von einer Inschrift

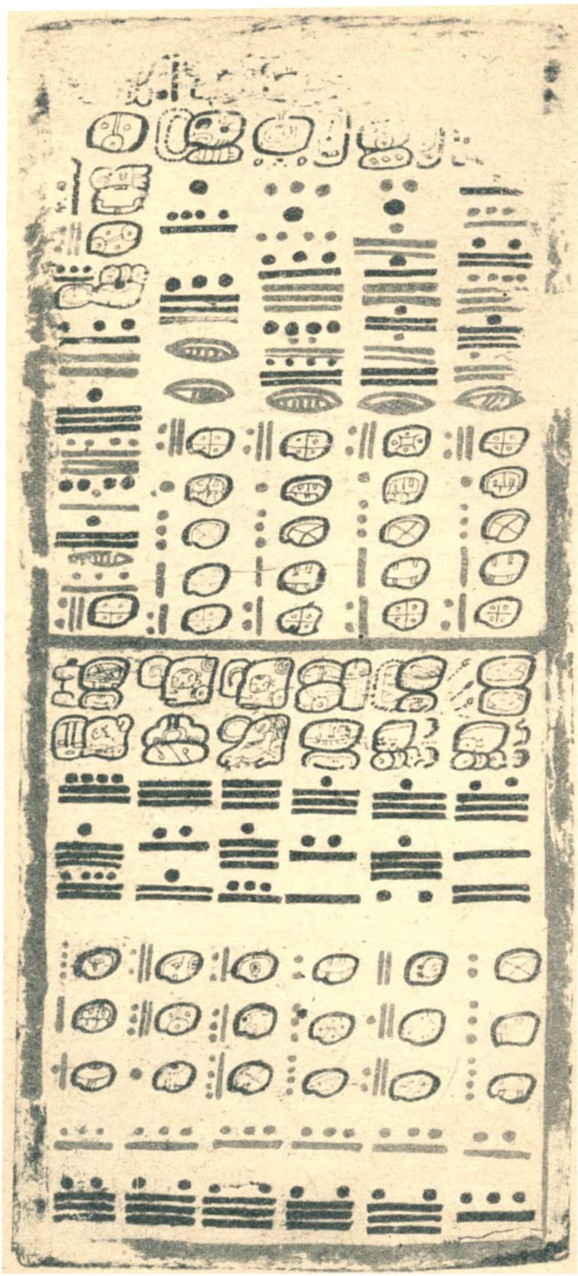


Abb. 76 Blatt LI der Dresdener Mayahandschrift

die Tafeln LI und XLIII wiedergegeben sind. Diese Handschrift hat 40 Blätter der Größe $9 \times 20^1/_2$ cm. Die einzelnen Blätter bestehen aus einem faserigen Stoff, wie man in Abb. 77 unten erkennt, auf dem beiderseits eine weiße kreideartige Schicht aufgetragen ist. Sie sind beiderseits mit Tusche verschiedener Farben beschrieben. Die Handschrift beschäftigt sich mit chronologischen Fragen. Die beiden abgebildeten Seiten enthalten zahlreiche Zahlzeichen, die hier zur Bezeichnung von Intervallen zwischen zwei Daten verwendet werden. Keine bekannte Urkunde läßt darauf schließen, daß diese Zahlzeichen auch zum Rechnen benutzt wurden. Auf Abb. 76 steht zum Beispiel rechts unten die Zahl $8 + 7 \times 20 = 148$. Die einzelnen Stufen stehen übereinander. Die Zahl wird also von unten nach oben gelesen. Hier sind die beiden Stufen verschieden gefärbt, die untere schwarz, die obere rotbraun. So sind die einzelnen Stufen vielfach abwechselnd gefärbt, aber durchaus nicht immer. Das ist zum Beispiel nicht in der darüberstehenden Zahlenreihe der Fall, in der, um ein Beispiel zu nennen, in der letzten Spalte die Zahl

$10 + 5 \times 20 + 17 \times 360 = 6230$ steht. In der oberen Hälfte dieser Tafel kommen größere Zahlen vor mit einer Anzahl von Nullen. Diese haben die Form eines schmalen Kreisbogenzweiecks, das in verschiedener Weise durch Ornamente ausgefüllt ist.

Oben in der zweiten Spalte von links findet man zum Beispiel folgende Zahl:

$1 . 20^3 . 18$	$= 1 .$	144000	$= 144000$
$+ 9 . 20^2 . 18$	$= 9 .$	7200	$= 64800$
$+ 18 . 20 . 18$	$= 18 .$	360	$= 6480$
$+ 0 . 20$	$= 0 .$	20	$= 0$
$+ 0 . 1$	$= 0 .$	1	$= 0$
			215280

Daneben stehen noch wesentlich größere Zahlen, die der Leser selbst entziffern möge. Das in der letzten Abbildung wiedergegebene Blatt, das ebenfalls zahlreiche Zahlzeichen enthält, gibt mehr ein Bild von dem allgemeinen Charakter der Handschrift.

Damit sind wir am Ende unserer Wanderung durch rund 5000 Jahre, die uns im wesentlichen durch die Länder um das Mittelmeer geführt hat. Unsere heutige Zahlschrift, die auf dem Wege über Araber von den Indern zu uns gekommen ist, ist zu einer der wesentlichsten Grundlagen unserer heutigen Kultur geworden. Ohne sie wäre die Entwicklung der Technik und des modernen Wirtschaftslebens bei uns unmöglich gewesen.

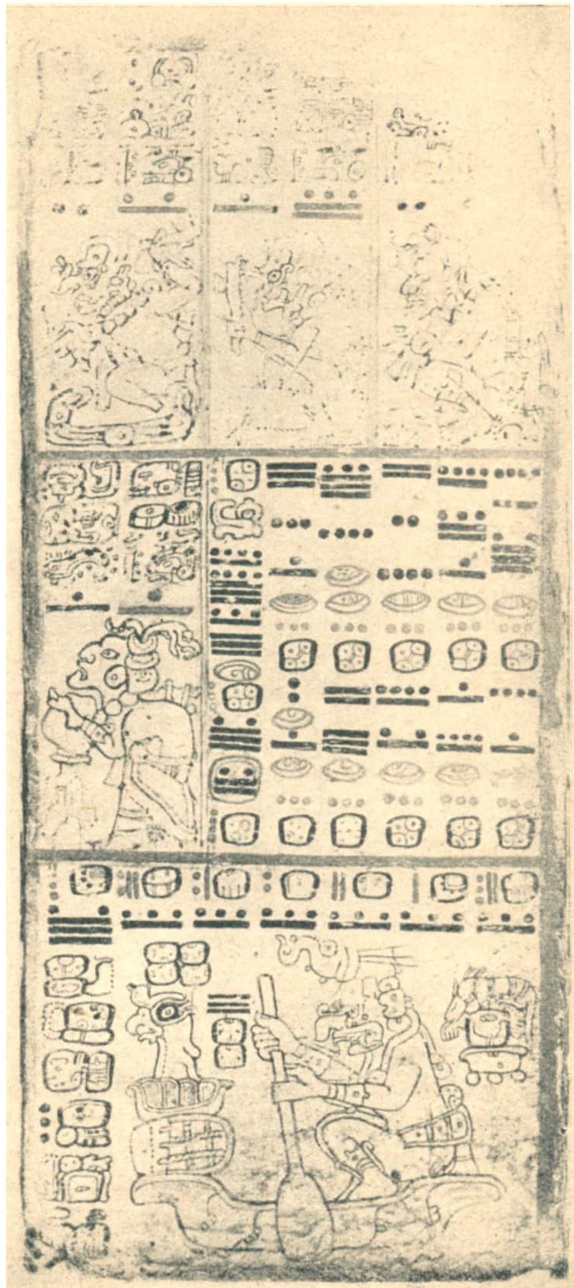


Abb. 77 Blatt XLIII der Dresdener Mayahandschrift

ANHANG

Abb. 22 *Übersetzung*

Ich habe die Straße von Regium nach Capua gebaut und habe längs dieses Weges alle Brücken, Meilensteine und Poststellen erstellt. Von hier nach Novceri sind es 51 Meilen, nach Capua 84, nach Muranum 74, nach Cosentia 123, nach Valentia 180, bis zum Gestade zur Statue 231, nach Regium 237; insgesamt von Capua nach Regium 321 Meilen.
Und ebenso habe ich als Praetor in Sizilien an italischen Flüchtlingen aufgespürt und ihren Herren zurückgegeben 947. Weiter habe ich zuerst veranlaßt, daß die Hirten auf den öffentlichen Ländereien den Ackerbauern wichen.
Hier habe ich das Forum und öffentliche Gebäude erbaut.

Abb. 33 *Text*[1]

Item de premanibus. XXXVIIIƗ^{t}.
Primo recepit de IƗ^{su} tritici X^{t}. Item de ordeo XLII^{t}.
Item de siligine. C. XLV^{t}, V solidi. Item de auena V^{t}.
Item de vaccarum vitulis et vno boue XLVI^{t}.
Item de vno equo vendito XI^{t}.

Summa. CC. XCVIIƗ^{t}, V solidi.

Expendit primo pro precio familie. C. XXVIƗ^{t}, XLIIII₰.
Item pro porcis. XXX^{t}. Item pro vna vacca XVIII^{t}.
Item messoribus et trituratoribus. XXVIII^{t}. Item ad fenum primum
et secundum X^{t}. Item fabro X^{t}XX₰. Item pro oleo VII^{t} minus
II ratisponenses. Item pro ferro V^{t}. Item pro sale X^{t}. Item prosemine
plantularum et lino IIIƗ^{t}. Item pro straminibus V. Item pro ra-
pulis IIƗ^{t}. Item pro panno lineo IƗ^{t}. Item carputariis
IIƗ^{t}. Item pro funibus IIIƗ^{t}. Item pro wagensmir IƗ^{t}, V solidi.
Item ad coquendum olera II^{t}. Item pro ollis luteis et vten-
silibu sdomus III^{t}. Item de cesu agrorum XƗ^{t}.

Summa CC. LXXIX^{t}, XXVI denarii. Et sic Re-
ceptum excedit expensum in XIX^{t}, quae habet premanibus.
Status. Primo habet premanibus in prompto XIX^{t}.
Item Equos IIII. et vnum apud hofrichter.

[1] Klartext und Übersetzung zu Abb. 33, 34 und 42 verdanke ich Herrn Prof. Dr. Spamer. Bei der Übertragung von Abb. 22 und 65 beriet mich Prof. Dr. Schottländer.

Abb. 33 *Übersetzung*

Desgleichen zu Händen[1]: $38^1/_2$ Talente[2].
Erstens nimmt er ein von $1^1/_2$ ...[3] Weizen 10 Talente. Desgleichen von Gerste 42 Talente. Desgleichen von Weizenmehl[4] 145 Talente, 5 Solidi. Desgleichen von Hafer 5 Talente. Desgleichen von Kuhkälbern und einem Rind 46 Talente.
Desgleichen von einem verkauften Pferd 11 Talente.

Summa: $297^1/_2$ Talente, 5 Solidi.

Er gibt aus: erstens für den Unterhalt der Familie $126^1/_2$ Talente, 44 Pfennige. Desgleichen für Schweine 30 Talente. Desgleichen für eine Kuh 18 Talente. Desgleichen den Mähern und Dreschern 28 Talente. Desgleichen auf erste und zweite Hypothek[5] $9^1/_2$ Talente. Desgleichen dem Schmied 10 Talente, 20 Pfennige Desgleichen für Öl 7 Talente weniger 2 Regensburger Groschen[6]. Desgleichen für Eisen 5 Talente. Desgleichen für Salz $9^1/_2$ Talente. Desgleichen für Samen von Pflänzlingen und Flachs $3^1/_2$ Talente. Desgleichen für Stroh $4^1/_2$ Talente. Desgleichen für Rettiche $2^1/_2$ Talente. Desgleichen für Leinentuch $1^1/_2$ Talente. Desgleichen den Pflückern $2^1/_2$ Talente. Desgleichen für Seile $3^1/_2$ Talente. Desgleichen für Wagenschmiere $1^1/_2$ Talente, 5 Solidi.
Desgleichen zum Kochen von Gemüse[7] 2 Talente. Desgleichen für Tontöpfe und Utensilien des Hauses 3 Talente. Desgleichen für den Schnitt[8] der Äcker $10^1/_2$ Talente.

Summa: 279 Talente, 26 Denare. Und so überschreitet die Einnahme die Ausgabe um $18^1/_2$ Talente, die er in Händen hat.

Der Stand: Erstens hat er zu Händen jederzeit verfügbar $18^1/_2$ Talente.

Desgleichen 4 Pferde und eines bei Hofrichter.

Abb. 34 *Text*

Suma sumarum ausgebns von dem ganzen Jare. Anno domini
etc. LXXXX^{mo}. XV.^{C}: LXXXVI. librae VI. β. X ₰.
Summa ausgbns den geltern den mein herr schuldig
gewesen ist vnd sust auch zu annczu merkliche stükh
von dem gelt das der wenndlstain von Nurmberg braht
mit dem gelt das der prachs meinem herrn auf den
Schaunperg geliehen hat vnd mit dem gelt das der
vicztumb meinem herrn von den von Regus geteydingt hat
bringet an einer Summ. etc.

II^{M}. VIIII^{C}. LXXXIII. librae. III. β. XXIII. ₰.

[1] Der Begriff de premanibus fehlt bei Dutange.
[2] Das hochgestellte t dürfte Talente heißen (Talent = Pfund).
[3] Das hochgestellte su (oder bu?) nicht bei Capelli, Lexic. abbreviaturarum.
[4] siligo bedeutet sowohl feines Weizenmehl wie Winterweizen.
[5] fessus = Schuldenlast, Wucher oder (wie hier) Geldverleihung gegen Zinsen.
[6] Ratisponenses = Regensburger Groschen oder Pfennige.
[7] olus bedeutet jedes Grün- und Küchenkraut, Gemüse, Kohl, Rüben usw., insbesondere aber den Schwarzkohl.
[8] caesus = eigentlich: das Hauen.

Abb. 34 *Übersetzung*

Summa summarum der Ausgaben von dem ganzen Jahre. Anno domini etc. 90[1]: 1586 Librae[2], 6 Solidi[3], 10 Pfennige.

Ausgabensumme der Gelder, die mein Herr schuldig
gewesen ist und sonsten auch[4] beträchtliche Stücke
von dem Geld, daß der Wenndlstain von Nürnberg gebracht
hat, mit dem Geld, das der Prachs meinem Herrn auf den
Schaunberg geliehen hat, und mit dem Geld, das der
Vicztumb meinem Herren von denen von Regus ausgehandelt hat;
macht in einer Summe [etc.]:

2983 Librae, 3 Solidi, 24 Pfennige.

Abb. 42 *Text*[5]

Principio mundi sunt milia quinque trecenti. Et sexaginta.
septem sunt insuper anni. Virginis ad partum. Secundum quosdam.
Secundum alios. Milia quinque ducenti viginti octo.

1. Anno XLII° Augusti cesari[s][6] in ipsa census proscripcione.
Jhs̄ Xpc̄ filius dei viui dignatus est in carnari a beata uirgi-
ne Maria ea uero duodenne. Eodem anno in cunis a magis adoratur.

2. Infantium occisa sunt agmina.

12. Cum esset ihs̄ annorum XII doctoribus miraculum prebuit interro-
gantibus. responsis suis.

15. Augustus moritur. Cui tyberius successit. 1[6°][7]. 17°. 18°.
[Am Rand: imperator] 19°. 20°. 21°. 22°. 23°. 24°. 25°. 26°. 27°. 28°. 29°.

30. Jhs̄ a Johanne babtizatur. et a spiritu temptatus. Apostolos vo-
cat. et coram eis aquam in nupciis in uinum conuertit. Eodem Anno
Johannes occiditur baptista ab herode. 31°. 32°.

33. Dominus noster ihs̄ xpc̄ est crucifixus. et die tercia surrexit
a mortuis. Eodem Anno Stephanus lapidatur. Paulus conuertitur.
et disciapuli disperguntur. 15°. tyberii anno. 34. 35. 36. 37.

38. Tyberius moritur. Gaius successit. Pilatus qui sentenciam dam- [Am Rand: imperator]
nacionis in xpm̄ dedit. propria manu sibi mortem asciuit. 39. 40[8]

41. Gaius uitam finiuit[9]. cui Claudius successit. Quo imperante primus. [Am Rand: imperator]
apostolorum Jacobus calicem saluatoris bibit per gladium secundi herodis
a quo petrus mancipatus est custodie carceris.

[1] Gemeint ist das Jahr 1390.
[2] Libra = Pfund.
[3] Solidus = Schock.
[4] zu anneczu ist unklar.
[5] Der Text gibt eine summarische Übersicht der Geschichte des Christentums bis zum Jahre 68.
[6] Hs.: cesari.
[7] Hs.: 1 statt 16°.
[8] Hs.: 30 statt 40.
[9] finiuit undeutlich geschrieben.

42. Petrus[1] romam ueniens euangelii sui clauibus in eadem urbe populis.
ianuam regni celestis aperit. et eccleciam uerbo predicacionis
euangelice fundauit. Vbi et Marcus eius discipulus ex illius ore
euangelium scripsit. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49.
54. 50. 51. 52. 53. Claudius Obiit. cui Nero successit. [Am Rand: imperator]
55. Paulus romam a festo missus. euangelium quod eatenus in oriente predicauit ex ore leonis liberatus late seminarium in occidentibus partibus fudit. 56. 57. 58. 59.
60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. Post beatum petrum[2]
Linus[3] Romane ecclesie episcopatum regendum suscepit.

Abb. 42 *Übersetzung*

[Vom] Anfang der Welt an sind es 5300 und obendrein noch 67 Jahre bis zur Geburt der Jungfrau. [So] nach Einigen. Nach Anderen [sind es] 5228 [Jahre].

[Zum Jahr] 1: Im 42. Jahr [der Herrschaft des] Kaisers Augustus [war eine] Steuereinschätzung durch öffentlichen Anschlag. Jesus Christus, der Sohn des lebendigen Gottes, ist gewürdigt worden Fleisch anzunehmen von der seeligen Jungfrau Maria, als sie in der Tat zwölfjährig war. Im gleichen Jahr wurde er in der Wiege von den Weisen verehrt.

[Z. J.] 2: Die Scharen der Kinder wurden getötet.

[Z. J.] 12: Als Jesus 12 Jahre alt war, lieferte er den [ihn] befragenden Schriftgelehrten ein Wunder durch seine Antworten.

[Z. J.] 15: Augustus stirbt[4]. Ihm folgt Tiberius. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.

[Z. J.] 30: Jesus wird von Johannes getauft und vom [bösen] Geist versucht. Er beruft die Apostel und verwandelt vor ihren Augen bei der Hochzeit Wasser in Wein. Im gleichen Jahre wird Johannes der Täufer von Herodes getötet. 31. 32.

[Z. J.] 33: Unser Herr Jesus Christus ist gekreuzigt worden und stand am dritten Tage wieder von den Toten auf. Im gleichen Jahre wird Stephanus gesteinigt, Paulus bekehrt, und die Jünger zerstreuen sich. Im 15. Jahr [der Herrschaft] des Tiberius[5]. 34. 35. 36. 37.

[Z. J.] 38: Tiberius stirbt[6], Gajus folgte ihm. Pilatus, der das Verdammungsurteil gegen Christus gab, hat sich freiwillig mit eigener Hand den Tod gegeben[7]. 39. 40.

[Z. J.] 41: Gajus beschloß sein Leben[8]. Ihm folgte Claudius nach. Unter seiner Herrschaft trinkt der erste der Apostel, Jacobus, den Kelch des Heilands durch das Schwert des zweiten Herodes, von dem Petrus der Kerkerhaft überliefert wurde.

[1] Über Petrus transkribiertes 1 (= Papst Nr. 1).
[2] Über Petrus transkribiertes 1 (= Papst Nr. 1).
[3] Über Linus: 2 (= Papst Nr. 2).
[4] In Wirklichkeit starb Augustus am 19. August 14 n. Chr.
[5] Das 15. Jahr der Herrschaft des Tiberius war aber 29 n. Chr.
[6] Tiberius starb am 16. März 37; Gajus = Caligula.
[7] Legendär. Sein Patronat über Judäa endete 37.
[8] Caligula wurde am 24. Januar 41 ermordet.

[Z. J.] 42: Petrus öffnet, nach Rom kommend, mit den Schlüsseln seines Evangeliums die Türe des Himmelreiches und hat mit dem Wort der Predigt des Evangeliums die Kirche begründet. Woselbst auch Marcus, sein Schüler, aus dessen Mund das Evangelium niedergeschrieben hat. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53.

[Z. J.] 54: Claudius starb. Ihm folgte Nero.

[Z. J.] 55: Paulus, von Festus nach Rom geschickt, hat das Evangelium, das er bisher im Orient gepredigt hat, aus dem Rachen des Löwen befreit[1], weithin als Pflanzschule in den westlichen Landen gefestigt. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. Nach dem seligen Petrus hat Linus die Bischofsherrschaft der römischen Kirche übernommen.

Abb. 44 *Text der ersten Seite des Hildesheimer Rechenbuches*

Allgorismus is een aerst (Kunst) in den welken sun / ghenificeert (bezeichnet) IX figuren (Ziffern). Aend dit sind die / IX 9 8 7 6 5 4 3 2 1 want die / minste figuer byduet ons (nur) 1. Aend die / and' twe aend die derde tre aend alzo voert / aen waneer (wenn) ghy comt tot neghen mer ter (dreimal) / dre doet neghen. Aend die X is ghehéyten een cyfer (Null). Aend is dit 0. / Dese cyfer (Zahlzeichen ohne Wert) een byduet ons in haer seluen (an und für sich) nicht. Ofte (auch) in / gheen numerus mer sy byduet ons up (nur für) die figuren die haer / [nach links] folghen dien doetse den numerus tyenwerue (zehnmal) dubeleren (mehren) als dese hiir / 10 20 30 40 50 60 70 80 90. Ofte anders hoe sy staen (oder welche sonst stehen mögen). / Aend elke vanden voerseyden (vorgenannter) 9 figuren in die eerste stede staende / die beduden ons śimpeliit (nur einfach) haerseluen (sich selbst) aend die in die ander / stede staen tyenwerwe (zehnfach) haerseluen aend die derde stede hun- / dertwerwe haerseluen aend in die vyerde stele dusent werf / haerseluen aend in die vüfte stede 10^{m} (10000) werf haerseluen Aend in / die 6-te stede c^{m} (100000) werf haerseluen etc. pterea. Aend alsoe voert / emmer tyenwerf meer. Aldus (also) 1 10 100 1000 10000 [100000] 1000000 / 10000000 Aend aldus is van elken (mit allen) andern figuren waer dat saech (wo das der Fall ist) / dat daer voer stunden cyfern Ofte een enich (irgendeine) ander figuren. / Aend dat is altoes (stets) die jerste stede die naest d'rechter Hand staet / Ofte die laetste wert ghescreuen als men scriift int ghe- / meen (gewöhnlich) wan sy dubleren vander rechter hant ter slinker (linken) hant voert- / tellende (fortzählend) aldus (also) tincaruacar[?] / 1410 van drien numeren of ghetael. / Heet sint dre manieren (Arten) van numeren / in desen arst (Kunst). Dat is tho weten aldus / Numerus digitus (Fingerzahlen) Numerus articulus (Knöchelzahlen) Numerus / compositus siue mixtus (zusammengesetzte oder gemischte Zahlen). Aend num. digitus en (ist) / elc. (jede) numerus byneden (beistehenden) IX als hiirna (hiernach) / 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Numerus articulus en 10 20 / 30 40 50 60 70 80 90 Aend al dat men by X maech (durch 10 kann) / delen. Aend num. compos. siue mixtus en bedekent elhich (bezeichnet jegliche) numerus tusschen / tynen (den Zehnern) Als 11 12 13 14 Aend 21 22 23 24 25 Ofte (oder) 31 32 / 33 34 35 36 Ofte anders die ghemacht sun van digito / et articulo. *It is van numeren tho le- / ren scriuen van ellech (folgender) numer.*

Om tho leren scriuen enen numerus. Int jerste (zuerst) by- / syet (besehet) waer dat numer is digitus ofte articulus ofte compositus.

[1] Nach der Legende wurde der zum Tode verurteilte Paulus im römischen Amphitheater den Löwen überliefert. Dem Rachen des Löwen entkommen, wurde er dann enthauptet, nachdem er auf dem Wege zur Richtstätte noch 3 Begleitsoldaten bekehrt hatte.

Abb. 64 *Übersetzung der ersten Seite von La Disme*

»Gegeben seien Dezimalzahlen. Ihre Summe ist zu finden.

Angabe der Daten. Es sind drei Dezimalzahlen gegeben, deren erste 27,847, deren zweite 37,875, deren dritte 875,782 ist.

Angabe des Gesuchten. Man soll die Summe finden.

Durchführung. Man schreibt die gegebenen Zahlen in der Ordnung, wie hier geschehen, hin und addiert in der gewöhnlichen Art, wie man ganze Zahlen addiert.
Man erhält so als Summe (nach dem 1. Problem der Arithmetik) 941304; das bedeutet (wie die Zeichen über den Zahlen zeigen) 941,304. Ich behaupte, daß das die gesuchte Summe ist. *Beweis.* Die gegebene 27,847 macht (nach der 3. Definition) $27\,\frac{8}{10}\,\frac{4}{100}\,\frac{7}{1000}$ zusammen $27\,\frac{847}{1000}$ und aus demselben Grunde gilt die 37,675 $37\,\frac{675}{1000}$ und die 875,784 [!] machen $875\,\frac{782}{1000}$; diese drei Zahlen $27\,\frac{847}{1000}$, $37\,\frac{675}{1000}$, $875\,\frac{782}{1000}$ geben zusammen (nach dem 10. Problem der Arithmetik) $941\,\frac{304}{1000}$, aber ebensoviel gilt auch die Summe 941,304.«

Abb. 65 *Übersetzung der Rückseite von Blatt 249 und Vorderseite von Blatt 250 aus der Arithmetica integra des Michael Stifel*

Zuerst ziehe ich 10 von 8 ab und finde keine Zahl jenseits der Null, d. h. jenseits des Nichts, die ich dafür nach dem Gesetz der Subtraktion setzen kann. Denn wenn jene, von welcher die Subtraktion ausgeführt werden soll, größer wäre als die, welche abgezogen wird (so wenn an Stelle der Zahl 8 die Zahl 12 gesetzt würde), dann würde man doch eine wirkliche Zahl zu setzen haben. Ebenso, wenn jene Zahl, von der die Subtraktion erfolgen soll gleich der wäre, die subtrahiert werden soll (so wenn an Stelle der 8 eine 10 gesetzt würde), so würde Null, d. h. nichts zurückbleiben (die mitten zwischen den wirklichen [positiven] und den absurden [negativen] Zahlen liegt). Nun aber, da die zu subtrahierende Zahl größer ist als die, von der subtrahiert werden soll, bleibt nichts übrig, als daß eine Zahl unterhalb der Null, d. h. des Nichts, gesetzt wird, etwa 0 — 2. So ziehe ich später ähnlich 0 — 5 von 0 — 3 ab und finde 0 + 3 [!]. Das ist eine Zahl über dem Nichts oder eine wirkliche Zahl.
So pflegt die Coß [Arithmetik] angesichts ihrer unermeßlichen Reichhaltigkeit Gebrauch zu machen von dem, was ist, und auch von dem, dessen Sein erdichtet wird. Denn ebenso wie über der Einheit ganze positive Zahlen *gesetzt* werden und unter der Einheit Bruchteile der Einheit erdichtet werden, und wie über dem einen ganze Größen gesetzt werden und unter dem einen aufgeteilte oder gebrochene Größen gesetzt werden, so wird über der Null die Einheit nebst den [positiven] Zahlen gesetzt und unterhalb der Null die Einheit nebst den [negativen] Zahlen erdichtet. Und das kommt offenbar schön zum Ausdruck in der natürlichen Progression [Reihe] der Zahlen, wofern das dem Progreß [Fortschritt] dient. Aber nun heißt es, die angestellten Überlegungen durch ein Beispiel verdeutlichen.

— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6
$^1/_8$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	4	8	16	32	64

Man könnte geradezu ein ganzes, neues Buch über die Wunder der Zahlen schreiben, aber ich muß mir das hier versagen und mit geschlossenen Augen [von diesem Thema] scheiden.

Ich will nur eins von dem oben Gesagten wiederholen, damit es nicht von mir heißt, ich hätte mich ergebnislos auf jenem Gebiet bewegt. Jedoch werde ich im umgekehrten Sinn wiederholen, was mir wiederholenswert erscheint.
Alles was in der geometrischen Reihe durch Multiplizieren und Dividieren bewirkt wird, geschieht in der arithmetischen Reihe durch Addieren und Subtrahieren.

Beispiel:

Wie $\frac{1}{8}$ multipliziert in 64 8 ergibt, so gibt -3 zu 6 addiert 3. Es ist aber -3 der Exponent von $\frac{1}{8}$; wie 6 der Exponent der Zahl 64 und 3 der Exponent der Zahl 8 ist.
Ebenso wie $\frac{1}{8}$ in 64 dividiert 512 ergibt, so ergibt -3 von 6 subtrahiert 9. 9 ist aber der Exponent jener Zahl 512.
Ebenso wie 64 in $\frac{1}{8}$ dividiert $\frac{1}{512}$ ergibt, so bleibt, wenn man 6 von -3 subtrahiert -9 übrig. -9 ist aber der Exponent jenes Bruches $\frac{1}{512}$.
Und so liegt das allerschönste Urteil klar zutage über die Bruchteile der abstrakten Einheit und über das, was Euklid, Boëthius und andere über die Unteilbarkeit der Einheit gemeint haben. Hierüber habe ich auch im ersten Buch gehandelt, nämlich in dem Sinne, daß die Bruchteile der Einheit für erdichtete Zahlen zu halten seien.
Aber auf Grund welcher Überlegung kommt es dazu, daß -24 geteilt durch -6 $+4$ ergibt? Ich antworte: Auf Grund derselben Überlegung, aus der aus einer Minute [$^1/_{60}$] geteilt durch eine Sexte [$(^1/_{60})^6$] (was unvorstellbar weniger ist, als ein Tausendstel einer Minute) 777 600 000 Stunden herauskommen, die fast 88 716 Jahre ausmachen. Und ebenso (um in etwas vertrauterer Weise etwas Ähnliches anzuführen) auf Grund derselben Überlegung durch die $\frac{1}{2}$ dividiert durch $\frac{1}{4}$ 2 ergibt. Es wissen auch ungelehrte Leute, daß $\frac{1}{4}$ Gulden zweimal in $\frac{1}{2}$ Gulden enthalten ist. So ist eine Sexte in einer Minute wirklich so oft enthalten, nämlich 777 600 000mal (da ja eine Minute soviel Sexten ausmacht), und so reduziert sich auf jenen adverbialen [?] Quotienten die bekannte Benennung der Zeit, nämlich »Stunden«, derart, daß soviel Stunden 88 716 Jahre ergeben.
Während ich so -24 durch -6 teile, so sage ich, daß -6 in -24 viermal enthalten und der so zu bezeichnende Quotient lautet $+4$. Wenn ich nämlich -6 von -24 abziehe, dann bleibt -18. Und so ziehe ich einmal -6 von -24 ab. Ich subtrahiere nun -6 von -18, dann bleibt -12, und so 2, d. h. zweimal habe ich -6 von -24 abgezogen. Zum dritten subtrahiere ich -6 von -12, und es bleibt -6, und so habe ich einen Dreischritt beim Subtrahieren gemacht. Wenn nun die vierte Subtraktion ausgeführt ist, habe ich 4 erhalten, es bleibt 0. Du siehst aber, daß bei den absurden [negativen] Zahlen alles absurd oder umgekehrt vor sich geht. Selbstverständlich geschieht es bei den wirklichen [positiven] Zahlen so, daß sie bei der Subtraktion verkleinert werden, bei den absurden [negativen] Zahlen geschieht es aber, wie du siehst, daß sie bei der Subtraktion anwachsen. Damit auch dem so sei, wird notwendig, daß sie bei der Addition kleiner werden, so daß -6 zu -4 -10 ergibt usw.