ELEMENTARE LOGIK

W. SEGETH

Wolfgang Segeth

Elementare Logik

WOLFGANG SEGETH

ELEMENTARE LOGIK

6., überarbeitete und
erweiterte Auflage

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1971

39. bis 48. Tausend
ALLE RECHTE VORBEHALTEN
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, BERLIN 1971
PRINTED IN THE GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
LIZENZNUMMER: 206 · 435/13/71
UMSCHLAGGESTALTUNG: HARTWIG HOEFTMANN
DRUCK: VEB WERKDRUCK, 445 GRÄFENHAINICHEN · 3492
ES 3 B 4

INHALTSVERZEICHNIS

0. VORWORT IX

1. LOGIK – DENKEN – SPRACHE 1

1.1. Die formale Logik im System der Wissenschaften . . 1
1.2. Der Gegenstand und das System der formalen Logik . 4
1.3. Die Bedeutung der formalen Logik 10
1.4. Sprache und Wissenschaft 13
1.4.1. Sprache und Denken 13
1.4.2. Natürliche Sprache und Wissenschaftssprache 17
1.4.3. Semantische Kategorien 24
1.4.4. Sprachstufen 28

2. AUSSAGENLOGIK 33

2.1. Grundbegriffe der Aussagenlogik 33
2.1.1. Die Aussage 33
2.1.2. Aussage und Urteil 37
2.1.3. Die Aussage in der Aussagenlogik 38
2.1.4. Die aussagenlogische Negation 42
2.1.5. Die aussagenlogische Konjunktion 45
2.1.6. Alternative, Kontravalenz und Exklusion . 50
2.1.7. Implikation, Replikation und Äquivalenz . . 56
2.1.8. Aussagenlogische Gesetze und Regeln . . . 64
2.1.8.*Entscheidung mit Hilfe von Normalformen . 74
2.1.9. Extensionale und intensionale Aussagenverbindungen 83

2.2. Anwendungen der Aussagenlogik 85
2.2.1. Aussagenlogisches Schließen 85
2.2.1.1. Definition des Schließens 86
2.2.1.2. Aussagenlogische Schlußregeln . . . 87
2.2.1.3. Das Prüfen von Schlußregeln . . . 92
2.2.1.4. Verkürzte Schlüsse 97
2.2.1.4.*Die systematische Ableitung von Konklusionen 102
2.2.2. Aussagenlogik und Schaltalgebra 110
2.2.3. Aussagenlogik und Neuronennetze 115

3. PRÄDIKATENLOGIK 121

3.1. Begriffe und Begriffsbeziehungen 121
3.1.1. Der Begriff 121
3.1.2. Intension und Extension von Begriffen . . 125
3.1.3. Der Begriff in der Prädikatenlogik 127
3.1.4. Beziehungen zwischen Begriffen 134
3.1.5. Symbolisierte Aussagen 142

3.2. Prädikatenlogisches Schließen 148
3.2.1. Aussagenlogisches und prädikatenlogisches Schließen 149
3.2.2. Gesetze der Prädikatenlogik 150
3.2.3. Prädikatenlogische Regeln 158
3.2.4. Die traditionelle Lehre vom logischen Schließen 166
3.2.4.1. Die unmittelbaren Schlüsse 167
3.2.4.2. Die Syllogistik 169
3.2.4.3. Zum Verhältnis von traditioneller und moderner Lehre vom logischen Schließen 170
3.2.5. Methoden zur Entscheidung prädikatenlogischer Schlüsse 173
3.2.6. Ein prädikatenlogisches Entscheidungsverfahren 180
3.2.6.* Entscheidungsverfahren und Normalformen . 189
3.2.7. Beweis und Widerlegung mit logischen Mitteln 194

3.3. Probleme der Prädikatenlogik 198
3.3.1. Identität 198
3.3.2. Kennzeichnungen 203
3.3.3. Prädikatenlogik höherer Stufen 207
3.3.4. Arten von Begriffen 212
3.3.5. Nullklasse und Existentialoperator 219
3.3.6. Entscheidungsproblem und Axiomatisierung in der Prädikatenlogik 221

4. GRUNDBEGRIFFE DER DEFINITIONSLEHRE UND DER THEORIE DES REDUKTIVEN SCHLIESSENS 227

4.0. Zum Begriff der allgemeinen Methodologie 227
4.1. Über die Definition 233
4.1.1. Zur Bedeutung von Definitionen 233
4.1.2. Definitionsähnliche Bestimmungen 235
4.1.3. Form und Struktur von Definitionen . . . 237

4.1.4. Arten der Definition 234
4.1.5. Die Realdefinition 245
4.1.6. Die Nominaldefinition 249
4.1.7. Anforderungen an Definitionen 252
4.1.8. Begriffsgliederung und Klassifikation . . . 254

4.2. Reduktives Schließen 257
4.2.1. Zum Unterschied zwischen deduktivem und reduktivem Schließen 258
4.2.2. Einteilung der reduktiven Schlüsse 261
4.2.3. Die Induktion 265
4.2.4. Die Millschen Methoden der Induktion . . 267
4.2.5. Der Analogieschluß 272
4.2.6. Plausibles Schließen 276

Literatur für das weitere Studium 281
Literaturverzeichnis 287
Namenregister 289
Sachregister 290
Symbolregister 297
Beilage 1: Gottlob Freges Begriffsschrift . . . . . .
Beilage 2: Tabelle häufig verwendeter logischer Symbole . .
Beilage 3: Ein prädikatenlogisches Entscheidungsverfahren .
Beilage 4: Tabelle eines Entscheidungsverfahrens . . . . .

0. VORWORT

Die weitere Gestaltung der entwickelten sozialistichen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik und die Durchführung der wissenschaftlich-technischen Revolution im Rahmen dieses Prozesses erfordern und bringen zugleich mit sich, daß die Wissenschaft in den verschiedensten Formen immer stärker in alle Bereiche des Lebens und Handelns der Menschen eindringt. Sie gehört, wie es in der Verfassung der DDR heißt, zu den wesentlichen Grundlagen der sozialistischen Gesellschaft und dient dem Ziel, die Gesellschaft und das Leben der Bürger zu schützen und zu bereichern, die wissenschaftlich-technische Revolution zu meistern sowie den ständigen Fortschritt der sozialistischen Gesellschaft zu gewährleisten. Sie wird damit zu einem entscheidenden Faktor bei der Entwicklung unserer Gesellschaft. Der Marxismus-Leninismus, die wissenschaftliche Weltanschauung der Arbeiterklasse, ist die theoretische Grundlage für die führende Tätigkeit der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands und ihrer Mitglieder in allen Bereichen des Staates, der Wirtschaft, der Technik, der Ideologie und der Kultur.

Um dieser gewaltigen Rolle der Wissenschaft im Leben unserer Gesellschaft gerecht werden zu können, wird es für jeden Werktätigen mehr und mehr erforderlich, ständig an seiner Qualifizierung zu arbeiten, sei es an Abendschulen, Betriebs- oder Dorfakademien, an Hoch- oder Fachschulen, sei es im Selbststudium. Die Lehrer – im weitesten Sinne dieses Wortes – müssen ihren Schülern heute, und in den kommenden Jahren sicher noch weit mehr, in kürzerer Zeit erheblich mehr Stoff als bisher vermitteln, und sie müssen den Stoff wissenschaftlicher vermitteln.

Lehrende und Lernende können diese Aufgaben nur mit Hilfe einer stärkeren logischen Durchdringung des zu verarbeitenden Stoffes bewältigen. Die zunehmend höhere Allgemeinbildung bringt es mit sich, daß die Leser von Artikeln, Broschüren und Büchern, daß die Hörer von Vorträgen usw. klare Begriffsbildungen und überzeugende Schlüsse erwarten.

Es ist notwendig, bereits die Schüler unserer allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen bewußt und planmäßig zum logischen und dialektischen Denken zu erziehen.

Die hier nur kurz angedeuteten Tatsachen erwecken bei vielen Menschen das Bedürfnis nach allgemeinverständlicher Literatur über die verschiedensten Probleme und Ergebnisse der Wissenschaften und die Methoden wissenschaftlicher Arbeit, darunter über wissenschaftliche Denkmethoden.

Die „Elementare Logik" als eine Einführung in die moderne formale oder – wie man sie auch nennt – mathematische Logik kommt diesem Bedürfnis im Hinblick auf Denkmethoden entgegen. Sie ist eine Darstellung von Grundbegriffen der formalen Logik vom Standpunkt der dialektisch-materialistischen Erkenntnistheorie aus. Dabei soll sie weniger ein Bericht über die formale Logik sein, als vielmehr, von deren Begriffen, Regeln und Gesetzen ausgehend, auf Mittel und Methoden aufmerksam machen, die zur Präzisierung des Denkens und im Zusammenhang damit des sprachlichen Ausdrucks dienen können. Aus diesem Grunde wird keine durchgängige strenge Trennung zwischen der eigentlichen Theorie der Logik und ihren Anwendungen durchgeführt; insbesondere wird die Anwendung der Logik auf Probleme der Sprache, vor allem der Wissenschaftssprache, nahezu durchgängig zu zeigen versucht. Aus diesem Grunde wird auch verhältnismäßig ausführlich über die Semiotik als erkenntnistheoretische Disziplin und ihre Grundbegriffe berichtet.

Im letzten Kapitel werden zwei Themen behandelt, die in eine Darstellung der formalen Logik eigentlich gar nicht hineingehören, sondern in ein Lehrbuch der allgemeinen Methodologie der Wissenschaften. Es gibt jedoch einen entscheidenden Grund, die Definitionslehre und die Theorie des reduktiven Schließens dennoch wenigstens in ihren Grundzügen zu betrachten; er ergibt sich aus dem Anliegen dieser Arbeit selbst, nämlich der Präzisierung des Denkens und des Sprechens zu dienen. Hinzu kommt, daß man das Wesen des deduktiven Schließens wohl erst dann richtig erfassen kann, wenn man weiß, worin das reduktive Schließen sich von ihm unterscheidet.

Einige Partien des Buches – z. B. der Abschnitt über Axiomatisierung und Entscheidbarkeit – dienen vor allem dazu, die Darstellung abzurunden und dem Leser einen gewissen Überblick über weitere Probleme der formalen Logik zu geben; sie haben mehr berichtenden Charakter und sind deshalb auch ein wenig abstrakter als andere.

Der Zweck, die Art der Darstellung und der begrenzte Umfang dieses Buches bedingten hinsichtlich der Themenauswahl eine

Beschränkung auf die zweiwertige Logik; die mehrwertige Logik und Sondergebiete wie die Sollsatzlogik können in diesem Rahmen nicht berücksichtigt werden. Auch die dialektische Logik wird nicht in die Darstellung einbezogen, es werden nur an einigen Stellen Hinweise auf ihren Zusammenhang mit der formalen Logik gegeben.

Die „Elementare Logik" ist eine Einführung auch insofern, als zu ihrem Verständnis keinerlei fachliche Vorkenntnisse erforderlich sind. Das Buch ist allerdings so aufgebaut, daß in späteren Abschnitten die bereits definierten Begriffe vorausgesetzt werden. – Eine Ausnahme hiervon bilden die durch einen Stern gekennzeichneten Abschnitte. – Für den Anfänger wäre daher der Versuch unzweckmäßig, das Buch oberflächlich durchzulesen oder sich einzelne, nicht zusammenhängende Abschnitte herauszugreifen. Er wird es vielmehr, wenn er nicht ständig zurückblättern will, in gewissem Grade durcharbeiten müssen. Ein solcher Aufbau, der sich aus der formalen Logik selbst ergibt, mag Nachteile mit sich bringen – er hat aber zumindest den Vorteil, daß die Aneignung von Kenntnissen der Logik bereits eine gewisse Denkschulung mit sich bringt, auch wenn man meint, die erworbenen Kenntnisse noch nicht anwenden zu können.

Das vorliegende Buch ist so aufgebaut, daß man es durcharbeiten kann, ohne weitere Literatur heranziehen zu müssen. Wer jedoch seine Kenntnisse vertiefen oder erweitern will, findet im Anhang detaillierte Literaturhinweise – vor allem auf das ebenfalls im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften erschienene Werk „Moderne Logik" von Georg Klaus. Die Voraussetzungen zum Verständnis dieser Literaturstellen kann man sich im wesentlichen durch die „Elementare Logik" erarbeiten.

In der modernen Logikliteratur gibt es leider bisher weder eine einheitliche Terminologie noch eine einheitliche Symbolik. Außerdem geschieht es öfter, daß Autoren im Laufe der Zeit Terminologie und Symbolik wechseln. Die „Elementare Logik" entspricht in Terminologie und Symbolik der schon genannten „Modernen Logik". Um dem Leser den Zugang auch zu Arbeiten anderer Autoren zu erleichtern, wird im Text an verschiedenen Stellen neben dem hier verwendeten Terminus ein weiterer genannt, der in der Literatur weit verbreitet ist. Eine Übersicht über die von Gottlob Frege eingeführte Symbolik sowie eine Zusammenstellung häufig verwendeter logischer Symbole, die mitunter in der Literatur anderer Fachgebiete, wie z. B. der Kybernetik, als bekannt vorausgesetzt werden, enthalten die Beilagen am Schluß des Bandes.

Die „Elementare Logik" ist aus einem Fernstudienmaterial hervorgegangen, das für das Fernstudium der Philosophie in der Deutschen Demokratischen Republik bestimmt war und das ich unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. Georg Klaus verfaßt habe. Ich möchte an dieser Stelle meinem Lehrer, Professor Dr. Klaus, meinen Dank auch für die Förderung dieses Buches abstatten, die er ihm in den verschiedensten Formen und Hinsichten angedeihen ließ. Herrn Dr. Peter H. Starke bin ich für eine Reihe von Hinweisen dankbar, die zur Verbesserung des Textes geführt haben, wie er in den ersten fünf Auflagen dieses Buches erschienen ist. – Aus zahlreichen inzwischen erschienenen Publikationen, von denen die wichtigsten im Literaturverzeichnis enthalten sind, habe ich Anregungen zu weiteren Verbesserungen des Buches entnommen. Einer ganzen Anzahl von Kollegen und Lesern habe ich für Hinweise zu danken, denen nachzukommen ich mich bei der Überarbeitung und Erweiterung bemüht habe.

Dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften habe ich schließlich für mancherlei Unterstützung und wie bei den ersten 5 Auflagen der Druckerei Paul Dünnhaupt so jetzt dem VEB Werkdruck Gräfenhainichen – besonders den Setzern – für die bei der Herstellung des Buches aufgewandte Sorgfalt und Mühe zu danken.

Berlin, Juni 1971 Wolfgang Segeth

1. LOGIK – DENKEN – SPRACHE

Zunächst wird allgemein charakterisiert, welchen Platz die Wissenschaft der formalen Logik im System der Wissenschaften einnimmt. Dann wird ihr Gegenstand definiert und ihr Aufbau beschrieben. Danach wird etwas über ihre Bedeutung für die menschliche Erkenntnis gesagt. Die Abschnitte über die Sprache liefern den Rahmen für Betrachtungen in den folgenden Kapiteln und dienen der Einführung einer Reihe von Fachausdrücken, die später gebraucht werden.

1.1. Die formale Logik im System der Wissenschaften

Die formale Logik ist in Europa von ihrer Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte her besonders eng mit zwei Wissenschaften verbunden – der Philosophie und der Mathematik. Als ihr Schöpfer gilt der große griechische Philosoph Aristoteles, der von 384 bis 322 v. u. Z. lebte. Philosophen betrieben auch in den folgenden Jahrhunderten die formale Logik, gewannen eine Reihe neuer Erkenntnisse auf dem Gebiet dieser Wissenschaft, ließen aber den systematischen Aufbau, den ihr Aristoteles gegeben hatte, im wesentlichen unverändert. Man nennt die Logik in dieser Gestalt auch „traditionelle Logik".

Einzelne bedeutende Ansätze zur Weiterentwicklung der formalen Logik, wie sie z. B. im 17. Jahrhundert von Gottfried Wilhelm Leibniz geschaffen wurden, blieben praktisch ohne Einfluß. Erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts setzte eine bis heute nicht abgeschlossene stürmische Entwicklung dieser Wissenschaft ein. Logische Schwierigkeiten in der Mathematik, genauer gesagt, logische Widersprüche in den Grundlagen der Mathematik machten es erforderlich, daß sich Mathematiker mit der Logik beschäftigten, und führten zu dem Versuch, die Mathematik vollständig und streng aus der Logik herzuleiten. In dieser Entwicklung spielte Gottlob Frege eine ganz entscheidende Rolle; man sieht ihn als den Schöpfer der modernen Logik an und vergleicht seine Leistung mit der des Aristoteles. Die Entwicklung der formalen Logik war in

den letzten einhundert Jahren vorwiegend auf die Bedürfnisse der Mathematik abgestimmt, und Mathematiker waren es auch im wesentlichen, die sie zu dem entwickelten, was man heute „mathematische Logik", „Logistik" oder auch „symbolische Logik" nennt [1].

Die schon bei Aristoteles vorhandenen Ansätze, in der formalen Logik mit Symbolen und Formeln zu arbeiten, wurden so konsequent fortgeführt, daß ein modernes Lehrbuch der formalen Logik einem mathematischen Werk mehr ähnelt als einem philosophischen. Die mathematische Logik ist entscheidend für die heutige Grundlagenforschung in der Mathematik, sie durchdringt das Gesamtgebäude der Mathematik; auf ihrer Grundlage läßt sich die Mathematik streng logisch, d. h. vor allem widerspruchsfrei, aufbauen. Insofern wurde und wird sie verschiedentlich als eine mathematische Disziplin, als ein Teilgebiet der Mathematik angesehen.

Obwohl die Bedürfnisse der Mathematik für die Entwicklung der Logik in den vergangenen hundert Jahren maßgebend waren und obwohl sie gegenwärtig mehr von Mathematikern als von Philosophen betrieben wird, mehr auf die Mathematik als auf andere Wissenschaften angewendet wird, obwohl sie auch den Namen „mathematische Logik" trägt, ist sie nicht nur eine Logik der Mathematik, sondern ihre Regeln und Gesetze gelten für jede Wissenschaft, für jedes menschliche Denken überhaupt. Insofern wurde und wird sie auch als eine philosophische Wissenschaft angesehen.

Die Diskussion um die Stellung der formalen Logik im System der Wissenschaften ist heute noch keineswegs abgeschlossen. Ihre enge Verbindung mit Philosophie und Mathematik wird allgemein zugestanden. Aber über die Art und den Grad dieser Verbindung gehen die Meinungen weit auseinander. Neben den bereits genannten Auffassungen wird zunehmend die Ansicht vertreten, die formale Logik habe sich heute zu einer – zumindest relativ – selbständigen Wissenschaft entwickelt [2].

[1] Vgl. zur neueren Geschichte der formalen Logik: Geschichte der Philosophie, Bd. V, Berlin 1963, S. 293–297; vgl. auch das Stichwort „Logik" im Sachregister desselben Bandes und in: Geschichte der Philosophie, Bd. VI, Berlin 1967.

[2] Vgl. Die Klassifikation der Wissenschaften als philosophisches Problem, hrsg. von R. Rochhausen, Berlin 1968, S. 69f.; A. Kosing/D. Wittich, Über den Gegenstand der marxistischen Er-

Um den Zusammenhang zwischen formaler Logik und Philosophie genauer zu erfassen, geht man am besten von einer Definition der marxistisch-leninistischen Philosophie und einer kurzen Charakteristik ihrer Teildisziplinen aus. Die marxistisch-leninistische Philosophie ist „die Wissenschaft von den allgemeinen Bewegungs- und Strukturgesetzen der Natur, der Gesellschaft und des Denkens (Erkennens) sowie der Stellung des Menschen in der Welt“[3]. Sie ist – mit anderen Worten – Theorie der objektiven und der subjektiven Dialektik. Die *objektive Dialektik* – das ist die Art und Weise, in der die allgemeinen Bewegungs- und Strukturgesetze außerhalb des menschlichen Bewußtseins und unabhängig von ihm wirken. Die *subjektive Dialektik* beruht auf der objektiven. Man kann sie als die Art und Weise charakterisieren, wie der Mensch die objektive Dialektik in seinem Bewußtsein widerspiegelt. Der dialektische Materialismus untersucht – mit anderen Worten – die der objektiven und der subjektiven Dialektik gemeinsamen allgemeinen Gesetze. Die Widerspiegelung der objektiven Dialektik durch die subjektive Dialektik zu erforschen ist Aufgabe der Erkenntnistheorie. Die subjektive Dialektik, insbesondere die Gesetzmäßigkeiten des Denkens, bilden den Untersuchungsgegenstand der formalen Logik und der dialektischen Logik.

Damit ist der Zusammenhang zwischen formaler Logik und marxistisch-leninistischer Philosophie im Hinblick auf ihren Gegenstand kurz skizziert. Es gibt jedoch noch zwei weitere Aspekte dieses Zusammenhangs, die nicht unerwähnt bleiben sollten. Dabei geht es erstens um die Grundbegriffe der formalen Logik und die Interpretation ihrer Formeln und Zeichensysteme und zweitens um die Anwendung der formalen Logik.

Die formale Logik muß einige ganz entscheidende Grundbegriffe unmittelbar von der Philosophie übernehmen. Dazu gehören die Begriffe „Wahrheit“, „Aussage“ und „Begriff“. Mit diesen Begriffen erhält jedes System der Logik eine philo-

kenntnistheorie, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie. 1967, Heft 12, S. 1411ff.; K. Berka und L. Kreiser, Logik-Texte, Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin 1971.

[3] Philosophisches Wörterbuch, hrsg. von G. Klaus und M. Buhr, 6., überarb. u. erw. Aufl., Leipzig 1969, Stichwort „Philosophie“.

sophische Interpretation, auch wenn nicht wenige Logiker heute versuchen, weltanschaulichen Fragen ihrer Wissenschaft aus dem Wege zu gehen, indem sie z. B. die Termini „Aussage“ und „Begriff“ durch die scheinbar neutralen Termini „Satz“ und „Term“ ersetzen. Man kann Zeichensysteme entwickeln, die ganz willkürlich gewählten Regeln unterliegen; aber wenn man die Logik nicht um ihrer selbst willen betreiben will, kommt man nicht umhin, sich die Frage zu stellen, ob diese Zeichensysteme – direkt oder indirekt – objektive Zusammenhänge widerspiegeln.

Die Regeln und Gesetze der formalen Logik gelten, wie gesagt, für jedes menschliche Denken. Das ist Ausdruck ihrer Bedingtheit durch die objektive Realität. Aber die formale Logik erfaßt nur einen bestimmten Aspekt des Denkens und abstrahiert von anderen, wesentlichen Aspekten. Sie darf also nicht zum absoluten und einzigen Maßstab gemacht werden, wenn man eine einseitige, verzerrte Widerspiegelung der Wirklichkeit vermeiden will. Ihre Anwendung kann nicht voraussetzungslos geschehen; man kann sie dialektisch, man kann sie aber auch metaphysisch anwenden. Metaphysische Anwendung der formalen Logik ist das Stehenbleiben bei gewissen Abstraktionen und ihre Verabsolutierung, die Trennung des Zusammengehörigen ohne Blick auf die Übergänge, die Erfassung eines Zustands ohne Rücksicht auf seine Geschichte und Zukunft. Dialektische Anwendung der formalen Logik ist die Einordnung der Abstraktionen in die wesentlichen Zusammenhänge, das Bewußtsein der objektiv existierenden dialektischen Widersprüche, Übergänge und Entwicklungen und ihre Erfassung im Fortschreiten von den notwendigen Abstraktionen zur Reproduktion des real Konkreten im geistig Konkreten, zur gedanklichen Zusammenfassung seiner Bestimmungen zur Einheit des Mannigfaltigen.[4]

1.2. Der Gegenstand und das System der formalen Logik

Das Wort „Logik“ kommt von dem griechischen Wort „logos“ und bedeutet übersetzt soviel wie: Wort, Begriff, Ge-

[4] Vgl. K. Marx, Zur Kritik der politischen Ökonomie, in: K. Marx/F. Engels, Werke, Bd. 13, Berlin 1961, S. 37.

danke, Vernunft, *Denklehre*. Aber nicht in jeder Zusammensetzung, in der das Wort „Logik" vorkommt, hat es etwas mit dem Denken zu tun. Mit Ausdrücken wie „Logik der Dinge" und „Logik der Geschichte" meint man objektive Gesetzmäßigkeiten, vor allem Entwicklungsgesetze der Natur und der Gesellschaft, also Gesetzmäßigkeiten, die nicht zum Gegenstand der formalen Logik gehören. Anders ist es mit Zusammensetzungen wie „Logik der wissenschaftlichen Forschung" und „Wissenschaftslogik". Hier gibt es Überschneidungen mit dem Gegenstands- und Aufgabenbereich der formalen Logik. Wissenschaftslogik und Logik der wissenschaftlichen Forschung beschäftigen sich jedoch nicht mit dem Denken und seinen Gesetzmäßigkeiten überhaupt, sondern bezogen auf die logische Struktur wissenschaftlicher Theorien, auf die Gesetzmäßigkeiten des Forschungsprozesses o. ä. Insofern ist ihr Gegenstandsbereich enger und spezieller als der der formalen Logik. Andererseits können sie sich nicht auf die formallogischen Gesetzmäßigkeiten, denen das Denken in der Wissenschaft unterliegt, beschränken. Insofern ist ihr Gegenstand umfassender als der der formalen Logik[5].

Die formale Logik hat das Denken zum Gegenstand, aber zu ihrer Definition genügt es nicht, zu sagen: Die formale Logik ist die Lehre oder die Wissenschaft vom Denken. Es gibt eine Anzahl anderer Wissenschaften oder Wissenschaftszweige, zu deren Aufgabengebiet die Untersuchung des Denkens ebenfalls gehört. Unter ihnen sind neben der dialektischen Logik vor allem die Erkenntnistheorie und die Psychologie zu nennen. Die Psychologie untersucht das Denken in seiner konkreten Wechselbeziehung mit den anderen Seiten des menschlichen Bewußtseins, sie beschäftigt sich mit dem Einfluß des Denkens auf das Gefühl und umgekehrt, sie faßt das Denken als einen Willensakt usw. Die formale Logik hingegen abstrahiert von all diesen Beziehungen und untersucht das Denken vor allem im Hinblick auf seine logische Widerspruchsfreiheit und Folgerichtigkeit. Ein weiterer Unterschied zwischen diesen beiden Wissenschaften ist darin zu sehen, daß die Psychologie im Gegensatz zur formalen Logik bei der Erforschung des Denkens von empirischen, experimentellen Untersuchungen ausgeht.

[5] Philosophisches Wörterbuch, Stichwort „Wissenschaftslogik".

Man könnte nun die formale Logik, wie es auch geschieht, als Lehre vom *richtigen* Denken definieren. Damit würde man sie wohl von der Psychologie abgrenzen, nicht aber von der dialektischen Logik und der Erkenntnistheorie.

Die Erkenntnistheorie beschäftigt sich mit dem Denken als einer Form des menschlichen Bewußtseins. Die Erkenntnistheorie des dialektischen Materialismus lehrt uns, *welches* Denken richtig ist, *wann* das Denken richtig ist. Ausgehend von der materialistischen Beantwortung der Grundfrage der Philosophie beweist sie, daß unser Denken richtig ist, wenn es einen Zusammenhang zwischen Gegenständen behauptet und dieser Zusammenhang in der objektiven Realität tatsächlich besteht, wenn es einem Gegenstand eine Eigenschaft zuschreibt und dieser Gegenstand die Eigenschaft wirklich hat usw. Kurz: Das menschliche Denken ist richtig, wenn es mit der objektiven Realität übereinstimmt, wenn es die objektive Realität adäquat widerspiegelt. Das grundlegende Kriterium für die Richtigkeit des Denkens ist die Praxis. Die formale Logik hat zwar mit dem richtigen Denken zu tun, aber grundsätzlich wird die Frage, wann das Denken richtig ist, von der marxistischen Erkenntnistheorie beantwortet.

Schlagen wir nun einen anderen Weg ein, um den Gegenstand der formalen Logik zu bestimmen. – Im täglichen Leben sagt man oft, um eine Schlußfolgerung, die man gezogen hat, zu bekräftigen: „Das ist doch logisch!" Und so wird dieser Ausdruck von vielen Menschen, die nie in ihrem Leben ein Lehrbuch der Logik gelesen haben, völlig richtig gebraucht. Die Logik beschäftigt sich tatsächlich damit, wie man Schlußfolgerungen richtig zieht, und zwar unabhängig davon, ob es um Schlußfolgerungen im täglichen Leben oder in irgendeiner Wissenschaft geht. Das soll am Beispiel verdeutlicht werden. Zunächst ein Schluß aus dem Gebiet der Zoologie:

Wenn gilt:	Alle Säugetiere sind Warmblütler
und:	Alle Menschen sind Säugetiere,
so gilt:	Alle Menschen sind Warmblütler.

Vergleichen wir damit einen Schluß aus dem Bereich der Politik:

Wenn gilt:	Alle Marxisten sind Friedenskämpfer
und:	Alle SED-Mitglieder sind Marxisten,
so gilt:	Alle SED-Mitglieder sind Friedenskämpfer.

In den Formulierungen beider Schlüsse treten die Wörter „wenn – so“, „und“, „alle“, „sind“ auf. Die Substantive hingegen sind verschieden. Ersetzen wir diese einmal durch Buchstaben, und zwar so, daß wir für verschiedene Substantive innerhalb eines Schlusses verschiedene Buchstaben, für mehrfach vorkommende Substantive jeweils denselben Buchstaben einsetzen, so wird die gemeinsame Struktur beider Schlüsse sichtbar:

Wenn gilt: Alle M sind P
und: Alle S sind M,
so gilt: Alle S sind P.

Man kann die Buchstaben S, M und P durch beliebige Substantive ersetzen und wird immer finden, daß die in der dritten Zeile formulierte Schlußfolgerung wahr ist, falls die in den beiden ersten Zeilen formulierten Voraussetzungen wahr sind. Damit haben wir eine Struktur des richtigen Denkens, eine Struktur, mit deren Hilfe die Wirklichkeit im menschlichen Denken adäquat widergespiegelt werden kann. Sie ist eine allgemeine Struktur, weil sie für jedes menschliche Denken gilt, gleichgültig, wer denkt und worüber er denkt.

Von diesen Überlegungen ausgehend, definieren wir die formale Logik folgendermaßen:

Die formale Logik ist die Wissenschaft von den allgemeinen Strukturen des richtigen Denkens in seiner sprachlichen Existenzform.

Diese Definition enthält einen Hinweis auf die besondere Rolle der Sprache, in der die Strukturen des Denkens ihren Ausdruck finden. Der Zusammenhang zwischen Sprache und Denken wird nach den grundsätzlichen Überlegungen im Abschnitt 1.4. die ganze Darstellung hindurch explizit oder implizit immer wieder betrachtet werden.

Beschäftigt sich die formale Logik mit den Strukturen des Denkens, so gehört es zu den Aufgaben der dialektischen Logik, das Denken von seiner inhaltlichen und gegenstandsbezogenen Seite her zu untersuchen. Wenn auch noch keine befriedigende Darstellung der dialektischen Logik existiert und unter den marxistisch-leninistischen Philosophen über den Gegenstand der dialektischen Logik und ihr Verhältnis zu anderen philosophischen Disziplinen noch keine Einigung erzielt ist, können wir uns doch bei ihrer Charakterisierung auf

grundlegende Hinweise Lenins stützen[6]. Die dialektische Logik hat die Gesetzmäßigkeiten zu untersuchen, nach denen die Aussagen und Begriffe sich in ihrer dialektischen Widersprüchlichkeit entwickeln, ineinander übergehen[7]. Sie orientiert das Denken darauf, den untersuchten Gegenstand möglichst allseitig, in seinen Zusammenhängen und Vermittlungen, in seiner Entwicklung zu untersuchen. Sie betrachtet das Denken in seiner Konkretheit und in seiner Beziehung zur gesellschaftlichen Praxis[8]. – Die dialektische Logik ist inhaltliche, intensionale Logik, die formale Logik ist extensionale Logik[9]. Obwohl der Gegenstand dieses Buches die formale Logik ist, werden wir noch mehrfach in konkreten Zusammenhängen auf Probleme und Aufgabenstellungen der dialektischen Logik zurückkommen.

Der Gegenstand der formalen Logik, wie er in unserer Definition charakterisiert ist, ist trotz jahrtausendelanger Arbeit der Logiker und trotz einer geradezu unübersehbaren Fülle an Literatur bei weitem noch nicht vollständig erfaßt. Von bestimmten Bereichen gibt es überhaupt noch keine Darstellung. Gedankliche Zusammenhänge, in denen Aufforderungen (z. B. in Gestalt von Rechts- oder Moralnormen) oder Fragen auftreten, werden untersucht, aber es gibt bisher weder eine ausgearbeitete allgemein anerkannte Logik der Aufforderungen noch eine ausgearbeitete allgemein anerkannte Logik der Fragen[10]. Am weitesten entwickelt ist die Logik der Aussagen,

[6] Vgl. Zur Diskussion über die dialektische Logik F. Kumpf, Probleme der Dialektik in Lenins Imperialismus-Analyse, Eine Studie zur dialektischen Logik, Berlin 1968, S. 9–47.

[7] W. I. Lenin, Philosophische Hefte, in: Werke, Bd. 38, Berlin 1964, S. 186.

[8] W. I. Lenin, Noch einmal über die Gewerkschaften, in: Werke, Bd. 32, Berlin 1961, S. 85.

[9] Vgl. G. Klaus, Moderne Logik, Abriß der formalen Logik, Berlin 1964, S. 128.

[10] Zur Logik der Aufforderung vgl. F. Loeser, Deontik, Planung und Leitung der moralischen Entwicklung, Berlin 1966; W. Eichhorn I, Wie ist Ethik als Wissenschaft möglich? Berlin 1965. Beide Autoren beschäftigen sich mit der Anwendung der Logik der Aufforderung in der Ethik und geben weitere Literatur an. – Zur Logik der Frage vgl. F. Loeser, Interrogativlogik, Zur wissenschaftlichen Lenkung des schöpferischen Denkens, Berlin 1968.

auf die sich die Logiker von vornherein fast ausschließlich konzentriert haben.

Innerhalb der Logik der Aussagen unterscheidet man zwischen der zweiwertigen Logik und mehrwertigen Logiken. Die zweiwertige Logik unterscheidet nur zwischen wahren und falschen Aussagen; d. h., sie operiert nur mit den Werten wahr und falsch.

Ergaben sich die bisher angeführten Unterscheidungen zwischen verschiedenen Zweigen der Logik aus Unterschieden im Hinblick auf den Gegenstand, so ergibt sich der folgende aus den angewandten Prinzipien und Methoden. Man unterscheidet zwischen klassischer – sie ist nicht mit der traditionellen Logik zu verwechseln – und nicht-klassischer Logik. Die nicht-klassische lehnt z. B. in Gestalt der intuitionistischen Logik die Anwendung des indirekten Beweises bei Aussagen über unendliche Objektbereiche ab. Sie kann deshalb weniger Aussagen beweisen als die klassische; allerdings kommt es nicht vor, daß in den verschiedenen Systemen einander ausschließende Aussagen bewiesen werden.

Man unterscheidet ferner zwischen einer Gesetzes- oder Satzlogik und einer Regellogik je nachdem, ob die Strukturen des Denkens selbst oder die Regeln, denen sie unterliegen, dargestellt werden[11].

Im Hinblick auf die skizzierten Unterscheidungen können wir die Aufgabe dieses Buches als Einführung in die moderne, zweiwertige, klassische, formale Gesetzeslogik der Aussagen charakterisieren. Dieses Gebiet ist auch immer gemeint, wenn wir künftig ohne weitere Zusätze von der formalen Logik sprechen. Dieser Zweig der formalen Logik ist der am weitesten entwickelte und am besten durchgearbeitete. Er verfügt über eine solche Fülle von Begriffsbildungen und hat eine so große Menge logischer Gesetze erfaßt und bewiesen und z. T. eine solche Abstraktionshöhe erreicht, daß in einer ersten Einführung nur die Ausgangsbasis für die weitere Aneignung der Logik je nach dem Zweck, den man verfolgt, gelegt werden kann.

Die formale Logik, wie wir sie hier betrachten, unterteilt sich in Aussagenlogik und Prädikatenlogik. Die *Aussagen-*

[11] Zur weiteren Information über die formale Logik, ihre Zweige und Richtungen vgl. Philosophisches Wörterbuch, die mit „Logik" zusammengesetzten Stichwörter.

logik bildet die Grundlage, auf der sich die Prädikatenlogik erhebt. In der Aussagenlogik wird untersucht, wie die Wahrheit von Aussagenverbindungen von der Wahrheit der einzelnen verbundenen Aussagen abhängt. Dabei wird von der Struktur dieser einzelnen Aussagen vollständig abgesehen. Es geht hier also lediglich um die Struktur von Aussagenverbindungen.

Die Struktur einzelner Aussagen wird erst in der *Prädikatenlogik* betrachtet. Es wird hier untersucht, in welchen Beziehungen Begriffe innerhalb von Aussagen zueinander stehen können. Aus der Art der jeweils auftretenden Begriffe ergibt sich eine weitere Unterteilung der Prädikatenlogik. In der *einstelligen* Prädikatenlogik treten nur solche Begriffe auf, die Eigenschaften widerspiegeln; Begriffe, in denen Beziehungen widergespiegelt werden, gehören zum Gegenstandsbereich der *mehrstelligen* Prädikatenlogik oder Relationslogik. Schließlich unterscheidet man noch zwischen einer Prädikatenlogik *der ersten Stufe* und einer Prädikatenlogik *höherer Stufen*, je nachdem, ob die behandelten Begriffe Eigenschaften von Individuen oder Eigenschaften von Eigenschaften, ob sie Beziehungen zwischen Individuen oder Beziehungen zwischen Eigenschaften bzw. Beziehungen widerspiegeln.

Der Aufbau dieses Buches entspricht im wesentlichen der Systematik der formalen Logik selbst. Abweichungen ergeben sich daraus, daß an verschiedenen Stellen Abschnitte eingeschoben sind, in denen Anwendungen der formalen Logik behandelt werden. Unseren Auswahlprinzipien entsprechend werden ferner die verschiedenen Teilgebiete der formalen Logik mit unterschiedlicher Ausführlichkeit dargestellt. Den größten Raum nehmen dabei die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik der ersten Stufe ein, die zusammen die *elementare Logik* bilden.

1.3. Die Bedeutung der formalen Logik

Die Menschen denken im großen und ganzen logisch richtig, obwohl die meisten Menschen niemals bewußt darüber nachgedacht, geschweige denn die Wissenschaft der Logik studiert haben. Das logische Denken ist im Prozeß der menschlichen Entwicklung entstanden. Der Mensch mußte und muß logisch denken, um seine Handlungen so lenken zu können, daß er

seine Absichten erreicht. Ja, es ist lebensnotwendig für den Menschen, logisch zu denken, weil er sonst die elementarsten Gesetzmäßigkeiten der Natur und der Gesellschaft nicht erkennen könnte und sich nicht zweckmäßig verhalten würde. Ein Mensch, der die Fähigkeit, logisch zu denken, verloren hat, würde vielleicht in loderndes Feuer hineingehen oder aus der Gefährlichkeit des westdeutschen Militarismus den Schluß ziehen, daß man ihn fördern muß, obwohl er das Feuer fürchtet und weiß, daß er darin verbrennen kann, oder obwohl er den Militarismus haßt und weiß, daß der Militarismus den Frieden bedroht.

Das Gesagte deutet schon darauf hin, daß das logische Denken nicht von der Materie unabhängig ist, wie der Idealismus behauptet. Die Gesetze des Denkens beruhen vielmehr auf den vom Menschen unabhängigen Gesetzen der objektiven Realität. Das menschliche Denken ist richtig, wenn es gedanklich verbindet, was in der Wirklichkeit verbunden ist; es ist falsch, wenn es gedanklich verbindet, was in der Wirklichkeit nicht verbunden ist. Das bedeutet nicht, daß die logischen Gesetze unmittelbare Widerspiegelungen von Gesetzen der objektiven Realität sind. Vielmehr wird von den konkreten Beziehungen, Gesetzen, Sachverhalten usw. abstrahiert. – Da die logischen Gesetze für alle Formen des menschlichen Denkens – in der Wissenschaft wie im täglichen Leben – gelten, wird aber auch von konkreten Begriffen und den Beziehungen zwischen ihnen, von konkreten Aussagen und ihren Verbindungen usw. abgesehen.

Aus seiner Abhängigkeit von der objektiven Realität folgt, daß das logische Denken in seiner Gesetzmäßigkeit nicht an Gesellschaftsordnungen oder einzelne Klassen gebunden ist. Es wird natürlich durch die fortschreitende Erkenntnis ständig bereichert, ohne sich jedoch z. B. beim Übergang von der kapitalistischen zur sozialistischen Gesellschaftsordnung grundsätzlich zu verändern, wie das andere Gebiete des gesellschaftlichen Bewußtseins – z. B. die politischen, juristischen oder moralischen Anschauungen – tun, die klassengebunden sind.

Anders als mit dem logischen Denken verhält es sich mit der Wissenschaft der Logik. Der Marxismus hat bewiesen, daß in der Geschichte der Wissenschaften ein ständiger Kampf zwischen Materialismus und Idealismus als Ausdruck der einander widersprechenden Interessen gesellschaftlicher Kräfte stattgefunden hat. Dementsprechend hat auch in der Wissen-

schaft der Logik seit ihrem Entstehen ein ständiger Kampf zwischen Materialismus und Idealismus stattgefunden. Es geht dabei vor allem um solche allgemeinen philosophischen Fragen wie: Worauf beruhen die logischen Gesetze? Was ist die Grundlage für die Bildung von Begriffen? Wovon hängt die Wahrheit logischer Schlüsse ab? usw.

Lohnt es sich nun aber überhaupt, die Wissenschaft der Logik zu studieren, wenn der Mensch doch schon sozusagen von Natur aus logisch denkt? Dieses – wie wir es nennen wollen – spontane logische Denken genügt in der Regel für den täglichen Gebrauch. Es genügt oft schon nicht mehr, wenn man jemandem irgendwelche Erkenntnisse vermitteln will – beispielsweise in der politischen Agitationsarbeit.

Das spontane logische Denken wird, wenn man die Wissenschaft der Logik kennt und seine Kenntnisse anwendet, zu einem bewußten logischen Denken. Hier ist ein Vergleich mit der Grammatik am Platze. Der Mensch kann, ohne jemals Grammatikunterricht gehabt zu haben, von anderen so sprechen lernen, daß er die hauptsächlichen Regeln der Grammatik nicht verletzt. Damit allein wird er im allgemeinen aber kein Meister einer bestimmten Sprache werden, weil er die Regeln und Gesetzmäßigkeiten für die Bildung von Sätzen usw. nicht kennt. Dasselbe gilt für die Logik. Das logische Denken bewußt ausüben bedeutet exakter denken, das Denken besser beherrschen und anwenden. Der Propagandist wird in seiner Tätigkeit erfolgreicher sein, wenn er seine Behauptungen auch beweist, d. h. die Voraussetzungen seiner Behauptungen in der richtigen Ordnung anführt, oder wenn er außer den erforderlichen Faktenkenntnissen auch die logischen Mittel besitzt, um falsche Behauptungen zu widerlegen. Der Lehrer wird seine Aufgabe, seine Schüler das Denken am konkreten Stoff zu lehren, überhaupt erst lösen können, wenn er selbst weiß, wie man richtig denkt. Seine Schüler werden leichter und besser begreifen, wenn er imstande ist, dem zu vermittelnden Stoff eine klare logische Struktur zu geben.

Das Studium der Logik fördert den Prozeß, das spontane logische Denken zu einem bewußten zu entwickeln erstens dadurch, daß man Kenntnisse über die Strukturen des richtigen Denkens gewinnt, und zweitens dadurch, daß es – ähnlich wie das Studium der Mathematik – das Denken unmittelbar trainiert. Das zweite erklärt sich aus der Strenge und Exaktheit der Logik selbst. – Trotzdem darf man vom Studium der

Logik keine Wunder erwarten. Man wird manchmal feststellen, daß man im Grunde genommen „schon immer" einer bestimmten Regel entsprechend denkt; in diesem Falle hat man nur die Sicherheit gewonnen, daß man richtig denkt. Öfter jedoch wird man neue Regeln kennenlernen. Aber mit dem bloßen Kennenlernen ist es nicht getan, das Entscheidende ist vielmehr, sie auch bewußt anzuwenden, und das kann anfangs sehr mühselig sein.

Für die wissenschaftliche Arbeit selbst ist die formale Logik allerdings von noch größerer Bedeutung. Sie liefert den Wissenschaften Mittel, Probleme zu lösen, die das spontane logische Denken auch des geschulten Wissenschaftlers nicht bewältigen kann. Solche Probleme ergeben sich z. B. bei dem Bemühen, die bestmögliche Systematik einer Wissenschaft zu finden. Ein anderes Problem dieser Art ist die Frage, ob eine gegebene Wissenschaft in sich logisch widerspruchsfrei ist.

Probleme, die in der Sprache der formalen Logik ausgedrückt werden können, können von programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschinen bearbeitet werden. Ist dieser Grad von Exaktheit in der Formulierung nicht erreicht, so ist eine Bearbeitung durch die Maschine nicht möglich.

1.4. Sprache und Wissenschaft

Die formale Logik hat in unserer Definition die Strukturen des Denkens in ihrer sprachlichen Existenzform zu untersuchen. Es ist deshalb angebracht, nach einigen grundsätzlichen Bemerkungen über den Zusammenhang von Sprache und Denken auf die Rolle der Sprache in der Wissenschaft einzugehen. Damit leiten wir zu einem Thema über, das uns direkt oder indirekt die ganze Darstellung hindurch beschäftigen wird – nämlich, wie man die Begriffsbildungen der formalen Logik auch zur Präzisierung seiner Ausdrucksweise ausnutzen kann.

1.4.1. Sprache und Denken

„Die unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens ist die Sprache"[12], heißt es in der *Deutschen Ideologie* von Marx und

[12] K. Marx/F. Engels, Die deutsche Ideologie, in: K. Marx/F. Engels, Werke, Bd. 3, Berlin 1958, S. 432.

Engels. In demselben Sinne äußert sich der sowjetische Psychologe Rubinstein, indem er die sprachliche Tätigkeit, das lauthafte oder lautlose Sprechen als „die Existenzform des Bewußtseins“[13] bezeichnet. In Übereinstimmung mit den Forschungsergebnissen der Einzelwissenschaften betrachtet die marxistische Philosophie seit jeher, wie aus dem ersten Zitat hervorgeht, das Denken als untrennbar mit der Sprache verbunden, betrachtet sie Denken und Sprache als dialektische Einheit.

Die Menschen können ihre Gedanken untereinander nicht anders austauschen als mit Hilfe sprachlicher Mittel – seien es gesprochene oder geschriebene Wörter und Sätze, seien es Flaggensignale oder andere auf Übereinkunft beruhende Zeichen. Gedanken können nur mit Hilfe sprachlicher Mittel aufbewahrt, gespeichert werden – sei es in Büchern oder auf Tonbändern usw. Schließlich sind auch zum Denken sprachliche Mittel unerläßlich – das Denken vollzieht sich teils in Form eines lautlosen Sprechens, teils in Form eines lauthaften Sprechens.

Das alles bedeutet jedoch nicht eine solche Kopplung von Gedanken und sprachlichen Mitteln, daß jedem Gedanken eine ganz bestimmte Formulierung entspricht und umgekehrt. Man kann seine Gedanken präzise oder weniger präzise formulieren. Andererseits haben sprachliche Formen auch einen gewissen Einfluß auf das Denken: Sie können das Denken – z. B. beim logischen Schließen – entlasten, sie können es aber auch hemmen oder gar irreführen[14].

Aus all diesen Gründen darf die Analyse der Sprache in der Wissenschaft nicht unterschätzt werden, wie das in der marxistisch-leninistischen Philosophie lange Zeit geschehen ist. Man darf sie jedoch auch nicht überschätzen, wie das z. B. bei Ludwig Wittgenstein und nach ihm bei zahlreichen Neopositivisten geschah. Wittgenstein sah die einzige Aufgabe der Philosophie in der Kritik der Sprache.

Zwar kann man durch die Analyse der Sprache indirekt auch etwas über die objektive Realität und über das Denken erfahren, aber keine Sprachanalyse kann die Analyse der Wirk-

[13] S. L. Rubinstein, Grundlagen der allgemeinen Psychologie, Berlin 1959, S. 505.

[14] Vgl. G. Klaus, Die Macht des Wortes, Ein erkenntnistheoretisch-pragmatisches Traktat, 4. Aufl., Berlin 1968, S. 151–167.

lichkeit ersetzen. Analyse der Wirklichkeit, Analyse des Denkens und Analyse der Sprache zusammen machen erst die Gesamtheit der analytischen Tätigkeit in der Wissenschaft aus. Dabei haben die einzelnen Aspekte der analytischen Tätigkeit in den verschiedenen Wissenschaftsgebieten verschiedenes Gewicht.

Der Bedeutung der Sprachanalyse entsprechend entwickelt sich im Rahmen der dialektisch-materialistischen Erkenntnistheorie eine neue Teildisziplin – die Semiotik.

Nach der Definition von Georg Klaus ist die *Semiotik* eine „allgemeine Theorie der sprachlichen Zeichen und ihrer Beziehungen untereinander, zum Denken, zur objektiven Realität und zum Menschen“ [15].

Die Semiotik untersucht dabei nicht konkrete Sprachen wie etwa die deutsche, englische usw., das ist Aufgabe der einzelnen Sprachwissenschaften. Vielmehr beschäftigt sich die Semiotik mit dem, was für alle Sprachen gilt, unabhängig von ihrem Wortbestand, ihrer grammatischen Struktur usw., gleichgültig, ob sie natürlich entstanden oder zu bestimmten Zwecken geschaffen sind.

Dementsprechend erfaßt sie mit ihrem Begriff des Zeichens nicht nur Wörter solcher Sprachen wie der deutschen, sondern alle materiellen Gebilde, die etwas bedeuten oder etwas bezeichnen. Dazu gehören so verschiedene Dinge wie die Symbole der Mathematik, Verkehrsschilder und Rangabzeichen an Uniformen.

Aus der Definition der Semiotik geht hervor, daß sie die folgenden vier Faktoren bei ihren Untersuchungen zu berücksichtigen hat:

1. *Z* – Zeichen (im eben erklärten Sinne),
2. *A* – gedankliche Abbilder, Widerspiegelungen,
3. *O* – Objekte der Widerspiegelung,
4. *M* – Menschen bzw. deren Bewußtsein.

Die verschiedenartigen Beziehungen dieser Faktoren untereinander – allerdings nur jene, in denen die Zeichen eine Rolle spielen – sind Gegenstand der verschiedenen Teildisziplinen der Semiotik:

(1) Die *Syntaktik* abstrahiert von allen Faktoren mit Ausnahme der Zeichen. Sie untersucht die Beziehungen zwischen

[15] G. Klaus, Semiotik und Erkenntnistheorie, Berlin 1969, 2. Aufl., S. 80.

den Zeichen einer Sprache. Sie gibt Regeln an für den Aufbau von zusammengesetzten Zeichen, d. h. von Zeichenreihen (z. B. Sätzen) aus einfacheren Zeichen (z. B. Wörtern). Und sie liefert Kriterien dafür, ob eine gegebene Zeichenreihe einer bestimmten Sprache angehört oder nicht. Sie ist also eine Art allgemeine Grammatik. In den folgenden Kapiteln wird sie verschiedentlich im Hinblick auf die Sprache der formalen Logik eine Rolle spielen.

(2) Die *Semantik* untersucht die Beziehungen zwischen Z und A, etwa die Beziehungen zwischen Wörtern und den ihnen entsprechenden Begriffen. Die Zeichen Z sind die *Existenzform* der gedanklichen Abbilder A; diese sind die *Bedeutung* der Zeichen Z. Die Semantik betrachtet also die Beziehungen zwischen den Zeichen einer Sprache und ihrer Bedeutung. Sie untersucht ferner den Zusammenhang zwischen der Bedeutung von Zeichen und der Bedeutung von Zeichenreihen, die aus diesen Zeichen zusammengesetzt sind. Sie untersucht also z. B. den Zusammenhang zwischen der Bedeutung von Wörtern und der Bedeutung von Sätzen, die aus diesen Wörtern aufgebaut sind.

(3) Die *Sigmatik* untersucht die Beziehungen zwischen Z und O. Die sprachlichen Zeichen Z sind *Namen*, *Bezeichnungen* der Objekte O; diese sind *Designate* der Zeichen Z. – Semantik und Sigmatik setzen die Syntaktik voraus; alle drei werden von der Pragmatik vorausgesetzt.

(4) Die *Pragmatik* untersucht die Beziehungen zwischen den Zeichen und den Menschen, die sie erzeugen oder wahrnehmen. Zeichen können zur Übermittlung von Erkenntnissen dienen, sie können Gefühlen Ausdruck verleihen und Gefühle hervorrufen, sie können ein bestimmtes Verhalten beim Menschen auslösen. Alle diese Eigenschaften sprachlicher Zeichen gehören zum Gegenstand der Pragmatik. – Es ist offensichtlich, daß diese Teildisziplin der Semiotik enge Verbindung zur Poesie, aber auch zur Propaganda hat. Dagegen spielt sie für den Bereich der formalen Logik fast keine Rolle, wie sich an verschiedenen Stellen zeigen wird. Die Betrachtungen in den folgenden Kapiteln werden sich vorwiegend im Bereich der Semantik und der Sigmatik bewegen.

1.4.2. Natürliche Sprache und Wissenschaftssprache

Jeder Wissenschaft steht zur Formulierung ihrer Aussagen und Begriffe, ihrer Gesetze und Regeln, ihrer Theorie und Methode die natürliche Sprache zur Verfügung, und jede Wissenschaft muß auch von ihr Gebrauch machen.

Die *natürliche Sprache* ist die Lautsprache – in unserem Falle die deutsche –, die wir im täglichen Leben zur Formulierung unserer Gedanken und zum Austausch von Gedanken mit anderen Menschen benutzen. Sie ist zusammen mit dem Denken unter dem entscheidenden Einfluß der gesellschaftlichen Arbeit entstanden, und sie entwickelt sich unter ihrem Einfluß zusammen mit dem Denken ständig weiter.

Diese Art der Entwicklung bedingt, daß alles, wofür ein Bedürfnis oder eine Notwendigkeit besteht, es auszudrücken, auch ausgedrückt werden kann. Aus der Tatsache, daß die natürliche Sprache sich nicht bewußt geplant, sondern gewissermaßen spontan entwickelt hat, ergeben sich verschiedene Mängel, die es unmöglich machen, daß die Wissenschaften sich *nur* dieser Sprache bedienen.

Nichtsdestoweniger bedienen sich alle Wissenschaften der natürlichen Sprache. Aber die Literaturwissenschaft zum Beispiel verwendet die natürliche Sprache in weit größerem Maße als Wissenschaften wie die Mathematik, deren Sprache neben der der formalen Logik wohl am weitesten von der natürlichen abweicht. Aber auch sie kann die natürliche Sprache nicht entbehren, braucht sie sie doch wenigstens zur Einführung ihrer Grundbegriffe.

Die entscheidenden Mängel der natürlichen Sprache sind folgende:

1. Die Wörter der natürlichen Sprache wechseln im Laufe der Zeit allmählich und fast unmerklich ihre Bedeutung.

2. In der natürlichen Sprache kommt es nicht selten vor, daß ein Wort gleichzeitig zwei oder mehr verschiedene Bedeutungen hat, gleichzeitig verschiedene Objekte bezeichnet, und daß verschiedene Wörter ein und dieselbe Bedeutung haben, ein und dasselbe Objekt bezeichnen. Mit dem Wort „Kirche“ bezeichnet man zum Beispiel sowohl ein Gebäude als auch eine Institution. Die Wörter „Geige“ und „Violine“ bedeuten und bezeichnen ein und dasselbe.

3. Die Bedeutung von Wörtern der natürlichen Sprache ist oft vage; d. h., man kann von einem bestimmten Objekt nicht

immer sagen, ob das Wort auf dieses Objekt zutrifft oder nicht. Beispielsweise kann man oft von einem Menschen nicht sagen, ob er gesund oder nicht gesund ist. Man hilft sich dann häufig mit der noch vageren Formulierung, er sei nicht ganz gesund.

4. Schließlich sind auch die heute gebräuchlichen grammatischen Regeln der natürlichen Sprache im logischen Sinne unvollkommen und unvollständig; insbesondere läßt sich nicht in jedem Falle unterscheiden, ob ein gegebener Satz sinnvoll oder sinnlos ist.

Die Wissenschaften müssen nun versuchen, für ihren Bereich diese Mängel auszumerzen. Sie tun das im allgemeinen zunächst mit Hilfe von Terminologien. Die *Terminologie* einer Wissenschaft ist der Fachwortschatz, die Gesamtheit der Fachausdrücke dieser Wissenschaft. Solche Terminologien entstehen dadurch, daß die Wissenschaften ausdrückliche Festsetzungen — in Gestalt von Festsetzungsdefinitionen — über ihren Gebrauch bestimmter Wörter treffen. Die solchen Festsetzungen unterliegenden Wörter sind dann die Fachausdrücke, die Termini.

Auf diese Weise läßt sich verhindern, daß die Wörter im Laufe der Zeit ihre Bedeutung verändern, falls nicht Fortschritte in der Erkenntnis eine Änderung der Festsetzung erfordern. Diese muß dann aber ausdrücklich erfolgen; d. h., es muß eine neue Festsetzung getroffen werden.

Daß mehrere Wörter mit derselben Bedeutung verwendet werden, kann vermieden werden, indem man sich ausdrücklich auf eines von ihnen beschränkt.

Die Mehrdeutigkeit von Wörtern kann auf verschiedene Weise beseitigt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, mehrdeutige Wörter immer nur in Zusammenhängen zu verwenden, aus denen eindeutig hervorgeht, welche Bedeutung jeweils gemeint ist. Das ist nicht schwer bei Wörtern wie „Kirche". Der Satz „Diese Kirche wurde im 11. Jahrhundert erbaut" läßt keinen Zweifel, in welcher Bedeutung das Wort „Kirche" hier gebraucht wird. Bei Wörtern wie „Bewußtsein", deren verschiedene Bedeutungen sehr nahe beieinander liegen oder sich sogar überschneiden, kann dieses Verfahren sehr umständlich oder gar unmöglich werden, zumal dann, wenn in ein und demselben Zusammenhang mehrere Bedeutungen eines solchen Wortes eine Rolle spielen. Man wird sich dann entschließen müssen, eine Festsetzung einer der beiden folgenden Arten zu treffen: Entweder man gebraucht das Wort nur noch in Zu-

sammensetzungen – wie z. B. „individuelles Bewußtsein“ und „gesellschaftliches Bewußtsein“ –, oder man führt für jede Bedeutung des ursprünglichen Wortes ein besonderes neues Wort ein. Solche Wörter werden häufig aus fremden lebenden Sprachen übernommen oder – wie z. B. in der Medizin – aus altgriechischen oder lateinischen Wörtern gebildet.

Die Vagheit von Wörtern kann man am besten wiederum durch klare Definitionen beseitigen. Eine prinzipielle Schwierigkeit ergibt sich allerdings, wenn diese Vagheit nicht durch eine mangelhafte Erkenntnis zustande kommt, sondern objektiv bedingt ist, d. h., wenn der Bereich, der durch ein Wort bezeichnet wird, nicht scharf abgegrenzt ist, sondern in andere übergeht. Das ist z. B. bei den Wörtern „krank“ und „gesund“ der Fall. Unter diesen Bedingungen muß eine Festsetzung getroffen werden, die die Bereiche im wesentlichen richtig voneinander abgrenzt, ohne jedoch jedem einzelnen Objekt seinen Platz zuzuweisen. Es wird also von dem Übergangsbereich zunächst abstrahiert und für Objekte, die ihm angehören, wenn nötig, eine spezielle Entscheidung getroffen.

Was im Ergebnis solcher und ähnlicher Maßnahmen entsteht und in einer Wissenschaft gebraucht wird, ist eine *Wissenschaftssprache* oder *Fachsprache dieser Wissenschaft.* – Allerdings sind diese Wissenschaftssprachen nicht Sprachen im eigentlichen Sinne, weil sie nicht selbständig und unabhängig von der natürlichen Sprache existieren. Vielmehr setzt sich eine Wissenschaftssprache dieser Art aus der natürlichen Sprache und einer speziellen Terminologie zusammen. Es bestehen also größere oder geringere Abweichungen im Hinblick auf den Wortschatz, dagegen nicht im Hinblick auf die Formregeln.

Der Zusammenhang zwischen den Wissenschaftssprachen und der natürlichen Sprache wird auch immer wieder dadurch erneuert, daß die Wissenschaftssprachen ständig Wörter der natürlichen Sprache in ihre Terminologie aufnehmen und andererseits – vor allem durch die Schule, durch Presse und Rundfunk und durch populärwissenschaftliche Literatur – ständig Fachtermini der verschiedensten Wissenschaften in den Bestand der natürlichen Sprache übergehen.

Die Vorzüge einer Wissenschaftssprache von der bisher geschilderten Art bestehen darin: Sie weist erstens gegenüber der natürlichen Sprache einen höheren Grad von Exaktheit auf. Zweitens ist ihre Ausdrucksweise – wegen der ver-

wendeten Fachtermini – kürzer und damit übersichtlicher, als wenn derselbe Sachverhalt in der natürlichen Sprache formuliert würde.

Die hier an eine Wissenschaftssprache gestellten Forderungen sind darauf gerichtet, das spontane, unkontrollierte Element in den natürlichen Sprachen bei ihrem Gebrauch in den Wissenschaften auszumerzen. Mangelnde Aufmerksamkeit gegenüber den sprachlichen Mitteln kann zu Mißverständnissen, ja sogar zu Fehlorientierungen in der Forschung führen. Die natürliche Unbestimmtheit und Wandelbarkeit muß im Interesse der Wissenschaft unter Kontrolle gebracht und durch Festsetzungen, die mit Abstraktionen verbunden sind, beseitigt werden. Dieses Vorgehen führt zu einer gewissen Starrheit, ist aber bei der Gestaltung der sprachlichen Mittel eine ebenso notwendige Stufe wie das abstrakte Denken, das Denken in Abstraktionen im Prozeß des Erkennens ist untrennbar mit ihm verbunden. Abstraktionen erfassen niemals den ganzen Reichtum der Wirklichkeit, aber „alle wissenschaftlichen (richtigen, ernst zu nehmenden, nicht unsinnigen) Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, richtiger, vollständiger wider“ [16].

Wenn wir dem Gegenstand dieses Buches entsprechend auch nicht über diese Stufe der Sprachgestaltung und des Denkens hinausgehen können – wir hätten sonst eine Einführung in die dialektische Logik oder in die materialistische Dialektik geben müssen –, so ist damit nicht gesagt, daß mit der Abstraktion, mit der Fixierung der Bedeutung von Wörtern der höchstmögliche Erkenntnisstand erreicht ist. Wenn die unbewußte, unkontrollierte Dialektik des Denkens und Sprechens durch Fixierung überwunden ist, müssen die gedanklichen und sprachlichen Mittel gefunden werden, die Bewegung und Entwicklung, die Dialektik der objektiven Wirklichkeit adäquat zu erfassen. Lenin fordert die Elastizität der Begriffe: „Allseitige, universelle Elastizität der Begriffe, Elastizität, die bis zur Identität der Gegensätze geht – das ist das Wesentliche.“ [17] Subjektive Elastizität ist gleichbedeutend mit Eklektizismus und Sophistik, aber „Elastizität, *objektiv* angewendet, d. h. so, daß sie die Allseitigkeit des materiellen Prozesses und seine Einheit widerspiegelt,

[16] W. I. Lenin, Philosophische Hefte, S. 160.
[17] Ebenda, S. 100.

ist Dialektik, ist die richtige Widerspiegelung der ewigen Entwicklung der Welt"[18].

Diese Bemerkungen erscheinen uns notwendig zum richtigen Verständnis dessen, in welchem größeren Zusammenhang die hier erörterten Probleme stehen und welche Bedeutung die hier an die Gestaltung der Wissenschaftssprachen gerichteten Forderungen für den Prozeß der menschlichen Erkenntnis haben.

Eine Reihe von Wissenschaften verwendet innerhalb ihrer Fachsprachen eine *symbolisierte Sprache.* Zu ihnen gehören die Mathematik, die Chemie und die formale Logik. Die Formel $2H + O \rightarrow H_2O$ gehört z. B. der symbolisierten Sprache der Chemie an und besagt, daß bei der Verbindung von zwei Atomen Wasserstoff mit einem Atom Sauerstoff ein Molekül Wasser entsteht. In einer symbolisierten Sprache verwendet man also an Stelle von Wörtern usw. Zeichen, die künstlich geschaffen ($+$, $\rightarrow$) oder mit einer bestimmten neuen Bedeutung versehen wurden (H, O).

Der Vorteil einer symbolisierten Sprache besteht zunächst einmal darin, daß ihre Ausdrücke noch übersichtlicher und kürzer sind als ihre Übersetzung selbst mittels einer Terminologie. Das zeigt sich schon an unserem Beispiel aus der Chemie. Eine solche Übersetzung muß natürlich auch in diesem Falle grundsätzlich möglich sein. Anders als mit Hilfe einer natürlichen bzw. nicht symbolisierten Sprache ist ja der Aufbau einer symbolisierten Sprache gar nicht durchzuführen.

Aus den bereits genannten Vorteilen ergibt sich erst der wohl wichtigste von ihnen: Ohne das Hilfsmittel symbolisierter Sprachen hätten Wissenschaften wie die formale Logik, die Mathematik und die theoretische Physik ihr heutiges Niveau überhaupt nicht erreichen können, weil der Mensch nicht fähig ist, die komplizierten Zusammenhänge dieser Wissenschaften in einer natürlichen Sprache oder einer nicht symbolisierten Fachsprache zu erfassen. Schon die Übersetzung relativ einfacher Formeln in die natürliche Sprache ergibt mitunter derart komplizierte Gebilde, daß sie nahezu unverständlich sind. Verdeutlichen wir das mit einem Beispiel aus der Mathematik. Für den Bereich der rationalen Zahlen gilt das sogenannte kommutative Gesetz für die Addition; in einer Formel dargestellt: $a + b = b + a$. In Worten aus-

[18] Ebenda.

gedrückt, würde es etwa lauten: „Zählt man eine beliebige Zahl zu einer zweiten hinzu, so ist die Summe gleich der Summe derselben Zahlen, wenn man die zweite Zahl zur ersten hinzuzählt.“ Obwohl es sich hier um ein sehr einfaches Gesetz handelt, wird schon ersichtlich, daß es sich durch die Formel viel kürzer, übersichtlicher und präziser darstellen läßt. Wichtig ist auch noch, daß die symbolisierte Sprache der Logik zu äußerster Präzisierung der Begriffe, Aussagen und Schlüsse zwingt und damit eine Voraussetzung für den Einsatz elektronischer Rechen- und Übersetzungsmaschinen schafft.

Die symbolisierte Sprache der formalen Logik wurde eigens zu dem Zweck geschaffen, die allgemeinen Strukturen des menschlichen Denkens ganz exakt und eindeutig wiederzugeben. Ein bestimmtes Symbol bedeutet z. B. eine ganz bestimmte Beziehung zwischen zwei Begriffen, während ein entsprechendes Wort der natürlichen Sprache mitunter mehrere verschiedene Beziehungen bezeichnen kann und man erst aus dem Zusammenhang entnehmen muß, welche von ihnen gerade gemeint ist. Zwischen den allgemeinen Strukturen des Denkens und den Strukturen der sprachlichen Ausdrücke der Logik besteht eine – wie man sagt – umkehrbar eindeutige Zuordnung; d. h., jeder gedanklichen Struktur entspricht genau eine sprachliche und umgekehrt.

Diese Tatsache bringt es mit sich, daß man innerhalb der formalen Logik das Operieren mit Gedanken durch das Operieren mit Zeichen ersetzen kann. Die formale Logik verfügt damit über eine *formalisierte Sprache* oder einen *Formalismus*. Ein Formalismus in diesem Sinne hat nichts mit einer metaphysischen Verabsolutierung der Form gegenüber dem Inhalt zu tun; es handelt sich lediglich um ein zeitweiliges Abstrahieren vom Inhalt, das dazu dient, die Denkarbeit zu erleichtern und zu präzisieren.

Eine *formalisierte Sprache* liegt vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Alle Grundzeichen sind explizit angegeben. – Grundzeichen, das sind die einfachen, nicht zusammengesetzten Wörter der Sprache oder – falls es sich um eine symbolisierte Sprache handelt – die einfachen, nicht zusammengesetzten Symbole.

(2) Alle Definitionsregeln sind angegeben. – Das sind Regeln für die Einführung neuer, meist kürzerer Zeichen mit Hilfe bereits vorhandener.

(3) Alle Formregeln sind angegeben. – Das sind Regeln für die Bildung zusammengesetzter Zeichen aus einfacheren – z. B. für die Bildung von Sätzen aus Wörtern.

(4) Alle Umformungsregeln oder Schlußregeln sind angegeben. – Sie beziehen sich nur auf die graphische Gestalt der verwendeten Zeichen (Wörter, Sätze, Symbole).

(5) Alle Sinnregeln sind angegeben. – Sie geben Auskunft, wie sich die Bedeutung, der Sinn zusammengesetzter Zeichen (z. B. Sätze), aus der Bedeutung, dem Sinn einfacherer Zeichen (z. B. Wörter), ergibt. Sie bestimmen in eindeutiger Weise den Zusammenhang zwischen den Zeichen der Sprache und ihrer Bedeutung.

Zu den Bedingungen einer formalisierten Sprache gehört nicht, daß sie auch symbolisiert sein muß. Ihre Grundzeichen können Wörter, ihre zusammengesetzten Zeichen Sätze der natürlichen Sprache sein. In der Regel wird man jedoch die Vorzüge symbolisierter Sprachen beim Aufbau formalisierter Sprachen gleichzeitig ausnutzen. – Daß eine symbolisierte Sprache nicht gleichzeitig auch formalisiert sein muß, zeigt sich am Beispiel der Chemie.

Da die formale Logik über eine formalisierte Sprache verfügt, kann man mit ihren Mitteln aus Formeln, die wahren Aussagen entsprechen, Formeln gewinnen, die anderen wahren Aussagen entsprechen, ohne daß man während des Umwandlungsprozesses die Aussagen selbst berücksichtigen muß. Ein weiterer Vorteil einer formalisierten Sprache besteht darin, daß sich beim logischen Schließen keine stillschweigenden zusätzlichen Voraussetzungen einschleichen können. Zahlreiche Aufgaben der Logik oder auch der Mathematik sind überhaupt nur mit diesen Mitteln lösbar. Schließlich hat sich noch eine sehr interessante und nützliche Eigenschaft formalisierter Sprachen herausgestellt: Formalisierte Sprachen für ein bestimmtes Gebiet sind häufig auch auf ganz andere Gebiete anwendbar, wenn man ihren Zeichen eine entsprechende Bedeutung verleiht. Wir werden später z. B. sehen, daß durch den Formalismus der Aussagenlogik gleichzeitig Probleme der Theorie der elektrischen u. a. Schaltungen gelöst werden. Ein entscheidender Nachteil formalisierter Sprachen gegenüber anderen Sprachen ist, daß sie im Vergleich zu diesen sehr ausdrucksarm sind. Die Gesamtheit der bisher vorhandenen formalisierten Sprachen vermag erst verhältnismäßig kleine bzw. einfache Teilbereiche der Wirklichkeit wiederzugeben.

Für welche Gebiete der Wissenschaft formalisierte Sprachen aufgebaut werden können und für welche nicht, ist schwer vorherzusagen. Empirische Untersuchungen lassen sich jedenfalls gewiß nicht durch sie ersetzen. Und insofern wird die Gesamtheit der Wissenschaftssprachen wohl niemals eine Gesamtheit formalisierter Sprachen sein.

Der Aufbau einer formalisierten Sprache für ein bestimmtes Wissenschaftsgebiet setzt voraus, daß die logische Struktur dieses Gebietes völlig klar ist. Jeder Versuch, eine solche Sprache aufzubauen, ist nützlich, auch wenn er scheitert, weil er zwangsläufig zu gedanklicher und sprachlicher Präzisierung unserer Kenntnisse über das betreffende Gebiet führt. Für verschiedene Teilgebiete von Wissenschaften über die formale Logik und die Mathematik hinaus – Teilgebiete beispielsweise der Ethik und der Rechtswissenschaften – sind schon Möglichkeiten der Formalisierung gefunden, für weitere werden sie sich finden. In jeder Wissenschaft aber können formalisierte Sprachen schon heute als – wenn auch nicht immer voll erreichbares – Vorbild für die bewußte Gestaltung der jeweiligen Fachsprache dienen und damit indirekt zur Präzisierung der Begriffe und Aussagen der Wissenschaften beitragen.

1.4.3. Semantische Kategorien

In der Terminologie der Semiotik nennt man Arten von Zeichen „Kategorien" – dieses Wort bedeutet hier also nicht wie sonst oft dasselbe wie „Grundbegriffe" – und Kategorien, die von der Bedeutung der zu ihnen gehörigen Zeichen bestimmt sind, „semantische Kategorien". Ausdrücke wie „Der Leninismus ist der Marxismus unserer Epoche" und „Der Marxismus-Leninismus ist die theoretische Grundlage der Politik der SED" gehören ein und derselben semantischen Kategorie, der Kategorie der *Sätze* an. Ausdrücke wie „Mathematiker" und „Logiker" gehören ebenfalls ein und derselben semantischen Kategorie, der Kategorie der *Namen* an.

Damit sind bereits zwei der für die Wissenschaftssprachen wichtigsten semantischen Kategorien genannt. Sie sind nun genauer zu bestimmen und weiter zu unterteilen.

Die beiden als Beispiele angeführten Sätze sind Aussagesätze. Aussagesätze dominieren in den Wissenschaftssprachen. Aber die natürlichen Sprachen bilden noch weitere Arten von

Sätzen: Aufforderungssätze, Fragesätze, Wunschsätze, Ausrufesätze usw. Von diesen sind wiederum die Aufforderungssätze und die Fragesätze für die Wissenschaftssprachen von besonderer Bedeutung. Die Unterscheidung zwischen Aussage-, Aufforderungs- und Fragesätzen wird dadurch gerechtfertigt, daß ihnen verschiedene Denkformen entsprechen: Aussage, Aufforderung und Frage. Aussagen, Aufforderungen und Fragen sind Widerspiegelungen von Sachverhalten.

Aussagesatz	Aufforderungssatz	Fragesatz	*Z*
Aussage	Aufforderung	Frage	*A*
Sachverhalt	Sachverhalt	Sachverhalt	*O*

Die Buchstaben am Rande der Tabelle weisen im Sinne von 1.4.1. auf die Zugehörigkeit zur Ebene der Zeichen (*Z*), der gedanklichen Abbilder (*A*) und der Objekte der Widerspiegelung (*O*) hin.

Die hier vorgenommene Zuordnung zwischen Arten von Sätzen und ihren Bedeutungen ist in gewisser Weise eine Idealisierung. In den Wissenschaftssprachen wird sie genau wie in der natürlichen Sprache häufig nicht streng eingehalten. Der Satz „Du treibst jede Woche mehrmals Sport" kann je nach der Situation und der Intonation eine Aussage, eine Aufforderung oder eine Frage bedeuten. Strenggenommen unterscheiden sich jedoch Aussage-, Aufforderungs- und Fragesatz sowohl nach ihrer Bedeutung als auch nach ihrer Funktion.

Aussagesätze haben berichtenden, beschreibenden, designativen Charakter. Sie geben Auskunft über Vergangenes (z. B. in einer Zeugenaussage vor Gericht), über Gegenwärtiges (z. B. in Gestalt von Angaben über das Magnetfeld der Erde) oder über Zukünftiges (z. B. in einer Prognose). Aussagesätzen kann man entnehmen, wie etwas ist oder nicht ist. Sie dienen in der Wissenschaft zur Formulierung von Gesetzesaussagen und Theorien.

Aufforderungssätze haben anleitenden oder anweisenden, vorschreibenden, preskriptiven Charakter. Sie dienen dazu, jemanden zu veranlassen, daß er etwas tut oder unterläßt. Mit ihnen kann man Pläne, juristische Gesetze und Moralnormen

formulieren. Sie können in der Wissenschaft zur Formulierung von methodischen Regeln – darunter von algorithmischen Befehlen – und Methoden verwendet werden, und sie werden als Verständigungsmittel bei der Leitung und Organisation der wissenschaftlichen Arbeit gebraucht.

Fragesätze bringen zum Ausdruck, daß man etwas wissen möchte. Je nachdem, ob man wissen will, was ist oder war usw., oder was man tun soll, wird eine Antwort in Gestalt eines Aussage- oder eines Aufforderungssatzes erwartet. Fragesätze können in der Wissenschaft zur Formulierung von Problemen gebraucht werden.

Fragesätze können als eine besondere Art der Aufforderungssätze, Fragen als eine besondere Art der Aufforderungen verstanden werden. Man sieht dann eine Frage als eine an jemanden gerichtete Aufforderung an, eine der Frage entsprechende Aussage oder Aufforderung zu äußern.

Die in der natürlichen Sprache für die Bildung von Aussage-, Aufforderungs- und Fragesätzen geltenden Regeln gelten auch in den Wissenschaftssprachen. In symbolisierten Sprachen bedient man sich meist des Ausrufe- und des Fragezeichens, um die Unterschiede zwischen Aussage-, Aufforderungs- und Fragesätzen darzustellen:

„p“ – Aussagesatz,
„p !“ oder „!p“ – Aufforderungssatz,
„p ?“ oder „?p“ – Fragesatz.

Die meisten Logikbücher behandeln nur die Logik der Aussagen. Das hat seinen Grund vor allem darin, daß die Logik der Aufforderungen und die Logik der Fragen noch immer im Stadium der Diskussion ihrer Grundlagen sind. Es gibt zwar schon zahlreiche Arbeiten über diese Gebiete – man verwendet dabei Bezeichnungen wie „Imperativlogik“, „Normenlogik“ und „Sollsatzlogik“ bzw. „Fragenlogik“ und „Interrogativlogik“ –, aber Resultate, die denen der Logik der Aussagen auch nur annähernd vergleichbar sind, hat man bis heute noch nicht erzielt. Es wird sogar noch die Meinung vertreten, es gebe gar keine besondere oder gar keine Logik der Aufforderungen und der Fragen, bzw. sie sei reduzierbar auf die Logik der Aussagen. – Auch in diesem Buch wird, wie gesagt, nur die Logik der Aussagen behandelt. Das Problem der Aufforderungen wird insofern eine Rolle spielen, als methodische Regeln und mit ihnen Schlußregeln Aufforderungen

sind; doch dabei wird es um erkenntnistheoretische, nicht um logische Probleme gehen.

Wenn man auch nicht immer eine Aussage in einem Aussagesatz, eine Aufforderung in einem Aufforderungssatz und eine Frage in einem Fragesatz formuliert, sollte man doch bei der Formulierung seiner Gedanken die Unterschiede zwischen den Denkformen so weit berücksichtigen, daß für den Zuhörer oder Leser erkennbar ist, ob man eine Aussage, eine Aufforderung oder eine Frage zum Ausdruck bringen will. Unerwartete Reaktionen des Gesprächspartners sind nicht selten ein Zeichen dafür, daß man sich nicht klar genug ausgedrückt hat.

Bei der Analyse von Sätzen stößt man u. a. auf Namen, auf Bindewörter und auf unbestimmte Zahl- bzw. Fürwörter. Auf die Bindewörter werden wir im Rahmen der Aussagenlogik näher eingehen, auf die Namen und die unbestimmten Zahl- bzw. Fürwörter im Rahmen der Prädikatenlogik. Aber über die semantische Kategorie der Namen sind schon an dieser Stelle einige grundsätzliche Bemerkungen am Platze.

„Name" als Terminus der Logik und der Semiotik hat eine weitere Bedeutung als in der Umgangssprache. Nicht nur Ausdrücke wie „Wladimir Iljitsch Lenin" und „Karl-Marx-Allee" sind Namen, sondern alle Zeichen, die zur Bezeichnung irgendwelcher Objekte gebraucht werden können. Bei diesen Objekten kann es sich um Körper oder Gedanken, um Eigenschaften oder Beziehungen handeln. Namen bedeuten Begriffe. Es kann vorkommen, daß ein Name zwar eine Bedeutung hat, aber nichts bezeichnet, kein Designat hat – z. B. der Göttername „Jupiter".

Man unterscheidet zwischen Individuennamen und allgemeinen Namen. Individuennamen oder Eigennamen sind Namen mit einem einzigen Designat bzw. sollen ein einziges Objekt bezeichnen (wie „Jupiter"). Beispiele für diese Art von Namen sind: „Friedrich Engels", „der Berliner Fernsehturm", „Camillas Fahrrad" und „Menschheit". Die Bedeutung eines Individuennamens ist ein Individualbegriff. – Allgemeine Namen oder Klassennamen sind Namen mit mehr als einem Designat bzw. sollen mehr als ein einziges Objekt bezeichnen. Beispiele für diese Art von Namen sind: „Marxist", „Fernsehturm", „Fahrrad" und „Mensch". Es gibt auch allgemeine Namen, die zwar eine Bedeutung haben, aber nichts bezeichnen – z. B. „Nymphe". Die Bedeutung eines allgemeinen

Namens ist ein Allgemeinbegriff. Zu den allgemeinen Namen zählen die Substantive – soweit sie nicht Individuennamen sind, wie z. B. „Universum" – und die Mehrzahl der Adjektive und der Verben.

Name	Individuenname	allgemeiner Name	*Z*
Begriff	Individualbegriff	Allgemeinbegriff	*A*
Designat	Individuum	Klasse von Individuen	*O*

An dieser Stelle sollte ein Überblick über wichtige semantische Kategorien gegeben werden, so daß die Präzisierungen, die später erfolgen, gleich in einen größeren Zusammenhang eingeordnet werden können.

1.4.4. Sprachstufen

Zu den Anforderungen, die an sprachliche Formulierungen – vor allem in den Wissenschaften – zu stellen sind, gehört auch diese: Es muß klar unterschieden werden und unterscheidbar sein, worüber gesprochen wird – über Dinge, über Bewußtseinsinhalte oder über sprachliche Zeichen!

Grundlage aller menschlichen Erkenntnis sind die Dinge, Eigenschaften, Beziehungen usw. – kurz: Objekte, die objektiv real existieren und selbst keine sprachlichen Zeichen sind. Sie werden in Objekttheorien widergespiegelt, die in Objektsprachen formuliert sind. Die Infektionskrankheiten beispielsweise sind Objekt einer Theorie der Infektionskrankheiten, die entsprechende Wissenschaftssprache ist Mittel zur Darstellung der Theorie.

In der Wissenschaft ist es unvermeidlich, solche Objekttheorien und ihre Sprachen selbst wieder zum Gegenstand der Untersuchung zu machen. So ist zu prüfen, ob die Aussagen dieser Theorie wahr sind, ob sie miteinander verträglich sind oder ob die Theorie einander widersprechende Aussagen enthält. Man muß untersuchen, ob die Aussagen der Theorie eindeutig formuliert sind usw. All das kann nicht in einer solchen

Theorie selbst und mittels ihrer Sprache geschehen. Vielmehr braucht man dafür eine Metatheorie oder Theorie zweiter Stufe und eine zu ihr gehörige Metasprache oder Sprache zweiter Stufe. Damit ist nicht gesagt, daß eine Theorie und die zugehörige Sprache unbedingt wie in unserem Beispiel ein und derselben Stufe angehören müssen. Es kann auch vorkommen, daß eine Theorie der ersten Stufe in einer Sprache der zweiten Stufe formuliert wird. Das ändert jedoch nichts an dem Unterschied zwischen der Sprache, in der eine Theorie ausgedrückt wird, und der Sprache, in der über sie gesprochen wird.

Eine *Metasprache* hat folgende Eigenschaften:

(1) Man kann mit ihren sprachlichen Mitteln alles formulieren, was man mit denen der Objektsprache sagen kann.

(2) Man kann in ihr alle Zeichen, Ausdrücke usw. der Objektsprache bezeichnen, d. h., man hat Namen für sie.

(3) Man kann in ihr über die Eigenschaften der objektsprachlichen Ausdrücke und die Beziehungen zwischen ihnen sprechen.

(4) Man kann in ihr die Definitions-, Form-, Umformungs- und Sinnregeln für die objektsprachlichen Ausdrücke formulieren.

Ein Beispiel mag das Verhältnis zwischen Objekt- und Metasprache verdeutlichen. Im Russischunterricht an den polytechnischen Oberschulen der DDR fungiert ein Teil der russischen Sprache als Objektsprache, die deutsche Sprache als Metasprache.

Da man die russischsprachigen Wörter und Sätze in deutschsprachige übersetzen kann, ist die erste Anforderung an die Metasprache erfüllt. Wenn die Lehrerin einen Schüler auffordert, z. B. den *ersten Satz auf Seite 12 des Lehrbuchs* zu übersetzen, so hat sie – gemäß (2) – eine Bezeichnung, einen Namen für diesen Satz gebraucht. Die Feststellung, daß ein bestimmtes Wort dieses Satzes mehrdeutig ist, erfüllt die Forderung (3). Die Forderung (4) wird durch die deutschsprachige Formulierung der Regeln für Deklination, Konjugation, Satzbildung usw. im Russischen erfüllt.

Besonders deutlich ist der Unterschied zwischen Objekt- und Metasprache, wenn die zu betrachtende Objektsprache eine symbolisierte Sprache ist und wenn die als Mittel der Untersuchung dienende Metasprache eine nicht-symbolisierte Wissenschaftssprache ist, wie man das in der Mathematik und in der formalen Logik findet. Die Unterscheidung zwischen

Objekt- und Metasprache wird schwieriger, sobald man sich im Rahmen ein und derselben natürlichen Sprache bewegt. Will man etwa in deutscher Sprache über einen Teil dieser Sprache sprechen, so hat man nur selten metasprachliche Namen, Bezeichnungen für objektsprachliche Wörter oder Sätze zur Verfügung. Für den Satz „Proletarier aller Länder, vereinigt euch!" läßt sich ein metasprachlicher Name finden – man kann ihn nämlich eindeutig als den Schlußsatz aus dem Manifest der Kommunistischen Partei von Marx und Engels bezeichnen. Ein einfacheres Mittel, metasprachliche Namen für objektsprachliche Wörter oder Sätze zu bilden, ist die Verwendung von Anführungszeichen. Ein in Anführungszeichen stehendes Wort gilt dann als metasprachlicher Name für dasselbe ohne Anführungszeichen geschriebene Wort; aus einem objektsprachlichen Satz erhält man einen Namen für diesen Satz, indem man ihn in Anführungszeichen setzt. – In sprachwissenschaftlicher Literatur dienen im allgemeinen kursiv gedruckte Ausdrücke als metasprachliche Namen für objektsprachliche Ausdrücke.

	Wort	*Satz*
Objektsprache	Proletarier	Proletarier, vereinigt euch!
Metasprache	„Proletarier"	„Proletarier, vereinigt euch!"

Der Unterschied zwischen objekt- und metasprachlichen Formulierungen wird in folgenden Beispielen noch deutlicher:

(1) Das Proletariat ist die Arbeiterklasse in der kapitalistischen Gesellschaft

(2) „Proletariat" bedeutet dasselbe wie „Arbeiterklasse in der kapitalistischen Gesellschaft"

(3) Das Proletariat bedeutet dasselbe wie „Arbeiterklasse in der kapitalistischen Gesellschaft".

Satz (1) ist ein objektsprachlicher Satz, er sagt etwas über die gesellschaftliche Wirklichkeit aus. Satz (2) gehört einer Metasprache an, er sagt etwas über sprachliche Ausdrücke und ihre Bedeutung aus. Beide Sätze sind korrekt formuliert. Hingegen ist Satz (3) falsch gebildet, weil in ihm Objekt- und

Metasprache vermischt sind. Von dem Wort „bedeutet" ab ist er ein metasprachlicher Name, während davor statt eines metasprachlichen Namens für einen objektsprachlichen Ausdruck dieser selbst steht.

In der Literatur verwendet man Anführungszeichen vor allem, um Zitate vom übrigen Text abzuheben. Dieser Gebrauch entspricht genau der hier eingeführten Regel über die Verwendung von Anführungszeichen. Mitunter soll aber durch Anführungszeichen angedeutet werden, daß eine bestimmte Formulierung ironisch gemeint ist — wenn man z. B. zu jemandem, den man beim Büroschlaf überrascht hat, sagt, daß er aber wieder „fleißig" sei. Das hat mit der Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache natürlich nichts zu tun.

Es war zwar davon noch nicht die Rede, daß es mehr als zwei Stufen im Aufbau von Sprachen gibt, aber wir haben unsere voraufgegangenen Betrachtungen schon in einer Sprache dritter Stufe formuliert. Um nur über eine Objektsprache zu sprechen, hätte eine Sprache zweiter Stufe genügt. Wir haben aber außerdem über Eigenschaften einer Metasprache, über Formregeln, die in ihr gelten, usw. gesprochen. Dazu benötigen wir eine Sprache, die zu ihr in demselben Verhältnis steht wie sie selbst zur Objektsprache — also eine Meta-Metasprache oder Sprache dritter Stufe. Dieser Aufbau läßt sich beliebig weit fortsetzen. Im allgemeinen genügt es jedoch, zwischen zwei Sprachen zu unterscheiden: zwischen derjenigen, die *Objekt* der Untersuchung, und derjenigen, die *Mittel* der Untersuchung ist.

Die Unterscheidung zwischen Sprachen verschiedener Stufe ist in formalisierten Sprachen unumgänglich. Anders wäre es ja gar nicht möglich, in ihrem Rahmen Operationen mit Gedanken durch Operationen mit Zeichen zu ersetzen. Ein weiterer Grund für diese Unterscheidung, der auch auf nichtformalisierte Sprachen zutrifft, besteht darin, daß die Vermengung von Sprachstufen zu logischen Widersprüchen führen kann.

Außerhalb der formalisierten Sprachen unterscheidet man oft nicht genau zwischen verschiedenen Sprachstufen oder — wie sie auch genannt werden — semantischen Stufen. Insbesondere werden zu selten Anführungszeichen gebraucht. Man kann natürlich niemanden dazu zwingen, sie genau der angegebenen Regel entsprechend zu verwenden. Von wissen-

schaftlicher Literatur muß man aber verlangen, daß zumindest aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht, worüber gesprochen wird. Man sollte diese Forderung freilich auch überall dort berücksichtigen, wo sich Menschen miteinander verständigen müssen.

2. AUSSAGENLOGIK

Wir untergliedern den unter dieser Überschrift zu behandelnden Stoff in zwei größere Abschnitte. Im ersten beschäftigen wir uns mit Grundbegriffen der Aussagenlogik, im zweiten mit ihrer Anwendung auf das logische Schließen sowie auf elektrische und andere Schaltungen.

2.1. Grundbegriffe der Aussagenlogik

Nach einer Betrachtung darüber, was eine Aussage ist, wenden wir uns Operationen mit Aussagen, nämlich der Negation und der Verknüpfung von Aussagen, zu. Dabei gehen wir auf die Mehrdeutigkeit einer Reihe von Bindewörtern der natürlichen Sprache ein.

2.1.1. Die Aussage

Der Begriff „Aussage" gehört zu den Grundbegriffen der formalen Logik, die nicht mit den Mitteln dieser Wissenschaft selbst definiert werden können. Zu untersuchen und zu definieren, was eine Aussage ist, gehört vielmehr zum Aufgabenbereich der Erkenntnistheorie, deren Ergebnisse die formale Logik übernimmt.

Eine Aussage ist ein *gedankliches Gebilde.* Sie ist also eine Form der Widerspiegelung der objektiven Realität im menschlichen Bewußtsein. Andere Formen dieser Widerspiegelung sind Empfindung, Wahrnehmung und Begriff. Empfindung und Wahrnehmung gehören der sinnlichen, Begriff und Aussage der rationalen, der gedanklichen Stufe des Bewußtseins an.

Eine Aussage *widerspiegelt einen Sachverhalt*; dadurch unterscheidet sie sich vom Begriff, der eine Klasse von Individuen widerspiegelt. – Betrachten wir zunächst einige Beispiele für Sachverhalte: Daß die Blätter dieses Buches aus weißem Papier bestehen, ist ein Sachverhalt, der in der Aussage „Die

Blätter dieses Buches bestehen aus weißem Papier" widergespiegelt wird. Daß die Menschen gesellschaftliche Wesen sind, ist ein Sachverhalt; daß die Erde sich um die Sonne bewegt, ist ein Sachverhalt; daß ein Fernsehapparat teurer ist als ein Radioapparat, ist ein Sachverhalt. In all diesen Fällen kommen bestimmten Individuen (Blättern eines Buches, Menschen) bestimmte Eigenschaften (aus weißem Papier zu bestehen, gesellschaftliche Wesen zu sein) zu, oder bestimmte Individuen (Erde, Sonne; Fernsehapparate, Radioapparate) stehen in bestimmten Beziehungen (sich bewegen um, teurer sein als) zueinander.

Wir werden künftig öfter den Terminus „Merkmal" an Stelle des Ausdrucks „Eigenschaft oder Beziehung" verwenden; d. h., statt „Bestimmte Individuen haben bestimmte Eigenschaften oder stehen in bestimmten Beziehungen zueinander" werden wir kürzer sagen, „Bestimmten Individuen kommen bestimmte Merkmale zu".

Das Wort „Individuum" dient uns, wie schon aus den Beispielen hervorgeht, nicht nur zur Bezeichnung menschlicher Individuen. Es wird vielmehr gebraucht, um Dinge im weitesten Sinne des Wortes zu bezeichnen, unabhängig davon, ob sie objektiv real oder im menschlichen Bewußtsein existieren. Atome, Moleküle, Tiere, Menschen, Häuser, Städte, Zahlen, Gedanken sind Individuen in diesem Sinne. In einem Gespräch, in einer Wissenschaft usw. ist in der Regel immer — stillschweigend oder ausdrücklich — von einem ganz bestimmten Individuenbereich, d. h. von ganz bestimmten Individuen und ihren Merkmalen die Rede. Die Gesamtheit der Menschen mit ihren vielfältigen gesellschaftlichen Beziehungen bildet den Individuenbereich der Gesellschaftswissenschaften. Individuenbereich für den Zoologen ist die Gesamtheit der Tiere. Für den Physiker gehören die Elementarteilchen, die Atome, die Moleküle, die festen Körper zu den Individuen des Individuenbereiches, über den er spricht.

Die logischen Gesetze aber beziehen sich ja nicht auf spezielle Individuenbereiche, sie gelten vielmehr — wir haben das mit anderen Worten schon gesagt — für beliebige Individuenbereiche. Deshalb spricht man in der formalen Logik auch nicht von einem bestimmten Individuenbereich, sondern von beliebigen Individuenbereichen, und deshalb braucht man in der formalen Logik auch einen so allgemeinen Begriff des Individuums, wie wir ihn hier charakterisiert haben.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen können wir allgemein feststellen:

Von einem *Sachverhalt* sprechen wir, wenn

(1) bestimmten Individuen bestimmte Merkmale zukommen oder wenn

(2) bestimmten Merkmalen bestimmte Merkmale zukommen

– auf diesen zweiten Fall werden wir im späteren Abschnitt 3.3. eingehen. Sachverhalte können objektiv real existieren wie die in den voraufgegangenen Beispielen genannten; sie können aber auch im Bewußtsein existieren wie etwa der Sachverhalt, daß eine bestimmte Aussage Widerspiegelung eines bestimmten Sachverhalts ist. Natürlich sind die objektiv real existierenden Sachverhalte den im Bewußtsein existierenden gegenüber primär. Deshalb ist jede Aussage, wenn sie nicht ohnehin eine direkte, unmittelbare Widerspiegelung eines objektiv real existierenden Sachverhalts ist, sondern einen ideellen Sachverhalt widerspiegelt, über diesen vermittelt zumindest indirekt, mittelbar von der objektiven Realität abhängig.

Eine Aussage ist *wahr* oder *falsch*, je nachdem, ob sie eine adäquate Widerspiegelung, eine richtige Widerspiegelung des ihr entsprechenden Sachverhalts ist oder nicht. Aristoteles, auf dessen Wahrheitsbegriff der des dialektischen Materialismus aufbaut, drückt das hier Gemeinte so aus: „Wahr ist zu sagen, daß das, was ist, ist und das, was nicht ist, nicht ist" und „daß wahr derjenige spricht, der Getrenntes für getrennt und Verbundenes für verbunden hält, falsch dagegen, wessen Meinung sich umgekehrt verhält"[1]. Da die Wahrheit einer Aussage – direkt oder indirekt – immer von den Sachverhalten der objektiven Realität abhängt, ist sie *objektive Wahrheit*; ebenso ist die Falschheit einer Aussage objektive Falschheit.

Wenn wir gesagt haben, daß jede Aussage wahr oder falsch ist, so ist damit nicht gemeint, daß jede Aussage *absolut* wahr oder falsch ist, d. h. den ihr entsprechenden Sachverhalt genau und vollständig widerspiegelt oder vollständig verfehlt. Die Erkenntnis der Wirklichkeit, die Gewinnung wahrer Aussagen vollzieht sich vielmehr in einem Prozeß, der von relativ wahren zu absolut wahren Aussagen führt. Eine relativ wahre Aussage widerspiegelt den ihr entsprechenden Sachverhalt mehr oder

[1] Aristoteles, Metaphysik, übers. u. hrsg. von E. Rolfes, Leipzig 1928, XI. Buch, 1051 b.

weniger genau, mehr oder weniger vollständig. Sie enthält also Relatives, das durch fortschreitende Erkenntnis korrigiert, vervollkommnet, vervollständigt werden kann. Insofern sie aber den Sachverhalt wenigstens zum Teil, in gewisser Hinsicht erfaßt, enthält sie etwas von der absoluten Wahrheit und ist deshalb eine Vorstufe vollständiger und endgültiger Erkenntnis[2].

Eine Aussage existiert (im allgemeinen) *in Form eines Aussagesatzes.* – Die in Klammern gesetzte Einschränkung ergibt sich daraus, daß man die Formulierungen von Aussagen in symbolisierten Sprachen nur im übertragenen Sinne als Aussagesätze bezeichnen kann. Es kommt in natürlichen Sprachen auch vor, daß Aussagen durch andere sprachliche Formen als durch Aussagesätze ausgedrückt werden. Ein Fragesatz wie „Ist das Gemälde nicht ein Meisterwerk?" wird nicht selten wie ein Aussagesatz gebraucht und verstanden. Der Ausruf „Au!" bedeutet unter bestimmten Bedingungen eine Aussage, wonach der Sprecher eine Schmerzempfindung hat.

Trotz des untrennbaren Zusammenhangs zwischen der Aussage und ihrer sprachlichen Existenzform dürfen beide nicht miteinander verwechselt werden. Eine Aussage bleibt bei richtiger Übersetzung aus einer Sprache in eine andere unverändert, ihre Existenzform hingegen verändert sich. Auch innerhalb einer Sprache kann eine Aussage durch verschiedene Sätze wiedergegeben werden. Der Satz „Alles existiert in Raum und Zeit" bedeutet dieselbe Aussage wie „Es gibt nichts, was nicht in Raum und Zeit existiert".

Schreibt man Wahrheit und Falschheit nicht Aussagen, sondern – wie es idealistische Erkenntnistheoretiker und Logiker häufig tun – Aussagesätzen zu, ist man zu einer Relativierung des Wahrheitsbegriffs auf die jeweils benutzte Sprache gezwungen. Die Wahrheit einer Aussage ist jedoch objektive Wahrheit; d. h., sie hängt nicht von der Sprache ab, in der die Aussage formuliert ist, sondern von dem Sachverhalt, den sie widerspiegelt.

Zusammenfassend definieren wir:

Eine *Aussage* ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts. Sie ist wahr, wenn sie den Sachverhalt adäquat widerspiegelt, andernfalls ist sie falsch. Sie existiert (im allgemeinen) in Form eines Aussagesatzes.

[2] Vgl. W. I. Lenin, Materialismus und Empiriokritizismus, in: Werke, Bd. 14, Berlin 1962, S. 126ff.

2.1.2. Aussage und Urteil

In der traditionellen Logik war statt des Terminus „Aussage" der Terminus „Urteil" üblich. Es ist jedoch zweckmäßig, zwischen beiden zu unterscheiden.

Der Terminus „Urteil" wird heute in der Erkenntnistheorie und in der Psychologie gebraucht. Das Urteil ist eine Aussage, aber ihm kommen neben den Merkmalen einer Aussage noch weitere zu. Das Urteil ist ein Willensakt, es drückt eine Stellungnahme, eine Behauptung aus und ist im allgemeinen emotional gefärbt.[3] Diese weiteren Merkmale ergeben sich aus der Tatsache, daß Urteile bzw. Aussagen nur im menschlichen Bewußtsein existieren und daß der Mensch sie stets auch zu anderen Bewußtseinsinhalten in Beziehung setzt.

Von diesen zusätzlichen Merkmalen kann die formale Logik abstrahieren, da sie keinen Einfluß auf den Untersuchungsgegenstand der formalen Logik haben. So ist etwa die Stellungnahme eines Menschen zu einer Aussage für die formale Logik ohne jede Bedeutung. In dieser Wissenschaft werden Beziehungen zwischen wahren und falschen Aussagen untersucht; ob jedoch diese Aussagen wahr oder aber falsch sind, hängt allein von den Sachverhalten ab, die von ihnen widergespiegelt werden.

Verdeutlichen wir das durch ein Beispiel: Angenommen, Herr A bittet Herrn B, ihm 10 Mark zu leihen. Herr B möchte das nicht gern tun und sagt deshalb: „Ich habe gar nicht soviel Geld bei mir." Er ist davon überzeugt, daß er noch 50 Mark in der Brieftasche hat. Gibt jemand eine Aussage für wahr aus, von deren Falschheit er überzeugt ist, so sagt man von ihm, er lüge. Folglich hat Herr B gelogen. Nun hat er aber tatsächlich unbemerkt seine Brieftasche verloren. Folglich ist seine Aussage, er habe nicht soviel Geld bei sich, wie Herr A geborgt haben möchte, wahr! Seine Überzeugung, daß die Aussage falsch ist, ändert an ihrer Wahrheit gar nichts. Sofern eine Aussage wahr ist, ist sie *objektiv* wahr. „Nicht darum nämlich, weil wir meinen, du seiest in Wahrheit weiß, bist du weiß, sondern weil du weiß bist, so reden wir, die das behaupten, die Wahrheit"[4], sagt schon Aristoteles.

[3] Vgl. S. L. Rubinstein, Grundlagen der allgemeinen Psychologie, S. 450.

[4] Aristoteles, Metaphysik, XI. Buch, 1051 b.

Im Rechtswesen verwendet man die Termini „Aussage" und „Urteil" ebenfalls. Von einer Zeugen*aussage* erwartet das Gericht eine möglichst adäquate Beschreibung eines Sachverhalts, also eine wahre Aussage im hier gemeinten Sinne. Dagegen ist das richterliche *Urteil* keine Aussage, sondern seinem Wesen nach eine Aufforderung zu einer bestimmten Handlung oder Verhaltensweise, der die entsprechenden staatlichen Organe, die Angeklagten bzw. die Prozeßparteien nachzukommen haben. Das richterliche Urteil ist nicht zu verwechseln z. B. mit der Urteilsbegründung, die allerdings Aussagecharakter hat.

Im menschlichen Bewußtsein gibt es eigentlich gar keine Aussagen, sondern nur Urteile. Die formale Logik abstrahiert aber für ihre Bedürfnisse von solchen Eigenschaften der Urteile, die keinen Einfluß auf die logischen Zusammenhänge haben und die deren logische Untersuchung nur erschweren würden. Das so gewonnene Abstraktionsprodukt heißt „Aussage".

2.1.3. Die Aussage in der Aussagenlogik

Die Gesetze der formalen Logik gelten für jedes Denken, gleichgültig, ob es nun Probleme der Wissenschaft oder der Politik, Fragen der Kunst oder des täglichen Lebens zum Gegenstand hat. In der formalen Logik wird deshalb vom konkreten Inhalt der Aussagen abstrahiert und nur über Aussagen schlechthin gesprochen; konkrete Aussagen dienen lediglich als Beispiele.

In der Aussagenlogik wird darüber hinaus von den Bestandteilen und der Struktur der Aussagen abstrahiert; sie werden erst in der Prädikatenlogik berücksichtigt.

Diesen beiden Abstraktionsprozessen entsprechend wird die Symbolik der Aussagenlogik gewählt. Es werden zunächst *Aussagenvariable* eingeführt:

$$p, q, r, \ldots$$

Diese Aussagenvariablen stehen für irgendwelche Aussagesätze; ihre Bedeutung sind irgendwelche Aussagen.

Man verwendet sie ähnlich, wie man in der Mathematik Zahlenvariable gebraucht. Dort spricht man z. B. ganz allgemein von natürlichen oder ganzen oder rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots$ und ihren Beziehungen und stellt mit diesen Sym-

bolen Formeln auf. In der Aussagenlogik spricht man ganz allgemein von Aussagen p, q, r, ... und ihren Beziehungen und stellt mit diesen Symbolen ebenfalls Formeln auf. Wie man in mathematischen Formeln für die Zahlenvariablen a, b, c, ... bestimmte Zahlzeichen – etwa 1, 6, 7 – einsetzen darf, so darf man auch in logischen Formeln für die Aussagenvariablen konkrete Aussagesätze einsetzen. Falls eine solche Formel für beliebige Aussagen p, q, r, ... gilt, muß sie natürlich auch für jede konkrete Einsetzung gelten.

Zur genaueren Abgrenzung des Gegenstandsbereichs unserer Darstellung geben wir nun noch ein *Prinzip der Zweiwertigkeit* an, das für alle von uns betrachteten Aussagen gelten soll:

Jede Aussage sei entweder wahr oder falsch; d. h., jede Aussage habe *tatsächlich* eine dieser beiden Eigenschaften und *nur* eine der beiden Eigenschaften.

Mit anderen Worten: Unter den von uns betrachteten Aussagen soll keine vorkommen, die *weder* wahr *noch* falsch ist; es soll aber auch keine vorkommen, die zugleich wahr *und* falsch ist.

Statt „Die Aussage p ist wahr" sagen wir auch „Die Aussage p hat den *Wahrheitswert* wahr", statt „Die Aussage p ist falsch" sagen wir auch „Die Aussage p hat den *Wahrheitswert* falsch".

Die formale Logik, in der jede Aussage einen der beiden Wahrheitswerte wahr und falsch annimmt, nennt man „zweiwertige Logik". – Unsere Darstellung bewegt sich also im Rahmen einer zweiwertigen Logik, woraus sich ergibt, daß die hier betrachteten Gesetze und Regeln für *absolut* wahre bzw. *absolut* falsche Aussagen uneingeschränkt gelten und auch für solche Aussagen, die man wenigstens im gegebenen Zusammenhang als absolut wahr bzw. absolut falsch ansehen kann. Da relativ wahre Aussagen zugleich relativ falsch sind, entsprechen sie nicht den durch das Prinzip der Zweiwertigkeit gestellten Anforderungen; auf sie die Gesetze und Regeln einer zweiwertigen Logik anzuwenden, bedarf daher gewisser Vorsichtsmaßregeln.

Der Gedanke liegt nahe, *relativ* wahre bzw. falsche Aussagen und ihre Beziehungen in einer mehrwertigen Logik zu betrachten. Nun gibt es zwar schon solche Logiken, in denen eine Aussage einen von drei oder mehr Werten annehmen kann, und es gibt auch Versuche, sie in der Physik und in der Technik anzuwenden. Versuche, in ihr neben den beiden absoluten

Wahrheitswerten auch relative Wahrheitswerte zu gebrauchen, haben jedoch bisher noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis geführt[5].

Das Prinzip der Zweiwertigkeit ermöglicht bereits eine genauere Bestimmung der Aussagenvariablen: Eine Aussagenvariable steht für irgendeinen Aussagesatz; ihre Bedeutung ist irgendeine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

Bei Bedarf wird festgelegt, welcher der beiden Wahrheitswerte ihr zukommen soll. Eine solche Festlegung ist – in der Fachsprache der formalen Logik – dasselbe wie eine *Belegung* einer Aussagenvariablen mit einem Wahrheitswert. Für den Wahrheitswert *wahr* verwenden wir als Symbol den Buchstaben „*w*", für den Wahrheitswert *falsch* den Buchstaben „*f*".

Im folgenden werden wir Operationen betrachten, die man mit Hilfe aussagenlogischer Konnektoren an Aussagen vollziehen kann; wir beschäftigen uns zunächst mit der Negation von Aussagen und dann mit verschiedenen Möglichkeiten, aus einzelnen Aussagen Aussagenverbindungen herzustellen. Der Herstellung einer Aussagenverbindung entspricht auf der sprachlichen Ebene die Verbindung von Aussagesätzen mit Hilfe von Bindewörtern wie „und", „oder" usw. zu zusammengesetzten Sätzen. Dabei entsprechen einander:

Sprachliche Ebene	Aussagesätze	Bindewörter	Zusammengesetzte Sätze
Gedankliche Ebene	Aussagen	logische Konnektoren	Aussagenverbindungen

Aussagenverbindungen, die mit Hilfe dieser Konnektoren aus einzelnen Aussagen gebildet werden, sind wie diese wahr oder falsch, d. h., diese Aussagenverbindungen sind selbst wieder *Aussagen*. Wir haben nun zu untersuchen, wie der

[5] Vgl. A. A. Sinowjew, Über mehrwertige Logik, Ein Abriß, Berlin/Braunschweig/Basel 1968; H. Wessel, Über mögliche Explikationen der Termini „relative Wahrheit" und „absolute Wahrheit", in: Wege des Erkennens, Philosophische Beiträge zur Methodologie der naturwissenschaftlichen Erkenntnis, hrsg. von H. Laitko u. R. Bellmann, Berlin 1969.

Wahrheitwert der Aussagenverbindungen vom Wahrheitswert der einzelnen verbundenen Aussagen abhängt. Die formale Logik beschränkt sich dabei auf die Untersuchung der extensionalen Aussagenverbindungen. *Extensionale Aussagenverbindungen* sind Aussagenverbindungen, deren Wahrheitswert *nur* vom Wahrheitswert der einzelnen verbundenen Aussagen abhängt, nicht aber von deren konkretem Inhalt.

In den folgenden Abschnitten wird oft von *Ausdrücken* die Rede sein. Mit diesem Terminus sind etwa die Formeln der Logik gemeint. Ausdrücke bestehen teils nur aus Variablen, teils aus Variablen und Konstanten. Die Konstanten sind sprachliche Zeichen, die eine bestimmte, feste Bedeutung besitzen; sie werden hauptsächlich mit der Bedeutung logischer Konnektoren auftreten. Die Variablen hingegen sind sprachliche Zeichen, die keine bestimmte konkrete Bedeutung besitzen, sondern die stellvertretend, als Platzhalter für irgendwelche Konstanten stehen. Im Rahmen der Aussagenlogik werden wir nur eine Art von Variablen, die Aussagenvariablen, verwenden, später werden weitere hinzukommen. Ein Ausdruck in diesem Sinne ist eine aus Symbolen der Logik bestehende Zeichenreihe, die nach den syntaktischen Regeln der Logik richtig gebildet ist. Ein solcher Ausdruck ist eine sinnvolle Zeichenreihe, die z. B. eine Aussagenverbindung bedeutet, im Gegensatz zu einer sinnlosen Zeichenreihe, die nichts bedeutet und nichts bedeuten kann. Wie die Ausdrücke richtig zu bilden sind, zeigen wir ausführlich in den folgenden Abschnitten. – Mit diesen Bemerkungen ist für unsere Zwecke hinreichend genau bestimmt, was ein Ausdruck ist; eine korrekte Definition der aussagenlogischen Ausdrücke findet sich in 4.1.3. als Beispiel einer induktiven Definition.

Der Unterschied zwischen gedanklichen Gebilden und ihrer sprachlichen Existenzform, auf den schon mehrfach hingewiesen wurde, wird in erkenntnistheoretischen Betrachtungen auch künftig eine wichtige Rolle spielen. Die genaue gegenseitige Entsprechung gedanklicher und sprachlicher Strukturen in der formalen Logik erlaubt es aber, im Rahmen logischer Betrachtungen von diesem Unterschied abzusehen und dadurch zu einer vereinfachten Redeweise zu gelangen. So darf man z. B. sagen, daß ein bestimmter *Ausdruck* bei einer bestimmten Belegung der in ihm vorkommenden Variablen wahr ist, obwohl es genaugenommen heißen müßte, daß die *Bedeutung dieses Ausdrucks* eine wahre Aussage ist.

2.1.4. Die aussagenlogische Negation

Man negiert eine Aussage p, wenn man sagen will, daß *nicht* der p entsprechende Sachverhalt existiert, sondern der ihm entgegengesetzte, der ihn ausschließende. Indem man eine Aussage p negiert, erhält man eine andere Aussage, und zwar das logische Gegenteil von p, das *Negat* von p – symbolisch: „$\sim p$". Dieser Ausdruck wird gelesen wie „Nicht p" oder besser „Es ist nicht wahr, daß p".

Durch logische Negation der Aussage „Die DDR vertritt die Interessen des deutschen Volkes" erhält man deren Negat „Es ist nicht wahr, daß die DDR die Interessen des deutschen Volkes vertritt". Durch diese Operation haben wir eine wahre Aussage in eine falsche Aussage verwandelt. – Andererseits erhält man durch die Negation einer falschen Aussage eine wahre Aussage. Aus der falschen Aussage „Die Bonner Regierung betreibt eine Politik der friedlichen Verständigung" gewinnt man durch logische Negation die wahre Aussage „Es ist nicht wahr, daß die Bonner Regierung eine Politik der friedlichen Verständigung betreibt".

Allgemein gesagt: Wenn eine Aussage p wahr ist, so ist ihr Negat $\sim p$ falsch; wenn p dagegen falsch ist, ist $\sim p$ wahr. – Dieser Zusammenhang läßt sich sehr übersichtlich in einer Tabelle, in der *Wahrheitsmatrix der Negation* darstellen:

p	$\sim p$
w	f
f	w

Daraus ergibt sich folgende Definition:

Die *aussagenlogische Negation* ist eine Operation, mit deren Hilfe man aus einer gegebenen Aussage p deren Negat $\sim p$ gewinnt, d. h. eine Aussage, deren Wahrheitswert dem Wahrheitswert von p entgegengesetzt ist.

Das gilt nicht nur für so einfache Aussagen, wie wir sie bisher betrachtet haben, sondern auch für beliebig komplizierte Aussagenverbindungen, die ja selbst wieder Aussagen sind. Auch eine Aussagenverbindung, die wahr ist, wird, wenn sie als ganze negiert wird, falsch und umgekehrt.

Aussagen, die mehrfach negiert sind, können leicht Verständnisschwierigkeiten hervorrufen. Was ist z. B. gemeint mit „Es ist nicht wahr, daß es nicht wahr ist, daß es nicht

wahr ist, daß es nicht wahr ist, daß es regnet"? – Mit den bisher dargestellten Mitteln läßt sich diese Frage bereits ganz exakt beantworten. Zunächst wird die Aussage „Es regnet" durch „p" symbolisiert. Dann stellt man fest, wie oft p negiert ist, und schreibt für jede Negation einmal das Negationssymbol. So ergibt sich der schon wesentlich übersichtlichere Ausdruck:

$$\sim \sim \sim \sim p.$$

Diese Aussage ist offensichtlich das Negat von $\sim \sim \sim p$ und hat damit den entgegengesetzten Wahrheitswert von $\sim \sim \sim p$. Weiter ist $\sim \sim \sim p$ das Negat von $\sim \sim p$, $\sim \sim p$ das Negat von $\sim p$ und schließlich $\sim p$ das Negat von p. Die Beziehungen zwischen diesen fünf Aussagen lassen sich wieder sehr übersichtlich in einer Wahrheitsmatrix darstellen:

p	$\sim p$	$\sim \sim p$	$\sim \sim \sim p$	$\sim \sim \sim \sim p$
w	f	w	f	w
f	w	f	w	f

Wie man sieht, hat $\sim \sim \sim \sim p$ jeweils denselben Wahrheitswert wie p. Die Aussage, von der wir ausgegangen sind, kann demnach in logischen Zusammenhängen – z. B. beim logischen Schließen – durch die ohne weiteres verständliche Aussage „Es regnet" ersetzt werden.

Aus der Tabelle entnimmt man ferner, daß eine zwei- oder viermal negierte Aussage denselben Wahrheitswert hat wie die entsprechende nicht negierte, daß eine dreimal negierte Aussage denselben Wahrheitswert hat wie eine einmal negierte.

Aus dieser Einsicht gewinnen wir eine Regel für die Vereinfachung logischer Ausdrücke:

Wenn vor oder in einem logischen Ausdruck mehrere Negationszeichen unmittelbar aufeinanderfolgen, darf man sie paarweise streichen, bis nur noch eins oder keins mehr vorhanden ist.

Steht zwischen zwei Negationszeichen z. B. auch nur eine Klammer, ist die Regel auf diese beiden Negationszeichen nicht anwendbar, sie folgen ja nicht unmittelbar aufeinander.

Der Übergang von mehrfach negierten Aussagen zu einmal oder gar nicht negierten ist schon ein – wenn auch elementares – Beispiel dafür, wie man in der formalen Logik das

Operieren mit Gedanken durch das Operieren mit Zeichen ersetzen kann.

Die Formulierung der Negation von Aussagen mit Hilfe von „Es ist nicht wahr, daß . . ." benutzt man in der natürlichen Sprache selten, denn sie klingt etwas gekünstelt. Man gebraucht sie meist dann, wenn man betonen will, daß eine bestimmte Aussage falsch ist. Die *Meinung* eines Menschen hat jedoch, wie gesagt, keinen Einfluß auf den Wahrheitswert einer Aussage, und eine negierte Aussage kann wahr sein, sie kann aber auch falsch sein. In der Fachsprache der formalen Logik hat sich die Redewendung „Es ist nicht wahr, daß . . ." als sprachlicher Ausdruck für die Negation einer Aussage eingebürgert, und so ist sie hier auch immer zu verstehen.

Statt „Es ist nicht wahr, daß das Papier dieses Buches weiß ist" wird man in der natürlichen Sprache meist sagen: „Das Papier dieses Buches ist nicht weiß." Beide Aussagesätze sind tatsächlich gleichbedeutend, beide Aussagen haben denselben Wahrheitswert. In der zweiten Formulierung wird allerdings nicht eine Aussage negiert, sondern nur ein Begriff innerhalb einer Aussage. Begriffe zu negieren ist aber erst mit prädikatenlogischen Mitteln möglich; in der Aussagenlogik, in der Struktur und Bestandteile der Aussagen nicht berücksichtigt werden, kann man nur Aussagen als ganze negieren.

Bereits an dieser Stelle muß auf eine Fehlermöglichkeit bei der Negation hingewiesen werden. Negieren wir die Aussage „Das Papier aller Bücher ist weiß" nach dem Muster des vorigen Beispiels, dann erhalten wir die Aussage „Das Papier aller Bücher ist nicht weiß". Die erste Aussage ist falsch, denn es gibt Bücher, die auf gelbem, solche, die auf rosa Papier usw. gedruckt sind. Wenn die zweite Aussage das Negat der ersten wäre, müßte sie also wahr sein. Sie ist aber ebenfalls falsch! Sie besagt nämlich, daß es überhaupt keine Bücher mit weißem Papier gibt. Die korrekte Negation der ersten Aussage müßte vielmehr lauten „Das Papier nicht aller Bücher ist weiß" oder „Es gibt Bücher, deren Papier nicht weiß ist". – Wie man in dieser Weise Aussagen richtig negiert, wird im Rahmen der Prädikatenlogik zu betrachten sein.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß man die logische Negation nicht mit der dialektischen Negation verwechseln darf. Der Unterschied zwischen beiden zeigt sich besonders deutlich im Falle einer zweifachen Negation. Eine zweimal aussagenlogisch negierte Aussage hat denselben Wahr-

heitswert wie die entsprechende nicht negierte und darf ohne weiteres durch sie ersetzt werden. Demgegenüber führt eine zweifache dialektische Negation, eine Negation der Negation als eine Form der Entwicklung, dazu, daß die ursprüngliche Qualität sich zwar gewissermaßen wiederholt, aber auf einer höheren Ebene[6].

2.1.5. Die aussagenlogische Konjunktion

Negierte und nicht negierte Aussagen von der Art der bisher betrachteten widerspiegeln Sachverhalte der Natur, der Gesellschaft oder des Denkens, wie sie für sich bestehen. Die Wirklichkeit ist aber ein Gefüge, ein System von Sachverhalten, d. h., diese Sachverhalte existieren nicht isoliert voneinander, sondern sie stehen in den verschiedenartigsten Beziehungen zueinander. Wenn nun ein Sachverhalt zu einem anderen in einer bestimmten Beziehung steht, so findet das seine Widerspiegelung im menschlichen Bewußtsein in Gestalt von Aussagenverbindungen. Die Existenzform dieser Aussagenverbindungen wiederum sind zusammengesetzte Aussagesätze.

Im folgenden werden wir uns mit einigen wichtigen Aussagenverbindungen und ihrer Existenzform beschäftigen. Innerhalb der Aussagenlogik wird, wie gesagt, von allen Eigenschaften der Aussagen neben der Tatsache, daß sie Widerspiegelungen von irgendwelchen Sachverhalten sind und in sprachlicher Form existieren, nur ihr Wahrheitswert berücksichtigt. Dementsprechend wird uns hier vor allem die Frage interessieren, welcher Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer Aussagenverbindung und den Wahrheitswerten derjenigen Aussagen besteht, aus denen sie aufgebaut ist.

Die erste dieser Aussagenverbindungen wird „*Konjunktion*" genannt. Will man sagen, daß zwei bestimmte Sachverhalte zusammen existieren, ohne die Art dieses Zusammenbestehens näher zu bestimmen, so tut man das mit Hilfe von Satzverbindungen wie „p und q", „Sowohl p als auch q", „p aber (auch) q" usw. Oft wird auch auf solche Bindewörter verzichtet, und die Aussagesätze werden unverbunden nebeneinandergestellt.

[6] Vgl. Philosophisches Wörterbuch, Stichworte „Negation" und „Negation der Negation".

Eine Aussagenverbindung, die das Zusammenbestehen zweier Sachverhalte aussagt, ist doch offenbar wahr, wenn die den beiden verbundenen Aussagen entsprechenden Sachverhalte tatsächlich existieren. Existiert einer der beiden Sachverhalte nicht, so bestehen sie nicht zusammen; damit ist aber auch die Aussagenverbindung, die ihr Zusammenbestehen aussagt, falsch.

Wir verknüpfen z. B. die beiden Aussagen „Der Sozialismus wird auf der ganzen Welt siegen" und „Der Kapitalismus wird aufhören zu existieren" zu der Konjunktion „Der Sozialismus wird auf der ganzen Welt siegen *und* der Kapitalismus wird aufhören zu existieren". Diese Konjunktion ist wahr, denn die beiden verknüpften Aussagen sind, für sich genommen, ebenfalls wahr. Die Konjunktion wäre dagegen falsch, wenn auch nur eine der beiden wissenschaftlichen Voraussagen des Marxismus-Leninismus nicht zutreffend sein würde.

Eine Aussagenverbindung dieser Art wird symbolisiert durch „$p \wedge q$"; man liest diesen Ausdruck wie „p und q". Wir können nun den Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer Konjunktion $p \wedge q$ und den Wahrheitswerten von p, q wieder in einer Wahrheitsmatrix darstellen. Sie wird umfangreicher als die der Negation, denn es sind diesmal vier verschiedene Möglichkeiten zu berücksichtigen, d. h. vier verschiedene Belegungen der in $p \wedge q$ auftretenden Aussagenvariablen:

1. p und q sind beide wahr;
2. p ist wahr, q falsch;
3. p ist falsch, q wahr;
4. p und q sind beide falsch.

Die *Wahrheitsmatrix der Konjunktion* hat demgemäß folgende Gestalt:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Aus der Wahrheitsmatrix der Konjunktion ergibt sich auch ihre Definition:

Die *Konjunktion* $p \wedge q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann wahr ist, wenn sowohl p als auch q wahr ist.

Die Redewendung „dann und nur dann, wenn" in der Definition ist gleichbedeutend mit „genau dann, wenn". Diese beiden Wendungen werden noch mehrfach auftreten. Sie besagen, daß das Gemeinte – hier die Wahrheit von $p \wedge q$ – unter den genannten Bedingungen tatsächlich der Fall ist, daß es aber unter anderen Bedingungen nicht der Fall ist. Dadurch konnten wir es uns ersparen, in der Definition noch ausdrücklich zu sagen, daß $p \wedge q$ nicht wahr, d. h. falsch ist, wenn auch nur eine der beiden Aussagen p, q falsch ist.

Oft werden nicht nur zwei, sondern drei oder mehr Aussagen konjunktiv verbunden. Wie stellt man den Wahrheitswert einer solchen Aussagenverbindung fest? Der Konjunktionskonnektor ist ein zweistelliger Konnektor, d. h., er verbindet immer zwei Aussagen miteinander. Um drei Aussagen p, q, r konjunktiv miteinander zu verknüpfen, müssen wir – ähnlich wie in der Mathematik – von Klammern Gebrauch machen und erhalten dann

$$(p \wedge q) \wedge r \quad \text{oder} \quad p \wedge (q \wedge r).$$

Zunächst müssen wir nun feststellen, welchen Wert die in einer Klammer stehende Konjunktion hat. Aus diesem Wahrheitswert und dem der dritten Aussagenvariablen ergibt sich dann der Wert der ganzen Verbindung. Die Untersuchung wird am besten mit Hilfe einer Wahrheitsmatrix geführt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß jede der drei in den Verbindungen auftretenden Aussagenvariablen wahr oder falsch sein kann. Daraus ergeben sich aber acht verschiedene Belegungen der Aussagenvariablen:

1. alle drei haben den Wert wahr (1 Belegung),
2. eine hat den Wert wahr, die jeweils anderen beiden den Wert falsch (3 Belegungen),
3. zwei haben den Wert wahr, die jeweils dritte den Wert falsch (3 Belegungen),
4. alle drei haben den Wert falsch (1 Belegung).

Daraus ergeben sich die Wahrheitswerte in den ersten drei Spalten. Die Werte in den übrigen Spalten erhält man ausgehend von der Definition der Konjunktion. Falls die beiden in der Kopfzeile stehenden Aussagen wahr sind, schreibt man in die entsprechende Zeile ein „w", andernfalls ein „f".

Aus dieser Wahrheitsmatrix kann man ablesen, daß eine aus drei Aussagen bestehende Konjunktion genau dann wahr ist.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f
f	w	w	f	f	w	f
f	w	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

wenn alle drei verbundenen Aussagen wahr sind. Dabei spielt es offenbar keine Rolle, an welcher Stelle die Klammern stehen. Deshalb kann man vereinbaren, in Konjunktionen von mehr als zwei Aussagen die Klammern wegzulassen.

Die bisherigen Beispiele für Wahrheitsmatrizen genügen zum Verständnis einer genaueren Bestimmung dessen, was eine Wahrheitsmatrix ist. Die *Wahrheitsmatrix* eines Ausdrucks ist eine Tabelle, die sämtliche möglichen Belegungen der in dem Ausdruck vorkommenden Variablen enthält und die Wahrheitswerte, die der Ausdruck selbst in Abhängigkeit von diesen einzelnen Belegungen annimmt. Die Reihenfolge der Wahrheitswerte für einen Ausdruck in einer Matrix ist der *Werteverlauf* dieses Ausdrucks. Voraussetzung dafür, daß ein und derselbe Ausdruck in verschiedenen Wahrheitsmatrizen denselben Werteverlauf behält, ist natürlich eine einheitliche Reihenfolge der Belegungen.

Um den Werteverlauf eines komplizierteren Ausdrucks festzustellen, muß man wie in dem letzten Beispiel zunächst den Werteverlauf seiner Bestandteile ermitteln. Der Werteverlauf beispielsweise des Ausdrucks $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim r \wedge s)$ hängt ab vom Werteverlauf von $(p \wedge \sim q)$ und dem von $(\sim r \wedge s)$. Der Werteverlauf von $(p \wedge \sim q)$ wiederum hängt ab von dem von p und dem von $\sim q$.

Die bisher eingeführte Symbolik genügt schon zur Darstellung eines wichtigen aussagenlogischen Gesetzes; wir meinen den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* oder *vom verbotenen Widerspruch:*

$$\sim (p \wedge \sim p).$$

Er besagt, daß eine Aussage nicht zusammen mit ihrem Negat wahr ist. – Stellen wir seine Wahrheitsmatrix auf:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
w	f	f	w
f	w	f	w

Die beiden ersten Spalten der Wahrheitsmatrix sind aus dem Abschnitt über die Negation bereits bekannt. Die dritte Spalte ergibt sich aus der Definition der Konjunktion; wenn nämlich von zwei konjunktiv verknüpften Aussagen eine falsch ist, dann ist ja die ganze Aussagenverbindung falsch. Was über die Negation einer Aussage gesagt wurde, gilt auch für jede Aussagenverbindung, wenn diese insgesamt negiert ist, wie das im Kopf der vierten Spalte der Fall ist.

Weil es, wie Aristoteles sagt, unmöglich ist, „daß demselben dasselbe zugleich und in derselben Hinsicht zukomme und nicht zukomme"[7], deshalb können also auch zwei einander logisch widersprechende Aussagen nicht zusammen wahr sein.

Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch dient als *sekundäres Wahrheitskriterium*; man kann nämlich von Aussagenverbindungen, in denen eine Aussage und ihr Negat konjunktiv verknüpft sind, auf Grund dieses Satzes sofort sagen, daß sie falsch sind, ohne sie an der Praxis direkt überprüft zu haben. Solche Widersprüche sind häufig nicht leicht erkennbar, weil die Aussage p meist in einer anderen sprachlichen Formulierung auftritt als ihr Negat $\sim p$. Man muß also, um solche logischen Widersprüche nachweisen zu können, gewisse Umformungsregeln beherrschen, wie wir sie in der Prädikatenlogik kennenlernen werden, und man muß außerdem über genaue Kenntnisse auf dem betreffenden Sachgebiet verfügen. Auch hier ist die Praxis das *primäre Wahrheitskriterium*, denn der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch wurde ja selbst erst aus der objektiven Realität gewonnen, und er hat sich in der Praxis der Menschheit milliardenfach als wahr erwiesen.

Man darf – analog zur Negation – auch den logischen Widerspruch, der zwischen einer Aussage p und ihrem Negat $\sim p$ besteht, nicht mit dem dialektischen Widerspruch verwechseln! Während der logische Widerspruch in der objektiven Realität gar nicht existiert, besitzt der dialektische dort als Triebkraft der Entwicklung eine entscheidende Funktion. Während sich die beiden Seiten eines dialektischen Wider-

[7] Aristoteles, Metaphysik, III. Buch, 1005b, 19f.

spruchs gegenseitig bedingen, schließen sich die beiden Seiten des logischen Widerspruchs gegenseitig aus[8].

In der dritten Spalte der Wahrheitsmatrix für den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch steht nur der Wert *falsch*, in der vierten nur der Wert *wahr*. Das heißt: Eine Aussagenverbindung der Form $p \wedge \sim p$ ist falsch, unabhängig davon, ob p eine wahre oder eine falsche Aussage bedeutet; eine Aussagenverbindung der Form $\sim (p \wedge \sim p)$ ist wahr, unabhängig davon, ob p eine wahre oder eine falsche Aussage bedeutet. Ein Ausdruck der ersten Art ist eine *Kontradiktion*, ein Ausdruck der zweiten Art ein *Gesetz*. – Eine exakte Definition dieser und weiterer Arten von aussagenlogischen Ausdrücken wird in 2.1.8. gegeben.

2.1.6. Alternative, Kontravalenz und Exklusion

Wenn im Einführungskapitel gesagt wurde, daß viele Wörter der natürlichen Sprache mehrdeutig sind, so betrifft das nicht nur Substantive, sondern auch Bindewörter. Zu ihnen gehört das hier zu betrachtende Wort „oder". Die formale Logik ist, wie sich zeigen wird, ganz besonders dazu geeignet, derartige Mehrdeutigkeiten aufzudecken und Mittel zu liefern, mit deren Hilfe sie vermieden werden können.

Aussagenverbindungen, die mit Hilfe des Bindeworts „oder" formuliert werden, widerspiegeln die Existenz verschiedener Möglichkeiten. Die Aussagenverbindung „Wir erhöhen die Arbeitsproduktivität in unserem Betrieb durch bessere Arbeitsdisziplin, *oder* wir erhöhen sie durch bessere Arbeitsorganisation" widerspiegelt verschiedene Möglichkeiten, in der gleichen Zeit mehr als bisher zu produzieren. Diese Aussagenverbindung ist wahr, wenn einer der beiden möglichen Sachverhalte Wirklichkeit ist. Sie ist aber auch dann wahr, wenn die Produktivität durch bessere Arbeitsdisziplin *und* durch bessere Arbeitsorganisation erhöht wird, d. h., wenn *beide* möglichen Sachverhalte Wirklichkeit sind. Falsch ist sie hingegen, wenn keiner der beiden Sachverhalte Wirklichkeit ist.

Aussagenverbindungen, die mit Hilfe von „oder" formuliert sind, können also besagen, daß von verschiedenen möglichen Sachverhalten *wenigstens einer* Wirklichkeit ist. Sie tragen

[8] Vgl. Philosophisches Wörterbuch, Stichwort „Widerspruch".

den Namen „*Alternative*". Die aus den Aussagen p und q bestehende Alternative wird in symbolisierter Form „$p \vee q$" geschrieben und „*p oder q*" gelesen. In der wissenschaftlichen Literatur findet man dafür manchmal schon die Formulierung „*p oder/und q*" oder „*p oder (auch) q*". Damit soll angedeutet werden, daß diese Aussagenverbindung auch dann wahr ist, wenn die beiden verbundenen Aussagen zusammen wahr sind.

Ausgehend von unserem Beispiel stellen wir Wahrheitsmatrix und Definition der Alternative auf:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die *Alternative* $p \vee q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen p, q wahr ist.

Diese Definition der Alternative ist nicht die einzig mögliche. Man kann die Alternative auch folgendermaßen definieren:

Die *Alternative* $p \vee q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann falsch ist, wenn sowohl p als auch q falsch sind.

Es ist überhaupt eine nützliche Übung zur Präzisierung der Ausdrucksweise, wenn man, wie hier gezeigt, auch für die Definitionen der übrigen Aussagenverbindungen andere Formulierungen zu finden versucht.

Will man sagen, daß von verschiedenen Möglichkeiten *mindestens eine* Wirklichkeit ist, so formuliert man eine Alternative. Mitunter will man aber sagen, daß von zwei verschiedenen Möglichkeiten *genau eine* Wirklichkeit ist und daß die Verwirklichung der einen die der anderen ausschließt. Häufig gebraucht man in diesem Fall die Formulierung „*Entweder p oder q*".

Ein Beispiel hierfür ist die Aussagenverbindung „*Entweder* die Staaten mit verschiedener Gesellschaftsordnung bestehen in friedlicher Koexistenz miteinander, *oder* sie führen Krieg gegeneinander". Eine solche Aussagenverbindung heißt „*Kontravalenz*" oder „*Antivalenz*" – man könnte diese Bezeichnungen etwa mit „Gegenwertigkeit" übersetzen. Damit ist bereits angedeutet, daß eine Kontravalenz wahr ist, wenn die

beiden Aussagen, aus denen sie besteht, entgegengesetzte Wahrheitswerte haben, d. h., wenn die eine wahr und die andere falsch ist. Die Aussage, daß von zwei bestimmten Sachverhalten *einer und nur einer* Wirklichkeit ist, ist natürlich falsch, falls *beide* Wirklichkeit sind und falls *keiner* von ihnen Wirklichkeit ist. – Führen wir als symbolische Schreibweise für eine aus den Aussagen p und q aufgebaute Kontravalenz „$p \rangle\!-\!\langle q$" ein – gelesen wie „*Entweder p oder q*" –, so können wir die Wahrheitsmatrix aufstellen:

p	q	$p \rangle\!-\!\langle q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Dementsprechend definieren wir:

Die Kontravalenz $p \rangle\!-\!\langle q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann wahr ist, wenn die Aussagen p, q verschiedene Wahrheitswerte haben.

Die Kontravalenz, die wir als Beispiel angeführt haben, ist dazu geeignet, jemandem, der aus irgendeinem Grunde die friedliche Koexistenz ablehnt, klarzumachen, daß er dann nur für den Krieg mit all seinen furchtbaren Folgen eintreten kann. Man will also den Wert, den Nutzen einer Sache verdeutlichen, indem man sagt, welche Konsequenzen das Nichtbestehen dieser Sache hätte. – Eine Kontravalenz ist aber auch dann angebracht, wenn man weiß, daß von zwei einander ausschließenden Sachverhalten genau einer besteht, ohne zu wissen, welcher von beiden das ist.

Das „oder" in einer Kontravalenz nennt man auch „*ausschließendes oder*", das „oder" in einer Alternative „*einschließendes oder*". Damit soll angedeutet werden, daß in einer Alternative die Wahrheit der einen verbundenen Aussage die der anderen nicht ausschließt, während die Wahrheit einer Aussage in einer Kontravalenz die der anderen ausschließt. Diese Unterscheidung genügt jedoch eigentlich noch nicht, da das Bindewort „oder" in der natürlichen Sprache – obwohl verhältnismäßig selten – sogar in einer dritten, wiederum ausschließenden Bedeutung gebraucht wird.

Wir wenden uns z. B. gegen die unpräzise Formulierung, daß emand Arbeiter- *und* Bauernkind ist, mit der Aussagen-

verbindung „Er ist Arbeiterkind *oder* er ist Bauernkind". Damit wollen wir sagen, daß er auf keinen Fall beides ist, sondern nur *höchstens* eins von beiden sein kann. Durch das Wort „höchstens" drücken wir aus, daß er sogar möglicherweise beides nicht ist. Im Gegensatz zu einer Kontravalenz ist also unsere Aussagenverbindung auch in diesem Falle wahr.

Eine solche Aussagenverbindung nennt man „*Exklusion*". Die aus den Aussagen p, q bestehende Exklusion wird symbolisiert durch „$p|q$" und gelesen wie „p ist unverträglich mit q" oder „p und q schließen sich gegenseitig aus". Die Wahrheitsmatrix von $p|q$ hat folgende Gestalt:

p	q	$p\|q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Und die Definition lautet:

Die *Exklusion* $p \mid q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen p, q falsch ist.

Das Bindewort „oder" dient in der natürlichen Sprache wie auch in vielen Wissenschaftssprachen zur Formulierung von Alternativen, von Kontravalenzen und von Exklusionen. Eine Unterscheidung zwischen diesen drei Arten von Aussagenverbindungen ist aber notwendig, denn es ist ein wesentlicher Unterschied, ob von zwei verschiedenen Möglichkeiten *mindestens* eine, *genau* eine oder *höchstens* eine Wirklichkeit ist.

Wie kann man nun einwandfrei unterscheiden? – In der formalen Logik braucht man sich nur über ein geeignetes Symbol und einen Namen zu einigen. Das ist natürlich keine Lösung für die Wissenschaftssprachen, die nicht symbolisiert sind, und erst recht keine für die natürliche Sprache. Versuche, wenigstens das „oder" im Sinne des Alternativkonnektors von den anderen abzugrenzen, wurden schon genannt. Man kann aber nicht mit präzisen Formulierungen so lange warten, bis sich irgendwelche neuen Bindewörter durchgesetzt haben, die eindeutig sind.

Die Mittel und Erkenntnisse der formalen Logik können in diesem Zusammenhang wie in vielen anderen dazu dienen,

verschiedene Bedeutungen eines Wortes zu unterscheiden, ohne daß neue Wörter oder Redewendungen erfunden werden müssen. Innerhalb der formalen Logik macht man nämlich im allgemeinen nur von dem Alternativkonnektor Gebrauch und reduziert den Kontravalenz- und den Exklusionskonnektor mit Hilfe weiterer Konnektoren auf diesen.

Die Kontravalenz $p \rangle\!-\!\langle q$ kann mit Hilfe der Konstanten für Alternative, Konjunktion und Negation folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q).$$

Man könnte diesen Ausdruck übersetzen mit „p oder q, und nicht (p und q)" – die Klammer soll verdeutlichen, daß die Negation sich auf die Konjunktion bezieht, nicht aber auf p allein –; eine etwas freiere Übersetzung würde lauten „p oder q, aber nicht beide". Daß $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ dasselbe bedeutet wie $p \rangle\!-\!\langle q$, leuchtet vom Inhalt her sofort ein, der Beweis dafür kann aber erst durch eine Wahrheitsmatrix erbracht werden:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$	$p \rangle\!-\!\langle q$
w	w	w	w	f	f	f
w	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	f	f

Es zeigt sich, daß die Wahrheitswerte von $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ und $p \rangle\!-\!\langle q$ übereinstimmen, wenn die Wahrheitswerte von p in beiden Ausdrücken und die Wahrheitswerte von q in beiden Ausdrücken übereinstimmen. Solche Ausdrücke nennt man „*werteverlaufsgleich*" oder auch „*semantisch äquivalent*". Sie dürfen in logischen Zusammenhängen – z. B. in Schlüssen – gegeneinander ausgetauscht werden, da solche Operationen am Wahrheitswert des Zusammenhanges nichts ändern.

Auch $p \rangle\!-\!\langle q$ und $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ sind werteverlaufsgleich. Diese Behauptung leuchtet ein, wenn man den zweiten Ausdruck übersetzt mit „p und nicht q, oder nicht p und q"; etwas freier übersetzt: „p und nicht q, oder nicht p, sondern q". Der Beweis ist wiederum erst mit Hilfe einer Wahrheitsmatrix zu erbringen.

Die Exklusion $p|q$ ist mit der Alternative $\sim p \vee \sim q$ werteverlaufsgleich. Das wollen wir wiederum mittels einer Wahrheitsmatrix beweisen:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \mid q$
w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Kenntnis der Unterschiede zwischen den drei Bedeutungen von „oder" ist sehr wichtig für das logische Schließen, sie gibt jedoch außerdem gewissermaßen eine Anleitung zum Gewinnen von Erkenntnissen, denn wenn man die drei Bedeutungen von „oder" kennt, wird man sich mit der mehrdeutigen Formulierung „p oder q" nicht einfach zufriedengeben. Man wird dann genau nach dem Zusammenhang zwischen den p und q entsprechenden Möglichkeiten fragen, ob die Verwirklichung der einen die der anderen ausschließt oder nicht, ob sich eine von beiden unbedingt verwirklichen muß oder ob es sein kann, daß sich keine von ihnen verwirklicht. Dergestalt wird man zu einer exakten Formulierung gelangen können.

Abschließend betrachten wir noch ein weiteres wichtiges Gesetz:

$$p \vee \sim p.$$

Das ist in aussagenlogischer Symbolik der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, der ebenfalls schon von Aristoteles aufgestellt wurde und der besagt, daß es zwischen einer Aussage und ihrem Negat nichts Drittes gibt.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
w	f	w
f	w	w

Das bedeutet, daß von zwei einander widersprechenden Aussagen nicht beide falsch sein können. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist ebenfalls aus der objektiven Realität abstrahiert; er widerspiegelt die Tatsache, daß ein bestimmter Sachverhalt existiert oder der von ihm verschiedene. Allerdings gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nur für *absolut* wahre bzw. falsche Aussagen oder dann, wenn die betreffenden Aussagen zumindest im gegebenen Zusammenhang als absolut wahr bzw. absolut falsch angesehen werden können. Da jedoch *relativ* wahre Aussagen zugleich relativ falsch sind und da für deren Negate das gleiche gilt, ist der

Satz vom ausgeschlossenen Dritten auf diese nicht anwendbar. Außer ihnen gibt es etwas Drittes, nämlich die absolut wahre und die absolut falsche Aussage über den betrachteten Sachverhalt.

2.1.7. Implikation, Replikation und Äquivalenz

Zu den mehrdeutigen Bindewörtern der natürlichen Sprache gehört neben dem „oder" auch das „wenn". Es zählt in der Grammatik zu den konditionalen, d. h. bedingenden Bindewörtern. Mit seiner Hilfe wird oft zum Ausdruck gebracht, daß ein bestimmter Sachverhalt Bedingung eines anderen ist. Nun gibt es aber drei Arten von Bedingungen: 1. hinreichende Bedingungen, 2. notwendige Bedingungen sowie 3. hinreichende und notwendige Bedingungen. Zwischen ihnen genau zu unterscheiden ist für die Wissenschaft nicht zuletzt im Hinblick auf ihre Praxis sehr wichtig. Andererseits ist Satzgefügen, die mit Hilfe von „wenn" gebildet sind, oft nicht eindeutig zu entnehmen, welche Art von Bedingung hier gemeint ist. Noch komplizierter wird das Problem dadurch, daß mit „wenn" keineswegs immer Bedingungszusammenhänge wiedergegeben werden. – Betrachten wir jetzt drei ihrer logischen Struktur nach verschiedene Arten von Aussagenverbindungen, die alle mit Hilfe von „wenn" formuliert werden.

Die erste Art einer solchen Aussagenverbindung trägt den Namen „*Implikation*". Die symbolische Schreibweise für die aus p, q bestehende Implikation ist „$p \rightarrow q$"; in der Fachsprache der formalen Logik sagt man dafür „*p impliziert q*", „*Immer wenn p, so q*" oder auch einfach „*Wenn p, so q*". – Was in einer Implikation links vom Pfeil steht, nennt man „Vorderglied", was rechts vom Pfeil steht, „Hinterglied" der Implikation. Vorderglied der Implikation $p \rightarrow q$ ist p, Hinterglied q.

Eine Implikation $p \rightarrow q$ sagt einen bestimmten Zusammenhang zwischen zwei Sachverhalten aus, und zwar: Wenn der p entsprechende Sachverhalt besteht, besteht auch der q entsprechende Sachverhalt. Damit ist nichts darüber gesagt, ob überhaupt einer der beiden Sachverhalte besteht. Im Widerspruch zu einer Aussagenverbindung $p \rightarrow q$ steht nur der Fall, wenn zwar der p entsprechende Sachverhalt besteht, der q entsprechende hingegen nicht. In diesem und nur in diesem Fall ist $p \rightarrow q$ falsch. – Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgende Wahrheitsmatrix:

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Definition lautet:

Die *Implikation* $p \rightarrow q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann falsch ist, wenn ihr Vorderglied p wahr und ihr Hinterglied q falsch ist.

Aus Wahrheitsmatrix und Definition der Implikation geht hervor, daß eine Vertauschung ihrer Glieder zu einer Veränderung des Wahrheitswertes der Aussagenverbindung führen kann. Diese Gefahr besteht bei Konjunktionen, Alternativen, Kontravalenzen und Exklusionen nicht. Für sie kann man – analog wie für Addition und Multiplikation – kommutative Gesetze aufstellen, für die Implikation – analog wie für Subtraktion und Division – dagegen nicht.

Ein Beispiel mag zum besseren Verständnis der Implikation und ihres Werteverlaufs beitragen. – Ein Prüfer stellt vor dem Examen die Aussagenverbindung auf: „*Wenn* der Prüfling sich gewissenhaft vorbereitet hat, *so* besteht er das Examen." – Falls der Prüfling gut vorbereitet ist und das Examen besteht, ist die Aussagenverbindung wahr. – Besteht der Prüfling das Examen nicht, obwohl er gut vorbereitet ist, so ist die Aussagenverbindung offenbar falsch. Im Gegensatz zu der Überlegung des Prüfenden genügt dann nämlich eine gewissenhafte Vorbereitung *nicht* für das Bestehen der Prüfung. Anders ausgedrückt: Der Prüfer hat in diesem Falle irgendwelche anderen Bedingungen für das Bestehen der Prüfung nicht berücksichtigt. – Besteht der Prüfling sein Examen, ohne sich gründlich vorbereitet zu haben, ist diese Aussagenverbindung wieder wahr. Hätte der Prüfling sich besser vorbereitet, wäre seine Note vielleicht besser ausgefallen, aber es hätte nicht dazu kommen können, daß er durchgefallen wäre. – Hat der Prüfling sich nicht gewissenhaft vorbereitet und besteht er die Prüfung nicht, so ist die Aussagenverbindung ebenfalls wahr. Er hätte sie ja bestehen können, wenn er sich nur ordentlich vorbereitet hätte.

Das Vorderglied unserer Aussagenverbindung (p) widerspiegelt einen Sachverhalt, dessen Vorhandensein eine *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein desjenigen Sach-

verhalts ist, der durch das Hinterglied (q) widergespiegelt wird. Immer wenn der p entsprechende Sachverhalt eintritt, tritt auch der q entsprechende Sachverhalt ein. Mit anderen Worten: Es kann nicht sein, daß der p entsprechende Sachverhalt eintritt und der q entsprechende Sachverhalt nicht eintritt – alle anderen Fälle sind möglich.

Das zuletzt Gesagte deutet darauf hin, daß $p \rightarrow q$ dasselbe besagt wie $\sim (p \wedge \sim q)$, daß also beide Ausdrücke werteverlaufsgleich sind – was sich tatsächlich durch eine Wahrheitsmatrix beweisen läßt:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$p \rightarrow q$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	w	w
f	f	w	f	w	w

Unser Beispiel für eine Implikation widerspiegelte die Beziehung zwischen einer *hinreichenden Bedingung* und dem von ihr *Bedingten*. Lassen wir uns dadurch nicht zu der Ansicht verleiten, eine Implikation sei immer Widerspiegelung einer solchen Beziehung!

Die Aussagenverbindung „*Wenn* es regnet, *so* ist die Straße naß" zum Beispiel widerspiegelt eine Kausalbeziehung, d. h. eine Beziehung zwischen *Ursache* und *Wirkung*. Ihrer logischen Struktur nach ist sie jedoch eine Implikation wie die erste. Auch der freundschaftliche Vorwurf „Immer *wenn* ich dich besuchen will, bist du nicht zu Hause" hat die Struktur einer Implikation, obwohl die erste Aussage dieser Verbindung keine Bedingung, geschweige denn eine Ursache für den der zweiten Aussage entsprechenden Sachverhalt widerspiegelt. Wir wollen in diesem Zusammenhang noch einmal daran erinnern, daß es die formale Logik mit den allgemeinen Strukturen des richtigen Denkens zu tun hat. Dementsprechend werden in der formalen Logik Aussagenverbindungen auch nur dann unterschieden, wenn sie ihrer logischen Struktur nach verschieden sind, was bei unseren drei Beispielen nicht der Fall ist. Wir wollen ferner nochmals daran erinnern, daß wir im Bereich der Aussagenlogik, mit dem wir uns jetzt beschäftigen, von allen Eigenschaften der Aussagen nur ihren Wahrheitswert berücksichtigen und daß wir die Beziehungen zwischen Aussagen und den aus ihnen aufgebauten Aussagenverbindungen nur im

Hinblick auf die Beziehungen zwischen ihren Wahrheitswerten untersuchen. Die Bedeutung, in der Bindewörter in der Aussagenlogik verwendet werden, wird demgemäß durch Wahrheitsmatrizen festgelegt. Dadurch ergeben sich selbstverständlich unter Umständen gewisse Abweichungen vom Gebrauch dieser Wörter in der natürlichen Sprache, besonders wenn sie in der natürlichen Sprache mehrdeutig gebraucht werden.

Innerhalb der formalen Logik ist die Implikation, wie sie hier definiert wurde, für das logische Schließen von besonderer Bedeutung. In versteckter Form sind auch in den Wahrheitsmatrizen schon zahlreiche Implikationen aufgetreten; jede Wahrheitsmatrix enthält nämlich verschlüsselt eine Anzahl von Aussagenverbindungen wie diese: „*Wenn p* den Wert wahr hat *und q* den Wert wahr hat, *so* hat $p \wedge \sim q$ den Wert falsch." Diese Aussagenverbindungen sind Implikationen der Form $(p \wedge q) \rightarrow r$, deren Vorderglied eine Konjunktion zweier Aussagen ist. – Die in der Mathematik gebrauchten Aussagen der Form „Wenn p, so q", „Wenn p, dann q" und „p ist hinreichende Bedingung für q" haben alle die Struktur einer Implikation.

Eine zweite Art von Aussagenverbindungen, die wie die Implikationen mit Hilfe von „wenn – so" formuliert werden können, trägt den Namen „*Replikation*" oder „*Gegenimplikation*". Eine aus den Aussagen p, q bestehende Replikation wird „p repliziert q" gelesen oder – wie man in der natürlichen Sprache ohne weiteres sagen kann – „*Nur wenn p, so q*". Als symbolische Schreibweise wählen wir „$p \leftarrow q$".

Eine Replikation $p \leftarrow q$ sagt ebenfalls einen bestimmten Zusammenhang zwischen zwei Sachverhalten aus, und zwar: Nur wenn der p entsprechende Sachverhalt besteht, besteht auch der q entsprechende Sachverhalt. Damit ist wiederum nichts darüber gesagt, ob überhaupt einer der beiden Sachverhalte besteht. Zu einer solchen Aussage steht nur der Fall im Gegensatz, daß zwar der q entsprechende Sachverhalt besteht, aber nicht der p entsprechende Sachverhalt. – Hieraus ergibt sich die Wahrheitsmatrix

p	q	$p \leftarrow q$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

und die Definition:

Die *Replikation* $p \leftarrow q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann falsch ist, wenn ihr Vorderglied p falsch und ihr Hinterglied q wahr ist.

Als Beispiel einer Replikation betrachten wir die Aussagenverbindung „Nur wenn der Schalter betätigt worden ist, leuchtet die Lampe auf." – Wurde der Schalter betätigt und leuchtet die Lampe auf, so ist die Aussagenverbindung wahr. – Wurde der Schalter betätigt, ohne daß die Lampe aufleuchtet, so ist die Aussagenverbindung ebenfalls wahr. Es wurde ja nicht gesagt, daß die Lampe unter der genannten Bedingung tatsächlich aufleuchtet. Sie als falsch anzusehen, besteht also kein Grund. – Dagegen ist sie falsch, falls die Lampe aufleuchtet, ohne daß jemand den Schalter betätigt hat. – Wird der Schalter nicht betätigt und flammt die Lampe auch nicht auf, so besteht wiederum kein Gegensatz zur Aussage; sie ist also auch in diesem Falle wahr.

In diesem Beispiel geht es um den Zusammenhang zwischen einer notwendigen Bedingung und dem von ihr Bedingten. Eine *notwendige Bedingung* zeichnet sich dadurch aus, daß ihr Fehlen das Eintreten des von ihr Bedingten unmöglich macht, das heißt, die Lampe kann nicht aufleuchten, wenn nicht der Schalter vorher betätigt wurde. Aber das Vorhandensein allein der notwendigen Bedingung genügt nicht, um das von ihr Bedingte eintreten zu lassen. Damit die Lampe nach dem Betätigen des Schalters auch tatsächlich aufflammt, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein: Die Lampe muß an eine Stromquelle angeschlossen sein, die Zuleitung darf nicht unterbrochen sein usw.

Auch hier muß – wie im Falle der Implikation – an den Abstraktionsprozeß der formalen Logik erinnert werden. Der Zusammenhang zwischen notwendiger Bedingung und Bedingtem kann immer in Form einer Replikation widergespiegelt werden; aber nicht jede Replikation widerspiegelt einen solchen Zusammenhang. – Die in der Mathematik gebrauchten Aussagen der Gestalt „Nur wenn p, so q" und „p ist notwendige Bedingung von q" haben alle die Struktur einer Replikation.

Die dritte Art der hier zu betrachtenden Aussagenverbindungen trägt den Namen „*Äquivalenz*". Die aus den Aussagen p, q aufgebaute Äquivalenz wird symbolisch geschrieben „$p \leftrightarrow q$" und gelesen wie „*p genau dann, wenn q*" oder „*p dann und nur dann, wenn q*".

Eine Äquivalenz widerspiegelt ganz allgemein die Tatsache, daß zwei bestimmte Sachverhalte zusammen bestehen oder zusammen nicht bestehen, d. h. beide nicht bestehen. Ähnlich wie bei der Konjunktion wird hier nichts über die Art und Weise des Zusammenbestehens gesagt. – Die hier gebrauchte Formulierung „zusammen nicht bestehen" darf nicht mit der Formulierung „nicht zusammen bestehen" verwechselt werden! Die erste ließe sich symbolisch durch $\sim p \wedge \sim q$ darstellen, die zweite durch $\sim (p \wedge q)$; den Unterschied zwischen beiden kann man sich mittels einer Wahrheitsmatrix klarmachen.

Geben wir nun Wahrheitsmatrix und Definition der Äquivalenz an:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die *Äquivalenz* $p \leftrightarrow q$ ist eine Aussagenverbindung, die dann und nur dann wahr ist, wenn die Aussagen p, q beide denselben Wahrheitswert haben.

Zur Verdeutlichung wandeln wir ein Beispiel, das wir schon einmal gebraucht haben, etwas ab. Wir nehmen an, der Prüfende sagt: „Der Prüfling besteht das Examen dann und nur dann, wenn er sich gewissenhaft vorbereitet hat." Diese Aussagenverbindung ist wahr, wenn beides zutrifft oder wenn beides nicht zutrifft. Besteht der Prüfling jedoch das Examen, ohne sich gründlich vorbereitet zu haben, so ist die Aussagenverbindung falsch. Sie ist auch dann falsch, wenn der Prüfling sich zwar gut vorbereitet hat, aber trotzdem durchs Examen fällt.

Der Prüfer hätte das, was er meint, auch folgendermaßen formulieren können: „(Der Prüfling besteht das Examen, *und* er hat sich gewissenhaft vorbereitet) *oder* (es ist nicht wahr, daß er das Examen besteht, *und* es ist nicht wahr, daß er sich gewissenhaft vorbereitet hat)". – Um die logische Struktur dieser Aussagenverbindung zu verdeutlichen, haben wir hier einmal entgegen allen Gepflogenheiten in einem umgangssprachlichen Text Klammern gesetzt. – Daß die beiden Aussagenverbindungen des Prüfers wirklich dasselbe besagen, läßt sich mittels einer Wahrheitsmatrix beweisen!

Haben wir bisher Implikation, Replikation und Äquivalenz gesondert betrachtet, so wollen wir uns nun mit ihrem Zusammenhang beschäftigen. – Wenden wir uns zunächst nur der Implikation und der Replikation zu und untersuchen wir, was herauskommt, wenn wir in beiden Fällen einfach Vorderglied und Hinterglied vertauschen:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftarrow q$	$q \leftarrow p$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w

Wir können festhalten:

$p \rightarrow q$ und $q \leftarrow p$ sind werteverlaufsgleich.
$p \leftarrow q$ und $q \rightarrow p$ sind werteverlaufsgleich.

Man kann also eine Implikation in eine ihr werteverlaufsgleiche Replikation oder umgekehrt verwandeln, indem man ihre Glieder vertauscht und den Pfeil in die entgegengesetzte Richtung dreht.

Das ist wieder ein Beispiel dafür, wie man unter Ausnutzung von Gesetzen und Regeln der formalen Logik gedankliche Operationen durch Operationen mit Zeichen ersetzen kann. Dieses Verfahren läßt sich auch auf Aussagenverbindungen anwenden, die in der natürlichen Sprache formuliert sind. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß die Formulierungen exakt und eindeutig sind.

Man darf beispielsweise eine Formulierung der Art „Immer wenn p, so q" ohne weiteres durch „Nur wenn q, so p" ersetzen. – In der natürlichen Sprache begegnen uns manchmal auch Replikationen oder Implikationen in verkürzter Form. Das Prinzip der marxistisch-leninistischen Parteien „Ohne revolutionäre Theorie keine revolutionäre Praxis!" ist eine solche Replikation in verkürzter Form. Ausführlich formuliert, würde es etwa lauten: „Nur wenn man die revolutionäre Theorie beherrscht, ist man in der revolutionären Praxis erfolgreich!" Als verkürzte Implikation würde das Prinzip lauten: „Keine revolutionäre Praxis ohne revolutionäre Theorie!"

Wie sich aus den Symbolen für Implikation und Replikation ein Hinweis auf die Art ihres Zusammenhangs ent-

nehmen läßt, so enthält der Doppelpfeil einen Hinweis auf den Zusammenhang der Äquivalenz mit Implikation und Replikation. Man kann sich diesen Doppelpfeil als aus zwei Pfeilen zusammengesetzt vorstellen, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen. In der Tat sind $p \leftrightarrow q$ und $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftarrow q)$ werteverlaufsgleich:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \leftarrow q)$	$p \leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Wir hatten schon gesagt, daß eine Implikation die Beziehung zwischen einer hinreichenden Bedingung und dem von ihr Bedingten, eine Replikation die Beziehung zwischen einer notwendigen Bedingung und dem von ihr Bedingten widerspiegeln kann – in vielen Fällen widerspiegeln sie aber auch ganz andere Beziehungen! Falls nun p eine *hinreichende Bedingung* für den q entsprechenden Sachverhalt widerspiegelt, d. h., wenn $p \rightarrow q$ wahr ist und wenn p zugleich eine *notwendige Bedingung* für den q entsprechenden Sachverhalt widerspiegelt, d. h., wenn $p \leftarrow q$ ebenfalls wahr ist, dann ist der p entsprechende Sachverhalt eine *hinreichende und notwendige Bedingung* für den durch q widergespiegelten Sachverhalt. Das Fließen des Stromes (bestimmter Art und Stärke) durch den Glühdraht einer Glühlampe ist beispielsweise eine hinreichende und notwendige Bedingung für das Leuchten dieser Glühlampe. *Immer wenn* der Strom fließt, dann leuchtet auch die Lampe; insofern ist die Bedingung *hinreichend*. Und *nur wenn* der Strom fließt, leuchtet die Lampe; insofern ist die Bedingung *notwendig*.

Einer Aussage der Form „Wenn p, so q", die in der natürlichen Sprache formuliert ist, kann man oft nicht entnehmen, ob sie ihrer logischen Struktur nach eine Implikation, eine Replikation oder eine Äquivalenz ist. Manchmal läßt sich diese Frage aus dem Zusammenhang entscheiden. Aber selbst wenn das nicht möglich ist, ist der Versuch, es herauszufinden, nützlich. Wie im Falle der drei Bedeutungen des „oder" sollte man sich auch im Falle des „Wenn – so" um eine eindeutige Formulierung seiner Gedanken bemühen.

2.1.8. *Aussagenlogische Gesetze und Regeln*

Von den bisher betrachteten aussagenlogischen Ausdrücken haben wir einige als Gesetze bezeichnet. Sie besitzen im Vergleich zu den anderen Ausdrücken eine besondere Bedeutung für das menschliche Denken. Das gilt sicher auch von den anderen logischen Gesetzen. Mit welchen Mitteln kann man also die aussagenlogischen Gesetze von den übrigen aussagenlogischen Ausdrücken unterscheiden? Und welche anderen Arten aussagenlogischer Ausdrücke gibt es sonst noch?

Es gibt drei grundsätzlich verschiedene Arten von aussagenlogischen Ausdrücken, für die wir als Beispiele folgende nehmen:

$$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q),$$
$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q),$$
$$(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q).$$

Worin sie sich unterscheiden, entnehmen wir ihrer Wahrheitsmatrix:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$	$(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge p)$
w	w	f	f	w	f	w	f	f
w	f	f	w	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w	f	f

Der Ausdruck $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ nimmt bei jeder Belegung der in ihm vorkommenden Aussagenvariablen den Wert *wahr* an. Darin stimmt er z. B. mit dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten, also mit aussagenlogischen *Gesetzen*, überein. – Unter den gleichen Bedingungen nimmt der Ausdruck $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ immer den Wert *falsch* an. Als einen weiteren Ausdruck dieser Art haben wir bereits $p \wedge \sim p$, den logischen Widerspruch, kennengelernt. Das sind Beispiele für *Kontradiktionen*. – Wie $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ sind jedoch die meisten bisher betrachteten Ausdrücke weder bei jeder Belegung wahr noch bei jeder Belegung falsch. Sie noch genauer danach zu unterscheiden, wie oft sie welchen Wahrheitswert annehmen, ist nicht nötig. Gemeinsam ist diesen *Neutralitäten*, daß sie bei mindestens einer Belegung den Wert *wahr* und bei mindestens einer Belegung den Wert *falsch* annehmen.

Es gibt also drei Arten von aussagenlogischen Ausdrücken:

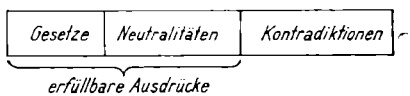
1. ***Aussagenlogische Gesetze*** **oder** ***allgemeingültige Ausdrücke*** **– das sind aussagenlogische Ausdrücke, die bei jeder Belegung der in ihnen vorkommenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten den Wert** ***wahr*** **annehmen.**

2. ***Aussagenlogische Kontradiktionen*** **– das sind aussagenlogische Ausdrücke, die bei jeder Belegung der in ihnen vorkommenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten den Wert** ***falsch*** **annehmen.**

3. ***Aussagenlogische Neutralitäten*** **– das sind aussagenlogische Ausdrücke, die bei mindestens einer Belegung der in ihnen vorkommenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten den Wert** ***wahr*** **und bei mindestens einer solchen Belegung den Wert** ***falsch*** **annehmen.**

Jeder aussagenlogische Ausdruck gehört zu einer und nur einer dieser drei Arten. – Alle aussagenlogischen Ausdrücke, die keine Kontradiktionen sind, sind erfüllbare Ausdrücke. ***Erfüllbare Ausdrücke*** **sind also solche, die bei mindestens einer Belegung der in ihnen vorkommenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten den Wert** ***wahr*** **annehmen.**

Das Verhältnis dieser Arten von Ausdrücken kann man sich durch folgendes Schema veranschaulichen:



Es ist nun zu überlegen, inwiefern die Gesetze allgemein für das Denken von größerer Bedeutung sind als andere Ausdrücke. – Wenn wir von einem bestimmten Ausdruck sagen, daß er bei jeder Belegung den Wert wahr annimmt, so ist das ja nur eine abgekürzte Redeweise dafür, daß jede diesem Ausdruck entsprechende Aussagenverbindung wahr ist, unabhängig davon, welche konkreten Aussagen in ihr verknüpft sind und welchen Wahrheitswert sie haben. Anders gesagt: Jede Aussagenverbindung, deren logische Struktur durch einen allgemeingültigen Ausdruck wiedergegeben wird, ist wahr. Es kommt also nicht darauf an, welche Aussagen verbunden sind, sondern *wie* sie verbunden sind.

Daraus ergibt sich zweierlei:

Erstens kann man aus jedem aussagenlogischen Gesetz wahre Aussagen gewinnen. Man ersetzt dazu die Aussagenvariablen durch konkrete Aussagesätze und die Konstanten durch geeignete Bindewörter. Mehrfach vorkommende Aussagenvariable müssen natürlich jedesmal durch dieselben Sätze oder durch Sätze mit ein und derselben Bedeutung ersetzt werden. Die Bedeutung der so entstandenen Satzverbindung ist dann eine wahre Aussagenverbindung. Aus $p \vee \sim p$ erhält man z. B. die wahre Aussagenverbindung „Es regnet oder es ist nicht wahr, daß es regnet". Der Ausdruck $p \vee \sim p$ ist allgemeingültig; jede Aussagenverbindung dieser Struktur ist also wahr, unabhängig davon, ob der für p eingesetzte Aussagesatz eine wahre oder eine falsche Aussage bedeutet und damit auch unabhängig davon, *welche* wahre oder falsche Aussage er bedeutet.

Zweitens kann man viele Aussagenverbindungen mit ausschließlich logischen Mitteln untersuchen und feststellen, ob sie wahr sind. Man muß zu diesem Zweck die zu untersuchende Aussagenverbindung symbolisieren, d. h. Aussagesätze mit ein und derselben Bedeutung durch gleiche Aussagenvariable, Aussagesätze mit verschiedenen Bedeutungen durch verschiedene Aussagenvariable und die Bindewörter durch die entsprechenden logischen Konstanten ersetzen. Stellt man nun mittels einer Wahrheitsmatrix fest, daß der so entstandene Ausdruck allgemeingültig ist, so weiß man, daß die ursprüngliche Aussagenverbindung wahr ist – und mit ihr jede andere, die dieselbe logische Struktur besitzt.

Ist dagegen der Ausdruck eine Kontradiktion, so sind alle Aussagenverbindungen, deren Struktur er wiedergibt, falsch. Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck ist $p \wedge \sim p$. – Aussagenverbindungen, deren Struktur durch eine Neutralität wiedergegeben wird, können wahr sein, sie können aber auch falsch sein. Das bedeutet, daß sich ihr Wahrheitswert auf diesem Wege nicht ermitteln läßt. Man kann ihn nur dann aus der Wahrheitsmatrix ablesen, wenn man die Wahrheitswerte der Aussagen kennt, aus denen diese Aussagenverbindungen aufgebaut sind. Ist auch diese Möglichkeit nicht gegeben, so kann man versuchen, auf diese Aussagenverbindung aus anderen bereits als wahr bekannten zu schließen. – Diesen Fragen werden wir uns in 2.2.1. zuwenden.

Mit Hilfe von Wahrheitsmatrizen kann man von jedem beliebigen aussagenlogischen Ausdruck feststellen, ob er ein Gesetz, eine Neutralität oder eine Kontradiktion ist. Je mehr verschiedene Aussagenvariable der Ausdruck hat, desto mehr verschiedene Belegungen sind zwar zu prüfen, aber dieses Verfahren führt doch immer nach endlich vielen Schritten zum Ziel. Ein solches Verfahren, mit dem man von jedem beliebigen Ausdruck nach endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob er zu einer bestimmten Art von Ausdrücken gehört, nennt man „*Entscheidungsverfahren*". Das *Entscheidungsproblem* besteht darin, ein solches Verfahren anzugeben; für den Bereich der Aussagenlogik ist es durch die Wahrheitsmatrizen gelöst. Ein weiteres Entscheidungsverfahren für aussagenlogische Ausdrücke besteht darin, daß der zu entscheidende Ausdruck in eine seiner sogenannten Normalformen umgeformt wird, aus der man unmittelbar ablesen kann, ob der Ausdruck allgemeingültig oder nicht allgemeingültig bzw. ob er erfüllbar oder nicht erfüllbar ist. Diese Normalform muß mit dem ursprünglichen Ausdruck werteverlaufsgleich sein und darf von den aussagenlogischen Konstanten nur die Negation, die Konjunktion und die Alternative enthalten, d. h., alle übrigen Konstanten müssen auf diese reduziert werden. Wir wollen dieses Verfahren erst in 2.1.8.* beschreiben, aber hier schon kurz auf die Regeln eingehen, nach denen diese Normalformen gewonnen werden können.

Betrachten wir zunächst die Umformung von Implikationen in Alternativen. Die Implikation $p \rightarrow q$ darf in die Alternative $\sim p \vee q$ umgeformt werden, denn beide sind werteverlaufsgleich, wie die Wahrheitsmatrix zeigt:

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Nun gibt es aber eine ganze Reihe verschiedener Implikationen, z. B. $p \rightarrow \sim q$, $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim (p \rightarrow q)$, $(p \wedge q) \rightarrow r$ usw. Muß man sich für jede von ihnen im einzelnen merken, welche Alternative ihr werteverlaufsgleich ist? Nein, es genügt, eine allgemeine Regel zu kennen, die wir aus unserem Beispiel gewinnen wollen. Nach ihr kann man jede beliebige Implikation in eine ihr werteverlaufsgleiche Alternative umwandeln.

Wir setzen die beiden Ausdrücke unseres Beispiels einmal untereinander und beschreiben ganz formal, wie man den zweiten Ausdruck aus dem ersten gewinnen kann:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ \sim p \vee q \end{array}$$

1. p – also das Vorderglied der Implikation – wird durch sein Negat $\sim p$ ersetzt.
2. Die Konstante $\rightarrow$ für die Implikation wird durch die Konstante $\vee$ für die Alternative ersetzt.
3. q – also das Hinterglied der Implikation – wird unverändert übernommen.

Entscheidend für die Werteverlaufsgleichheit der beiden Ausdrücke ist, daß das erste Glied der Alternative jeweils den entgegengesetzten Wahrheitswert wie das der Implikation hat und daß die Wahrheitswerte der zweiten Glieder jeweils übereinstimmen. Dafür spielt jedoch die besondere Form der Glieder – ob sie nun aus einer Aussagenvariablen oder ihrem Negat, aus einer Konjunktion zweier Aussagenvariablen usw. bestehen – keine Rolle. Deshalb gewinnen wir durch Verallgemeinerung die *Umformungsregel:*

Eine *Implikation* wird in eine ihr werteverlaufsgleiche *Alternative* umgeformt, indem ihr erstes Glied negiert, die Implikationskonstante durch die Alternativkonstante ersetzt und ihr Hinterglied unverändert übernommen wird.

Danach sind z. B. folgende Umformungen zulässig:

$p \rightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\sim p \vee \sim q$	$\sim \sim p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee r$

Wir verzichten darauf, die Wahrheitsmatrizen für diese Paare von Ausdrücken aufzustellen, empfehlen es aber dem Leser zur Übung. – Falls bei solchen Umformungen mehrfach negierte Ausdrücke entstehen, so darf man sie gemäß der in 2.1.4. aufgestellten Regel vereinfachen – so wird etwa $\sim \sim p \vee \sim q$ vereinfacht zu $p \vee \sim q$. In $\sim (\sim p \vee q)$ dagegen dürfen die Negationszeichen nicht weggelassen werden, da sich beide auf etwas Verschiedenes beziehen, und zwar das erste auf den Gesamtausdruck in der Klammer, das zweite dagegen nur auf p.

Die Umformung einer beliebigen Alternative in eine ihr werteverlaufsgleiche Implikation ist ebenso einfach wie der umgekehrte Prozeß. Sie kann nach folgender Regel vollzogen werden:

Eine *Alternative* wird in eine ihr werteverlaufsgleiche *Implikation* umgeformt, indem ihr erstes Glied negiert, die Alternativkonstante durch die Implikationskonstante ersetzt und ihr zweites Glied unverändert übernommen wird.

Danach sind z. B. folgende Umformungen zulässig:

$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee r$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\sim p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (\sim \sim p \rightarrow q)$	$\sim \sim (p \wedge q) \rightarrow r$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$

Diese Regel wird zwar seltener gebraucht als die vorige, muß aber bei einigen Umformungen in der Prädikatenlogik doch verwendet werden.

Nach dem in 2.1.7. Gesagten kann eine Replikation in eine ihr werteverlaufsgleiche Implikation umgeformt werden, indem man Vorder- und Hinterglied vertauscht und den Replikationspfeil durch den Implikationspfeil ersetzt. Damit kann auch jede Replikation – auf dem Umweg über eine Implikation – in eine Alternative umgeformt werden.

Worauf eine Äquivalenz reduziert werden darf, wurde ebenfalls bereits in 2.1.7. beschrieben; Hinweise für die Umformung von Kontravalenzen und Exklusionen finden sich in 2.1.6.

Ohne weitere Begründung geben wir schließlich noch zwei Regeln für die Umformung von Konjunktionen in werteverlaufsgleiche Alternativen und umgekehrt an:

Eine *Konjunktion* wird in eine ihr werteverlaufsgleiche *Alternative* umgeformt, indem

1. **beide Glieder durch ihre Negate ersetzt werden,**
2. **$\wedge$ durch $\vee$ ersetzt und**
3. **der Gesamtausdruck negiert wird.**

Eine *Alternative* wird in eine ihr werteverlaufsgleiche *Konjunktion* umgeformt, indem

1. **beide Glieder durch ihre Negate ersetzt werden,**
2. **$\vee$ durch $\wedge$ ersetzt und**
3. **der Gesamtausdruck negiert wird.**

Danach wird beispielsweise

$$p \wedge \sim q \qquad\qquad \sim (\sim p \vee \sim q)$$

umgeformt in:

$$\sim (\sim p \vee \sim \sim q) \qquad\qquad \sim \sim (\sim \sim p \wedge \sim \sim q)$$

und schließlich vereinfacht zu:

$$\sim (\sim p \vee q) \qquad\qquad p \wedge q.$$

Zu beachten ist bei den hier ausdrücklich formulierten Umformungsregeln, daß sie rein syntaktischer Natur sind, d. h., daß sie sich ausschließlich auf Zeichen beziehen, nicht aber auf die Bedeutung der Zeichen. Die hier betrachteten Umformungsregeln dienen dazu, gegebene aussagenlogische Ausdrücke in andere umzuformen, die diesen werteverlaufsgleich oder – anders ausgedrückt – *semantisch äquivalent* sind. Diesen Terminus haben wir zwar schon eingeführt, aber bisher nicht gebraucht, um Verwechslungen mit dem Terminus „*Äquivalenz*" zu vermeiden. Verwechslungen in diesem Falle wären mit einer Vermischung verschiedener Sprachstufen verbunden! Äquivalenzen sind *objektsprachliche* Ausdrücke, mit denen man etwas über Zusammenhänge von Sachverhalten aussagen kann. Die Termini „werteverlaufsgleich" und „semantisch äquivalent" hingegen sind *metasprachliche* Ausdrücke zur Bezeichnung von Beziehungen zwischen Ausdrücken.

Es besteht hier jedoch nicht nur ein Unterschied, sondern auch ein Zusammenhang, der z. B. für das Schließen von Nutzen sein kann. Gehen wir von einem Beispiel aus, um dann den Zusammenhang allgemein zu formulieren.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Der Wahrheitsmatrix ist zu entnehmen:

1. Die Ausdrücke $p \rightarrow q$ und $\sim p \vee q$ sind semantisch äquivalent.
2. Die Äquivalenz $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ ist allgemeingültig.

Eine Äquivalenz ist wahr genau dann, wenn die Wahrheitswerte ihrer Glieder übereinstimmen. Stimmen die Wahrheits-

werte der Glieder bei jeder Belegung überein, d. h., sind sie semantisch äquivalent, so ist die Äquivalenz ebenfalls bei jeder Belegung wahr, d. h. allgemeingültig. – Ist eine Äquivalenz allgemeingültig, so müssen ihre Glieder bei jeder Belegung in ihren Wahrheitswerten übereinstimmen, d. h. semantisch äquivalent sein. Es gilt also:

Zwei Ausdrücke sind semantisch äquivalent genau dann, wenn die aus ihnen gebildete Äquivalenz allgemeingültig ist.

Im Anschluß an diese Einsicht wollen wir eine wichtige Regel der Aussagenlogik formulieren, die wir bei der Einführung und Begründung verschiedener Umformungsregeln stillschweigend schon benutzt haben: die *Einsetzungsregel.* Sie lautet:

In einem allgemeingültigen aussagenlogischen Ausdruck darf für eine beliebige Aussagenvariable ein beliebiger Ausdruck eingesetzt werden, vorausgesetzt, das geschieht gleichzeitig an allen Stellen, an denen die Variable im ursprünglichen Ausdruck vorkommt.

Jeder Ausdruck, der durch korrekte Anwendung der Einsetzungsregel aus einem allgemeingültigen Ausdruck gewonnen wird, ist selbst wieder allgemeingültig.

Setzt man in dem allgemeingültigen Ausdruck

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

den Ausdruck $(p \wedge q)$ für die Variable p ein, erhält man den allgemeingültigen Ausdruck $((p \wedge q) \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim (p \wedge q) \vee q)$. Nimmt man dagegen die Einsetzung nicht an allen Stellen vor, hat man keine Gewähr dafür, wieder einen allgemeingültigen Ausdruck zu erhalten. Der Ausdruck

$$((p \wedge q) \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q),$$

der durch eine solche fehlerhafte Einsetzung entsteht, ist nicht allgemeingültig.

Unter den verschiedenen Arten von logischen Ausdrücken sind, wie gesagt, die allgemeingültigen von besonderer Bedeutung. Deshalb sucht man auch immer wieder nach möglichst einfachen Wegen, auf denen man feststellen kann, ob ein gegebener Ausdruck zu diesen gehört oder nicht. Wenn man eine Implikation untersuchen will, kann man im allgemeinen mit recht geringem Aufwand feststellen, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Das geschieht auf *indirektem* Wege. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Man nimmt an, die zu untersuchende Implikation sei *nicht* allgemeingültig. Dann muß es wenigstens eine Belegung ihrer Aussagenvariablen geben, bei der die Implikation selbst falsch ist. Diese Belegung muß so beschaffen sein, daß das Vorderglied der Implikation wahr und ihr Hinterglied falsch ist. Kann man eine solche Belegung angeben, ist die Implikation tatsächlich nicht allgemeingültig. Gibt es aber keine solche Belegung, ist die Implikation allgemeingültig.

Zu untersuchen sei die Implikation

$$p \rightarrow (q \rightarrow p).$$

Eine Belegung, bei der sie falsch ist, müßte so beschaffen sein, daß ihr Vorderglied p wahr und ihr Hinterglied $(q \rightarrow p)$ falsch ist. Das Hinterglied ist selbst eine Implikation, die nur dann falsch ist, wenn ihr Vorderglied q wahr und ihr Hinterglied p falsch ist. Ein und dieselbe Variable, nämlich p, kann aber nicht in ein und demselben Ausdruck bei ein und derselben Belegung an einer Stelle wahr und an einer anderen Stelle falsch sein. Es gibt also keine Belegung, bei der die untersuchte Implikation falsch ist; folglich ist sie allgemeingültig.

Ein anderes Resultat ergibt sich für den ähnlichen Ausdruck

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p.$$

Er ist falsch, wenn $(p \rightarrow q)$ wahr und p falsch ist. Nehmen wir an, das Hinterglied p sei falsch, dann müssen wir für p im Vorderglied dasselbe annehmen. Damit ist die Wahrheit des Vordergliedes bereits gegeben; denn eine Implikation mit falschem Vorderglied ist unabhängig vom Wahrheitswert ihres Hintergliedes wahr. Der Ausdruck $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ ist folglich nicht allgemeingültig.

Man kann dieses Verfahren auch dann ausnutzen, wenn man einen Ausdruck zu untersuchen hat, der keine Implikation ist, z. B.:

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \vee \sim p).$$

Wir formen diesen Ausdruck zunächst schrittweise in eine Implikation um:

$$\begin{aligned} &\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee \sim p) \\ &\sim (p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p) \\ \sim \sim &(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p) \\ &(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p). \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, das Hinterglied sei falsch, d. h. q wahr und $\sim p$ falsch. Dann muß im Vorderglied p wahr und $\sim q$

falsch sein. Damit ist das Vorderglied selbst aber falsch. Folglich gibt es keine Belegung, bei der der Gesamtausdruck falsch ist.

Hat man eine Äquivalenz zu untersuchen, formt man sie in zwei Implikationen um, die man dann getrennt prüft. Untersuchen wir die Äquivalenz

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q),$$

indem wir zunächst die Implikation

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

untersuchen. – Wir nehmen an, das Hinterglied $(p \rightarrow q)$ sei falsch und damit p wahr und q falsch. Wegen der Falschheit von q ist dann auch das Vorderglied $(p \wedge q)$ falsch. Dieser Ausdruck ist also allgemeingültig. – Betrachten wir nun

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q).$$

Hier gibt es drei Belegungen, bei denen das Hinterglied falsch ist. Unter ihnen ist eine, bei der das Vorderglied ebenfalls falsch ist – und zwar, wenn p wahr und q falsch ist. Das heißt jedoch nicht, daß der Ausdruck allgemeingültig ist. Vielmehr gibt es zwei weitere Belegungen, bei denen der Gesamtausdruck falsch ist – 1. wenn p falsch und q wahr ist, 2. wenn p und q beide falsch sind. – Die untersuchte Äquivalenz wäre allgemeingültig, wenn beide Implikationen es wären. Tatsächlich ist nur die zuerst untersuchte Implikation allgemeingültig.

Betrachten wir zum Schluß noch folgenden Ausdruck:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)].$$

Dieser Ausdruck ist nur dann falsch, wenn $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)]$ wahr und $[(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$ falsch ist. Dieser wiederum ist nur dann falsch, wenn $(p \wedge r)$ wahr und $(q \wedge s)$ falsch ist. Wir nehmen nun an, $(p \wedge r)$ sei wahr und damit auch p und r einzeln. Diese Werte haben sie dann auch im Vorderglied der Implikation. Wir nehmen ferner an, $(q \wedge s)$ sei falsch, also wenigstens eine der beiden Variablen sei falsch. Dann sind drei Fälle möglich:

1. q ist wahr, s ist falsch. – Dann ist im Vorderglied $(p \rightarrow q)$ wahr, aber $(r \rightarrow s)$ falsch. Eine Konjunktion mit mindestens einem falschen Glied ist selbst falsch. Also ist unter diesen Voraussetzungen das Vorderglied falsch und damit der Gesamtausdruck wahr.

$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \to [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
w & \longleftarrow & & & & & & & w \\
 & & w & \longleftarrow & & & & & w \\
 & & w & \longleftarrow & & & & & w \\
 & & & & f & \longleftarrow & & & f \\
 & & w & & f & & w & & f \\
 & & & f & & & & f & \\
 & & & & & w & & &
\end{array}$$

Das Schema zeigt noch einmal, wie, ausgehend von Belegungen des Hintergliedes und durch die Übertragung der Werte auf das Vorderglied, der Gesamtausdruck bei der Belegung unter 1. wahr wird.

2. q ist falsch, s ist wahr. – Dann ist im Vorderglied $(p \to q)$ falsch und $(r \to s)$ wahr, also das Vorderglied selbst falsch.

3. q ist falsch, s ist falsch. – Dann sind beide Glieder des Vordergliedes und das Vorderglied selbst falsch.

Unter den drei möglichen Belegungen ist also keine, bei der der untersuchte Gesamtausdruck falsch ist. Er ist folglich allgemeingültig.

Das zuletzt vorgeführte Beispiel scheint recht umständlich zu sein und ist auch etwas unübersichtlich. Der Vorteil, den das hier beschriebene Verfahren hat, wird aber gerade hier besonders deutlich. Hätten wir die Wahrheitsmatrix des Ausdrucks aufgestellt, hätten wir 32 Zeilen gebraucht, also 32 verschiedene mögliche Belegungen in Betracht ziehen müssen. Es genügte jedoch, drei von ihnen zu berücksichtigen, um festzustellen, daß der Ausdruck allgemeingültig ist.

2.1.8. Entscheidung mit Hilfe von Normalformen*

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie man aussagenlogische Ausdrücke so umformen kann, daß man bereits an ihrer Struktur erkennt, ob sie allgemeingültig sind oder nicht, ob sie Kontradiktionen sind oder nicht. Beim Studium kann dieser Abschnitt übergangen werden; seine Kenntnis wird nur für 2.2.1.4.* und 3.2.6.* vorausgesetzt.

Wenn ein aussagenlogischer Ausdruck auf die hier beschriebene Weise entschieden werden soll, muß zuerst immer

seine *verneinungstechnische Normalform* hergestellt werden. Sie muß folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie muß dem ursprünglichen Ausdruck semantisch äquivalent sein.
2. Von den aussagenlogischen Konstanten dürfen in ihr nur Negations-, Konjunktions- und Alternativzeichen vorkommen.
3. Die auftretenden Negationszeichen dürfen sich nur auf Aussagenvariable, nicht aber auf zusammengesetzte Ausdrücke beziehen.

Stellen wir die verneinungstechnische Normalform des Ausdrucks $\sim (p \vee \sim q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge q)$ her. Es empfiehlt sich, zuerst immer dafür zu sorgen, daß die 2. Bedingung erfüllt ist, und dann erst die zur Erfüllung der 3. Bedingung notwendigen Umformungen vorzunehmen. Demnach ist zunächst das Implikationszeichen zu beseitigen. Aus

$$\sim (p \vee \sim q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge q)$$

wird

$$\sim \sim (p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \wedge q).$$

Die Umformung der Implikation in eine Alternative hat dazu geführt, daß das linke Glied doppelt negiert ist. Nach der in 2.1.4. angegebenen Regel kann der Ausdruck vereinfacht werden zu

$$(p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \wedge q).$$

Jetzt muß das rechte Glied noch so umgeformt werden, daß auch hier die 3. Bedingung erfüllt ist; dazu wird es in eine Konjunktion umgewandelt:

$$(p \vee \sim q) \vee \sim \sim (\sim \sim p \vee \sim q).$$

Nach dem Streichen der doppelten Negationszeichen ergibt sich

$$(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q),$$

die verneinungstechnische Normalform von

$$\sim (p \vee \sim q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge q).$$

Hier hat sich schon gezeigt, daß es zweckmäßig ist, die Negationszeichen zunächst einmal nicht zu berücksichtigen, weil sie sich nicht selten während des Umformungsprozesses aufheben. Diese Erfahrung wird sich an einem zweiten, etwas komplizierteren Beispiel bestätigen.

Es soll die verneinungstechnische Normalform des Ausdrucks $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow \sim s)$ hergestellt werden. Dazu sind durch äquivalente Umformungen ein Äquivalenzzeichen, zwei Implikationszeichen und ein Negationszeichen vor einem zusammengesetzten Ausdruck zu beseitigen. Wir beginnen mit der Beseitigung des Äquivalenzzeichens, indem wir die Äquivalenz in eine Konjunktion zweier Implikationen umformen. Das ergibt:

$$[\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \sim s)] \wedge [(r \rightarrow \sim s) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)].$$

Ersetzen wir jetzt die Implikationszeichen in der Mitte der eckigen Klammern durch Alternativkonstante, erhalten wir

$$[\sim \sim (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow \sim s)]$$
$$\wedge [\sim (r \rightarrow \sim s) \vee \sim (p \rightarrow q)]$$

und nach Streichung der doppelten Negationszeichen

$$[(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow \sim s)] \wedge [\sim (r \rightarrow \sim s) \vee \sim (p \rightarrow q)].$$

Nun können wir uns den Implikationszeichen in den runden Klammern zuwenden und sie durch Alternativzeichen ersetzen:

$$[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \vee \sim s)]$$
$$\wedge [\sim (\sim r \vee \sim s) \vee \sim (\sim p \vee q)].$$

Es verbleibt die Aufgabe, die Negationszeichen, die im rechten Teilausdruck vor den runden Klammern stehen, zu beseitigen. Das geschieht durch die Umformung der Alternativen in Konjunktionen:

$$[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \vee \sim s)]$$
$$\wedge [\sim \sim (\sim \sim r \wedge \sim \sim s) \vee \sim \sim (\sim \sim p \wedge \sim q).$$

Die verneinungstechnische Normalform hat schließlich die Gestalt:

$$[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \vee \sim s)] \wedge [(r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q).$$

Eine solche verneinungstechnische Normalform ist im allgemeinen noch nicht die Normalform, an der man den Ausdruck entscheiden kann, sondern erst eine Vorstufe dazu. Meist sind noch Umformungen nötig, bei denen man die folgenden *Distributionsregeln* anwenden muß:

1. Von $p \vee (q \wedge r)$ darf man übergehen zu

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

und umgekehrt.

2. Von $p \wedge (q \vee r)$ darf man übergehen zu

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

und umgekehrt.

Ein Ausdruck der Form $p \vee (q \wedge r)$ hat denselben Werteverlauf wie ein Ausdruck der Form $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$; d. h., die Distributionsregeln gewährleisten, daß ein mit ihrer Hilfe gewonnener Ausdruck dem ursprünglichen semantisch äquivalent ist.

Nach der 1. Distributionsregel kann man z. B. von

$$p \vee (\sim p \wedge q)$$

übergehen zu

$$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q).$$

Auch hier kann man wieder von der Einsetzungsregel Gebrauch machen; d. h., man kann für die Aussagenvariablen in der Formulierung der Regeln zusammengesetzte Ausdrücke einsetzen.

Aus

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$$

wird dann nach der 1. Distributionsregel

$$((p \wedge q) \vee r) \wedge ((p \wedge q) \vee s).$$

Da man in Konjunktionen und Alternativen die Glieder vertauschen darf, ohne den Wahrheitswert zu verändern, darf man von dem vorigen Ausdruck übergehen zu

$$(r \vee (p \wedge q)) \wedge (s \vee (p \wedge q))$$

und hierauf die 1. Distributionsregel abermals anwenden:

$$((r \vee p) \wedge (r \vee q)) \wedge ((s \vee p) \wedge (s \vee q)).$$

Wenn man überflüssige Klammern wegläßt und die Glieder dieses Ausdrucks umordnet, erhält man:

$$(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).$$

Bei der zweifachen Anwendung der 2. Distributionsregel auf den Ausdruck $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ erhält man ein analoges Ergebnis. Deshalb lassen sich abgeleitete Distributionsregeln formulieren, in denen die zweifache Anwendung der ursprünglichen zu einem Schritt zusammengefaßt ist:

1.1. Von $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ darf man übergehen zu

$$(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

und umgekehrt.

2.1. Von $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ darf man übergehen zu

$$(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

und umgekehrt.

Mit Hilfe der Distributionsregeln kann man von jedem beliebigen aussagenlogischen Ausdruck, nachdem man seine verneinungstechnische Normalform hergestellt hat, nun auch seine *konjunktive* und seine *alternative Normalform* herstellen.

Die konjunktive Normalform eines Ausdrucks ist eine Konjunktion von Alternativen. Sie erfüllt alle Bedingungen einer verneinungstechnischen Normalform. Die Glieder dieser Alternativen sind (unnegierte oder negierte) Aussagenvariable. Die konjunktive Normalform eines Ausdrucks gestattet zu erkennen, ob er allgemeingültig ist oder nicht.

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel. Zu untersuchen ist der Ausdruck

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q).$$

Zunächst wird die verneinungstechnische Normalform hergestellt:

$$\begin{aligned} & \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ \sim \sim & (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \\ & (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist eine Alternative, die aus einer Alternative und einer Konjunktion besteht. Wir brauchen aber eine Konjunktion von Alternativen. Wenden wir nun die 1. Distributionsregel an, wobei wir

$(\sim p \vee \sim q)$ für p,
p für q,
q für r

einsetzen, erhalten wir:

$$((\sim p \vee \sim q) \vee p) \wedge ((\sim p \vee \sim q) \vee q).$$

Da Ausdrücke $(p \vee (q \vee r))$, $((p \vee q) \vee r)$ und $(p \vee q \vee r)$ einander semantisch äquivalent sind, dürfen wir auch schreiben:

$$(\sim p \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q).$$

Das ist eine dem ursprünglichen Ausdruck äquivalente Konjunktion von Alternativen, deren Glieder Aussagenvariable sind, also dessen konjunktive Normalform. Nun enthält jede dieser beiden Alternativen eine Aussagenvariable, die einmal negiert und einmal unnegiert vorkommt. Die linke Alternative enthält p und $\sim p$, also ein Teilausdruck $p \vee \sim p$, die rechte enthält q und $\sim q$, also den Teilausdruck $q \vee \sim q$. Ausdrücke dieser Gestalt sind allgemeingültig, wie wir bereits aus 2.1.6.

wissen. Daran ändert sich auch nichts, wenn eine solche Alternative weitere Aussagenvariable enthält; eine Alternative ist ja bereits dann wahr, wenn auch nur eins ihrer Glieder wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die übrigen Glieder haben. Da nun beide Glieder der konjunktiven Normalform allgemeingültig sind, ist sie es auch und damit auch der ursprüngliche Ausdruck.

Zusammenfassend können wir sagen:

Ein aussagenlogischer Ausdruck ist allgemeingültig, wenn in jeder Alternative seiner konjunktiven Normalform eine beliebige Aussagenvariable einmal unnegiert und einmal negiert vorkommt. Ist das in auch nur einer Alternative nicht der Fall, ist der Ausdruck nicht allgemeingültig, also eine Neutralität oder eine Kontradiktion.

Im folgenden Beispiel hat man die Entscheidung sehr schnell erreicht:

$$\begin{aligned} & p \rightarrow (p \vee q) \\ \sim\ & p \vee (p \vee q) \\ \sim\ & p \vee p \vee q. \end{aligned}$$

Hier besteht die konjunktive Normalform nur aus einer einzigen Alternative. In ihr kommt eine Variable einmal unnegiert und einmal negiert vor. Folglich ist $p \rightarrow (p \vee q)$ allgemeingültig.

Ein drittes Beispiel wird, obwohl die Zahl der notwendigen Umformungen größer ist, nun schon ohne weiteren Kommentar verständlich sein:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q) \\ \sim\ & (p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee q) \\ \sim\ & (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \\ & (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \\ & (\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q) \\ & ((\sim p \vee q) \vee p) \wedge ((\sim p \vee q) \vee \sim q) \\ & (\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim q). \end{aligned}$$

Der ursprüngliche Ausdruck ist allgemeingültig, da beide – also alle – Alternativen seiner konjunktiven Normalform es sind.

Kann man der konjunktiven Normalform eines Ausdrucks entnehmen, ob er allgemeingültig ist oder nicht, läßt seine alternative Normalform erkennen, ob er eine Kontradiktion ist oder nicht.

Die alternative Normalform eines Ausdrucks ist eine Alternative von Konjunktionen. Sie erfüllt alle Bedingungen einer verneinungstechnischen Normalform. Die Glieder dieser Konjunktionen sind (unnegierte oder negierte) Aussagenvariable.

Bringen wir den Ausdruck

$$p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim q)]$$

auf seine alternative Normalform. Das geschieht durch Anwendung der 2. Distributionsregel, wobei

p unverändert bleibt,
$(\sim p \wedge q)$ für q und
$(q \wedge \sim q)$ für r

eingesetzt wird. Das ergibt:

$$(p \wedge (\sim p \wedge q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim q)),$$
$$(p \wedge \sim p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \sim q).$$

Beide Konjunktionen enthalten Ausdrücke der Gestalt $p \wedge \sim p$, von denen wir aus 2.1.5. bereits wissen, daß sie bei jeder Belegung der Variablen falsch, daß sie also Kontradiktionen sind. Da ferner eine Konjunktion, die auch nur ein falsches Glied enthält, insgesamt falsch ist, ist auch in unserer Normalform die jeweils dritte Aussagenvariable ohne Bedeutung für den Wahrheitswert der Konjunktionen. Beide Glieder der Alternative sind Kontradiktionen; damit ist sie selbst es auch. Folglich ist auch der ursprüngliche Ausdruck eine Kontradiktion.

Wir fassen wieder zusammen:

Ein aussagenlogischer Ausdruck ist eine Kontradiktion, wenn in jeder Konjunktion seiner alternativen Normalform eine beliebige Aussagenvariable einmal unnegiert und einmal negiert vorkommt. Ist das in auch nur einer Konjunktion nicht der Fall, ist der Ausdruck keine Kontradiktion, also allgemeingültig oder eine Neutralität.

Hierzu noch ein weiteres Beispiel:

$$\sim (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow q)$$
$$\sim (q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q)$$
$$(\sim q \wedge p) \wedge (\sim p \vee q)$$
$$((\sim q \wedge p) \wedge \sim p) \vee ((\sim q \wedge p) \wedge q)$$
$$(\sim q \wedge p \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge p \wedge q).$$

Auch dieser Ausdruck erweist sich als eine Kontradiktion.

Bei allen bisherigen Beispielen genügte es, eine der beiden Normalformen herzustellen. Es kommt jedoch – wie im folgenden Beispiel – auch vor, daß man nacheinander sowohl die konjunktive als auch die alternative Normalform eines Ausdrucks herstellen muß.

$$
\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (\sim q \rightarrow \sim p) \\
\sim & (p \rightarrow q) \vee \sim (\sim q \rightarrow \sim p) \\
\sim & (\sim p \vee q) \vee \sim (q \vee \sim p) \\
& (p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge p).
\end{aligned}
$$

Die alternative Normalform ist damit erreicht, und es zeigt sich, daß der Ausdruck keine Kontradiktion ist. Ob er aber allgemeingültig ist oder nicht, kann man nur an der konjunktiven Normalform sehen. Wir stellen sie her, indem wir die aus der 1. Distributionsregel abgeleitete Regel (1.1.) auf den zuletzt erreichten Ausdruck anwenden. Aus

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge p)$$

wird danach

$$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p).$$

Der so erreichten konjunktiven Normalform ist zu entnehmen, daß der Ausdruck $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim (\sim q \rightarrow \sim p)$ nicht allgemeingültig ist. Da er aber, wie wir schon festgestellt haben, auch keine Kontradiktion ist, ist er eine Neutralität.

Kompliziertere Ausdrücke verlangen nicht selten eine mehrmalige Anwendung der Distributionsregeln und führen auch zu umfangreicheren Normalformen. Zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \\
\sim & [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \vee [p \rightarrow (q \wedge r)] \\
\sim & [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)] \vee [\sim p \vee (q \wedge r)] \\
& [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee r)] \vee [\sim p \vee (q \wedge r)] \\
& [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)] \vee [\sim p \vee (q \wedge r)] \\
& (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \vee \sim p \vee (q \wedge r).
\end{aligned}
$$

Die alternative Normalform ist erreicht, ohne daß eine Distributionsregel angewandt werden mußte. – Da der Ausdruck offensichtlich keine Kontradiktion ist, muß die konjunktive Normalform hergestellt werden. Dazu gehen wir von dem zuletzt erreichten Ausdruck aus, setzen die erste und die zweite Konjunktion wieder in eckige Klammern und distri-

buieren die beiden Ausdrücke aus:

$$[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)] \vee \sim p \vee (q \wedge r)$$
$$[(p \vee p) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim r)]$$
$$\vee \sim p \vee (q \wedge r).$$

Der nächste Schritt besteht in der Anwendung einer Distributionsregel auf den in eckigen Klammern stehenden Ausdruck und $\sim p$. Dieses Ausdistribuieren ist dem Ausmultiplizieren in der Algebra ganz analog; es erübrigt sich deshalb, die hier angewandte Regel ausdrücklich anzugeben. Das Resultat ist:

$$[(p \vee p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim r \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p \vee \sim p)$$
$$\wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim p)] \vee (q \wedge r).$$

Erneutes Ausdistribuieren führt zur konjunktiven Normalform:

$$(p \vee p \vee \sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim r \vee \sim p \vee q)$$
$$\wedge (\sim q \vee p \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim p \vee q)$$
$$\wedge (p \vee p \vee \sim p \vee r) \wedge (p \vee \sim r \vee \sim p \vee r)$$
$$\wedge (\sim q \vee p \vee \sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim p \vee r).$$

Jede der acht Alternativen enthält wenigstens eine Aussagenvariable zusammen mit ihrem Negat; der Ausdruck ist also allgemeingültig.

Aussagenlogische Ausdrücke an Hand ihrer Normalformen zu entscheiden mag – besonders nach dem letzten Beispiel – manchem als zu umständlich erscheinen. Bei einiger Übung wird man jedoch erkennen, daß Vereinfachungen möglich sind. In unserem Beispiel hätten wir gar nicht eine aus acht Gliedern bestehende Normalform herzustellen brauchen. Die Alternativen $(p \vee p \vee \sim p)$, $(p \vee \sim r \vee \sim p)$ und $(\sim q \vee p \vee \sim p)$ sind allgemeingültig. Sie mit $(q \wedge r)$ auszudistribuieren ändert daran nichts. Wir hätten sie also bei unserem letzten Schritt gar nicht zu berücksichtigen brauchen. Interessant war hier nur noch, ob das Ausdistribuieren von $(\sim q \vee \sim r \vee \sim p)$ und $(q \wedge r)$ ebenfalls nur allgemeingültige Alternativen ergibt.

Prinzipiell braucht man dieses Verfahren zur Entscheidung aussagenlogischer Ausdrücke nicht; die in 2.1.8. angegebenen Wege genügen völlig. Wenn man jedoch das in 2.2.1.4.* beschriebene Verfahren zur systematischen Ableitung von Konklusionen aus gegebenen Prämissen anwenden will, muß man in der Lage sein, die konjunktive Normalform aussagenlogischer Ausdrücke herzustellen.

2.1.9. Extensionale und intensionale Aussagenverbindungen

Wie schon in 2.1.3. gesagt wurde, untersucht die formale Logik nur *extensionale* Aussagenverbindungen. Das sind Aussagenverbindungen, deren Wahrheitswert eindeutig von den Wahrheitswerten derjenigen Aussagen abhängt, aus denen sie aufgebaut sind.

Daraus ergibt sich: Um den Wahrheitswert einer extensionalen Aussagenverbindung ermitteln zu können, braucht man nur die Wahrheitswerte der Aussagen zu kennen, aus denen sie aufgebaut ist. – Daraus ergibt sich weiter: In einer extensionalen Aussagenverbindung darf eine beliebige Aussage durch eine beliebige andere Aussage mit demselben Wahrheitswert ersetzt werden, ohne daß sich der Wahrheitswert der Aussagenverbindung verändert. Man kann beispielsweise auf diese Weise aus der wahren Aussagenverbindung „Der Sozialismus wird auf der ganzen Welt siegen, und der Kapitalismus wird aufhören zu existieren" die wahre Aussagenverbindung „Der Sozialismus wird auf der ganzen Welt siegen, und der Krieg wird aufhören zu existieren" gewinnen.

Einmütig sind die Logiker der Meinung, daß es nicht nur extensionale Aussagenverbindungen gibt, sondern auch *intensionale,* wie die nicht-extensionalen Aussagenverbindungen genannt werden. Dagegen besteht keine Einmütigkeit darüber, ob sich die intensionalen Aussagenverbindungen auf extensionale reduzieren lassen. Es gibt Logiker – z. B. Rudolf Carnap –, die vermuten, daß eine solche Reduzierung möglich ist. Verschiedene Gründe sprechen jedoch dafür, daß hier ein besonderer Gegenstandsbereich einer anderen Wissenschaft als der formalen Logik, nämlich der dialektischen Logik, vorliegt.

Der Wahrheitswert einer intensionalen Aussagenverbindung hängt nicht nur von den Wahrheitswerten der Aussagen ab, aus denen sie aufgebaut ist. Deshalb genügt zur Bestimmung ihres Wahrheitswertes auch nicht die bloße Kenntnis der Wahrheitswerte ihrer Bestandteile. Ersetzt man in ihr eine Aussage durch eine andere mit demselben Wahrheitswert, so kann sich ihr Wahrheitswert verändern.

Ersetzt man zum Beispiel in der als wahr angenommenen intensionalen Aussagenverbindung „Der Stein erwärmt sich, *weil* die Sonne darauf scheint" die zweite Aussage durch „Er liegt auf der Erde", erhält man die falsche Aussagenverbindung „Der Stein erwärmt sich, weil er auf der Erde liegt";

sie ist falsch, weil die beiden Sachverhalte nicht in dem durch „weil" ausgedrückten Verhältnis von Wirkung und Ursache stehen. – Weitere intensionale Aussagenverbindungen können mit Hilfe von „während" (im Sinne der Gleichzeitigkeit) und „nachdem" gebildet werden.

Es könnte nun die Frage auftauchen, ob die formale Logik, wenn sie schon die intensionalen Aussagenverbindungen nicht betrachtet, wenigstens alle extensionalen Aussagenverbindungen erfaßt. – Insgesamt gibt es 16 verschiedene aussagenlogische Konnektoren, durch die man je zwei Aussagen miteinander verbinden kann. Wir haben sieben von ihnen dargestellt; auch die übrigen zu untersuchen ist nicht notwendig, da sie sich alle auf diese sieben reduzieren lassen. Beispielsweise kann man „*Weder p noch q*" auf $\sim p \wedge \sim q$ reduzieren. Diese Reduzierung kann, wir wir gesehen haben, sogar noch weitergeführt werden. Es genügt, über Negation und Konjunktion oder über Negation und Alternative zu verfügen. Es ist sogar möglich, alle extensionalen Aussagenverbindungen auf Exklusionen zu reduzieren. Man macht jedoch von dieser Möglichkeit praktisch keinen Gebrauch, weil sie zu außerordentlich unübersichtlichen Ausdrücken führt.

Damit ist jedoch die Frage noch nicht beantwortet, ob denn der ganze Reichtum an Bindewörtern in der natürlichen Sprache – wenigstens soweit es um extensionale Beziehungen geht – durch die 16 Konnektoren erfaßt werden kann. – Die große Zahl der Bindewörter darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß es nicht mehr als 16 verschiedene logische Strukturen der hier interessierenden Art gibt. Verbindungen wie „*p* und *q*", „Sowohl *p* als auch *q*", „Zwar *p*, aber auch *q*" usw. haben alle die logische Struktur der Konjunktion. Die Unterschiede zwischen ihnen, die vor allem in pragmatischer Hinsicht von Bedeutung sind – wie z. B. die besondere Betonung eines Bestandteils usw. –, haben keinen Einfluß auf den Wahrheitswert und werden deshalb in der formalen Logik nicht berücksichtigt.

Andererseits gibt es, wie wir ebenfalls gesehen haben, eine Reihe von mehrdeutigen Bindewörtern der natürlichen Sprache. Deshalb muß man bei der Symbolisierung von Aussagenverbindungen immer vom Inhalt ausgehen und darf nicht schematisch übersetzen. Bevor man die logische Struktur einer Aussagenverbindung nicht erkannt hat, kann man sie auch nicht symbolisieren. – Hier liegt übrigens eines der schwierig-

sten Probleme für die automatische Übersetzung von Texten aus einer Sprache in eine andere. Übersetzungsmaschinen können ja nicht vom Sinn der zu übersetzenden Texte ausgehen, sondern sie sind im Gegensatz zum Menschen ausschließlich auf die Gestalt und die Reihenfolge der Zeichen, in denen der Text dargestellt ist, angewiesen, d. h., sie müssen auf rein syntaktischer Ebene arbeiten.

2.2. Anwendungen der Aussagenlogik

Wir unterbrechen jetzt den systematischen Aufbau der formalen Logik, dem wir uns im nächsten Abschnitt wieder zuwenden werden, und betrachten einige der vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Aussagenlogik.

2.2.1. Aussagenlogisches Schließen

Aussagenlogisches Schließen ist Schließen, das auf Gesetzen nur der Aussagenlogik beruht. – Mit dieser Bestimmung haben wir es u. a. vom prädikatenlogischen Schließen abgegrenzt, ohne jedoch den Begriff des Schließens selbst schon erklärt zu haben.

Schließen ist Gewinnen von Aussagen. – Innerhalb solcher Wissenschaften wie der formalen Logik und der Mathematik muß man berücksichtigen, daß mit Hilfe des Schließens auch gedankliche Gebilde gewonnen werden können, die keine Aussagen sind. Für unsere Zwecke können wir uns jedoch auf jene Fälle beschränken, in denen nur Aussagen eine Rolle spielen. – Es gibt nun zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, Aussagen zu gewinnen: Die erste und primäre Möglichkeit ist, Sachverhalte unmittelbar zu untersuchen und das Ergebnis der Untersuchung in Aussagen zu formulieren. Die zweite Möglichkeit besteht darin, von bereits gegebenen Aussagen – z. B. solchen, die man in Büchern vorfindet – auszugehen und aus ihnen weitere, von ihnen verschiedene Aussagen zu gewinnen. – Schließen im eigentlichen Sinne ist das Gewinnen von Aussagen in der zuletzt geschilderten Weise.

Die Aussagen, aus denen geschlossen wird, nennt man „*Prämissen*“ oder auch „Voraussetzungen“. Die Aussage, die man aus den Prämissen gewonnen hat, wird „*Konclusion*“, „Schluß-

folgerung" oder auch „Schluß" genannt. Um keine Mißverständnisse hervorzurufen, werden wir in der Regel nur die beiden hervorgehobenen Termini verwenden, da die übrigen Termini mehrdeutig sind. So gebraucht man z. B. das Wort „Schluß" nicht nur gleichbedeutend mit „*Konclusion*", sondern auch zur Bezeichnung des aus Prämissen und Konklusion bestehenden Gesamtgebildes. Wir werden „Schluß" künftig nur in der zuletzt genannten Bedeutung verwenden.

Zwischen den Prämissen und der Konklusion besteht ein bestimmter Zusammenhang: Die Konklusion muß aus den Prämissen *folgen*. Man darf also nicht beliebige Aussagen aneinanderreihen und das so entstandene Gebilde als einen Schluß ausgeben; man muß sich bei der Aufstellung von Schlüssen vielmehr nach bestimmten Regeln, den Schlußregeln, richten.

2.2.1.1. Definition des Schließens

Damit sind die Voraussetzungen gegeben, um den Begriff des Schließens definieren zu können:

***Logisches Schließen* besteht darin, daß man aus einer oder mehreren gegebenen Aussagen (Prämissen), indem man Schlußregeln auf sie anwendet, eine Aussage (Konclusion) gewinnt.**

Natürlich kann man aus jeder Aussage auf diese Aussage selbst schließen. Insofern muß die Konklusion eines Schlusses nicht notwendig von den Prämissen verschieden sein. Dieser Fall ist jedoch uninteressant, da auf diese Weise keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden können.

Unsere Definition des Schließens trifft auf die beiden Hauptarten des Schließens zu — auf das deduktive und auf das reduktive Schließen. Im Zusammenhang mit der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik werden wir uns ausschließlich mit dem deduktiven Schließen beschäftigen. Deshalb genügt es hier, diese Art des Schließens näher zu bestimmen, und zwar durch eine nähere Bestimmung der entsprechenden Regeln.

Die Regeln, nach denen deduktive Schlüsse gezogen werden, sind so beschaffen, daß, falls die Prämissen wahr sind, mit Sicherheit auch die Konklusion wahr ist. Sie beziehen sich nicht auf konkrete Aussagen und deren Inhalt, sondern nur auf die Struktur der Aussagen und Aussagenverbindungen.

Unter der Voraussetzung, daß sich sprachliche und gedankliche Struktur genau entsprechen, kann man sagen, daß diese Schlußregeln Umformungsregeln sind, die sich nur auf sprachliche Zeichen beziehen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel. – Als Prämisse nehmen wir die wahre Aussagenverbindung „Wenn man die Logik studiert, so lernt man, präziser zu denken" ($p \rightarrow q$). Die beiden folgenden Aussagenverbindungen stellen wir als mögliche Konklusionen dieser Prämisse zur Diskussion:

1. „Wenn es nicht wahr ist, daß man die Logik studiert, so ist es nicht wahr, daß man lernt, präziser zu denken" ($\sim p \rightarrow \sim q$),
2. „Wenn es nicht wahr ist, daß man lernt, präziser zu denken, so ist es nicht wahr, daß man die Logik studiert" ($\sim q \rightarrow \sim p$).

Die erste von ihnen wäre ein zusätzliches Argument für das Logikstudium, aber sie ist nicht wahr, und damit folgt sie auch nicht aus unserer Prämisse. Man kann ja sein Denken – wenigstens bis zu einem gewissen Grade – präzisieren, ohne unmittelbar Logik zu studieren. – Leider werden Schlüsse dieser Form verhältnismäßig oft akzeptiert, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man solche Schlüsse zur Diskussion stellt. – Die zweite Aussagenverbindung dagegen ist wahr, denn wer nicht lernt, präziser zu denken, macht von keinem geeigneten Mittel Gebrauch, also auch vom Logikstudium nicht.

Die Regel, nach der diese Konklusion aus der Prämisse gewonnen wird, die *Regel der Kontraposition*, kann folgendermaßen formuliert werden: „Aus der Wahrheit einer Aussagenverbindung der Form $p \rightarrow q$ darf man auf die Wahrheit einer Aussagenverbindung der Form $\sim q \rightarrow \sim p$ schließen" oder kürzer „Aus $p \rightarrow q$ folgt $\sim q \rightarrow \sim p$". Diese Regel ist so beschaffen, daß sie bei rein formaler Anwendung auf eine wahre Aussage immer eine andere ebenfalls wahre Aussage liefert. Eine solche Schlußregel nennen wir „*gültig*", einen nach ihr vollzogenen Schluß „*zwingend*".

2.2.1.2. Aussagenlogische Schlußregeln

In diesem Abschnitt werden wir eine Reihe wichtiger Schlußregeln aufzählen, und zwar der Übersichtlichkeit und der einfacheren Schreibweise halber in der Gestalt von Schluß-

schemata. Die Regel der Kontraposition nimmt dabei folgende Gestalt an:

$$\frac{p \rightarrow q}{\sim q \rightarrow \sim p}.$$

Nach ihrem Muster werden wir auch alle übrigen Schlußregeln in der Form von Schlußschemata angeben. Oberhalb des Striches finden wir die Prämisse oder die Prämissen. Sind es zwei oder mehr Prämissen, so schreiben wir sie untereinander, als wollten wir sie addieren. Unterhalb des Striches steht dann die Konklusion.

Die ersten Schlußregeln können wir bereits aus den uns schon bekannten Wahrheitsmatrizen der aussagenlogischen Konstanten ablesen.

$$(1.1.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q} \qquad\qquad (1.2.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \\ \sim q \end{array}}{p \wedge \sim q}.$$

Diese Schlußschemata und weitere, die man durch die Negation von p noch herstellen könnte, bedürfen keiner weiteren Erklärung. Sie sind von der Wahrheitsmatrix der Konjunktion her einzusehen.

$$(2.1.)\ \frac{p \wedge q}{p} \qquad (2.2.)\ \frac{p \wedge q}{q}.$$

Nach diesen beiden Schlußregeln darf man aus der Wahrheit einer Konjunktion auf die Wahrheit sowohl des einen wie auch des anderen Gliedes dieser Konjunktion schließen. Sie sind, obwohl auch sie nicht überraschen, insofern interessant, als sie ständig z. B. beim Zitieren aus Büchern oder Aufsätzen benützt werden, d. h., wenn man aus einem gedanklichen Zusammenhang einen der – zumindest dem Sinne nach – konjunktiv verknüpften Teile herauslöst und für sich betrachtet.

In der traditionellen Logik kannte man für Aussagenverbindungen mit „oder" zwei Schlußregeln: den *Modus tollendo ponens* und den *Modus ponendo tollens*. Sie können – in der Reihenfolge, in der wir ihre Namen angeführt haben – folgendermaßen als Schlußschemata wiedergegeben werden:

$$\frac{\begin{array}{c} p \text{ oder } q \\ \sim p \end{array}}{q} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{array}{c} p \text{ oder } q \\ p \end{array}}{\sim q}.$$

Über die Gültigkeit dieser beiden Schlußregeln gab es jedoch Diskussionen. Man konnte Fälle anführen, in denen diese

Regeln von wahren Prämissen auf falsche Konklusionen führen. Der Versuch, genau zu bestimmen, für welche Fälle diese Regeln gelten und für welche nicht, kann jedoch nur gelingen, wenn man wie in der modernen Logik zwischen den verschiedenen Bedeutungen von „oder" unterscheidet.

Für die Alternative gelten folgende Schlußregeln:

$$(3.1.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q} \qquad (3.2.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \end{array}}{p}\,.$$

Wenn die Aussagenverbindung „Die Stromzufuhr ist unterbrochen, oder die Glühlampe ist durchgebrannt" wahr ist und die Aussage „Die Stromzufuhr ist nicht unterbrochen" ebenfalls wahr ist, darf man nach (3.1.) auf die Aussage „Die Glühlampe ist durchgebrannt" schließen.

Während man aus einer Alternative und dem Negat einer der beiden in ihr verbundenen Aussagen auf die zweite dieser Aussagen schließen darf, ist ein entsprechender Schluß aus einer Exklusion nicht zwingend. Statt dessen gelten für das Schließen aus einer Exklusion folgende Regeln:

$$(4.1.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \mid q \\ p \end{array}}{\sim q} \qquad (4.2.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \mid q \\ q \end{array}}{\sim p}\,.$$

Aus der Aussagenverbindung „Student X hat die Prüfung mit ‚sehr gut' bestanden, oder er hat sie mit ‚gut' bestanden" und der Aussage „Er hat die Prüfung mit ‚gut' bestanden" darf man nach (4.2.) auf „Student X hat die Prüfung nicht mit ‚sehr gut' bestanden" schließen.

Entsprechende Regeln gelten wiederum nicht für Alternativen. Dagegen gibt es für das Schließen aus einer Kontravalenz zu jeder der vier zuletzt angeführten Schlußregeln eine Entsprechung:

$$(5.1.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \rangle\!-\!\langle q \\ p \end{array}}{\sim q} \qquad (5.2.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \rangle\!-\!\langle q \\ q \end{array}}{\sim p}$$

$$(5.3.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \rangle\!-\!\langle q \\ \sim p \end{array}}{q} \qquad (5.4.)\quad \frac{\begin{array}{c} p \rangle\!-\!\langle q \\ \sim q \end{array}}{p}\,.$$

Ein Vergleich der Schlußregeln für Schlüsse aus Alternativen, Exklusionen und Kontravalenzen zeigt abermals, wie

wichtig es ist, die drei Bedeutungen des Bindeworts „oder" zu unterscheiden. Ferner hat sich herausgestellt, daß den beiden Regeln aus der traditionellen Logik in Wirklichkeit je zwei gültige Schlußregeln entsprechen: dem Modus tollendo ponens die Regeln (3.1.) und (5.3.), dem Modus ponendo tollens die Regeln (4.1.) und (5.1.).

Die folgenden Schemata geben an, wie man aus einer Konjunktion auf eine Alternative oder umgekehrt schließen darf.

$$(6.1.)\quad \frac{\sim (p \wedge q)}{\sim p \vee \sim q} \qquad\qquad (6.2.)\quad \frac{\sim (p \vee q)}{\sim p \wedge \sim q}.$$

Aus „Es ist nicht wahr, daß Hegel zugleich Materialist und Idealist ist" folgt nach (6.1.) zwingend „Hegel ist nicht Materialist, oder Hegel ist nicht Idealist".

Für das Schließen aus einer Implikation gelten die Regeln:

$$(7.1.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q} \qquad\qquad (7.2.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}.$$

Die Schlußregel (7.1.) ist eine der wichtigsten. Sie trägt den Namen „Abtrennungsregel". Aus der traditionellen Logik ist sie – wenngleich teilweise in anderer Gestalt – als „*Modus ponens*" oder „*Modus ponendo ponens*" bekannt. Die Schlußregel (7.2.) hatte den Namen „*Modus tollens*" oder „*Modus tollendo tollens*".

Für das Schließen aus einer Replikation gelten:

$$(8.1.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftarrow q \\ q \end{array}}{p} \qquad\qquad (8.2.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftarrow q \\ \sim p \end{array}}{\sim q}.$$

Der Zusammenhang dieser beiden Regeln mit (7.1.) und (7.2.) wird deutlich, wenn man in ihnen die Replikationen entsprechend den in 2.1.7. genannten Regeln in Implikationen umformt.

Ähnlich wie im Falle der Kontravalenz ergeben sich auch für das Schließen aus einer Äquivalenz günstige Möglichkeiten:

$$(9.1.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \end{array}}{q} \qquad\qquad (9.2.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \end{array}}{p}$$

$$(9.3.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \sim p \end{array}}{\sim q} \qquad\qquad (9.4.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}.$$

Die *Regel der Transitivität* für die Implikation oder *Kettenschlußregel* hat die Gestalt:

$$(10.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}.$$

Aus den Prämissen „Wenn man die marxistische Philosophie studiert, erkennt man die Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung besser" ($p \rightarrow q$) und „Wenn man die Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung besser erkennt, kann man den gesellschaftlichen Fortschritt wirksamer unterstützen" ($q \rightarrow r$) folgt: „Wenn man die marxistische Philosophie studiert, kann man den gesellschaftlichen Fortschritt wirksamer unterstützen" ($p \rightarrow r$).

$$(11.)\quad \frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{(\sim r \wedge q) \rightarrow \sim p}.$$

Nach der *Regel der zusammengesetzten Kontraposition* schließt man aus „Wenn die politische Bedeutung des sozialistischen Wettbewerbs gründlich erklärt (p) und zur Teilnahme aufgerufen worden ist (q), beteiligen sich alle Mitarbeiter (r)" auf „Wenn es nicht wahr ist, daß sich alle Mitarbeiter am sozialistischen Wettbewerb beteiligen, obwohl zur Teilnahme aufgerufen worden ist, dann ist es nicht wahr, daß seine politische Bedeutung gründlich erklärt worden ist". Wir haben bei der Formulierung unserer Konklusion von der Tatsache, daß verschiedene Satzbindewörter die gleiche logische Struktur haben, Gebrauch gemacht und des besseren Verständnisses wegen die Konjunktion durch „obwohl" übersetzt. Derartige Freiheiten bei der Übersetzung logischer Ausdrücke in die natürliche Sprache sind durchaus erlaubt. Sie dürfen allerdings keine Sinnänderung der betreffenden Aussage nach sich ziehen, die sich auf den Wahrheitswert dieser Aussage auswirkt!

$$(12.1.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \\ p \vee q \end{array}}{r \vee s} \qquad (12.2.)\quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \\ \sim r \vee \sim s \end{array}}{\sim p \vee \sim q}.$$

Einen Schluß dieser Art nannte man in der traditionellen Logik „Dilemma".

2.2.1.3. Das Prüfen von Schlußregeln

Uns beschäftigt jetzt die Frage, wie man Schlußregeln daraufhin überprüft, ob sie gültig sind oder nicht. Der Sinn eines Logikstudiums besteht ja nicht darin, einige Schlußregeln auswendig zu lernen; viel wichtiger ist es, sich die notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten anzueignen, um das logische Schließen bewußt betreiben zu können, damit man sicherer und überzeugender schließt und seine Gegner wirksamer widerlegt.

Zu jeder Schlußregel gibt es eine Implikation, die genau dann allgemeingültig ist, wenn die Schlußregel gültig ist. – Diese Behauptung ist noch zu beweisen. Wenn sie aber wahr ist, dann kann man von jeder beliebigen Schlußregel feststellen, ob sie gültig ist oder nicht, indem man einfach die ihr entsprechende Implikation mit Hilfe einer Wahrheitsmatrix untersucht.

Angenommen, irgendeine gegebene Schlußregel sei gültig. Das bedeutet nach dem in 2.2.1.1. Gesagten, daß die Konklusion jedes beliebigen nach ihr gezogenen Schlusses wahr ist, falls dessen Prämissen wahr sind. Wenn die, d. h. alle Prämissen eines Schlusses wahr sind, dann ist es natürlich auch ihre Konjunktion. Wir können deshalb statt von *den* Prämissen, von *der* Prämisse eines Schlusses sprechen und darunter eine einzelne Aussage bzw. Aussagenverbindung oder – wenn mehrere vorkommen – deren Konjunktion verstehen.

Wir bilden nun eine Implikation, als deren Vorderglied wir die Prämisse und als deren Hinterglied wir die Konklusion – beide in aussagenlogischer Symbolik – nehmen. Um den Wahrheitswert, genauer den Werteverlauf dieser Implikation feststellen zu können, muß man zwei Möglichkeiten berücksichtigen:

1. Die Prämisse bzw. das Vorderglied ist wahr. Dann ist auch die Konklusion bzw. das Hinterglied wahr; das folgt aus unserer Voraussetzung, wonach die Schlußregel gültig sein soll. Damit ist die Implikation selbst auch wahr, wie jede Implikation mit wahrem Vorderglied und wahrem Hinterglied.

2. Die Prämisse bzw. das Vorderglied ist falsch. – Dieser Fall muß deshalb einbezogen werden, weil ja die Schlußregel nicht besagt, *daß* die Prämisse wahr ist, sondern *wenn* sie wahr ist, so . . . – Unter diesen Umständen ist der Wahrheitswert

der Konklusion bzw. des Hintergliedes gleichgültig; denn eine Implikation mit falschem Vorderglied ist auf jeden Fall wahr (vgl. 2.1.7.). Die betrachtete Implikation ist also allgemeingültig. Damit ist bewiesen, daß, wenn eine Schlußregel gültig ist, die ihr entsprechende Implikation allgemeingültig ist. Nun ist noch die Umkehrung dieser Aussage zu beweisen; denn das eine soll ja zutreffen *genau dann, wenn* das andere zutrifft.

Diesmal setzen wir eine Implikation voraus, die allgemeingültig ist. Das kann sie aber nach der Definition der Implikation nur dann sein, wenn mit ihrem Vorderglied immer auch ihr Hinterglied wahr ist. – Eine Implikation, deren Vorderglied wahr und deren Hinterglied falsch ist, wäre selbst falsch. Das aber stünde im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. – Eine Schlußregel, die besagt, daß aus der Wahrheit einer Prämisse in Gestalt des Vordergliedes der vorausgesetzten Implikation die Wahrheit einer Konklusion in Gestalt des entsprechenden Hintergliedes folgt, ist demnach gültig; denn sie erfüllt ja die schon mehrfach genannten Bedingungen. – Damit ist die Behauptung, von der wir ausgegangen sind, vollständig bewiesen.

Am Beispiel der Schlußregel (3.2.) wollen wir nun demonstrieren, wie man aussagenlogische Schlußregeln auf ihre Gültigkeit prüft, indem man zunächst die ihnen entsprechende Implikation herstellt und diese dann untersucht. Dabei werden zugleich die voraufgegangenen etwas abstrakten Überlegungen veranschaulicht.

Die zu betrachtende Schlußregel hat die Gestalt:

$$(3.2.)\qquad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \end{array}}{p}\,.$$

Für das logische Schließen ist nur der Fall von Bedeutung, daß die Prämissen wahre Aussagen sind. Deshalb können wir die beiden Prämissen $p \vee q$ und $\sim q$, ohne den Wahrheitswert zu verändern, konjunktiv zu dem Ausdruck $(p \vee q) \wedge \sim q$ verbinden. Wir machen uns weiterhin klar, daß jeder deduktive Schluß den Charakter einer Implikation hat: *Wenn* die Prämissen wahr sind, *so* ist die Konklusion wahr. Dementsprechend wird die Konklusion implikativ an die Konjunktion der Prämissen angeschlossen: $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$. Die so entstandene Aussagenverbindung wird nun auf ihre Allgemein-

gültigkeit hin untersucht. Wir stellen dazu die Wahrheitsmatrix auf:

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$
w	w	f	w	f	w
w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	f	f	w

Die Wahrheitsmatrix ergibt, daß die der Regel (3.2.) entsprechende Aussagenverbindung ein logisches Gesetz ist. Damit ist der Beweis für die Gültigkeit der Regel erbracht; denn in jedem Falle, in dem die Konjunktion der Prämissen wahr ist, ist auch die Konklusion wahr.

Betrachten wir zur Verdeutlichung ein weiteres Beispiel. Wir nehmen an, jemand habe nach der folgenden Regel geschlossen:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim p \end{array}}{\sim q}\,.$$

Dieser Schluß erscheint uns als nicht zwingend, d. h., wir haben den Eindruck, daß sich aus der Wahrheit der Prämissen nicht mit Sicherheit die Wahrheit der Konklusion ergibt. Deshalb stellen wir zunächst die zugehörige Aussagenverbindung auf – sie lautet $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ – und prüfen sie an der Wahrheitsmatrix:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

Uns interessiert hier wieder nur der Fall, daß die Konjunktion der Prämissen wahr ist. Die vorletzte Spalte der Wahrheitsmatrix zeigt uns, daß wir deshalb die beiden letzten Zeilen beachten müssen. Aus der letzten Zeile geht hervor, daß die Konklusion $\sim q$ bei wahren Prämissen selber durchaus wahr sein kann. Der vorletzten Zeile aber entnehmen wir, daß sie unter den gleichen Bedingungen ebensogut falsch sein kann.

Wir haben also nachgewiesen, daß die Schlüsse nach der anfangs angenommenen Schlußregel nicht zwingend sind. Damit ist allerdings über den Wahrheitswert der Konklusion nichts ausgesagt. Ihn aus dem gegebenen Zusammenhang festzustellen, ist mit den Mitteln der Logik allein nicht möglich.

Allgemein kann man sagen: Schlußregeln, die auf einer allgemeingültigen Implikation beruhen, sind gültig; nach diesen Regeln gezogene Schlüsse sind zwingend. Schlußregeln, die auf einer erfüllbaren Implikation beruhen, sind nicht gültig; nach ihnen gezogene Schlüsse sind nicht zwingend, d. h., die Konklusion eines solchen Schlusses kann wahr sein, wenn die Prämissen wahr sind, sie kann unter denselben Bedingungen aber auch falsch sein. Fassen wir an dieser Stelle noch einmal zusammen, was über die Eigenschaften der deduktiven Schlußregeln zu wissen nützlich ist.

Eine Schlußregel besagt nichts über den Wahrheitswert der Prämissen eines Schlusses, und sie besagt nichts über den Wahrheitswert der Konklusion für sich genommen, d. h. unabhängig von dem Wahrheitswert der Prämissen. Sie gibt nur die Gewißheit, daß die Konklusion immer dann wahr ist, *wenn* die Konjunktion der Prämissen wahr ist. Sie besagt auch nicht, daß die Konklusion *nur* dann wahr ist, *wenn* die Prämissen wahr sind. Ein und dieselbe Konklusion kann vielmehr aus verschiedenen Prämissen bzw. Konjunktionen von Prämissen folgen. Dementsprechend ist der eventuelle Nachweis, daß eine oder mehrere der Prämissen falsch ist bzw. sind, für den Wahrheitswert der Konklusion ohne Bedeutung. Man darf also nicht glauben, die Konklusion eines deduktiven Schlusses als falsch nachgewiesen zu haben, wenn man die Falschheit der Prämisse oder der Prämissen nachgewiesen hat.

Den voraufgegangenen Überlegungen ist bereits zu entnehmen, wie man aus allgemeingültigen Implikationen Schlußregeln erhält. – Aber auch allgemeingültige Äquivalenzen können zur Gewinnung von Schlußregeln dienen. Ausgehend von einer Äquivalenz erhält man sogar zwei Schlußregeln. Als Beispiel nennen wir die Äquivalenz $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Ihr entsprechen die Schlußregeln

$$\frac{\sim (p \wedge q)}{\sim p \vee \sim q} \quad \text{und} \quad \frac{\sim p \vee \sim q}{\sim (p \wedge q)}.$$

Das ergibt sich daraus, daß eine Äquivalenz genau dann ein Gesetz ist, wenn die beiden in ihr verbundenen Ausdrücke

werteverlaufsgleich sind. Die Bedingung für einen zwingenden Schluß, daß die Konklusion wahr sein muß, wenn die Prämissen wahr sind, ist damit erfüllt, unabhängig davon, welchen der beiden Ausdrücke man als Prämisse und welchen man als Konklusion wählt.

Durch den engen Zusammenhang zwischen allgemeingültigen Implikationen bzw. Äquivalenzen einerseits und gültigen Schlußregeln andererseits darf man sich jedoch nicht über ihre Unterschiede hinwegtäuschen. Das genauere Verständnis ihrer Unterschiede wird zugleich ein tieferes Verständnis ihres Zusammenhangs bewirken.

Die Schlußregeln und die üblichen aussagenlogischen Ausdrücke unterscheiden sich in zweifacher Hinsicht voneinander: erstens gehören sie verschiedenen Denkformen, zweitens verschiedenen semantischen Stufen an. Schlußregeln haben Aufforderungscharakter; sie üben gegenüber der gedanklichen Tätigkeit des Schließens eine gewisse *vor*schreibende, anleitende Funktion aus. Ihnen kann man unmittelbar entnehmen, was man zu tun hat, um aus einer wahren Aussage mit einer bestimmten Struktur wieder eine wahre Aussage zu gewinnen. Die übrigen Ausdrücke haben demgegenüber Aussagecharakter; sie haben eine *be*schreibende Funktion, sie widerspiegeln objektiv existierende Sachverhalte. Sie sind Bestandteil des menschlichen Wissens, der menschlichen Erkenntnis. – Eine Schlußregel gehört einer höheren semantischen Stufe an als z. B. die Implikation, auf der sie beruht. Die Implikation bezieht sich auf gewisse Sachverhalte, sagt etwas aus über sie. Die Schlußregel dagegen bezieht sich auf Aussagen, die in der Implikation enthalten sind, und Operationen mit ihnen.

Grundlage einer Schlußregel ist eine Implikation, z. B. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$. Wenn diese Implikation allgemeingültig ist, kann man eine Aussage über die Bestandteile dieser Implikation und den Zusammenhang zwischen ihren Wahrheitswerten aufstellen, z. B.: „Wenn $p \rightarrow q$ und p wahre Aussagen sind, dann ist auch q abgetrennt, für sich genommen eine wahre Aussage." Diese Aussage gehört einer höheren semantischen Stufe an als die Implikation und derselben semantischen Stufe wie die aufzustellende Schlußregel. Wenn die Aussage über die Implikation wahr ist, kann man aus ihr eine gültige Schlußregel gewinnen, z. B.: „Aus der Wahrheit von $p \rightarrow q$ und p darf auf die Wahrheit von q geschlossen

werden", also die Abtrennungsregel. Der Übergang von der allgemeingültigen Implikation zur gültigen Schlußregel erfordert also, genaugenommen, den hier beschriebenen Zwischenschritt. Es wird damit zugleich deutlich, daß auch Schlußregeln kein Produkt der Übereinkunft oder der Willkür sind, sondern daß ihre Gültigkeit, vermittelt durch die objektive Wahrheit bestimmter Aussagen, selbst objektiv bedingt ist.

2.2.1.4. Verkürzte Schlüsse

Schlüsse werden oft nicht vollständig, sondern nur in verkürzter Form ausgesprochen oder niedergeschrieben. Zuweilen läßt man eine oder mehrere Prämissen weg, manchmal die Konklusion.

Ein Beispiel für einen verkürzten Schluß wäre etwa: „Im Bauwesen werden moderne Methoden der Planung und Leitung des Baugeschehens eingeführt. Folglich werden die Bauten künftig schneller wachsen und die Baukosten sinken." – Die zweite dieser beiden Aussagen soll die Konklusion sein – darauf deutet das Wort „folglich" hin –, die erste eine Prämisse. Aber aus dieser Prämisse allein folgt die Konklusion nicht zwingend, da dem Schluß in dieser Form keine gültige Schlußregel zugrunde liegt. Erst durch eine geeignete Ergänzung entsteht z. B. der folgende zwingende Schluß nach dem *Modus ponens*:

„Wenn im Bauwesen moderne Methoden der Planung und Leitung des Baugeschehens eingeführt werden, werden die Bauten künftig schneller wachsen und die Baukosten sinken.

Im Bauwesen werden moderne Methoden der Planung und Leitung des Baugeschehens eingeführt.

Folglich werden die Bauten künftig schneller wachsen und die Baukosten sinken."

Dieser Schluß ist sprachlich verhältnismäßig umständlich. Deshalb wird man z. B. in einem Zeitungsartikel die verkürzte Form bevorzugen. Man sollte das jedoch nur dann tun, wenn der Leser imstande ist, den verkürzten Schluß von sich aus zu ergänzen. Das ist der Fall, wenn die fehlende Prämisse für den Leser selbstverständlich ist oder wenn sie wenigstens inhaltlich dem Zusammenhang zu entnehmen ist. Unser verkürzter Schluß könnte demnach verwendet werden, wenn dem Leser klar ist, worin die gemeinten modernen Methoden bestehen und

wie sie sich auf Arbeitsproduktivität und Rentabilität im Bauwesen auswirken.

Es sprechen nicht nur stilistische, sondern auch psychologische Gründe für die Verwendung von verkürzten Schlüssen. Vollständige Schlüsse müßten häufig allgemein Bekanntes enthalten. Damit entsteht die Gefahr, den Leser oder Hörer zu langweilen. Andererseits sind verkürzte Schlüsse dazu geeignet, den Leser oder Hörer zum Mitdenken anzuregen und so sein Interesse zu steigern. Allerdings wird man gewisse logische und psychologische Bedingungen zu berücksichtigen haben, wenn man mit verkürzten Schlüssen arbeitet.

Ein Autor oder Redner, der nur die Konklusion seines Schlusses angibt, muß sich dessen bewußt sein, daß ein Rückschluß allein aus der Konklusion auf die Prämisse oder die Prämissen nicht eindeutig möglich ist. Zur Illustration geben wir zwei deduktive Schlußregeln an, nach denen man aus sehr unterschiedlichen Prämissen auf ein und dieselbe Konklusion schließen kann:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}.$$

Wird hingegen außer der Konklusion von den beiden Prämissen auch noch eine angegeben, so ist der Rückschluß auf die zweite schon eher möglich. Allerdings ist auch dieser Rückschluß allein mit den Mitteln der Logik nicht eindeutig. Bei genügender Kenntnis des behandelten Gebiets wird man jedoch unter den logisch möglichen Prämissen diejenigen ausscheiden können, die sachlich nicht in Frage kommen.

Der Autor oder Redner, der eine Prämisse wegläßt, muß sich dieser Prämisse selbstverständlich bewußt sein. Er muß aber vor allem bei seinen Zuhörern oder Lesern voraussetzen können, daß sie die Prämisse kennen oder zu finden imstande sind.

Läßt er die Konklusion fort, so muß er sicher sein können, daß sein Publikum fähig ist, die Konklusion zu erschließen; er muß also dessen Bildungsstand und Denkfähigkeit einigermaßen abschätzen können. Außerdem muß die Konklusion aus den angegebenen Prämissen auch wirklich folgen. – In diesem Zusammenhang muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß man in vielen Fällen nicht deduktiv schließen kann, sondern *reduktiv* schließen muß, und daß in reduktiven

Schlüssen ein anderer Zusammenhang zwischen Prämissen und Konklusion besteht als in deduktiven. Mit diesen Problemen werden wir uns in 4.2. beschäftigen.

An Hand eines Beispiels soll nun noch gezeigt werden, daß und wie man Wahrheitsmatrizen benutzen kann, Aussagen zu finden, die aus gegebenen Prämissen zwingend folgen.

Ein Lehrer antwortet auf die Frage nach seiner nächsten Unterrichtsstunde mit den folgenden Aussagenverbindungen:

„(1) Ich unterrichte Deutsch, oder/und ich erzähle eine Geschichte.

(2) Entweder ich erzähle eine Geschichte, oder ich unterrichte Mathematik (aber höchstens eins von beiden).

(3) Entweder ich unterrichte Deutsch, oder ich unterrichte Mathematik (und zwar genau eins von beiden).“

Herauszufinden, ob er Deutsch oder Mathematik unterrichten wird, ob er eine Geschichte erzählen wird oder nicht, bedeutet herauszufinden, welche Konklusion oder welche Konklusionen man aus den Prämissen (1)—(3) deduktiv erschließen kann. Dazu muß man zunächst feststellen, um welche Art von Aussagenverbindungen es sich handelt, d. h., in welcher Bedeutung „oder“ jeweils gebraucht ist. Prämisse (1) ist offensichtlich eine Alternative. Beide Aussagen können zusammen wahr sein; man kann ja den Deutschunterricht unter Umständen an Hand einer geeigneten Geschichte erteilen. Ein moderner Mathematikunterricht verträgt sich allerdings nicht mit dem Erzählen von Geschichten. Diese Tatsache und der in Klammern hinzugefügte Zusatz machen deutlich, daß die Prämisse (2) eine Exklusion ist. Daß Prämisse (3) eine Kontravalenz sein soll, geht aus dem Zusatz hervor.

Damit haben wir die Voraussetzungen gewonnen, die wir brauchen, um den Schluß in die Symbolsprache der Aussagenlogik zu übersetzen. Wir müssen nur noch verabreden, durch welche Aussagenvariable wir die in unserem Schluß auftretenden Aussagen symbolisieren wollen:

„p“ bedeute „Ich unterrichte Deutsch“,

„q“ bedeute „Ich erzähle eine Geschichte“,

„r“ bedeute „Ich unterrichte Mathematik“.

Nun stellen wir folgendes – noch unvollständige – Schlußschema auf:

$$\begin{array}{ll} (1) & p \vee q \\ (2) & q \mid r \\ (3) & \underline{p \rightarrowtail r} \\ & \quad ? \end{array}.$$

Als nächstes bauen wir für unsere drei Prämissen eine gemeinsame Wahrheitsmatrix auf:

p	q	r	$p \vee q$	q/r	$p \rightarrowtail r$	$(p \vee q) \wedge (q/r)$	$(p \vee q) \wedge (q/r) \wedge (p \rightarrowtail r)$
w	w	w	w	f	f	f	f
$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
w	f	w	w	w	f	w	f
$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
f	w	w	w	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	w	f	w	w	f	f
f	f	f	f	w	f	f	f

Man könnte in dieser Matrix nun noch weitere Spalten einrichten für Ausdrücke, in denen an die Konjunktion der Prämissen implikativ jeweils ein Ausdruck angeschlossen ist, von dem man vermutet, daß er die oder eine Konklusion ist. Dann würde man, wie es in 2.2.1.3. beschrieben ist, prüfen, ob der jeweilige Ausdruck allgemeingültig ist oder nicht usw. Das ist jedoch nicht notwendig; denn man kann das Ergebnis bereits aus der Wahrheitsmatrix, so wie sie ist, ablesen.

Ausgangspunkt ist die Voraussetzung, daß alle drei Prämissen wahr sind und damit auch ihre Konjunktion wahr ist. Ein anderer Fall interessiert uns nicht für das Schließen. Es kommen also nur die Werte in den beiden hervorgehobenen Zeilen 2 und 4 der Wahrheitsmatrix in Betracht. In allen anderen Zeilen ist ja mindestens eine der Prämissen falsch! Wir sehen, daß in beiden Zeilen die Aussage p wahr ist. Anders gesagt: Wenn die Prämissen (1) bis (3) wahr sind, muß auch p wahr sein, d. h. die Aussage „Ich unterrichte Deutsch". Unter denselben Bedingungen ist r falsch, folglich $\sim r$ wahr. Aus den Prämissen (1) bis (3) folgt also auch die Konklusion „Es ist nicht wahr, daß ich Mathematik unterrichte". Darauf, ob q

eine wahre oder eine falsche Aussage ist, kann man allein aus den uns zur Verfügung stehenden Prämissen nicht schließen.

Bei unseren Überlegungen haben wir vom Inhalt der Prämissen (1) bis (3) vollständig abgesehen – ausgenommen bei den Übersetzungen – und nur Zusammenhänge zwischen Wahrheitswerten betrachtet. Auf diese Weise haben wir nicht nur festgestellt, was aus unseren konkreten Prämissen folgt, sondern wir haben darüber hinaus auch noch Schlußregeln gewonnen, die für beliebige Aussagen gelten, und zwar:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \mid r \\ \hline p \rangle\!-\!\langle r \\ \hline p \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} p \vee q \\ q \mid r \\ \hline p \rangle\!-\!\langle r \\ \hline \sim r \end{array},$$

damit aber auch

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \mid r \\ \hline p \rangle\!-\!\langle r \\ \hline p \wedge \sim r \end{array}.$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man – ohne die Hilfe einer Wahrheitsmatrix – auch auf folgende Weise:

Wir gehen zweckmäßigerweise von Prämisse (3) aus. Damit sie wahr ist – und das soll sie ja sein –, muß eine der beiden Aussagen, aus denen sie aufgebaut ist, wahr und die andere falsch sein.

Nehmen wir zunächst an. „Ich unterrichte Mathematik" sei wahr. Dann muß „Ich unterrichte Deutsch" falsch sein. Gehen wir nun zu Prämisse (2) über. Unserer Annahme entsprechend ist „Ich unterrichte Mathematik" wahr. Dann muß „Ich erzähle eine Geschichte" falsch sein, denn Prämisse (2) ist ja eine Exklusion, die nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen, aus denen sie aufgebaut ist, falsch ist. Dementsprechend ist „Ich erzähle eine Geschichte" auch in Prämisse (1) falsch. Damit Prämisse (1) – eine Alternative – wahr ist, muß mindestens eine der Aussagen, aus denen sie aufgebaut ist, wahr sein. Es bleibt nur die Aussage „Ich unterrichte Deutsch" übrig. Diese Konsequenz steht aber in logischem Widerspruch zu der Annahme, von der wir ausgegangen sind. Wir müssen also unsere Annahme fallenlassen und zu einer anderen übergehen.

Angenommen – wir beginnen wieder mit Prämisse (3) – „Ich unterrichte Deutsch" sei wahr und damit „Ich unterrichte Mathematik" falsch. Dann ist die Wahrheit der Prämissen (1) und (2) bereits gesichert. Prämisse (1) ist wahr, da „Ich unterrichte Deutsch" unserer Annahme entsprechend wahr ist – unabhängig davon, welchen Wahrheitswert „Ich erzähle eine Geschichte" hat. Der Wahrheitswert dieser Aussage spielt auch für Prämisse (2) keine Rolle. Da nämlich laut Annahme „Ich unterrichte Mathematik" – d. h. eine der beiden Grundaussagen von (2) – falsch ist, ist die Prämisse (2) wahr.

Auch diese Überlegung führte uns zu dem Ergebnis, daß der Lehrer in der nächsten Stunde Deutschunterricht erteilen wird und keinen Mathematikunterricht. Ob er allerdings seinen Unterricht in Verbindung damit durchführt, daß er eine Geschichte erzählt, wissen wir nicht.

2.2.1.4. Die systematische Ableitung von Konklusionen*

Mit der Frage, welche Konklusionen aus gegebenen Aussagen, die als Prämissen eines Schlusses fungieren, erschlossen werden können, haben wir uns schon in den voraufgegangenen Abschnitten beschäftigt. Wir konnten dort kein Verfahren angeben, nach dem *alle* Konklusionen gegebener Prämissen gewonnen werden können. Für die Aussagenlogik gibt es jedoch ein solches Verfahren. Es erfordert, daß man die Konjunktion der gegebenen Prämissen herstellt und dann die kanonische konjunktive Normalform des so gewonnenen Ausdrucks herstellt.

Die kanonische konjunktive Normalform eines aussagenlogischen Ausdrucks erfüllt alle Bedingungen einer konjunktiven Normalform, wie sie in 2.1.8.* dargestellt sind. Darüber hinaus ist folgende Bedingung an sie zu stellen: Jede Aussagenvariable, die in dem Ausdruck überhaupt vorkommt, muß in jedem Glied der kanonischen konjunktiven Normalform wenigstens einmal vorkommen, gleichgültig ob unnegiert oder negiert.

Der Ausdruck

$$(p \rightarrow q) \wedge p$$

erfüllt in seiner konjunktiven Normalform

$$(\sim p \vee q) \wedge p$$

diese Bedingung nicht; denn im zweiten Glied kommt die Aussagenvariable q nicht vor. Dieses Glied muß also erweitert werden. Dazu benötigt man folgende Regel:

Von einem Ausdruck p darf man zu einem Ausdruck $p \vee (q \wedge \sim q)$ übergehen und umgekehrt.

Diese Regel läßt sich folgendermaßen begründen. Eine Alternative ist wahr, wenn mindestens eins ihrer Glieder wahr ist; sie ist falsch, wenn alle ihre Glieder falsch sind. Nun ist ein Ausdruck der Gestalt $q \wedge \sim q$ eine Kontradiktion, also bei jeder Belegung falsch. Damit ist, falls p wahr ist, die Alternative $p \vee (q \wedge \sim q)$ wahr; falls p falsch ist, ist die Alternative falsch. Der Wahrheitswert dieser Alternative hängt also von p und nur von p ab, gleichgültig, welche Aussage oder Aussagenverbindung man für p einsetzen mag. Damit ist die Regel gerechtfertigt.

Wendet man sie auf

$$(\sim p \vee q) \wedge p$$

an, ergibt sich

$$(\sim p \vee q) \wedge [p \vee (q \wedge \sim q)].$$

Durch Ausdristribuieren erhalten wir:

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q).$$

Sehen wir die Ausdrücke $p \rightarrow q$ und p als Prämissen eines Schlusses an, dann gehen wir von der Annahme aus, daß beide wahr sind. Die Konjunktion beider ist dann ebenfalls wahr, ebenso jeder Ausdruck, der durch äquivalente Umformung daraus entsteht. Also können wir annehmen, daß auch

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

wahr ist. Da jedes Glied einer wahren Konjunktion selbst wahr ist, darf man ihr beliebige Glieder entnehmen und sie einzeln oder beliebige Konjunktionen von ihnen als wahre Aussagen bzw. Aussagenverbindungen betrachten und behandeln. Das trifft z. B. auf $(\sim p \vee q)$ oder – umgeformt: $(p \rightarrow q)$ – zu. Aus $p \rightarrow q$ und p folgt also u. a. $p \rightarrow q$. Dieses Resultat ist ein Hinweis darauf, daß sich unter den Konklusionen, die man aus irgendwelchen Prämissen erschließen kann, immer diese Prämissen selbst befinden. Das gilt in diesem Falle natürlich auch für p.

Aus $p \rightarrow q$ und p folgt aber z. B. auch die Konjunktion

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q).$$

Wendet man auf sie die 1. Distributionsregel an, allerdings in umgekehrter Richtung, wie wir diese Regel bisher immer angewandt haben, erhält man:

$$(\sim p \wedge p) \vee q.$$

Kann man einer Aussage oder Aussagenverbindung eine falsche Aussage hinzufügen und beide zu einer Alternative verbinden, so kann man aus einer Alternative ein falsches Glied auch wieder streichen, ohne damit den Wahrheitswert des Ausdrucks zu verändern. Streichen wir nun $(\sim p \wedge p)$. bleibt als Konklusion

$$q.$$

Wir können also zusammenfassen: Aus $p \rightarrow q$ und p folgt q. – Die entsprechende Regel ist uns bereits als Modus ponens bekannt.

Will man nach dem hier geschilderten Verfahren aus gegebenen Prämissen Konklusionen gewinnen, so hat man, nachdem die Prämissen symbolisiert sind, folgende Schritte zu vollziehen:

1. Die Prämissen sind zu einer Konjunktion zu verbinden.
2. Die kanonische konjunktive Normalform dieser Konjunktion ist herzustellen.
3. Dieser Normalform können beliebige Konjunktionsglieder und deren Konjunktionen als Konklusionen entnommen und nach den Regeln der Aussagenlogik umgeformt werden.

Gegeben seien die folgenden Aussagen als Prämissen eines Schlusses:

$$p \vee \sim q,$$
$$\sim p \vee q,$$
$$p.$$

Zunächst wird die kanonische konjunktive Normalform der Konjunktion unserer drei Prämissen hergestellt:

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge p$$
$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge [p \vee (q \wedge \sim q)]$$
$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q).$$

Der Übersichtlichkeit halber kann man, wenn in der Normalform ein Glied zweifach vorkommt, es an einer Stelle streichen. Das betrifft in unserem Beispiel $(p \vee \sim q)$. Es bleibt:

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q).$$

Aus

$$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$

ergibt sich

$$p \vee (q \wedge \sim q)$$

und damit

$$p.$$

Dieses Ergebnis ist bereits explizit in den Prämissen enthalten, nicht aber das folgende. Aus

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$$

ergibt sich

$$(\sim p \wedge p) \vee q$$

und damit

$$q.$$

Gegeben seien die Prämissen

$$p \rightarrow (q \rightarrow r),$$
$$p \rightarrow q.$$

Da in ihnen drei verschiedene Variable auftreten, muß auch jedes Glied der kanonischen konjunktiven Normalform die drei Variablen enthalten.

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q)$$
$$[\sim p \vee (\sim q \vee r)] \wedge (\sim p \vee q)$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q)$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge [(\sim p \vee q) \vee (r \wedge \sim r)]$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge [(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)]$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r).$$

Dieser Normalform entnehmen wir die beiden ersten Glieder und verbinden sie zu einer Konjunktion:

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r).$$

Dieser Ausdruck ist dem folgenden äquivalent:

$$(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \wedge q);$$

er wiederum läßt sich vereinfachen zu:

$$(\sim p \vee r)$$

und umformen in:

$$p \rightarrow r.$$

Zu Übungszwecken wird es nützlich sein, das letzte Beispiel im vorigen Abschnitt auch nach dem jetzt eingeführten Verfahren noch einmal zu betrachten. Die Prämissen lauteten:

„(1) Ich unterrichte Deutsch, oder/und ich erzähle eine Geschichte.
(2) Entweder ich erzähle eine Geschichte, oder ich unterrichte Mathematik (aber höchstens eins von beiden).
(3) Entweder ich unterrichte Deutsch, oder ich unterrichte Mathematik (und zwar genau eins von beiden)."

Ihre Konjunktion in symbolisierter Form lautet:

$$(p \vee q) \wedge (q | r) \wedge (p \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail r).$$

Von hier ab braucht man die Bedeutung der Variablen überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen, ja, man sollte sie nicht einmal berücksichtigen. Es genügt, die erforderlichen logischen Operationen exakt auszuführen und die Resultate dann wieder in die natürliche Sprache zu übersetzen.

Für den Übergang zur Normalform müssen der 2. und der 3. Ausdruck zunächst so umgeformt werden, daß sie außer den Aussagenvariablen höchstens noch Konjunktions-, Alternativ- und Negationszeichen vor Aussagenvariablen enthalten. Nach 2.1.6. kann $(q| r)$ durch $(\sim q \vee \sim r)$ ersetzt werden. Für $(p \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail r)$ stehen zwei äquivalente Ausdrücke zur Auswahl, nämlich $(p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$ und $(p \vee r) \wedge \sim (p \wedge r)$. Der letzte von ihnen ist für den Übergang zur konjunktiven Normalform günstiger. Wir wählen deshalb ihn und erhalten:

$$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge [(p \vee r) \wedge \sim (p \wedge r)].$$

Nach Weglassen der eckigen Klammern und der Umformung des 4. Gliedes in eine Alternative ist die konjunktive Normalform schon erreicht:

$$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim r).$$

Zur Herstellung der kanonischen konjunktiven Normalform muß jede der vier Alternativen erweitert werden:

$$[(p \vee q) \vee (r \wedge \sim r)] \wedge [(\sim q \vee \sim r) \vee (p \wedge \sim p)]$$
$$\wedge [(p \vee r) \vee (q \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \vee \sim r) \vee (q \wedge \sim q)].$$

Durch Ausdistribuieren erhalten wir:

$$[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r)] \wedge [(p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)] \wedge [(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r)]$$
$$\wedge [(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)].$$

Die eckigen Klammern haben wir zunächst wieder nur der Übersichtlichkeit wegen beibehalten. Außerdem haben wir in den Alternativen die Aussagenvariablen so umgeordnet, daß sie nun jeweils in alphabetischer Reihenfolge stehen. Auch diese Operation dient der Übersichtlichkeit. Sie ist zulässig, weil in Alternativen das Vertauschen von Gliedern ohne Einfluß auf den Wahrheitswert ist. Der Vergleich zwischen den Alternativen zeigt, daß zwei von ihnen zweifach vorkommen. Je eine der beiden doppelten Alternativen kann gestrichen werden, so daß die kanonische konjunktive Normalform endgültig folgende Gestalt hat:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r)$$
$$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r).$$

Jede der 6 Alternativen kann als eine Konklusion unserer Prämissen angesehen werden. Sie sagen jedoch, einzeln genommen, nicht viel aus. Die erste z. B. besagt, daß der Lehrer wenigstens eine der drei angegebenen Tätigkeiten ausführen wird, die vierte besagt, daß er wenigstens eine von ihnen nicht ausführen wird.

Wir werden also geeignete Paare von Alternativen zu Konjunktionen verbinden und diese dann vereinfachen. Nehmen wir z. B. die erste und die fünfte Alternative:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r).$$

Diese Konjunktion läßt sich umformen in

$$(p \vee r) \vee (q \wedge \sim q)$$

und vereinfachen zu

$$(p \vee r).$$

Die zweite und die dritte Alternative ergeben:

$$(p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$(p \vee \sim r) \vee (q \wedge \sim q)$$
$$(p \vee \sim r).$$

Verbinden wir jetzt die beiden schon gewonnenen Zwischenresultate zu

$$(p \vee r) \wedge (p \vee \sim r),$$

erhalten wir

$$p \vee (r \wedge \sim r)$$

und damit

$$p.$$

Wir verbinden nun die vierte und die sechste Alternative:

$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r).$$

Daraus erhalten wir

$$(\sim p \vee \sim r) \vee (q \wedge \sim q)$$

und

$$(\sim p \vee \sim r).$$

Diesen Ausdruck verknüpfen wir mit einem, den wir schon als Zwischenresultat gewonnen haben, zu:

$$(\sim p \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim r).$$

Daraus können wir

$$\sim r \vee (p \wedge \sim p)$$

und damit

$$\sim r$$

gewinnen.

Auch nach diesem Verfahren haben wir also die uns schon bekannten Konklusionen „Ich unterrichte Deutsch" und „Es ist nicht wahr, daß ich Mathematik unterrichte" gewonnen.

Es ist noch die Frage zu beantworten, nach welchen Gesichtspunkten man Paare von Alternativen zusammenstellen soll, die man dann zu Konjunktionen verbindet und schließlich vereinfacht. Am sichersten kommt man ans Ziel, wenn man ganz systematisch jede Alternative der kanonischen konjunktiven Normalform mit jeder anderen vergleicht. Zwei Alternativen, die sich nur darin unterscheiden, daß ein und dieselbe Aussagenvariable in der einen unnegiert und in der anderen negiert vorkommt, können zusammengefaßt werden; es entsteht dann ein Ausdruck, der genau die Variablen enthält, in denen beide Alternativen übereinstimmen, und der die Variable, die einmal unnegiert und einmal negiert vorkommt, nicht enthält. – Eine vollständige Übersicht über alle möglichen Konklusionen unseres letzten Beispiels und darüber, aus welchen Ausdrücken sie hervorgehen, findet man auf der folgenden Seite.

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$$

$$(p \vee q) \qquad (p \vee \sim r) \qquad (p \vee r) \qquad (\sim q \vee \sim r) \qquad (q \vee \sim r) \qquad (p \vee \sim q) \qquad (\sim p \vee \sim r)$$

$$p \qquad p \qquad \sim r \qquad \sim r$$

2.2.2. *Aussagenlogik und Schaltalgebra*

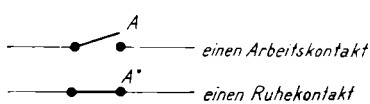
In jüngster Zeit – etwa seit dem Beginn dieses Jahrhunderts, besonders aber in den letzten Jahren – haben sich einige Anwendungsmöglichkeiten der formalen Logik gefunden, die zunächst ein wenig überraschen mögen, weil sie vom ursprünglichen Aufgabengebiet der Logik sehr weit entfernt zu sein scheinen; zu ihnen gehört die Anwendung der Aussagenlogik auf Schaltsysteme.

Aus Teilen der Aussagenlogik ist durch eine geeignete Interpretation ihrer Symbole, Operationen usw. die Schaltalgebra, eine Theorie der Schaltsysteme, entstanden. Aufgabe der Schaltalgebra ist die Analyse und die Synthese von elektromechanischen, elektronischen, pneumatischen und anderen Schaltsystemen. Die Schaltalgebra untersucht dabei den Zusammenhang zwischen den Eingangssignalen und den Ausgangssignalen solcher Schaltsysteme.

Wir wollen jetzt die Anwendung der Aussagenlogik am Beispiel von Schaltsystemen erklären, die aus Relaiskontakten aufgebaut sind. – Die Unterschiede zu anderen Arten von Schaltsystemen sind rein technischer Art, sie ergeben sich aus der Verschiedenartigkeit des Materials usw., sind aber für die Anwendbarkeit der Aussagenlogik ohne prinzipielle Bedeutung.

Die Schaltsysteme, die wir betrachten wollen, bestehen aus Leitungen, deren Enden mit den Polen einer Stromquelle verbunden sind. Die Relaiskontakte sind Bestandteile dieser Leitungen. Sie werden durch Relais geöffnet oder geschlossen und bewirken so, daß der Stromfluß unterbrochen wird oder daß Strom durch die Leitung fließen kann.

Es sind zwei Arten von Kontakten zu unterscheiden: *Arbeitskontakte* (oder Schließerkontakte) und *Ruhekontakte* (oder Öffnerkontakte). In unseren Zeichnungen bedeutet:

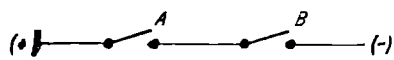


Arbeits- und Ruhekontakte unterscheiden sich folgendermaßen: Wenn das zugehörige Relais unter Strom steht und dementsprechend anzieht, schließt sich der Arbeitskontakt und stellt eine leitende Verbindung her, während sich der

Ruhekontakt öffnet und die Verbindung unterbricht. Wenn dagegen das Relais nicht unter Strom steht und dementsprechend nicht anzieht, ist der Arbeitskontakt unterbrochen (nicht leitend), während der Ruhekontakt geschlossen (leitend) ist. – Die Zeichnungen geben also eigentlich den Zustand der Kontakte wieder, den sie einnehmen, wenn das zugehörige Relais nicht unter Strom ist und nicht anzieht.

Ein und dasselbe Relais kann gleichzeitig mehrere Kontakte betätigen. Dieser Fall wird in den Zeichnungen dadurch angedeutet, daß verschiedene Kontakte durch denselben Buchstaben gekennzeichnet werden. Ruhekontakte werden durch einen Buchstaben mit einem Strich oder Punkt gekennzeichnet. „A" kennzeichnet also einen Arbeits-, „A'" einen Ruhekontakt, die beide durch dasselbe Relais betätigt werden. So kann man darauf verzichten, in die Schaltbilder die Relais einzuzeichnen.

Der einfachste Fall einer Schaltung liegt vor, wenn ein einzelner Kontakt mit seinen beiden nach außen führenden Leitungen an eine Stromquelle angeschlossen ist. Sind zwei oder mehr Kontakte in der Weise miteinander verbunden, wie es die folgende Zeichnung zeigt, so liegt eine *Reihenschaltung* vor.



Man sieht sofort, daß durch diese Schaltung genau dann Strom fließen kann, wenn beide Konktakte leitend, d. h. geschlossen sind. Das ist der Fall, wenn die beiden zugehörigen Relais unter Strom stehen. – Es ist unschwer zu erkennen, daß unsere Schaltung der logischen *Konjunktion* $p \wedge q$ entspricht, die ja genau dann wahr ist, wenn beide Aussagenvariablen p, q wahr sind.

Die nächste Zeichnung zeigt den einfachsten Fall einer *Parallelschaltung.*

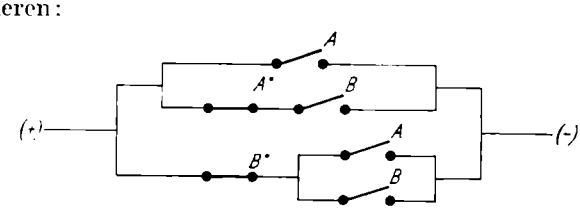
Diese ist bereits dann leitend, wenn mindestens einer der beiden Kontakte leitend ist. Dazu ist hier notwendig, daß das zu A gehörige Relais unter Strom steht *oder* das zu B' gehörige nicht unter Strom steht. – Es liegt auf der Hand, daß unsere

Schaltung der *Alternative* $p \vee \sim q$ entspricht, die schon dann wahr ist, wenn p wahr oder q falsch ist.

Die Entsprechungen zwischen Schaltungen und Aussagenverbindungen sind natürlich nicht auf so einfache Fälle beschränkt. Man kann vielmehr sagen, daß jeder Reihen-Parallelschaltung – d. h. jeder Schaltung, die aus Reihen- oder Parallelschaltungen oder beidem besteht – eine Aussagenverbindung entspricht. Wir haben bereits die wichtigsten Entsprechungen ausdrücklich festgestellt, wollen sie aber zunächst in einer Tabelle zusammenstellen, bevor wir uns daranmachen, Aufgaben der Schalttechnik mit den Mitteln der Aussagenlogik zu lösen.

Schalttechnik	***Aussagenlogik***
Kontakt	*Aussagenvariable*
Arbeitskontakt	unnegierte Aussagenvariable
Ruhekontakt	negierte Aussagenvariable
Schaltung	*Aussagenverbindung*
Reihenschaltung	Konjunktion
Parallelschaltung	Alternative
Stromzustand	*Wahrheitswert*
Stromfluß	Wahrheit
Stromunterbrechung	Falschheit

Nach dieser Zuordnungstabelle läßt sich jede beliebige Reihen-Parallel-Schaltung mit den Mitteln der Aussagenlogik beschreiben und analysieren. Das heißt, es läßt sich feststellen, unter welchen Bedingungen die Schaltung stromdurchlässig ist – bzw. ob sie es überhaupt ist – und unter welchen nicht. Wir wollen das an einem etwas komplizierteren Beispiel demonstrieren:



Unsere Schaltung ist insgesamt gesehen eine Parallelschaltung, die durch eine Alternative wiedergegeben werden

kann. Ihr oberer Teil ist wiederum eine Parallelschaltung (Alternative), die aus einem einzelnen Kontakt (Variable) und einer Reihenschaltung (Konjunktion) eines Ruhekontaktes (negierte Variable) und eines Arbeitskontaktes (Variable) besteht. Ordnen wir den Kontakten A die Variable p und den Kontakten B die Variable q zu, erhalten wir bis hierher den Ausdruck $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \ldots$ Der untere Teil der Schaltung ist eine Reihenschaltung (Konjunktion) eines Ruhekontakts ($\sim q$) und einer Parallelschaltung zweier Arbeitskontakte ($p \vee q$). Wir vervollständigen nun unseren Ausdruck und erhalten

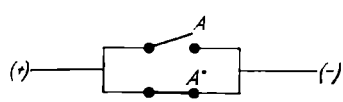
$$[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee [\sim q \wedge (p \vee q)].$$

Seine Wahrheitsmatrix gibt uns Aufschluß über die Stromdurchlässigkeit der Schaltung:

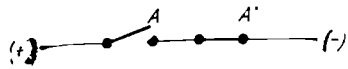
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim q \wedge (p \vee q)$	$[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee [\sim q \wedge (p \vee q)]$
w	w	f	f	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	f	f	f	f	f

Aus der Wahrheitsmatrix entnehmen wir, daß der Ausdruck erfüllbar, die Schaltung also unter gewissen Bedingungen durchlässig ist. Wenn wir die Ergebnisse der Matrix nach der Zuordnungstabelle übersetzen, wissen wir: Die Schaltung ist durchlässig, wenn beide Relais unter Strom stehen (Zeile 1), wenn das zu A gehörige Relais (Zeile 2) oder wenn das zu B gehörige Relais unter Strom steht (Zeile 3); sie ist nur dann nicht durchlässig, wenn beide Relais nicht unter Strom stehen (Zeile 4). Damit ist eine Analyse der Schaltung gegeben. Analog hierzu können wir aus den verschiedenen Spalten der Wahrheitsmatrix auch die Analyse der einzelnen Teile unserer Schaltung ablesen.

Ein Beispiel für eine immer durchlässige Schaltung ist:



Ihr entspricht der allgemeingültige Ausdruck $p \vee \sim p$. – Niemals durchlässig ist die Schaltung:

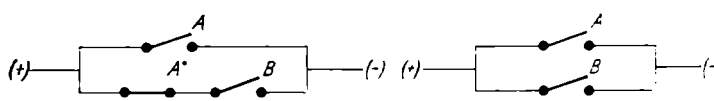


Ihr entspricht die Kontradiktion $p \wedge \sim p$.

Beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage, ob auch die Synthese von Schaltungen mit den Mitteln der Aussagenlogik zu bewältigen ist; d. h., ob man immer eine Reihen-Parallel-Schaltung konstruieren kann, die bestimmten Bedingungen hinsichtlich ihrer Durchlässigkeit genügt.

Das bedeutet für den Bereich der Logik, eine Aussagenverbindung zu finden, die eine bestimmte Wahrheitsmatrix besitzt und in der an logischen Konstanten nur Negation, Konjunktion und Alternative vorkommen. Diese Aufgabe ist lösbar, denn alle aussagenlogischen Konstanten lassen sich ja auf die genannten reduzieren, so daß also auch alle möglichen Wahrheitsmatrizen erfaßt werden können.

Wir geben ein Beispiel für die Synthese einer Schaltung: Die Aufgabe bestehe darin, eine Schaltung zu finden, die unter den gleichen Bedingungen durchlässig ist wie die von uns analysierte, aber die möglichst wenig Kontakte enthält. Die Lösung der Aufgabe können wir hier wieder der Wahrheitsmatrix entnehmen. Wir brauchen nur einen Ausdruck zu suchen, der dem ursprünglichen werteverlaufsgleich ist, aber möglichst wenige Aussagenvariable enthält, und dann eine diesem Ausdruck entsprechende Schaltung zu konstruieren. Die Ausdrücke $p \vee (\sim p \wedge q)$ und $p \vee q$ sind beide dem ursprünglichen Ausdruck werteverlaufsgleich. Damit sind die beiden folgenden Schaltungen unter denselben Bedingungen durchlässig wie die erste:



Von diesen beiden Schaltungen erfüllt natürlich die zweite die genannten Anforderungen am besten, da sie ein Minimum an Kontakten enthält.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Probleme der Analyse und der Synthese elektrischer Schaltungen mit den Mitteln der Aussagenlogik grundsätzlich gelöst sind. Das Problem der Synthese ist allerdings insofern nicht ganz zufriedenstellend gelöst, als Reihen-Parallel-Schaltungen nicht immer die

technisch günstigste Lösung darstellen. So würde z. B. eine Wechselschaltung, bei der man an 4 Stellen nach Belieben das Licht ein- oder ausschalten kann, zwischen zwei Schaltern 8 Leitungen erforderlich machen. Deshalb benützt man in der Technik in diesem Falle keine Reihen-Parallel-Schaltung, sondern eine Brückenschaltung, bei der 2 Leitungen zwischen je zwei Schaltern genügen. Die zuletzt genannte Schwierigkeit tut jedoch der prinzipiellen Bedeutung der Tatsache, daß man die Logik auf Schaltungen anwenden kann, keinen Abbruch.

Die Anwendbarkeit der Aussagenlogik auf Schaltsysteme ist sowohl für die Logik als auch für die Technik von großer Bedeutung. Die Bedeutung für die Technik besteht vor allem darin, daß man hier das Operieren, das Probieren mit materiellen Gegenständen (Leitungen, Kontakten, Schaltern usw.) durch das Operieren mit logischen Symbolen ersetzen kann. Für die formale Logik hat diese Anwendbarkeit in zweierlei Hinsicht Bedeutung: 1. Sie bestätigt die materialistische Auffassung vom Wesen der formalen Logik; sie bestätigt, daß die formale Logik eine Widerspiegelung von bestimmten Aspekten der objektiven Realität ist; 2. kann man Schaltungen konstruieren, die logische Aufgaben lösen und damit dem Menschen einen Teil seiner Denkarbeit abnehmen. Solche Schaltungen – die elektronischen Datenverarbeitungsanlagen – haben sich in der Praxis bereits bewährt und spielen als Hilfsmittel für die Prognose, Planung, Leitung und Organisation gesellschaftlicher Systeme und Prozesse bei der weiteren Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der DDR eine ständig wachsende Rolle. Ihr Wert liegt nicht nur darin, daß sie den Menschen bei der Bearbeitung von Daten um ein vielfaches an Geschwindigkeit und Genauigkeit übertreffen, sondern vor allem darin, daß sie formalisierbare geistige Prozesse automatisch bearbeiten, den Menschen von aufwendiger schematischer Denkarbeit befreien können und damit seine Möglichkeiten für die schöpferische Arbeit in einem bisher ungekannten Umfang erweitern.

2.2.3. Aussagenlogik und Neuronennetze

Es bereitet außerordentliche Schwierigkeiten, die Funktionsweise des menschlichen Gehirns zu untersuchen. Es gibt

bisher keine Möglichkeit, direkt zu beobachten, was, wenn der Mensch denkt, in seinem Gehirn vor sich geht.

In Fällen, in denen mit dem Untersuchungsobjekt aus irgendwelchen Gründen nicht experimentiert werden kann oder in denen das unzweckmäßig ist, konstruiert man ein Modell dieses Objekts, untersucht es und versucht dann, Rückschlüsse auf das Objekt selbst zu ziehen. Ein solches Modell kann materiell sein – wie das Flugzeugmodell, an dem im Windkanal die aerodynamischen Eigenschaften des Flugzeugs studiert werden –, es kann jedoch auch ein abstraktes, ein gedankliches Modell sein.

Die amerikanischen Gelehrten Warren S. McCulloch und Walter Pitts haben in den vierziger Jahren unseres Jahrhunderts, ausgehend von den seinerzeit bekannten gehirnanatomischen und neurophysiologischen Tatsachen sowie von den Ergebnissen von Verhaltensexperimenten, abstrakte Modelle der Gehirntätigkeit konstruiert – die *Nerven-* oder *Neuronennetze.* Die Theorie dieser Modelle, die Theorie der Nervennetze ist im Rahmen dieses Buches insofern interessant, als sie die Neuronennetze mit Mitteln der modernen formalen Logik untersucht und beschreibt.

Ein Neuronennetz ist eine Schaltung, ein Netz von *Neuronen.* Die Neuronen sind Nervenzellen – genauer: Modelle von Nervenzellen –, die aus einem Zellkörper und seinen Fortsätzen bestehen. Die Verbindung zwischen den Neuronen wird durch *Axone* hergestellt, die Impulse von einem Neuron zum anderen übertragen können. Am Ende der Axone befinden sich treibende oder hemmende Endknoten. Die Verbindungsstelle zwischen einem Neuron und den Endknoten von Axonen ist die *Synapse.* Die Synapsen sind insofern von besonderer Bedeutung, als durch sie der Impulsübertragung immer ein gewisser Widerstand entgegengesetzt wird. Es muß also eine gewisse Mindestzahl von Impulsen gleichzeitig eintreffen, um den Synapsenwiderstand oder Schwellenwert überhaupt überwinden zu können.

Hinsichtlich der Funktionsweise von Neuronennetzen geht man von folgenden Annahmen aus:

1. Jedes Neuron befindet sich in genau einem von zwei möglichen Zuständen; es ist entweder durch einen zuvor eingetroffenen Impuls im erregten Zustand, oder es ist im nichterregten Zustand. – Ein erregtes Neuron sendet ohne weitere Verzögerung über sein Axon oder seine Axone einen Impuls an die mit ihm verbundenen Neuronen aus, es feuert – wie

man auch sagt; ein Neuron, das sich im nichterregten Zustand befindet, feuert nicht.

2. Die Stärke der Synapsenwiderstände und die Stärke der Impulse werden als ganzzahlig angenommen. – Es habe z. B. ein Neuron einen Synapsenwiderstand der Stärke 3. Dann kann dieses Neuron nur in den erregten Zustand versetzt werden, wenn auf dem Wege über treibende Endknoten gleichzeitig mehrere Impulse eintreffen, die zusammen mindestens die Stärke 3 erreichen.

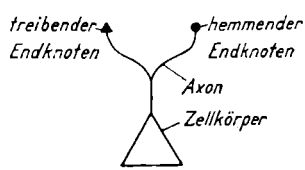
3. Das ganze Neuronennetz arbeitet nach einem bestimmten, einheitlichen Rhythmus, der in Takte eingeteilt ist. Impulse werden immer nur in bestimmten Intervallen abgefeuert. Wenn eine genügende Anzahl an einem Neuron anliegender treibender Endknoten im Takt t erregt ist, wird das Neuron im darauffolgenden Takt $t + 1$ erregt. Ein erregtes Neuron geht, falls es nicht abermals erregt wird, im folgenden Takt in den nichterregten Zustand über.

4. Ist ein an einem Neuron anliegender hemmender Endknoten erregt, so ist das Neuron im folgenden Takt auf keinen Fall erregt.

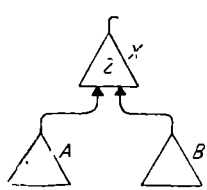
5. Die Struktur des Neuronennetzes ist unveränderlich.

Einige Beispiele mögen verdeutlichen, wie die Aussagenlogik zur Beschreibung von Neuronennetzen verwendet werden kann.

Neuronen werden in den Abbildungen von Neuronennetzen folgendermaßen schematisch dargestellt:



Die folgende Abbildung stellt ein *Konjunktionsnetz* dar, eine Neuronenverbindung, die der aussagenlogischen Konjunktion entspricht:



Die Impulsstärke der Neuronen A und B wird mit 1 angenommen, der Synapsenwiderstand des Neurons X mit 2. Unter dieser Bedingung ist X im Takt $t + 1$ erregt genau dann, wenn A *und* B im Takt t erregt waren.

Zur Beschreibung eines solchen Neuronennetzes verabreden wir, daß die aussagenlogischen Konstanten in den in 2.1. eingeführten Bedeutungen verwendet werden. Zusätzlich verabreden wir:

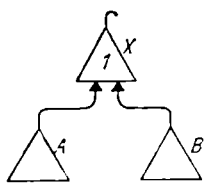
„A_t" bedeute: „das Neuron A ist in Takt t erregt",

„$\sim A_t$" bedeute: „das Neuron A ist im Takt t nicht erregt".

Nun läßt sich unser Konjunktionsnetz beschreiben durch den Ausdruck:

$$X_{t+1} \leftrightarrow (A_t \wedge B_t).$$

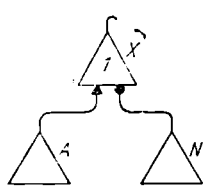
In der folgenden Abbildung ist ein *Alternativnetz* dargestellt:



Das Neuron X mit dem Synapsenwiderstand 1 ist schon dann erregt, wenn mindestens eins der beiden Neuronen A, B im voraufgegangenen Takt erregt war. Dieses Netz wird beschrieben durch:

$$X_{t+1} \leftrightarrow (A_t \vee B_t).$$

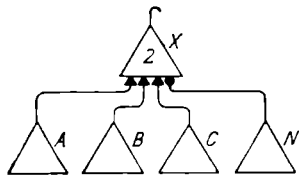
Zur Beschreibung des folgenden Netzes wird auch die Negation gebraucht:



Das Erregtsein von N bewirkt nach Annahme 4., daß X im folgenden Takt nicht erregt ist. X ist erregt genau dann, wenn A im voraufgegangenen Takt erregt, N dagegen nicht erregt war:

$$X_{t+1} \leftrightarrow (A_t \wedge \sim N_t).$$

Als letztes Beispiel geben wir noch ein etwas komplizierteres Netz an:



Es wird beschrieben durch:

$$X_{t+1} \leftrightarrow \{[(A_t \wedge B_t) \vee (A_t \wedge C_t) \vee (B_t \wedge C_t)] \wedge \sim N_t\}.$$

Das bedeutet: Das Neuron X ist im Takt $t + 1$ erregt genau dann, wenn im Takt t mindestens zwei der Neuronen A, B, C erregt waren, aber das Neuron N nicht erregt war.

Zu einem vollständigen Neuronennetz gehören noch Eingabe- oder Rezeptorneuronen, die ihre Impulse nicht von anderen Neuronen, sondern aus der Umwelt dieses Netzes empfangen, und Ausgabeneuronen, deren Impulse das Nervennetz verlassen und z. B. an Muskelfasern weitergegeben werden. Bei komplizierteren Neuronennetzen ist neben einer größeren Zahl von Neuronen auch die Tatsache zu berücksichtigen, daß Neuronen nicht nur an je ein Neuron Impulse weitergeben – wie in unseren Beispielen –, sondern an mehrere. Das ändert jedoch nichts daran, daß all diese Neuronennetze mit logischen und mathematischen Mitteln beschrieben und studiert werden können.

Die Theorie der Nervennetze ist heute schon eine sehr umfassende Theorie. Sie liefert nicht nur Modelle für so verhältnismäßig einfache logische Schaltungen von der Art der beschriebenen, sondern sie gestattet auch, bedingte Reflexe zu modellieren. Das ist sehr bedeutsam, weil die bedingten Reflexe in der höheren Nerventätigkeit, insbesondere im Zusammenhang mit Lernprozessen eine wichtige Rolle spielen.

In anderer Hinsicht wurde die Theorie der Neuronennetze von S. C. Kleene weiterentwickelt. Er betrachtete die Neuronen und aus ihnen aufgebaute Netze als endliche Automaten und schuf eine allgemeine Theorie der endlichen Automaten, die wiederum bei der Konstruktion programmgesteuerter Maschinen ihre Früchte trug.

Die Annahmen über die Funktionsweise der Neuronennetze treffen nach neueren Erkenntnissen wahrscheinlich zum Teil

auf die Gehirntätigkeit nicht zu, zum Teil treffen sie nur bedingt zu. Die Neuronennetze sind deshalb verhältnismäßig vereinfachte, wenn nicht gar grobe Modelle der Gehirntätigkeit. Aber wenn sich diese Modelle auch nur in einigen wesentlichen Merkmalen als zutreffend erweisen, dann ergeben sich schon daraus philosophisch bedeutsame Schlußfolgerungen. Wenn sich Funktionen oder Strukturen von Nervensystemen auch nur angenähert mit den Mitteln der formalen Logik beschreiben lassen, so wird die materialistische Begründung der formalen Logik durch ein weiteres Argument gestützt. Ferner ergibt sich eine Erklärung für die Tatsache, daß die Menschen in der Regel besser logisch denken, als das nach ihrer Ausbildung zu erwarten wäre. Man kann das dann als eine Folge der „logischen Schaltung" des menschlichen Gehirns erklären, die sich im Prozeß der aktiven Auseinandersetzung des Menschen mit der objektiven Realität im Laufe seiner Entwicklungsgeschichte herausgebildet und verbessert hat. Diese Schaltung und damit die Fähigkeit zum logischen Denken, die ein einzelner im Laufe seines Lebens gar nicht erwerben könnte, ist vererbbar. Für den einzelnen kommt es nur darauf an, von dieser prinzipiellen Fähigkeit Gebrauch zu machen, sie zu schulen und zu entwickeln.

3. PRÄDIKATENLOGIK

In 3.1. werden die wichtigsten Grundbegriffe und Symbole der Prädikatenlogik eingeführt. Sie werden in 3.2. beim prädikatenlogischen Schließen angewendet. In 3.3. werden weitere Begriffe der Prädikatenlogik eingeführt und einzelne Probleme der Prädikatenlogik besprochen.

3.1. Begriffe und Begriffsbeziehungen

Zunächst wird der Begriff vom Standpunkt der Erkenntnistheorie her betrachtet. Danach wird untersucht, welche Seiten des Begriffs in der formalen Logik eine Rolle spielen.

3.1.1. Der Begriff

Der Begriff ist ebenso wie die Aussage eine gedankliche Form der Widerspiegelung. Er tritt oft als Bestandteil einer Aussage auf, wenn er nicht z. B. gerade selbst Gegenstand einer Untersuchung ist. – Eine *Aussage* widerspiegelt, wie gesagt, einen Sachverhalt; d. h. die Tatsache, daß einem Individuum ein Merkmal zukommt usw. Die Untersuchung von Sachverhalten führt uns nun zu dem, was im *Begriff* widergespiegelt wird.

Die objektive Realität ist unendlich mannigfaltig. Die in ihr existierenden Individuen unterscheiden sich mehr oder weniger voneinander. Jeder Mensch z. B. unterscheidet sich von allen anderen Menschen und erst recht von anderen Lebewesen. Das bedeutet jedoch nicht, daß sich die objektive Realität aus lauter einzelnen, voneinander isolierten Individuen zusammensetzt. Vielmehr haben die Individuen ja mit anderen Gemeinsamkeiten, gemeinsame Eigenschaften. Jeder Mensch hat mit allen anderen u. a. die Eigenschaft, Bewußtsein zu besitzen, gemeinsam. Die Menschen haben mit allen Säugetieren die Eigenschaft des warmen Blutes gemeinsam. – Ebenso ist es mit den Beziehungen der Individuen zu anderen

Individuen. Bestimmte Menschen stehen zu anderen in der Beziehung des Vaterseins, andere hingegen nicht.

Sofern ein Individuum ein Merkmal mit anderen gemeinsam hat, bildet es mit diesen zusammen eine Klasse. Eine *Klasse von Individuen* ist also eine Gesamtheit von Individuen mit mindestens einem gemeinsamen Merkmal. – Wir gebrauchen hier den Terminus „Individuum" in der schon in 2.1.1. charakterisierten Bedeutung. – Alle Dinge der objektiven Realität haben das gemeinsame Merkmal, materiell zu sein. Die allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR bilden dadurch eine Klasse, daß in ihnen Kinder und Jugendliche nach einem vom Ministerium für Volksbildung herausgegebenen Lehrplan unterrichtet und erzogen werden. Ebenso bilden auch die Ehepaare wie die Geschwister Klassen; ihnen sind jeweils bestimmte Beziehungen gemeinsam.

Jedes Individuum kann, da es unendlich viele verschiedene Merkmale besitzt, unendlich vielen verschiedenen Klassen angehören. Ein bestimmter Mensch gehört der Klasse der Lehrer, der Klasse der Briefmarkensammler, der Klasse der SED-Mitglieder, der Klasse der Unverheirateten usw. an.

Die Zugehörigkeit zu einer Klasse bedeutet nicht, daß ein räumliches oder zeitliches Miteinander gegeben sein muß. Alle Friedensfreunde z. B. bilden eine Klasse, obwohl sie über die ganze Erde verteilt leben. Hippokrates und Robert Koch gehören zur Klasse der berühmten Ärzte, obwohl sie zu ganz verschiedenen Zeiten lebten.

Wenn man bei der Untersuchung der Individuen einer Klasse auf ihre Merkmale hin von einem Individuum zum anderen übergeht, so findet man Merkmale, die bei diesem Übergang unverändert erhalten bleiben – die *invarianten Merkmale.* Das sind nicht etwa schlechthin unveränderliche Merkmale; sie sind es nur hinsichtlich dieses Übergangs von einem Individuum zum anderen. Im übrigen unterliegt jedes Individuum – und damit auch seine Merkmale – der Veränderung, die dazu führen kann, daß ein Individuum aus einer bestimmten Klasse in eine andere überwechselt. Jemand, der lesen und schreiben gelernt hat, gehört nicht mehr zur Klasse der Analphabeten wie vorher, sondern zur Klasse der des Lesens und Schreibens Kundigen. Er hat also nicht mehr das invariante Merkmal der Analphabeten, sondern ein anderes, auf Grund dessen er einer anderen Klasse von Individuen angehört. – Außer den invarianten Merkmalen findet man solche,

die sich verändern, wenn man innerhalb einer Klasse von einem Individuum zum anderen übergeht – die *individuellen Merkmale.* Sie sind es, durch die sich das Individuum von den anderen innerhalb einer Klasse unterscheidet. – Es hat also keinen Sinn, einfach von den invarianten und den individuellen Merkmalen eines Individuums zu sprechen, man muß immer hinzufügen, hinsichtlich welcher Klasse die Merkmale invariant oder individuell sind. Ein und dasselbe Merkmal ein und desselben Individuums kann im Rahmen einer Klasse invariant, im Rahmen einer anderen individuell sein.

Wie zwischen den Individuen, so gibt es auch zwischen den Klassen von Individuen Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Klassen mit gemeinsamen Merkmalen bilden wieder eine Klasse – eine *Klasse von Klassen* oder Klasse höherer Stufe. Menschen, die zusammen wohnen und zusammen wirtschaften, bilden einen Haushalt. Jeder Haushalt ist demnach eine Klasse von Individuen. Die Haushalte nun, die z. B. aus fünf Personen bestehen, bilden eine Klasse von Klassen, nämlich die Klasse der Fünf-Personen-Haushalte. Neben dem in dieser Hinsicht invarianten Merkmal, aus fünf Personen zu bestehen, verfügen diese Haushalte natürlich auch über individuelle Merkmale – wie die Anzahl der Kinder, die Höhe des gemeinsamen Einkommens usw. –, in denen sie sich unterscheiden.

Die voraufgegangenen Betrachtungen dienten dazu, eine Definition des Begriffs vorzubereiten. Wir wollen nämlich den Begriff – wie in 2.1.1. die Aussage – definieren, indem wir sagen, was durch den Begriff widergespiegelt wird.

Ein *Begriff* ist die gedankliche Widerspiegelung einer Klasse von Individuen oder einer Klasse von Klassen auf der Grundlage invarianter Merkmale.

Geht man beispielsweise von einem sozialistischen Staat – d. h. einem Individuum aus der Klasse der sozialistischen Staaten – zum anderen über, so sind Merkmale wie die Herrschaft der Arbeiterklasse, das Bündnis der Arbeiter mit den übrigen Werktätigen usw. invariant. Diese invarianten Merkmale sind die Grundlage für die Bildung des Begriffs „sozialistischer Staat".

Es gehört nicht zu den Aufgaben dieses Buches, den Widerspiegelungsbegriff der dialektisch-materialistischen Erkenntnistheorie ausführlich darzustellen. Aber an dieser Stelle ist zumindest ein Hinweis darauf notwendig, daß Widerspiegelung im Sinne der Erkenntnistheorie des dialektischen Materialis-

mus nicht eine einfache passive Abbildung der Wirklichkeit im menschlichen Bewußtsein ist. Der Mensch hat ja die Fähigkeit, zu abstrahieren und mit Hilfe seiner Abstraktionen, wenn sie richtig sind, zu tieferen Erkenntnissen über die Wirklichkeit zu kommen. In der Geometrie betrachtet man z. B. den Punkt als ein Gebilde, das keinerlei Ausdehnung besitzt. Der Punkt in diesem Sinne ist ein Produkt menschlicher Abstraktionstätigkeit, ein ideales Gebilde, das dem Menschen zur Erkenntnis wesentlicher Zusammenhänge in der Wirklichkeit verhilft, obwohl es solche idealen Punkte objektiv gar nicht gibt. Unsere Definition des Begriffs darf also nicht so verstanden werden, als wenn mit ihr alle erkenntnistheoretischen Probleme des Begriffs geklärt und alle speziellen Formen der begrifflichen Widerspiegelung durch sie erfaßt wären[1].

Hier ist eine weitere philosophische Bemerkung angebracht, und zwar über die Behauptung, daß Individuen Klassen bilden. In philosophischer Terminologie ist die Klasse von Individuen nichts anderes als das Allgemeine, das in diesen Individuen existiert und damit objektiv existiert. Dem Allgemeinen und damit auch der Klasse kommt keineswegs eine besondere, von den Individuen losgelöste Existenz zu. Genauer gesagt, ist die Klasse im Sinne des dialektischen Materialismus das abstrakte oder numerisch Allgemeine in den Individuen. Das konkret oder spezifisch Allgemeine als das Gemeinsame aller Individuen einer Klasse in ihrer Beziehung zu anderen Individuen, zu anderen Klassen, das zugleich das Wesentliche dieser Individuen ist, wird durch die Mittel der formalen Logik nicht erfaßt und muß deshalb auch hier unberücksichtigt bleiben[2].

Die Form, in der der Begriff im menschlichen Bewußtsein existiert, ist (im allgemeinen) das *Wort*. Es ist dabei gleichgültig, ob ein Begriff in der Form eines einzelnen Wortes – z. B. „Arbeiterklasse" – oder mehrerer Wörter – z. B. „Weltanschauung der Arbeiterklasse" – existiert. Oft werden Begriffe auch mit Hilfe von Nebensätzen zum Ausdruck gebracht. In der Aussage „Die Werktätigen, die am sozialistischen Wettbewerb teilnehmen, nützen ihrem Staat und sich selbst" wird mit Hilfe des Nebensatzes aus dem Begriff „Werktätige" ein

[1] Vgl. G. Klaus, Spezielle Erkenntnistheorie, Berlin 1965, S. 44–49, 241 ff. u. a.

[2] Vgl. Philosophisches Wörterbuch, Stichwort „Allgemeines".

Begriff gebildet, der nicht die gesamte Klasse der Werktätigen, sondern nur eine Teilklasse von ihr mit einem zusätzlichen invarianten Merkmal widerspiegelt. Man könnte statt der ursprünglichen Formulierung auch „Die am sozialistischen Wettbewerb teilnehmenden Werktätigen . . ." sagen; dann wird ganz deutlich, daß der Nebensatz hier nicht etwa eine Aussage bedeutet, sondern zur sprachlichen Existenzform eines Begriffs gehört.

Analog zu dem schon anläßlich der Behandlung der Aussage Gesagten ist auch hier wieder zu bemerken, daß die formale Logik sich nicht mit bestimmten, konkreten Begriffen beschäftigt, sondern die Begriffe schlechthin und insbesondere ihre Beziehungen zueinander untersucht. Auch die Fragen der Entstehung und der Veränderung von Begriffen gehören nicht ins Untersuchungsgebiet der formalen Logik, sondern in das der Erkenntnistheorie bzw. der dialektischen Logik. Die formale Logik liefert nur Regeln, die bei der Bildung von Begriffen beachtet werden müssen.

3.1.2. Intension und Extension von Begriffen

Begriffe widerspiegeln nach der Definition in 3.1.1. zweierlei: invariante Merkmale und Klassen. Hiervon ausgehend, lassen sich innerhalb eines Begriffs seine Intension und seine Extension unterscheiden. Ihre nähere Betrachtung wird sowohl zu einem tieferen Verständnis der allgemeinen Definition des Begriffs führen als auch die Möglichkeit geben, genauer abzugrenzen, in welcher Hinsicht sich die formale Logik mit Begriffen beschäftigt.

Die Intension eines Begriffs ist die gedankliche Widerspiegelung der invarianten Merkmale einer bestimmten Klasse von Individuen oder Klasse von Klassen. Statt „Intension eines Begriffs" sagt man auch „Begriffsinhalt". – Die Intension des Begriffs „Mensch" ist die Widerspiegelung der allen Menschen gemeinsamen Eigenschaften wie der Besitz eines Bewußtseins, einer Sprache usw.

Die Extension eines Begriffs ist die gedankliche Widerspiegelung einer bestimmten Klasse von Individuen oder Klasse von Klassen. Statt „Extension eines Begriffs" sagt man auch „Begriffsumfang". – Die Extension des Begriffs „Mensch" ist die Widerspiegelung der Klasse der Menschen.

Um den Begriff „Intension" genau zu bestimmen, muß man noch hinzufügen, die invarianten Merkmale *welcher* Klasse die Intension eines Begriffs widerspiegelt. In entsprechender Weise muß auch der Begriff „Extension" präziser bestimmt werden.

Die *Intension eines Begriffs* ist die gedankliche Widerspiegelung von Merkmalen, die innerhalb der durch die Extension dieses Begriffs widergespiegelten Klasse von Individuen oder von Klassen invariant sind.

Die *Extension eines Begriffs* ist die gedankliche Widerspiegelung derjenigen Klasse von Individuen oder von Klassen, von der invariante Merkmale durch die Intension dieses Begriffs widergespiegelt werden.

Die genauere Bestimmung der Intension und der Extension eines Begriffs hat gleichzeitig ihren Zusammenhang deutlicher werden lassen. Außerdem wird die allgemeine Definition des Begriffs konkreter, wenn man sich vergegenwärtigt, daß jeder Begriff eine dialektische Einheit seiner Intension und seiner Extension ist, d. h. eine untrennbare Einheit von Unterschiedlichem.

Im allgemeinen gibt es zu jedem Begriff eine Klasse, auf die er zutrifft. Das menschliche Denken ist jedoch kein passiver Spiegel, der genau die Lichtstrahlen reflektiert, die auf seine Oberfläche auftreffen, sondern es ist trotz aller grundsätzlichen Abhängigkeit von der objektiven Realität im einzelnen verhältnismäßig unabhängig. Es kann, wie gesagt, Abstraktionen bilden, darunter auch solche, die in sich logisch widersprüchlich sind oder Naturgesetzen widersprechen. So ist es z. B. in der Lage, Begriffe wie „Gott", „Walküre" usw. zu bilden, die keine in der Wirklichkeit vorhandenen Klassen von Individuen widerspiegeln. Um auch in solchen Fällen mit den Extensionen von Begriffen operieren zu können, führt man den Begriff der Nullklasse oder leeren Klasse ein. Die *Nullklasse* ist die Klasse, die kein einziges Individuum enthält. Man sagt dann, daß die Extension solcher Begriffe wie „Gott", „Walküre" usw. eine Widerspiegelung der Nullklasse ist, d. h., daß es kein Individuum mit den in diesen Begriffen widergespielten Merkmalen gibt. – Nach dieser Erweiterung kann man sagen, daß es zu jedem Begriff eine Klasse gibt, auf die er zutrifft.

Andererseits gibt es natürlich bei weitem nicht zu jeder Klasse auch einen Begriff, denn es gibt in der objektiven Realität unendlich viele Klassen, im menschlichen Bewußtsein aber nur endlich viele Begriffe.

Man kann einen Begriff dadurch bestimmen, daß man seine Intension angibt. Aber man kann ihn auch bestimmen, indem man seine Extension angibt. Damit ist nicht gesagt, daß jeder Intension genau eine Extension entspricht und umgekehrt, denn es gibt Begriffe, die zwar die gleiche Extension, aber verschiedene Intensionen haben. Die Begriffe „Bewußtsein besitzen" und „Werkzeuge produzieren können" hängen inhaltlich zwar sehr eng miteinander zusammen, sind aber keinesfalls gleichzusetzen; sie treffen jedoch beide genau auf die Klasse der Menschen zu. Weil aber die Prädikatenlogik sich auf die Betrachtung extensionaler Beziehungen beschränkt, macht sie zwischen solchen Begriffen keinen Unterschied. Es ist in ihrem Rahmen erlaubt, Begriffe mit verschiedener Intension, aber gleicher Extension gegeneinander auszutauschen. Auf diese Weise ist eine Entsprechung zwischen Intensionen und Extensionen hergestellt.

3.1.3. Der Begriff in der Prädikatenlogik

Begriffe können Bestandteile von Aussagen, von Aufforderungen und von Fragen sein. Hier geht es nur um das Verhältnis von Begriff und Aussage; das Verhältnis des Begriffs zur Aufforderung und zur Frage zu bestimmen gehört nicht zu den Aufgaben einer Logik der Aussagen.

Wenn man sagt, Begriffe sind Bestandteile von Aussagen oder kommen in Aussagen vor, hat man den Zusammenhang zwischen Begriff und Aussage nur sehr äußerlich charakterisiert. Außerdem ist ja auch nicht jeder Bestandteil einer Aussage ein Begriff.

Die Seite des Verhältnisses von Begriff und Aussage, die in der formalen Logik wesentlich ist, erfaßt man am besten, wenn man den Begriff als *Aussagefunktion* oder *Aussageform* betrachtet. Aussagefunktionen sind z. B. „x ist Fernstudent" und „x ist Vater von y".

Aussagefunktionen haben, wie man sieht, die sprachliche *Form* von Aussagesätzen, ohne jedoch Aussagen zu sein. Von den beiden als Beispiel angeführten Aussagefunktionen gilt ebensowenig wie von beliebigen anderen Aussagefunktionen, daß sie wahr bzw. falsch sind. Diese Eigenschaft aber hat ja bekanntlich jede Aussage.

Daß eine Aussagefunktion weder wahr noch falsch ist, liegt darin begründet, daß sie nichts behauptet und nichts verneint, daß sie eine unvollständige Aussage ist, mindestens eine Leerstelle enthält, was sprachlich durch sogenannte freie Variable angedeutet wird. Eine Aussage dagegen, genauer, ihr sprachlicher Ausdruck, enthält keine freie Variable. Unsere erste Aussagefunktion enthält in ihrer sprachlichen Form die freie Variable x, unsere zweite Aussagefunktion die freien Variablen x und y. Wir können an dieser Stelle noch keine Definition des Begriffs „freie Variable" geben. Wir können vorerst nur soviel sagen: Eine freie Variable ist eine Variable, über die noch nicht verfügt ist, die noch keine Bedeutung besitzt.

Eine *Aussagefunktion* ist also ein gedankliches Gebilde, das die Form eines Aussagesatzes hat. Sie enthält im Gegensatz zur Aussage mindestens eine Leerstelle – angedeutet durch freie Variable – und ist demzufolge weder wahr noch falsch.

Es war eingangs davon die Rede, daß wir Begriffe als Aussagefunktionen betrachten wollen. Im täglichen Leben und in der wissenschaftlichen Arbeit treten uns allerdings Begriffe in der Regel nicht in der Gestalt von Aussagefunktionen entgegen. Wir sprechen vom Begriff „Fernstudent" und nicht von der Aussagefunktion „x ist Fernstudent" oder „x hat die Eigenschaft, Fernstudent zu sein". Wir sprechen vom Begriff „Vater" und nicht von der Aussagefunktion „x ist Vater von y" oder „zwischen x und y besteht die Beziehung des Vaterseins". Trotzdem ist es richtig, den Begriff als Aussagefunktion zu betrachten, denn Eigenschaften und Beziehungen existieren ja nicht als Eigenschaften oder Beziehungen „an sich", sondern sie existieren immer nur als *Eigenschaften von Individuen*, als *Beziehungen zwischen Individuen* usw. Diese Tatsache wird ausdrücklich und bereits äußerlich sichtbar berücksichtigt, wenn man den Begriff als Aussagefunktion betrachtet. Sie muß aber auch dann berücksichtigt werden, wenn Begriffe in der üblichen Form betrachtet werden, sonst kann man zu einer falschen Verabsolutierung von Eigenschaften oder Beziehungen kommen und damit die objektive Realität fehlerhaft widerspiegeln.

Im folgenden denken wir uns jeweils irgendeinen Individuenbereich zugrunde gelegt. Die betrachteten Aussagen und Aussagefunktionen sind dann jeweils als Aussagen bzw. Aussagefunktionen über diesen Individuenbereich, d. h. über die in ihm enthaltenen Individuen und ihre Merkmale zu verstehen.

Um vom Begriff als Aussagefunktion zur Aussage zu kommen, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Die erste besteht darin, daß man die Aussagefunktion zu einer Aussage vervollständigt, indem man die Leerstellen durch geeignete Begriffe ausfüllt. Auf der sprachlichen Ebene geht das so vor sich, daß man die freien Variablen durch geeignete Namen, Bezeichnungen ersetzt. So erhält man aus „x ist Fernstudent", indem man für die freie Variable x den Individuennamen „Fritz Müller" einsetzt, den Aussagesatz „Fritz Müller ist Fernstudent". Seine Bedeutung ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist, je nachdem, ob der gemeinte Fritz Müller tatsächlich Fernstudent ist oder nicht. Aus „x ist Vater von y" gewinnt man natürlich nur dann einen Aussagesatz, dessen Bedeutung eine Aussage ist, wenn man beide freie Variable durch Individuennamen ersetzt – z. B. „Stepan Pawlowitsch Titow ist Vater von German Stepanowitsch Titow".

Im Rahmen erkenntnistheoretischer Untersuchungen ist die Unterscheidung zwischen gedanklicher und sprachlicher Ebene unerläßlich. Eine solche Unterscheidung kann aber zu Formulierungen führen, die sehr umständlich und schwerverständlich sind, wie sich im voraufgegangenen Absatz schon zeigte. Die genaue gegenseitige Entsprechung von Aussagen und vollständigen Aussagesätzen, von Aussagefunktionen und Aussagesätzen mit freien Variablen, von Leerstellen und freien Variablen erlaubt uns, unsere Ausdrucksweise für die Zwecke der formalen Logik etwas zu vereinfachen, ohne daß Mißverständnisse entstehen können. Wir werden dementsprechend künftig sagen, daß eine Aussagefunktion freie Variable enthält, obwohl sie strenggenommen nur Leerstellen enthält, denen auf sprachlicher Ebene freie Variable entsprechen.

Die Variablen x, y, z, wie wir sie in den voraufgegangenen Beispielen verwendet haben, sind Individuenvariable. Sie dienen als Platzhalter für Individuennamen, d. h. für sprachliche Ausdrücke, die eindeutig ein Individuum bezeichnen. Beispiele für solche sprachlichen Ausdrücke sind „Fritz Müller" (notfalls wird man der Eindeutigkeit wegen Geburtstag und -ort o. ä. hinzufügen), „das Haus in 108 Berlin, Universitätsstraße 3b" und „der letzte Satz des Kommunistischen Manifests von Marx und Engels".

Die erste Möglichkeit, aus einer Aussagefunktion, in der nur Individuenvariable als freie Variable vorkommen, eine Aussage zu gewinnen, besteht also darin, daß man alle freien In-

dividuenvariablen durch Individuennamen ersetzt. – Man spricht hier auch von einer Belegung der Individuenvariablen. – Durch dieses Verfahren entsteht aus einer Aussagefunktion eine *Einzelaussage* oder *singuläre Aussage*.

Die zweite Möglichkeit, aus einer Aussagefunktion eine Aussage zu gewinnen, besteht darin, daß man die freien Variablen bindet. Das geschieht mit Hilfe von *Operatoren* oder *Quantoren*.

Aus der Aussagefunktion „x ist Fernstudent" gewinnt man mit Hilfe eines *Existentialoperators* oder *Existenzquantors* die *Existentialaussage* oder *Existenzaussage*

$$\exists(x)\ [x \text{ ist Fernstudent}].$$

Das bedeutet: „Es gibt mindestens ein Individuum x, für das gilt: x ist Fernstudent."

Wenn das Symbol für den Existentialoperator „$\exists(x)$" vor einer Aussagefunktion steht, die die Variable x enthält, so ist damit gemeint, daß es tatsächlich ein Individuum mit dem in der Aussagefunktion widergespiegelten Merkmal gibt, möglicherweise aber auch mehrere oder viele.

Aus der Aussagefunktion „x ist Vater von y" gewinnt man mit Hilfe von zwei Existentialoperatoren die Existentialaussage

$$\exists(x)\ \exists(y)\ [x \text{ ist Vater von } y].$$

Das bedeutet: „Es gibt mindestens ein x, und es gibt mindestens ein y, für die gilt: x ist Vater von y." Man kann aber auch die Aussage

$$\exists(y)\ [\text{S. P. Titow ist Vater von } y]$$

gewinnen, indem man von beiden bisher genannten Möglichkeiten Gebrauch macht. Wichtig ist nur, daß wiederum *alle* freien Variablen berücksichtigt werden.

Wir können nun definieren:

Eine *Existentialaussage* ist eine Aussage, die feststellt, daß es mindestens ein Individuum gibt, das ein bestimmtes Merkmal besitzt. Sie ist wahr genau dann, wenn aus der in ihr enthaltenen Aussagefunktion durch mindestens eine Belegung der freien Variablen eine wahre Aussage entsteht.

Zur Erläuterung des letzten Satzes geben wir noch ein Beispiel: Aus der Aussagefunktion „x ist Vater von y" haben wir durch eine Belegung der freien Individuenvariablen die wahre Aussage „Stepan Pawlowitsch Titow ist Vater von German Stepanowitsch Titow" erhalten. Es gibt also mindestens eine

Belegung – tatsächlich gibt es ja viel mehr, aber das ist in diesem Zusammenhang unwichtig –, durch die aus der Aussagefunktion eine wahre Aussage entsteht. Damit ist also auch $\exists(x)\ \exists(y)$ [x ist Vater von y] eine wahre Aussage.

Aus der Aussagefunktion „x ist Fernstudent" gewinnt man mit Hilfe eines *Alloperators* oder *Allquantors* die *Allaussage*

$$\forall(x)\ [x \text{ ist Fernstudent}].$$

Das bedeutet: „Für jedes Individuum x gilt: x ist Fernstudent."

Mit Hilfe des Alloperators wird ausgedrückt, daß jedem einzelnen Individuum eines bestimmten Bereiches ein bestimmtes Merkmal zukommt. Man sagt statt „für jedes x gilt: . . ." auch „für alle x gilt: . . .". Diese Ausdrucksweise darf aber nicht dazu verleiten, Allaussagen mit Aussagen des Typs „Für die Klasse der Individuen x gilt: . . ." zu verwechseln, denn ein Merkmal, das einer Klasse von Individuen zukommt, muß keineswegs auch Merkmal der Individuen dieser Klasse sein und umgekehrt. Für jeden einzelnen Menschen gilt z. B., daß er sterben wird. Es besteht jedoch kein Grund zu der Annahme, daß diese Eigenschaft auch der Klasse der Menschen, d. h., der Menschheit zukommt.

Aus unserer zweiten Aussagefunktion kann man analog zur Verwendung zweier Existentialoperatoren mit Hilfe zweier Alloperatoren folgende Aussage gewinnen:

$$\forall(x)\ \forall(y)\ [x \text{ ist Vater von } y].$$

Das bedeutet: „Für jedes x und für jedes y gilt: x ist von Vater y", anders ausgedrückt: „Jeder ist Vater eines jeden." Durch eine kombinierte Anwendung von Alloperator und Einsetzung von Individuennamen erhält man ebenfalls eine Allaussage.

Wir definieren:

Eine *Allaussage* ist eine Aussage, die feststellt, daß jedes einzelne Individuum des zugrunde gelegten Individuenbereiches ein bestimmtes Merkmal besitzt. Sie ist wahr genau dann, wenn aus der in ihr enthaltenen Aussagefunktion durch jede Belegung der freien Variablen eine wahre Aussage entsteht.

Neben den schon genannten drei Arten von Aussagen gibt es noch eine vierte. Wir meinen die Aussagen, in denen beide Arten von Operatoren vorkommen, wie z. B.:

$$\forall(y)\ \exists(x)\ [x \text{ ist Vater von } y].$$

Wenn wir den Bereich der Menschen zugrunde legen, so haben wir hier in symbolisierter Form die Aussage „Jeder Mensch hat einen Vater".

Wir haben also gesehen, daß man Aussagefunktionen in Aussagen umwandelt, indem man die auftretenden freien Variablen durch Individuennamen ersetzt oder durch Operatoren bindet. Ein Operator bindet alle Variablen, die in ihm selbst vorkommen – wie x in $\forall(x)$ – und in seinem Wirkungsbereich innerhalb von Aussagefunktionen auftreten. Der Wirkungsbereich eines Operators umfaßt immer mindestens die nächstfolgende Aussagefunktion. Er kann auch mehrere durch Konnektoren verbundene Aussagefunktionen gleichzeitig umfassen; in diesem Falle werden alle Aussagefunktionen seines Wirkungsbereichs durch Klammern zusammengefaßt.

Nun lassen sich die zwei Arten von Variablen, von denen hier die Rede ist, folgendermaßen definieren:

Eine Variable, die in einer Aussagefunktion auftritt, ist eine *freie Variable*, wenn sie nicht im Wirkungsbereich eines Operators steht, der sich auf sie bezieht.

Eine Variable, die in einer Aussagefunktion auftritt, ist eine *gebundene Variable*, wenn sie im Wirkungsbereich eines Operators steht, der sich auf sie bezieht.

Die symbolisierte Sprache der Prädikatenlogik hat hier den Vorteil, daß man von jedem prädikatenlogischen Ausdruck, ohne seine Bedeutung berücksichtigen zu müssen, feststellen kann, ob er eine Aussage oder eine Aussagefunktion bedeutet. Dazu braucht man nur zu prüfen, ob jede Variable, die in einer Aussagefunktion vorkommt, im Wirkungsbereich eines Operators steht, der die gleiche Variable in runden Klammern enthält. Wenn das der Fall ist, handelt es sich um eine Aussage, anderenfalls um eine Aussagefunktion.

In keinem der Beispiele dieses Abschnitts ist die Negation aufgetreten. Wir wollen deshalb jetzt noch einige Bemerkungen über die Negation in prädikatenlogischen Ausdrücken machen. Wenn man die Aussage, „Es gibt mindestens ein x, für das gilt: x ist Fernstudent" negiert, erhält man die Aussage „Es ist nicht wahr, daß es mindestens ein x gibt, für das gilt: x ist Fernstudent". Mit anderen Worten „Es gibt *kein* x, für das gilt: x ist Fernstudent". In symbolischer Schreibweise:

$$\sim \exists(x)\ [x \text{ ist Fernstudent}].$$

Negieren wir die entsprechende Allaussage, so erhalten wir „Es ist nicht wahr, daß für jedes x gilt: x ist Fernstudent". Anders ausgedrückt: „Nicht für jedes x gilt: x ist Fernstudent." Symbolisch dargestellt:

$$\sim \forall (x)\ [x \text{ ist Fernstudent}].$$

Daneben besteht natürlich auch die Möglichkeit, Aussagefunktionen zu negieren wie in

$$\exists (x)\ [x \text{ ist nicht Fernstudent}],$$

d. h., „Es gibt mindestens ein Individuum x, für das gilt: x ist nicht Fernstudent". – Dieses Beispiel mag hier genügen. Mit der Negation ganzer Aussagen und der Negation von Aussagefunktionen sowie mit ihrem Zusammenhang werden wir uns in 3.2.3. ausführlicher beschäftigen.

Es mag schon Verwunderung erregt haben, daß auf allen diesen Seiten über Prädikatenlogik immer noch nicht von Prädikaten die Rede war. Ihre Einführung ist jetzt jedoch so weit vorbereitet, daß mit wenigen Sätzen erklärt werden kann, was Prädikate sind.

Prädikate sind Aussagefunktionen der Form „x ist Fernstudent", „x ist größer als y", „x spricht mit y über z" usw., d. h. Begriffsintensionen in ihrer korrekten logischen Form, aus der man ersehen kann, ob in ihm eine Eigenschaft oder eine Beziehung widergespiegelt wird und zwischen wieviel Individuen eine solche Beziehung besteht. Alles, was bisher über die Aussagefunktionen gesagt wurde, gilt auch für die Prädikate, denn jedes Prädikat ist eine Aussagefunktion.

Prädikate werden nach ihrer Stellenzahl unterschieden in

1. *einstellige Prädikate* – das sind Widerspiegelungen von Eigenschaften, Aussagefunktionen mit einer Leerstelle – und
2. *mehrstellige Prädikate* oder Relationen – das sind Widerspiegelungen von Beziehungen, Aussagefunktionen mit mehr als einer Leerstelle.

Die mehrstelligen Prädikate werden bei Bedarf noch genauer unterteilt in zweistellige, dreistellige usw. Prädikate oder Relationen.

Da die Prädikatenlogik Aussagen üder Prädikate schlechthin und nicht über bestimmte Prädikate machen soll, wird es zweckmäßig sein, auch für Prädikate Symbole einzuführen. Als Prädikatenvariable verwenden wir große lateinische Buchstaben A, B, ... F, G, ... R, S, ...; die rechts neben diesen

Buchstaben in Klammern stehenden Individuenvariablen lassen die Stellenzahl der Prädikate erkennen. Der Übersichtlichkeit wegen werden wir an dieser Stelle eine Tabelle mit Beispielen für die künftig benötigten Symbole aufstellen.

Symbol	*Bedeutung*	*Name*
$P(x)$	x ist P; x hat die Eigenschaft P	einstelliges Prädikat
$\sim P(x)$	x ist nicht P; x hat nicht die Eigenschaft, P zu sein	
$R(x, y)$	x steht in der Beziehung R zu y	mehrstelliges Prädikat, Relation
$\sim R(x, y)$	x steht nicht in der Beziehung R zu y	
$\forall(x)$	für jedes Individuum x gilt	Alloperator
$\sim \forall(x)$	es gilt nicht für jedes x (möglicherweise gilt es für eine bestimmte Anzahl, möglicherweise für kein x)	
$\exists(x)$	es gibt mindestens ein x, für das gilt (möglicherweise gilt es sogar für jedes x)	Existentialoperator
$\sim \exists(x)$	es gibt kein x, für das gilt	

3.1.4. Beziehungen zwischen Begriffen

Wir haben in 3.1.3. nur solche Aussagen betrachtet, in denen ein einziger Begriff auftrat. Viel häufiger sind aber Aussagen, in denen wenigstens zwei Begriffe auftreten, die in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen. Diese Beziehungen sind eine Widerspiegelung von Beziehungen, die zwischen den entsprechenden Klassen von Individuen bestehen. Eine Aussage ist genau dann wahr, wenn die Beziehung zwischen ihren Begriffen eine adäquate Widerspiegelung derjenigen Beziehung ist, die zwischen den in den Begriffen widergespiegelten Klassen besteht. Dementsprechend werden wir bei der Antwort auf die Frage, welche Beziehungen zwischen zwei Be-

griffen möglich sind, davon ausgehen, welche Beziehungen zwischen zwei Klassen von Individuen möglich sind. Das bedeutet: Wir werden die Beziehungen zwischen Begriffen zwar als Beziehungen zwischen Prädikaten, d. h. Intensionen betrachten, aber auf der Grundlage der Extensionen – also als extensionale Beziehungen zwischen Intensionen.

Für die Beziehungen zwischen Klassen ist die Elementbeziehung grundlegend; deshalb müssen wir uns zuerst mit ihr beschäftigen.

Die Individuen, die auf Grund einer gemeinsamen Eigenschaft eine Klasse bilden, sind die *Elemente* dieser Klasse.

Jedes Individuum, das ein Mensch ist, mit anderen Worten, das die Eigenschaft hat, ein Mensch zu sein, ist ein Element der Klasse der Menschen. Der Aussagefunktion „x ist ein Mensch" entspricht also die Aussagefunktion „x ist ein Element der Klasse der Menschen".

Die Paare von Individuen, die auf Grund einer gemeinsamen zweistelligen Beziehung eine Klasse bilden, sind die *Elemente* dieser Klasse.

Jedes Paar von Individuen, das miteinander verheiratet ist, ist ein Element der Klasse der Ehepaare. Der Aussagefunktion „x ist verheiratet mit y" entspricht also die Aussagefunktion „das Paar von Individuen $[x, y]$ ist ein Element der Klasse der Ehepaare, der Klasse der miteinander Verheirateten". – In ganz analoger Weise bestimmt man die Elemente von Klassen, in denen drei- oder mehrstellige Beziehungen invariant sind. Da wir uns im folgenden fast ausschließlich mit ein- und zweistelligen Prädikaten beschäftigen werden, brauchen wir hierauf nicht weiter einzugehen.

Die bisherigen Beispiele für Elemente von Klassen sind gewiß einleuchtend. Wenn man aber versucht, Elemente einer gegebenen Klasse anzugeben, macht man häufig Fehler. Der eine mögliche Fehler besteht darin, daß man statt eines Elements der Klasse wiederum eine Klasse angibt. Beispielsweise wird die Klasse der Wohnhäuser als Element der Klasse der Häuser angesehen. Dabei wird nicht beachtet, daß die Elemente der Klasse der Häuser *Individuen* sind, aber keine *Klassen*. Richtig wäre hier z. B. gewesen, das Haus Universitätsstraße 3b in 108 Berlin als Element der Klasse der Häuser zu nennen.

Ein zweiter vielfach auftretender Fehler besteht darin, daß man statt eines Elements einen Teil eines Gegenstandes nennt.

Beispielsweise wird die Artillerie oder ein einzelner Soldat als Element der Klasse der Armeen genannt. Richtig wäre hier, die NVA unserer Republik zu nennen. Gegen diesen Fehler kann man sich leicht schützen, indem man Aussagen der folgenden Art bildet „Die NVA *ist* eine Armee", also den Namen des Individuums mit dem Wort für die entsprechende Klasse durch „ist" verbindet. Setzt man hier an Stelle von „NVA" etwa „Soldat", so entsteht eine falsche Aussage. Ist also eine nach dieser Regel gebildete Aussage falsch, so hat man bestimmt kein Element der Klasse angegeben. Erhält man aber eine wahre Aussage, so ist damit noch nicht gesagt, daß man wirklich ein Element genannt hat. Dann kann man auch in den zuerst genannten Fehler verfallen sein. Hier wirkt sich die Mehrdeutigkeit des Wortes „ist" aus; es kann nämlich neben der Elementbeziehung, wie sich zeigen wird, auch die Enthaltenseinbeziehung und die Beziehung der extensionalen Identität bedeuten.

Und nun beginnen wir mit der systematischen Darstellung der Begriffsbeziehungen. Zur Veranschaulichung werden wir für eine Klasse von Individuen ein Rechteck zeichnen. Die Punkte, aus denen sich die Fläche des Rechtecks zusammensetzt, mögen für die Elemente der Klasse stehen.

Zunächst sind grundsätzlich zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Es gibt Klassen, die kein gemeinsames Element besitzen.
2. Es gibt Klassen, die mindestens ein gemeinsames Element besitzen.

Beschäftigen wir uns erst einmal mit der ersten Möglichkeit. In graphischer Darstellung ergeben sich folgende Bilder:

A und B bzw. R und S sind Klassen, die kein gemeinsames Element besitzen. Mit anderen Worten: Die invarianten Merkmale $A(x)$ und $B(x)$ können nicht ein und demselben Element zukommen. Oder auch: Es gibt kein Individuum, dem die beiden Merkmale zukommen. So gibt es keinen Philosophen, der gleichzeitig und in derselben Hinsicht Materialist und Idealist ist. Handelt es sich um Klassen R und S von Paaren, so gibt es kein Paar von Individuen, zwischen denen die Beziehung R und die Beziehung S besteht. Es gibt z. B.

keinen Fall, wo x zugleich und in derselben Hinsicht Ursache und Wirkung von y ist. – An diesem Beispiel zeigt sich übrigens, daß man in einer Relation $R(x, y)$ nicht ohne weiteres x und y vertauschen darf. Wenn x Ursache von y ist, dann ist y natürlich Wirkung von x; aber das Paar $[x, y]$ ist ein anderes als das Paar $[y, x]$. Bei Aussagen über die Beziehungen zwischen den Individuen eines Paares hält man sich immer genau an die Reihenfolge, in der die Individuen angegeben sind.

Begriffe, deren zugehörige Klassen kein gemeinsames Element besitzen, sind *disjunkte Begriffe.*

Die Begriffe $A(x)$ und $B(x)$ sind disjunkt genau dann, wenn gilt:

$$\sim \exists(x)\,[A(x) \wedge B(x)].$$

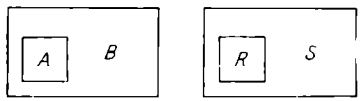
Die Begriffe $R(x, y)$ und $S(x, y)$ sind disjunkt genau dann, wenn gilt:

$$\sim \exists(x)\,\exists(y)\,[R(x, y) \wedge S(x, y)].$$

Zwei Begriffe $A(x)$ und $B(x)$ sind demnach disjunkt genau dann, wenn durch keine Belegung der Individuenvariablen aus der Aussagefunktion $A(x) \wedge B(x)$ eine wahre Aussage, genauer gesagt: eine wahre Konjunktion wird. Entsprechendes gilt für disjunkte Begriffe $R(x, y)$ und $S(x, y)$.

Ein Begriff $A(x)$ bzw. $R(x, y)$ und sein Negat $\sim A(x)$ bzw. $\sim R(x, y)$ sind grundsätzlich disjunkt; denn es gibt kein Individuum, das eine bestimmte Eigenschaft zugleich und in derselben Hinsicht hat und nicht hat, kein Paar von Individuen, zwischen denen eine bestimmte Beziehung zugleich und in derselben Hinsicht besteht und nicht besteht.

Wenden wir uns nun den Begriffen zu, deren zugehörige Klassen mindestens ein gemeinsames Element besitzen.



Die Bilder zeigen den Fall, daß alle Elemente von A bzw. R zugleich Elemente von B bzw. S sind. Die jeweils zuerst genannte Klasse ist in der jeweils zuletzt genannten enthalten. Für jedes Individuum x gilt: Wenn es die Eigenschaft $A(x)$ hat, so hat es auch die Eigenschaft $B(x)$. Jeder Mensch, der ein Arbeiter ist, ist auch ein Werktätiger. Für jedes Paar $[x, y]$ von Menschen gilt: Wenn x Bruder von y ist, so ist x Verwandter von y.

Diese Begriffsbeziehung ist die *Subordination*. $A(x)$ bzw. $R(x, y)$ ist der *subordinierte Begriff* oder *Artbegriff*, $B(x)$ bzw. $S(x, y)$ ist der *subordinierende Begriff* oder *Gattungsbegriff*.

Die Begriffe $A(x)$ und $B(x)$ stehen im Verhältnis von Art- und Gattungsbegriff zueinander genau dann, wenn gilt:

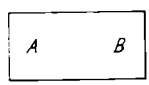
$$\forall (x)\, [A(x) \rightarrow B(x)].$$

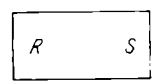
Die Begriffe $R(x, y)$ und $S(x, y)$ stehen im Verhältnis von Art- und Gattungsbegriff zueinander genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x)\, \forall (y)\, [R(x, y) \rightarrow S(x, y)].$$

Der Definition ist zu entnehmen, daß es zu einem Begriff verschiedene Gattungs- bzw. Artbegriffe geben kann und daß ein und derselbe Begriff im Hinblick auf einen Begriff als Artbegriff, im Hinblick auf einen anderen als Gattungsbegriff fungieren kann. Der Begriff „Arbeiter" ist Artbegriff gegenüber dem Gattungsbegriff „Werktätiger", aber selbst Gattungsbegriff gegenüber dem Artbegriff „Metallarbeiter". Ferner sind, wenn man den Begriff „Werktätiger" als Gattungsbegriff ansieht, die Begriffe „Arbeiter" und „Metallarbeiter" zwei seiner Artbegriffe. Sieht man den Begriff „Metallarbeiter" als Artbegriff an, so sind „Arbeiter" und „Werktätiger" zwei seiner möglichen Gattungsbegriffe. In jedem dieser Fälle ist ja die Bedingung erfüllt, wonach jedes Individuum, das unter den Artbegriff fällt, auch unter den Gattungsbegriff fallen muß. Dieselben Verhältnisse bestehen beispielsweise auch zwischen den Begriffen „Verwandter", „Bruder" und „Zwillingsbruder".

Die nächste Begriffsbeziehung in dieser Reihe läßt sich durch folgende Bilder veranschaulichen:





In diesem Falle ist jedes Element von A bzw. R auch Element von B bzw. S und umgekehrt. Für jedes Individuum gilt: es hat das Merkmal $A(x)$ genau dann, wenn es das Merkmal $B(x)$ hat. Anders ausgedrückt: es hat entweder beide Merkmale oder keins von beiden. Beispielsweise sind Dreiecke gleichseitig genau dann, wenn sie gleichwinklig sind. Die untrennbare Einheit von Denken und Sprache bringt es mit sich, daß man sagen kann: x und y tauschen mündlich Gedanken aus

genau dann, wenn sie miteinander sprechen. – Die hier vorliegende Begriffsbeziehung ist die *extensionale Identität*. Das heißt, die Begriffe „gleichseitiges Dreieck" und „gleichwinkliges Dreieck" bzw. „mündlich Gedanken austauschen" und „miteinander sprechen" sind ihrer *Extension*, ihrem Umfang nach identisch. Sie sind allerdings ihrer Intension nach nicht identisch. Sind aber zwei Begriffe ihrer Intension nach identisch – z. B. „Geige" und „Violine" –, so sind sie auch ihrer Extension nach identisch.

Die Begriffe $A(x)$ und $B(x)$ sind extensional identisch genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x)\, [A(x) \leftrightarrow B(x)].$$

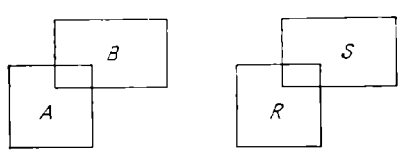
Die Begriffe $R(x, y)$ und $S(x, y)$ sind extensional identisch genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x)\, \forall (y)\, [R(x, y) \leftrightarrow S(x, y)].$$

Die Formeln, mit deren Hilfe wir die extensionale Identität definiert haben, kann man auch durch folgende Überlegung gewinnen: Alle Elemente von A sind auch Elemente von B; d. h., daß A in B enthalten ist. Es gilt also die Formel für die Subordination. Umgekehrt ist aber auch B in A enthalten; damit gilt auch die Umkehrung der Formel. Aus der Aussagenlogik wissen wir, daß $p \leftrightarrow q$ und $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ werteverlaufsgleich und damit durch einander ersetzbar sind. Diese Formel wenden wir jetzt an und erhalten so ebenfalls die Definition der Identität.

An drei Beispielen soll hier noch auf die Mehrdeutigkeit von „ist" hingewiesen werden: „Fritz Müller *ist* Fernstudent" – es besteht die Elementbeziehung, „Jeder Arbeiter *ist* ein Werktätiger" – die Enthaltenseinbeziehung, „Jedes gleichseitige Dreieck *ist* ein gleichwinkliges Dreieck" – die extensionale Identität.

Die folgenden Bilder veranschaulichen die dritte der Beziehungen zwischen Begriffen, deren zugehörige Klassen mindestens ein gemeinsames Element besitzen:



Hier gibt es Individuen bzw. Individuenpaare, die Elemente beider Klassen sind, und solche, die Elemente nur einer der beiden Klassen sind. Ein solches Verhältnis besteht zwischen Arbeitern und Schriftstellern. Es gibt schreibende Arbeiter; es gibt aber auch Arbeiter, die sich nicht als Schriftsteller betätigen; und es gibt Schriftsteller, die keine Arbeiter sind. Die gleiche Beziehung wie zwischen den Begriffen „Arbeiter" und „Schriftsteller" besteht zwischen „x hilft y" und „x ist Arbeitskollege von y".

Diese Begriffsbeziehung ist die der *Begriffsverschiebung* oder die Beziehung zwischen *interferierenden Begriffen.* – Um zur Definition dieser Beziehung zu kommen, braucht man nur in der symbolischen Sprache der Prädikatenlogik auszudrücken, daß es Individuen bzw. Individuenpaare gibt, die beide Merkmale besitzen, und solche, die nur eins der beiden Merkmale besitzen.

Die Begriffe $A(x)$ und $B(x)$ sind interferierende Begriffe genau dann, wenn gilt:

$$\exists(x)\,[A(x) \wedge B(x)] \wedge \exists(x)\,[A(x) \wedge \sim B(x)] \wedge \\ \wedge\, \exists(x)\,[B(x) \wedge \sim A(x)].$$

Die Begriffe $R(x, y)$ und $S(x, y)$ sind interferierende Begriffe genau dann, wenn gilt:

$$\exists(x)\,\exists(y)\,[R(x,y) \wedge S(x,y)] \wedge \exists(x)\,\exists(y)\,[R(x,y) \wedge \sim S(x,y)] \\ \wedge\, \exists(x)\,\exists(y)\,[S(x,y) \wedge \sim R(x,y)].$$

Wenn mehrere Begriffe einen gemeinsamen Gattungsbegriff haben, bezeichnet man sie als *koordinierte Begriffe.* Koordinierte Begriffe sind z. B. „Arbeiter", „LPG-Bauer", „Handwerker" – gemeint ist jeweils innerhalb der DDR; der allen gemeinsame Gattungsbegriff ist „Werktätiger". Ebenso sind „hören", „sehen", „fühlen" koordinierte Begriffe, denn sie haben den gemeinsamen Gattungsbegriff „empfinden".

Zu den koordinierten Begriffen zählen auch die *konträren Begriffe.* Man definiert sie als diejenigen Artbegriffe ein und desselben Gattungsbegriffs, die die größten Unterschiede untereinander aufweisen. Beispiele für jeweils konträre Begriffe sind „schön" und „häßlich", „groß" und „klein". Dieses Begriffsverhältnis ist mit den Mitteln der formalen Logik nicht darstellbar. Außerdem bereitet es fast immer große Schwierigkeiten, festzustellen, welche Begriffe konträr zueinander sind, denn das setzt voraus, daß die jeweils in Frage kommenden Begriffe nach dem Grad ihres Unterschieds geordnet sind.

Eine Begriffsbeziehung, die mit den Mitteln der Prädikatenlogik wieder exakt zu erfassen ist, ist die Beziehung zwischen *konversen Begriffen*. In ihr können nur solche Begriffe zueinander stehen, die Beziehungen widerspiegeln. Im Falle zweistelliger Beziehungen – auf die wir uns ja beschränken – widerspiegelt der eine Begriff die Umkehrung derjenigen Beziehung, die der andere widerspiegelt. Konverse Begriffe sind z. B. „x ist Ursache von y" und „y ist Wirkung von x", „x ist Elternteil von y", und „y ist Kind von x", „x ist Verwandter von y" und „y ist Verwandter von x". Wie die Beispiele zeigen, können zwei verschiedene Begriffe zueinander konvers sein und gibt es Begriffe, die zu sich selbst konvers sind. Der zu einem gegebenen Begriff $R(x, y)$ konverse Begriff hat ein besonderes Symbol, das seinen Zusammenhang mit dem ersten andeuten soll: $\breve{R}(y, x)$.

Die Begriffe $R(x, y)$ und $\breve{R}(y, x)$ sind konverse Begriffe genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \leftrightarrow \breve{R}(y, x)].$$

Die voraufgegangene Darstellung von Begriffsbeziehungen dient zum einen der Vorbereitung auf den Abschnitt über das prädikatenlogische Schließen, sie ist aber zum anderen bereits für sich genommen von Nutzen. Will man eine Wissenschaft betreiben, so muß man mit Begriffen operieren. Dazu muß man wissen, in welchen Beziehungen Begriffe zueinander stehen können und wie diese Beziehungen exakt auszudrücken sind. Das Studium der Begriffsbeziehungen ist deshalb für alle nützlich, die in irgendeiner Weise lehrend oder publizistisch tätig sind, aber nicht nur für sie. Das Eindringen der Wissenschaft in sämtliche Bereiche unserer sozialistischen Wirklichkeit – sei es die Politik, die Wirtschaft oder die Technik – stellt, genaugenommen, an alle Menschen immer höhere Anforderungen, und dies nicht zuletzt im Hinblick auf ihre Ausdrucksweise und auf die gedankliche Erfassung ihres Arbeitsbereichs.

Mit dem, was hier vom Standpunkt der formalen Logik aus zu den Beziehungen zwischen Begriffen gesagt wurde, ist die Dialektik dieser Beziehungen bei weitem nicht erschöpfend behandelt. So haben wir z. B. stillschweigend davon abgesehen, daß die Klassen von Individuen in der objektiven Realität keineswegs ganz scharf abgegrenzt sind, sondern daß sie immer auch Individuen enthalten, die sich im Übergang zu anderen Klassen befinden. Dementsprechend haben wir auch von der

sich daraus ergebenden gewissen Vagheit, Unbestimmtheit vieler Begriffe abgesehen. Dennoch lassen sich mit prädikatenlogischen Mitteln wesentliche Zusammenhänge zwischen Begriffen erfassen, ohne deren Kenntnis man die Dialektik der Begriffsbeziehungen weder erforschen noch begreifen kann.

3.1.5. Symbolisierte Aussagen

Im allgemeinen bereitet es anfänglich gewisse Schwierigkeiten, Aussagen, die in Sätzen der natürlichen Sprache formuliert sind, in die Sprache der Prädikatenlogik zu übersetzen und umgekehrt, denn weder in der Aussagenlogik noch in der Prädikatenlogik gibt es hierfür ein mechanisches Verfahren; man muß die Übersetzung jeweils nach inhaltlichen Überlegungen durchführen. Deshalb werden wir hier an einer Reihe von Beispielen zu zeigen versuchen, welche Gesichtspunkte dabei eine Rolle spielen.

Als Symbole verwenden wir wie bisher die aussagenlogischen und die prädikatenlogischen Konstanten, d. h. die aussagenlogischen Zeichen für Negation, Konjunktion usw. und Existential- und Alloperator sowie die Individuenvariablen. Darüber hinaus werden wir Individuen- und Prädikatenkonstante durch entsprechende Vereinbarungen einführen, d. h. prädikatenlogische Symbole mit einer bestimmten Bedeutung. Als Individuenkonstante gebrauchen wir kleine lateinische Buchstaben – wie „a" für „Alexander" – und als Prädikatenkonstante große lateinische Buchstaben – wie „M" für „Mensch".

Zu symbolisieren sei „Alexander ist fleißig ($F(x)$)". Das ist offensichtlich eine singuläre Aussage, die den Sachverhalt widerspiegelt, daß das Individuum Alexander ein Element der Klasse der Fleißigen ist, daß Alexander die Eigenschaft hat, fleißig zu sein – $F(a)$. Ebenfalls eine singuläre Aussage ist „Alexander ist verheiratet ($V(x, y)$) mit Eva (e)". Auch hier ist die Symbolisierung einfach, in $V(x, y)$ sind die Individuenvariablen nur durch die verabredeten Individuenkonstanten zu ersetzen – $V(a, e)$.

Oft sagt man einfach: „Alexander ist verheiratet". Eine Symbolisierung nach dem Muster der vorigen Übersetzung würde ergeben: $V(a, y)$. Das aber ist keine Aussage, sondern eine Aussagefunktion, denn y ist eine freie Variable. Man hätte

nun die Möglichkeit, das Verheiratetsein als eine Eigenschaft aufzufassen; dann könnte man y einfach weglassen und hätte mit $V(a)$ eine einwandfreie Symbolisierung des ursprünglichen Satzes. Es ist jedoch mit gewissen Gefahren verbunden, die Stellenzahl von Prädikaten zu verringern. Deshalb ist es besser, noch etwas hinzuzufügen, was zwar mit „Alexander ist verheiratet" gemeint, aber nicht ausdrücklich gesagt ist. Wenn Alexander verheiratet ist, so muß es doch jemanden geben, mit dem er verheiratet ist. Aus dieser Überlegung ergibt sich: $\exists (y)\ V(a, y)$ – d. h., „Es gibt mindestens ein Individuum y, für das gilt: Alexander ist mit y verheiratet". Diese Rückübersetzung des symbolisierten Ausdrucks in die nicht symbolisierte Sprache mag ungewohnt klingen, aber das Ziel, auch in der Prädikatenlogik das Operieren mit Gedanken nach Möglichkeit durch das Operieren mit Zeichen zu ersetzen, setzt voraus, daß manches, was in anderen Zusammenhängen als selbstverständlich weggelassen werden kann, hier ausdrücklich gesagt wird.

Die Symbolisierung von „Alexander begegnet $(B(x, y))$ einem Freund $(F(y, x))$" setzt eine ähnliche Überlegung voraus wie im vorigen Beispiel. $\exists (x)\ [F(x, a) \wedge B(a, x)]$. – Es gibt jemanden, der Freund von Alexander ist und dem Alexander begegnet. Dagegen wird „Alexander begegnet seinem Freund Clemens (c)" symbolisiert durch: $F(c, a) \wedge B(a, c)$.

Der Satz „Die Katze ist ein Raubtier $(R(x))$" ist mehrdeutig. Falls sich dieser Satz auf eine ganz bestimmte Katze (k) bezieht, haben wir eine einfache singuläre Aussage: $R(k)$. Ist der Satz z. B. einem Lehrbuch der Zoologie entnommen, dann ist sicherlich ein Zusammenhang gemeint, für den man auch sagen kann: „Die Katzen sind Raubtiere" oder :„Alle Katzen sind Raubtiere" oder – und damit haben wir schon die Formulierung, die sich unmittelbar übersetzen läßt –: „Jedes Individuum, das eine Katze $(K(x))$ ist, ist ein Raubtier", und zwar durch $\forall (x)\ [K(x) \rightarrow R(x)]$. Es kommt bei diesen Formulierungen nicht auf stilistische Feinheiten an, sondern darauf, den Sachverhalt, daß die Klasse der Katzen in der Klasse der Raubtiere enthalten ist, möglichst genau wiederzugeben. Es wäre in solchen Fällen noch zu überlegen, ob die Enthaltenseinbeziehung auch in der anderen Richtung besteht. Wenn ja, dann wären die beiden Begriffe extensional identisch, und man könnte das Implikationszeichen in dem prädikatenlogischen Ausdruck durch das Äquivalenzzeichen ersetzen. Das ist hier

nicht der Fall, da es ja noch andere Arten von Raubtieren gibt. Kann man aus irgendeinem Grunde nicht entscheiden, ob zwischen den betreffenden Begriffen extensionale Identität oder nur Subordination besteht, so ist der symbolsprachliche Ausdruck für die Subordination jedenfalls nicht falsch.

Das letzte Beispiel zeigt, daß man in der natürlichen Sprache Allaussagen mit Hilfe des bestimmten Artikels formulieren kann, und das geschieht sogar sehr häufig. Man darf aber nicht annehmen, daß der bestimmte Artikel immer in der Bedeutung von „alle" gebraucht wird. Manchmal wird er verwendet, um ein einzelnes Individuum zu kennzeichnen, manchmal wird er sogar im Sinne des Existentialoperators gebraucht, wie etwa in den Ankündigungen des Filmvertriebs „Der Film läuft ab . . . in *den* Berliner Filmtheatern". Damit ist offenbar nicht gemeint, daß der Film zu dem genannten Zeitpunkt in *allen* Berliner Filmtheatern anläuft – das geschieht ja nicht –, sondern in mindestens einem Berliner Filmtheater.

Andererseits darf man nicht glauben, daß der unbestimmte Artikel immer im Sinne des Existentialoperators gebraucht wird. Die oft gehörte Warnung „Eine Baustelle ist kein Spielplatz" ist doch nicht auf einige, einzelne Baustellen gemünzt, sondern auf alle. Sie soll also soviel besagen wie „Für jedes Individuum gilt: Wenn es eine Baustelle ($B(x)$) ist, so ist es kein Spielplatz ($S(x)$)" und wird dementsprechend symbolisiert: $\forall(x)\,[B(x) \rightarrow \sim S(x)]$.

Der Satz „Es gibt einstellige Prädikate ($E(x)$) und mehrstellige Prädikate ($M(x)$)" scheint seiner logischen Struktur nach klar zu sein und könnte zu der Symbolisierung

$$\exists(x)\,[E(x) \wedge M(x)]$$

verleiten. Dieser Ausdruck besagt jedoch, daß es mindestens ein Individuum gibt, das ein einstelliges und mehrstelliges Prädikat ist. Diese Aussage aber ist falsch, denn jedes Prädikat ist entweder einstellig oder mehrstellig. Dementsprechend ist der Satz in eine Konjunktion aufzulösen –

$$\exists(x)\,E(x) \wedge \exists(x)\,M(x).$$

Existentialaussagen werden in der natürlichen Sprache oft mit Hilfe von unbestimmten Zahlwörtern wie „einzelne", „einige", „manche", „verschiedene", „wenige" und „viele" formuliert. Bei der Symbolisierung solcher Aussagen sieht man

von den quantitativen Unterschieden zwischen z. B. „wenige“ und „viele“ ab und berücksichtigt nur das ihnen Gemeinsame, daß es mindestens ein Individuum mit einem bestimmten Merkmal gibt. Umgekehrt kann man einer symbolisierten Existentialaussage nichts Genaues über die Anzahl der Individuen mit einem bestimmten Merkmal entnehmen, außer daß es gewiß ein solches Individuum gibt, daß möglicherweise aber auch alle Individuen dieses Merkmal haben. Man kann zwar Operatoren einführen, die die quantitativen Unterschiede genau wiedergeben, braucht das aber im allgemeinen nicht zu tun.

Der Satz „Eine Anzahl von Lokomotiven ($L(x)$) wird elektrisch betrieben ($E(x)$)“ besagt, daß es mindestens ein Individuum gibt, das Lokomotive ist und elektrisch betrieben wird – $\exists(x)\,[L(x) \wedge E(x)]$. Mit entsprechenden Mitteln symbolisiert man „Viele Lokomotiven werden nicht elektrisch betrieben“ – $\exists(x)\,[L(x) \wedge \sim E(x)]$. In diesen und ähnlichen Fällen liefert die Definition der interferierenden Begriffe das Muster, nach dem man die Symbolisierung vollziehen kann.

Nicht ganz unproblematisch ist dagegen die Symbolisierung von „Die meisten Menschen ($M(x)$) sind friedliebend ($F(x)$)“. Es wäre nicht falsch, zu symbolisieren: $\exists(x)\,[M(x) \wedge F(x)]$. Damit ist auf jeden Fall gesagt, daß es friedliebende Menschen gibt. Es ist aber bekannt, daß nicht alle Menschen friedliebend sind, sondern daß auch Menschen existieren, die Kriege anzetteln oder es zumindest versuchen. Darüber besagt jedoch die symbolisierte Aussage nichts. Dagegen sollen doch Wendungen wie „die meisten“, „die Mehrheit“ usw. auch besagen, daß nicht allen Individuen ein bestimmtes Merkmal zukommt. Danach könnte man als symbolischen Ausdruck vorschlagen:

$$\sim \forall(x)\,[M(x) \rightarrow F(x)].$$

Auch dieser Ausdruck bedeutet eine wahre Aussage. Er ist aber unbefriedigend wie der erste, denn er läßt offen, ob es überhaupt friedliebende Menschen gibt. Deshalb ist in diesem Zusammenhang die angemessenste Symbolisierung durch die Konjunktion beider Ausdrücke zu erreichen:

$$\exists(x)\,[M(x) \wedge F(x)] \wedge \sim \forall(x)\,[M(x) \rightarrow F(x)].$$

Es könnte jetzt die Frage auftreten, warum bei der Symbolisierung von Allaussagen das Implikationszeichen und bei der Symbolisierung von Existentialaussagen das Konjunktions-

zeichen für die Verbindung der Prädikate bevorzugt wird und ob man nicht in beiden Fällen dasselbe Zeichen verwenden könnte. Betrachten wir zunächst den Unterschied zwischen

$$\exists(x)\,[S(x) \wedge P(x)] \quad \text{und} \quad \exists(x)\,[S(x) \rightarrow P(x)].$$

Beide Existentialaussagen sind wahr, wenn es mindestens eine Belegung von x gibt, bei der die im Wirkungsbereich der Existentialoperatoren stehenden Verbindungen von Aussagefunktionen wahr sind. Die Konjunktion $S(x) \wedge P(x)$ ist nur dann wahr, wenn es mindestens ein Individuum mit beiden Eigenschaften gibt. Die Implikation $S(x) \rightarrow P(x)$ ist in diesem Falle ebenfalls wahr, aber sie ist es auch noch in einem zweiten und dritten: 2. wenn es ein Individuum gibt, das die Eigenschaft S nicht hat, aber die Eigenschaft P hat; 3. wenn es ein Individuum gibt, das beide Eigenschaften nicht hat. Einer dieser drei Fälle tritt praktisch immer ein, so daß eine Aussage dieser Gestalt so gut wie nichtssagend ist. Also erfaßt man die Bedeutung einer Aussage der Form „Einige Individuen mit der Eigenschaft S haben die Eigenschaft P" genauer, wenn man sie durch $\exists(x)\,[S(x) \wedge P(x)]$ symbolisiert.

Betrachten wir nun den Unterschied zwischen

$$\forall(x)\,[S(x) \rightarrow P(x)] \quad \text{und} \quad \forall(x)\,[S(x) \wedge P(x)].$$

Der erste Ausdruck besagt, daß jedes Individuum, wenn es die Eigenschaft S hat, so auch die Eigenschaft P hat, oder anders ausgedrückt, daß jedes Individuum, das die Eigenschaft S hat, die Eigenschaft P hat. Es wird also nicht eine Aussage über beliebige Individuen gemacht, sondern über alle Individuen, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen, einer bestimmten Klasse angehören. Der zweite Ausdruck hingegen besagt, daß jedes beliebige Individuum die beiden Eigenschaften hat. Das wurde jedoch in keiner der bisher symbolisierten Aussagen behauptet. Vielmehr war genau das gemeint, was durch $\forall(x)\,[S(x) \rightarrow P(x)]$ erfaßt wird. Diese Zusammenhänge werden noch klarer werden, wenn wir uns mit der Umformung von All- in Existentialaussagen und umgekehrt beschäftigen.

An einem weiteren Beispiel soll gezeigt werden, daß man bei der Symbolisierung nicht schematisch vorgehen darf, sondern sehr gründliche inhaltliche Überlegungen anstellen muß. Wir symbolisieren die Aussage „Alle Mädchen und Jungen sind fleißig" durch $\forall(x)\,\{[M(x) \vee J(x)] \rightarrow F(x)\}$. Hätten wir uns durch das „und" verleiten lassen, ein Konjunktionszeichen zu

setzen, hätte die Rückübersetzung gelautet: „Für jedes Individuum gilt: Wenn es ein Mädchen *und* ein Junge ist, so ist es fleißig"; tatsächlich aber wollten wir etwas aussagen über jedes Individuum, das ein Mädchen *oder* ein Junge ist.

Die Übersetzung prädikatenlogischer Ausdrücke in die natürliche Sprache ist meistens einfacher als die Übersetzung in umgekehrter Richtung. Schwierigkeiten kann es geben, wenn der prädikatenlogische Ausdruck zwei oder mehr Operatoren enthält; wir wollen uns deshalb abschließend noch mit solchen Beispielen beschäftigen.

Wir führen die in der Mathematik übliche Kleiner-Beziehung „$x < y$" – gelesen wie „x ist kleiner als y" – ein, um mit ihrer Hilfe Aussagen über den Bereich der natürlichen, d. h. der positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . zu machen. – Aus „$x < y$" erhält man durch Einsetzung von Zahlzeichen für die freien Variablen z. B. die wahre Aussage „$3 < 7$" und die falsche Aussage „$6 < 2$". Verwendet man ausschließlich Operatoren, so kann man aus dieser Aussagefunktion sechs verschiedene Aussagen herstellen:

(1) $\forall(x)\,\forall(y)\,[x < y]$,
(2) $\forall(x)\,\exists(y)\,[x < y]$,
(3) $\exists(y)\,\forall(x)\,[x < y]$,
(4) $\exists(x)\,\forall(y)\,[x < y]$,
(5) $\forall(y)\,\exists(x)\,[x < y]$,
(6) $\exists(x)\,\exists(y)\,[x < y]$.

Aussage (6) ist wahr, wenn es mindestens eine Belegung der Individuenvariablen gibt, so daß aus der Aussagefunktion eine wahre Aussage entsteht. Eine solche Belegung haben wir schon angegeben. Die Aussage lautet: „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x und mindestens eine natürliche Zahl y, von denen gilt: x ist kleiner als y" oder „Es gibt mindestens ein Paar von natürlichen Zahlen, von denen die eine kleiner ist als die andere".

Aussage (1) lautet: „Für jedes Paar natürliche Zahlen gilt, daß die eine kleiner ist als die andere." Das ist jedoch nicht der Fall – wir haben ja schon ein Gegenbeispiel angegeben –, und deshalb ist diese Aussage falsch.

Aussage (5) lautet: „Zu jeder natürlichen Zahl y gibt es mindestens eine natürliche Zahl x, für die gilt: x ist kleiner als y", oder einfacher gesagt: „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine kleinere". Diese Aussage ist falsch, denn zur natürlichen

Zahl 1 gibt es keine kleinere; 1 ist die kleinste natürliche Zahl. – Manchmal sieht man die 0 als kleinste natürliche Zahl an, dann bezieht sich das Gesagte auf sie.

Aussage (4) lautet: „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x, so daß für jede natürliche Zahl y gilt: x ist kleiner als y" oder einfacher: „Es gibt eine kleinste natürliche Zahl". Diese Aussage ist wahr, wenn wir voraussetzen, daß x und y verschieden sind. – Aussage (4) und Aussage (5) stimmen bis auf die Reihenfolge der beiden Operatoren genau überein und besagen doch etwas Verschiedenes und haben sogar verschiedene Wahrheitswerte. Dieses Beispiel zeigt, daß man in prädikatenlogischen Ausdrücken All- und Existentialoperatoren nicht ohne weiteres vertauschen darf. Kommen nur All- oder nur Existentialoperatoren vor, kann man sie beliebig vertauschen, ohne daß die Bedeutung der Ausdrücke sich ändert. Deshalb haben wir zu (1) und (6) die Ausdrücke, in denen dieselben Operatoren in anderer Reihenfolge auftreten, auch gar nicht erst angegeben.

Aussage (3) lautet: „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl y, so daß für jede natürliche Zahl x gilt: x ist kleiner als y" oder einfacher „Es gibt eine natürliche Zahl, der gegenüber jede andere kleiner ist", d. h., es gibt eine größte natürliche Zahl. Diese Aussage ist falsch, denn man kann zu jeder natürlichen Zahl eine größere angeben, weil die Reihe der natürliche Zahlen unendlich ist.

Aussage (2) lautet: „Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es mindestens eine natürliche Zahl y, so daß gilt: x ist kleiner als y" oder – mit Hilfe der zu $x < y$ konversen Relation $y > x$ ausgedrückt –: „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere." Diese Aussage ist wahr.

Diese Beispiele sollten zeigen, wie man bei der Übersetzung eines prädikatenlogischen Ausdrucks zunächst eine Formulierung angibt, die dem Ausdruck genau entspricht, um dann zu einer Formulierung überzugehen, die der natürlichen Sprache gemäßer ist, ohne daß sich eine Sinnänderung ergibt.

3.2. Prädikatenlogisches Schließen

Wir werden uns jetzt mit der traditionellen und mit der modernen Lehre vom prädikatenlogischen Schließen beschäftigen. Zuvor aber wollen wir den Anschluß an das aus-

sagenlogische Schließen herstellen und einige Gesetze und Regeln einführen, die wir für die Untersuchung von Schlüssen brauchen.

3.2.1. Aussagenlogisches und prädikatenlogisches Schließen

Prädikatenlogisches Schließen beruht auf Gesetzen der Aussagenlogik *und* auf Gesetzen der Prädikatenlogik. Daraus ergibt sich eine außerordentliche Erweiterung der Schlußmöglichkeiten gegenüber dem aussagenlogischen Schließen. Inwiefern das prädikatenlogische Schließen über das aussagenlogische hinausgeht, werden wir uns am besten an einem Beispiel verdeutlichen. Wir untersuchen folgenden Schluß:

Alle Marxisten sind Atheisten.
Viele Friedenskämpfer sind nicht Atheisten.
Also: Viele Friedenskämpfer sind nicht Marxisten.

Die beiden Prämissen des Schlusses sind wahre Aussagen. Wir wissen, daß auch die Konklusion eine wahre Aussage ist. Aber wir wissen noch nicht, ob sie zwingend aus den Prämissen folgt. Das wollen wir nun feststellen. Dazu ordnen wir den drei Aussagen nacheinander die Aussagenvariablen p, q, r zu und verbinden diese nach dem in 2.2.1.3. beschriebenen Verfahren zu dem Ausdruck $(p \wedge q) \rightarrow r$. Mit Hilfe der Wahrheitsmatrix prüfen wir, ob er allgemeingültig ist.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

Wir sehen an der zweiten Zeile, daß $(p \wedge q) \rightarrow r$ nicht allgemeingültig ist, sondern nur erfüllbar. Trotzdem ist unser Schluß zwingend, denn der prädikatenlogische Ausdruck, der ihm zugrunde liegt, ist allgemeingültig, ist ein Gesetz. Den Beweis für diese Behauptung führen wir später. Hier interessiert uns nur, wieso ein Schluß, der aussagenlogisch nicht zwingend

ist, diese Eigenschaft im Rahmen der Prädikatenlogik doch hat.

Für die Allgemeingültigkeit eines prädikatenlogischen Ausdrucks ist maßgebend, daß die auftretenden Begriffe in einem bestimmten strukturellen Zusammenhang stehen, von dem ja in dem aussagenlogischen Ausdruck $(p \wedge q) \rightarrow r$ – und in der Aussagenlogik überhaupt – abgesehen wird. Von den drei Aussagen unseres Schlusses sind je zwei durch einen gemeinsamen Begriff verbunden, während aus dem aussagenlogischen Ausdruck gar nicht hervorgeht, ob die hier auftretenden Aussagen überhaupt gemeinsame Begriffe haben. Angenommen, die Konklusion würde lauten „Alle Friedenskämpfer sind Marxisten", dann müßten wir diesen Schluß aussagenlogisch in der gleichen Form symbolisieren. Aussagenlogisch lassen sich demnach die beiden Schlüsse nicht unterscheiden. Also kann unser aussagenlogischer Ausdruck nicht allgemeingültig sein.

Man könnte sagen, daß er unter einer ganz bestimmten zusätzlichen Voraussetzung allgemeingültig ist. Diese Voraussetzung läßt sich allerdings mit den Mitteln der Aussagenlogik nicht mehr ausdrücken. Deshalb ist die Prädikatenlogik über die Aussagenlogik hinaus notwendig. Damit wird jedoch die Aussagenlogik keineswegs überflüssig. Im Gegenteil, man kann die Prädikatenlogik nicht aufbauen, ohne die Aussagenlogik – wenigstens implizit – vorauszusetzen. Ihre Gesetze behalten auch in der Prädikatenlogik Gültigkeit. Es kommen jedoch, wie wir schon angedeutet haben, zahlreiche neue Gesetze hinzu.

3.2.2. Gesetze der Prädikatenlogik

Zunächst ist zu klären, was ein Gesetz der Prädikatenlogik überhaupt ist. – Ein *aussagenlogisches Gesetz* ist ein Ausdruck, der bei jeder Belegung seiner Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten selbst den Wert wahr annimmt, d. h., ein Ausdruck, dem immer eine wahre Aussage entspricht, welche Aussagesätze auch immer für die Variablen eingesetzt werden (vgl. 2.1.8.).

Es ist nun zu erwarten, daß ein prädikatenlogisches Gesetz ebenfalls ein Ausdruck ist, aus dem durch entsprechende Belegungen in jedem Falle eine wahre Aussage entsteht. Aber es handelt sich hier um andere Belegungen als im Falle der Aussagenlogik.

Ob aus der Aussagefunktion „x besitzt Bewußtsein" eine wahre Aussage wird, hängt von der Belegung der Individuenvariablen x ab. Setzt man für x den Namen eines Menschen ein, so entsteht eine wahre Aussage. Da es also mindestens eine Belegung der Aussagefunktion gibt, die sie zu einer wahren Aussage macht, ist auch $\exists (x)$ [x besitzt Bewußtsein] ein Ausdruck, dessen Bedeutung eine wahre Aussage ist. Ob $\forall (x)$ [x besitzt Bewußtsein] eine wahre Aussage bedeutet, hängt davon ab, ob jede Belegung von x die Aussagefunktion zu einer wahren Aussage macht. Das führt unmittelbar auf die Frage, welche Individuennamen denn überhaupt für eine solche Belegung verwendet werden dürfen; anders ausgedrückt, über welchen Individuenbereich gesprochen wird. Legt man als Individuenbereich die Klasse der Menschen zugrunde, so ist die Allaussage wahr, legt man die Klasse der Säugetiere oder eine noch umfassendere Klasse zugrunde, so ist sie falsch.

Ob eine Aussagefunktion zu einer wahren Aussage wird, kann also zunächst einmal von dem zugrunde gelegten Individuenbereich abhängen.

Prädikatenlogische Gesetze werden in solchen Ausdrücken zu suchen sein, die nicht von speziellen Individuenbereichen abhängig sind, sondern für beliebige nicht leere Individuenbereiche gelten. Andernfalls wäre ein einzelwissenschaftliches Gesetz, das ja immer für einen bestimmten Individuenbereich gilt, nicht von einem logischen Gesetz zu unterscheiden.

Die bisher betrachtete Aussagefunktion enthält neben der Individuenvariablen eine Prädikatenkonstante, das konkrete Prädikat „besitzt Bewußtsein". In der Prädikatenlogik verwendet man aber solche Konstanten nur als Beispiele; das eigentliche Interesse der Prädikatenlogik gilt ja den Prädikaten überhaupt, denn in ihr geht es ebensowenig um konkrete Aussagen wie in der Aussagenlogik. Ihr Hauptinteresse gilt vielmehr den Strukturen von Aussagen, unabhängig von ihrem konkreten Inhalt. Deshalb operiert man hier also mit Prädikatenvariablen. Es ist klar, daß es in der Aussagefunktion „Hegel ist ein P" von der Belegung von P abhängt, ob sie zu einer wahren Aussage wird oder nicht. Wird P mit dem Prädikat „Philosoph" belegt, so entsteht eine wahre Aussage, wird P mit „Mathematiker" belegt, eine falsche.

Ob eine Aussagefunktion zu einer wahren Aussage wird, kann also auch von der Belegung oder – wie man auch sagt – Interpretation der Prädikatenvariablen abhängen.

Prädikatenlogische Gesetze werden demnach in solchen Ausdrücken zu suchen sein, die nicht von speziellen Belegungen der Prädikatenvariablen abhängig sind, sondern die für beliebige Belegungen gelten.

Ein Ausdruck, der weder von einem speziellen Individuenbereich abhängig ist noch von einer speziellen Belegung der Prädikatenvariablen, ist beispielsweise $\forall (x) [F(x) \vee \sim F(x)]$. Bei jeder beliebigen Belegung der Individuenvariablen x und bei jeder beliebigen Belegung der Prädikatenvariablen F entsteht hier eine wahre Aussage, denn von jedem beliebigen Individuum gilt, daß es eine beliebige Eigenschaft hat oder diese Eigenschaft nicht hat. – Hier haben wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten, der uns in der Aussagenlogik schon begegnete, in prädikatenlogischer Gestalt als erstes Beispiel für ein prädikatenlogisches Gesetz. – In diesem Zusammenhang muß analog zum Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten in der Aussagenlogik eine gewisse Einschränkung gemacht werden. Dieses prädikatenlogische Gesetz gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Individuen scharf in zwei Klassen geteilt sind: in die Klasse der Individuen, die eine bestimmte Eigenschaft haben, und die Klasse der Individuen, die diese Eigenschaft *nicht* haben. Eine solche scharfe Einteilung gibt es jedoch in der Wirklichkeit genaugenommen nicht. Sagt man: „Für jedes Individuum gilt, daß es belebt ist oder nicht belebt ist," so ist das im *wesentlichen* richtig. Diese Aussage erfaßt jedoch nicht die Individuen, die im Übergang vom nicht belebten zum belebten Zustand begriffen sind. Die formale Logik berücksichtigt also nur scharf abgegrenzte Klassen von Individuen. Die Untersuchung des Übergangs von einer Klasse zur anderen gehört in das Tätigkeitsfeld der dialektischen Logik.

Mit einer ganz entsprechenden Einschränkung kann man auch für das Bestehen von Beziehungen zwischen Individuen einen Satz vom ausgeschlossenen Dritten formulieren: Für jedes beliebige Paar von Individuen gilt, daß eine beliebige Beziehung zwischen ihnen besteht oder nicht besteht –

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \vee \sim R(x, y)].$$

Auch in diesem Falle führt jede Belegung der Individuenvariablen und jede Belegung der Prädikatenvariablen zu einer wahren Aussage.

Von diesen Beispielen aus kommen wir unmittelbar zu einer allgemeinen Definition des prädikatenlogischen Gesetzes:

Ein *prädikatenlogisches Gesetz* ist ein prädikatenlogischer Ausdruck, der bei jeder beliebigen Belegung seiner Variablen den Wert *wahr* annimmt.

Wie im Falle der aussagenlogischen Gesetze führt eine Belegung also auch hier immer zu einem Aussagesatz, dessen Bedeutung eine wahre Aussage ist. – Der Korrektheit wegen muß der Definition noch hinzugefügt werden, daß *jeder* Individuenbereich mit den ihm entsprechenden Merkmalen zugelassen ist, wenn er nur nicht leer ist; d. h., wenn die Nullklasse bei der Belegung zugrunde gelegt wird, gelten nicht mehr alle prädikatenlogischen Gesetze, obwohl es Gesetze gibt, die auch im leeren Bereich gelten. – Auf Probleme, die sich durch das Auftreten der Nullklasse für das Schließen ergeben, kommen wir in 3.3.5. zurück.

Wie in der Aussagenlogik unterscheidet man auch in der Prädikatenlogik zwischen Gesetzen oder allgemeingültigen Ausdrücken, erfüllbaren Ausdrücken, Neutralitäten sowie Kontradiktionen.

Eine *prädikatenlogische Neutralität* ist ein prädikatenlogischer Ausdruck, der bei mindestens einer Belegung seiner Variablen den Wert *wahr* und bei mindestens einer Belegung den Wert *falsch* annimmt.

Eine *prädikatenlogische Kontradiktion* ist ein prädikatenlogischer Ausdruck, der bei jeder Belegung seiner Variablen den Wert *falsch* annimmt.

Alle prädikatenlogischen Ausdrücke, die keine Kontradiktionen sind, sind *erfüllbare Ausdrücke.*

Ein Beispiel für eine Neutralität – und damit auch für einen erfüllbaren Ausdruck – ist: $\forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$. Legt man als Individuenbereich die Klasse der DDR-Bürger zugrunde und belegt man $F(x)$ mit „6–18jähriger" und $G(x)$ mit „schulpflichtig", so erhält man eine wahre Aussage. Man erhält eine falsche Aussage, wenn man den Individuenbereich zur Klasse der Menschen erweitert. Man kann aber auch durch eine veränderte Belegung der Prädikatenvariablen eine falsche Aussage erhalten – z. B. wenn man $G(x)$ mit „zum Besuch der TU Dresden verpflichtet" belegt.

Der Ausdruck $\exists(x)\,[F(x) \wedge \sim F(x)]$ ist ein Beispiel für eine prädikatenlogische Kontradiktion; da es kein Individuum gibt, das irgendeine Eigenschaft zugleich und in derselben Hinsicht hat und nicht hat, gibt es auch keine Belegung, durch die aus diesem Ausdruck eine wahre Aussage wird.

In der Aussagenlogik wie in der Prädikatenlogik gilt unser Hauptinteresse den Gesetzen. Nachdem wir gesagt haben, was prädikatenlogische Gesetze sind, wollen wir uns nun damit beschäftigen, wie man sie gewinnt. Es ist möglich, durch Umformungen aus bereits vorhandenen Gesetzen neue zu erhalten; darauf werden wir später noch eingehen. Außerdem ist es möglich, durch Einsetzungen aus aussagenlogischen Gesetzen prädikatenlogische zu erhalten.

Wenn man in einem aussagenlogischen Gesetz für die in ihm vorkommenden Aussagenvariablen Prädikate einsetzt, so daß für dieselbe Aussagenvariable an jeder Stelle dasselbe Prädikat eingesetzt wird, erhält man ein prädikatenlogisches Gesetz.

Der Ausdruck $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ ist, wie in 2.1.8. bewiesen wurde, ein aussagenlogisches Gesetz. Setzt man in ihm $F(x)$ für p und $G(x)$ für q ein, so erhält man das prädikatenogische Gesetz

$$[F(x) \rightarrow G(x)] \leftrightarrow [\sim F(x) \vee G(x)];$$

setzt man $R(x, y)$ für p und $S(x, y)$ für q ein, so erhält man

$$[R(x, y) \rightarrow S(x, y)] \leftrightarrow [\sim R(x, y) \vee S(x, y)].$$

Daß es sich bei beiden Ausdrücken um Gesetze handelt, läßt sich durch eine einfache Überlegung nachweisen. Durch jede Belegung der freien Variablen entstehen aus den Aussagefunktionen $F(x)$, $G(x)$, $\sim G(x)$ usw. Aussagen. Damit aber entstehen aus den Gesamtausdrücken Aussagenverbindungen, die wahr sind unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen, aus denen sie aufgebaut sind. Daß diese Aussagenverbindungen wahr sind, ergibt sich wiederum daraus, daß, wie gesagt, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ ein Gesetz ist.

Aus demselben aussagenlogischen Gesetz lassen sich noch weitere prädikatenlogische Gesetze gewinnen, wenn man sich auch noch des Alloperators bedient.

Wenn man in ein aussagenlogisches Gesetz für die in ihm vorkommenden Aussagenvariablen Prädikate einsetzt, so daß für dieselbe Aussagenvariable an jeder Stelle dasselbe Prädikat eingesetzt wird, und wenn man die freien Individuenvariablen durch Alloperatoren bindet, so erhält man ein prädikatenlogisches Gesetz.

Auf diese Weise erhält man durch dieselben Einsetzungen wie vorhin aus $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ das prädikatenlogische Gesetz

$$\forall (x) \{[F(x) \rightarrow G(x)] \leftrightarrow [\sim F(x) \vee G(x)]\};$$

weiter erhält man das Gesetz

$$\forall (x) \forall (y) \{[R(x,y) \rightarrow S(x,y)] \leftrightarrow [\sim R(x,y) \vee S(x,y)]\}.$$

In 3.1.3. hatten wir gesagt, daß $\forall (x) F(x)$ zu einer wahren Aussage wird genau dann, wenn $F(x)$ bei jeder Belegung von x zu einer wahren Aussage wird. Nun werden ja, wie sich soeben bereits gezeigt hat, die jeweils in geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke bei jeder Belegung der freien Variablen zu einer wahren Aussage. Dann aber müssen sich auch wahre Aussagen ergeben, wenn die freien Individuenvariablen gebunden und nur noch die freien Prädikatenvariablen belegt werden.

Verallgemeinert man die bisher angestellten Überlegungen, so kommt man zu dem allgemeinen Satz: *Jeder prädikatenlogische Ausdruck, der aussagenlogisch allgemeingültig ist, ist auch prädikatenlogisch allgemeingültig.*

Ausgehend von diesem Satz versucht man, sich die Entscheidung prädikatenlogischer Ausdrücke zu erleichtern, indem man sie auf aussagenlogische zurückführt. Falls diese allgemeingültig sind, sind es auch die prädikatenlogischen. Dagegen ist nicht jeder prädikatenlogisch allgemeingültige Ausdruck auch aussagenlogisch allgemeingültig, sonst könnte die Entscheidung von Ausdrücken hinsichtlich ihrer Allgemeingültigkeit insgesamt auf aussagenlogische Verfahren zurückgeführt werden.

In bezug auf die Erfüllbarkeit gilt nicht dasselbe Verhältnis zwischen aussagenlogischen und prädikatenlogischen Ausdrücken wie in bezug auf die Allgemeingültigkeit. Man kann nämlich durch Einsetzungen aus einem erfüllbaren – aber nicht allgemeingültigen – aussagenlogischen Ausdruck eine prädikatenlogische Kontradiktion erhalten. Nehmen wir als Beispiel den aussagenlogischen Ausdruck $p \wedge q$; setzen wir z. B. $\exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)]$ für p und $\forall (x) G(x)$ für q ein, so erhalten wir dadurch die prädikatenlogische Kontradiktion $\exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)] \wedge \forall (x) G(x)$. Daß dieser Ausdruck bei jeder Belegung falsch ist, hängt natürlich von dem für p eingesetzten Ausdruck ab. Dieselbe Einsetzung in ein aussagenlogisches Gesetz dagegen führt wieder zu einem Gesetz! Setzt man z. B. in $p \vee \sim p$ wieder $\exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)]$ für p ein, so entsteht $\exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)] \vee \sim \exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)]$; die Allgemeingültigkeit dieses Ausdrucks wird sogar schon durch die von $\sim \exists (x) [F(x) \wedge \sim F(x)]$ bewirkt. – Allgemein

gesagt, besteht in bezug auf die Erfüllbarkeit folgendes Verhältnis: Jeder prädikatenlogische Ausdruck, der aussagenlogisch nicht erfüllbar ist, ist prädikatenlogisch nicht erfüllbar. Die nicht erfüllbaren Ausdrücke aber sind die Kontradiktionen. Deshalb kann man wie im Falle der allgemeingültigen Ausdrücke auch im Falle der Kontradiktionen versuchen, ihre Entscheidung mit aussagenlogischen Mitteln durchzuführen.

Wenn man auch viele prädikatenlogische Gesetze aus aussagenlogischen durch Einsetzungen gewinnen kann, so doch die meisten von ihnen nicht. Geben wir nun zum Abschluß dieses Abschnittes einige wichtige Gesetze dieser letzten Art ohne weitere Begründung an.

$$(1) \quad \forall(x)\, F(x) \rightarrow F(y).$$

Dieses Gesetz besagt, daß, wenn jedes Individuum x eine bestimmte Eigenschaft F hat, auch ein bestimmten Individuum y diese Eigenschaft hat.

$$(2) \quad F(y) \rightarrow \exists(x)\, F(x).$$

Nach diesem Gesetz gilt, daß, wenn ein bestimmtes Individuum y eine bestimmte Eigenschaft F hat, es mindestens ein Individuum mit dieser Eigenschaft gibt.

Nimmt man diese beiden Gesetze als Prämissen eines Schlusses, so erhält man ein drittes. Nach der Regel der Transitivität für die Implikation (vgl. 2.2.1.2.) gilt der Schluß:

$$\begin{array}{l} \forall(x)\, F(x) \rightarrow F(y) \\ F(y) \rightarrow \exists(x)\, F(x) \\ \hline \forall(x)\, F(x) \rightarrow \exists(x)\, F(x). \end{array}$$

Da ja die Prämissen allgemeingültig, d. h. bei jeder Belegung wahr sind, trifft das auch zu für ihre Konklusion:

$$(3) \quad \forall(x)\, F(x) \rightarrow \exists(x)\, F(x).$$

Es muß hinzugefügt werden, daß (1) und (3) nur dann gelten, wenn der zugrunde gelegte Individuenbereich nicht die Nullklasse ist.

Aus den Gesetzen (1) bis (3) gewinnt man, davon wird im nächsten Abschnitt die Rede sein, einfache, aber doch wichtige Schlußregeln. Ebenso kann man aus den folgenden Gesetzen Schlußregeln erhalten, die dann bei dem in 3.2.6. dargestellten Entscheidungsverfahren Verwendung finden.

$$(4) \quad \forall(x)\, [F(x) \wedge G(x)] \leftrightarrow [\forall(x)\, F(x) \wedge \forall(x)\, G(x)].$$

Dieses Gesetz leuchtet unmittelbar ein. Es besagt, daß alle Individuen eine bestimmte Eigenschaft $F(x)$ *und* eine bestimmte Eigenschaft $G(x)$ haben genau dann, wenn alle Individuen die Eigenschaft $F(x)$ und alle Individuen die Eigenschaft $G(x)$ haben. Ein Beispiel für (4) ist: „Alle Menschen sind mit Bewußtsein und Sprache begabt genau dann, wenn alle Menschen mit Bewußtsein begabt sind und alle Menschen mit Sprache begabt sind."

$$(5) \quad \exists(x)\,[F(x) \wedge G(x)] \rightarrow (\exists(x)\,F(x) \wedge \exists(x)\,G(x)].$$

Hiernach gilt: Wenn es Objekte gibt, die sich verändern und sich in einer Höherentwicklung befinden, so gibt es Objekte, die sich verändern, und Objekte, die sich in Höherentwicklung befinden. – Würde man in (5) die beiden Glieder dieser Implikation vertauschen, so entstünde ein Ausdruck, der nicht allgemeingültig ist, wie sich an einem Beispiel zeigen läßt: Es gibt z. B. Staaten mit einem kapitalistischen Wirtschaftssystem, und es gibt Staaten mit einem sozialistischen Wirtschaftssystem. Aber es gibt keinen Staat, der beide Wirtschaftssysteme in sich vereinigt. Schon aus diesem Beispiel ergibt sich, daß (5) nicht wie (4) eine Äquivalenz sein kann.

$$(6) \quad [\forall(x)\,F(x) \vee \forall(x)\,G(x)] \rightarrow \forall(x)\,[F(x) \vee G(x)].$$

Wenn alle Individuen eine bestimmte Eigenschaft $F(x)$ oder alle Individuen eine bestimmte Eigenschaft $G(x)$ haben, so haben alle Individuen die Eigenschaft $F(x)$ oder die Eigenschaft $G(x)$. – Auch für dieses Gesetz gilt die Umkehrung nicht allgemein. Es ist zwar wahr, daß jeder Philosoph Materialist oder Idealist ist, aber es ist weder wahr, daß jeder Philosoph Materialist ist, noch daß jeder Philosoph Idealist ist. – Dagegen gilt für Existentialaussagen wieder eine Äquivalenz:

$$(7) \quad \exists(x)\,[F(x) \vee G(x)] \leftrightarrow [\exists(x)\,F(x) \vee \exists(x)\,G(x)].$$

Danach gilt: Es gibt Individuen mit der Eigenschaft $F(x)$ oder der Eigenschaft $G(x)$ genau dann, wenn es Individuen mit der Eigenschaft $F(x)$ gibt oder Individuen mit der Eigenschaft $G(x)$ gibt. Da eine Alternative wahr ist, wenn mindestens eins ihrer Glieder wahr ist, spielt es keine Rolle für die Wahrheit von $\exists(x)\,[F(x) \vee G(x)]$, ob nur $\exists(x)\,F(x)$ oder nur $\exists(x)\,G(x)$ wahr ist oder ob beide wahr sind. Falsch ist $\exists(x)\,[F(x) \vee G(x)]$ genau dann, wenn sowohl $\exists(x)\,F(x)$ als auch $\exists(x)\,G(x)$ falsch ist.

$$(8) \quad \forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow [\forall(x)\,F(x) \rightarrow \forall(x)\,G(x)].$$

Wenn für jeden, der eine wissenschaftliche Weltanschauung besitzt, gilt, daß er seine gesellschaftlichen Aufgaben besser zu lösen vermag, dann gilt, daß, wenn jeder eine wissenschaftliche Weltanschauung besitzt, jeder seine gesellschaftlichen Aufgaben besser zu lösen vermag.

In den Gesetzen (1) bis (8) kommen nur einstellige Prädikate, keine zweistelligen Prädikate vor. Ebenso wie man durch Einsetzungen aus aussagenlogischen Gesetzen Gesetze der einstelligen und der mehrstelligen Prädikatenlogik gewinnen kann, erhält man aus Gesetzen der einstelligen Prädikatenlogik solche der mehrstelligen. Man muß dazu nur mehrstellige Prädikate für die einstelligen einsetzen und dort, wo ein Operator steht, soviel gleichartige Operatoren einsetzen, daß alle freien Individuenvariablen gebunden sind. Auf diese Weise erhält man z. B. aus (8):

$$(8') \quad \forall(x)\,\forall(y)\,[R(x, y) \rightarrow S(x, y)] \rightarrow [\forall(x)\,\forall(y)\,R(x, y) \rightarrow \forall(x)\,\forall(y)\,S(x, y)].$$

Aus (5) erhält man in analoger Weise:

$$(5') \quad \exists(x)\,\exists(y)\,[R(x, y) \wedge S(x, y)] \rightarrow [\exists(x)\,\exists(y)\,R(x, y) \wedge \exists(x)\,\exists(y)\,S(x, y)].$$

3.2.3. Prädikatenlogische Regeln

Wie aus aussagenlogischen gewinnt man auch aus prädikatenlogischen Implikationen und Äquivalenzen, falls sie allgemeingültig sind, gültige Schlußregeln.

Aus einer allgemeingültigen Implikation erhält man eine gültige Schlußregel, nach der man zwingend aus der Wahrheit des Vordergliedes auf die des Hintergliedes schließen kann. Aus dem prädikatenlogischen Gesetz $\forall(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$ erhält man demnach die Schlußregel

$$(1) \quad \frac{\forall(x)\,F(x)}{F(y)}.$$

Aus der Aussage „Alles ist in Bewegung" darf man nach dieser Regel z. B. auf die Aussage „Die Erde ist in Bewegung" schließen, d. h. darauf, daß ein Merkmal, das allen Individuen zukommt, auch einem bestimmten Individuum zukommt.

Aus $F(y) \rightarrow \exists(x)\, F(x)$ ergibt sich die Schlußregel

$$(2) \qquad \frac{F(y)}{\exists(x)\, F(x)}.$$

Nach dieser Regel darf man, wenn ein bestimmtes Individuum irgendein Merkmal hat, darauf schließen, daß es mindestens ein Individuum gibt, dem dieses Merkmal zukommt.

Diese beiden Regeln werden, obwohl unbewußt, beim logischen Schließen meist richtig angewendet. Dagegen werden bei der Anwendung von Regeln, in denen die Negation vorkommt, schon wesentlich häufiger Fehler gemacht.

Die folgenden Regeln beruhen auf allgemeingültigen Äquivalenzen. Eine prädikatenlogische Äquivalenz ist wie eine aussagenlogische – vgl. hierzu 2.1.8. – genau dann allgemeingültig, wenn die Wahrheitswerte ihrer beiden Glieder bei gleicher Belegung ihrer Variablen in jedem Falle übereinstimmen. Deshalb kann man auch von jedem ihrer beiden Glieder zwingend auf das andere schließen; d. h., aus jeder allgemeingültigen Äquivalenz ergeben sich zwei zwingende Schlußregeln.

Die folgenden Gesetze (bezeichnet durch (1), . . .) geben Beziehungen zwischen All- und Existentialaussagen wieder; die ihnen entsprechenden Regeln (bezeichnet durch (1.1.), . . .) erlauben die Umformung von Allaussagen in Existentialaussagen und umgekehrt:

$$(1) \qquad \forall(x)\; F[x] \quad \leftrightarrow \quad \sim \exists(x) \sim F(x)$$

$$(1.1.) \quad \frac{\forall(x)\; F(x)}{\sim \exists(x) \sim F(x)} \qquad (1.2.) \quad \frac{\sim \exists(x) \sim F(x)}{\forall(x)\; F(x)}.$$

Legen wir für diese und die nächsten Ausdrücke die Klasse der Menschen als Individuenbereich fest, so können wir nach (1.1.) aus „Jeder Mensch besitzt Bewußtsein“ auf „Es gibt keinen Menschen, der nicht die Eigenschaft hat, Bewußtsein zu besitzen“ schließen.

$$(2) \qquad \sim \forall(x)\; F(x) \quad \leftrightarrow \quad \exists(x) \sim F(x)$$

$$(2.1.) \quad \frac{\sim \forall(x)\; F(x)}{\exists(x) \sim F(x)} \qquad (2.2.) \quad \frac{\exists(x) \sim F(x)}{\sim \forall(x)\; F(x)}.$$

Nach (2.1.) schließt man aus „Nicht alle Menschen sind friedliebend“ auf „Es gibt Menschen, die nicht friedliebend sind“ – genauer „Es gibt mindestens einen Menschen, der

nicht friedliebend ist".

$$(3) \quad \exists(x) \quad F(x) \quad \leftrightarrow \quad \sim \forall(x) \sim F(x)$$

$$\begin{array}{lll} (3.1.) & \exists(x) \quad F(x) & (3.2) \quad \sim \forall(x) \sim F(x) \\ \hline & \sim \forall(x) \sim F(x) & \qquad\quad \exists(x) \quad F(x). \end{array}$$

Aus „Es gibt Menschen, die am Kriege verdienen" schließt man nach (3.1) zwingend auf „Es gilt nicht für jeden Menschen, daß er nicht am Kriege verdient".

$$(4) \quad \sim \exists(x) \quad F(x) \quad \leftrightarrow \quad \forall(x) \sim F(x)$$

$$\begin{array}{lll} (4.1.) & \sim \exists(x) \quad F(x) & (4.2) \quad \forall(x) \sim F(x) \\ \hline & \forall(x) \sim F(x) & \qquad\quad \sim \exists(x) \quad F(x). \end{array}$$

Nach (4.1.) schließt man aus „Es gibt keinen Menschen, der alles weiß" auf „Für jeden Menschen gilt, daß er nicht alles weiß".

Umformungen von Allaussagen in Existentialaussagen oder umgekehrt müssen – wie z. B. in dem in 3.2.6. dargestellten Entscheidungsverfahren – öfter vorgenommen werden. Häufig können solche Umformungen dazu dienen, das Verständnis komplizierter Aussagen zu erleichtern oder überhaupt erst zu ermöglichen. Es wird demnach zweckmäßig sein, eine allgemeine Regel zur Umformung beliebiger Allaussagen in Existentialaussagen und umgekehrt zu formulieren, damit man sich nicht für jede besondere Art von Aussagen eine besondere Regel merken muß:

Eine Allaussage (Existentialaussage) wird in eine ihr semantisch äquivalente Existentialaussage (Allaussage) umgeformt, indem

1. **der Alloperator (Existentialoperator) durch den Existentialoperator (Alloperator) ersetzt,**
2. **der neue Operator negiert und**
3. **der Wirkungsbereich des Operators insgesamt negiert wird.**

Danach erhält man z. B. aus

$$\sim \forall(x)\, F(x)$$

den Ausdruck

$$\sim \sim \exists(x) \sim F(x);$$

und da zwei Negationszeichen, die sich auf denselben Ausdruck beziehen, sich aufheben, darf man vereinfachen zu

$$\exists(x) \sim F(x).$$

Damit haben wir mit Hilfe der allgemeinen Regel die Regel (2.1.) gewonnen; wenden wir sie nun auf $\exists(x) \sim F(x)$ an, so erhalten wir auch die Regel (2.2.).

Aus dem Ausdruck

$$\exists(x) \sim F(x)$$

ergibt sich zunächst

$$\sim \forall(x) \sim \sim F(x)$$

und danach durch Vereinfachung

$$\sim \forall(x)\, F(x).$$

Diese beiden Beispiele machen deutlich, daß Negationszeichen, die in dem ursprünglichen Ausdruck auftreten, bei der Umformung in den neuen Ausdruck übernommen werden müssen.

An Hand der beiden nächsten Beispiele wollen wir zeigen, daß es wichtig ist, bei der Umformung auch den dritten Schritt korrekt zu vollziehen, d. h., den Wirkungsbereich des Operators zu erkennen und genau ihn zu negieren.

Aus dem Ausdruck

$$\forall(x)\, F(x) \rightarrow F(y)$$

ergibt sich

$$\sim \exists(x) \sim F(x) \rightarrow F(y),$$

denn im Wirkungsbereich des Alloperators steht nur $F(x)$, während $F(y)$ nicht zu seinem Wirkungsbereich gehört und demzufolge von der Umformung nicht beeinflußt wird. Durch die Übersetzung der beiden symbolisierten Ausdrücke kann man sich davon überzeugen, daß sie semantisch äquivalent sind. Der erste lautet: „Wenn jedes Individuum x die Eigenschaft F hat, so hat auch ein bestimmtes Individuum y diese Eigenschaft"; der zweite lautet: „Wenn es kein Individuum x gibt, das die Eigenschaft F nicht hat, so hat auch ein bestimmtes Individuum y diese Eigenschaft."

Wenden wir nun die Umformungsregel auf den Ausdruck $\forall(x)\, [M(x) \vee I(x)]$ an. Als Individuenbereich sei die Klasse der Philosophen zugrunde gelegt, und der Ausdruck möge bedeuten: „Jeder Philosoph ist Materialist oder Idealist." Die Umformung des Ausdrucks

$$\forall(x)\, [M(x) \vee I(x)]$$

ergibt nach der Umformungsregel

$$\sim \exists(x) \sim [M(x) \vee I(x)].$$

d. h., „Es gibt keinen Philosophen, für den nicht gilt, daß er Materialist oder Idealist ist". Da ja die Gesetze und Regeln der Aussagenlogik in der Prädikatenlogik ihre Gültigkeit behalten, kann mit ihrer Hilfe diese Aussage weiter umgeformt werden. Nach der Regel über die Umformung von Alternativen in Konjunktionen (angegeben in 2.1.8.) läßt sich $\sim (p \vee q)$ umformen in $\sim \sim (\sim p \wedge \sim q)$; dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen zu $(\sim p \wedge \sim q)$. Setzt man nun $M(x)$ für p und $I(x)$ für q ein, so erhält man aus $\sim [M(x) \vee I(x)]$ den ihm äquivalenten Ausdruck $[\sim M(x) \wedge \sim I(x)]$. Damit ist dem ursprünglichen Ausdruck auch der folgende semantisch äquivalent:

$$\sim \exists(x) [\sim M(x) \wedge \sim I(x)];$$

d. h., „Es gibt keinen Philosophen, der nicht Materialist und nicht Idealist ist" oder „Es gibt keinen Philosophen, der weder Materialist noch Idealist ist".

Analog zu der eben angewandten aussagenlogischen Regel werden auch die übrigen in 2.1. und 2.2.1. dargestellten Regeln zur Umformung prädikatenlogischer Ausdrücke verwendet. Mit ihrer Hilfe werden sowohl prädikatenlogische Aussagenverbindungen als auch – wie im voraufgegangenen Beispiel – Verbindungen von Prädikaten umgeformt. Sie erweisen sich wie die hier besprochene Regel zur Umformung von Allaussagen in Existentialaussagen und umgekehrt in zweierlei Hinsicht als nützlich: Sie sind bei der Entscheidung prädikatenlogischer Ausdrücke notwendig, und sie können zur Umformung schwer verständlicher Ausdrücke in leichter verständliche dienen.

Die Umformung von Ausdrücken, in denen zwei oder mehr Operatoren aufeinanderfolgen, setzt noch eine Vereinbarung darüber voraus, was in diesem Falle unter „Wirkungsbereich" zu verstehen ist. Wir vereinbaren: Steht unmittelbar rechts neben einem Operator ein weiterer, so gehört dieser mit zum Wirkungsbereich des ersten Operators. Unsere Regel kann demzufolge auf einen Ausdruck mit mehreren Operatoren mehrfach angewandt werden.

In 3.1.5. hatten wir festgestellt, daß die Aussage „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine kleinere" – $\forall(y) \exists(x) [x < y]$ –

falsch ist. Folglich muß ihr Negat wahr sein:

$$\sim \forall (y)\ \exists (x)\ [x < y],$$

d. h., „Es ist nicht wahr, daß es zu jeder natürlichen Zahl y eine natürliche Zahl x gibt, die kleiner ist als y". Die erste Anwendung der Umformungsregel führt zu:

$$\exists (y) \sim \exists (x)\ [x < y];$$

d. h., „Es gibt eine natürliche Zahl y, für die gilt: es gibt keine natürliche Zahl x, die kleiner ist als y" oder „Es gibt eine natürliche Zahl, zu der es keine kleinere gibt". Die zweite Anwendung der Regel ergibt:

$$\exists (y)\ \forall (x) \sim [x < y];$$

d. h., „Es gibt eine natürliche Zahl y, so daß für jede natürliche Zahl x gilt: es ist nicht wahr, daß x kleiner ist als y".

Wir haben mehrfach davon gesprochen, daß man bei der Negation komplizierter Aussagen leicht Fehler machen kann, wenn man dabei allein von inhaltlichen Überlegungen ausgeht. Die hier dargestellten Methoden erlauben es hingegen, solche Negationen mit ganz formalen Mitteln korrekt auszuführen.

Bei der Negation von Allaussagen werden in der Umgangssprache häufig „nicht" und „alle" vertauscht. So hört man etwa auf die Frage, ob alle Lokomotiven mit Kohle geheizt werden, die Antwort: „Nein, alle Lokomotiven werden nicht mit Kohle geheizt". Mit Hilfe der Betonung wird beim gesprochenen Satz noch einigermaßen deutlich – obwohl auch nicht immer –, daß gemeint ist „Nicht alle Lokomotiven werden mit Kohle geheizt". Im geschriebenen oder gedruckten Text sind in solchen Fällen Mißverständnisse nicht selten. Verdeutlichen wir den Unterschied zwischen beiden Formulierungen, indem wir sie so, wie sie dastehen, symbolisieren und dann die symbolisierten Ausdrücke umformen.

„Alle Lokomotiven werden nicht mit Kohle geheizt."	„Nicht alle Lokomotiven werden mit Kohle geheizt."
$\forall (x)\ [L(x) \rightarrow \sim K(x)]$	$\sim \forall (x).[L(x) \rightarrow K(x)]$

Die Umformung der Allaussagen in Existentialaussagen ergibt:

$$\sim \exists (x) \sim [L(x) \rightarrow \sim K(x)]$$

$$\sim \sim \exists (x) \sim [L(x) \rightarrow K(x)].$$

Nach der Regel zur Umformung von Implikationen in Alternativen – vgl. 2.1.8. – werden die Ausdrücke in den eckigen Klammern umgeformt in:

$$\sim \exists(x) \sim [\sim L(x) \vee \sim K(x)]$$
$$\sim \sim \exists(x) \sim [\sim L(x) \vee K(x)].$$

Nach der Regel zur Umformung von Alternativen in Konjunktionen – vgl. 2.1.8. – ergibt sich weiter:

$$\sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim L(x) \wedge \sim \sim K(x)]$$
$$\sim \sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim L(x) \wedge \sim K(x)].$$

Werden die doppelten Negationen beseitigt, so erhält man schließlich:

$\sim \exists(x)\,[L(x) \wedge K(x)]$	$\exists(x)\,[L(x) \wedge \sim K(x)]$
„Es gibt keine Lokomotive, die mit Kohle geheizt wird."	„Es gibt Lokomotiven, die nicht mit Kohle geheizt werden."

Eine korrekte Negation von Aussagen ergibt sich immer, wenn man zunächst die ganze Aussage mit „Es ist nicht wahr, daß . . ." negiert und dann nach den Regeln der Logik umformt. Hat man das öfter in allen einzelnen Schritten durchgeführt, prägen sich einem die einfacheren, aber zugleich sehr oft auftretenden Umformungen sehr schnell ein. Man weiß z. B. sehr bald, daß der Ausdruck $\sim \forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$ dem Ausdruck $\exists(x)\,[F(x) \wedge \sim G(x)]$ semantisch äquivalent ist und daß $\sim \exists(x)\,[F(x) \wedge G(x)]$ und $\forall(x)\,[F(x) \rightarrow \sim G(x)]$ ebenfalls semantisch äquivalent sind.

Wenn Aussagen korrekt negiert werden, so liegt das häufig daran, daß man aus seiner Sachkenntnis heraus den Sachverhalt richtig widerspiegelt. Schwierig wird es, wenn keine genügende Sachkenntnis vorliegt. Zeigen wir das an einer etwas scherzhaften Formulierung: „Es ist nicht wahr, daß das, was sich hinter meinem Rücken befindet ($R(x)$) ein neues ($N(x)$) Buch ($B(x)$) ist." Es ist zu erwarten, daß diese Formulierung der folgenden äquivalent ist: „Was sich hinter meinem Rücken befindet, ist kein neues Buch." Was aber heißt „kein neues Buch"? Kann man daraus entnehmen, daß es sich um einen Gegenstand handelt, der weder neu noch ein Buch ist? Symbolisieren wir die Aussage zunächst und formen wir sie dann um:

$$\sim \forall(x)\,\{R(x) \rightarrow [N(x) \wedge B(x)]\}.$$

Zunächst ergibt sich die Existentialaussage

$$\exists(x) \sim \{R(x) \rightarrow [N(x) \wedge B(x)]\}.$$

Die doppelte Negation vor dem Existentialoperator ist bereits beseitigt. Wie in den voraufgegangenen Beispielen werden nun einige Umformungen vorgenommen, die dazu führen, daß sich die Negation nicht mehr auf den ganzen in der geschweiften Klammer stehenden Ausdruck bezieht, sondern auf einfachere Bestandteile:

$$\exists(x) \sim \{\sim R(x) \vee [N(x) \wedge B(x)]\}$$
$$\exists(x) \sim \sim \{\sim \sim R(x) \wedge \sim [N(x) \wedge B(x)]\}$$
$$\exists(x) \{R(x) \wedge \sim [N(x) \wedge B(x)]\}.$$

Die als Vermutung aufgestellte Formulierung „Was sich hinter meinem Rücken befindet, ist kein neues Buch" ist demnach doch nicht der ursprünglichen äquivalent, sonst müßte der Ausdruck lauten: $\forall(x) \{R(x) \rightarrow \sim [N(x) \wedge B(x)]\}$. Die Übersetzung des Ausdrucks aber, der sich bei der bisherigen Umformung ergeben hat, lautet: „Es befindet sich etwas hinter meinem Rücken, was kein neues Buch ist." Die weitere Umformung ergibt schließlich:

$$\exists(x) \{R(x) \wedge [\sim N(x) \vee \sim B(x)]\};$$

d. h., „Es gibt etwas, was sich hinter meinem Rücken befindet und nicht neu oder kein Buch ist". Es handelt sich dabei also nicht notwendig um einen Gegenstand, der weder neu noch ein Buch ist, obwohl auch diese Möglichkeit besteht. Das ergibt sich daraus, weil nicht die beiden Prädikate negiert sind, sondern ihre Konjunktion. Um den Unterschied zu verdeutlichen, stellen wir die Wahrheitsmatrix der entsprechenden aussagenlogischen Ausdrücke auf:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim q$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	f
f	f	w	w	f	w	w

Die Umformung von Ausdrücken, in denen zweistellige Prädikate auftreten, erfolgt ganz ähnlich. Zu negieren ist die Aussage „Wenn jemand Bruder von jemand anderem ist, so ist dieser Bruder des ersten". In symbolisierter Sprache hat die

negierte Aussage die Gestalt:

$$\sim \forall(x)\,\forall(y)\,[B(x, y) \rightarrow B(y, x)].$$

Zunächst werden die Alloperatoren durch Existentialoperatoren ersetzt und doppelte Negationen beseitigt:

$$\sim \sim \exists(x) \sim \forall(y)\,[B(x, y) \rightarrow B(y, x)]$$
$$\sim \sim \exists(x) \sim \sim \exists(y) \sim [B(x, y) \rightarrow B(y, x)]$$
$$\exists(x)\,\exists(y) \sim [B(x, y) \rightarrow B(y, x)].$$

Nun erfolgen Umformungen des Klammerausdrucks wie in den voraufgegangenen Beispielen:

$$\exists(x)\,\exists(y) \sim [\sim B(x, y) \vee B(y, x)]$$
$$\exists(x)\,\exists(y) \sim \sim [\sim \sim B(x, y) \wedge \sim B(y, x)]$$
$$\exists(x)\,\exists(y)\,[B(x, y) \wedge \sim B(y, x)].$$

Danach gibt es also Paare von Menschen – wir haben die Klasse der Menschen stillschweigend als Individuenbereich zugrunde gelegt –, innerhalb derer der eine Partner Bruder des anderen ist, aber nicht umgekehrt; das ist natürlich genau dann der Fall, wenn ein solches Paar aus Bruder und Schwester besteht.

Wir hatten in 3.1.5. schon darauf hingewiesen, daß man in prädikatenlogischen Ausdrücken All- und Existentialoperatoren nicht ohne weiteres vertauschen darf. Eine Vertauschung ist nur nach folgender Regel zulässig:

$$\frac{\exists(x)\,\forall(y)\,R(x, y)}{\forall(y)\,\exists(x)\,R(x, y)}.$$

Wenn es z. B. – in einem Kreise von Menschen – jemanden gibt, der von allen verehrt wird, dann folgt daraus, daß es für jeden jemanden gibt, der von ihm verehrt wird. – Die Umkehrung dieser Regel ist nicht gültig, wie sich an demselben Beispiel zeigen läßt. Wenn jeder jemanden verehrt, dann muß es sich keineswegs bei allen um ein und dieselbe Person handeln, die sie verehren.

3.2.4. Die traditionelle Lehre vom logischen Schließen

Dieser Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die Hauptteile der traditionellen Lehre vom logischen Schließen geben: die Lehre von den unmittelbaren Schlüssen und die

Lehre von den kategorischen Syllogismen. Die wesentlichen Erkenntnisse aus diesem Bereich des logischen Schließens stammen bereits von Aristoteles und sind in der unter dem Titel „Organon" bekannten Sammlung seiner Schriften über die formale Logik enthalten.

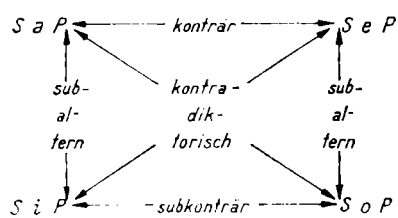
3.2.4.1. Die unmittelbaren Schlüsse

Die traditionelle Logik beschränkte sich – Aristoteles folgend – auf die Untersuchung von Schlüssen, in denen nur Aussagen der folgenden Art vorkommen:

Alle S sind P	abgekürzt: $S\ a\ P$
Alle S sind nicht P	abgekürzt: $S\ e\ P$
Einige S sind P	abgekürzt: $S\ i\ P$
Einige S sind nicht P	abgekürzt: $S\ o\ P$.

Die Buchstaben *a*, *e*, *i* und *o* in den Abkürzungen sind dem Wort „*affirmo*" – auf deutsch: „ich bejahe" – für die beiden bejahenden, dem Wort „*nego*" – auf deutsch: „ich verneine" – für die beiden verneinenden Aussagen entnommen.

Das Verhältnis von $S\ a\ P$, $S\ e\ P$, $S\ i\ P$ und $S\ o\ P$ zueinander stellte man in der traditionellen Logik in einem logischen Quadrat dar:



Man kann mit Hilfe dieses logischen Quadrats, wie sich in 3.2.5. zeigen wird, feststellen, ob gewisse unmittelbare Schlüsse zwingend sind oder nicht. Zunächst aber muß gesagt werden, was unmittelbare Schlüsse sind und welche Arten von ihnen es gibt.

Unmittelbare Schlüsse sind Schlüsse aus genau einer Aussage auf eine andere. – Die unmittelbaren Schlüsse wurden von Aristoteles – im Gegensatz zu den Syllogismen – nicht systematisch dargestellt; sie finden sich an verschiedenen Stellen des „Organon".

Die unmittelbaren Schlüsse werden unterteilt in:

(1) Schlüsse der Subalternation
(2) Schlüsse der Opposition
(3) Schlüsse der Konversion
(4) Schlüsse der Kontraposition.

(1) Ein *Schluß der Subalternation* ist ein Schluß aus der Wahrheit einer Allaussage auf die Wahrheit der zugehörigen subalternierten Existentialaussage oder aus der Falschheit einer Existentialaussage auf die Falschheit der subalternierenden Allaussage.

Durch Subalternation schließt man z. B. aus „Alle Militaristen müssen im Interesse der Erhaltung des Friedens gebändigt werden" auf „Einige Militaristen – z. B. die westdeutschen – müssen im Interesse der Erhaltung des Friedens gebändigt werden".

(2) Ein *Schluß der Opposition* ist ein Schluß von einer bejahenden Aussage auf eine verneinende oder umgekehrt. Dabei schließt man immer von der Wahrheit der ersten auf die Falschheit der zweiten oder umgekehrt.

Durch Opposition schließt man z. B. aus der Wahrheit von „Alle antagonistischen Klassengesellschaften sind Ausbeutergesellschaften" auf die Falschheit von „Einige antagonistische Klassengesellschaften sind nicht Ausbeutergesellschaften".

(3) Ein *Schluß der Konversion* ist ein Schluß von der Wahrheit einer Aussage auf die Wahrheit einer anderen, in der die beiden Prädikate der ersten in umgekehrter Reihenfolge auftreten.

Durch Konversion schließt man z. B. aus „Alle Menschen sind Lebewesen" auf „Einige Lebewesen sind Menschen".

(4) Ein *Schluß der Kontraposition* ist ein Schluß von der Wahrheit einer Aussage auf die Wahrheit einer anderen, in der die beiden Prädikate der ersten in umgekehrter Reihenfolge und negiert auftreten.

Durch Kontraposition schließt man z. B. aus „Alle Menschen sind Lebewesen" auf „Alle Individuen, die nicht Lebewesen sind, sind nicht Menschen".

Mit der Definition der unmittelbaren Schlüsse ist natürlich noch kein Kriterium dafür gegeben, welche von ihnen zwingend sind. Wie man diese ermitteln kann, werden wir erst in 3.2.5. sehen.

Nach diesem Überblick über die unmittelbaren Schlüsse wenden wir uns nun der Syllogistik zu.

3.2.4.2. *Die Syllogistik*

Die *Syllogistik* ist die Theorie des Syllogismus, die Lehre von den Syllogismen. – Sie ist in dem Teil „Erste Analytik" des „Organon" von Aristoteles systematisch dargestellt.

Ein *Syllogismus* ist ein Schluß aus zwei Aussagen auf eine dritte. In den Prämissen eines Syllogismus treten genau drei verschiedene Begriffe auf. Einer von ihnen kehrt als *Subjektsbegriff* (*S*) der Konklusion wieder, ein zweiter als *Prädikatsbegriff* (*P*). Der dritte, der *Mittelbegriff* (*M*), kommt in beiden Prämissen, aber nicht in der Konklusion vor. Er ist der Mittler zwischen den Prämissen; er stellt eine Verbindung zwischen ihnen her, die den Schluß auf die Konklusion erst ermöglicht. In dem Schluß

Alle Säugetiere sind Warmblütler
Alle Hunde sind Säugetiere
———————————————
Alle Hunde sind Warmblütler

ist „Hunde" Subjektsbegriff, „Warmblütler" Prädikatsbegriff und „Säugetiere" Mittelbegriff. – Die Bezeichnungen „Prädikatsbegriff" und „Subjektsbegriff" beziehen sich nur auf die grammatische Funktion der Begriffe bzw. Wörter in der Konklusion. Im Sinne der modernen Logik sind natürlich alle drei Begriffe Prädikate.

Wenn man die allgemeine Struktur unseres Schlusses darstellt und dabei nur die Stellung der drei Begriffe zueinander in Betracht zieht, erhält man die *1. Schlußfigur* der Syllogistik:

$$\begin{array}{l} M - P \\ \underline{S - M} \\ S - P. \end{array}$$

Neben dieser Schlußfigur gibt es noch drei weitere. Sie ergeben sich daraus, daß der Mittelbegriff in jeder der beiden Prämissen als Subjektsbegriff oder als Prädikatsbegriff auftreten kann.

2. Schlußfigur	3. Schlußfigur	4. Schlußfigur
$P - M$	$M - P$	$P - M$
$\underline{S - M}$	$\underline{M - S}$	$\underline{M - S}$
$S - P$	$S - P$	$S - P.$

Ersetzt man in einer Schlußfigur die zwischen je zwei Prädikaten stehenden Striche durch *a*, *e*, *i* oder *o* in beliebiger

Kombination, so erhält man jeweils einen *Modus* dieser Figur. Auf diese Weise lassen sich 64 Modi aus jeder der vier Figuren herstellen. Beispiele für Modi der 1. Figur sind:

$$\begin{array}{cccc} (1)\ M\,a\,P & (2)\ M\,e\,P & (3)\ M\,a\,P & (4)\ M\,e\,P \\ S\,a\,M & S\,a\,M & S\,i\,M & S\,i\,M \\ \hline S\,a\,P & S\,e\,P & S\,i\,P & S\,o\,P \end{array}$$

Von den insgesamt 256 möglichen Modi sind allerdings nur 24 gültig. Ein *gültiger Modus* ist eine gültige Schlußregel. – Ersetzt man in einem gültigen Modus *S*, *P* und *M* durch Begriffe, Prädikate, so erhält man einen konkreten Schluß, in dem die Wahrheit der Konklusion zwingend aus der Wahrheit der Prämissen folgt. Aus den aussagenlogischen Schlußregeln konnten wir solche Schlüsse durch die Einsetzung von konkreten Aussagen für die Variablen gewinnen.

Von den 24 gültigen Modi entfallen je sechs auf jede der vier Schlußfiguren. Vier gültige Modi der 1. Figur haben wir unter (1) bis (4) bereits aufgezählt. Sie heißen in der traditionellen Logik in der angegebenen Reihenfolge: „*Modus Barbara*", „*Modus Celarent*", „*Modus Darii*" und „*Modus Ferio*". Diese Namen sind künstlich geschaffene Merkwörter, deren Vokale – auch hinsichtlich der Reihenfolge – mit denen der jeweiligen Modi übereinstimmen.

Für die traditionelle Logik wie für Aristoteles selbst war es schwierig, im einzelnen nachzuweisen, welche Modi gültig sind und welche nicht. Von einzelnen Ungenauigkeiten abgesehen, hat man jedoch genau die Modi als gültig nachgewiesen, die es auch tatsächlich sind. Allerdings sind die Begründungen für die Gültigkeit der einzelnen Modi recht umständlich und schwer nachzuprüfen.

Die Mittel der modernen Logik ermöglichen nicht nur eine systematische Ableitung aller gültigen Modi der Syllogistik, sie liefern auch Entscheidungsverfahren, mit deren Hilfe man von jedem beliebigen Modus in aller Präzision feststellen kann, ob er gültig ist oder nicht. – Mit einem solchen Entscheidungsverfahren wollen wir uns in 3.2.6. beschäftigen.

3.2.4.3. Zum Verhältnis von traditioneller und moderner Lehre vom logischen Schließen

Aristoteles hat, soweit die Geschichte der Logik bekannt ist, als erster eine systematische Darstellung der Syllogistik ge-

geben und eine Reihe unmittelbarer Schlüsse aufgezählt und bewiesen.

Unmittelbare Schlüsse sind Schlüsse aus *einer* Prämisse, Syllogismen sind Schlüsse aus *zwei* Prämissen.

Nun reichen aber oft eine oder zwei Prämissen nicht aus, um eine Konklusion zu gewinnen. In vielen Fällen kann man sich dann dadurch helfen, daß man einen Schluß mit mehr als zwei Prämissen in mehrere Syllogismen zerlegt. Die Konklusion des ersten Syllogismus wird dann als Prämisse in einem zweiten verwandt usw. Dieses Verfahren kann zwar recht umständlich werden, führt jedoch noch zum Ziel.

Darüber hinaus aber versagt die traditionelle Lehre vom logischen Schließen völlig. Die Scholastiker haben beispielsweise eine Regel bewiesen, wonach aus zwei verneinenden Prämissen nichts folgt. Diese Regel trifft so lange zu, wie man sich auf Aussagen der Arten $S\ a\ P$, $S\ e\ P$, $S\ i\ P$ und $S\ o\ P$ beschränkt. Es gibt aber Aussagen, in denen zwar auch nur zwei Begriffe vorkommen, die sich aber nicht so umformen lassen, daß sie in eine der genannten Arten eingeordnet werden können.

Der Schluß

Kein Materialist ist ein objektiver Idealist.
Kein subjektiver Idealist ist ein Materialist.

Es gibt (Philosophen), die weder subjektive noch objektive Idealisten sind.

hat zwar die äußere Form eines Syllogismus, kann aber in der Syllogistik gar nicht entschieden werden, weil die Konklusion zu keiner der dort berücksichtigten Arten von Aussagen gehört. Dagegen ist sie prädikatenlogisch ganz einfach durch den Ausdruck $\exists(x)\,[\sim S(x) \wedge \sim O(x)]$ darstellbar, und dieser Schluß kann nach dem in 3.2.6. dargestellten Entscheidungsverfahren als zwingend nachgewiesen werden.

Wir wollen als weiteres Beispiel einen Schluß angeben, der mit den Mitteln der traditionellen Logik nicht entschieden werden kann. – Bei einem Spiel wird folgendes ausgemacht:

Wer beim Münzenwerfen das Wappen wirft (S_1), der gewinnt (P_1) – $\forall\,(x)\,[S_1(x) \rightarrow P_1(x)]$ – (die x seien Spieler; Individuenbereich ist also die Klasse der Spieler) – und wer die Zahl wirft (S_2), der verliert (P_2) – $\forall\,(x)\,[S_2(x) \rightarrow P_2(x)]$. Weiterhin gilt ja für jeden Spieler, daß er Wappen oder Zahl

werfen kann — $\forall(x)\,[S_1(x) \vee S_2(x)]$, aber für keinen, daß er gewinnen *und* verlieren kann $\sim \exists(x)\,[P_1(x) \wedge P_2(x)]$. Aus diesen vier Voraussetzungen folgt für jeden Spieler: Wenn der Spieler gewonnen hat, so hat er Wappen geworfen — $\forall(x)\,[P_1(x) \rightarrow S_1(x)]$ —, und wenn er verloren hat, so hat er Zahl geworfen — $\forall(x)\,[P_2(x) \rightarrow S_2(x)]$. Der gesamte Schluß hat — symbolisiert — folgende Gestalt:

$$\{\forall(x)\,[S_1(x) \rightarrow P_1(x)] \wedge \forall(x)\,[S_2(x) \rightarrow P_2(x)]$$
$$\wedge\ \forall(x)\,[S_1(x) \vee S_2(x)] \wedge \sim \exists(x)\,[P_1(x) \wedge P_2(x)]\}$$
$$\rightarrow \{\forall(x)\,[P_1(x) \rightarrow S_1(x)] \wedge \forall(x)\,[P_2(x) \rightarrow S_2(x)]\}.$$

Obwohl dieser Schluß eigentlich trivial ist und niemand im Falle unseres Beispiels einen Beweis für seine Richtigkeit verlangen würde, geht er doch, wie gesagt, schon über die aristotelische Syllogistik hinaus. Die moderne Logik dagegen hat diesen Schluß nicht nur für *zwei* mögliche Fälle, sondern sogar für *beliebig viele* bewiesen. Wenn es also die Möglichkeiten S_1, S_2, S_3 usw. und P_1, P_2, P_3 usw. gibt und wie oben gilt:

$S_1 \rightarrow P_1$, $S_2 \rightarrow P_2$, $S_3 \rightarrow P_3$ usw. und außerdem die P_1, P_2, P_3 usw. alle disjunkt sind, dann gelten auch die Schlußfolgerungen $P_1 \rightarrow S_1$, $P_2 \rightarrow S_2$, $P_3 \rightarrow S_3$ usw. — Dieser Schluß, auf beliebig viele Möglichkeiten bezogen, wird „Haubersches Theorem" genannt.

Wir haben bisher nur vom Bereich der Prädikatenlogik gesprochen, in dem ausschließlich einstellige Prädikate auftreten. Bereits hier hat sich erwiesen, daß die traditionelle Lehre vom logischen Schließen lediglich einen Teil der möglichen Schlüsse erfaßt. Das zeigt sich erst recht, wenn man zu mehrstelligen Prädikaten übergeht; sie werden durch die Mittel der traditionellen Logik überhaupt nicht erfaßt. Die Lehre von den unmittelbaren Schlüssen und die Lehre von den kategorischen Syllogismen bilden also nur einen relativ kleinen Bereich innerhalb der einstelligen Prädikatenlogik der ersten Stufe.

Neben den kategorischen Syllogismen betrachtete man in der traditionellen Logik auch noch die bedingten Syllogismen. Sie gehören jedoch nicht in die Prädikatenlogik, sondern in die Aussagenlogik, weil die innere Struktur der in den bedingten Syllogismen auftretenden Aussagen ohne Einfluß darauf ist, daß diese Schlüsse zwingend sind. Beispiele für diese bedingten Syllogismen sind in 2.2.1.2. angegeben. Man unterschied hypothetische Syllogismen — dazu gehören der Modus ponendo

ponens und der Modus tollendo tollens –, disjunktive Syllogismen – dazu gehören der Modus tollendo ponens und der Modus ponendo tollens – und eine dritte Form, die man „Dilemma“ nannte.

Die Bemerkungen über das Verhältnis von Syllogistik und Prädikatenlogik haben nicht den Zweck, die Leistungen des Aristoteles auf dem Gebiet der Logik etwa herabzusetzen. Im Gegenteil, man muß sich dessen bewußt sein, daß seine logischen Schriften neben denen über Geometrie von Euklid hinsichtlich ihrer Strenge und Präzision von keinem Werk des klassischen Altertums erreicht wurden. Unsere Bemerkungen sollen nur verdeutlichen, daß bis um die Mitte des vorigen Jahrhunderts auf dem Gebiet der formalen Logik – von einzelnen wichtigen Erkenntnissen abgesehen – keine wesentlichen Fortschritte erzielt wurden, und darauf aufmerksam machen, welche unerhörte Entwicklung die formale Logik seither vollzogen hat.

3.2.5. Methoden zur Entscheidung prädikatenlogischer Schlüsse

Um einen *aussagenlogischen Schluß* zu entscheiden, muß man folgendes tun:

1. Der Schluß wird in die symbolisierte Sprache der Logik übersetzt.
2. Die Prämissen werden konjunktiv verknüpft; die Konklusion wird durch die Implikation an die Konjunktion der Prämissen angeschlossen.
3. Dieser logische Ausdruck wird mit Hilfe seiner Wahrheitsmatrix auf seine Allgemeingültigkeit hin untersucht.

Ist er allgemeingültig, so ist die zugehörige Schlußregel als gültig und der Schluß selber als zwingend nachgewiesen (vgl. 2.1.1.3.).

Für den Bereich der Prädikatenlogik gibt es kein so einfaches Verfahren wie das der Wahrheitsmatrizen für den Bereich der Aussagenlogik. Es gibt überhaupt kein Verfahren, das sich für die Entscheidung beliebiger prädikatenlogischer Ausdrücke verwenden läßt.

Die ersten beiden Schritte bei der Entscheidung prädikatenlogischer Ausdrücke sind dieselben wie bei der Entscheidung

aussagenlogischer Ausdrücke. Danach versucht man, den zu entscheidenden Ausdruck so umzuformen, daß man z. B. seine Allgemeingültigkeit unmittelbar ablesen kann, oder ihn auf einen aussagenlogischen Ausdruck zu reduzieren, den man wiederum mit Hilfe einer Wahrheitsmatrix entscheiden kann.

Am Beispiel unmittelbarer Schlüsse wollen wir einige solcher Methoden betrachten, bevor wir im nächsten Abschnitt ein weiter reichendes Entscheidungsverfahren darstellen. Die Untersuchung unmittelbarer Schlüsse setzt aber voraus, daß zunächst eine Verabredung getroffen wird, wie die traditionellen Aussagen der Form $S\ a\ P$, $S\ e\ P$, $S\ i\ P$ und $S\ o\ P$ in die prädikatenlogische Symbolik zu übersetzen sind.

„$S\ a\ P$" war eine Abkürzung für „Alle S sind P". Dem Abschnitt über die Beziehungen zwischen Begriffen ist zu entnehmen, daß die Prädikate $S(x)$ und $P(x)$ in diesem Falle im Verhältnis der Subordination („Alle Arbeiter sind Werktätige") oder im Verhältnis der extensionalen Identität („Alle gleichseitigen Dreiecke sind gleichwinklige Dreiecke") zueinander stehen können. Um beide Möglichkeiten in einem prädikatenlogischen Ausdruck erfassen zu können, wählt man die Darstellung $\forall(x)\,[S(x) \rightarrow P(x)]$, die ja auch im Falle der Identität von S und P wahr ist, obwohl sie diese Beziehung nicht vollständig erfaßt. Statt $\forall(x)\,[S(x) \rightarrow P(x)]$ kann man auch $\sim \exists(x)\,[S(x) \wedge \sim P(x)]$ schreiben; der zweite Ausdruck ergibt sich nach der in 3.2.3. angegebenen Umformungsregel aus dem ersten.

„$S\ e\ P$" war eine Abkürzung für „Alle S sind nicht P". Damit ist gesagt, daß $S(x)$ und $P(x)$ disjunkt sind („Alle Materialisten sind nicht Idealisten" bzw. „Kein Materialist ist ein Idealist"). Dafür können wir in unserer Symbolsprache den Ausdruck $\forall(x)\,[S(x) \rightarrow \sim P(x)]$ oder – wiederum nach Anwendung der Umformungsregel – $\sim \exists(x)\,[S(x) \wedge P(x)]$ schreiben.

„$S\ i\ P$" war eine Abkürzung für „Einige S sind P". Das bedeutet, daß die $S(x)$ und $P(x)$ entsprechenden Klassen mindestens ein gemeinsames Element haben. Da nichts darüber gesagt wird, ob es außerdem Individuen gibt, die Element nur einer der beiden Klassen sind, können wir nur schreiben: $\exists(x)\,[S(x) \wedge P(x)]$ oder $\sim \forall(x)\,[S(x) \rightarrow \sim P(x)]$.

„$S\ o\ P$" war eine Abkürzung für „Einige S sind nicht P". Damit ist gesagt, daß es Individuen gibt, die Element der $S(x)$ entsprechenden Klasse und Element der $\sim P(x)$ entsprechen-

den Klasse sind. Diese Klasse umfaßt alle Individuen, die nicht Element der $P(x)$ entsprechenden Klasse sind. Man nennt sie auch die „Komplementärklasse" der zu $P(x)$ gehörigen Klasse. Da nichts darüber gesagt ist, ob es auch gemeinsame Elemente der $S(x)$ und $P(x)$ entsprechenden Klassen gibt, können wir nur $\exists (x) [S(x) \wedge \sim P(x)]$ oder $\sim \forall (x) [S(x) \rightarrow P(x)]$ schreiben.

In einer Tabelle zusammengefaßt ergibt sich:

Traditionelle Schreibweise	Moderne Schreibweise
$S\,a\,P$	$\forall (x)[S(x) \rightarrow P(x)]$ oder $\sim \exists (x)[S(x) \wedge \sim P(x)]$
$S\,e\,P$	$\forall (x)[S(x) \rightarrow \sim P(x)]$ oder $\sim \exists (x)[S(x) \wedge P(x)]$
$S\,i\,P$	$\exists (x)[S(x) \wedge P(x)]$ oder $\sim \forall (x)[S(x) \rightarrow \sim P(x)]$
$S\,o\,P$	$\exists (x)[S(x) \wedge \sim P(x)]$ oder $\sim \forall (x)[S(x) \rightarrow P(x)]$

Diese prädikatenlogische Symbolisierung von Aussagen der Form $S\,a\,P$ und $S\,e\,P$ hat zur Folge, daß sich bestimmte Schlüsse, die nach den Regeln der traditionellen Logik zwingend sind, als nicht zwingend herausstellen. In 3.3.5. werden wir ausführlicher auf die unterschiedlichen Auffassungen über den Charakter von Allaussagen in der traditionellen und in der modernen Logik und ihre Konsequenzen eingehen.

Eine weitere Vorbemerkung ist noch zu machen. Zwingende Schlüsse zeichnen sich dadurch aus, daß aus der Wahrheit der Prämissen auf die Wahrheit der Konklusion geschlossen wird. Bei Schlüssen der Opposition ist aber z. B. die Rede davon, daß man auf die Falschheit einer Aussage schließt. Ein solcher Schluß ist natürlich gleichwertig mit einem Schluß auf die Wahrheit des Negats dieser Aussage und ist dementsprechend zu symbolisieren.

Unter Berücksichtigung dessen schließen wir durch Opposition aus der Wahrheit von „Alle antagonistischen Klassengesellschaften sind Ausbeutergesellschaften" auf die Wahrheit von „Es ist nicht wahr, daß einige antagonistische Klassengesellschaften nicht Ausbeutergesellschaften sind". Wir prüfen, ob dieser Schluß zwingend ist, indem wir ihn zuerst symbolisieren, danach die Umwandlungsregel anwenden und schließlich diesen prädikatenlogischen Ausdruck auf einen aussagenlogischen reduzieren:

(1) $\forall (x) [K(x) \rightarrow A(x)] \quad \rightarrow \sim \exists (x) [K(x) \wedge \sim A(x)]$

(2) $\sim \exists (x) \sim [K(x) \rightarrow A(x)] \quad \rightarrow \sim \exists (x) [K(x) \wedge \sim A(x)]$

$$
\begin{array}{ll}
(3) & \sim \exists(x) \sim [\sim K(x) \vee A(x)] \rightarrow \sim \exists(x)[K(x) \wedge \sim A(x)] \\
(4) & \sim \exists(x)[\sim \sim K(x) \wedge \sim A(x)] \rightarrow \sim \exists(x)[K(x) \wedge \sim A(x)] \\
(5) & \sim \exists(x)[K(x) \wedge \sim A(x)] \rightarrow \sim \exists(x)[K(x) \wedge \sim A(x)] \\
(6) & \sim p \rightarrow \sim p
\end{array}
$$

Die in (6) vollzogene Reduktion auf einen aussagenlogischen Ausdruck ist deshalb erlaubt, weil in (5) auf beiden Seiten des Implikationszeichens der gleiche Ausdruck steht und weil man die in (5) stehende Implikation jederzeit durch eine geeignete Einsetzung aus der in (6) stehenden zurückgewinnen kann.

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow \sim p$
w	f	w
f	w	w

Die Wahrheitsmatrix für $\sim p \rightarrow \sim p$ ergibt, daß dieser Ausdruck allgemeingültig ist und mit ihm der in (1) stehende prädikatenlogische Ausdruck, da die in (1) bis (5) untereinander stehenden Ausdrücke einander äquivalent sind. Damit ist der ursprüngliche Schluß als zwingend und die angewandte Schlußregel als gültig nachgewiesen.

Dieser Nachweis ist verhältnismäßig umständlich geworden, weil es uns darauf ankam, ihn in allen Einzelheiten vorzuführen, damit man diese Methode auch auf andere Schlüsse übertragen kann.

Für die Entscheidung dieses Schlusses hätte man sich auch des logischen Quadrats bedienen können. Man kann z. B. alle Schlüsse der Opposition entscheiden, wenn man folgendes berücksichtigt:

1. Von zwei kontradiktorischen Aussagen ist immer eine wahr und die andere falsch.
2. Zwei konträre Aussagen können nicht zusammen wahr sein, aber sie können zusammen falsch sein.
3. Zwei subkonträre Aussagen können nicht zusammen falsch sein, aber sie können zusammen wahr sein.

Entscheidend ist jedoch nicht, mit welchen Methoden ein Schluß einfacher zu entscheiden ist, sondern welche Methoden einen größeren Bereich von Schlüssen zu entscheiden erlauben. Und unter diesem Gesichtspunkt kann das logische Quadrat nicht sehr hoch bewertet werden, weil es einen nur sehr kleinen Bereich von Schlüssen erfaßt. Dennoch kann es für die Kontrolle von Schlüssen im täglichen Leben durchaus nützlich sein.

Bei einer Reihe prädikatenlogischer Implikationen – und dazu gehören auch Ausdrücke, die prädikatenlogischen Schlüssen zugrunde liegen – kann man nach einem Verfahren, das in 2.1.8. für aussagenlogische Ausdrücke dargestellt wurde, feststellen, ob sie allgemeingültig sind oder nicht.

Der Grundgedanke ist derselbe wie bei der Entscheidung aussagenlogischer Ausdrücke: Man nimmt an, die Implikation sei nicht allgemeingültig, und versucht, eine Belegung bzw. Interpretation zu finden, bei der die Implikation falsch ist. Stellt sich heraus, daß es eine solche Belegung bzw. Interpretation nicht geben kann, ist die Implikation allgemeingültig und ein auf ihr beruhender Schluß zwingend.

Im Unterschied zu aussagenlogischen Implikationen müssen prädikatenlogische meist erst umgeformt werden, bevor man sie entscheiden kann. Für diese Umformungen benötigt man vor allem die Gesetze, die in 3.2.1. angegeben sind, bzw. die ihnen entsprechenden Regeln. Umformungen dieser Art müssen auch für das Entscheidungsverfahren in 3.2.6. vorgenommen werden, so daß die folgenden Beispiele zugleich als Vorübungen angesehen werden können.

Untersuchen wir einen Schluß der Gestalt

$$\frac{\begin{array}{l}\forall(x)\,[M(x) \rightarrow \sim P(x)]\\ \forall(x)\,[S(x) \rightarrow M(x)]\end{array}}{\forall(x)\,[S(x) \rightarrow \sim P(x)]}.$$

Er ist zwingend genau dann, wenn die Implikation

$$\{\forall(x)\,[M(x) \rightarrow \sim P(x)] \wedge \forall(x)\,[S(x) \rightarrow M(x)]\} \rightarrow \forall(x)\,[S(x) \rightarrow \sim P(x)]$$

allgemeingültig ist.

Nach einem Gesetz in 3.2.1. gilt die Regel

$$\frac{\forall(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]}{\forall(x)\,F(x) \rightarrow \forall(x)\,G(x)}.$$

Wenden wir sie auf die drei Aussagen der Implikation an, erhalten wir den Ausdruck

$$\{[\forall(x)\,M(x) \rightarrow \forall(x) \sim P(x)] \wedge [\forall(x)\,S(x) \rightarrow \forall(x)\,M(x)]\} \rightarrow [\forall(x)\,S(x) \rightarrow \forall(x) \sim P(x)].$$

Wir nehmen nun an, diese Implikation sei nicht allgemeingültig, d. h. bei mindestens einer Belegung falsch. Das ist nur dann der Fall, wenn ihr Vorderglied wahr und ihr Hinterglied falsch ist. Das Hinterglied wiederum ist nur dann falsch, wenn $\forall(x)\, S(x)$ wahr und $\forall(x) \sim P(x)$ falsch ist. Nehmen wir an, es sei so; dann müssen wir diese Aussagen auch im Vorderglied mit den angegebenen Werten belegen. Für die übrigen Aussagen im Vorderglied muß nun eine Belegung gefunden werden, die gewährleistet, daß es insgesamt wahr ist; d. h., da das Vorderglied eine Konjunktion ist, müssen beide Glieder dieser Konjunktion wahr sein. Demzufolge müssen wir $\forall(x)\, M(x)$ im ersten Glied den Wert falsch zusprechen – andernfalls wäre $\forall(x)\, M(x) \rightarrow \forall(x) \sim P(x)$ falsch. Im zweiten Glied aber müssen wir $\forall(x)\, M(x)$ den Wert wahr zusprechen, da sonst $\forall(x)\, S(x) \rightarrow \forall(x)\, M(x)$ falsch ist. Es ist aber unmöglich, ein und demselben Ausdruck innerhalb eines zusammengesetzten Ausdrucks zwei entgegengesetzte Werte zuzusprechen.

$$\{[\underbrace{\forall(x)\, M(x)}_{f?} \rightarrow \underbrace{\forall(x) \sim P(x)}_{f}] \wedge [\underbrace{\forall(x)\, S(x)}_{w} \rightarrow \underbrace{\forall(x)\, M(x)}_{w?}]\}$$

$$\rightarrow [\underbrace{\forall(x)\, S(x)}_{w} \rightarrow \underbrace{\forall(x) \sim P(x)}_{f}]$$

Die Annahme, die Implikation sei nicht allgemeingültig, führt also zu einer unmöglichen Konsequenz. Es gibt keine Belegung, bei der diese Implikation falsch ist; folglich ist sie allgemeingültig.

Als zweites Beispiel wählen wir die Implikation

$$\{\forall(x)\, [P(x) \rightarrow \sim M(x)] \wedge \exists(x)\, [S(x) \wedge M(x)]\}$$
$$\rightarrow \exists(x)\, [S(x) \wedge \sim P(x)].$$

Wir formen auch sie so um, daß jede Aussage nur noch ein einziges Prädikat enthält. Dazu brauchen wir außer der im ersten Beispiel angewandten Regel auch die folgende:

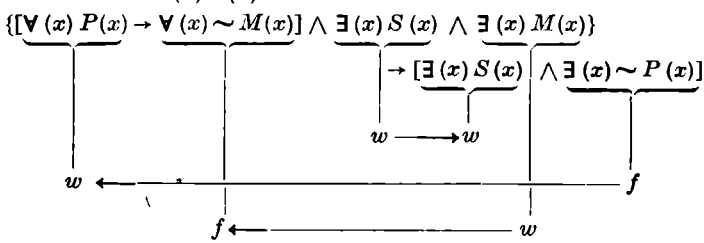
$$\frac{\exists(x)\, [F(x) \wedge G(x)]}{\exists(x)\, F(x) \wedge \exists(x)\, G(x).}$$

Das Resultat der Anwendung beider Regeln ist:

$$\{[\forall(x)\,P(x) \rightarrow \forall(x) \sim M(x)] \wedge \exists(x)\,S(x) \wedge \exists(x)\,M(x)\}$$
$$\rightarrow [\exists(x)\,S(x) \wedge \exists(x) \sim P(x)].$$

Die eckigen Klammern um die beiden Existentialaussagen im Vorderglied konnten wir weglassen; das Vorderglied ist damit zu einer dreigliedrigen Konjunktion geworden.

Wir suchen nun eine Interpretation, bei der das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch ist. Das Hinterglied ist falsch, wenn mindestens eine der beiden in ihm enthaltenen Aussagen falsch ist. Von $\exists(x)\,S(x)$ kann man nicht annehmen, daß sie falsch sei; sonst wäre das ganze Vorderglied bereits falsch, in dem sie ja auch vorkommt. Also nehmen wir an, sie sei wahr und $\exists(x) \sim P(x)$ sei falsch. Es muß nun noch die Implikation im Vorderglied berücksichtigt werden. Wir haben von $\exists(x) \sim P(x)$ angenommen, diese Aussage sei falsch. Sie ist $\sim \forall(x)\,P(x)$ äquivalent. Diese Aussage wiederum ist das Negat von $\forall(x)\,P(x)$. Also ist $\forall(x)\,P(x)$ nach den bisherigen Annahmen wahr. $\forall(x) \sim M(x)$ müßte nun ebenfalls wahr sein, wenn die Implikation $\forall(x)\,P(x) \rightarrow \forall(x) \sim M(x)$ wahr sein soll. $\forall(x) \sim M(x)$ ist aber äquivalent mit $\sim \exists(x)\,M(x)$ und damit das Negat von $\exists(x)\,M(x)$, dessen Wahrheit wir wie die von $\exists(x)\,S(x)$ annehmen müssen.



Es gibt also keine Belegung, bei der die untersuchte Implikation falsch ist; folglich ist sie allgemeingültig.

Dieses Vorgehen versagt jedoch bereits bei einem ähnlichen Beispiel. Zu untersuchen sei die Implikation

$$\{\forall(x)\,[M(x) \rightarrow \sim P(x)] \wedge \exists(x)\,[S(x) \wedge M(x)]\}$$
$$\rightarrow \exists(x)\,[S(x) \wedge \sim P(x)].$$

Wir erhalten durch Umformung:

$$\{[\forall(x)\,M(x) \rightarrow \forall(x) \sim P(x)] \wedge \exists(x)\,S(x) \wedge \exists(x)\,M(x)\}$$
$$\rightarrow [\exists(x)\,S(x) \wedge \exists(x) \sim P(x)].$$

Um eine Belegung zu finden, bei der diese Implikation falsch ist, müssen wir annehmen, daß die beiden Existentialaussagen

im Vorderglied und damit auch $\exists (x) S(x)$ im Hinterglied wahr sind und daß $\exists (x) \sim P(x)$ falsch ist. Aus der Falschheit von $\exists (x) \sim P(x)$ folgt die Falschheit von $\forall (x) \sim P(x)$. Aus den bisherigen Annahmen ergibt sich jedoch nichts über den Wahrheitswert von $\forall (x) M(x)$. Sowohl die Wahrheit wie auch die Falschheit dieser Aussage ist mit der Wahrheit von $\exists (x) M(x)$ verträglich. Im ersten Falle wäre die gesamte Implikation wahr, im zweiten falsch.

$$\{[\forall (x) M(x) \rightarrow \forall (x) \sim P(x)] \wedge \exists (x) S(x) \wedge \exists (x) M(x)\}$$

$$\rightarrow [\exists (x) S(x) \wedge \exists (x) \sim P(x)]$$

$$w \longrightarrow w$$

$$f \longleftarrow f$$

$$? \longleftarrow w$$

Mit dem Entscheidungsverfahren aus 3.2.6. läßt sich jedoch ohne weiteres feststellen, daß diese Implikation tatsächlich allgemeingültig ist.

Wenn auch der Versuch, die Allgemeingültigkeit einer Implikation indirekt nachzuweisen, nicht selten scheitert, so ist doch der notwendige Aufwand so gering, daß es sich lohnt, diesen Versuch zu unternehmen.

3.2.6. Ein prädikatenlogisches Entscheidungsverfahren

Das hier dargestellte Entscheidungsverfahren erlaubt nicht nur die Entscheidung der in der traditionellen Logik untersuchten Schlüsse, sondern sein Anwendungsbereich reicht weit darüber hinaus.

Damit ein Schluß nach diesem Verfahren entschieden werden kann, muß er zunächst symbolisiert werden. Der so entstandene prädikatenlogische Ausdruck wird dann nach bestimmten Anweisungen umgeformt. Ziel dieser Umformungen ist es, den Ausdruck auf eine solche Form zu bringen, daß man ihn auf einen aussagenlogischen Ausdruck reduzieren und diesen Ausdruck mit aussagenlogischen Mitteln entscheiden kann. Der prädikatenlogische Ausdruck wird also auf eine solche Form gebracht, daß man sich vorstellen kann, er sei durch Einsetzungen, wie sie in 3.2.2. beschrieben sind, entstanden, und diese Einsetzungen würden nun rückgängig gemacht.

Das Verfahren wird im folgenden in Gestalt einer Reihe von Anweisungen dargestellt, nach denen die Umformungen zu vollziehen sind. Auf eine Begründung der einzelnen Schritte und ihrer Zusammenhänge verzichten wir, weil sie über den Rahmen des in einer Einführung in die formale Logik Darstellbaren hinausführen würde[1]. – Zur Illustration werden die einzelnen Schritte des Verfahrens an folgendem Schluß vollzogen:

Alle Marxisten sind Atheisten.

Viele Friedenskämpfer sind nicht Atheisten.

Also: Viele Friedenskämpfer sind nicht Marxisten.

1. Symbolisiere alle in dem zu entscheidenden Schluß vorkommenden Aussagen! Bilde die Konjunktion der Prämissen und schließe die Konklusion durch die Implikation an!

$$\{\forall(x)\,[M(x) \rightarrow A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)].$$

2. Forme alle auftretenden Allaussagen in Existentialaussagen um! Forme die einzelnen Ausdrücke so um, daß in den Wirkungsbereichen der Existentialoperatoren an logischen Konstanten nur noch die Konjunktion und die Negation auftreten, wobei die Negation sich nicht auf zusammengesetzte Ausdrücke beziehen darf!

$$\{\sim \exists(x) \sim [M(x) \rightarrow A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)]$$

$$\{\sim \exists(x) \sim [\sim M(x) \vee A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)]$$

$$\{\sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim M(x) \wedge \sim A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)]$$

$$\{\sim \exists(x)\,[M(x) \wedge \sim A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)].$$

3. Negiere die Konklusion und ersetze das vor ihr stehende Implikationszeichen durch das Konjunktionszeichen! Laß die Klammern, die die Prämissen umschließen, fort!

$$\sim \exists(x)\,[M(x) \wedge \sim A(x)] \wedge \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)] \wedge \sim \exists(x).[F(x) \wedge \sim M(x)].$$

[1] Diese Begründung ist zu finden in: G. Klaus, Moderne Logik, S. 249f., 255f.

4. Prüfe, ob unter den Aussagen der soeben hergestellten Konjunktion wenigstens eine nicht negierte und wenigstens eine negierte auftritt!
5. Falls wenigstens eine nicht negierte und wenigstens eine negierte Existentialaussage vorhanden ist, verfahre folgendermaßen:
   1. Schreibe eine (oder die) nicht negierte Aussage hin!
   2. Setze dahinter das Implikationszeichen!
   3. Setze dahinter in Klammern die Alternative der negierten Aussagen – jedoch ohne Negationszeichen vor den Operatoren!

$$\exists(x)\,[F(x) \wedge \sim A(x)] \rightarrow \{\exists(x)\,[M(x) \wedge \sim A(x)] \vee \exists(x)\,[F(x) \wedge \sim M(x)]\}.$$

6. Laß die Operatoren und die Individuenvariablen fort!

$$[F \wedge \sim A] \rightarrow \{[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]\}.$$

7. Betrachte den so entstandenen Ausdruck als aussagenlogischen Ausdruck und stelle seine Wahrheitsmatrix auf!

F	A	M	$\sim A$	$\sim M$	$F \wedge \sim A$	$M \wedge \sim A$	$F \wedge \sim M$	$[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]$	$[F \wedge \sim A] \rightarrow \{[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]\}$
w	w	w	f	f	f	f	f	f	w
w	w	f	f	w	f	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	f	f	f	f	w
f	w	f	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	f	f	f	f	w

8. Ist der aussagenlogische Ausdruck nicht allgemeingültig und kommt in dem nach 3. entstandenen Ausdruck mehr als eine nicht negierte Existentialaussage vor, so führe mit einer anderen als bisher die Anweisungen 5. bis 7. durch.

Ergebnis: Ist wenigstens einer der gemäß 7. untersuchten Ausdrücke allgemeingültig, so ist auch der unter 1. stehende Ausdruck allgemeingültig, der ihm entsprechende Schluß zwingend und die Schlußregel, nach der geschlossen wurde, gültig.

Ist keiner der gemäß 7. untersuchten Ausdrücke allgemeingültig, so ist auch der unter 1. stehende Ausdruck nicht allgemeingültig, der ihm entsprechende Schluß nicht zwingend und die Schlußregel, nach der geschlossen wurde, nicht gültig.

Der hier als Beispiel betrachtete Schluß hat sich also tatsächlich – wie bereits in 3.2.1. behauptet – als zwingend herausgestellt und die Schlußregel, nach der geschlossen wurde, der *Modus Baroco* der 2. Schlußfigur, als gültig.

Ein zweites Beispiel mag den Gang des Verfahrens verdeutlichen.

Zu entscheiden ist der Schluß:

Kein Kolonialist ist Humanist.
Es gibt Kolonialisten.
Es gibt Menschen, die keine Humanisten sind.

Es gibt Menschen, die Kolonialisten, aber keine Humanisten sind.

Es geht hier nicht um die Frage, ob die Konklusion eine wahre Aussage ist – daran besteht kein Zweifel –, sondern um die Frage, ob die Konklusion zwingend aus den Prämissen folgt. Aus der ersten Prämisse allein folgt sie nicht. Die erste Prämisse besagt nur, daß koloniale Ausbeutung und Humanismus unverträglich sind; sie besagt nicht, daß es Menschen gibt, die die Ausbeutung von Kolonien betreiben und keine Humanisten sind. Auch aus der Konjunktion der zweiten und der dritten Prämisse folgt die Konklusion nicht zwingend, da der Ausdruck $[\exists(x)\, F(x) \wedge \exists(x)\, G(x)] \rightarrow \exists(x)\, [F(x) \wedge G(x)]$ nicht allgemeingültig ist. Andernfalls hätte man nur „Kolonialist" für F und „nicht Humanist" für G einzusetzen brauchen und hätte damit den Schluß aus der zweiten und der dritten Prämisse als zwingend nachgewiesen.

Es ist also notwendig, das Entscheidungsverfahren anzuwenden. Die Nummern vor den folgenden Ausdrücken kennzeichnen, gemäß welcher Anweisung diese Ausdrücke entstanden sind. Um die Symbolisierung und den Umformungsvorgang etwas zu vereinfachen, verabreden wir, daß als Individuenbereich die Klasse der Menschen gilt und dementsprechend das Wort „Menschen" in der dritten Prämisse und der Konklusion nicht berücksichtigt wird. In den beiden ersten Prämissen ist es ohnehin als selbstverständlich fortgelassen worden.

(1) $\{\sim \exists(x)\, [K(x) \wedge H(x)] \wedge \exists(x)\, K(x) \wedge \exists(x) \sim H(x)\}$
$\rightarrow \exists(x)\, [K(x) \wedge \sim H(x)]$

(3) $\sim \exists(x)\, [K(x) \wedge H(x)] \wedge \exists(x)\, K(x) \wedge \exists(x) \sim H(x)$
$\wedge \sim \exists(x)\, [K(x) \wedge \sim H(x)]$.

Von den beiden nicht negierten Existentialaussagen dieses Ausdruckes wählen wir $\exists(x) \sim H(x)$ für die weiteren Umformungen aus und lassen $\exists(x)\, K(x)$ unberücksichtigt.

(5) $\exists(x) \sim H(x) \rightarrow \{\exists(x)\,[K(x) \wedge H(x)] \vee \exists(x)\,[K(x) \wedge \sim H(x)]\}$
(6) $\sim H \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$

(7)

K	H	$\sim H$	$K \wedge H$	$K \wedge \sim H$	$[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]$	$\sim H \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$
w	w	f	w	f	w	w
w	f	w	f	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	f	f

Da der unter (6) stehende Ausdruck nicht allgemeingültig ist, aber unter (3) noch eine zweite nicht negierte Existentialaussage auftritt, führen wir gemäß Anweisung 8. das Verfahren mit ihr teilweise noch einmal durch.

(5) $\exists(x)\, K(x) \rightarrow \{\exists(x)\,[K(x) \wedge H(x)] \vee \exists(x)\,[K(x) \wedge \sim H(x)]\}$
(6) $K \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$

(7)

K	H	$\sim H$	$K \wedge H$	$K \wedge \sim H$	$[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]$	$K \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$
w	w	f	w	f	w	w
w	f	w	f	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	f	w

Damit ist gezeigt, daß der zu entscheidende Schluß tatsächlich zwingend ist. Ferner hat sich herausgestellt, daß die Konklusion bereits aus den beiden ersten Prämissen folgt, die dritte somit überflüssig ist und weggelassen werden kann.

Als drittes Beispiel für die Entscheidung nach dem hier dargestellten Verfahren untersuchen wir einen etwas komplizierteren Schluß, der auch nicht mehr in den Bereich der traditionellen Schlußlehre fällt. – Als Individuenbereich wird die Klasse der Philosophen zugrunde gelegt.

Jeder subjektive Idealist ist Idealist.
Jeder objektive Idealist ist Idealist.
Es gibt Materialisten.
Kein Idealist ist Materialist.

Es gibt (Philosophen), die weder objektive noch subjektive Idealisten sind.

$$
\begin{aligned}
(1)\ & \{\forall(x)\,[S(x) \rightarrow I(x)] \wedge \forall(x)\,[O(x) \rightarrow I(x)] \\
& \wedge \exists(x)\, M(x) \wedge \sim \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)]\} \\
& \rightarrow \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ & \{\sim \exists(x) \sim [\sim S(x) \vee I(x)] \\
& \wedge \sim \exists(x) \sim [\sim O(x) \vee I(x)] \\
& \wedge \exists(x)\, M(x) \wedge \sim \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)]\} \\
& \rightarrow \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \{\sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim S(x) \wedge \sim I(x)] \\
& \wedge \sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim O(x) \wedge \sim I(x)] \\
& \wedge \exists(x)\, M(x) \wedge \sim \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)]\} \\
& \rightarrow \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \{\sim \exists(x)\,[S(x) \wedge \sim I(x)] \wedge \sim \exists(x)\,[O(x) \wedge \sim I(x)] \\
& \wedge \exists(x)\, M(x) \wedge \sim \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)]\} \\
& \rightarrow \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ & \sim \exists(x)\,[S(x) \wedge \sim I(x)] \wedge \sim \exists(x)\,[O(x) \wedge \sim I(x)] \\
& \wedge \exists(x)\, M(x) \wedge \sim \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)] \\
& \wedge \sim \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\ & \exists(x)\, M(x) \\
& \rightarrow \{\exists(x)\,[S(x) \wedge \sim I(x)] \vee \exists(x)\,[O(x) \wedge \sim I(x)] \\
& \vee \exists(x)\,[I(x) \wedge M(x)] \vee \exists(x)\,[\sim O(x) \wedge \sim S(x)]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\ & M \rightarrow \{[S \wedge \sim I] \vee [O \wedge \sim I] \vee [I \wedge M] \\
& \vee [\sim O \wedge \sim S]\}.
\end{aligned}
$$

Aus der Wahrheitsmatrix (siehe Beilage 3) ergibt sich, daß der unter (6) stehende Ausdruck allgemeingültig ist und mit ihm der unter (1) stehende. Damit ist auch dieser Schluß als zwingend nachgewiesen.

Die 4. Anweisung des Entscheidungsverfahrens besagt, daß man prüfen soll, ob der nach 1. bis 3. entstandene Ausdruck wenigstens eine nicht negierte und wenigstens eine negierte Existentialaussage enthält. Darüber, was zu tun ist, wenn nur negierte oder nur nicht negierte Aussagen auftreten, ist noch nichts gesagt. Die Anweisungen, die in diesen Fällen zu befolgen sind, sollen nun genannt und ebenfalls durch Beispiele illustriert werden.

Zu entscheiden sei der Schluß:

Alles befindet sich in Bewegung.
Was sich in Bewegung befindet, befindet sich in Veränderung.

Es gibt etwas, was sich in Bewegung und Veränderung befindet.

Die ersten Schritte verlaufen wie bisher:

(1) $\{\forall(x)\, B(x) \wedge \forall(x)\, [B(x) \rightarrow V(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\, [B(x) \wedge V(x)]$

(2) $\{\sim \exists(x) \sim B(x) \wedge \sim \exists(x) \sim [\sim B(x) \vee V(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\, [B(x) \wedge V(x)]$
$\{\sim \exists(x) \sim B(x)$
$\wedge \sim \exists(x) \sim \sim [\sim \sim B(x) \wedge \sim V(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\, [B(x) \wedge V(x)]$
$\{\sim \exists(x) \sim B(x) \wedge \sim \exists(x)\, [B(x) \wedge \sim V(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\, [B(x) \wedge V(x)]$

(3) $\sim \exists(x) \sim B(x) \wedge \sim \exists(x)\, [B(x) \wedge \sim V(x)]$
$\wedge \sim \exists(x)\, [B(x) \wedge V(x)]$.

Mit diesem Ausdruck ist nach folgenden Anweisungen weiter zu verfahren:

5.* Falls nur negierte Existentialaussagen vorhanden sind, forme sie alle in Allaussagen um!

$\sim \sim \forall(x) \sim \sim B(x)$
$\wedge \sim \sim \forall(x) \sim [B(x) \wedge \sim V(x)]$
$\wedge \sim \sim \forall(x) \sim [B(x) \wedge V(x)]$
$\forall(x)\, B(x) \wedge \forall(x) \sim [B(x) \wedge \sim V(x)]$
$\wedge \forall(x) \sim [B(x) \wedge V(x)]$.

6.* Laß die Operatoren und die Individuenvariablen fort!

$B \wedge \sim [B \wedge \sim V] \wedge \sim [B \wedge V]$.

7.* Betrachte den so entstandenen Ausdruck als aussagenlogischen Ausdruck und stelle seine Wahrheitsmatrix auf!

B	V	$\sim V$	$B \wedge \sim V$	$\sim[B \wedge \sim V]$	$B \wedge V$	$\sim[B \wedge V]$	$B \wedge \sim[B \wedge \sim V]$	$B \wedge \sim[B \wedge \sim V] \wedge \sim[B \wedge V]$
w	w	f	f	w	w	f	w	f
w	f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	f

Ergebnis: Ist der gemäß 7.* untersuchte Ausdruck eine Kontradiktion, so ist der unter 1. stehende Ausdruck allgemeingültig, der ihm entsprechende Schluß zwingend und die Schlußregel, nach der geschlossen wurde, gültig.

Andernfalls ist der unter 1. stehende Ausdruck nicht allgemeingültig, der ihm entsprechende Schluß nicht zwingend und die Schlußregel, nach der geschlossen wurde, nicht gültig.

Der zu entscheidende Schluß hat sich demnach als zwingend herausgestellt. – Es klingt vielleicht ein wenig überraschend, daß hier die Allgemeingültigkeit eines prädikatenlogischen Ausdrucks dadurch nachgewiesen wird, daß er auf eine aussagenlogische Kontradiktion reduziert wird. Das kommt durch die Umformung nach der 3. Anweisung zustande, durch die das Negat des ursprünglichen Ausdrucks hergestellt wird, d. h. aus einem allgemeingültigen Ausdruck eine Kontradiktion entsteht. Während durch die Umformung gemäß 5. aus einer Kontradiktion wieder ein allgemeingültiger Ausdruck wird, bleibt der Werteverlauf des nach 3. erhaltenen Ausdrucks von den Umformungen gemäß 5.* und 6.* unberührt, d. h., die Umformungen, die innerhalb dieses Entscheidungsverfahrens vorgenommen werden, führen nicht alle zu Ausdrücken, die den voraufgegangenen semantisch äquivalent sind.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, daß in dem Ausdruck, der gemäß 3. entsteht, nur nicht negierte Existentialaussagen vorkommen. – Zu entscheiden ist der Schluß:

Nicht jeder schwarzhaarige Mensch ist, wenn er blauäugig ist, schwarzhaarig.

Jeder schwarzhaarige Mensch ist, wenn er blauäugig ist, schwarzhaarig.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \sim \forall(x)\,\{[S(x) \wedge M(x)] \rightarrow [B(x) \rightarrow S(x)\} \\
& \rightarrow \forall(x)\,\{[S(x) \wedge M(x)] \rightarrow [B(x) \rightarrow S(x)]\} \\
(2)\quad & \sim \sim \exists(x) \sim \{\sim [S(x) \wedge M(x)] \vee [\sim B(x) \vee S(x)]\} \\
& \rightarrow \sim \exists(x) \sim \{\sim [S(x) \wedge M(x)] \vee [\sim B(x) \vee S(x)]\} \\
& \exists(x) \sim \sim \{\sim \sim [S(x) \wedge M(x)] \\
& \qquad \wedge \sim [\sim B(x) \vee S(x)]\} \\
& \rightarrow \sim \exists(x) \sim \sim \{\sim \sim [S(x) \wedge M(x)] \\
& \qquad \wedge \sim [\sim B(x) \vee S(x)]\}
\end{aligned}
$$

$$\exists(x)\,\{[S(x) \wedge M(x)] \wedge \sim\sim[\sim\sim B(x) \wedge \sim S(x)]\}$$
$$\rightarrow \sim \exists(x)\,\{[S(x) \wedge M(x)]$$
$$\wedge \sim\sim[\sim\sim B(x) \wedge \sim S(x)]\}$$
$$\exists(x)\,\{S(x) \wedge M(x) \wedge B(x) \wedge \sim S(x)]\}$$
$$\rightarrow \sim \exists(x)\,\{S(x) \wedge M(x) \wedge B(x) \wedge \sim S(x)\}$$
$$(3)\quad \exists(x)\,\{S(x) \wedge M(x) \wedge B(x) \wedge \sim S(x)\}$$
$$\wedge\, \exists(x)\,\{S(x) \wedge M(x) \wedge B(x) \wedge \sim S(x)\}.$$

Mit diesem Ausdruck ist nach der folgenden Anweisung weiter zu verfahren:

5.** Falls nur nicht negierte Existentialaussagen vorhanden sind, prüfe, ob eine dieser Aussagen eine Kontradiktion ist.

Ergebnis: Ist wenigstens eine der Existentialaussagen in dem gemäß 3. gebildeten Ausdruck eine Kontradiktion, so ist der unter 1. stehende Ausdruck allgemeingültig.

Ist keine der Existentialaussagen in dem gemäß 3. gebildeten Ausdruck eine Kontradiktion, so ist der unter 1. stehende Ausdruck nicht allgemeingültig.

Von den nicht negierten Existentialaussagen in den nach den Anweisungen 1. bis 3. gebildeten Ausdrücken kann man ohne weiteres feststellen, ob sie Kontradiktionen sind oder nicht. Sie müssen ja nach 2. so beschaffen sein, daß im Wirkungsbereich des Existentialoperators nur ein einzelnes Prädikat oder eine Konjunktion von Prädikaten steht. Jedes dieser Prädikate ist negiert oder nicht negiert. Kommt nun mindestens eins der Prädikate in einer Existentialaussage einmal negiert und einmal nicht negiert vor – in unserem Beispiel $S(x)$ und $\sim S(x)$ –, so ist dieser Ausdruck eine Kontradiktion. Andernfalls ist der Ausdruck erfüllbar.

Der Ausdruck unter (1) ist demgemäß allgemeingültig, da sogar beide Existentialaussagen unter (3) Kontradiktionen sind. Betrachten wir aber einmal die Bedingungen, unter denen ein Ausdruck, der nach den Anweisungen 1. bis 3. entstanden ist, eine Existentialaussage enthalten kann, die eine Kontradiktion ist.

Erstens besteht die Möglichkeit, daß die der *Konklusion* entsprechende Existentialaussage eine Kontradiktion ist. Diese Existentialaussage ist der Konklusion nicht semantisch äquivalent, sondern sie ist – durch die Umformung gemäß 3. bedingt – ihr Negat. Sie ist dementsprechend eine Kontra-

diktion genau dann, wenn die Konklusion allgemeingültig ist. Damit ist aber die Frage nicht beantwortet, ob die Konklusion aus den Prämissen folgt, ob sie wahr ist unter der Voraussetzung, daß die Prämissen wahr sind; denn ein allgemeingültiger Ausdruck ist wahr, unabhängig von jeder Prämisse. Allerdings stellt sich mitunter bei dieser Gelegenheit erst heraus, daß die Konklusion allgemeingültig ist, was man vielleicht vor der Umformung nicht gewußt hat.

Zweitens besteht die Möglichkeit, daß eine Existentialaussage, die einer der *Prämissen* entspricht, eine Kontradiktion ist. Eine solche Existentialaussage aber ist der ihr entsprechenden Prämisse semantisch äquivalent. Ist sie nun eine Kontradiktion, so ist es die ihr entsprechende Prämisse ebenfalls; d. h., dann enthalten die Prämissen des Schlusses einen logischen Widerspruch. Die Konjunktion der Prämissen kann unter diesen Umständen also niemals wahr sein, und es kann aus ihr nicht zwingend geschlossen werden.

Der Wert der Untersuchung eines Schlusses gemäß 5.** besteht auf jeden Fall darin, daß sich erstens, wie schon gesagt, die Konklusion des zu entscheidenden Schlusses als allgemeingültig herausstellen kann und daß man zweitens auf diese Weise logische Widersprüche entdecken kann, die man vor der Umformung nicht gesehen hat. Letzteres ist besonders wichtig. Läßt man nämlich einen logischen Widerspruch bewußt oder unbewußt als Voraussetzung gelten, dann läßt sich scheinbar ganz exakt auf jede beliebige Aussage schließen; denn eine Implikation, deren Vorderglied eine Kontradiktion ist, ist allgemeingültig.

Der Übersichtlichkeit halber fassen wir den Gang des hier dargestellten Entscheidungsverfahrens mit seinen Verzweigungen noch einmal in einer Tabelle zusammen (siehe Beilage 4).

3.2.6.* *Entscheidungsverfahren und Normalformen*

Dieser Abschnitt ist eine Art Anhang zu 3.2.6. und setzt die Kenntnis von 2.1.8.* voraus. Er soll zeigen, daß man sich auch bei dem prädikatenlogischen Entscheidungsverfahren der Umformung von Ausdrücken in ihre Normalformen bedienen kann. Dieses Vorgehen kann zwar das prädikatenlogische Entscheidungsverfahren nicht ersetzen, wohl aber das Aufstellen von Wahrheitsmatrizen.

Um die Kontrolle zu erleichtern, demonstrieren wir dieses Vorgehen vorwiegend an Ausdrücken, für die wir in 3.2.6. die Wahrheitsmatrizen bereits aufgestellt haben.

Der erste der zu entscheidenden Ausdrücke lautete:

$$[F \wedge \sim A] \rightarrow \{[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]\}.$$

Die Umformung der Implikation in eine Alternative ergibt:

$$\sim [F \wedge \sim A] \vee \{[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]\}.$$

Nach der Beseitigung des Negationszeichens vor der ersten Klammer erhält man:

$$[\sim F \vee A] \vee \{[M \wedge \sim A] \vee [F \wedge \sim M]\}.$$

Es empfiehlt sich, zuerst die Ausdrücke in den geschweiften Klammern auszudistribuieren:

$$[\sim F \vee A] \vee \{[M \vee F] \wedge [M \vee \sim M]$$
$$\wedge [\sim A \vee F] \wedge [\sim A \vee \sim M]\}.$$

Jetzt wird der gesamte Ausdruck ausdistribuiert, wobei die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke behandelt werden, als wären sie unzerlegbare Ausdrücke:

$$\{[\sim F \vee A] \vee [M \vee F]\} \wedge \{[\sim F \vee A] \vee [M \vee \sim M]\}$$
$$\wedge \{[\sim F \vee A] \vee [\sim A \vee F]\}$$
$$\wedge \{[\sim F \vee A] \vee [\sim A \vee \sim M]\}.$$

Die geschweiften Klammern sollen nur den Zusammenhang zu dem vorigen Ausdruck ganz deutlich machen; sie können jetzt weggelassen werden:

$$[\sim F \vee A \vee M \vee F] \wedge [\sim F \vee A \vee M \vee \sim M]$$
$$\wedge [\sim F \vee A \vee \sim A \vee F] \wedge [\sim F \vee A \vee \sim A \vee \sim M].$$

Wir haben also den Ausgangsausdruck wie einen aussagenlogischen Ausdruck behandelt, aber ihn, statt seine Wahrheitsmatrix aufzustellen, in seine konjunktive Normalform umgeformt. Jede Alternative dieser Normalform enthält, wie erwartet, mindestens eine Variable, die einmal negiert und einmal unnegiert vorkommt. Der Nachweis, daß der Ausdruck allgemeingültig ist, ist damit erbracht.

Die für das zweite Beispiel notwendigen Umformungen können wir nun schon ohne Kommentar vornehmen:

$$\sim H \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$$
$$H \vee \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}$$
$$H \vee \{[K \vee K] \wedge [K \vee \sim H] \wedge [H \vee K] \wedge [H \vee \sim H]\}$$
$$[H \vee K \vee K] \wedge [H \vee K \vee \sim H]$$
$$\wedge [H \vee H \vee K] \wedge [H \vee H \vee \sim H].$$

Dieser Ausdruck ist nicht allgemeingültig, weil nicht alle Alternativen es sind.

Wenn man aber die drittletzte Zeile betrachtet, kann man bereits sehen, welcher Ausdruck vor der geschweiften Klammer stehen müßte, damit der gesamte Ausdruck allgemeingültig wird. Die letzte Alternative ist ohnehin allgemeingültig. braucht also bei diesen Überlegungen nicht berücksichtigt zu werden. In jeder der drei voraufgehenden Klammern kommt K wenigstens einmal vor. Stünde also $\sim K$ vor der geschweiften Klammer, wäre der Ausdruck allgemeingültig. Die erste Zeile müßte demnach lauten:

$$K \rightarrow \{[K \wedge H] \vee [K \wedge \sim H]\}.$$

Es ist deshalb zu prüfen, ob unter den nicht negierten Existentialaussagen des zu entscheidenden Ausdrucks $\exists (x) K(x)$ vorkommt. Das ist der Fall. Der Ausdruck ist damit allgemeingültig und der untersuchte Schluß zwingend.

Überlegungen dieser Art können die Entscheidung von Schlüssen erleichtern und Hinweise geben, wie man einen Schluß zu verändern hat, wenn sich herausstellt, daß er nicht zwingend ist. Man kann dabei aber auch feststellen, ob ein Schluß eventuell überflüssige Prämissen enthält – hier die Prämisse $\exists (x) \sim H(x)$.

War es bei den bisherigen Beispielen notwendig festzustellen, ob die Ausdrücke allgemeingültig sind, wozu man die konjunktive Normalform braucht, muß beim folgenden Ausdruck festgestellt werden, ob er eine Kontradiktion ist, wozu man die alternative Normalform braucht:

$$B \wedge \sim [B \wedge \sim V] \wedge \sim [B \wedge V]$$
$$B \wedge [\sim B \vee V] \wedge [\sim B \vee \sim V]$$
$$B \wedge \{[\sim B \wedge \sim B] \vee [\sim B \wedge \sim V] \vee [V \wedge \sim B]$$
$$\vee [V \wedge \sim V]\}$$
$$[B \wedge \sim B \wedge \sim B] \vee [B \wedge \sim B \wedge \sim V]$$
$$\vee [B \wedge V \wedge \sim B] \vee [B \wedge V \wedge \sim V].$$

Jede Konjunktion in dieser alternativen Normalform enthält eine Variable zusammen mit ihrem Negat und ist damit eine Kontradiktion. Folglich ist auch der Gesamtausdruck eine Kontradiktion.

Untersuchen wir nun folgenden Schluß daraufhin, ob er zwingend ist:

Ein aufmerksamer Verkehrsteilnehmer ist kein Verkehrssünder.
Ein Verkehrssünder schädigt sich und andere.

Es gibt unaufmerksame Verkehrsteilnehmer, die sich und andere schädigen.

Der Schluß ist zunächst zu symbolisieren; dazu schreiben wir

„$T(x)$" für „x ist aufmerksamer Verkehrsteilnehmer",
„$V(x)$" für „x ist Verkehrssünder",
„$S(x)$" für „x ist jemand, der sich und andere schädigt".

Die folgenden Schritte sind genau nach den Vorschriften des Entscheidungsverfahrens zu vollziehen:

(1) $\{\forall(x)\,[T(x) \rightarrow \sim V(x)] \wedge \forall(x)\,[V(x) \rightarrow S(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]$

(2) $\{\sim \exists(x) \sim [T(x) \rightarrow \sim V(x)]$
$\wedge \sim \exists(x) \sim [V(x) \rightarrow S(x)]\} \rightarrow \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]$
$\{\sim \exists(x) \sim [\sim T(x) \vee \sim V(x)] \wedge \sim \exists(x) \sim [\sim V(x) \vee S(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]$
$\{\sim \exists(x)\,[T(x) \wedge V(x)] \wedge \sim \exists(x)\,[V(x) \wedge \sim S(x)]\}$
$\rightarrow \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]$

(3) $\sim \exists(x)\,[T(x) \wedge V(x)] \wedge \sim \exists(x)\,[V(x) \wedge \sim S(x)]$
$\wedge \sim \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]$.

Da nur negierte Existentialaussagen auftreten, müssen sie alle in Allaussagen umgeformt werden.

(5*) $\forall(x) \sim [T(x) \wedge V(x)] \wedge \forall(x) \sim [V(x) \wedge \sim S(x)]$
$\wedge \forall(x) \sim [\sim T(x) \wedge S(x)]$
$\forall(x)\,[\sim T(x) \vee \sim V(x)] \wedge \forall(x)\,[\sim V(x) \vee S(x)]$
$\wedge \forall(x)\,[T(x) \vee \sim S(x)]$

(6*) $[\sim T \vee \sim V] \wedge [\sim V \vee S] \wedge [T \vee \sim S]$.

Statt nun die Wahrheitsmatrix dieses Ausdrucks aufzustellen, stellen wir seine alternative Normalform her.

$$\{[\sim T \wedge \sim V] \vee [\sim T \wedge S] \vee [\sim V \wedge \sim V]$$
$$\vee [\sim V \wedge S]\} \wedge [T \vee \sim S]$$
$$[\sim T \wedge \sim V \wedge T] \vee [\sim T \wedge \sim V \wedge \sim S]$$
$$\vee [\sim T \wedge S \wedge T] \vee [\sim T \wedge S \wedge \sim S]$$
$$\vee [\sim V \wedge \sim V \wedge T] \vee [\sim V \wedge \sim V \wedge \sim S]$$
$$\vee [\sim V \wedge S \wedge T] \vee [\sim V \wedge S \wedge \sim S].$$

Dieser Ausdruck ist keine Kontradiktion; folglich ist auch der Schluß nicht zwingend. – Wir versuchen jetzt ganz systematisch, eine zusätzliche Prämisse zu finden, durch die er zwingend wird. Wir nehmen an, wir hätten eine solche Prämisse in Gestalt einer nicht negierten Existentialaussage – die wir vorläufig durch ein Fragezeichen andeuten – und stellen jetzt die gemäß 5. geforderte Form her.

$$(5) \quad ? \rightarrow \{\exists(x)\,[T(x] \wedge V(x)] \vee \exists(x)\,[V(x) \wedge \sim S(x)]$$
$$\vee \exists(x)\,[\sim T(x) \wedge S(x)]\}$$

$$(6) \quad ? \rightarrow \{[T \wedge V] \vee [V \wedge \sim S] \vee [\sim T \wedge S]\}.$$

Ohne Rücksicht auf den uns noch fehlenden Ausdruck stellen wir jetzt die konjunktive Normalform des Ausdrucks in den geschweiften Klammern her.

$$\{[T \vee V] \wedge [T \vee \sim S] \wedge [V \vee V] \wedge [V \vee \sim S]\}$$
$$\vee [\sim T \wedge S]$$
$$[T \vee V \vee \sim T] \wedge [T \vee V \vee S] \wedge [T \vee \sim S \vee \sim T]$$
$$\wedge [T \vee \sim S \vee S] \wedge [V \vee V \vee \sim T]$$
$$\wedge [V \vee V \vee S] \wedge [V \vee \sim S \vee \sim T] \wedge [V \vee \sim S \vee S].$$

Von diesem Ausdruck sind nur noch die nicht allgemeingültigen Alternativen für uns interessant. Durch welchen zusätzlichen Ausdruck werden sie nun allgemeingültig?

$$[T \vee V \vee S] \wedge [V \vee V \vee \sim T] \wedge [V \vee V \vee S]$$
$$\wedge [V \vee \sim S \vee \sim T].$$

Offensichtlich werden alle vier Alternativen allgemeingültig, wenn in jeder von ihnen zusätzlich $\sim V$ vorkommt.

$$\sim V \vee \{[T \vee V \vee S] \wedge [V \vee V \vee \sim T]$$
$$\wedge [V \vee V \vee S] \wedge [V \vee \sim S \vee \sim T]\}.$$

Durch Ausdistribuieren erhalten wir tatsächlich einen allgemeingültigen Ausdruck.

$$[\sim V \vee T \vee V \vee S] \wedge [\sim V \vee V \vee V \vee \sim T]$$
$$\wedge [\sim V \vee V \vee V \vee S] \wedge [\sim V \vee V \vee \sim S \vee \sim T].$$

Jetzt wissen wir, welche Ausdrücke statt des Fragezeichens in (5) und (6) stehen müssen, und schreiben sie vollständig hin.

$$(6)\quad V \rightarrow \{[T \wedge V] \vee [V \wedge \sim S] \vee [\sim T \wedge S]\}$$
$$(5)\quad \exists(x)\, V(x) \rightarrow \{\exists(x)\, [T(x) \wedge V(x)]$$
$$\vee\ \exists(x)\, [V(x) \wedge \sim S(x)] \vee \exists(x)\, [\sim T(x) \wedge S(x)]\}.$$

Wir übersetzen schließlich unsere Ergebnisse in die natürliche Sprache zurück und gelangen, indem wir ihm eine Prämisse hinzufügen, zu folgendem zwingenden Schluß:

Ein aufmerksamer Verkehrsteilnehmer ist kein Verkehrssünder.

Ein Verkehrssünder schädigt sich und andere.

Es gibt Verkehrssünder.

Es gibt unaufmerksame Verkehrsteilnehmer, die sich und andere schädigen.

3.2.7. Beweis und Widerlegung mit logischen Mitteln

Jede Aussage hat einen Wahrheitswert, unabhängig davon, ob man ihn kennt oder nicht. Dieser Wahrheitswert ist objektiv, d. h., er ist abhängig von dem Sachverhalt, der in der Aussage widergespiegelt wird. Um sich aber der Wirklichkeit anzupassen und auf sie einwirken zu können, muß der Mensch die wahren von den falschen Aussagen unterscheiden. Mittel dazu sind Beweis und Widerlegung; sie liefern dem Menschen Kenntnis des Wahrheitswertes von Aussagen. Für den Wahrheitswert selbst sind sie bedeutungslos, da sie ihn weder herstellen noch irgendwie beeinflussen. Ein *Beweis* vermittelt die Gewißheit, daß die bewiesene Aussage wahr ist. Eine *Widerlegung* vermittelt die Gewißheit, daß die widerlegte Aussage falsch ist.

Für Beweise und Widerlegungen bedient man sich ein und derselben logischen Mittel. Wir werden deshalb zunächst davon absehen, sie zu unterscheiden, und zunächst nur von Beweisen sprechen.

Jeder deduktive Beweis – nur um solche geht es uns hier – ist ein deduktiver Schluß, aber nicht jeder deduktive Schluß ist ein deduktiver Beweis. Ein Schluß gibt die Gewißheit, daß seine Konklusion wahr ist, *wenn* die Prämissen wahr sind, besagt also über den Wahrheitswert der Konklusion direkt noch gar nichts, sondern nur über Bedingungen, unter denen die Konklusion wahr ist. Der Beweis einer Aussage hingegen besagt, *daß* sie wahr ist.

Wir wollen die Besonderheit eines Beweises gegenüber einem Schluß an einem Beispiel verdeutlichen. – Die Aussage „Viele Friedenskämpfer sind nicht Marxisten" soll mit den Mitteln des Schließens bewiesen werden. Zu diesem Zweck müssen zunächst einmal andere Aussagen gefunden werden, aus denen diese Aussage folgt. Wir haben in 3.2.6. bereits gezeigt, daß sie aus den Aussagen „Alle Marxisten sind Atheisten" und „Viele Friedenskämpfer sind nicht Atheisten" folgt. Unsere zu beweisende Aussage ist also wahr, *wenn* die beiden zuletzt genannten Aussagen wahr sind. Nun muß noch nachgewiseen werden, *daß* diese Aussagen auch tatsächlich wahr sind. Erst wenn das geschehen ist, ist unsere Aussage exakt bewiesen.

Der Beweis einer Aussage vollzieht sich demnach in strenger Form in folgenden Schritten – die Reihenfolge dieser Schritte ist dabei ohne Bedeutung:

1. Es wird gezeigt, daß die zu beweisende Aussage aus bestimmten Prämissen folgt.
2. Es wird gezeigt, daß diese Prämissen wahre Aussagen sind. Diesen zweiten Schritt erspart man sich allerdings in der Praxis des Schließens häufig, wenn die Prämissen bereits als wahr bekannt sind, wie man beim Schließen auch oft Prämissen, die sich von selbst verstehen, nicht ausdrücklich nennt.

Für den Beweis und die Widerlegung von Aussagen stehen die Gesetze und Regeln der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik zur Verfügung. Eine gewisse Schwierigkeit besteht nur darin, die zweckmäßigsten Ausgangsausdrücke und Schlußregeln auszuwählen und den Weg zu finden, der von den Ausgangsausdrücken zu dem Ausdruck führt, der zu beweisen oder zu widerlegen ist.

Ein *direkter Beweis* einer Aussage geht so vor sich, daß man von wahren Aussagen oder auch allgemeingültigen Ausdrücken ausgeht und diese nach den logischen Regeln umformt, bis

man die zu beweisende Aussage erhält. Im einfachsten Falle erhält man die zu beweisende Aussage bereits durch entsprechende Einsetzungen in ein logisches Gesetz. Ein besonderes Beispiel dafür zu geben ist nicht notwendig, da solche Einsetzungen in dem folgenden etwas komplizierteren Beispiel mehrfach vorkommen.

Zu beweisen sei die Aussage:

Es gibt (mindestens einen) Idealisten: $\exists (x)\ I(x)$.

Als Prämissen sind folgende Gesetze und Aussagen gegeben, die als wahr vorausgesetzt werden:

(1) $\forall (x)\ F(x) \rightarrow F(y)$

(2) $F(y) \rightarrow \exists (x)\ F(x)$

(3) $\forall (x)\ \{Ph(x) \rightarrow [M(x) \vee I(x)]\}$ – Jeder Philosoph ist Materialist oder Idealist.

(4) $Ph(h)$ – Hegel ist Philosoph.

(5) $\sim M(h)$ – Hegel ist nicht Materialist.

Durch Einsetzung von $\{Ph(x) \rightarrow [M(x) \vee I(x)]\}$ für $F(x)$ und Einsetzung von $\{Ph(y) \rightarrow [M(y) \vee I(y)]\}$ für $F(y)$ gewinnt man aus (1):

(6) $\forall (x)\ \{Ph(x) \rightarrow [M(x) \vee I(x)]\}$
$\rightarrow \{Ph(y) \rightarrow [M(y) \vee I(y)]\}$.

Diese Implikation ist, da sie durch Einsetzung aus einem allgemeingültigen Ausdruck gewonnen wurde, wahr. Das Vorderglied dieser Implikation, nämlich (3), ist als wahr vorausgesetzt. Die Anwendung der Abtrennungsregel – Aus $p \rightarrow q$ und p folgt q – ergibt als wahre Aussage:

(7) $Ph(y) \rightarrow [M(y) \vee I(y)]$.

Setzt man nun für y den Individuennamen h ein, so erhält man:

(8) $Ph(h) \rightarrow [M(h) \vee I(h)]$.

Das Vorderglied dieser Implikation ist wiederum als wahr vorausgesetzt. Die Anwendung der Abtrennungsregel auf (8) und (4) ergibt:

(9) $M(h) \vee I(h)$.

Auf (9) und (5) wird eine weitere aussagenlogische Schlußregel angewendet, und zwar: Aus $p \vee q$ und $\sim p$ folgt q (vgl. 2.2.1.2.). Dadurch erhält man:

$$(10)\ I(h).$$

Setzt man in (2) h für y ein und I für F, so erhält man ferner:

$$(11)\ I(h) \rightarrow \exists(x)\, I(x).$$

Die Anwendung der Abtrennungsregel auf (11) und (10) ergibt schließlich die zu beweisende Aussage:

$$(12)\ \exists(x)\, I(x).$$

Der Beweis für (12) hätte sich natürlich auch einfacher führen lassen. Wir haben jedoch diesen verhältnismäßig umständlichen Weg gewählt, um gleich mehrere Aussagen zu beweisen – nämlich (6) bis (12) – und verschiedenartige Mittel des Beweises zu demonstrieren.

Mit diesem Beweis ist zugleich eine Widerlegung der Aussage „Es gibt keinen Idealisten" gegeben. Da diese Aussage das Negat von (12) ist und (12) bewiesen wurde, kann nach dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch diese Aussage nicht wahr sein. Allgemein gesagt: Eine Aussage kann widerlegt werden, indem ihr logisches Gegenteil bewiesen wird.

Oft ist es unzweckmäßig oder gar unmöglich, eine Aussage direkt zu beweisen. Dann versucht man, ob sich die Wahrheit dieser Aussage indirekt beweisen läßt. Ein *indirekter Beweis* einer Aussage besteht darin, das logische Gegenteil dieser Aussage zu widerlegen und danach mit Hilfe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf die Wahrheit der zu beweisenden Aussage zu schließen.

Es hat sich gezeigt, daß Beweis und Widerlegung sehr eng miteinander zusammenhängen, daß durch den Beweis einer Aussage ihr logisches Gegenteil widerlegt, durch die Widerlegung einer Aussage ihr logisches Gegenteil bewiesen wird. Trotzdem darf man nicht glauben, daß man aus dem Schema des Beweises ein Schema der Widerlegung machen kann, indem man nur jeweils „wahr" durch „falsch" ersetzt. Man kann zwar eine Aussage beweisen, indem man ihre Prämissen beweist. Aber man kann nicht eine Aussage widerlegen, indem man ihre Prämissen widerlegt; denn wenn die Prämissen eines Schlusses falsch sind, ist es die Konklusion zwar möglicherweise auch, aber nicht unbedingt. So kann man z. B. aus der

Aussage „Jeder Philosoph ist Idealist“ auf die Aussage „Hegel ist Idealist“ schließen. Die Widerlegung der Prämisse ändert nichts daran, daß die Konklusion eine wahre Aussage ist. Das einzige, was man durch eine Widerlegung der Prämissen eines Schlusses erreichen kann, ist, daß derjenige, der die Konklusion behauptet, neue Prämissen suchen muß. Man darf auch nicht glauben, man könne eine Aussage widerlegen, indem man nachweist, daß sie aus den angegebenen Prämissen nicht zwingend folgt. Auch in diesem Falle erreicht man nichts anderes, als daß nach neuen Prämissen gesucht werden muß.

3.3. Probleme der Prädikatenlogik

Zum Abschluß unserer Darstellung der Prädikatenlogik gehen wir auf Erweiterungen ein, die über die elementare Logik hinausführen, beschäftigen uns mit Anwendungen der Prädikatenlogik und berichten über Grundlagenprobleme und philosophische Probleme der formalen Logik.

3.3.1. Identität

In der traditionellen Logik wurde neben dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten der Satz der Identität als eins der Grundgesetze der Logik überhaupt angesehen. Er wurde meist in der Form „$A = A$“ oder ähnlich angegeben und als Aussage verstanden, wonach jedes Ding sich selbst gleich ist. Metaphysische Interpretationen dieses Satzes machten daraus die Behauptung, daß jedes Ding sich gleich bleibe. Tatsächlich enthält die formale Logik keine einzige Aussage darüber, ob sich die Dinge gleichbleiben oder ob sie sich verändern. In der formalen Logik wird nur verlangt, daß innerhalb eines gedanklichen Zusammenhanges – z. B. innerhalb eines Schlusses – ein und dasselbe Zeichen nicht in verschiedenen Bedeutungen gebraucht, seine Bedeutung nicht stillschweigend verändert wird. Ein Verstoß gegen diese Forderung führt zwangsläufig zu Fehlern, z. B. zu Trugschlüssen der folgenden Art: „‚Materie‘ ist gleichbedeutend mit ‚Stoff‘, bezeichnet also alles, was Raum ausfüllt. Materie ist das, was außerhalb des

Bewußtseins und unabhängig von ihm existiert. Also ist alles, was außerhalb des Bewußtseins und unabhängig von ihm existiert, Stoff." Der Fehler entsteht dadurch, daß „Materie" einmal als Terminus der Physik, einmal als Terminus des dialektischen Materialismus gebraucht wird. Kraftfelder z. B. existieren zwar außerhalb des Bewußtseins und unabhängig von ihm, sind jedoch nicht stofflicher Natur.

Wird die metaphysische Interpretation des Satzes der Identität durch die formale Logik selbst nicht ausgeschlossen, so ist sie doch mit den Erkenntnissen der marxistisch-leninistischen Philosophie und damit mit dem Gesamtgebäude der Wissenschaften, auf dem diese beruht, unverträglich.

Man kann die Symbolik der Prädikatenlogik, wie wir sie bisher betrachtet haben, um ein Zeichen für die Identität erweitern. Die Identität ist eine zweistellige Beziehung – man sagt: „x ist identisch mit y." Als Symbol für diese Beziehung kann man z. B. „$I(x, y)$" oder „$x = y$" wählen. Wir entscheiden uns für die zweite Bezeichnungsweise; sie ist in der Literatur verbreiteter als die erste.

Durch diese Erweiterung entsteht aus der elementaren Prädikatenlogik die Prädikatenlogik mit Identität. Mit ihren Mitteln kann man jetzt auch einen Ausdruck formulieren, der dem Satz der Identität in der traditionellen Logik entspricht:

$$\forall (x) [x = x].$$

Er besagt, daß jedes Individuum mit sich selbst identisch ist. Diese Identität der Individuen mit sich selbst, diese unterschiedlose Identität nennt man im dialektischen Materialismus „abstrakte Identität". Von ihr muß man die konkrete, die dialektische Identität unterscheiden. Unter konkreter Identität von Individuen, Klassen, kurzum Objekten versteht man, daß sie unterschiedliche, ja sogar gegensätzliche Merkmale in sich vereinigen und einer Entwicklung unterliegen. Konkrete Identität ist somit eine dialektische Einheit von Identität und Verschiedenheit. Die konkrete Identität ist inhaltlich bestimmt und damit reicher als die abstrakte, schließt diese jedoch keineswegs aus, sondern hebt sie im dialektischen Sinne auf[1].

Der Satz der Identität wird im allgemeinen als trivial angesehen. Bereits Gottlob Frege stellte jedoch fest, daß eine

[1] Vgl. Philosophisches Wörterbuch, Stichwort „Identität".

Identitätsaussage keineswegs trivial zu sein braucht. Für die Wahrheit einer Identitätsaussage genügt es, daß die beiden Zeichen, die durch das Identitätszeichen verbunden werden, ein und dasselbe Individuum bezeichnen. Diese Bedingung ist bereits erfüllt, wenn auf beiden Seiten des Identitätszeichens derselbe Name steht. Eine solche Aussage besagt nur, daß ein bestimmtes Individuum mit sich selbst identisch ist, und ist tatsächlich trivial. Anders ist es jedoch, wenn das Identitätszeichen zwei verschiedene Namen verbindet, die sich in ihrer Bedeutung unterscheiden, also verschiedene Individualbegriffe bedeuten, und trotzdem zur Bezeichnung ein und desselben Individuums dienen. Eine solche Aussage ist nicht trivial. Wenn man feststellt, daß zwei Individuen, die man mit verschiedenen Namen bezeichnet und in verschiedenen Begriffen widergespiegelt hat, identisch sind, also ein und dasselbe Individuum sind, hat man eine echte Erkenntnis gewonnen. Hier spielt bereits die Identität von Verschiedenem, also die konkrete Identität eine Rolle. Ein Beispiel hierfür ist die durch langwierige und komplizierte Forschungsarbeit begründete Feststellung, daß der unter dem Namen „B. Traven" bekannte Romanschriftsteller identisch ist mit dem Mann, der sich zu Beginn dieses Jahrhunderts „Ret Marut" nannte, 1917–1921 die Zeitschrift „Der Ziegelbrenner" herausgab und in der Münchener Räterepublik auf dem Gebiet der Propaganda eine Rolle spielte. Man kann also die Identitätsaussage „B. Traven ist Ret Marut" formulieren, die keineswegs trivial ist. – In der Formulierung der Identitätsaussage ist übrigens das Wort „ist" – wie das in der Umgangssprache nicht selten geschieht – zur Bezeichnung der Identitätsbeziehung gebraucht worden. Damit haben wir eine weitere Bedeutung von „ist" erfaßt.

Aus allgemeingültigen Ausdrücken der elementaren Prädikatenlogik kann man allgemeingültige Ausdrücke der Prädikatenlogik mit Identität gewinnen, indem man ein zweistelliges Prädikat durch das Identitätszeichen ersetzt.

Aus

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \rightarrow S(x, y)]$$
$$\rightarrow [\forall (x) \forall (y) R(x, y) \rightarrow \forall (x) \forall (y) S(x, y)]$$

wird auf diese Weise z. B.

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \rightarrow (x = y)]$$
$$\rightarrow [\forall (x) \forall (y) R(x, y) \rightarrow \forall (x) \forall (y) (x = y)].$$

Die Begründung für die Zulässigkeit dieser Umformung ist einfach und plausibel. Der obere Ausdruck ist allgemeingültig; d. h., er wird bei jeder Interpretation seiner beiden Prädikate zu einer wahren Aussage. Wenn wir nun das Prädikat S durch das Identitätszeichen ersetzt haben, so haben wir für eins der beiden Prädikate eben eine solche Interpretation vorgenommen. Der untere Ausdruck ist also ebenfalls allgemeingültig; d. h., er wird bei jeder Interpretation von R zu einer wahren Aussage.

Aus

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \vee \sim R(x, y)]$$

wird

$$\forall (x) \forall (y) [(x = y) \vee \sim (x = y)].$$

Am Beispiel der beiden letzten Ausdrücke müssen wir auf eine Besonderheit der Prädikatenlogik mit Identität gegenüber der elementaren Prädikatenlogik aufmerksam machen. Durch die hier vorgenommene Umformung ist aus einem allgemeingültigen Ausdruck eine wahre Aussage geworden. In der elementaren Prädikatenlogik gibt es, strenggenommen, gar keine Aussagen, sondern nur Ausdrücke, die bei entsprechender Interpretation zu Aussagen werden. Ein Ausdruck der Prädikatenlogik mit Identität hingegen, der keine freien Individuenvariablen enthält und außer dem Identitätszeichen kein weiteres Prädikat, ist bereits interpretiert und damit eine Aussage.

Der folgende allgemeingültige Ausdruck kann nicht wie die beiden vorigen Ausdrücke aus solchen der elementaren Prädikatenlogik gewonnen werden:

$$\forall (x) \forall (y) \{[F(x) \wedge (x = y)] \rightarrow F(y)\}.$$

Danach gilt für jedes Individuum x und jedes Individuum y: wenn x die Eigenschaft F hat und mit y identisch ist, so hat auch y die Eigenschaft F. Ein konkretes Beispiel, auf das diese Gesetzmäßigkeit zutrifft, ist: Wenn Ret Marut gebürtiger Amerikaner und mit B. Traven identisch ist, dann ist auch B. Traven gebürtiger Amerikaner. – Die Allgemeingültigkeit dieses Ausdrucks hängt von der Identität ab; man könnte an die Stelle des Identitätszeichens nicht ein beliebiges zweistelliges Prädikat setzen.

Die Identität, die in den symbolisierten Ausdrücken dieses Abschnitts gemeint ist, ist vollständige Übereinstimmung, Identität von Individuen nur mit sich selbst. Bei Individuen,

die in diesem Sinne identisch sind, handelt es sich um ein und dasselbe Individuum. In der Umgangssprache wird diese Form der Übereinstimmung nicht selten mit einer anderen vermengt, die man besser als Gleichheit bezeichnet. Wenn eine Frau sagt, daß sie dasselbe Kleid besitzt wie eine andere, meint sie im allgemeinen ein Kleid nach demselben Schnitt, aus demselben Material, von derselben Farbe usw., aber ein anderes Exemplar einer Produktionsserie; also besitzt eine das gleiche Kleid wie die andere. Die beiden Frauen besitzen nur dann dasselbe Kleid, wenn sie es gemeinsam besitzen und abwechselnd tragen.

Mit Hilfe der Identität kann man die Nichtidentität im Sinne einer Nichtübereinstimmung in wenigstens einer Hinsicht, in wenigstens einem Merkmal folgendermaßen definieren:

$$(x \neq y) =_{\mathrm{Def}} \sim (x = y).$$

Ein Ausdruck der Gestalt

$$\exists (x) F(x)$$

sagt aus, daß es *mindestens ein* Individuum mit der Eigenschaft F gibt. Es kann aber vorkommen, daß man eine Aussage zu symbolisieren hat, wonach es *höchstens* oder *genau* ein Individuum mit dieser Eigenschaft oder wonach es mindestens, höchstens oder genau *zwei* oder *drei* usw. Individuen mit dieser Eigenschaft gibt. Für solche Aussagen kann man jeweils besondere Existentialoperatoren einführen. Die Einführung dieser zusätzlichen Operatoren läßt sich jedoch vermeiden, wenn man die Zeichen für die Identität und die Nichtidentität verwendet.

Die Aussage „Es gibt mindestens zwei Individuen mit der Eigenschaft F" kann dann folgendermaßen symbolisiert werden:

$$\exists (x)\, \exists (y)\, [F(x) \wedge F(y) \wedge (x \neq y)].$$

Durch den Teilausdruck „$x \neq y$" wird ausdrücklich die Möglichkeit ausgeschlossen, daß x und y identisch sind, daß es also eventuell doch nur ein Individuum mit der Eigenschaft F gibt. – Will man sagen, daß es mindestens drei Individuen mit der Eigenschaft F gibt, schreibt man:

$$\exists (x)\, \exists (y)\, \exists (z)\, [F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)].$$

Unter Verwendung von All- und Existentialoperatoren kann man aussagen, daß es höchstens oder genau eine bestimmte

Anzahl von Individuen mit einer bestimmten Eigenschaft gibt.

$$\forall (x) \forall (y) \{[F(x) \wedge F(y)] \rightarrow (x = y)\}$$

bedeutet, daß es höchstens ein Individuum mit der Eigenschaft F gibt; wenn irgendwelche Individuen die Eigenschaft F haben, dann sind sie miteinander identisch. – Die Aussage „Es gibt höchstens zwei Individuen mit der Eigenschaft F" wird wiedergegeben durch:

$$\forall (x) \forall (y) \forall (z) \{[F(x) \wedge F(y) \wedge F(z)] \rightarrow [(x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)]\}.$$

Das heißt, wenn es drei Individuen mit der Eigenschaft F gibt, dann sind wenigstens zwei von ihnen miteinander identisch.

Zu sagen, daß es genau ein Individuum mit der Eigenschaft F gibt, ist gleichbedeutend damit, daß man sagt, es gebe mindestens und höchstens ein Individuum mit dieser Eigenschaft, oder, es gebe mindestens ein Individuum mit der Eigenschaft und jedes (weitere) Individuum mit dieser Eigenschaft sei mit ihm identisch:

$$\exists (x) \{F(x) \wedge \forall (y) [F(y) \rightarrow (x = y)]\}$$

oder einfacher:

$$\exists (x) \forall (y) [F(y) \leftrightarrow (x = y)].$$

Will man ausdrücken, daß es genau zwei Individuen mit der Eigenschaft F gibt, muß man niederschreiben, daß es wenigstens zwei voneinander verschiedene Individuen mit dieser Eigenschaft gibt und jedes (weitere) Individuum, das die Eigenschaft ebenfalls hat, mit einem der beiden identisch ist:

$$\exists (x) \exists (y) \{F(x) \wedge F(y) \wedge (x \neq y) \wedge \forall (z) [F(z) \rightarrow ((z = x) \vee (z = y))]\}$$

oder einfacher:

$$\exists (x) \exists (y) \{(x \neq y) \wedge \forall (z) [F(z) \leftrightarrow ((z = x) \vee (z = y))]\}.$$

3.3.2. Kennzeichnungen

Wenn man ein einzelnes Individuum bezeichnen will, so tut man das gewöhnlich mit Hilfe eines Individuennamens wie „W. I. Lenin", „Moskau" und „Deutsche Demokratische Re-

publik". Man kann ein Individuum aber auch durch die Angabe eines Merkmals, das ihm und nur ihm zukommt, bezeichnen. Lenin kann bezeichnet werden durch den Ausdruck „Verfasser von ‚Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus'", Moskau durch „Hauptstadt der UdSSR" oder „größte Stadt der UdSSR" und die DDR durch „der erste sozialistische Staat in der deutschen Geschichte".

Um zu verdeutlichen, daß es sich um genau ein Individuum handelt, verwendet man in der natürlichen Sprache oft den bestimmten Artikel wie in den Ausdrücken „*der* Redner, der *das* Hauptreferat gehalten hat", „*das* Fahrrad, das Camilla gehört" und „*die* Kette, die Gudrun heute trägt". Dagegen hat ein Ausdruck wie „der Begründer des Marxismus" keinen Sinn, da der Marxismus bekanntlich von Marx und Engels, also von zwei Menschen, begründet wurde. Allerdings läßt sich aus einem Ausdruck, der mehr als ein Individuum bezeichnet, durch geeignete Zusätze immer ein Ausdruck herstellen, der nur noch auf ein Individuum zutrifft. Friedrich Engels kann eindeutig bezeichnet werden durch „der 1820 geborene Mitbegründer des Marxismus".

Um Ausdrücke dieser Art in die Sprache der Prädikatenlogik übersetzen zu können, führt man einen weiteren Operator ein, den Jota-Operator. Als Symbol verwendet man üblicherweise ein kleines, umgekehrtes Jota. Wie beim All- und beim Existentialoperator schreibt man eine Individuenvariable dahinter und gibt dann das Merkmal an, das dem gemeinten Individuum zukommt.

$$\iota(x)\, F(x)$$

ist ein solcher Ausdruck und wird gelesen wie „das(jenige) Individuum x, das die Eigenschaft F hat".

$$\iota(x)\, R(x, y)$$

wird gelesen wie „das(jenige) Individuum x, das in der Beziehung R zu y steht".

Eine Bezeichnung eines Individuums, die auf diese Weise gebildet ist, nennt man „Kennzeichnung", „Deskription" oder „Beschreibung". Sie besteht aus einer Aussagefunktion und einem Jota-Operator. Während man mit Hilfe von Existential- und Alloperatoren aus Aussagefunktionen Aussagen bildet, entsteht mit Hilfe des Jota-Operators aus einem Allgemeinbegriff ein Individualbegriff bzw. aus einem allgemeinen Namen ein Individuenname.

Aus Aussagefunktionen kann man, wie wir aus 3.1.3. wissen, singuläre Aussagen bilden, indem man die freien Variablen durch Individuennamen ersetzt. Aus der Aussagefunktion „x ist der Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte" erhält man z. B. die wahre Aussage „Lenin ist der Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte". Statt eines Individuennamens im engeren Sinne kann man aber auch eine Kennzeichnung für die freie Individuenvariable einsetzen und erhält dann z. B. die ebenfalls wahre Aussage „Der Verfasser von ‚Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus' ist der Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte".

Schreiben wir „$V(x, y)$" für „x ist Verfasser von y" und „i" für „Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus", dann bedeutet

$$\imath(x)\ V(x, i)$$

„der Verfasser von ‚Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus'". Schreiben wir „$B(x)$" für „x ist der Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte", dann bedeutet

$$B(\imath(x)\ V(x, i))$$

die oben schon formulierte Aussage in symbolisierter Schreibweise.

Es ist angebracht, ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß man eine Kennzeichnung $\imath(x)\ F(x)$ nur dann in einen prädikatenlogischen Ausdruck einsetzen darf, wenn es tatsächlich ein Individuum x mit der Eigenschaft F gibt, aber auch nicht mehr als eins. Wenn man diese Bedingung nicht beachtet, kommt man bei der Anwendung der Logik zu fehlerhaften Schlüssen. Das soll an einem Beispiel gezeigt werden. Aus einer Aussage, wonach alle Individuen eine bestimmte Eigenschaft haben, folgt, daß ein beliebiges Individuum diese Eigenschaft hat. Man darf also von $\forall(x)\ F(x)$ auf $F(y)$ schließen. Da F demnach auf ein beliebiges y zutrifft, muß es auch auf das durch $\imath(z)\ G(z)$ bezeichnete Individuum zutreffen, muß also $F(\imath(z)\ G(z))$ wahr sein. Es soll nun „$F(x)$" die Eigenschaft aller Individuen, sich zu verändern, symbolisieren und „$G(x)$" die Eigenschaft, Schöpfer des Universums zu sein. Dann würde aus der wahren Aussage, daß alle Individuen sich verändern, logisch zwingend folgen, daß der Schöpfer des Universums sich verändert. In der Aussage „Der

Schöpfer des Universums verändert sich" steckt jedoch die Voraussetzung, daß es einen Schöpfer des Universums gibt. Man könnte nun sagen, daß diese Aussage dann eben falsch ist. Damit wäre jedoch nichts gebessert; denn dann müßte ihr Negat „Der Schöpfer des Universums verändert sich nicht" wahr sein.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, erklärt man prädikatenlogische Ausdrücke mit Kennzeichnungen, die kein Designat oder mehr als ein Designat haben, nicht für falsch, sondern für sinnlos.

Die Diskussion über die Behandlung von Kennzeichnungen, die mehr als ein Individuum oder kein Individuum bezeichnen, ist noch nicht abgeschlossen. Ein Weg, die hier auftretenden Schwierigkeiten zu umgehen, besteht darin, Kennzeichnungen grundsätzlich zu eliminieren. Das ist möglich mit Hilfe des Identitätszeichens.

Die Aussage „Lenin ist der Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte" kann man unter Verwendung des Identitätszeichens folgendermaßen symbolisieren – wobei „l" für „Lenin" steht:

$$\forall (x)\, [B(x) \leftrightarrow (x = l)];$$

d. h.: „Für jedes x gilt: x ist Begründer des ersten proletarischen Staates der Geschichte genau dann, wenn x mit Lenin identisch ist."

Allgemein kann man, wenn man ausdrücken will, daß y dasjenige Objekt ist, auf das F zutrifft, schreiben:

$$\forall (x)\, [F(x) \leftrightarrow (x = y)].$$

Mit diesem Ausdruck ist jedoch nichts darüber ausgesagt, ob es ein solches Individuum y überhaupt gibt. Will man sagen, daß es dieses y gibt, schreibt man:

$$\exists (y)\, \forall (x)\, [F(x) \leftrightarrow (x = y)].$$

Wird diesem y eine weitere Eigenschaft G zugeschrieben, bildet man folgenden Ausdruck:

$$\exists (y)\, \{G(y) \wedge \forall (x)\, [F(x) \leftrightarrow (x = y)]\}.$$

Er sagt aus, daß es dieses y, das als einziges die Eigenschaft F hat, gibt und daß es die Eigenschaft G hat.

Nach diesem Muster wird der Ausdruck $B(r(x)\, V(x, i))$, in dem eine Kennzeichnung vorkommt, durch den Ausdruck

$$\exists (y)\, \{B(y) \wedge \forall (x)\, [V(x, i) \leftrightarrow (x = y)]\},$$

der keine Kennzeichnung enthält, wiedergegeben. Werden die Variablen „B", „V" und „i" in der Weise interpretiert, in der wir das oben bereits getan haben, entsteht eine wahre Aussage. – Demgegenüber entsteht, wenn man von

$$F(\iota(z)\, G(z))$$

zu

$$\exists(y)\,\{F(y) \wedge \forall(z)\,[G(z) \leftrightarrow (z = y)]\}$$

übergeht, die falsche Aussage: „Es gibt den Schöpfer des Universums, und dieser verändert sich."

Auf diese Weise lassen sich die Schwierigkeiten, die aus der Verwendung von Kennzeichnungen entstehen können, vermeiden. Der Nachteil dieses Weges besteht jedoch darin, daß die Ausdrücke, in denen keine Kennzeichnungen vorkommen, komplizierter und schwieriger zu handhaben sind als die Ausdrücke mit Kennzeichnungen.

3.3.3. Prädikatenlogik höherer Stufen

Wir haben uns schon mehrfach damit beschäftigt, wie man Aussagen aus der natürlichen Sprache oder aus einer Fachsprache in die Symbolsprache der Prädikatenlogik übersetzt. So wissen wir z. B., daß man die Aussage „Jedes Individuum hat die Eigenschaft P" durch $\forall(x)\, P(x)$, die Aussage „Einige S sind P" durch $\exists(x)\,[S(x) \wedge P(x)]$ usw. symbolisiert. Dabei haben wir oft von *der* Eigenschaft, *der* Beziehung – kurz: von *bestimmten* Merkmalen – gesprochen und die Buchstaben S, P usw. eigentlich nur als Abkürzungen für bestimmte Wörter mit einer bestimmten Bedeutung gebraucht.

Nun muß man aber – besonders in der Philosophie – mitunter auch von Eigenschaften oder Beziehungen *überhaupt* sprechen. Das macht eine Erweiterung der Prädikatenlogik und ihrer Symbolik erforderlich. Sie besteht darin, daß die Symbole für Prädikate nunmehr wirklich als Variable behandelt und durch Operatoren gebunden werden können. Dementsprechend wird z. B. die Aussage „Es gibt Eigenschaften, die allen Individuen zukommen" durch

$$\exists(F)\, \forall(x)\, F(x)$$

symbolisiert. – Natürlich haben wir schon in der elementaren Logik von Merkmalen überhaupt, von beliebigen Begriffen usw. gesprochen. Wir haben beispielsweise die verschiedenen

möglichen Beziehungen zwischen jeweils zwei Begriffen für zwei *beliebige* Begriffe definiert. Ebenso war in der Syllogistik von *beliebigen* Begriffen S, M und P die Rede. Ausdrücke wie $\forall (x)\, F(x)$ oder $\exists (x)\, \exists (y)\, R(x, y)$, die wir dabei der Einfachheit halber als Aussagen bezeichnet haben, bedeuten aber strenggenommen gar keine Aussagen, sondern Aussagefunktionen, da sie die freien Prädikatenvariablen F, R usw. enthalten.

Für die Herstellung von Aussagen aus Aussagefunktionen, in denen Prädikatenvariable vorkommen, gilt das, was wir in 3.1.3. allgemein über die Herstellung von Aussagen aus Aussagefunktionen gesagt haben: Eine Aussage entsteht dann und nur dann aus einer Aussagefunktion, wenn alle in ihr vorkommenden freien Variablen durch Namen ersetzt oder gebunden werden. – Für Prädikatenvariable werden natürlich keine Individuennamen, sondern allgemeine Namen eingesetzt. Das sind Namen, die zur Bezeichnung jedes beliebigen Elements einer Klasse dienen können, dieses aber von den Elementen anderer Klassen unterscheiden. Ein Name wie „Mensch" dient zur Bezeichnung jedes beliebigen Elements der Klasse der Menschen, unterscheidet zwar diese nicht voneinander, aber von den Elementen anderer Klassen.

Durch die Möglichkeit, auch Prädikatenvariable zu binden, erhöht sich die Ausdrucksfähigkeit unserer Symbolsprache ganz außerordentlich. Wir wollen dafür einige Beispiele geben:

$$\exists (F)\, \exists (x)\, F(x)$$

bedeutet „Es gibt mindestens eine Eigenschaft, die mindestens einem Individuum zukommt" (z. B.: viereckig, Mut, Existenz im Raum).

$$\exists (F) \sim \forall (x)\, F(x)$$

bedeutet „Es gibt mindestens eine Eigenschaft, die nicht jedem Individuum zukommt" (z. B. Elastizität, Leben, Bewußtsein).

$$\sim \exists (F)\, \exists (x)\, [F(x) \wedge \sim F(x)]$$

bedeutet „Es gibt keine Eigenschaft, die auch nur einem Individuum – zugleich und in derselben Hinsicht! – zukommt und nicht zukommt". Das ist wieder der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

$$\forall (F)\, \forall (x)\, [F(x) \vee \sim F(x)]$$

bedeutet „Für jede Eigenschaft und für jedes Individuum gilt, daß die Eigenschaft dem Individuum zukommt oder nicht zukommt". Hier haben wir also noch einmal den Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

$$\exists(R)\,\forall(x)\,\forall(y)\,[R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$$

bedeutet „Es gibt Beziehungen, für die gilt: wenn sie zwischen einem beliebigen Individuum x und einem beliebigen Individuum y bestehen, so bestehen sie auch zwischen y und x" (z. B.: Ähnlichkeit, Gleichheit, Verwandtschaft).

$$\exists(R)\,\forall(x)\,\forall(y)\,[R(x, y) \rightarrow \sim R(y, x)]$$

bedeutet „Es gibt Beziehungen, für die gilt: wenn sie zwischen einem beliebigen Individuum x und einem beliebigen Individuum y bestehen, so bestehen sie *nicht* zwischen y und x" (z. B.: älter sein, kleiner sein, Vater sein, Ursache sein).

Ausdrücke, in denen nicht nur Individuenvariable, sondern auch Prädikatenvariable durch All- oder Existentialoperatoren gebunden sind, gehören nicht mehr der elementaren Prädikatenlogik, sondern der Prädikatenlogik der zweiten Stufe an. Darüber hinaus unterscheidet sich die Prädikatenlogik der zweiten Stufe von der der ersten dadurch, daß sie Prädikatenprädikate enthält. Durch die Einführung der Prädikatenprädikate wird die Ausdrucksfähigkeit der Prädikatenlogik abermals erweitert. Beschäftigen wir uns erst einmal mit der Frage, was Prädikatenprädikate sind und weshalb man sie braucht.

Es gibt in der objektiven Realität nicht nur Individuen, deren Eigenschaften und Beziehungen, sondern diese Merkmale selbst besitzen Eigenschaften und stehen in Beziehung zu anderen Merkmalen. Es gibt also außer den Merkmalen von Individuen:

1. Eigenschaften von Eigenschaften,
2. Eigenschaften von Beziehungen,
3. Beziehungen zwischen Eigenschaften,
4. Beziehungen zwischen Beziehungen und
5. Beziehungen zwischen Eigenschaften und Beziehungen.

Diese Art von Merkmalen wird nun in der erweiterten Prädikatenlogik mit Hilfe von Prädikaten höherer Stufen erfaßt.

Prädikate der ersten Stufe, auf die wir uns bisher beschränkt haben, widerspiegeln Merkmale von Individuen. *Prädikate der zweiten Stufe* oder *Prädikatenprädikate* widerspiegeln Merk-

male, die Merkmalen von Individuen zukommen. – Dieser Stufenaufbau kann je nach der Art der zu betrachtenden Merkmale beliebig weit fortgesetzt werden. Bei praktischen Anwendungen wird man im allgemeinen mit einer Unterscheidung zwischen Prädikaten der ersten und Prädikaten der zweiten Stufe auskommen. Diese Unterscheidung aber ist sehr wichtig, denn ein Merkmal, das einem Merkmal eines Individuums zukommt, ist keineswegs Merkmal des Individuums selbst.

Wir wollen jetzt einige Beispiele für Merkmale von Merkmalen, die also in Prädikaten höherer Stufen widergespiegelt werden, angeben:

(1) Das Denken ist eine Funktion, eine Eigenschaft des Gehirns; Eigenschaften des Denkens, also Eigenschaften von Eigenschaften, sind z. B. Folgerichtigkeit, Tiefe, Selbständigkeit.

(2) Für jedes beliebige Individuum x und für jedes beliebige Individuum y gilt, wie wir schon wissen: Wenn x verwandt ist mit y, so ist auch y verwandt mit x. Diese Eigenschaft der Verwandtseins-Beziehung, daß sie gewissermaßen in beiden Richtungen besteht, nennt man „Symmetrie". Die Symmetrie ist also eine Eigenschaft von Beziehungen.

(3) Denken und Sprechen als Eigenschaften des Menschen sind untrennbar verbunden. Die Beziehung des Verbundenseins ist hier also eine Beziehung zwischen Eigenschaften.

(4) Die Beziehung „x spricht mit y" und „x tauscht mündlich mit y Gedanken aus" sind extensional identisch. Folglich ist hier die extensionale Identität eine Beziehung zwischen Beziehungen.

(5) Die Eigenschaft, ein guter Staatsbürger der DDR zu sein, schließt die Beziehung, Volkseigentum zu verschwenden, aus. Die Beziehung des Ausschließens ist demzufolge hier eine Beziehung zwischen einer Eigenschaft und einer Beziehung.

Prädikate der zweiten Stufe werden häufig, damit sie sich auch der Gestalt nach von denen der ersten Stufe unterscheiden, durch große deutsche Buchstaben symbolisiert. Wir symbolisieren also z. B. das Prädikatenprädikat „Selbständigkeit (des Denkens)" durch $\mathfrak{S}(A)$, das Prädikatenprädikat „extensionale Identität (des Miteinander-Sprechens und des Gedankenaustausches)" durch $\mathfrak{J}(R, S)$.

Im Rahmen der Prädikatenlogik der zweiten Stufe kann die Identität von Individuen, die in 3.3.1. undefiniert eingeführt wurde, definiert werden. Die Definition beruht auf folgender Überlegung: Zwei Individuen sind doch offenbar dann

und nur dann identisch, d. h. ein und dasselbe Individuum, wenn jedes Merkmal, das dem ersten Individuum zukommt, auch dem zweiten zukommt und umgekehrt. – Die Definition hat die Gestalt:

$$x = y =_{\mathrm{Def}} \forall (F)\, [F(x) \leftrightarrow F(y)].$$

Die *extensionale Identität* zweier Begriffe haben wir in 3.1.4. bereits definiert. Wir geben sie noch einmal in symbolischer Schreibweise:

$$A \overset{e}{=} B =_{\mathrm{Def}} \forall (x)\, [A(x) \leftrightarrow B(x)].$$

Analog zur Definition der Identität von Individuen läßt sich nun auch eine Definition für die *intensionale Identität* von Begriffen geben:

$$A \overset{i}{=} B =_{\mathrm{Def}} \forall (\mathfrak{H})\, [\mathfrak{H}(A) \leftrightarrow \mathfrak{H}(B)].$$

Intensional identische Begriffe sind z. B. „Geige" und „Violine", denn alle Eigenschaften, die auf die Eigenschaft, Geige zu sein, zutreffen, treffen auch auf die Eigenschaft, Violine zu sein, zu und umgekehrt. Darüber hinaus sind beide Begriffe natürlich auch extensional identisch.

Allgemein gilt für diese beiden Arten der Identität: Sind zwei Begriffe A und B intensional identisch, so sind sie auch extensional identisch. – Diese Formulierung ist im Sinne einer Implikation zu verstehen; d. h., es ist nur der Fall ausgeschlossen, daß zwei Begriffe intensional identisch, aber nicht extensional identisch sind. – Was über die Identität einstelliger Prädikate gesagt wurde, gilt natürlich ganz analog auch für die mehrstelligen Prädikate.

Für die Grundlagenforschung der Mathematik ist die Prädikatenlogik der zweiten Stufe insofern von besonderer Bedeutung, als sich die natürlichen Zahlen als Prädikatenprädikate darstellen lassen.

Die Null wird als Eigenschaft einer Eigenschaft aufgefaßt, die keinem Individuum zukommt, z. B. als Eigenschaft der Eigenschaft, Schöpfer des Universums zu sein. Sie trifft auf *kein* Individuum zu, hat die Eigenschaft, auf 0 Individuen zuzutreffen. Das Prädikatenprädikat 0 läßt sich mit den Mitteln der Logik folgendermaßen definieren:

$$0(F) =_{\mathrm{Def}} \sim \exists (x)\, F(x).$$

Die Eins wird als Eigenschaft einer Eigenschaft angesehen, die genau einem Individuum zukommt. Beispielsweise hat die Eigenschaft, der Planet mit dem Namen „Erde" zu sein, die Eigenschaft, auf *ein* Individuum zuzutreffen. Das Prädikatenprädikat 1 läßt sich definieren:

$$1\,(F) =_{\mathrm{Def}} \exists (x)\,\{F(x) \wedge \forall (y)\,[F(y) \rightarrow (x = y)]\}.$$

In der Definition wird also zunächst gesagt, daß es ein Individuum x *gibt*, das die Eigenschaft F hat, und dann, daß jedes Individuum, das die Eigenschaft F ebenfalls hat, mit x identisch ist. – Analog hierzu läßt sich jede beliebige andere natürliche Zahl, lassen sich aber auch gewisse Rechenoperationen mit ausschließlich logischen Mitteln definieren. Dadurch wird es möglich, Grundlagenfragen der Mathematik mit äußerster logischer Strenge zu behandeln.

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß man exakt zwischen Merkmalen bzw. Prädikaten verschiedener Stufen unterscheiden muß. Diese Forderung ergibt sich auch aus der Logik selbst. Wenn man nämlich in der erweiterten Prädikatenlogik diese Unterscheidung nicht trifft bzw. keine anderen geeigneten Vorsichtsmaßregeln ergreift, treten hier logische Antinomien auf. Das sind logische Widersprüche, die sich mit Hilfe gültiger Schlußregeln aus einsichtigen Voraussetzungen ableiten lassen.

3.3.4. Arten von Begriffen

Hier wie in den voraufgegangenen Abschnitten betrachten wir die Begriffe als Prädikate und beschäftigen uns dementsprechend mit einer Klassifikation der Prädikate. Dabei fungieren ausschließlich formal-logische Merkmale als Klassifikationsmerkmale. Verschiedene Arten von Begriffen, wie z. B. Kollektivbegriffe, die in der traditionellen Logik betrachtet wurden, gehören in den Rahmen einer dialektischen Logik und werden hier nicht berücksichtigt.

Prädikate können klassifiziert werden

(1) nach dem *Merkmal der Quantität*. Dabei ist vor allem die folgende Unterteilung von Interesse:

(1.1.) Prädikate, deren zugehörige Klasse kein Element enthält,

(1.2.) Prädikate, deren zugehörige Klasse genau ein Element enthält,

(1.3.) Prädikate, deren zugehörige Klasse mehr als ein Element enthält.

Die Mehrzahl der im täglichen Leben, in der Wissenschaft usw. verwendeten Prädikate gehört zu (1.3.); es erübrigt sich daher, Beispiele dafür zu nennen. Zu (1.2.) gehört z. B. „Universum", ferner solche Prädikate wie „marxistisch-leninistische Philosophie", die ihrer logischen Struktur nach eine Konjunktion von Prädikaten sind, von denen jedes zwar auf mehr als auf ein Individuum zutrifft, die aber gemeinsam auf genau ein Individuum zutreffen. Zu (1.1.) gehören Prädikate, die einen logischen Widerspruch enthalten, oder solche, die zwar keinen logischen Widerspruch enthalten, die aber miteinander unverträgliche Merkmale verknüpfen, so daß ein Individuum, das ihnen entsprechen würde, z. B. im Widerspruch zu physikalischen Gesetzen stehen müßte. Beispiele hierfür sind „nicht warme Wärme", „Gott" und „Perpetuum mobile".

Prädikate können ferner klassifiziert werden

(2) nach dem *Merkmal der Qualität*. Damit ist gemeint, daß man die Prädikate einteilen kann in:

(2.1.) nicht negierte Prädikate,

(2.2.) negierte Prädikate.

Durch nicht negierte Prädikate wird das Vorhandensein, durch negierte das Nichtvorhandensein gewisser Merkmale ausgedrückt. Sind sie in der Sprache der Prädikatenlogik formuliert, so ist ihre Unterscheidung unproblematisch; es ist dann nur festzustellen, ob ihnen ein Negationszeichen unmittelbar voraufgeht oder nicht. In der natürlichen Sprache hingegen oder auch in Fachsprachen ist mitunter nicht klar, ob ein negiertes Prädikat vorliegt oder ein Prädikat, das nur einen Teil der Elemente erfaßt, den das negierte Prädikat erfaßt. In nicht symbolisierten Sprachen werden negierte Prädikate oft durch „nicht" gekennzeichnet, wie „nicht schön", „Nicht-Marxist" usw. Nicht selten gebraucht man zu diesem Zweck aber auch die Vorsilben „un-", „in-" und „a-". Sie kennzeichnen aber nicht in jedem Fall negierte Prädikate im Sinne der Logik. So ist z. B. „unglücklich" nicht das Negat von „glücklich", da nicht jeder Mensch unglücklich oder glücklich ist. Von zwei Prädikaten aber, deren eines das Negat des anderen ist, muß genau eins auf jedes beliebige Individuum zutreffen.

Eine weitere Klassifizierung der Prädikate ist möglich

(3) nach dem *Merkmal der Stufe.* Hieraus ergibt sich eine Einteilung in

(3.1.) Prädikate, die Merkmale von Individuen widerspiegeln,

(3.2.) Prädikate, die eine Beziehung zwischen Individuen und Merkmalen oder eine Beziehung zwischen Merkmalen verschiedener Stufen widerspiegeln,

(3.3.) Prädikate, die Merkmale von Merkmalen widerspiegeln.

Der Unterschied zwischen den Prädikaten der Art (3.1.) und (3.3.) ist in 3.3.3. ausführlich genug erörtert worden, so daß sich Beispiele erübrigen. Ein Prädikat von der Art (3.2.) ist „hat die Eigenschaft" und sein Negat „hat nicht die Eigenschaft". Ihnen entsprechen die Elementbeziehung und deren Negat. Analoge Prädikate gibt es dann auch für Beziehungen zwischen Merkmalen verschiedener Stufe.

Eine vierte Klassifizierung ist die Klassifizierung

(4) nach dem *Merkmal der Stellenzahl.* Hierbei genügt in der Regel die Unterteilung in:

(4.1.) einstellige Prädikate,

(4.2.) mehrstellige Prädikate oder Relationen.

Auch diese Klassifizierung bedarf keiner besonderen Erklärung mehr, da wir in allen Abschnitten über die Prädikatenlogik immer wieder zwischen ein- und zweistelligen Prädikaten unterschieden haben.

Kombiniert man zwei oder mehr der hier genannten Klassifikationsmerkmale, so kann man eine gemischte Klassifikation der Prädikate aufstellen und würde z. B. erhalten:

1. einstellige, nicht negierte Prädikate der ersten Stufe, die auf kein Individuum zutreffen (z. B. „Perpetuum mobile"),
2. einstellige, nicht negierte Prädikate der ersten Stufe, die auf genau ein Individuum zutreffen (z. B. „Universum") usw.

Diese Klassifikation weiter durchzuführen und dabei zu jeder der verschiedenen Arten von Prädikaten ein Beispiel zu suchen ist nicht nur eine nützliche Übung für die Verwendung von Begriffen, sondern auch eine Übung für die Anwendung dessen, was wir in 4.1.8. noch zur Klassifizierung sagen werden. Damit wollen wir uns hier nicht weiter beschäftigen, sondern wir werden uns einer weiteren Unterteilung der zweistelligen Relationen zuwenden, die sich aus der Art der in ihnen widergespiegelten Beziehungen ergibt.

Es gibt Beziehungen, in denen jedes Individuum zu sich selbst steht. So ist etwa jedes Individuum mit sich selbst identisch, gleichaltrig, gleich groß. Die entsprechenden Relationen sind die *reflexiven Relationen*. Die *nicht reflexiven Relationen* widerspiegeln Beziehungen, in denen nicht jedes Individuum zu sich selbst steht. Nicht jeder fährt sich selbst, viele lassen sich z. B. mit einer Taxe fahren; nicht jeder rasiert sich selbst. Unter den nicht reflexiven Relationen wiederum gibt es eine besondere Art, die *irreflexiven Relationen*; diese widerspiegeln Beziehungen, in denen kein Individuum zu sich selbst steht. Kein Individuum ist z. B. – zugleich und in derselben Hinsicht – von sich selbst verschieden. Fassen wir zusammen:

Die Relation R ist reflexiv genau dann, wenn gilt:

$$\forall(x)\, R(x, x) \text{ oder } \sim \exists(x) \sim R(x, x).$$

Die Relation R ist nicht reflexiv genau dann, wenn gilt:

$$\sim \forall(x)\, R(x, x) \text{ oder } \exists(x) \sim R(x, x).$$

Die Relation R ist irreflexiv genau dann, wenn gilt:

$$\forall(x) \sim R(x, x) \text{ oder } \sim \exists(x)\, R(x, x).$$

Unter den bisher betrachteten Beziehungen kamen solche vor, die, wenn sie zwischen x und y bestehen, auch zwischen y und x bestehen. Zu ihnen gehören die Beziehungen des Verwandtseins, der Ähnlichkeit, der Gleichaltrigkeit, des Zusammenbestehens und der Wechselwirkung. Diese Beziehungen werden widergespiegelt in *symmetrischen Relationen*. Die *nicht symmetrischen Relationen* widerspiegeln Beziehungen, die, wenn sie zwischen x und y bestehen, nicht in jedem Falle auch zwischen y und x bestehen. Wenn etwa x Bruder von y ist, so muß y nicht unbedingt Bruder von x sein; y kann ja Schwester von x sein. Wenn x einen bestimmten Einfluß auf y ausübt, so übt nicht in jedem Falle auch y denselben Einfluß auf x aus. Unter den nicht symmetrischen Relationen gibt es als spezielle Art die *asymmetrischen Relationen*. Sie widerspiegeln Beziehungen, die, wenn sie zwischen x und y bestehen, in keinem Falle zwischen y und x bestehen. Wenn etwa x Vorgesetzter von y ist, so ist – gleichzeitig und in derselben Hinsicht – y nicht Vorgesetzter von x. Wenn x Ursache von y ist, so ist y nicht Ursache von x. – Wir fassen wieder zusammen:

Die Relation R ist symmetrisch genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$$

oder

$$\sim \exists (x) \exists (y) [R(x, y) \wedge \sim R(y, x)].$$

Die Relation R ist nicht symmetrisch genau dann, wenn gilt:

$$\sim \forall (x) \forall (y) [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$$

oder

$$\exists (x) \exists (y) [R(x, y) \wedge \sim R(y, x)].$$

Die Relation R ist asymmetrisch genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x) \forall (y) [R(x, y) \rightarrow \sim R(y, x)]$$

oder

$$\sim \exists (x) \exists (y) [R(x, y) \wedge R(y, x)].$$

In den *transitiven Relationen* finden die Beziehungen ihre Widerspiegelung, die, wenn sie zwischen x und y und zwischen y und z bestehen, auch zwischen x und z bestehen. Wenn etwa x größer als y und y größer als z ist, so ist auch x größer als z. Hierher gehören auch die Beziehungen des Vorgesetztenseins, der Abhängigkeit und der Gleichheit. Beziehungen, die, wenn sie zwischen x und y und zwischen y und z bestehen, nicht in jedem Falle auch zwischen x und z bestehen, werden in den *nicht transitiven Relationen* widergespiegelt. Wenn beispielsweise x Freund von y und y Freund von z ist, dann ist nicht immer auch x Freund von z. Auch hier gibt es wieder eine spezielle Art von Relationen, nämlich die *intransitiven Relationen*. Sie widerspiegeln Beziehungen, die, wenn sie zwischen x und y und zwischen y und z bestehen, in keinem Falle zwischen x und z bestehen. Wenn beispielsweise x um eine Einheit größer ist als y und y eine Einheit größer als z, so ist x nicht eine Einheit größer als z. – Fassen wir auch hier wieder zusammen:

Die Relation R ist transitiv genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x) \forall (y) \forall (z) \{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(x, z)\}$$

oder

$$\sim \exists (x) \exists (y) \exists (z) \{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \wedge \sim R(x, z)\}.$$

Die Relation R ist nicht transitiv genau dann, wenn gilt:

$$\sim \forall (x) \forall (y) \forall (z) \{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(x, z)\}$$

oder

$$\exists (x) \exists (y) \exists (z) \{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \wedge \sim R(x, z)\}.$$

Die Relation R ist intransitiv genau dann, wenn gilt:

$$\forall(x)\,\forall(y)\,\forall(z)\,\{[R(x,y) \wedge R(y,z)] \rightarrow \sim R(x,z)\}$$

oder

$$\sim \exists(x)\,\exists(y)\,\exists(z)\,\{[R(x,y) \wedge R(y,z)] \wedge R(x,z)\}.$$

Den einzelnen Relationen kommen nun verschiedenartige Kombinationen der hier definierten Eigenschaften zu. Die Relation „x ist Bruder von y" ist irreflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv; die Relation „x ist Vater von y" ist irreflexiv, asymmetrisch und intransitiv. Unter diesen Arten von Relationen sind zwei von besonderer Bedeutung, die Äquivalenzrelationen und die Ordnungsrelationen.

Die Relation R ist eine *Äquivalenzrelation* genau dann, wenn gilt:

(1) $\forall(x)\,R(x,x)$,

(2) $\forall(x)\,\forall(y)\,[R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$,

(3) $\forall(x)\,\forall(y)\,\forall(z)\,\{[R(x,y) \wedge R(y,z)] \rightarrow R(x,z)\}$.

Äquivalenzrelationen sind also reflexiv, symmetrisch und transitiv. In ihnen werden alle Arten der Identität und der Gleichheit erfaßt, ob es sich um intensionale oder extensionale Identität handelt, ob es um eine Gleichheit in bezug auf Größe, Wert, Gewicht oder Preis geht.

Äquivalenzrelationen dienen der wissenschaftlichen Abstraktion. Dieser Abstraktionsprozeß geht so vor sich: Man teilt zunächst die Individuen des Untersuchungsbereichs mit Hilfe einer Äquivalenzrelation in sogenannte Abstraktionsklassen ein, und alle Individuen, die in dieser Beziehung zueinander stehen, gehören ein- und derselben Abstraktionsklasse an. Von den Unterschieden zwischen den Elementen einer solchen Abstraktionsklasse wird abstrahiert; dadurch wird der Untersuchungsbereich wesentlich übersichtlicher, weil man sich dann auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen Repräsentanten der verschiedenen Abstraktionsklassen beschränken kann und nicht die Vielfalt aller möglichen Beziehungen zwischen der Gesamtheit aller Individuen berücksichtigen muß.

Einen solchen Abstraktionsprozeß haben wir im Rahmen der Aussagenlogik durchgeführt. Als Äquivalenzrelation diente die Relation „x hat denselben Wahrheitswert wie y". Mit Hilfe dieser Relation wurden die Aussagen eingeteilt in die Abstraktionsklasse der wahren Aussagen und in die Abstraktionsklasse

der falschen Aussagen. Von den Unterschieden zwischen den Aussagen innerhalb einer Abstraktionsklasse wurde dann abstrahiert, und es wurden nur noch Beziehungen zwischen irgendwelchen wahren oder falschen Aussagen betrachtet. Dabei dienten konkrete Aussagen als Repräsentanten der Abstraktionsklasse, der sie angehören. In diesem Falle ergeben sich nur zwei Abstraktionsklassen, es können aber auch mehr werden, wenn man z. B. zum Zweck soziologischer Untersuchungen den zu untersuchenden Bevölkerungskreis in Abstraktionsklassen der Gleichaltrigen einteilt oder in Abstraktionsklassen, die jeweils alle Menschen mit demselben Beruf umfassen.

Ordnungsrelationen dienen dazu, jedem Individuum eines bestimmten Bereichs einen eindeutig bestimmten Platz zuzuweisen, d. h. die Individuen dieses Bereichs in eine eindeutige Reihenfolge zu bringen. Mit Hilfe der Kleiner-Beziehung kann man z. B. die natürlichen Zahlen der Größe nach ordnen. Eine Relation ist Ordnungsrelation, wenn sie irreflexiv, transitiv und konnex ist. Eine solche Relation ist zugleich asymmetrisch; das ergibt sich aus ihrer Irreflexivität und Transitivität. – Es gibt auch reflexive Ordnungsrelationen, die wir aber nicht betrachten wollen; für sie gelten etwas andere Bedingungen. – Eine Relation ist *konnex* genau dann, wenn für jedes Paar $[x, y]$ von Individuen gilt, daß sie zwischen x und y oder zwischen y und x besteht, falls nicht x und y dasselbe Individuum sind. Die Kleiner-Beziehung ist für den Bereich der natürlichen Zahlen konnex, d. h., für jedes Paar $[x, y]$ von natürlichen Zahlen gilt: Wenn x nicht gleich y ist, so ist x kleiner als y oder y kleiner als x.

Die Relation R ist eine Ordnungsrelation, wenn gilt:

$$(1)\ \forall(x) \sim R(x, x),$$

$$(2)\ \forall(x)\,\forall(y)\,\forall(z)\,\{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(x, z)\},$$

$$(3)\ \forall(x)\,\forall(y)\,\{\sim (x = y) \rightarrow [R(x, y) \vee R(y, x)]\}.$$

Die Bedingung (3) charakterisiert in symbolisierter Schreibweise die Konnexität der Relation R; man kann sie statt dessen auch durch $\forall(x)\,\forall(y)\,[(x = y) \vee R(x, y) \vee R(y, x)]$ symbolisieren. – In der Regel kann man die Kleiner-Beziehung auch für die Ordnung von Menschen benutzen, wenn z. B. Schüler der Größe nach in einer Reihe zu einer bestimmten

Turnübung antreten sollen. Sie gewährleistet jedoch keine eindeutige Reihenfolge, wenn zwei der Schüler genau gleich groß sind. – Die Relation „x ist Vorgesetzter von y" kann unter einer zusätzlichen Bedingung als Ordnungsrelation dienen: Es darf nicht vorkommen, daß von zwei Mitarbeitern keiner Vorgesetzter des anderen ist.

3.3.5. Nullklasse und Existentialoperator

Zu den gültigen Modi der Syllogistik, von denen in 3.2.4.2. einige genannt wurden, zählt nach Aristoteles auch der sogenannte *Modus Darapti* der 3. Schlußfigur. Wenn man ihn anwendet, kann man z. B. folgenden Schluß ziehen:

Alle Götter sind unsterblich.
Alle Götter sind denkende Wesen.

Einige denkende Wesen sind unsterblich.

Die Konklusion ist offensichtlich eine falsche Aussage, obwohl die Schlußregel genau beachtet wurde. Man könnte zunächst auf den Gedanken kommen, das liege daran, daß auch die Prämissen falsche Aussagen seien. Unter diesen Umständen wäre unser Beispiel uninteressant, weil es über die Gültigkeit der Schlußregel nichts besagen würde.

Tatsächlich sind aber beide Prämissen wahre Aussagen. – Verdeutlichen wir uns das, indem wir die erste Prämisse symbolisieren: $\forall (x)\,[G(x) \rightarrow U(x)]$; d. h., für jeden Gegenstand gilt: *Wenn* er ein Gott ist, so ist er unsterblich. Damit ist jedoch nicht gesagt, *daß* es einen Gott gibt. – Ist also der *Modus Darapti* im Gegensatz zur Auffassung Aristoteles' und der traditionellen Logiker vielleicht doch nicht gültig?

Nach Aristoteles ist eine Aussage der Art $S\ a\ P$ bzw. $S\ e\ P$ nur dann wahr, wenn es wirklich Individuen mit der Eigenschaft S gibt, wenn die Extension des Prädikates S nicht die Nullklasse ist. Diese stillschweigende Voraussetzung der traditionellen Logik wird in der modernen Logik ausdrücklich hinzugefügt. Der *Modus Darapti* ist, wie man mit Hilfe unseres Verfahrens feststellen kann, gültig, wenn durch eine zusätzliche Prämisse ausgedrückt wird, daß die Extension des Mittelbegriffs nicht die Nullklasse ist. Diese dritte Prämisse ist natürlich im Falle unseres Beispiels nicht wahr; sie würde lauten: „Es gibt Götter" – $\exists (x)\, G(x)$.

Auch der *Modus Felapton* der 3. Figur sowie der *Modus Bamalip* und der *Modus Fesapo* der 4. Figur sind nur mit einer analogen zusätzlichen Prämisse gültig. Das gleiche gilt für eine Reihe von unmittelbaren Schlüssen, z. B. für die Schlüsse der Subalternation und für einige Schlüsse der Opposition. Die diesen Schlußregeln entsprechenden prädikatenlogischen Ausdrücke sind demnach nur in nicht leeren Bereichen allgemeingültig.

Wir haben weiter oben die Redewendungen „Es gibt Individuen mit der Eigenschaft S" und „Die Extension des Prädikats S ist nicht die Nullklasse" nebeneinander gebraucht, denn sie besagen im wesentlichen dasselbe. Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, in welchem Sinne sie gebraucht werden können, und geben dazu zunächst eine Anzahl wahrer Aussagen als Beispiele, in denen die Wendung „es gibt" vorkommt.

(1) Es gibt Lebewesen.
(2) Es gibt Eigenschaften, die allen Individuen zukommen.
(3) Es gibt friedliche Beziehungen zwischen Staaten mit verschiedener Gesellschaftsordnung.
(4) Es gibt Aussagen, die Sachverhalte der objektiven Realität adäquat widerspiegeln.
(5) Es gibt Normen der sozialistischen Moral.
(6) Es gibt Farbempfindungen.
(7) In Märchen gibt es Zauberer und gute Geister.
(8) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere.
(9) Für viele Aufgaben, die heute noch nicht gelöst sind, gibt es eine Lösung.

Wir wollen nicht auf alle Unterschiede des „es gibt" in unseren Beispielen eingehen, sondern nur die wichtigsten nennen. – In den Aussagen (1) bis (3) bezieht sich das „es gibt" auf Individuen, Eigenschaften und Beziehungen der objektiven Realität; es sagt aus, daß diese Gegenstände usw. objektiv real existieren. In den Aussagen (4) bis (7) geht es hingegen um eine Existenz im Bewußtsein. Teils handelt es sich um adäquate Widerspiegelungen der objektiven Realität, teils um Bewußtseinsinhalte, die keine adäquaten Widerspiegelungen der objektiven Realität sind. Ein Beispiel für den zuletzt genannten Fall ist die Tatsache, daß es logische Widersprüche zwar im Bewußtsein gibt, aber nicht außerhalb des Bewußtseins. Eine besondere Problematik ist mit den Aussagen (8)

und (9) verbunden. Hier ist nicht einmal eine Existenz im Bewußtsein gemeint; denn es hat gewiß noch niemand alle Zahlen aufgezählt und damit in seinem Bewußtsein gehabt, die größer sind als irgendeine andere; und wenn die Lösung einer ungelösten Aufgabe im Bewußtsein irgendeines Menschen existierte, so wäre diese Aufgabe ja schon gelöst. – In Aussagen wie den zuletzt besprochenen bedeutet das „es gibt" – und so wird es auch ständig in der Mathematik gebraucht – nichts weiter als logische Widerspruchsfreiheit. Man kann also in der Mathematik immer sagen „es gibt", wenn diese Aussage nicht in sich logisch widerspruchsvoll ist, wenn sie nicht im logischen Widerspruch zu den bereits bewiesenen Aussagen des Gebietes steht und wenn sich aus ihr kein logischer Widerspruch ergibt. Die Wahrheit einer Existentialaussage sagt uns demzufolge zunächst nichts weiter, als daß hier kein logischer Widerspruch vorliegt. Ob darüber hinaus noch eine Existenz im Bewußtsein oder in der objektiven Realität gemeint ist, kann erst aus dem Zusammenhang entnommen werden.

3.3.6. Entscheidungsproblem und Axiomatisierung in der Prädikatenlogik

Im Zusammenhang mit der Aussagenlogik war schon einmal vom sogenannten Entscheidungsproblem die Rede. Es besteht darin, ein Verfahren zu finden, mit dessen Hilfe man in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob ein beliebiger logischer Ausdruck allgemeingültig, erfüllbar oder eine Kontradiktion ist. Als ein solches Entscheidungsverfahren haben wir in der Aussagenlogik das Matrizenverfahren kennengelernt. Man kann also jeden aussagenlogischen Ausdruck entscheiden, indem man seine Wahrheitsmatrix aufstellt. Weiterhin kann man jeden aussagenlogischen Ausdruck an Hand seiner sogenannten Normalformen entscheiden. Aber schon mit dem Matrizenverfahren allein ist das Entscheidungsproblem der Aussagenlogik gelöst. Nun taucht natürlich die Frage auf, ob das Entscheidungsproblem für die Prädikatenlogik ebenfalls gelöst ist, d. h., ob es ein Verfahren gibt, mit dessen Hilfe man jeden beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck entscheiden kann. – Ein Entscheidungsverfahren für den Gesamtbereich der Prädikatenlogik, also für jeden beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck, gibt es nicht. Ein Teilbereich der Prädi-

katenlogik, für den das Entscheidungsproblem gelöst ist, ist z. B. die *einstellige* Prädikatenlogik.

Bereits für die *mehrstellige* Prädikatenlogik als Ganzes, in der noch gar keine Prädikatenprädikate auftreten, gibt es kein allgemeines Entscheidungsverfahren mehr, wie Alonzo Church und andere Vertreter der mathematischen Logik vor wenigen Jahrzehnten nachgewiesen haben.

Damit sind jedoch die Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet keineswegs abgeschlossen. Vielmehr bemüht man sich nach wie vor darum, möglichst umfassende Entscheidungsverfahren für prädikatenlogische Ausdrücke zu finden, genauer gesagt Entscheidungsverfahren für möglichst große Klassen von prädikatenlogischen Ausdrücken. Alle prädikatenlogischen Ausdrücke, in denen Operatoren vorkommen, lassen sich z. B. so umformen, daß alle Operatoren unverneint am Anfang des Ausdrucks stehen und daß der Rest des Ausdrucks ihr gemeinsamer Wirkungsbereich ist. Dadurch ergeben sich bestimmte Klassen von prädikatenlogischen Ausdrücken, und man sucht nun etwa nach einem Entscheidungsverfahren für Ausdrücke, die nur Alloperatoren enthalten oder in denen beliebig viele Alloperatoren vor genau einem Existentialoperator stehen. Für eine ganze Reihe solcher Klassen von Ausdrücken gibt es schon Entscheidungsverfahren, für weitere werden sie gewiß gefunden werden.

Wenn es für ein Gebiet kein allgemeines Entscheidungsverfahren gibt, versucht man in der Regel, auf einem bestimmten anderen Wege den Nachweis zu führen, ob gewisse Ausdrücke allgemeingültig sind oder nicht. Man geht dabei von solchen Ausdrücken aus, von denen man weiß, daß sie allgemeingültig sind. Diese werden nach logischen Schlußregeln in andere umgeformt. Jeder Ausdruck, der nach den Schlußregeln aus einem allgemeingültigen Ausdruck gewonnen wird, ist selbst wieder allgemeingültig. Gelingt es nun, aus allgemeingültigen Ausdrücken durch Umformungen gemäß den Schlußregeln den Ausdruck zu gewinnen, der entschieden werden soll, dann ist ein individueller Beweis für diesen Ausdruck erbracht. Beispiele dafür finden sich in 3.2. an mehreren Stellen.

Die Methode, einen Ausdruck individuell zu beweisen, ist natürlich erheblich schwieriger zu handhaben als ein Entscheidungsverfahren. Im Rahmen eines Entscheidungsverfahrens gibt es ganz detaillierte und präzise Anweisungen dafür, was man mit einem Ausdruck zu tun hat, um ihn zu entscheiden;

das haben wir bereits kennengelernt. Man kann also einen Ausdruck, wenn ein Entscheidungsverfahren gegeben ist, ganz mechanisch entscheiden. Diese Tatsache ermöglicht es übrigens, in solchen Fällen die zu leistende Arbeit durch die Arbeit von Elektronenrechenmaschinen zu ersetzen. Dagegen gibt es kein praktisch verwendbares Verfahren zum mechanischen Auffinden von individuellen Beweisen. Man kann sich darum auch von den klassischen Elektronenrechenmaschinen die Suche nach individuellen Beweisen nicht abnehmen lassen. Allerdings sind Bestrebungen im Gange, sogenannte heuristische Maschinen zu konstruieren, die hierbei helfen können. Man kann sich beim Suchen individueller Beweise nur auf Erfahrungen stützen und einige allerdings recht allgemeine Hinweise beachten. Es gehören Übung, Phantasie und dialektisches Denken dazu, um die zweckmäßigsten Ausgangsausdrücke, Schlußregeln und Beweisgänge zu finden. – Wichtig ist in diesem Zusammenhang, daß sich jeder aufgestellte Beweis genau auf seine Richtigkeit hin nachprüfen läßt. Damit ist also zumindest eine Kontrolle gegeben, die man mechanisch ausüben kann.

Will man einen individuellen Beweis für irgendeinen Ausdruck führen, so muß man natürlich bereits über gewisse andere Ausdrücke, aus denen er gewonnen werden kann, und über gewisse Schlußregeln, mit deren Hilfe er gewonnen werden kann, verfügen. Diese Bedingung wird durch ein Axiomensystem erfüllt. Ein Axiomensystem für eine Menge von Ausdrücken – z. B. für die Menge der allgemeingültigen Ausdrücke der Aussagenlogik – ist eine Menge von Ausdrücken, aus denen alle Ausdrücke jener Menge beweisbar sind. Die Ausdrücke, aus denen das Axiomensystem besteht, sind die Axiome. Handelt es sich um eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Axiomen, so gibt man sie alle an. Andernfalls muß man ein Kriterium angeben, nach dem man von jedem beliebigen Ausdruck entscheiden kann, ob er ein Axiom dieses Systems ist oder nicht, oder man muß ein Verfahren angeben, nach dem man alle Axiome dieses Systems aufzählen kann. Ferner gibt man zu einem Axiomensystem eine Anzahl von Schlußregeln an, mit deren Hilfe die Ausdrücke der axiomatisierten Menge aus den Axiomen gewonnen werden können.

Axiomensysteme gibt es für bestimmte Gebiete der formalen Logik, der Mathematik und auch der Physik. Wir wollen

ein Beispiel dafür aus dem Bereich der formalen Logik anführen:

(1) $(p \vee p) \rightarrow p$

(2) $p \rightarrow (p \vee q)$

(3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

(5) $\forall (x) F(x) \rightarrow F(y)$

(6) $F(y) \rightarrow \exists (x) F(x)$.

Die Axiome (1) bis (4) bilden ein Axiomensystem für die allgemeingültigen Ausdrücke der Aussagenlogik, die Axiome (1) bis (6) ein Axiomensystem für die allgemeingültigen Ausdrücke der Prädikatenlogik der 1. Stufe. Diese beiden Axiomensysteme, die in „Grundzüge der theoretischen Logik" von David Hilbert und Wilhelm Ackermann zugrunde gelegt werden, sind keineswegs die einzigen für die entsprechenden Gebiete. Es gibt andere, die aus weniger, und wieder andere, die aus mehr Axiomen bestehen. Welches Axiomensystem man wählt, hängt von dem Ziel ab, das man verfolgt. Man wird ein Axiomensystem wählen, das aus möglichst wenig Axiomen besteht, wenn es z. B. um bestimmte theoretische Untersuchungen geht. Will man dagegen ein Axiomensystem haben, aus dem man möglichst bequem andere Ausdrücke des axiomatisierten Gebiets gewinnen kann, so wird man ein umfangreicheres Axiomensystem bevorzugen.

Für die Axiomatisierung der allgemeingültigen Ausdrücke der Aussagenlogik genügen zu den Axiomen (1) bis (4) als Schlußregeln die Abtrennungsregel und die Einsetzungsregel für aussagenlogische Ausdrücke, nach der man für die Aussagenvariablen eines allgemeingültigen Ausdrucks beliebige aussagenlogische Ausdrücke einsetzen darf, wenn nur für dieselben Variablen gleichzeitig dieselben Ausdrücke eingesetzt werden. Will man die allgemeingültigen Ausdrücke der Prädikatenlogik der 1. Stufe axiomatisieren, braucht man noch einige weitere Regeln für die Einsetzung in prädikatenlogische Ausdrücke sowie für die Einführung und die Eliminierung von Operatoren.

Für die Axiomatisierung eines außerlogischen Gebietes – z. B. einer Teildisziplin der Physik – wählt man ein Axiomensystem der formalen Logik und fügt ihm geeignete Aussagen

aus dem zu axiomatisierenden Gebiet als weitere Axiome hinzu. Ähnlich verfährt man, wenn man irgendeine Aussage mit Hilfe anderer Aussagen beweisen will, ohne sogleich eine ganze Disziplin zu axiomatisieren. Den logischen Axiomen werden dann einfach die Prämissen der zu beweisenden Aussage als weitere Axiome hinzugefügt. Auf diese Weise haben wir z. B. in 3.2.7. die Aussage „Es gibt (mindestens einen) Idealisten" bewiesen.

Da es, wie gesagt, für die Prädikatenlogik als Ganzes kein allgemeines Entscheidungsverfahren gibt, hat man versucht, die Prädikatenlogik wenigstens als Ganzes zu axiomatisieren. Ein solches Axiomensystem ist jedoch nicht gefunden worden. Im Jahre 1931 hat der Mathematiker und Logiker Kurt Gödel dann sogar bewiesen, daß diese Versuche prinzipiell aussichtslos sind, und seine Resultate in dem nach ihm benannten Unvollständigkeitssatz formuliert. Wenn man für ein genügend ausdrucksfähiges System, wie es die Prädikatenlogik ist, ein Axiomensystem aufstellt, kann man nach einem von Gödel entwickelten Verfahren einen Ausdruck konstruieren, der zwar diesem Gebiet angehört, sich aber aus den Axiomen weder beweisen noch widerlegen läßt. Erweitert man das System um bestimmte allgemeingültige Ausdrücke, dann ist zwar der nach dem Gödelschen Verfahren aufgestellte Ausdruck beweisbar oder widerlegbar, aber man kann einen neuen Ausdruck aufstellen, der auch aus dem erweiterten Axiomensystem weder zu beweisen noch zu widerlegen ist. Dieser Prozeß kann beliebig fortgesetzt werden, ohne daß jemals ein Abschluß erreicht wird.

Dieser von Gödel geführte Beweis ist philosophisch von unerhörter Bedeutung. Damit wird nämlich die Behauptung idealistischer Philosophen widerlegt, daß sich jedes Problem des Denkens ausschließlich mit den Mitteln der formalen Logik lösen läßt. So glaubte z. B. der idealistische Philosoph Leibniz, es sei möglich, ein formales System – also etwa eine mathematische Logik – auszuarbeiten, indem man durch bloßes Umformen nach bestimmten Schlußregeln jede beliebige symbolisierte Aussage entscheiden könne. – Selbst bedeutende Mathematiker, die philosophisch auf dem Standpunkt des Idealismus stehen, haben inzwischen anerkannt, daß der Versuch, die Frage der Wahrheit rein formal zu lösen, sie ohne Beziehung zur objektiven Realität zu lösen, mit dem Beweis Gödels gescheitert ist.

Während die Forschungsergebnisse Gödels unter den Idealisten Pessimismus ausgelöst haben, bedeuten sie für den dialektischen Materialismus eine Bestätigung seiner Lehre von der Wahrheit. Sie bestätigen nämlich für die Mathematik und die Logik die Auffassung des dialektischen Materialismus, daß die Praxis das primäre Wahrheitskriterium ist, ohne daß man deshalb jede Aussage einzeln an der Praxis überprüfen müßte.

4. GRUNDBEGRIFFE DER DEFINITIONSLEHRE UND DER THEORIE DES REDUKTIVEN SCHLIESSENS

Dieses Kapitel bildet eine Art Anhang zur Einführung in die formale Logik. Nach einem Überblick über Grundbegriffe der allgemeinen Methodologie der Wissenschaften werden zwei Teilgebiete aus dem Bereich der Methodologie behandelt, die eng mit den bisher betrachteten Themen aus der formalen Logik zusammenhängen. Dieser Zusammenhang besteht hinsichtlich der Definitionslehre darin, daß Erkenntnisse der Prädikatenlogik ausgenutzt werden. Das reduktive Schließen bildet ein Gegenstück zum bisher ausschließlich betrachteten deduktiven Schließen, beide ergänzen einander und werden zusammen praktiziert.

4.0. Zum Begriff der allgemeinen Methodologie

In Darstellungen der modernen Logik wird im allgemeinen das reduktive Schließen gar nicht und die Definitionslehre nur so weit behandelt, wie sie innerhalb der formalen Logik selbst gebraucht wird. Ältere Darstellungen, Darstellungen der traditionellen Logik beschäftigen sich demgegenüber meist recht ausführlich mit diesen Themen und erörtern sie aus philosophischer Sicht. Dabei unterscheiden die Autoren manchmal zwischen reiner und angewandter Logik und zählen die von ihnen untersuchten Formen des reduktiven Schließens und die Definitionslehre zur angewandten Logik.

Nun besteht zwar ein Zusammenhang dieser beiden Gebiete mit der formalen Logik, die entscheidenden, die wesentlichen Grundlagen übernehmen sie jedoch von der Philosophie. Ihr eigentlicher Platz ist in der allgemeinen Methodologie der Wissenschaften.

Wir beschäftigen uns hier mit der marxistisch-leninistischen allgemeinen Methodologie der Wissenschaften und verstehen sie als die auf der Grundlage des dialektischen und historischen Materialismus und seiner Erkenntnistheorie betriebene philosophische Wissenschaft von den Methoden, die

prinzipiell von bzw. in jeder Wissenschaft angewendet werden können.[1]

Im Mittelpunkt ihres Interesses steht, obwohl sie hier noch nicht ausdrücklich genannt ist, die von Marx geschaffene und von Lenin weiterentwickelte dialektisch-materialistische Methode als die grundlegende, allgemeine und auf die übrigen Methoden übergreifende Methode der Erkenntnis und revolutionären Umgestaltung der Natur, der Gesellschaft und des Bewußtseins.

Eine Methode ist ein System methodischer Regeln, das Klassen möglicher Operationssysteme bestimmt, die von gewissen Ausgangsbedingungen zu einem bestimmten Ziel führen[2].

Diese Definition soll am Beispiel des in 3.2.6. dargestellten prädikatenlogischen Entscheidungsverfahrens illustriert werden. Das Entscheidungsverfahren dient dazu, von prädikatenlogischen Ausdrücken festzustellen, ob sie allgemeingültig sind oder nicht. Damit ist das Ziel, das man mit der Anwendung dieses Verfahrens verfolgt, bereits genannt. Zu den Ausgangsbedingungen, die erfüllt sein müssen, damit man es anwenden kann, gehört u. a., daß der zu entscheidende Ausdruck der Prädikatenlogik der ersten Stufe angehört oder sich zumindest auf einen Ausdruck dieser Art reduzieren läßt. Wenn man sein Ziel erreichen will, muß man eine Folge von Operationen ausführen, und zwar Prüf- und Umformungsoperationen. Eine solche Folge von Operationen ist ein – wenngleich einfaches – System von Operationen im Sinne der Definition. Die einzelnen Operationen werden durch die methodischen Regeln festgelegt, die Systeme von Operationen durch Systeme von Regeln, die man auch als Pläne oder Programme bezeichnen kann. Das Entscheidungsverfahren enthält drei solcher Pläne; nach welchem von ihnen vorzugehen ist, hängt davon ab, ob nach den ersten Umformungen nur negierte oder nur unnegierte oder sowohl negierte als auch unnegierte Existentialaussagen auftreten. Diese Pläne bestimmen aber nicht das Vorgehen in einem individuellen Fall mit all seinen Besonderheiten, sondern sie bestimmen in jedem Falle ihrer Anwendung immer wieder ein Operationssystem, wo je nach der Beschaffenheit des Ausgangsausdrucks in einzelnen Schritten bzw. Operationen Unterschiede auf-

[1] Vgl. Philosophisches Wörterbuch, Stichwort „Methodologie".
[2] Ebenda, Stichwort „Methode".

treten können. Das Entscheidungsverfahren bestimmt also Klassen von Operationssystemen. Es handelt sich dabei um mögliche Operationssysteme, da im Falle ihrer Ausführung das Ziel erreicht wird, es aber auch auf anderem Wege – z. B. durch individuellen Beweis – erreicht werden kann. Wie das Wort „bestimmt" in der Definition gemeint ist, wird durch den Gebrauch von Aufforderungssätzen bei der Formulierung der Prüf- und Umformungsvorschriften, der einzelnen Regeln deutlich. Die Operationen werden nicht *be*schrieben, sondern *vor*geschrieben. Es wird nicht beschrieben, was das Ergebnis ausgeführter Operationen ist oder daß gewisse Operationen ausgeführt werden, sondern vorgeschrieben, welche Operationen unter welchen Bedingungen mit welchem Ziel auszuführen sind.

Wenn man das Entscheidungsverfahren aus 3.2.6. als Beispiel für eine Methode nimmt, dann muß man hinzufügen, daß es anderen Methoden gegenüber auch Besonderheiten aufweist, ja nicht einmal ein typisches Beispiel einer Methode ist. Im Unterschied zu anderen Methoden ist es auf extensionale Zusammenhänge gerichtet und damit wesentlich einfacher als Methoden, die intensionale Zusammenhänge erfassen. Durch die einzelnen Vorschriften des Entscheidungsverfahrens sind die auszuführenden Operationen in allen Einzelheiten festgelegt, während die Anwendung anderer Methoden eventuell umfangreiche und komplizierte Untersuchungen über die Art und Weise, in der die Operationen auszuführen sind, voraussetzt.

Hinzu kommt, daß man seine Ziele nur selten durch die Anwendung einer einzigen Methode erreicht. Wenn man neue wissenschaftliche Erkenntnisse gewinnen will, braucht man im allgemeinen ein ganzes System von Methoden oder – wie man ein solches System von Methoden auch nennen kann – eine Methodik, bestehend aus Methoden der Analyse und Synthese, der Verallgemeinerung und der Abstraktion, der Definition, des deduktiven und des reduktiven Schließens usw. Die Bestandteile, die Struktur, der Einsatz und die Bewertung einer Methodik werden durch verschiedene Faktoren bestimmt. Als besonders wichtig sind zu nennen: der Gegenstand der Untersuchung oder Einwirkung, der verfolgte Zweck, der Entwicklungsstand der jeweiligen Wissenschaft und schließlich, aber nicht zuletzt die Weltanschauung, auf deren Grundlage die Arbeit durchgeführt wird.

Die Weltanschauung beeinflußt bereits die Auswahl der Methoden, die überhaupt anzuwenden sind. Lehnt man z. B. die Definition durch Bestimmung des Wesens ab, so deshalb, weil man von der positivistischen und damit letztlich idealistischen Auffassung ausgeht, daß die Erscheinungen nicht Erscheinungen des Wesens der Dinge sind, sondern daß es kein solches Wesen gibt oder daß es unerkennbar ist. Für die Definitionslehre im Rahmen der marxistisch-leninistischen Methodologie hingegen ist die Definition durch Bestimmung des Wesens eine der wichtigsten. Das schließt nicht aus, daß in Abhängigkeit vom Stand der Erkenntnis oder vom verfolgten Ziel im konkreten Fall eine andere Form der Definition benutzt werden muß oder kann.

Die Weltanschauung des Marxismus-Leninismus wird im Hinblick auf methodologische Fragen vor allem durch die dialektisch-materialistische Methode vermittelt. Sie ist die Umsetzung des Erkenntnisreichtums der marxistisch-leninistischen Philosophie in eine Anleitung zum Handeln. Sie ist nicht nur in den Wissenschaften und auf die Wissenschaften im engeren Sinne anwendbar; in erster Linie ist sie Anleitung zur revolutionären Umgestaltung der Gesellschaft mit dem Ziel der Errichtung des Sozialismus und des Kommunismus. Damit hilft sie zugleich, den Platz und die Aufgaben der Wissenschaften im entwickelten gesellschaftlichen System des Sozialismus in der DDR zu bestimmen, und reicht damit weit über ihre Anwendbarkeit auf vergleichsweise spezielle Probleme innerhalb einzelner Wissenschaften hinaus.

Die dialektisch-materialistische Methode bestimmt nicht nur die Auswahl der anzuwendenden Methoden, sondern auch ihren Einsatz, die Bewertung der gewonnenen Resultate, das Gewicht der einzelnen Methoden innerhalb einer Methodik usw.

Die marxistisch-leninistische Philosophie als Theorie der allgemeinen Bewegungs- und Strukturgesetze der Natur, der Gesellschaft und des Denkens als theoretische Grundlage der dialektisch-materialistischen Methode gewährleistet deren universelle Anwendbarkeit. Aber die dialektisch-materialistische Methode will und kann die anderen wissenschaftlichen Methoden ebensowenig ersetzen, wie die marxistisch-leninistische Philosophie die übrigen Wissenschaften ersetzen kann und will. Die dialektisch-materialistische Methode bildet vielmehr zusammen mit allen anderen wissenschaftlichen

Methoden ein einheitliches System. Die Anwendung der dialektisch-materialistischen Methode kommt nicht selten in der Art und Weise des Einsatzes einer speziellen Methode zum Ausdruck. So ist es zu verstehen, wenn man sagt, daß die dialektisch-materialistische Methode zu den übrigen Methoden im Verhältnis des Allgemeinen zum Besonderen bzw. Einzelnen steht. Läßt man sich beim Einsatz anderer Methoden nicht von ihr leiten, verfällt man einer metaphysischen, positivistischen Denkweise, d. h., man betrachtet Einzelheiten, ohne sie in ihrem Zusammenhang mit anderem zu sehen, man sieht sein Untersuchungsobjekt nicht als ein historisch gewordenes Ding, das sich entwickelt, das bei seiner Entwicklung objektiven Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Ein krasses Beispiel metaphysischer Denkweise haben wir in 1.4.1. bereits angeführt: Wittgensteins Auffassung, die einzige Aufgabe der Philosophie sei die Kritik der Sprache.

Gar zu oft noch wird in der wissenschaftlichen Arbeit zuwenig oder gar nicht über methodologische Probleme nachgedacht. In ihrer Ausbildung werden den Wissenschaftlern nicht nur Kenntnisse aus ihrem Fachgebiet vermittelt, sondern auch Denk- und Arbeitsgewohnheiten, die sich innerhalb ihres Fachgebiets herausgebildet und bewährt haben. Zu einem Nachdenken über die gewohnte Denk- und Arbeitsweise kommt es oft erst dann, wenn die mit ihr erzielten Resultate offensichtlich fehlerhaft sind oder wenn sie vor neuen Aufgaben versagt. Die Aufgaben, die der Wissenschaft der DDR bei der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft gestellt sind, können mit althergebrachten Denkgewohnheiten nicht bewältigt werden. Allein durch ihre Komplexität erzwingen viele neue Aufgaben die interdisziplinäre Gemeinschaftsarbeit. Diese aber setzt auch die Verständigung über Methoden der wissenschaftlichen Arbeit und die Zusammenarbeit auf methodologischem Gebiet voraus. Marxistisch-leninistische Philosophie, Natur- und Gesellschaftswissenschaften durchdringen einander immer stärker, ihre wirkliche Einheit ist aber nur auf der Grundlage der marxistisch-leninistischen Weltanschauung und der dialektisch-materialistischen Methode realisierbar.

Nicht eine einmalige Entscheidung für die dialektisch-materialistische Methode feit vor metaphysischer Denkweise, sondern ihre bewußte, kontinuierliche Anwendung. Das setzt Klarheit über das Wesen der dialektisch-materialisti-

schen Methode, über ihre Funktion und über ihr Verhältnis zu den anderen Methoden voraus. Es verlangt auch, Methoden, wie sie formale Logik, Mathematik und Kybernetik entwickelt haben, überall dort, wo sie notwendig und nützlich sind, einzusetzen und die Ergebnisse ihrer Anwendung in das Gesamtsystem des Wissens an dem ihnen gebührenden Platz einzuordnen. Dabei ist die dialektisch-materialistische Methode unentbehrlich.

In den voraufgegangenen Kapiteln war es immer wieder notwendig, über formallogische Überlegungen hinauszugehen. Das betrifft in erster Linie die Stellen, wo es um die Verbindung der formalen Logik mit anderen Bereichen der Wirklichkeit ging; sei es die Übersetzung von Aussagen aus der natürlichen Sprache in die symbolisierte Sprache der modernen Logik, sei es der Beweis oder die Widerlegung von Behauptungen, der Zusammenhang der gedanklichen Strukturen mit objektiv-realen oder mit sprachlichen Strukturen. Es ist keineswegs zufällig, daß an diesen Stellen philosophische Begriffsbildungen herangezogen werden mußten.

Der Erkenntnisprozeß geht vom sinnlich Konkreten aus und führt über das Abstrakte zum gedanklich Konkreten. Mit diesen Worten wird kurz und abstrakt ein Prozeß erfaßt, den man in seinen wesentlichen Zügen im Anschluß an Friedrich Engels[3] etwa folgendermaßen skizzieren kann: Am Beginn der Erkenntnis steht ein Gesamtbild des Erkenntnisobjekts. Das Objekt wird in seiner Bewegung und in seinen Zusammenhängen wahrgenommen, aber die Einzelheiten treten zurück. Solange diese Einzelheiten nicht erfaßt und nicht erklärt sind, kann auch das Erkenntnisobjekt als Ganzes nicht voll erfaßt werden. Es ist deshalb notwendig, die Einzelheiten gesondert zu untersuchen, sie aus ihren Zusammenhängen herauszunehmen.

Auf dieser Stufe der Erkenntnis kann die formale Logik als ganz wichtiges Mittel eingesetzt werden. Man abstrahiert von Übergängen zwischen Klassen von Objekten und von ihrer Entwicklung, man nimmt möglichst scharfe Einteilungen vor, die den Regeln der Klassifikation genügen. Die formale Logik liefert auf dieser Stufe Erkenntnisse, Mittel

[3] Vgl. F. Engels, Die Entwicklung des Sozialismus von der Utopie zur Wissenschaft, in: K. Marx/F. Engels, Werke, Bd. 19, Berlin 1962, S. 202–205.

und Methoden, die noch viel zuwenig genutzt werden. Hier können dem Forscher gedankliche Routinearbeiten durch Maschinen abgenommen, können Denkprozesse formalisiert und Automaten übertragen werden. – Diese Stufe, die Stufe des Abstrakten, war in der Entwicklungsgeschichte der Erkenntnis historisch notwendig, und sie ist es – im Sinne der Einheit des Historischen und des Logischen – im allgemeinen auch in der systematischen Forschungsarbeit; aber man darf bei ihr nicht stehenbleiben. Von der Erkenntnis, welche Eigenschaften das Objekt hat, muß man weitergehen zur Erkenntnis, wie diese Eigenschaften miteinander zusammenhängen, welche sich gegenseitig bedingen, sich ausschließen. Der Übergang von extensionalen zu intensionalen Zusammenhängen ist erforderlich, ein Übergang, der mit den Mitteln der formalen, also extensionalen Logik nicht vollziehbar ist. Das Ziel besteht darin, ein Bild des Erkenntnisobjekts zu gewinnen, das gestattet, seine Einzelheiten in ihrem Zusammenhang und Zusammenwirken zu erfassen, das Objekt selbst in seinem Zusammenhang und Zusammenwirken mit anderen Objekten zu sehen, also ein Bild, das den anfänglichen, grundsätzlich richtigen Gesamtüberblick mit der abstrakten Abbildung seiner Einzelheiten zu einem lebendigen Bild des Erkenntnisobjekts in seiner Entwicklung und seiner dialektischen Einheit und Widersprüchlichkeit vereinigt.

4.1. Über die Definition

Die Einteilung der Definitionen erfolgt nach semiotischen Gesichtspunkten. Bei der Darstellung der Definitionen sowie der Begriffsgliederung und der Klassifikation werden Erkenntnisse und Begriffsbildungen der Prädikatenlogik ausgenutzt.

4.1.1. Zur Bedeutung von Definitionen

In Diskussionen – auch in wissenschaftlichen – kommt es nicht selten vor, daß die Partner eine lange Auseinandersetzung geführt haben und, da sie zu keinem gemeinsamen Standpunkt gekommen sind, schließlich feststellen, sie hätten „aneinander vorbeigeredet". Häufig ist Ursache solcher Mißverständnisse, daß sie dasselbe Wort in verschiedenen Be-

deutungen gebraucht haben. – Es empfiehlt sich also in solchen Fällen, von vornherein zu sagen, was man mit einem bestimmten Wort meint, d. h., den durch dieses Wort ausgedrückten Begriff zu *definieren*.

„Definition" heißt soviel wie „Abgrenzung". Mit dieser Übersetzung eines aus dem Lateinischen stammenden Fremdwortes haben wir eine Worterklärung gegeben und ein wichtiges Merkmal von Definitionen angegeben. Eine Definition soll jedoch nach Möglichkeit nicht nur Abgrenzung, Unterscheidung sein, d. h. nicht nur sagen, was etwas nicht ist. Sie soll vielmehr Identifizierung sein, d. h. sagen, was etwas ist. Eine ideale Definition unterscheidet, indem sie identifiziert, und identifiziert, indem sie unterscheidet.

Für die Eindeutigkeit der Termini insbesondere einer Wissenschaftssprache sind Definitionen unerläßlich. Fehlende oder mangelhafte Definitionen können sogar zu einem ökonomischen Problem werden. Nachweislich wird ein nicht geringer Prozentsatz an Forschungsmitteln vergeudet, weil die Aufgabenstellung, die Thematik usw. nicht genau genug definiert sind.

Die Definition der Grundbegriffe einer Theorie bestimmt in entscheidendem Maße den Inhalt und den Gegenstand dieser Theorie. In dieser Weise wirkt sich z. B. die Definition des Begriffes „extensionale Beziehungen" auf den Aufbau der formalen Logik aus.

Das heißt nun nicht, daß der Erfolg wissenschaftlicher Arbeit in erster Linie von Definitionen abhängt und daß ohne sie überhaupt keine Wissenschaft betrieben werden kann. Eine Definition setzt immer gewisse Erkenntnisse voraus. So kommt es in der Wissenschaft nicht selten vor, daß – und zwar erfolgreich – mit Begriffen gearbeitet wird, die nicht oder wenigstens nicht präzise definiert sind. Allerdings kann das immer nur ein vorübergehender Zustand sein.

Meist wird man, wenn noch keine Definition möglich ist, versuchen, die verwendeten Termini und Begriffe durch definitionsähnliche Bestimmungen einigermaßen eindeutig zu erfassen.

Kann man im wissenschaftlichen Alltag Definitionen bis zu einem gewissen Grade noch umgehen, so ist man bei der Ausarbeitung von Fachwörterbüchern gezwungen, vorhandene Definitionen zusammenzutragen und neue Definitionen aufzustellen. Es gibt heute schon keinen Wissenschaftler mehr,

der sein ganzes Fachgebiet wirklich beherrscht. Ein Wissenschaftler kann aber – das ergibt sich aus einem elementaren Grundsatz der Dialektik – letztlich auch auf seinem Spezialgebiet nur dann noch bedeutende Leistungen vollbringen, wenn er es im Zusammenhang mit anderen Wissenschaften und im Rahmen der bestehenden gesellschaftlichen Verhältnisse sieht. Die Aufgaben, die die sozialistische Gesellschaft der Wissenschaft stellt erfordern interdisziplinäre Gemeinschaftsarbeit und damit vom einzelnen Wissenschaftler nicht nur die Kenntnis seines eigenen Fachs, sondern zumindest auch einen Einblick in andere Wissenschaften. Eine gebildete sozialistische Persönlichkeit benötigt neben ihren unmittelbaren Fachkenntnissen Kenntnisse auf politischem, ökonomischem, kulturellem und technischem Gebiet. Es braucht also heute praktisch jeder Nachschlagewerke, die ihn kurz – d. h. auch zeitsparend – und zuverlässig über die verschiedensten Gebiete des gesellschaftlichen Lebens informieren. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, immer neue Wissensspeicher in Gestalt von Fachwörterbüchern, Enzyklopädien, Lexika usw. auszuarbeiten.

Die Arbeit am Fachwörterbuch einer Wissenschaft ist auch für die Entwicklung dieser Wissenschaft selbst von großer Bedeutung. Bei der Definition der wichtigsten Fachausdrücke, Begriffe und Untersuchungsgegenstände entsteht eine Art Rechenschaftsbericht über den erreichten Entwicklungsstand, man wird auf bestehende Mängel aufmerksam und unterliegt zugleich dem Zwang, diese Mängel nach besten Kräften zu beheben.

4.1.2. Definitionsähnliche Bestimmungen

Die sogenannten definitionsähnlichen Bestimmungen sind als Vorstufe zu exakten Definitionen anzusehen. Wenn der Grad der Erkenntnis für eine Definition noch nicht ausreicht, muß man sich – wie gesagt – mit definitionsähnlichen Bestimmungen begnügen. Ihre Verwendung kann aber auch aus anderen Gründen angebracht sein. Bei einer Diskussion unter Vertretern ein und dessselben Fachgebiets kann eine solche Bestimmung der verwendeten Termini ausreichen, während eine Definition u. U. einen viel zu großen Aufwand erfordern würde. Schließlich können auch pädagogische Gründe maßgebend sein. Bei der Darstellung eines Wissenschaftsgebiets,

z. B. im Schulunterricht oder an der Universität, wird man im allgemeinen eine exakte Definition dieses Gebiets erst dann geben, wenn alle zu ihrem Verständnis notwendigen Begriffe bereits eingeführt sind. Am Anfang wird man, anknüpfend an die vorhandenen Vorkenntnisse, eine definitionsähnliche Bestimmung des Gebiets geben.

Zu den elementaren definitionsähnlichen Bestimmungen gehören die sogenannten *ostensiven Definitionen*, die man auch untergliedern kann in *Benennung* und *Hinweis*. Die erste von ihnen besteht darin, daß man auf eine entsprechende Frage den Namen eines Individuums usw. angibt, die zweite darin, daß man auf das Individuum usw. zeigt, das man mit einem Wort meint. Der Erfolg dieser Bestimmungen hängt natürlich zum großen Teil davon ab, welche Kenntnisse derjenige, für den Benennung oder Hinweis bestimmt sind, auf dem betreffenden Gebiet bereits besitzt. Die beiden genannten Bestimmungen setzen überdies voraus, daß das gemeinte Objekt sinnlich wahrnehmbar ist. Sie sind also für die Bestimmung abstrakter Begriffe völlig ungeeignet.

Die Angabe von *Beispielen* kann dagegen schon dazu beitragen, abstrakte Begriffe wenigstens bis zu einem gewissen Grade zu bestimmen. Die Angabe von mehreren Beispielen zu einem Terminus oder Begriff ergibt eine *Aufzählung*. Sie bestimmt einen Terminus oder Begriff durch die Angabe einer Anzahl von Individuen, die darunter fallen. Die Aufzählung ist also eine Vorstufe zur Bestimmung eines Begriffs durch die vollständige Angabe aller Individuen, die unter diesen Begriff fallen.

Eine *Beschreibung* gibt eine Reihe äußerer Merkmale des gemeinten Objektes an. Sie ermöglicht es, daß man sich eine Vorstellung von dem Objekt machen kann. – Die *Charakteristik* oder *Kennzeichnung* ist ein Spezialfall der Beschreibung. Sie hebt charakteristische, kennzeichnende Merkmale hervor, die teils schon mit dem Wesen des Objekts zusammenhängen. Sie setzt also bereits einen gewissen Abstraktionsprozeß voraus.

Durch den *Vergleich* wird ein Objekt – oder auch ein Begriff – bestimmt, indem man es auf ein anderes, bereits bekanntes zurückführt, dem es ähnlich ist. Man spricht hier auch von einer *Definition per analogiam*, obwohl der Vergleich keine Definition im strengen Sinne ist.

Die *Unterscheidung* oder *Differenzierung* bestimmt dagegen ein Objekt – oder auch einen Begriff – durch seine Unter-

schiede zu anderen. Sie setzt natürlich voraus, daß die betreffenden Objekte überhaupt sinnvoll vergleichbar sind, d. h., daß sie nicht nur Unterschiede, sondern auch Ähnlichkeiten aufweisen.

Ein für den Bereich der Wissenschaft sehr brauchbares Verfahren ist die *Bestimmung eines Terminus durch einen Kontext*. Sie besteht darin, daß man angibt, man verwende den zu bestimmenden Terminus in derjenigen Bedeutung, die er in dem und dem sprachlichen Kontext immer hat. Beispielsweise sagt man, man verwende den Terminus „Klasse" in der Bedeutung, die er in solchen Zusammensetzungen wie „Arbeiterklasse" hat. Damit ist eindeutig bestimmt, daß mit „Klasse" jeweils Gesellschaftsklassen gemeint sind, ohne daß diese definiert worden wären. Es können dann keine Verwechslungen mehr mit der Bedeutung des Wortes „Klasse", die es in der formalen Logik hat, vorkommen. – Durch diese Bestimmung ist es möglich, mit geringem Aufwand unter mehreren Bedeutungen eines Terminus genau eine auszusondern, ohne sie jedoch auch nur annähernd zu definieren. Über die Bedeutung selbst und das Designat dieses Terminus ist damit für jemanden, der sie nicht kennt, gar nichts gesagt. Voraussetzung für den Erfolg dieser Operation ist also, daß der Hörer oder Leser mindestens die gemeinte Bedeutung, das gemeinte Designat des Terminus kennt.

4.1.3. Form und Struktur von Definitionen

Definitionen im strengen Sinne treten meist in Form von Aussagesätzen auf. Es gibt jedoch auch Definitionen – z. B. die Festsetzungsdefinitionen –, die keine Aussagen sind, sondern Festsetzungen, Festlegungen, und die demzufolge in der Form von Aufforderungssätzen auftreten.

Definitionen können in einer natürlichen Sprache oder in einer Fachsprache, darunter auch in einer symbolisierten Sprache gegeben werden.

Definitionen haben oft den Charakter einer Gleichung. Auf die linke Seite schreibt man dann den Ausdruck, der definiert werden soll – das *Definiendum*. Auf der rechten Seite steht dann der Ausdruck, durch den das Definiendum definiert wird – das *Definiens*. In symbolisierten Sprachen werden beide Ausdrücke meist durch ein Gleichheitszeichen mit einem tief-

gestellten „Def“ verbunden. Eine Definition dieser Art hat demzufolge die Gestalt:

Definiendum $=_{\text{Def}}$ *Definiens.*

In natürlichen Sprachen und nicht symbolisierten Fachsprachen wird an Stelle des Definitionszeichens oft das Wort „ist“ gebraucht. Aus der Vieldeutigkeit dieses Wortes ergibt sich, daß es häufig schwierig zu erkennen ist, ob jeweils eine Definition vorliegt oder nicht – wenn das nicht aus dem Zusammenhang des Textes deutlich hervorgeht.

Das Definiens einer Definition ist meist zusammengesetzt. So wird man in der Regel einen Begriff durch zwei oder mehrere miteinander verbundene Begriffe definieren; natürlich darf unter ihnen nicht der erst zu definierende Begriff auftreten.

Nach einer Regel der traditionellen Logik soll man einen Begriff durch seinen Gattungsbegriff und den artbildenden Unterschied bestimmen. Man kann nach dieser Regel den subjektiven Idealismus folgendermaßen definieren: „Subjektiver Idealismus ist eine philosophische Richtung, die behauptet, das menschliche Bewußtsein sei primär und die Materie existiere nur im Bewußtsein.“ – „Philosophische Richtung“ ist der zugehörige Gattungsbegriff, „die behauptet, das menschliche Bewußtsein sei primär . . .“ usw. der artbildende Unterschied. Er grenzt den zu definierenden Begriff von allen anderen ab, die ihm koordiniert sind, die Artbegriffe desselben Gattungsbegriffes sind. Im Beispiel wird der subjektive Idealismus durch den artbildenden Unterschied von allen anderen philosophischen Richtungen, nämlich vom Materialismus wie vom objektiven Idealismus, abgegrenzt. Diese Regel ist allerdings nicht immer anwendbar. Die allgemeinsten philosophischen Kategorien kann man z. B. nicht so definieren, da es ja zu ihnen keinen Gattungsbegriff gibt.

Mit dieser klassischen Definitionsregel verbinden sich noch andere Schwierigkeiten. Es gibt viele Fälle, in denen gar nicht festzulegen ist, welcher Begriff von beiden der Gattungsbegriff und welcher der artbildende Unterschied ist, denn die Klasse der Individuen, die dem zu definierenden Begriff entspricht, ist ja in beiden Klassen, die den definierenden Begriffen entsprechen, gleichermaßen enthalten. So kann man z. B. die beiden folgenden Definitionen gleichberechtigt nebeneinanderstellen: „Ein Quadrat ist eine rechteckige Figur mit gleichen Seiten“ und „Ein Quadrat ist eine gleichseitige Figur mit

rechtwinkelig aufeinandertreffenden Seiten" –

$$Q(x) =_{\mathrm{Def}} R(x) \wedge G(x) \quad \text{und} \quad Q(x) =_{\mathrm{Def}} G(x) \wedge R(x).$$

Damit ist nun nicht gesagt, daß es in allen Fällen auch inhaltlich gleichgültig ist, welcher Begriff der Gattungsbegriff und welcher der artbildende Unterschied ist. Denn es ist im Rahmen unserer Kulturpolitik sehr wohl von Bedeutung, daß ein schreibender Arbeiter nicht etwa arbeitender Schriftsteller ist, sondern ein Arbeiter, der sich schriftstellerisch betätigt. Bei der Aufstellung von Schlußschemata usw., d. h. innerhalb der formalen Logik spielen diese inhaltlichen Gesichtspunkte jedoch keine Rolle, und deshalb kann man hier auch unbedenklich solche durch die Konjunktion miteinander verknüpften Begriffe vertauschen, ja, man wird es mitunter sogar tun müssen, um Schlüsse ziehen zu können.

Obgleich wohl die meisten gebräuchlichen Definitionen nach der klassischen Regel aufgebaut sind, ist es in vielen Fällen unmöglich oder auch unzweckmäßig, dieser Regel entsprechend zu definieren. Ein Beispiel für eine Definition mit einer anderen logischen Struktur ist: „Ein Angehöriger der Humboldt-Universität ist wissenschaftlicher Mitarbeiter oder Arbeiter oder Angestellter oder Student der Humboldt-Universität."

$$A(x) =_{\mathrm{Def}} B(x) \vee C(x) \vee D(x) \vee E(x).$$

Der Begriff „Angehöriger der Humboldt-Universität" trifft also schon auf Individuen zu, die der einen *oder* anderen Klasse angehören; er meint Individuen, die das eine *oder* andere Merkmal haben. Bei der Definition durch Gattungsbegriff und artbildenden Unterschied trifft der definierte Begriff auf die Individuen zu, die der einen *und* der anderen Klasse angehören, die das eine *und* das andere Merkmal haben.

Das folgende Beispiel zeigt, daß im Definiens Konjunktion und Alternative auch gemischt auftreten können. Im Militärstrafgesetz der Deutschen Demokratischen Republik (vom 24. Januar 1962) findet sich die Definition: „Militärpersonen im Sinne dieses Gesetzes sind Soldaten, Unteroffiziere, Offiziere und Generale, die aktiven Wehrdienst oder Wehrersatzdienst leisten oder zum Reservistenwehrdienst einberufen sind."[4] Will man diese Definition symbolisieren, so muß man

[4] Die Wehrgesetzgebung der Deutschen Demokratischen Republik, Berlin (o. J.), S. 75.

dabei beachten, daß das „und" nicht schematisch durch die Konjunktion übersetzt werden darf. Es gibt ja niemanden, der Soldat *und* Unteroffizier *und* Offizier *und* General ist. Hier muß folglich die Alternative benützt werden.

$$M(x) =_{\mathrm{Def}} [S(x) \vee U(x) \vee O(x) \vee G(x)] \wedge [W(x) \vee E(x) \vee R(x)].$$

Militärperson ist also jeder, auf den eines der Prädikate der ersten Gruppe *und* eines der Prädikate der zweiten Gruppe zutrifft.

Es wurde schon gesagt, daß man u. a. Kategorien nicht durch Gattungsbegriff und artbildenden Unterschied definieren kann. Eine Definition der Kategorie „Materie" kann man mit Hilfe der Negation aufstellen „Materie ist, was außerhalb des menschlichen Bewußtseins und unabhängig von ihm existiert", wofür man sagen könnte „Materie ist, was nicht Bewußtsein ist".

$$M(x) =_{\mathrm{Def}} \sim B(x).$$

Gerade dieses Definitionsschema darf aber nicht bedenkenlos angewandt werden. Vor allem muß man darauf achten, daß die Klasse der Individuen mit dem Merkmal $M(x)$ nicht kleiner ist als die Klasse der Individuen, die das Merkmal $B(x)$ nicht haben. Definitionen wie „Kalt ist, was nicht warm ist" sind sinnlos; denn die Klasse der nicht warmen Individuen ist viel zu unbestimmt, als daß man daraus eine Definition herleiten könnte.

Zusammenfassend können wir sagen, daß im Definiens einer Definition an aussagenlogischen Konstanten die Negation, die Konjunktion und die Alternative auftreten können und daß sie zum Aufbau des Definiens auch genügen, weil man die übrigen Konstanten auf sie reduzieren kann. Hiervon werden natürlich die beiden prädikatenlogischen Konstanten – der Alloperator und der Existentialoperator –, die ebenfalls auftreten können, nicht berührt.

Die bisher betrachteten Definitionen haben einen sehr einfachen Aufbau. In ihnen besteht das Definiendum nur aus dem zu definierenden Ausdruck – „ein Quadrat", „Militärpersonen" usw. –; das ist das Merkmal für eine *direkte* oder *explizite Definition*. Vielfach ist eine explizite Definition nicht möglich, oder sie würde nur zu einer unnötig komplizierten Ausdrucksweise führen. Man baut dann eine *Kontextdefinition* oder *implizite Definition* auf. Ihr Definiendum enthält den zu

definierenden Ausdruck in einem Kontext anderer Ausdrücke, die schon bekannt, definiert sein müssen. Unter der Voraussetzung, daß bereits definiert wurde, was ein aussagenlogischer Ausdruck ist, kann „erfüllbar" durch folgende implizite Definition bestimmt werden: „Ein aussagenlogischer Ausdruck ist *erfüllbar* genau dann, wenn er bei mindestens einer Belegung der in ihm vorkommenden Variablen den Wert wahr annimmt."

Die bisher betrachteten Definitionen sind noch in einem anderen Sinne sehr einfach aufgebaut. Sie sind alle sprachlich schon durch einen einzigen Satz gegeben, mit dessen Hilfe der zu definierende Ausdruck vollständig bestimmt wird. Von einer *Definition durch Axiome* spricht man, wenn der zu definierende Ausdruck durch eine Gesamtheit von Sätzen bestimmt wird, von denen jeder ihn nur teilweise bestimmt. Voraussetzung ist auch hier wieder, daß außer dem zu definierenden kein weiterer unbekannter Ausdruck auftritt. – Was eine Aussage ist, läßt sich z. B. durch folgende Definition durch Axiome bestimmen:

(1) Eine Aussage ist ein gedankliches Gebilde.
(2) Eine Aussage widerspiegelt einen Sachverhalt.
(3) Eine Aussage ist wahr oder falsch.
(4) Eine Aussage existiert im allgemeinen in der Form eines Aussagesatzes.

Diese Form der Definition kommt weitaus öfter vor, als man im ersten Augenblick glauben mag. In vielen Fällen dient sie – z. B. in Lehrbüchern – der Vorbereitung einer dem Aufbau nach einfacheren, aber u. U. schwerer verständlichen Definition. Oft ersetzt sie aber auch eine solche – vor allem, wenn der Stand der Erkenntnis noch nicht dazu ausreicht, das Wesen des zu bestimmenden Objekts zu erfassen.

Die als Beispiel genannte Definition ist relativ einfach aus einer impliziten Definition in eine explizite umzuformen. Man braucht dazu nur „eine Aussage" als Definiendum zu setzen und das Definiens zu bilden, indem man aus den definierenden Bestandteilen der Aussagen (1) bis (4) eine Konjunktion herstellt. Diese Umformung kann etwas komplizierter werden, wenn das Wort, das das zu definierende Objekt bezeichnet, nicht oder nicht immer als grammatisches Subjekt in den Axiomen auftritt. Es sei nur nebenbei vermerkt, daß es auch Definitionen durch Axiome gibt, die grundsätzlich nicht in explizite Definitionen umgeformt werden können.

Wenn man in irgendeinem Gebiet eine Definition neu einführt, dann muß strenggenommen auch exakt nachgewiesen werden, daß mit dieser Definition das gemeinte Objekt tatsächlich definiert ist. Es ist also nachzuweisen, daß – es seien z. B. die Elemente einer bestimmten Klasse zu definieren – die Definition auf alle Elemente dieser Klasse und nur auf Elemente dieser Klasse zutrifft. Dieser Nachweis kann mit außerordentlich komplizierter wissenschaftlicher Arbeit verbunden sein. Wir weisen gerade an dieser Stelle auf die Notwendigkeit eines solchen Nachweises hin, weil man sich bei Definitionen durch Axiome im allgemeinen leichter täuschen läßt als bei anderen Formen der Definition.

Ein Spezialfall der Definition durch Axiome ist die *induktive* oder *rekursive Definition*. Sie bestimmt eine Klasse in der Weise, daß man die Elemente dieser Klasse systematisch aus gewissen Anfangselementen aufbauen kann, wobei die Definition in ihrer Gesamtheit zu berücksichtigen ist. Sie bestimmt eine Klasse ferner in der Weise, daß man von jedem Objekt, indem man es auf gewisse Anfangselemente zurückführt, feststellen kann, ob es ein Element dieser Klasse ist oder nicht.

Eine korrekt aufgebaute induktive Definition enthält folgende Bestandteile:

(1) die ausdrückliche Angabe der Anfangselemente – d. h., die Anfangselemente werden vollständig aufgezählt, oder es wird ein Kriterium angegeben, nach dem man von jedem beliebigen Zeichen usw. entscheiden kann, ob es Anfangselement ist,

(2) die Regeln, nach denen die übrigen Elemente der definierten Klasse gebildet werden können,

(3) eine ausdrückliche Beschränkung, wonach außer den unter (1) angegebenen oder gemäß (2) gebildeten Elementen keine weiteren der definierten Klasse angehören.

Nach diesem Muster ist auch die folgende induktive Definition der aussagenlogischen Ausdrücke aufgebaut:

(1) Die Aussagenvariablen sind Ausdrücke.

(2.1.) Wenn eine Zeichenreihe Z ein Ausdruck ist, so ist auch die Zeichenreihe $\sim Z$ ein Ausdruck.

(2.2.) Wenn die Zeichenreihen Z_1 und Z_2 – sie können, müssen aber nicht verschieden voneinander sein – Ausdrücke sind, so

sind auch $(Z_1 \wedge Z_2)$, $(Z_1 \vee Z_2)$, $(Z_1 \rangle\langle Z_2)$, $(Z_1 \mid Z_2)$, $(Z_1 \rightarrow Z_2)$, $(Z_1 \leftarrow Z_2)$ und $(Z_1 \leftrightarrow Z_2)$ Ausdrücke.

(3) Keine anderen Zeichenreihen sind Ausdrücke.

Diese Definition setzt als bekannt voraus, daß man durch das Aneinanderreihen von Zeichen der Aussagenlogik – nämlich Aussagenvariablen p, q, r, ..., aussagenlogischen Konstanten $\sim$, $\wedge$, $\vee$, ... und Klammern (,) – Zeichenreihen erhält. Dabei gilt auch ein einzelnes Zeichen bereits als Zeichenreihe.

Geben wir zunächst ein Beispiel dafür, wie man, ausgehend von der Definition, aussagenlogische Ausdrücke aufbauen kann. Die Aussagenvariablen p und q sind gemäß (1) Ausdrücke; sie gehören zu den Anfangselementen. Da p ein Ausdruck ist, ist nach (2.1.) auch $\sim p$ ein Ausdruck. Da $\sim p$ und q Ausdrücke sind, ist auch $(\sim p \wedge q)$ nach (2.2.) ein Ausdruck. Damit ist wiederum nach (2.1.) ebenfalls $\sim (\sim p \wedge q)$ ein Ausdruck. Mit ihm ist ferner $(\sim (\sim p \wedge q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge q))$ nach (2.2.) ein Ausdruck.

Umgekehrt kann man von einer beliebigen Zeichenreihe feststellen, ob sie ein Ausdruck ist, d. h., ob sie ein Element der Klasse der Ausdrücke ist. Untersuchen wir z. B., ob die Zeichenreihe $(\sim (p \vee q) \wedge r)$ ein Ausdruck ist, indem wir sie auf die in der Definition angegebenen Anfangselemente zurückführen. Sie ist nach (2.2.) ein Ausdruck, wenn $\sim (p \vee q)$ und r Ausdrücke sind. r ist es nach (1). Der andere Teil, nämlich $\sim (p \vee q)$, ist nach (2.1.) ein Ausdruck, wenn das für $(p \vee q)$ ebenfalls zutrifft. Das ist aber nach (2.2.) der Fall, wenn p und q Ausdrücke sind, was wiederum nach (1) zutrifft. Damit ist auf Grund der Definition exakt nachgewiesen, daß $(\sim (p \vee q) \wedge r)$ ein aussagenlogischer Ausdruck ist.

4.1.4. Arten der Definition

Darüber, wieviel verschiedene Arten der Definition es gibt und wie man sie einteilen soll, gibt es durchaus noch keine einheitliche Auffassung. Wir wollen die Definitionen danach einteilen, *was* definiert wird:

1. *Sachdefinitionen* oder *Realdefinitionen* sind Definitionen von Individuen, Klassen von Individuen, Eigenschaften, Beziehungen usw.

2. *Nominaldefinitionen* hingegen beziehen sich auf sprachliche Zeichen oder gedankliche Abbilder, die in Form dieser Zeichen existieren.

Folgende Beispiele mögen diese Unterscheidung illustrieren:

(1) Das Apogäum ist der erdfernste Punkt der Ellipsenbahn eines sich um die Erde bewegenden Körpers.

(2.1.) Der erdfernste Punkt der Ellipsenbahn eines sich um die Erde bewegenden Körpers heißt „Apogäum".

(2.2.) Das Wort „Apogäum" bedeutet dasselbe wie der Ausdruck „erdfernster Punkt der Ellipsenbahn eines sich um die Erde bewegenden Körpers".

Mit der Definition (1) wird etwas erfaßt, was objektiv real existiert. Definition (2.1.) bezieht sich auf ein sprachliches Zeichen, das Wort „Apogäum", und gibt an, wie es gebraucht wird, was es bezeichnet. Definition (2.2.) ist eine Begriffsdefinition; sie bezieht sich auf die Bedeutung bestimmter sprachlicher Ausdrücke.

Häufig ist der Unterschied zwischen Real- und Nominaldefinitionen nicht so deutlich erkennbar wie in unseren Beispielen. Die strenge Unterscheidung wird u. a. dadurch erschwert, daß wir ja nur mit Hilfe von Begriffen über Gegenstände usw. sprechen und die Begriffe wiederum nur in sprachlicher Form gebrauchen können. Aus Realdefinitionen lassen sich immer Nominaldefinitionen gewinnen, indem man von einer Aussage über das definierte Objekt zu einer Aussage über Begriffe bzw. Bezeichnungen übergeht. Als Beispiel mag der Übergang von der Realdefinition (1) zu den Nominaldefinitionen (2.1) und (2.2) dienen. Bei einem solchen Übergang darf man allerdings keine Definition und selbstverständlich auch keine Aussage nach dem Muster „Das Apogäum ist ein Begriff, der . . ." zulassen, in der ein Teil einer Sachdefinition mit einem Teil einer Nominaldefinition verbunden ist. Diese Warnung ist leider nicht überflüssig, denn es finden sich selbst in wissenschaftlicher Literatur „Aussagen" dieses Typs, die gar keine Aussagen sind, sondern sinnlose Zeichenzusammenstellungen. – Der Übergang von Nominal- zu Realdefinitionen ist nicht immer möglich. So lassen sich Nominaldefinitionen, die den Gebrauch von Zeichen regeln, z. T. nicht sinnvoll in Realdefinitionen umformen – ein Beispiel hierfür ist „Die Zeichenreihe ‚$\sim (x = y)$' darf überall durch die Zeichenreihe ‚$(x \neq y)$' ersetzt werden".

4.1.5. Die Realdefinition

Realdefinitionen dienen, wie gesagt, zur Bestimmung von Individuen, Klassen von Individuen, Eigenschaften, Beziehungen usw. Es gibt nun verschiedene Arten von Realdefinitionen, durch die diese Bestimmung auf verschiedene Weise vorgenommen wird.

Eine erste Art der Realdefinition ist die *Definition durch Beschreibung*. Sie ist gewissermaßen eine Zwischenstufe zwischen der definitionsähnlichen Bestimmung durch Beschreibung und der Charakteristik oder Kennzeichnung einerseits und der Definition durch Bestimmung des Wesens andererseits. Im Unterschied zu den ersten gibt sie nicht einfach eine Reihe äußerer oder auch charakteristischer, kennzeichnender Merkmale an, sondern die Angabe der Merkmale des zu definierenden Objekts ist in dem Sinne vollständig, daß das Objekt eindeutig bestimmt ist und von anderen Objekten abgegrenzt wird. Diese Eindeutigkeit ist bei den definitionsähnlichen Bestimmungen noch nicht vorhanden; deshalb gehören sie auch nicht zu den Definitionen im strengen Sinne. Andererseits beruht die Definition durch Beschreibung auf einer niedrigeren Stufe der Erkenntnis als die Definition durch Bestimmung des Wesens. Sie erfaßt nicht das Wesen des zu definierenden Objekts, sondern seine Erscheinung. Häufig enthält sie zugleich eine Angabe darüber, welchen Namen das zu definierende Objekt trägt; in diesem Falle wird sie manchmal zu den Nominaldefinitionen gezählt.

Die Erscheinung eines Objekts ist durch die Sinne, die Anschauung, die unmittelbare Erfahrung direkt zugänglich. Sie ermöglicht den Zugang zur Erkenntnis des Objekts überhaupt, und sie wird im allgemeinen auch zuerst erfaßt. Aber der Erscheinung eines Objekts haftet das Moment des Zufälligen, Instabilen, Individuellen an. Insofern ist eine Beschränkung auf die Erscheinung immer mit der Gefahr des Irrtums und darauf beruhenden fehlerhaften Verhaltens verbunden. Andererseits ist aber die Erscheinung eben die Erscheinung des Wesens; dadurch ermöglicht sie den Zugang zum Wesen, das nicht unmittelbar zu erfassen ist. Das Wesen eines Objekts ist etwas Notwendiges, relativ Stabiles, Allgemeines. Das Fortschreiten von der Erkenntnis der Erscheinung zur Erkenntnis des Wesens ist deshalb für jede wissenschaftlich betriebene Erkenntnistätigkeit notwendig und möglich.

Eine *Definition durch Bestimmung des Wesens* erfaßt also das Notwendige, relativ Stabile, Allgemeine des Objekts, insbesondere die ihm innewohnenden dialektischen Widersprüche. Ein Beispiel für diese Art der Definition ist die folgende: „Das menschliche Bewußtsein ist (seinem Wesen nach) die am höchsten entwickelte Form der Widerspiegelung der materiellen Welt."

Im engen Zusammenhang mit der Definition durch Bestimmung des Wesens stehen zwei weitere Definitionsarten. Die erste davon ist die *Definition durch Angabe von Schlüsselmerkmalen*. Mit dem Ausdruck „Schlüsselmerkmale" sind solche Merkmale von Objekten gemeint, deren Kenntnis es ermöglicht, auf die übrigen Merkmale dieser Objekte zu schließen. Zu dieser Art von Definitionen gehören Definitionen von Objektbereichen durch Axiomensysteme.

Auch die *Definition durch Idealisierung* muß an dieser Stelle genannt werden. Eine solche Definition liegt z. B. vor, wenn in der Geometrie der Punkt als geometrisches Gebilde ohne Ausdehnung definiert wird. Es gibt strenggenommen keinen einzigen wirklichen Punkt, der dieser Definition entspricht. Nichtsdestoweniger erlauben Definitionen dieser Art den Aufbau einer Theorie, die wesentliche Merkmale der objektiven Wirklichkeit widerspiegelt.

Zu den Realdefinitionen gehört ferner die *Definition durch Angabe der Bestandteile*. Ein Beispiel hierfür ist: „Der Magen-Darm-Kanal besteht aus Magen, Dünndarm, Dickdarm und Mastdarm."

Die bisher genannten Arten der Realdefinition sind darauf gerichtet, zu bestimmen, was das definierte Objekt ist, welche Eigenschaften es hat bzw. in welchen Beziehungen es zu anderen steht. Man kann ein Objekt aber auch bestimmen, indem man die Ursachen seines Entstehens, die Bedingungen, unter denen es notwendigerweise auftritt, oder die Gesetzmäßigkeiten, denen es unterliegt, angibt oder indem man seine Funktion bzw. seinen Zweck bestimmt.

Eine *Definition durch Bestimmung der Ursache* bestimmt ein Objekt, indem sie die Ursache seines Entstehens bzw. Auftretens angibt. Eine solche Definition liegt z. B. vor, wenn man das Bewußtsein als Produkt der Hirntätigkeit definiert.

Zu dieser Art von Definitionen zählt auch die *genetische Definition*. Sie gibt an, wie ein Objekt usw. entsteht oder wie man es herstellen kann. Eine genetische Definition ist zum Bei-

spiel: „Ein Kreis entsteht, wenn man einen Punkt in einer Ebene in gleichbleibendem Abstand um einen festen Punkt bewegt."

Man kennt ferner die *Definition durch Bestimmung der für ein Objekt geltenden Gesetze.* Danach kann man z. B. das menschliche Bewußtsein definieren, indem man die Gesetzmäßigkeiten angibt, denen es unterliegt.

Eine *Definition durch Bestimmung der Funktion* bestimmt ein Objekt durch Angaben über seine Wirkung auf andere Objekte. Das Pigment der Haut kann definiert werden, indem man angibt, daß es den Körper vor schädlichem Einfluß der ultravioletten Strahlen schützt.

Eng verwandt mit dieser Art der Definition, aber von ihr zu unterscheiden, ist die *Definition durch Bestimmung des Zweckes.* Sie definiert ein Objekt dadurch, daß sie angibt, wozu dieses Objekt geschaffen wurde bzw. wozu es dient. Bei dieser wie bei einer Reihe anderer Arten der Realdefinition muß man sorgfältig darauf achten, daß man auch die für jede Definition erforderliche Eindeutigkeit erzielt. Zur Definition des Fernsprechers würde es z. B. nicht genügen, wenn man ihn als ein Gerät bestimmt, mit dessen Hilfe Menschen sich über größere Entfernungen hinweg unterhalten können. Dieselbe Funktion erfüllt ja auch ein Funkgerät.

Schließlich sind noch die operationalen Definitionen zu nennen, die sich auch auf reale Objekte beziehen, ohne jedoch deren Merkmale, Ursachen usw. anzugeben. Eine *operationale Definition* ist

(1) die Definition einer Größe durch die Angabe der Operationen, mit deren Hilfe diese Größe gemessen wird, oder
(2) die Definition eines Merkmals durch die Angabe der Operationen, mit deren Hilfe festgestellt wird, ob das Merkmal vorliegt oder nicht.

So kann man z. B. die Länge operational definieren, indem man angibt, wie sie gemessen wird; so kann man die Säure durch die Angabe definieren, daß sie Lackmuspapier rot färbt. Operationale Definitionen können zwar keine Definition durch Bestimmung des Wesens ersetzen, erfüllen aber Zwecke, zu denen diese gar nicht geeignet sind. Physikalische, chemische, aber auch soziologische Untersuchungen sind unmöglich, wenn man nicht weiß, wie man die gesuchten Größen oder Merkmale feststellen kann, d. h., wenn keine operationalen Definitionen gegeben sind.

Welche dieser verschiedenen möglichen Definitionen man im konkreten Falle aufstellt, hängt von verschiedenen Faktoren ab. Darunter sind zu nennen: die bereits vorhandenen Kenntnisse über das zu definierende Objekt, die Kenntnisse derjenigen, für die die Definition bestimmt ist, und der Zusammenhang, in dem die Definition benötigt wird.

Idealisten haben versucht, die Definitionen auf die Nominaldefinitionen zu reduzieren, aber auch ein Teil von ihnen gibt unterdessen zu, daß der Versuch, die Realdefinitionen zu eliminieren, gescheitert ist. Nach wie vor ist jedoch die Definition durch Bestimmung des Wesens besonders heftigen Angriffen ausgesetzt. Man beruft sich z. B. auf die Tatsache, daß die formale Logik zwar zwischen invarianten und nicht invarianten Merkmalen unterscheiden kann, daß sie aber kein Kriterium für die Unterscheidung zwischen wesentlichen und unwesentlichen Merkmalen besitzt. Hierzu wollen wir nur sagen, daß die Grenzen der formalen Logik nicht zugleich die Grenzen der menschlichen Erkenntnis sind.

Schließlich wird gegen diese Art der Definition eingewandt, daß die „Jagd" nach dem Wesen der Dinge sinnlos und aussichtslos sei, weil Definitionen des Wesens ja nach dem Entwicklungsstand der entsprechenden Wissenschaft häufig korrigiert werden müßten.

Selbstverständlich sind Definitionen – und das gilt für alle Arten von Definitionen – wie alle menschlichen Erkenntnisse veränderlich. Eine Definition muß sich z. B. verändern, wenn sich das definierte Objekt verändert, sonst trifft sie auf das definierte Objekt nicht mehr zu. Sie muß aber auch mit dem Fortgang der menschlichen Erkenntnis Schritt halten und, wenn wesentliche, bisher unbekannte Merkmale der definierten Objekte erkannt werden, diese berücksichtigen. So gehen Definitionen als ein Teil der menschlichen Erkenntnisse der objektiven Realität wie diese insgesamt den Weg von der relativen Wahrheit niederer Ordnung zur relativen Wahrheit immer höherer Ordnung. Schließlich muß man sagen, daß es auch bei gleichem Stand der Erkenntnis nicht *die* Definition eines Objektes gibt. Lenin drückt das folgendermaßen aus: „Definitionen kann es viele geben, denn die Gegenstände haben viele Seiten."[5]

[5] W. I. Lenin, Philosophische Hefte, in: Werke, Bd. 38, Berlin 1964, S. 227.

4.1.6. Die Nominaldefinition

Man darf sich zunächst von dem Wort „Nominaldefinition", „Namensdefinition" nicht täuschen lassen und denken, es handele sich um nichts weiter als um eine Worterklärung, wie wir sie z. B. für das Wort „Definition" gegeben haben. In der traditionellen Logik bestand diese Beschränkung tatsächlich. Die moderne Methodologie jedoch sieht jede Definition, die keine Realdefinition ist, als Nominaldefinition an.

Die Nominaldefinitionen werden unterteilt in:

(1) syntaktische Definitionen,

(2) semantische Definitionen.

Syntaktische Definitionen sind für Disziplinen wie die formale Logik und die Mathematik von großer Bedeutung. Wir werden uns aber nur kurz mit ihnen beschäftigen, weil sie außerhalb dieser Wissenschaften bisher kaum eine Rolle spielen.

Syntaktische Definitionen beziehen sich nur auf sprachliche Zeichen und Verknüpfungen solcher Zeichen; sie besagen nichts über die Bedeutung dieser Zeichen oder ihrer Verknüpfungen und dienen nur der Abkürzung. Syntaktische Definitionen geben an, wie man Zeichen oder deren Verknüpfungen durch andere – meist kürzere – ersetzen kann, ohne deren Bedeutung zu berücksichtigen oder überhaupt zu kennen. Eine syntaktische Definition, deren Zeichen inhaltlich gedeutet werden, verwandelt sich automatisch in eine semantische Definition. Ein Beispiel für eine syntaktische Definition ist das folgende:

$$C\,pq =_{\mathrm{Def}} A\,N\,pq\,.$$

Wir nehmen an, wir kennen außer dem Definitionszeichen keines der vorkommenden Zeichen. Dann wissen wir aus der Definition, daß eine Zeichenreihe der Gestalt „$A\,N\,pq$" an jeder beliebigen Stelle durch eine kürzere Zeichenreihe der Gestalt „$C\,pq$" ersetzt werden kann. Sobald wir aber „$A\,N\,pq$" als „$\sim p \vee q$" deuten, verwandelt sich die Definition in eine semantische, durch die die Implikation „$p \rightarrow q$" definiert wird.

Ein anderes Beispiel für eine syntaktische Definition ist die in 4.1.3. gegebene Definition des aussagenlogischen Ausdrucks; sie bezieht sich ausschließlich auf die Gestalt der Ausdrücke, besagt aber nichts über deren Bedeutung.

Semantische Definitionen bestimmen die Bedeutung eines Zeichens. Sie sind im wesentlichen dasselbe wie die als „Begriffsdefinitionen" bezeichneten. Semantische Definitionen dienen dazu, die bis dahin nicht bekannte Bedeutung des Definiendums durch die bekannte Bedeutung des Definiens zu bestimmen. – Semantische Definitionen haben in korrekter Formulierung die Form: Der Ausdruck „. . ." ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „. . .". Zum Beispiel: „Der Ausdruck ‚Alternative zweier Aussagen p und q' bedeutet dasselbe wie der Ausdruck ‚Aussagenverbindung, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen p, q wahr ist'." – Natürlich wird man an Stelle dieser sprachlich relativ umständlichen Formulierung die einfachere „Eine Alternative ... ist . . ." bevorzugen. Eine korrekte semantische Definition ist jedoch nur durch die erste Formulierung gegeben.

Man unterteilt die semantischen Definitionen in:

(1) analytische Definitionen,

(2) synthetische Definitionen.

Analytische Definitionen ordnen einem sprachlichen Ausdruck eine Bedeutung, die ihm schon zukommt, explizit, ausdrücklich zu. Es geht also darum, die bereits vorhandene und bekannte Bedeutung von Wörtern z. B. in Wörterbüchern oder Lexika festzuhalten. – Zu den analytischen Definitionen gehören auch die Feststellungsdefinitionen.

Eine *Feststellungsdefinition* gibt an, in welcher Bedeutung ein Terminus in einem bestimmten Gebiet – z. B. in einer Wissenschaft – üblicherweise verwandt wird. Sie hat die Form: Unter dem Terminus T versteht man im Gebiet, in der Wissenschaft X das und das. Feststellungsdefinitionen sind dann besonders wichtig, wenn ein und derselbe Terminus in verschiedenen Wissenschaften mit verschiedener Bedeutung gebraucht wird. Ein Beispiel hierfür ist „Unter ‚Negation' versteht man im dialektischen Materialismus . . ." und „Unter ‚Negation' versteht man in der formalen Logik . . .".

Feststellungsdefinitionen muß man beispielsweise aufstellen, wenn man in einer wissenschaftlichen Arbeit darüber berichtet, in welcher Bedeutung ein bestimmter zu untersuchender Terminus von anderen Autoren gebraucht wurde bzw. wird.

Synthetische Definitionen ordnen einem sprachlichen Ausdruck eine neue Bedeutung zu. Dabei kann es sich darum

handeln, einem neu geschaffenen Wort eine Bedeutung zu verleihen oder ein Wort der natürlichen Sprache in einen Fachterminus zu verwandeln. – Zu den synthetischen Definitionen gehören die Festsetzungsdefinitionen.

Eine *Festsetzungsdefinition* gibt an, in welcher Bedeutung ein Terminus in einem bestimmten Gebiet künftig verwandt werden soll. Sie hat die Form: Unter dem Terminus T soll in dem Gebiet X das und das verstanden werden. – Aus dieser Formulierung ist schon zu ersehen, daß die Festsetzungsdefinition keine Aussage ist und damit weder wahr noch falsch. Sie hat die sprachliche Form eines *Aufforderungssatzes.* Sie ist – wie eine syntaktische Definition – eine Regel für den Gebrauch sprachlicher Zeichen. Eine Festsetzungsdefinition muß man aufstellen, wenn man in einer wissenschaftlichen Arbeit von dem in Feststellungsdefinitionen festgehaltenen üblichen Gebrauch eines Ausdrucks abweichen will.

Es gibt in der Wissenschaft und im täglichen Leben eine Reihe von Ausdrücken, die scheinbar Erkenntnisse, in Wirklichkeit aber Festsetzungsdefinitionen sind. Der Ausdruck „100 °C ist die Temperatur, bei der Wasser unter einem Luftdruck von 760 Torr siedet" ist eine spezielle Form der Festsetzungsdefinition, nämlich eine *Zuordnungsdefinition.* Daß es sich hierbei um die Zuordnung des Begriffes „100 °C" zu dem Sachverhalt des Siedens handelt, geht schon daraus hervor, daß es verschiedene Meßskalen für die Temperaturbestimmungen gibt. Wenn eine solche Zuordnung einmal festgelegt ist, dann sind Aussagen wie „Alkohol siedet bei einer Temperatur von 78 °C" usw. Erkenntnisse. Begriffe wie „Meter", „Stunde" usw. sind ebenfalls durch Zuordnungsdefinitionen festgelegt.

Nachdem wir nun die wichtigsten Arten der Definition kennengelernt haben, wollen wir zum Abschluß noch die Definition selbst definieren:

Eine Definition ist

(1) eine Aussage, die feststellt, was ein Objekt ist, wie es entsteht, wozu es dient, oder wie man es feststellt, oder

(2) eine Regel, die festsetzt, wie ein sprachliches Zeichen gebraucht werden soll, oder

(3) eine Aussage bzw. eine Regel, die feststellt bzw. festsetzt, was ein sprachliches Zeichen bedeutet bzw. bedeuten soll.

4.1.7. Anforderungen an Definitionen

Die Verschiedenartigkeit der Definitionen bringt es mit sich, daß es kaum Regeln gibt, die für sämtliche Definitionen gelten, die man also immer beachten muß, welche Art von Definition man auch aufstellt.

Von allen Definitionen verlangt man *Eliminierbarkeit.* Damit ist gemeint, daß in dem Gebiet, für das die Definition gilt, das Definiendum in jedem beliebigen Zusammenhang durch das Definiens ersetzbar sein soll, ohne daß sich dabei eine Sinnänderung ergeben darf.

Weiter fordert man von allen Definitionen *Widerspruchsfreiheit.* Damit ist gemeint, daß sie weder selbst einen logischen Widerspruch enthalten noch in dem Gebiet, in dem sie gelten, einen logischen Widerspruch hervorrufen dürfen.

Wir wollen jetzt einige Regeln betrachten, die man bei der Aufstellung von *Begriffsdefinitionen* beachten soll. Diese Regeln müssen bei der Aufstellung von Realdefinitionen natürlich sinngemäß angewandt werden.

Die wichtigste Regel, die man zu beachten hat, wenn man einen Begriff definiert, ist die *Regel der Umfangsgleichheit.* Die Klasse, die dem Definiens entspricht, muß dieselben Elemente umfassen – nicht mehr und nicht weniger! – wie die Klasse, die dem Definiendum entspricht.

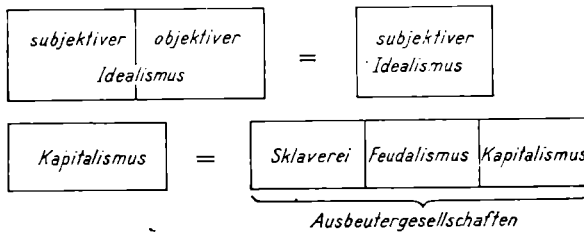
Gegen die Regel der Umfangsgleichheit wird bei der Aufstellung von Definitionen, vor allem, wenn sie in der natürlichen Sprache formuliert werden, nicht selten verstoßen, indem der zu definierende Begriff bzw. das zu definierende Objekt entweder überbestimmt oder unterbestimmt wird.

Man begeht den Fehler der *Begriffsüberbestimmung,* wenn man von dem zu definierenden Begriff mehr Merkmale aussagt, als er tatsächlich besitzt. Wenn man definiert „Idealismus ist eine Philosophie, die behauptet, das Bewußtsein sei primär und die Materie sekundär und alles existiere nur im menschlichen Bewußtsein", so hat man diesen Fehler gemacht. Hier ist nämlich der Idealismus ganz unzulässig auf den subjektiven Idealismus eingeschränkt worden. Folglich ist die Extension des Definiens im Vergleich zur Extension des Definiendums zu klein.

Der entgegengesetzte Fehler wird als *Begriffsunterbestimmung* bezeichnet. Das Beispiel „Der Kapitalismus ist eine Gesellschaftsordnung, die auf der Ausbeutung des Menschen

durch den Menschen beruht" ist zwar eine wahre Aussage, aber eine fehlerhafte Definition. Der Begriff „Kapitalismus" ist unterbestimmt. Es gibt ja noch mehr Ausbeuterordnungen. Dementsprechend ist die Extension des Definiens im Vergleich zur Extension des Definiendums zu groß.

Anschaulich ergeben sich für die beiden fehlerhaften Definitionen folgende Bilder:



Natürlich gehört in erster Linie Sachkenntnis dazu, für bestimmte Begriffe oder Objekte Definitionen aufstellen zu können. Da man sich jedoch mitunter durch wahre Aussagen täuschen läßt und sie als Definitionen anerkennt, seien hier noch zwei methodische Hinweise gegeben. Kehrt man die Definitionsgleichung um und setzt „nur" davor, dann wird deutlich, ob eventuell der Fehler der Begriffsüberbestimmung vorliegt. Die Aussage „Nur eine Philosophie, die behauptet, . . ., ist Idealismus" ist falsch. Also ist die Definition fehlerhaft. Den Fehler der Begriffsunterbestimmung entdeckt man oft, wenn man ebenfalls die Definitionsgleichung umkehrt und „alle" oder „jeder" davorsetzt. Da die Aussage „Jede Gesellschaftsordnung, die . . ., ist Kapitalismus" falsch ist, kann auch in diesem Falle die Definition nicht richtig sein.

Eine weitere Regel, die man bei der Aufstellung von Definitionen beachten muß, ist: Eine Definition darf *keinen Zirkel* enthalten. Das heißt, der Begriff, der zu definieren ist, darf im Definiens weder offen noch versteckt wieder auftauchen. Dieser Fehler tritt offen in folgender Definition auf: „Die Chemie ist die Lehre von den chemischen Verbindungen." Diese „Definition" ist wertlos, weil der Begriff „Chemie" durch sich selbst erklärt wird. Die Definition „Ein aussagenlogisches Gesetz ist eine allgemeingültige Aussagenverbindung" enthält ebenfalls – diesmal versteckt – einen Zirkel. Die Ausdrücke „aussagenlogisches Gesetz" und „allgemeingültige Aussagenverbindung" sind ja nur verschiedene

Namen, Bezeichnungen für dasselbe, verschiedene Existenzformen ein und desselben Begriffs.

Eine Definition soll nach Möglichkeit *nicht negativ* sein, weil die Klasse, die einem negierten Begriff entspricht, meist sehr unbestimmt ist. Es gibt jedoch Begriffe, wie z. B. „Materie" und eine Reihe von Begriffen in der Mathematik, die sich gar nicht anders bestimmen lassen als durch Angabe solcher Eigenschaften usw., die sie nicht haben.

Von diesen Regeln für die Aufstellung von Definitionen sind die über die Umfangsgleichheit, den Zirkel und die Widerspruchsfreiheit vom Standpunkt der formalen Logik aus die allein maßgeblichen. Alle anderen Regeln sind teils rein methodischer Art, teils lassen sie sich auf diese zurückführen.

4.1.8. Begriffsgliederung und Klassifikation

Die *Begriffsgliederung* ist ein logisches Verfahren, das dazu dient, diejenigen Begriffe aufzufinden, die einem gegebenen Begriff subordiniert sind. – Ein Gattungsbegriff wird also in seine Artbegriffe aufgegliedert. Diese Aufgliederung muß nach einem bestimmten Merkmal vorgenommen werden.

Den Begriff „Kunst" kann man nach dem Merkmal der verwendeten künstlerischen Mittel in „bildende Kunst", „darstellende Kunst" usw. gliedern. Derselbe Begriff läßt sich nach dem Merkmal der Gesellschaftsklasse, deren Anschauungen die Kunst ausdrückt, in „sozialistische Kunst", „bürgerliche Kunst" usw. gliedern. – Den Begriff „Arbeiter" kann man nach dem Merkmal der Nationalität gliedern in „deutsche Arbeiter", „polnische Arbeiter", „französische Arbeiter" usw., nach dem Merkmal der Tätigkeit in „Metallarbeiter", „Holzarbeiter" usw. Welches Merkmal jeweils die Grundlage für die Begriffsgliederung bildet, hängt in der Regel davon ab, zu welchem Zweck die Gliederung vorgenommen wird. Aber in jedem Falle muß man sich an gewisse Regeln halten:

1. Die Extension des Gattungsbegriffs muß mit den Extensionen der Artbegriffe übereinstimmen. Es dürfen also nicht zuwenig Artbegriffe angegeben werden; es darf aber auch kein Begriff hinzugefügt werden, der nicht im gegebenen Zusammenhang Artbegriff ist.
2. Die Artbegriffe müssen disjunkt sein. Ihre Extensionen dürfen sich also nicht überschneiden.

3. Man darf nicht nach verschiedenen Merkmalen gleichzeitig gliedern, es sei denn, man kombiniert sie so miteinander, daß die Regeln 1 und 2 nicht verletzt werden.

4. Die Gliederung darf keine Sprünge machen. Das heißt, die aufgezählten Begriffe müssen alle Artbegriffe sein und dürfen nicht diesen wieder untergeordnet sein.

Es wäre z. B. ein Verstoß gegen die 4. Regel, wenn man den Begriff „Wissenschaft" in „Naturwissenschaft", „Geschichtswissenschaft", „Sprachwissenschaft" usw. gliederte. Die zuletzt genannten beiden Begriffe sind ja dem Begriff „Gesellschaftswissenschaft" untergeordnet. Dieser müßte in der Gliederung neben „Naturwissenschaft" treten. Er kann dann natürlich selbst wieder untergliedert werden.

In bestimmten Fällen ist es zweckmäßig, eine *dichotomische Gliederung* vorzunehmen. Sie ist ein Spezialfall der Begriffsgliederung. Man gibt hier nur einen Artbegriff des zu gliedernden Gattungsbegriffs und das Negat des Artbegriffs an. Der Begriff des Reisenden oder des Gaststättenbesuchers wird z. B. untergliedert in die Begriffe „Raucher" und „Nicht-Raucher". Eine dichotomische Gliederung kann fortgesetzt werden, indem der negierte Begriff wiederum in einen seiner Artbegriffe und dessen Negat untergliedert wird. Man kann z. B. für Versorgungszwecke den Begriff „Fahrzeug" in „elektrisch betriebenes" und „nicht elektrisch betriebenes Fahrzeug" gliedern. Der letzte Begriff kann dann weiter untergliedert werden in „mit Benzin betrieben" und „nicht mit Benzin betrieben". Diese Gliederung kann so lange fortgesetzt werden, bis kein einziger negierter Begriff mehr übrigbleibt.

Während man bei der Begriffsgliederung vom Begriff ausgeht, dient die *Klassifikation* zur Aufteilung eines Bereiches von Objekten in Klassen auf Grund eines gemeinsamen Merkmals. Da Intension und Extension eines Begriffes eng miteinander zusammenhängen, kann man zwischen Begriffsgliederung und Klassifikation auch nicht immer streng unterscheiden. Für die Klassifikation gelten die Regeln der Begriffsgliederung ebenso; sie müssen nur auf die Begriffsextensionen bezogen werden.

Das Periodensystem der Elemente ist z. B. das Ergebnis einer Klassifikation der chemischen Elemente nach dem Merkmal der Kernladungszahl. Weltanschauungen klassifizieren wir danach, wie sie die Grundfrage der Philosophie beantworten.

Klassifikationen werden ebenso wie Begriffsgliederungen nach bestimmten Merkmalen durchgeführt. Welches Merkmal man als Gliederungs- oder Klassifikationsmerkmal auswählt, hängt vom Zweck ab, den man mit der Gliederung oder Klassifikation verfolgt. Wenn es um die Unterbringung von Büchern in einem Bibliotheksmagazin geht, muß man sie nach ihrem Format klassifizieren. Wenn es um ihre Aufstellung in einer Freihandbücherei geht, muß man sie nach ihrem Inhalt klassifizieren. Jemand, der sich ein Buch ausleihen will, klassifiziert die Bücher in solche, die er schon gelesen hat, und solche, die er noch nicht gelesen hat. Diese Zweckabhängigkeit bei der Klassifikation ist jedoch nicht gleichzusetzen mit Willkür. Klassifikationsmerkmale müssen objektive Merkmale sein; andernfalls erhält man keine korrekte Klassifikation. Eine Klassifikation besteht nicht darin, eine Ordnung zu schaffen, die vorher nicht bestand; sie besteht vielmehr darin, objektiv vorhandene Teilklassen der einzuteilenden Klasse und Merkmale, die innerhalb und nur innerhalb dieser Teilklassen invariant sind, aufzufinden. Geschaffen wird im Klassifikationsprozeß ein System von Begriffen bzw. Termini, dessen Adäquatheit oder Inadäquatheit daran gemessen wird, ob es den objektiven Klassen und ihrem Zusammenhang entspricht oder nicht. Die Klassifikation von Büchern besteht also in ihrer gedanklichen Ordnung auf der Grundlage objektiver Merkmale, nicht aber in ihrer Unterbringung in Regalen.

Eine Klassifikation nach einem bestimmten Merkmal durchführen heißt, dieses Merkmal als variabel ansehen und solche konstanten Werte dieses variablen Merkmals auffinden, daß jeder dieser konstanten Werte in einer der Teilklassen invariant ist, aber in keiner anderen Teilklasse vorkommt, und daß in den Teilklassen die gesamte einzuteilende Klasse erfaßt ist. Legen wir die Farbe als Klassifikationsmerkmal zugrunde, d. h., sehen wir die Farbe der einzuteilenden Klasse von Gegenständen als variables Merkmal an, dann legen wir als konkrete Werte, als konkrete Merkmale die einzelnen Farben Rot, Gelb, Grün usw. für die Teilklassen zugrunde.

Das Klassifikations- oder Gliederungsmerkmal kann eine Eigenschaft – z. B. die Farbe –, kann aber auch eine Beziehung sein. Paare auf einer Tanzfläche kann man z. B. danach klassifizieren, ob die Partner miteinander verheiratet sind oder nicht.

Die Klassifikation eines Bereichs, den man noch nicht vollständig kennt, kann eine sehr bedeutende wissenschaftliche

Leistung sein. Sie wird in solchen Fällen in einem dialektischen Erkenntnisprozeß erzielt, der keineswegs nur durch formallogische Gesichtspunkte bestimmt wird.

Man geht von gewissen Kenntnissen der zu klassifizierenden Objekte und ihrer Merkmale aus und gründet darauf – unter Berücksichtigung der Ziele, die man mit der Klassifikation verfolgt – eine erste Vermutung über ein mögliches Klassifikationsmerkmal und seine konkreten Werte. Diese Vermutung wird dann auf ihre Brauchbarkeit geprüft, indem man den Klassifikationsprozeß probeweise durchführt. Mängel, die sich bemerkbar machen, werden korrigiert; danach prüft man das Klassifikationsmerkmal erneut usw., bis man zu einem den Regeln entsprechenden und für die verfolgten Ziele brauchbaren Ergebnis gelangt ist. Man vollzieht also einen Prozeß, der von relativ groben Einteilungsversuchen mit mehr oder weniger Mängeln zu immer exakteren Klassifikationsergebnissen führt.

Aber auch bei sorgfältiger Durchführung des Klassifikationsprozesses darf man nicht glauben, jemals ein endgültiges Klassifikationsergebnis erzielt zu haben. Eine Ausnahme können hier natürlich Klassen von Objekten bilden, die Produkte eines Abstraktionsprozesses sind. Bei der Klassifikation objektiv realer Objekte kann man immer damit rechnen, daß die Klassifikation in zeitlicher oder auch in struktureller Hinsicht relativ ist. Das ergibt sich vor allem aus der Tatsache, daß Klassen materieller Objekte fast nie scharf abgegrenzt sind und sich in der Zeit verändern. Es ergibt sich aber auch aus der Entwicklung der menschlichen Erkenntnis und aus dem Wechsel der Zwecke, die man mit der Klassifikation verfolgt. Trotz ihrer Relativität haben Klassifikationen wie jede wissenschaftliche Abstraktion ihren Wert, weil sie zu einer tieferen Erkenntnis der Wirklichkeit führen und jede Vertiefung der Erkenntnis eine verbesserte Grundlage des menschlichen Handelns bildet.

4.2. Reduktives Schließen

Nach einer allgemeinen Charakterisierung des reduktiven Schließens und einer Klassifizierung der reduktiven Schlüsse werden einige Arten des reduktiven Schließens ausführlicher beschrieben.

4.2.1. Zum Unterschied zwischen deduktivem und reduktivem Schließen

Die formale Logik steht in wesentlich engerem Zusammenhang mit dem deduktiven Schließen als mit dem reduktiven Schließen. Erstens ist sie unmittelbare Grundlage für das deduktive Schließen, d. h., ihre Gesetze lassen sich direkt in entsprechende Schlußregeln übersetzen. Zweitens ist die formale Logik selbst eine deduktive Disziplin; d. h., die in ihr geführten Beweise bzw. gezogenen Schlüsse sind vorwiegend deduktiv. Dagegen ist sie für die Methoden des reduktiven Schließens zwar eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung; und reduktive Schlüsse bzw. Beweise sind zum Aufbau z. B. axiomatisierter Gebiete der formalen Logik nicht notwendig. Allerdings kann sie bei der Begründung ihrer Grundlagen ebensowenig auf reduktive Schlüsse und Beweise verzichten wie irgendeine andere Wissenschaft.

Vielfach wird heute noch ein deduktiver Schluß definiert als ein Schluß vom Allgemeinen auf das Besondere bzw. Einzelne. Dem wird dann die Induktion als Schluß vom Einzelnen bzw. Besonderen auf das Allgemeine gegenübergestellt. Diese Einteilung ist veraltet und unzweckmäßig. Erstens werden durch sie viele wichtige Schlüsse gar nicht erfaßt. Beispielsweise kann man von den aussagenlogischen Schlüssen weder sagen, daß sie vom Allgemeinen aufs Besondere noch daß sie vom Besonderen aufs Allgemeine führen. Zweitens ist das Merkmal, nach dem diese veraltete Klassifizierung der Schlüsse durchgeführt wird, relativ unwesentlich. — Mit diesen Bemerkungen ist nichts über den Gebrauch der Wörter „Deduktion" und „Induktion" zur Bezeichnung etwa von Unterrichtsmethoden gesagt. Man muß sich nur darüber klar sein, daß „Deduktion" und „Induktion" in der Logik etwas anderes bedeuten als in der Pädagogik.

Deduktive Schlüsse haben — wir stellen das noch einmal für den Vergleich mit reduktiven Schlüssen zusammen — folgende wesentliche Merkmale:

(1) Zwischen den Prämissen und der Konklusion eines deduktiven Schlusses besteht eine Wenn-so-Beziehung, deren logische Grundlage die Implikation ist. Daraus ergibt sich, daß die Konklusion eines deduktiven Schlusses niemals falsch sein kann, wenn die Prämissen wahr sind.

(2) Ein deduktiver Schluß kann unter ausschließlicher Verwendung von gültigen Schlußregeln aufgestellt werden. Diese

Schlußregeln sind Umformungsregeln, die sich nur auf sprachliche Zeichen beziehen, so daß man beim deduktiven Schließen das Operieren mit Gedanken durch das Operieren mit Zeichen ersetzen kann.
(3) Ein deduktiver Schluß führt zu absoluter Gewißheit, daß die Konklusion wahr ist, falls die Prämissen wahr sind.

Nur ein Teil der Probleme läßt sich mit der deduktiven Methode allein lösen. Man kann mit ihr z. B. aus Allaussagen zwar neue Allaussagen ableiten, man kann aber nur in Ausnahmefällen mit ihr allein verallgemeinern und so von Aussagen über einzelne Individuen eines Bereiches zu Aussagen über alle Individuen dieses Bereiches gelangen. Aus der Tatsache, daß der Sozialismus in einigen Ländern bereits den Kapitalismus unwiderruflich geschlagen hat, kann man nicht deduktiv ableiten, daß das in allen Ländern geschehen wird. Um zu dieser für den Kampf der Arbeiterklasse außerordentlich wichtigen Erkenntnis zu kommen, muß man sich anderer Schlüsse als der deduktiven bedienen, nämlich der reduktiven.

Der Unterschied zwischen dem deduktiven und dem reduktiven Schließen soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Setzen wir die Aussage „Jeder Mensch besitzt Bewußtsein" als wahr voraus. In prädikatenlogischer Symbolik erhält diese Aussage die Gestalt: $\forall (x)\ [M(x) \rightarrow B(x)]$ – „Für jedes Individuum x gilt, wenn x ein Mensch ist, so ist x mit Bewußtsein begabt." Nach einer in 3.2.3. genannten prädikatenlogischen Schlußregel folgt hieraus deduktiv: $M(y) \rightarrow B(y)$; d. h., der behauptete Zusammenhang gilt auch für ein bestimmtes, einzelnes Individuum. Ersetzt man nun in $M(y) \rightarrow B(y)$ die freie Individuenvariable an beiden Stellen gleichzeitig durch beliebige Individuennamen, so erhält man beliebig viele wahre singuläre Aussagen, die alle aus der ursprünglichen Aussage folgen. Hier treffen in jedem Falle die unter (1) bis (3) zusammengestellten Merkmale deduktiver Schlüsse zu. – Angenommen, wir wollen nun die Aussage, wonach jeder Mensch Bewußtsein besitzt, erst erschließen. Als Prämissen stehen nur singuläre Aussagen wie „Wenn Hans ein Mensch ist, so besitzt Hans Bewußtsein" zur Verfügung. Welche Merkmale hat ein solcher Schluß? Falls uns über jeden einzelnen Menschen eine Aussage wie die eben genannte zur Verfügung stünde, wäre die Allaussage nur eine Abkürzung, eine Zusammenfassung der Konjunktion all dieser singulären Aussagen. Damit wäre

die Konjunktion der Prämissen der Konklusion äquivalent, und der Schluß wäre zwingend, d. h. ein deduktiver Schluß. Es ist aber praktisch gar nicht möglich, alle Menschen, die jemals gelebt haben, jetzt leben oder irgendwann einmal leben werden, daraufhin zu untersuchen, ob sie Bewußtsein besitzen. Deshalb kann die Konjunktion der Prämissen auch nicht mit der Konklusion äquivalent sein. Zwischen der Allaussage und den singulären Aussagen besteht eine Folgebeziehung, deren logische Grundlage die Implikation ist. Schließen wir aber in entgegengesetzter Richtung, so kehrt sich auch die Folgebeziehung um, d. h., es ergibt sich eine Beziehung, deren logische Grundlage die Umkehrung der Implikation, also die Replikation ist. Wenn aber das Vorderglied einer wahren Replikation selbst wahr ist – d. h. die Konjunktion unserer Prämissen –, so ist damit nicht gesichert, daß ihr Hinterglied – d. h. die Konklusion – wahr ist. Im Falle des hier betrachteten Schlusses ist zwar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Konklusion wahr ist, sehr groß; eine absolute Gewißheit ist jedoch aus den gegebenen Prämissen nicht zu gewinnen. Zum Vergleich mit den deduktiven Schlüssen interessiert uns noch ein drittes Merkmal unseres Schlusses. Formal gesehen, verläuft er nach folgendem Schema, wobei $a, b, c, \ldots$ als Individuenkonstanten fungieren mögen:

$$\begin{array}{l} M(a) \rightarrow B(a) \\ M(b) \rightarrow B(b) \\ M(c) \rightarrow B(c) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hline \forall (x)\,[M(x) \rightarrow B(x)]. \end{array}$$

Man könnte nun versuchen, nach diesem Schema andere Schlüsse zu ziehen, indem man z. B. einmal B als „blauäugig", zum anderen als „Warmblüter" interpretiert. Im ersten Falle wäre die Konklusion falsch, obwohl man eine große Zahl entsprechender singulärer Aussagen als Prämissen aufstellen könnte, im zweiten Falle hätten wir etwa denselben Grad der Gewißheit, daß die Konklusion wahr ist, wie bei dem ursprünglich untersuchten Schluß. Es zeigt sich also, daß es im Gegensatz zu den deduktiven Schlüssen hier keineswegs genügt, sich nach formalen Regeln zu richten, um aus wahren Prämissen eine wahre Konklusion zu erhalten.

Damit haben wir an einem Beispiel die wesentlichen Merkmale eines reduktiven Schlusses gefunden. Fassen wir zusammen:

Reduktive Schlüsse haben im Vergleich zu deduktiven Schlüssen folgende Merkmale:

(1) Zwischen den Prämissen und der Konklusion eines reduktiven Schlusses besteht eine Wenn-so-Beziehung, deren logische Grundlage die Replikation ist. Wenn die Prämissen eines reduktiven Schlusses wahr sind, kann die Konklusion wahr sein, kann sie aber auch falsch sein.

(2) Ein reduktiver Schluß kann nicht unter ausschließlicher Anwendung formaler Schlußregeln (Umformungsregeln) aufgestellt werden. Man kann hier auch nicht vom gedanklichen Inhalt der Ausdrücke des Schlusses abstrahieren.

(3) Ein reduktiver Schluß führt zu relativer Gewißheit, daß die Konklusion wahr ist, falls die Prämissen wahr sind.

4.2.2. Einteilung der reduktiven Schlüsse

Je nachdem, ob die Konklusion eine Verallgemeinerung der Prämissen ist oder nicht, unterteilt man die reduktiven Schlüsse in *induktive* oder *nichtinduktive*. Auf diese beiden Arten von Schlüssen soll hier noch nicht näher eingegangen werden; Beispiele für die induktive Reduktion finden sich vor allem in 4.2.3., Beispiele für die nichtinduktive Reduktion in 4.2.5. In diesem Abschnitt soll vielmehr die Unterteilung in regressive und progressive Reduktion ausführlich betrachtet werden, die sich aus einer Klassifizierung der reduktiven Schlüsse nach der Richtung des Denkprozesses ergibt.

Die *regressive Reduktion* geht von bekannten Sachverhalten, die in Form von Aussagen widergespiegelt werden, aus und führt zu einer Erklärung dieser Sachverhalte. Der Sachverhalt beispielsweise, daß das Radio plötzlich nicht mehr spielt, wird in der Aussage „Das Radio hat aufgehört zu spielen" widergespiegelt. Durch regressive Reduktion wird nun auf eine Erklärung des Sachverhalts geschlossen, d. h. auf eine Aussage über die Voraussetzungen, Bedingungen, Ursachen usw. des zu erklärenden Sachverhalts.

In unserem Beispiel geht es um die Erklärung eines einzelnen Sachverhalts; in der Regel sucht man natürlich nach Erklärungen für ganze Komplexe von Sachverhalten, nach gesetz-

mäßigen Zusammenhängen. Dementsprechend ist eine durch regressive Reduktion gewonnene Erklärung oft nicht eine einfache Aussage, sondern ein Gefüge von Aussagen, häufig sogar eine ganze Theorie.

Von einer Erklärung muß gelten, daß die Aussage über den zu erklärenden Sachverhalt aus ihr deduktiv folgt. Damit ist aber der Schluß auf die Erklärung ein reduktiver Schluß, wie er in 4.2.1. beschrieben wurde. Auch von unserem Beispiel her läßt sich einsehen, daß ein Schluß durch regressive Reduktion nicht zwingend im Sinne eines deduktiven Schlusses ist. Es gibt ja eine ganze Reihe möglicher Ursachen dafür, daß ein Radio aufhört zu spielen. Es kann im Radio selbst ein Schaden aufgetreten sein, die Wohnungs- oder die Haussicherung kann durchgebrannt sein, das Elektrizitätswerk kann den Strom abgeschaltet haben, um nur einige zu nennen. Jede Aussage über eine dieser möglichen Ursachen kommt also als Erklärung in Frage, denn aus jeder von ihnen folgt die Aussage, wonach das Radio aufhört zu spielen.

Ein Schluß durch regressive Reduktion kann auf eine Aussage führen, aus der die Aussage über den zu erklärenden Sachverhalt folgt und die auch bereits als wahr bekannt ist. So geschieht es öfter, daß neue Sachverhalte in der Gesellschaft oder in der Natur auftreten oder entdeckt werden, die ihre Erklärung in bereits vorhandenen wissenschaftlichen Theorien finden. In diesem Falle genügt der Schluß durch regressive Reduktion. Oft geschieht es aber, daß man unter den als wahr bekannten Aussagen keine findet, die als Erklärung dienen kann. Dann muß man eine Hypothese aufstellen, d. h. eine Aussage, aus der die Aussage über den zu erklärenden Sachverhalt folgt, deren Wahrheitswert aber noch nicht bekannt ist. Die Entscheidung über den Wahrheitswert einer solchen Hypothese wird nun auf dem Wege der progressiven Reduktion gesucht.

Bei der *progressiven Reduktion* geht man von der Hypothese, die als Erklärung dienen soll, aus und leitet aus ihr Aussagen ab, deren Wahrheitswert sich unmittelbar feststellen läßt. Stellen wir z. B. als Erklärung dafür, daß das Radio nicht mehr spielt, die Hypothese auf „Die Wohnungssicherung ist durchgebrannt". Aus ihr lassen sich neben der Aussage über den zu erklärenden Sachverhalt solche Aussagen ableiten wie „Die Stehlampe brennt nicht". Ihr Wahrheitswert kann unmittelbar nachgeprüft werden, indem man die Stehlampe einschaltet.

Wenn die aus der Hypothese abgeleiteten Aussagen sich alle als wahr herausstellen, dann gilt die Hypothese als *bestätigt*; d. h., es besteht relative Gewißheit, daß die Hypothese wahr ist. Absolute Gewißheit über die Wahrheit der Hypothese ist damit natürlich noch nicht erzielt. Auch das ist wieder von unserem Beispiel her einzusehen. Daß die Stehlampe nicht brennt, kann auch an der Haussicherung liegen oder daran, daß vom Elektrizitätswerk aus der Strom abgeschaltet worden ist. Der Grad der Gewißheit über die Wahrheit der Hypothese wächst aber, wenn man feststellt, daß in den anderen Wohnungen im Hause der Strom nicht unterbrochen ist. Um einen möglichst hohen Grad der Gewißheit über die Wahrheit einer Hypothese zu erhalten, kann es zweckmäßig sein, möglichst viele Aussagen aus ihr abzuleiten. Günstiger ist es jedoch noch, wenn man möglichst verschiedenartige und möglichst detaillierte Aussagen ableiten kann. Was damit gemeint ist, soll an einem weiteren Beispiel verdeutlicht werden.

Mendelejew war auf den Gedanken gekommen, die seinerzeit bekannten chemischen Elemente nach wachsendem Atomgewicht zu ordnen. Dabei stellte er fest, daß die chemischen und die physikalischen Eigenschaften der Elemente in dieser Anordnung zunächst wechseln, nach einer gewissen Anzahl von Elementen aber in der gleichen Reihenfolge wiederkehren. Er stellte daraufhin die Hypothese auf, daß die Eigenschaften der Elemente in periodischer Abhängigkeit von ihrem Atomgewicht stehen. Diese Hypothese ermöglichte die Voraussage, daß es noch mehr chemische Elemente geben müsse, als damals bekannt waren. Der Nachweis allein, daß diese Voraussage wahr ist, hätte die Hypothese nicht in sehr hohem Maße bestätigen können. Die Hypothese machte aber darüber hinaus recht detaillierte Aussagen über die Eigenschaften der noch nicht bekannten chemischen Elemente möglich. Schon wenige Jahre später waren mehrere dieser vorhergesagten Elemente mit den beschriebenen Eigenschaften gefunden. Damit war Mendelejews Hypothese mit sehr hohem Grade an Gewißheit als wahr nachgewiesen, denn es ist sehr unwahrscheinlich, daß man so genaue Aussagen, die sich als wahr erweisen, aus einer falschen Hypothese ableiten kann. Die in bestimmter Hinsicht korrigierte Hypothese Mendelejews – z. B. ordnet man heute die Elemente statt nach dem Atomgewicht nach der mit ihm zusammenhängenden Kernladungszahl – wurde durch die Atomphysik des 20. Jahrhunderts in weiterem Maße bestätigt.

Wenn von den aus einer Hypothese abgeleiteten Aussagen sich auch nur eine als falsch herausstellt, gilt die Hypothese als *falsifiziert*, als widerlegt. Falls also die Stehlampe doch brennt, ist die Hypothese, daß die Wohnungssicherung durchgebrannt ist, als falsch nachgewiesen. Allerdings ist damit nicht gesagt, daß die Hypothese in solchem Falle in allen Einzelheiten falsch ist. Angenommen, die Hypothese ist eine Konjunktion mehrerer Aussagen. Wenn nun diese Konjunktion falsch ist, heißt das doch nur, daß mindestens eine der Aussagen, aus denen sie besteht, falsch ist. Möglicherweise ist auch tatsächlich nur eine der Aussagen falsch. Unter diesen Umständen könnte es genügen, die Hypothese in geeigneter Weise zu modifizieren und dann erneut auf dem Wege der progressiven Reduktion zu überprüfen.

Von idealistischen Philosophen werden immer wieder Zweifel an der Zuverlässigkeit des reduktiven Schließens im allgemeinen und des induktiven Schließens im besonderen laut. Sie verweisen – mit Recht – darauf, daß reduktive Schlüsse im Gegensatz zu den deduktiven nicht zwingend sind, daß die Konklusion eines induktiven Schlusses aus wahren Prämissen nicht mit absoluter Gewißheit ebenfalls wahr ist, und sie verlangen eine Rechtfertigung für das reduktive Schließen. – Diese Rechtfertigung ergibt sich aus dem praktischen Handeln des Menschen. Reduktiv gewonnene Aussagen haben sich immer wieder in der gesellschaftlichen, wissenschaftlichen, technischen und alltäglichen Praxis des Menschen bewährt und tun das täglich aufs neue. Damit ist allerdings das Problem für den einzelnen konkreten Schluß dieser Art noch nicht gelöst. Viele reduktiv gewonnene Aussagen stellen sich ja auch als falsch heraus, wenn der Mensch sich in seinem Handeln nach ihnen richtet. Man muß bei jedem einzelnen reduktiven Schluß versuchen, die größtmögliche Gewißheit zu erreichen. Das geschieht teils dadurch, daß man bei der Aufstellung reduktiver Schlüsse bestimmte Bedingungen beachtet, wie sie im folgenden beschrieben werden. Außerdem darf man einen reduktiven Schluß aber auch niemals isoliert von den anderen Erkenntnissen aus dem entsprechenden Bereich betrachten. Will man die verschiedenen Arten des Schließens systematisch darstellen, so muß man sie gesondert behandeln. Beim Schließen selbst jedoch werden die Ergebnisse sofort mit Hilfe anderer Methoden geprüft und mit Aussagen verglichen, die schon an der Praxis geprüft sind.

4.2.3. Die Induktion

Die wichtigste Art der reduktiven Schlüsse sind die Schlüsse der Induktion. Induktionsschlüsse führen vom Besonderen zum Allgemeinen, von Aussagen über einzelne Elemente einer Klasse zu Aussagen über alle Elemente dieser Klasse. Die Konklusion eines Induktionsschlusses stellt also eine Erweiterung gegenüber den Prämissen dar.

Die Schlüsse der Induktion werden unterteilt in solche der *aufzählenden Induktion*, mit der wir uns zunächst beschäftigen werden, und in solche der *ausschaltenden Induktion*, denen wir uns in 4.2.4. zuwenden werden. Von aufzählender Induktion spricht man, wenn es darum geht, singuläre oder Existentialaussagen zur Begründung einer Allaussage zusammenzustellen. Die ausschaltende Induktion hat den Zweck, aus der Menge der möglichen Erklärungen für einen Sachverhalt diejenigen auszuschalten, die nicht in Frage kommen.

Der elementarste Fall der aufzählenden Induktion ist die *Induktion durch vollständige Aufzählung*. – Man stellt z. B. nach entsprechenden Untersuchungen fest: „In der Sowjetunion besteht ein Bündnis zwischen der Arbeiterklasse und der übrigen Bevölkerung", „In der DDR besteht ein Bündnis zwischen der Arbeiterklasse und der übrigen Bevölkerung", „In der ČSSR . . ." usw. Zum Schluß prüft man, ob alle sozialistischen Staaten erfaßt wurden und ob für jeden von ihnen eine entsprechende Aussage gilt. Wenn beides der Fall ist, kann man die induktive Schlußfolgerung ziehen: „In allen sozialistischen Staaten besteht ein Bündnis zwischen der Arbeiterklasse und der übrigen Bevölkerung."

Man kann allgemein sagen: Die Induktion durch vollständige Aufzählung kann angewandt werden, wenn eine bestimmte Klasse K von Individuen aus einer relativ geringen, übersehbaren Anzahl von Elementen besteht und wenn alle Elemente dieser Klasse bekannt sind. Stellt man von jedem einzelnen dieser Elemente fest, daß es ein bestimmtes Merkmal M hat, so kann man daraus induktiv die Schlußfolgerung ziehen, daß jedes Element jener Klasse K das Merkmal M hat. – In umgekehrter Richtung gilt der Schluß im endlichen Bereich natürlich auch.

Stellen wir einen solchen Schluß für Klassen mit genau drei Elementen noch einmal in schematischer Form dar:

Die Klasse K besteht aus den Elementen a, b, c.

$M(a)$
$M(b)$
$M(c)$

$\forall (x) [K(x) \rightarrow M(x)]$.

Die Klasse K besteht aus den Elementen $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, f]$.

$M(a, b)$
$M(c, d)$
$M(e, f)$

$\forall (x) \forall (y) [K(x, y) \rightarrow M(x, y)]$.

Genaugenommen gehört diese Form des Schließens, obwohl sie als Induktion bezeichnet wird, zur deduktiven Methode. – Die Induktion durch vollständige Aufzählung ist natürlich nur sehr selten anwendbar. Meistens haben nämlich die Klassen von Individuen, die von den Wissenschaften untersucht werden, unbegrenzt viele Elemente oder zumindest so viele, daß es praktisch nicht durchführbar ist, sie alle zu untersuchen. Deshalb schließt man viel öfter durch unvollständige Induktion.

Mit Hilfe der *unvollständigen Induktion* schließt man von Aussagen über einige Elemente einer Klasse auf eine Aussage über alle Elemente dieser Klasse.

Der Unterschied zur Induktion durch vollständige Aufzählung besteht also zunächst einmal darin, daß man bei der unvollständigen Induktion als Voraussetzung nur Aussagen über relativ wenige Elemente der Klasse hat. Der Wert eines Schlusses durch unvollständige Induktion liegt vor allem darin, daß durch ihn eine Verallgemeinerung erreicht wird, während ein Schluß der Induktion durch vollständige Aufzählung eigentlich nur eine Zusammenfassung ist.

Man hat z. B. in allen Wissenschaften, in der gesellschaftlichen Praxis usw. festgestellt, daß alle Formen der Materie, die der Mensch untersuchte, bewegt sind. Natürlich reicht selbst die Gesamtheit der Menschen bei weitem nicht aus, um alle Materie daraufhin zu untersuchen, ob sie sich bewegt, denn die Materie ist ja unendlich in Raum und Zeit, in ihrer Mannigfaltigkeit und Entwicklung. Trotzdem wurde die Schlußfolgerung gezogen – und zwar durch unvollständige Induktion –,

daß alle Formen der Materie bewegt sind, ja, daß die Bewegung die Daseinsweise der Materie ist.

Grundvoraussetzung für einen Schluß durch unvollständige Induktion auf eine Allaussage ist, daß kein einziger Fall bekannt ist, der im Gegensatz zu der Allaussage steht. Es wird weiter oft gefordert, daß man möglichst viele Elemente einer Klasse untersucht, bevor man induktiv auf alle Elemente dieser Klasse schließt. Diese Forderung ist gewiß richtig, und in der Regel wird auch ein Induktionsschluß um so sicherer sein, je größer die Zahl seiner Voraussetzungen ist. Aber das ist durchaus nicht in jedem Falle ausschlaggebend. Zur Illustration dessen mag folgendes Beispiel dienen: Jemand will einen Freund besuchen. Er kennt dessen genaue Adresse nicht, vermutet aber, daß er in einer bestimmten Straße wohnt. Nun hat er in 98 von den 100 Häusern der Straße festgestellt, daß der Freund dort nicht wohnt. Trotzdem kann er aus der Tatsache, daß der Freund in keinem der besuchten Häuser wohnt, nicht darauf schließen, daß er überhaupt nicht in der betreffenden Straße wohnt.

Einen solchen Schluß wird wohl auch niemand ziehen. Aber man kann an diesem Beispiel doch zeigen, daß es nicht sosehr auf die Zahl der untersuchten Fälle ankommt als vielmehr darauf, daß die Untersuchung *wesentlicher* Merkmale die Grundlage eines Induktionsschlusses bildet. So besteht zwischen Materie und Bewegung ein gesetzmäßiger Zusammenhang, denn die Bewegung ist ein wesentliches Merkmal der Materie, und diese Tatsache rechtfertigt auch den entsprechenden Schluß. Dagegen ist der Zusammenhang zwischen Hausnummer und den Mietern des Hauses im höchsten Grade zufällig.

4.2.4. Die Millschen Methoden der Induktion

Die von John Stuart Mill um die Mitte des vorigen Jahrhunderts entwickelten Methoden gehören, wie bereits gesagt, zu den Methoden der ausschaltenden Induktion. Sie dienen insbesondere dazu, Kausalzusammenhänge zu erforschen, die Ursachen bestimmter Erscheinungen festzustellen. Sie sind Methoden der ausschaltenden Induktion insofern, als sie aus der Menge der Erscheinungen, die im jeweiligen Zusammenhang als Ursache in Frage kommen, im günstigsten Falle alle bis auf eine ausschalten. Voraussetzung für die Anwendung

der Millschen Methoden ist also, daß die möglichen Ursachen bereits bekannt sind und vollständig aufgezählt werden. Diese Methoden dienen nicht dazu, die jeweilige Ursache zu finden bzw. zu entdecken.

Kausalzusammenhänge sind natürlich nur eine besondere Art der objektiv realen Zusamenhänge, insbesondere sind sie nur eine Seite der umfassenderen Wechselwirkung. Hinzu kommt, daß nicht jeder kausale Zusammenhang zugleich ein gesetzmäßiger ist, denn auch zufällige Zusammenhänge sind kausal bedingt. Daraus ergibt sich eine gewisse Einschränkung in bezug auf den Anwendungsbereich der Millschen Methoden. Andererseits ist das Auffinden von Kausalzusammenhängen in der Natur wie in der Gesellschaft eine wichtige Voraussetzung für die Erkenntnis von Gesetzen. Ferner kann die Entdeckung eines Kausalzusammenhanges von unmittelbar praktischer Bedeutung sein. Wenn z. B. ein volkseigener Betrieb seine Planaufgaben nach Qualität und Quantität kontinuierlich erfüllt und darüber hinaus zahlreiche Massenbedarfsgüter herstellt, während die Produkte eines anderen des öfteren beanstandet werden, so muß man in beiden Fällen sehr eingehend die Ursachen dafür untersuchen. Denn es ist für die Erfüllung des Volkswirtschaftsplanes sehr wichtig, daß die guten Erfahrungen des einen Betriebes ausgewertet und die Mängel des zweiten schnellstens beseitigt werden.

(1) *Die Methode der Übereinstimmung*

Wenn eine Erscheinung E als Folge anderer auftritt, die mit Ausnahme eines einzigen Merkmals X nur verschiedene Merkmale haben, kann man schließen, daß X die Ursache von E ist. Wir wollen die Methode der Übereinstimmung an einem Beispiel erläutern: Angenommen, verschiedene volkseigene Betriebe zeichnen sich durch besondere Produktionserfolge aus. Wir wollen das abgekürzt durch „E" darstellen. Bei der Untersuchung stellt sich heraus, daß die Betriebe recht verschiedenartig sind; der erste ist ein Chemiebetrieb (A) und hat nur relativ wenig Arbeiter und Angestellte (B). In diesem Betrieb gibt es eine Reihe gut arbeitender sozialistischer Brigaden und Arbeitsgemeinschaften (X). Der zweite Betrieb ist etwa ein Elektrobetrieb (C) mit weit mehr Beschäftigten (D); auch dort gibt es viele gut arbeitende sozialistische Brigaden und Ar-

beitsgemeinschaften (X) usw. – Es zeigt sich, daß die Betriebe eine ganze Anzahl verschiedener Merkmale besitzen und nur in einem einzigen – nämlich X – übereinstimmen. Daraus kann man den induktiven Schluß ziehen, daß in den Betrieben die sozialistische Gemeinschaftsarbeit die Ursache oder zumindest Teilursache der Produktionserfolge ist.

Der Übersichtlichkeit halber stellen wir den Schluß noch einmal symbolisch dar. Das Zeichen „$\nrightarrow$" soll bedeuten „wird gefolgt von", und das Zeichen „$\Rightarrow$" soll bedeuten „verursacht". Dann kommen wir zu folgendem Schema für den induktiven Schluß durch die Methode der Übereinstimmung:

$$\frac{\begin{array}{r}(A, B, X) \nrightarrow E\\ (C, D, X) \nrightarrow E\end{array}}{X \Rightarrow E.}$$

Im übertragenen Sinne gilt auch für die Millschen Methoden das zur aufzählenden Induktion Gesagte. Man wird in einem solchen Falle möglichst viele Erscheinungen untersuchen. Vor allem wird man nicht unwesentliche Merkmale als Ursache einer bestimmten Erscheinung annehmen. So wäre es z. B. im Hinblick auf den Produktionserfolg unwesentlich, wenn zufällig die Betriebe darin übereinstimmen, daß sie sich in derselben Stadt befinden.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß ein und dieselbe Wirkung mitunter durch verschiedene Ursachen hervorgerufen werden kann. Wenn man also durch Induktion auf die Ursache einer Erscheinung geschlossen hat, hat man noch keine absolute Gewißheit darüber, daß man die alleinige Ursache festgestellt hat. Wärme kann beispielsweise sowohl durch Reibung als auch durch Feuer, elektrischen Strom usw. verursacht werden.

(2) *Die Methode des Unterschieds*

Wenn eine bestimmte Erscheinung E im Zusammenhang mit den Merkmalen A, B, C, X auftritt, aber nicht dort, wo nur die Merkmale A, B, C vorhanden sind, so kann man schließen, daß X die Ursache von E ist.

Angenommen, zwei Betriebe stimmen in verschiedenen Merkmalen, wie Ausrüstung mit Maschinen (A), Zahl der Facharbeiter (B) und Versorgung mit Rohmaterial (C), über-

ein. Dagegen wird in dem Betrieb mit den größeren Produktionserfolgen (E) die materielle Interessiertheit der Werktätigen berücksichtigt (X), im anderen dagegen nicht. Dann schließt man induktiv, daß die Berücksichtigung der materiellen Interessiertheit die Ursache höherer Produktionserfolge ist.

Auch diesen Schluß stellen wir symbolisch dar:

$$\frac{\begin{array}{c}(A, B, C, X) \nrightarrow E \\ \sim [(A, B, C) \nrightarrow E]\end{array}}{X \Rightarrow E.}$$

Bei der Anwendung der Methode des Unterschieds wird man sich wie bei der Methode der Übereinstimmung im allgemeinen nicht mit der Untersuchung von nur zwei Fällen begnügen. Ferner ist vor allem auch hier wieder darauf zu achten, daß man als mögliche Ursachen nur wesentliche Merkmale in Betracht zieht.

(3) *Die Methode der Resterscheinung*

Wenn bekannt ist, daß eine bestimmte Erscheinung G gesetzmäßig durch A hervorgerufen wird, nun aber A zusammen mit X auftritt und die Wirkung in gewisser Weise von G abweicht, so zieht man den Schluß, daß X die Ursache dieser Abweichung ist.

Mittels dieser Methode gelang 1846 die Entdeckung des bis dahin unbekannten Planeten Neptun. Das Newtonsche Gravitationsgesetz ($A \Rightarrow G$) diente zur Berechnung der Planetenbahnen. Trotz der Berücksichtigung aller bekannten Himmelskörper, die auf den Planeten Uranus einwirken, stimmte dessen tatsächliche Bahn (G, E) nicht ganz mit der berechneten (G) überein. Man kam zu dem Schluß, daß diese Abweichungen (E) durch einen noch nicht bekannten Planeten (X) verursacht sein könnten, und Johann Gottfried Galle fand diesen dann auch tatsächlich auf Grund von Berechnungen Urbain-Jean-Joseph Leverriers. Man kann diese Methode der Resterscheinung symbolisch folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\begin{array}{c}A \Rightarrow G \\ (A, X) \nrightarrow (G, E)\end{array}}{X \Rightarrow E}$$

(4) *Die Methode der begleitenden Veränderungen*

Wenn eine Erscheinung E von bestimmten Merkmalen A, B, X abhängt, so stellt man die Ursache von E fest, indem man untersucht, welche Veränderungen von A, B, X zu einer gleichartigen Veränderung von E führen. Verändert sich E etwa wie X, nicht aber wie A oder B, so schließt man daraus, daß X Ursache von E ist.

Diese Methode hat für die Durchführung von Experimenten besondere Bedeutung, weil man dabei die Möglichkeit hat, die als Ursache in Frage kommenden Merkmale bewußt und planmäßig zu verändern. Ein einfaches Beispiel mag die Anwendung dieser Methode verdeutlichen. Um herauszufinden, welches der Lautstärkeregler an einem mir unbekannten Rundfunkgerät ist, drehe ich nacheinander an den verschiedenen Knöpfen des Geräts. Verändert sich die Lautstärke dem Drehen eines der Knöpfe entsprechend, so ist damit der Lautstärkeregler gefunden.

Aber auch in Bereichen, in welchen man keine Experimente durchführen kann, ist die Methode der begleitenden Veränderungen anwendbar. Es kommt dann darauf an, gemäß dieser Methode Beobachtungen durchzuführen und zu verarbeiten. So haben die Klassiker des Marxismus-Leninismus untersucht, welche Faktoren die gesellschaftliche Entwicklung verursachen, und sie stellten dabei fest, daß Faktoren wie die physische Beschaffenheit des Menschen, das geographische Milieu, das Wachstum der Bevölkerung usw. sich nicht in der gleichen Weise entwickeln wie die Gesellschaft. Da sich jedoch die Produktionsweise der materiellen Güter im Gegensatz dazu so verändert wie die Gesellschaft, konnten sie den induktiven Schluß ziehen, daß die Produktionsweise der entscheidende Faktor für die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft ist. Auch diese Methode soll abschließend noch einmal symbolisch dargestellt werden. Dabei deutet ein Apostroph an einem Buchstaben an, daß der entsprechende Faktor sich verändert hat.

$$\frac{\begin{array}{l}(A, B, X) \nrightarrow E \\ (A', B, X) \nrightarrow E \\ (A, B', X) \nrightarrow E \\ (A, B, X') \nrightarrow E'\end{array}}{X' \Rightarrow E'.}$$

Bei der Anwendung der Millschen Methoden der Induktion ist, wie gesagt, zu berücksichtigen, daß sie nur dazu verwandt werden können, die Ursachen bestimmter Erscheinungen aufzufinden. Weiterhin ist zu bemerken, daß sie natürlich in den seltensten Fällen einzeln und isoliert anzuwenden sind. Oft wird man bei Untersuchungen zwei oder mehrere dieser Methoden miteinander kombinieren. Besonders häufig kombiniert man die Methode der Übereinstimmung mit der Methode des Unterschieds.

An der Methode der Resterscheinung wird gleichzeitig deutlich, in welcher Weise Induktion und Deduktion gemeinsam erst zu einer Schlußfolgerung führen. Ausgangspunkt war eine Voraussage über die Bahn des Uranus, die mit Hilfe der Deduktion aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz abgeleitet worden war. Die Abweichung von der vorausberechneten Bahn wurde durch einen Induktionsschluß erklärt, der dann durch die Entdeckung des Neptun bestätigt wurde.

4.2.5. Der Analogieschluß

Eine weitere Form des reduktiven Schlusses ist der Analogieschluß. Er besteht darin, daß man aus der Ähnlichkeit oder Übereinstimmung zweier Objekte in einigen wesentlichen Merkmalen auf die Ähnlichkeit oder Übereinstimmung in weiteren Merkmalen schließt.

Der Bonner Staat weist z. B. in einer Reihe von Merkmalen eine außerordentliche Übereinstimmung mit dem 1945 zerschlagenen faschistischen deutschen Staat auf. Die Monopole, die seinerzeit Hitler an die Macht brachten und ihn stützten, sind heute im wesentlichen die Auftraggeber der westdeutschen Regierung. Antikommunismus, Revanchismus und Militarismus werden in Westdeutschland kaum anders als vor 1945 propagiert. Die KPD als die einzige Partei, die die Interessen der Arbeiterklasse und der Nation konsequent vertrat, wurde von beiden Staaten verboten. Führende Beamte des Nazistaates besetzen die maßgeblichen Positionen in der Bonner Regierung. Die Blutrichter Hitlers sind zu Hunderten wieder im Amt. Die westdeutsche Armee wird von Offizieren geführt, die den Überfall Hitlerdeutschlands auf andere Völker mit organisiert haben usw. – Aus all diesen Übereinstimmungen konnte schon vor Jahren der Analogieschluß gezogen werden,

daß die militaristischen Kreise in Westdeutschland einen Angriffskrieg gegen das sozialistische Lager vorbereiten, obwohl sie die Öffentlichkeit mit der Phrase von der angeblich notwendigen Verteidigung zu täuschen versuchen. Weiter konnte geschlossen werden, daß nach dem Verbot der KPD und anderer demokratischer Organisationen die demokratischen Rechte und Freiheiten in zunehmendem Maße eingeschränkt werden würden. Beide Analogieschlüsse wurden und werden bekanntlich immer und immer wieder durch die Tatsachen bestätigt. –

Ein Analogieschluß verläuft also nach folgendem Schema – wobei „a", „b" Objekte und „M_1", „M_2" ... wesentliche Merkmale symbolisieren sollen –:

a und b stimmen in M_1, M_2, M_3 überein

a hat außerdem M_4

---

also ist relativ gewiß, daß b auch M_4 hat.

Die Merkmale, in denen Objekte übereinstimmen, sind oft nicht nur Eigenschaften und Beziehungen, sondern auch Gesetze. Dieser letzte Fall ist eine besonders günstige Voraussetzung für einen Analogieschluß. In den Naturwissenschaften besteht häufig eine solche Übereinstimmung von Gesetzen in strukturmäßiger Hinsicht.

Die beiden Formeln

$$K_m = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{und} \quad K_e = C \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$$

stimmen z. B. ihrer Struktur nach völlig überein, obwohl nach ihnen zwei verschiedene Kräfte berechnet werden. Nach der ersten Formel berechnet man die Kraft, mit der sich Massen m_1, m_2 anziehen, die sich im Abstand r voneinander befinden. Das „γ" symbolisiert die Gravitationskonstante. Dagegen wird mit der zweiten Formel die Kraft berechnet, mit der sich elektrische Ladungen e_1, e_2 über eine Entfernung r hinweg anziehen oder abstoßen. „C" symbolisiert hier eine elektrische Konstante. Ein anderes Beispiel für die Übereinstimmung von Gesetzen in strukturmäßiger Hinsicht sind einige Gesetze der Algebra der natürlichen Zahlen und der Aussagenlogik, die wir einander gegenüberstellen wollen:

(1.1) $(a+b)=(b+a)$	(1.2) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
(2.1) $(a \cdot b)=(b \cdot a)$	(2.2) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
(3.1) $a+(b+c)=(a+b)+c$	(3.2) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
(4.1) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$	(4.2) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
(5.1) $a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$	(5.2) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	(6.2) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Die Gesetze (1) und (2) sind kommutative, (3) und (4) assoziative, (5) und (6) distributive Gesetze. Die aufgeführten Gesetze der Algebra der natürlichen Zahlen sind bekannt. Von den aussagenlogischen Ausdrücken stellt man mit Hilfe von Wahrheitsmatrizen leicht fest, daß sie allgemeingültig, d. h. Gesetze sind.

Die strukturmäßige Übereinstimmung der nebeneinanderstehenden Gesetze ist augenfällig. Die Addition entspricht der Alternative, die Multiplikation entspricht der Konjunktion, die Gleichheit entspricht der Äquivalenz und die Zahlenvariablen den Aussagenvariablen. Man könnte also, diesem Schlüssel entsprechend, die Gesetze des einen Gebietes in die des anderen übersetzen. Allerdings – und an dieser Stelle hört die Analogie zwischen Algebra der natürlichen Zahlen und Aussagenlogik auf – ist die Übersetzung von (6.2) in eine Formel der Algebra kein Gesetz mehr! Trotzdem genügte dieser Grad von Übereinstimmung bereits als Anregung, um in der Mitte des vorigen Jahrhunderts in enger Anlehnung an die Mathematik Teile der mathematischen Logik systematisch aufzubauen. Die seinerzeit von dem englischen Mathematiker George Boole verwandte Art des Aufbaus der Logik wird deshalb auch „Algebra der Logik" genannt.

Um einen möglichst hohen Grad der Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit der Konklusion eines Analogieschlusses zu erreichen, sollte man folgende Regeln beachten:

1. Die Anzahl der gemeinsamen Merkmale soll möglichst groß sein.
2. Die Merkmale, die im Analogieschluß eine Rolle spielen, sollen wesentliche Merkmale sein.
3. Die gemeinsamen Merkmale sollen von verschiedenem Typ sein, d. h., der Analogieschluß wird um so sicherer sein, wenn man z. B. nicht nur in physikalischen Merkmalen der betreffenden Objekte Übereinstimmung feststellt, sondern auch in chemischen, biologischen usw. Merkmalen.

4. Man soll nur dann auf Übereinstimmung von Merkmalen eines bestimmten Typs schließen, wenn eine Übereinstimmung von Merkmalen des gleichen Typs bereits festgestellt wurde, d. h., man soll möglichst nicht von einer Übereinstimmung z. B. in physikalischen Merkmalen auf eine Übereinstimmung in biologischen Merkmalen schließen.

Die Anwendung von Analogieschlüssen hat in der Geschichte der Wissenschaft schon mehrfach zu neuen Erkenntnissen von weittragender Bedeutung geführt. Beispielsweise konnten wegen der strukturellen Übereinstimmung von Gesetzen usw., die im Planetensystem gelten, und solchen, die für das Atom gelten, einige wichtige Hypothesen über das Atom auf dem Wege des Analogieschlusses gewonnen werden, die man später exakt beweisen konnte.

Worauf beruht nun die Möglichkeit, Analogieschlüsse zu ziehen, die unsere Erkenntnis der objektiven Realität so wesentlich bereichern? Sie beruht, allgemein gesagt, darauf, daß es trotz der unendlichen Verschiedenartigkeit der objektiven Realität in ihr gesetzmäßig zugeht, daß sie ein zusammenhängendes System bildet. Innerhalb dieses Systems gibt es viele Übereinstimmungen im Hinblick auf Eigenschaften, Beziehungen und Strukturen.

Das gilt für die Natur wie für die Gesellschaft, obwohl im Bereich der Gesellschaft eine solche Übereinstimmung meist geringer ist. Dennoch gibt es auch hier, wie unser erstes Beispiel zeigt, trotz verschiedener Erscheinungsformen oft eine mehr oder weniger genaue Übereinstimmung im Wesen von Staaten, Gesellschaftsordnungen usw.

Wird eine Übereinstimmung im Wesen, in wesentlichen Merkmalen festgestellt, ist gegen Analogieschlüsse, die die Gesellschaft betreffen, nichts einzuwenden. Sie vermitteln zwar keine absolute Gewißheit, daß die gewonnenen Konklusionen wahr sind, können aber doch zu ihrer Begründung beitragen. Anders ist es, wenn solche Analogieschlüsse auf der Übereinstimmung in unwesentlichen Merkmalen beruhen; sie können allenfalls dazu anregen, nach einer Übereinstimmung auch in wesentlichen Merkmalen zu forschen. Wenn jedoch in wesentlichen Merkmalen grundsätzliche Unterschiede bestehen, sind Analogieschlüsse, die sich auf Übereinstimmung unwesentlicher Merkmale stützen, als völlig verfehlt oder gar als Mittel demagogischer Täuschungsversuche anzusehen. Das trifft z. B. auf das Vorgehen imperialistischer Konvergenz-

theoretiker zu. Aus der Tatsache, daß zwischen entwickelten sozialistischen und kapitalistischen Staaten gewisse Übereinstimmung in der Organisation der Produktion usw. besteht, schließen sie, daß die Unterschiede zwischen Sozialismus und Kapitalismus immer geringer werden und beide Gesellschaftsordnungen sich in Gestalt einer modernen Industriegesellschaft einander angleichen werden. Die Entwicklungstendenzen beider Gesellschaftsordnungen ergeben sich jedoch in Wahrheit aus einem Merkmal, in dem der größtmögliche Unterschied zwischen ihnen besteht: das gesellschaftliche Eigentum an den Produktionsmitteln im Sozialismus und das private Eigentum an den Produktionsmitteln im Kapitalismus. Daraus ergibt sich als Zielstellung für den Kapitalismus die Anhäufung von Reichtum und Macht in den Händen einer herrschenden Minderheit, als Zielstellung für den Sozialismus die Vermehrung des Reichtums aller und die Entwicklung der sozialistischen Demokratie. Eine Angleichung der beiden Gesellschaftsordnungen ist danach ausgeschlossen.

Der Trugschluß der Konvergenztheoretiker geht freilich nicht zu Lasten der Methodologie oder der objektiven Wirklichkeit, sondern hat seine Ursachen letztlich in einem begrenzten bürgerlichen Klassenstandpunkt.

Es gibt, wie gesagt, in der Natur wie in der Gesellschaft neben objektiver Verschiedenheit objektive Übereinstimmung. Beides findet seine Widerspiegelung im menschlichen Bewußtsein. Diese Widerspiegelung der objektiven Realität ist so beschaffen, daß die bewußtseinsmäßigen Abbilder, wenn sie richtig sind, mit den abgebildeten Beziehungen, Gesetzen usw. übereinstimmen. Dementsprechend sind die Abbilder von einander ähnlichen Beziehungen usw. der Wirklichkeit einander ebenfalls ähnlich. Wenn wir jetzt feststellen, daß z. B. Gesetze, obwohl sie verschiedene Bereiche der objektiven Realität widerspiegeln, strukturmäßig übereinstimmen, so berechtigt uns das zu der Annahme, daß auch die widergespiegelten Bereiche bis zum gewissen Grade in ihrer Stuktur übereinstimmen.

4.2.6. Plausibles Schließen

Deduktives Schließen erzeugt absolute Gewißheit, daß die Konklusion wahr ist, falls die Prämissen es sind; reduktives Schließen erzeugt relative Gewißheit, daß die Konklusion

wahr ist, falls die Prämissen es sind. In beiden Fällen ist die Gewißheit auf die Prämissen bezogen; diese Relativität der Gewißheit haftet also beiden Arten des Schließens an. Geht man über den einzelnen Schluß nicht hinaus, kann man kein günstigeres Resultat erzielen.

Käme ein Erkenntnisfortschritt nur über einzelne, isolierte Schlüsse zustande, wäre der Pessimismus gegenüber der Erkennbarkeit der Welt gerechtfertigt, den viele Idealisten vertreten. Aber deduktive und reduktive Schlüsse treten im täglichen Leben wie in der Wissenschaft immer zusammen auf. Dadurch ergänzen und stützen sie sich gegenseitig. Sie dienen dem Beweis oder der Widerlegung von Aussagen. Ein solcher Beweis wird selten durch eine einzige gedankliche Operation und ein für allemal erbracht. Der Beweis einer Aussage ist eingebettet in ein ganzes System gesicherten und erprobten Wissens und unterliegt direkt oder indirekt dem Kriterium der gesellschaftlichen Praxis. Er vollzieht sich in einem Prozeß, in dessen Verlauf die Erkenntnis von relativ wahren Aussagen niederen Grades zu Aussagen mit einem höheren Grad relativer Wahrheit aufsteigt und in dem der Grad der Gewißheit über den Wahrheitswert von Aussagen ebenfalls steigt. Das geschieht mit Hilfe reduktiver und deduktiver Schlüsse, reduktiver und deduktiver Beweise. In diesem Prozeß treten neben korrekten auch nichtkorrekte Schlüsse auf; diese werden im Erkenntnisfortschritt ebenso korrigiert wie falsche Aussagen.

Trotzdem sollte man sich nicht zu der Ansicht verleiten lassen, daß Sorgfalt beim Schließen überflüssig sei. Schlußfehler werden letztlich durch die Praxis korrigiert, aber diese Korrektur kann sehr teuer und sehr schmerzhaft sein. Man sollte sich auch nicht beim reduktiven Schließen von der pessimistischen Auffassung leiten lassen, man könne auf diese Weise ohnehin nur relative Gewißheit erlangen. Der Grad der relativen Gewißheit kann recht unterschiedlich sein. Deshalb ist es schon angebracht, zu untersuchen, wovon der Grad der Gewißheit abhängt, und den jeweils höchstmöglichen anzustreben.

Wir werden im folgenden einige Zusammenhänge zwischen Graden der Gewißheit beim reduktiven Schließen angeben[6].

[6] Dabei stützen wir uns auf G. Pólya, Mathematik und plausibles Schließen, Bd. 2, Typen und Strukturen plausibler Folgerung, Basel/Stuttgart 1963.

Diese Zusammenhänge sind so einleuchtend, daß wir darauf verzichten können, sie jeweils durch Beispiele zu illustrieren.

Zunächst betrachten wir einige Fälle, die bei der progressiven Reduktion auftreten können. Gegeben sind eine – eventuell recht kompliziert zusammengesetzte – Aussage A und eine Aussage B, die deduktiv aus A erschlossen werden kann, bzw. mehrere Aussagen B_1, B_2, ..., die alle deduktiv aus A erschlossen werden können. Wir wollen Gewißheit über den Wahrheitswert von A erlangen und gehen von dem Grundsatz aus, daß durch die Gewißheit, daß B wahr ist, sich die Gewißheit, daß A wahr ist, erhöht.

Wir nehmen an, wir können nicht mit Sicherheit feststellen, ob B wahr ist, aber es gibt Gründe, die für die Wahrheit von B sprechen; d. h., die Gewißheit, daß B wahr ist, wächst – dann wächst die Gewißheit, daß A wahr ist, etwas. Gibt es jedoch Gründe, die gegen die Wahrheit von B sprechen, d. h. sinkt die Gewißheit, daß B wahr ist, dann sinkt auch die Gewißheit, daß A wahr ist.

Wir nehmen nun an, wir können mit Sicherheit feststellen, daß B wahr ist. Wenn B auch ohne diese Feststellung schon recht wahrscheinlich war, steigt nach der Feststellung die Gewißheit, daß A wahr ist. Wenn dagegen B zunächst recht unwahrscheinlich war, steigt die Gewißheit, daß A wahr ist, erheblich. – Als Beispiel hierfür kann die in 4.2.2. besprochene Bestätigung der Hypothese Mendelejews dienen.

Zur Bestätigung einer Hypothese leitet man im allgemeinen nicht nur eine Aussage ab. Wir nehmen an, daß man aus A deduktiv auf B_1, B_2, ..., B_n, B_{n+1} schließen kann. Über die Wahrheit der Aussagen B_1, ..., B_n möge bereits Gewißheit bestehen. Falls B_{n+1} den übrigen abgeleiteten Aussagen sehr ähnlich ist und ebenfalls als wahr nachgewiesen wird, wächst die Gewißheit, daß A wahr ist, nur etwas. Wenn B_{n+1} hingegen von den übrigen abgeleiteten Aussagen sehr verschieden ist und als wahr nachgewiesen wird, wächst die Gewißheit, daß A wahr ist, erheblich.

In 3.2.7. hatten wir gesagt, daß es zur Widerlegung einer Konklusion nicht genügt, ihre Prämissen zu widerlegen. Im Rahmen des plausiblen Schließens kann der Zusammenhang zwischen einer Folgebeziehung und ihrem Vorderglied etwas differenzierter betrachtet werden. Wir gehen wieder davon aus, daß aus einer Aussage A deduktiv auf eine Aussage B geschlossen werden kann.

Falls absolute Gewißheit erzielt werden kann, daß A wahr ist, ist damit auch absolute Gewißheit erzielt, daß B wahr ist. Das ist ein deduktiver Schluß nach der Abtrennungsregel.

Wenn es Gründe gibt, aus denen heraus die Gewißheit, daß A wahr ist, wächst, ohne daß man die Wahrheit von A nachweisen kann, dann wächst auch die Gewißheit, daß B wahr ist.

Wenn dagegen die Gewißheit, daß A wahr ist, sinkt, d. h., wenn die Gewißheit, daß A falsch ist, steigt, sinkt die Gewißheit, daß B wahr ist, nur etwas.

Sogar wenn absolute Gewißheit besteht, daß A falsch ist, kann man lediglich sagen, daß die Gewißheit, daß B wahr ist, sinkt.

Am Ende betrachten wir Möglichkeiten des plausiblen Schließens aus zwei Aussagen, die im Sinne der Exklusion miteinander unverträglich sind. – Können wir absolute Gewißheit erlangen, daß eine der beiden Aussagen wahr ist, dann haben wir die absolute Gewißheit, daß die andere falsch ist. Das ist wiederum ein deduktiver Schluß.

Wenn die Gewißheit, daß eine der beiden Aussagen wahr ist, wächst, aber ihre Wahrheit nicht gewiß ist, sinkt die Gewißheit, daß die andere wahr ist bzw. wächst die Gewißheit, daß die andere falsch ist.

Diese Beziehung läßt sich nicht einfach umkehren. Wenn die Gewißheit, daß eine der beiden Aussagen wahr ist, sinkt, dann wächst die Gewißheit, daß die andere wahr ist, nur etwas.

Besteht die absolute Gewißheit, daß eine der beiden Aussagen falsch ist, wächst die Gewißheit, daß die andere wahr ist.

Diese Betrachtungen über das Steigen und Sinken der Gewißheit sind zweifellos nicht sehr ergiebig, wenn man sie auf einzelne, isolierte Schlüsse bezieht. Wenn man sie jedoch in größeren Zusammenhängen – z. B. in der wissenschaftlichen Arbeit – berücksichtigt, können sie wertvolle Hilfe leisten. Sie können z. B. die Auswahl erleichtern, wenn man sich zu entscheiden hat, für welche von mehreren möglichen Aussagen man weitere Gründe suchen sollte, um die Gewißheit, daß sie wahr ist, zu erhöhen, oder um sie auf anderem Wege mit größerer Gewißheit als wahr nachzuweisen.

Der gesamte Abschnitt über das reduktive Schließen hat gezeigt, daß von einer Theorie des reduktiven Schließens eigentlich erst einzelne Teilstücke existieren. Er konnte daher nur dazu dienen, einen Überblick über Erkenntnisse aus diesem Gebiet zu geben, die ohne unzumutbaren Aufwand dargestellt werden und die allgemein nützlich sein können.

LITERATUR FÜR DAS WEITERE STUDIUM

Die folgenden Literaturhinweise sollen dem Leser eine methodisch sinnvolle Weiterführung und Vertiefung des Logikstudiums an Hand des diesen Studien zugrunde gelegten Standardwerkes „Moderne Logik" von Georg Klaus und einiger ausgewählter Spezialarbeiten ermöglichen. Sie sind gegliedert in solche, die einer *Vertiefung* der durch diese Arbeit erworbenen Kenntnisse dienen [durch (*1*) gekennzeichnet], und in solche, die eine *Erweiterung* der Logikkenntnisse über den Rahmen des hier Dargestellten gestatten [durch (*2*) gekennzeichnet].

ZU KAPITEL 1.: LOGIK – DENKEN – SPRACHE

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
- Gegenstand der Logik: S. 1–9.
- Die materialistische Auffassung der Logik: S. 9–15.
- Formale Logik und Sprache: S. 15–17.
- Die Bedeutung der Logik: S. 17–21.

Georg Klaus: *Semiotik und Erkenntnistheorie*
- Natürliche Sprache – Fachsprache – Kunstsprache – Metasprache: S. 27–49.
- Allgemeine Grundbegriffe der modernen Semiotik: S. 51 bis 82.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
- Zur Geschichte der Logik: S. 21–28.

Georg Klaus: *Spezielle Erkenntnistheorie*
- Objektsprache und Metasprache: S. 173–179.
- Philosophische Bemerkungen zum Begriff der Objektsprache und der Metasprache: S. 179–191.

P. V. Kopnin: *Dialektik-Logik-Erkenntnistheorie*
- Dialektik und formale Logik: S. 135–172.

ZU KAPITEL 2.: AUSSAGENLOGIK

2.1. Grundbegriffe der Aussagenlogik

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
- Die Aussage als Grundform des menschlichen Denkens: S. 29–30.

Das Wesen der Aussage: S. 30–36.
Der semiotische Aspekt der Aussage: S. 36–41.
Konstante und Variable in der Aussagenlogik: S. 41–46.
Die logische Negation: S. 46–48.
Die logische Konjunktion: S. 48–50.
Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: S. 50–57.
Die logische Alternative: S. 57–63.
Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: S. 63–70.
Die logische Implikation: S. 70–77.
Die logische Äquivalenz: S. 81–84.
Die Extensionalitätsthese der Aussagenlogik und Bemerkungen über dialektische Logik: S. 120–129.

(2)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
Bemerkungen über die sogenannte strenge Implikation: S. 77–79.
Der sogenannte Satz vom zureichenden Grund: S. 79–80.
Weitere Aussagenverbindungen und die Reduktion von Aussagenverbindungen auf andere: S. 91–99.
Wichtige Gesetze der Aussagenlogik: S. 99–100.
Das Entscheidungsproblem: S. 101–109.
Über die sogenannte formale Wahrheit von Aussagen: S. 115–120.

2.2. Anwendungen der Aussagenlogik

(1)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
Aussagenlogisches Schließen: S. 84–91.
Aussagenlogik und Nervennetze: S. 129–137.
Anwendungen der Aussagenlogik in der Technik: S. 138 bis 151.

(2)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
Die systematische Ableitung von Folgerungen: S. 109 bis 115.
Dieter Bär: *Einführung in die Schaltalgebra*
Peter H. Starke: *Einführung in die Theorie der Nervennetze*

ZU KAPITEL 3.: PRÄDIKATENLOGIK

3.1. Begriffe und Begriffsbeziehungen

(1)

Georg Klaus: *Moderne Logik*
Über die Notwendigkeit der Erweiterung der Aussagenlogik: S. 152–154

Die Bestandteile der Aussage: S. 154–156.
Über Universal- und Existentialaussagen: S. 157–160.
Das Wesen des Begriffs: S. 165–175.
Extension und Intension von Begriffen: S. 175–179.
Beziehungen zwischen Begriffen: S. 182–191.
Über das Verhältnis von Klassenlogik und Prädikatenlogik: S. 236–239.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Kants Tafel der Urteile: S. 160–165.
Exkurs über dialektische Logik: S. 191–200.
Über das Verhältnis von Aussagenlogik und Klassenlogik: S. 220–222.

Wolfgang Rautenberg: *Über den Sprachgebrauch in der Mathematik*

3.2. Prädikatenlogisches Schließen

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Die traditionellen Grundlagen der Prädikatenlogik: S. 212–214.
Die unmittelbaren Schlüsse: S. 214–216.
Die Syllogistik: S. 217–220.
Über das Verhältnis von Klassenlogik und Prädikatenlogik: S. 236–239.
Einige Gesetze der Prädikatenlogik: S. 239–254.
Übergang zur mehrstelligen Prädikatenlogik: S. 258 bis 264.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Über das Verhältnis von Aussagenlogik und Klassenlogik: S. 220–223.
Über die allgemeingültigen Aussagenverbindungen der Klassenlogik: S. 223–225.
Anwendung der Klassenlogik auf die Lehre von den Syllogismen: S. 226–233.
Das Haubersche Theorem: S. 233–236.
Bemerkungen zum Entscheidungsproblem der einstelligen Prädikatenlogik: S. 254–258.

3.3. Probleme der Prädikatenlogik

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Erweiterungen der Prädikatenlogik und logische Antinomien: S. 282–287.

Der Satz der Identität in der Prädikatenlogik höherer Stufen: S. 293–302.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Die fundamentalen Begriffe der Axiomatik: S. 340–347.

Zum Verhältnis von Wahrheit und Beweisbarkeit: S. 347–358.

Nochmals über den Gegenstand der formalen Logik: S. 432–441.

ZU KAPITEL 4.: GRUNDBEGRIFFE DER DEFINITIONSLEHRE UND DER THEORIE DES REDUKTIVEN SCHLIESSENS

4.0. Zum Begriff der allgemeinen Methodologie

Alfred Kosing: *Der dialektische Materialismus als Methodologie der modernen Wissenschaft*

4.1. Über die Definition

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Die Begriffsbestimmung: S. 200–212.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Über die Definition durch Abstraktion: S. 279–281.

Über die Definition: S. 358–378.

Georg Klaus: *Spezielle Erkenntnistheorie*

Semantische Definitionen: S. 197–208.

D. P. Gorski: *Über die Arten der Definition und ihre Bedeutung in der Wissenschaft*

4.2. Reduktives Schließen

(*1*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Unterschied von deduktiver und reduktiver Methode S. 378–388.
Induktion: S. 396, 398–403.
Die Millschen Methoden der Induktion: S. 403–411.
Der Analogieschluß: S. 415–422.

(*2*)

Georg Klaus: *Moderne Logik*

Über die Formen der Hypothese: S. 388–395.
Das Prinzip der Einfachheit: S. 412–415.
System und Struktur: S. 422–425.
Wahrscheinlichkeit und Statistik: S. 425–432.

A. I. Ujomov: *Die Hauptformen und -regeln der Analogieschlüsse*

LITERATURVERZEICHNIS

K. Ajdukiewicz, Abriß der Logik, Berlin 1958.

G. Asser, Einführung in die mathematische Logik, Teil I, Aussagenkalkül, 3. Aufl., Leipzig 1967.

D. Bär, Einführung in die Schaltalgebra, Reihe Automatisierungstechnik, hrsg. von B. Wagner und G. Schwarze, Bd. 25, Berlin 1965.

K. Berka und L. Kreiser, Logik-Texte, kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin 1971.

I. M. Bocheński, Die zeitgenössischen Denkmethoden, München (o. J.).

I. M. Bocheński, Grundriß der Logistik, aus dem Französischen übersetzt, neu bearbeitet und erweitert von Albert Menne, Paderborn 1962.

D. P. Gorski, Über die Arten der Definition und ihre Bedeutung in der Wissenschaft, in: Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis, Berlin 1967, S. 361–433.

D. Hilbert, W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 5. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1967.

Die Klassifikation der Wissenschaften als philosophisches Problem, hrsg. von R. Rochhausen, Berlin 1968.

G. Klaus, Spezielle Erkenntnistheorie, 2. Aufl., Berlin 1966.

G. Klaus, Die Macht des Wortes, 5. Aufl., Berlin 1969.

G. Klaus, Moderne Logik, Abriß der formalen Logik, 5. Aufl., Berlin 1970.

G. Klaus, Semiotik und Erkenntnistheorie, 2. Aufl., Berlin 1969.

H. Klotz, Der philosophische Beweis, Berlin 1967.

P. V. Kopnin, Dialektik-Logik-Erkenntnistheorie, Lenins philosophisches Denken, Erbe und Aktualität, Berlin 1970.

A. Kosing, Der dialektische Materialismus als Methodologie der modernen Wissenschaft, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Sonderheft, Berlin 1965, S. 45–58.

F. Loeser, Interrogativlogik, Zur wissenschaftlichen Lenkung des schöpferischen Denkens, Berlin 1968.

A. Menne, Einführung in die Logik, Bern/München 1966.

W. van Orman Quine, Grundzüge der Logik, Frankfurt (M.) 1969.

W. Rautenberg, Über den Sprachgebrauch in der Mathematik, in: DZfPh, Heft 6, Berlin 1965, S. 721–738.

A. Schaff, Einführung in die Semantik, Berlin 1966.

W. Segeth, Methodische Regeln, in: DZfPh, Heft 7, Berlin 1967, S. 792–806.
A. A. Sinowjew, Über mehrwertige Logik, Ein Abriß, Berlin/Braunschweig/Basel 1968.
A. A. Sinowjew, Komplexe Logik, Grundlagen einer logischen Theorie des Wissens, übers. u. hrsg. von H. Wessel, Berlin 1970.
K. Söder, Formale Logik für Juristen, Lehrhefte für das Fernstudium, hrsg. von der Juristischen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin, Hefte 1–13, Berlin 1966–1968.
P. H. Starke, Einführung in die Theorie der Nervennetze, in: DZfPh, Heft 1, Berlin 1965, S. 64–86.
L. P. Teplow, Grundriß der Kybernetik, Berlin 1966.
A. I. Ujomov, Die Hauptformen und -regeln der Analogieschlüsse, in: Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis, Berlin 1967, S. 307–360.
T. Varga, Mathematische Logik für Anfänger, Aussagenlogik, Berlin 1964.
Wege des Erkennens, Philosophische Beiträge zur Methodologie der naturwissenschaftlichen Erkenntnis, hrsg. von H. Laitko und R. Bellmann, Berlin 1969.
H. Wessel, Logik (Ergänzungsmaterial), Fernstudium Philosophie, Studienanleitung, hrsg. von der Abteilung Fernstudium der Sektion Philosophie der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin 1968.
Philosophisches Wörterbuch, hrsg. von G. Klaus und M. Buhr, 6. Aufl., Leipzig 1969.

NAMENREGISTER

(„B1" und „B2" verweisen auf die Beilagen 1 und 2 am Schluß des Bandes)

Ackermann, Wilhelm 224, 287, B2
Ajdukiewicz, Kazimierz 287
Aristoteles 1, 2, 35, 37, 49, 55, 167, 169, 170, 173, 219
Asser, Günter 287, B2

Bär, Dieter 282, 287
Bellmann, Reinhard 40, 288
Berka, Karel 3, 287
Bocheński, Innocent Maria 287
Boole, George 274
Buhr, Manfred 3, 288

Carnap, Rudolf 83, B2
Church, Alonzo 222

Eichhorn I, Wolfgang 8
Engels, Friedrich 4, 13, 232

Frege, Gottlob 1, 199f., B1

Gödel, Kurt 225
Gorski, D. P. 284, 287

Hilbert, David 224, 287, B2

Klaus, Georg 3, 8, 14, 15, 124, 181, 281ff., 287, 288, B2
Kleene, S. C. 119
Klotz, Hans 287
Kopnin, P. V. 281, 287
Kosing, Alfred 2, 284, 287
Kreiser, Lothar 3, 287
Kumpf, Fritz 8

Laitko, Hubert 40, 288
Leibniz, Gottfried Wilhelm 1, 225
Lenin, W. I. 8, 20f., 36, 228, 248
Loeser, Franz 8, 287
Lorenzen, Paul B2
Łukasiewicz, Jan B2

Marx, Karl 4, 13, 228
McCulloch, Warren S. 116
Menne, Albert 287
Mill, John Stuart 267

Pitts, Walter 116
Pólya, G. 277

Quine, Willard van Orman 287

Rautenberg, Wolfgang 283, 287
Rochhausen, Rudolf 2, 287
Rolfes, E. 35
Rubinstein, S. L. 14, 37
Russell, Bertrand B2

Schaff, Adam 287
Scholz, Heinrich B2
Schröter, Karl B2
Segeth, Wolfgang 288
Sinowjew, A. A. 40, 288
Söder, Karl 288
Starke, Peter H. 282, 288

Teplow, Lew Pawlowitsch 288

Ujomov, A. I. 285, 288

Varga, Tamás 288

Wessel, Horst 40, 288
Whitehead, Alfred North B2
Wittgenstein, Ludwig 14
Wittich, Dieter 2

SACHREGISTER

„aber (auch)" 45
Abstraktionsklasse 217
Abtrennungsregel 90, 224
Algebra der Logik 274
Allaussage *131*, 146, 175, 219
– und Existentialaussage *160*
– in der natürlichen Sprache 144
–, negierte 133, 163
„alle" 131, 144
Allgemeinbegriff 27f., 204
Allgemeines 124
allgemeingültig
–, aussagenlogisch *65*, 155
–, prädikatenlogisch 153, 155
Alloperator 131, 134, 144, 147f.
– und Existentialoperator 166
–, negierter 134
Allquantor *siehe* Alloperator
Alternative *51*, 84, 89f.
– und Exklusion 54f.
– und Implikation *69*
– und Konjunktion *69*, 90
Analogieschluß 272ff.
Anführungszeichen 30f.
Antinomie, logische 212
Antivalenz *siehe* Kontravalenz
äquivalent, semantisch 54, 70f.
Äquivalenz 60, *61*, 70f., 90
– und Implikation 62f.
– und Replikation 62f.
Äquivalenzrelation 217
Artbegriff und Gattungsbegriff *138*, 143f., 254f.
Artikel
–, bestimmter 144, 204
–, unbestimmter 144
Aufforderung 25ff., 38, 229
– und Aussage 96f.
Aufforderungssatz 25ff.
Aufzählung 236
Ausdruck
–, allgemeingültiger *65*, *153*
–, erfüllbarer *65*, *153*
–, logischer 41, 242f.
Aussage 25ff., 33ff., *36*, 42
– und Aufforderung 96f.
– und Aussagefunktion 127ff., 208
– und Urteil 37f.
–, singuläre *siehe* Einzelaussage
Aussageform *siehe* Aussagefunktion
Aussagefunktion 127, *128*, 133, 204
– und Aussage 127ff., 208
– und Begriff 127ff.
Aussagesatz 25ff., 36, 45
Aussagen
–, kontradiktorische 167, 176
–, konträre 167, 176
–, subkonträre 167, 176
Aussagenlogik 9f., 33ff., 150
Aussagenvariable 38ff.
Aussagenverbindung 40, 42, 45
–, extensionale 41, 83f.
–, intensionale 83f.
Axiom 223
Axiomatisierung
– der Aussagenlogik 224
– außerlogischer Gebiete 224f.
– der Prädikatenlogik 224f.
Axiomensystem 223

Bamalip 220
Barbara 170
Bedeutung 16
Bedingung
–, hinreichende 56ff.

Bedingung
–, hinreichende und notwendige 56, 63
–, notwendige 56, 60
Begriff 121, *123*, 125
– und Aussage 127
– und Aussagefunktion 127ff.
– und Klasse 125ff.
–, sprachliche Form 124f.
–, subordinierender *siehe* Gattungsbegriff
–, subordinierter *siehe* Artbegriff
Begriffe
–, disjunkte *137*
–, extensional identische *139*, 144, 211
–, intensional identische 211
–, interferierende *140*
–, konträre 140
–, konverse *141*
–, koordinierte 140
Begriffsbeziehungen 134ff.
Begriffsdefinition 250, 252
Begriffsgliederung 254ff.
–, dichotomische 255
Begriffsinhalt *siehe* Intension eines Begriffs
Begriffsüberbestimmung 252
Begriffsumfang *siehe* Extension eines Begriffs
Begriffsunterbestimmung 252f.
Begriffsverschiebung *siehe* Begriffe, interferierende
Beispiel 236
Belegung
–, aussagenlogische 40
–, prädikatenlogische 129f., 151
Benennung 236
Beschreibung 236
Bestätigung 263f.
Bestimmung
–, definitionsähnliche 235ff.
– eines Terminus durch einen Kontext 237
Beweis
–, deduktiver 194f.
–, direkter 195ff.
–, indirekter 197
–, individueller 222f.
Bezeichnung 16
Beziehung 34, 128, 209f.
Bindewörter 40, 45, 50, 56, 59, 84, 91

Celarent 170
Charakteristik 236

„dann und nur dann, wenn" 47, 60
Darapti 219
Darii 170
Definiendum 237
Definiens 237f.
Definition 233ff., *251*
– per analogiam 236
–, analytische 250
–, Anforderungen an eine 242, 252ff.
– durch Angabe der Bestandteile 246
– durch Angabe von Schlüsselmerkmalen 246
– durch Axiome 241
– durch Beschreibung 245
– durch Bestimmung der Funktion 247
– durch Bestimmung der für ein Objekt geltenden Gesetze 247
– durch Bestimmung der Ursache 246
– durch Bestimmung des Wesens 246
– durch Bestimmung des Zwecks 247
–, direkte *siehe* Definition, explizite
–, explizite 240
–, sprachliche Form 237
–, genetische 246f.
– durch Idealisierung 246
–, implizite 240f.
–, induktive 242
–, operationale 247

Definition
–, ostensive 236
–, rekursive *siehe* Definition, induktive
–, semantische 250f.
–, syntaktische 249
–, synthetische 250f.
Definitionsregel 22
Denken
–, abstraktes 20
–, dialektisches 20f.
–, logisches 10f.
–, bewußtes 12
–, spontanes 12
Denkgesetze 11
Denkstrukturen 7, 22
Designat 16
Deskription *siehe* Kennzeichnung
Dialektik
– des Denkens 20f.
–, objektive 3
–, subjektive 3
Differenzierung 236f.
Dilemma 91, 173
Distributionsregel *76*, 77f.

Eigenname *siehe* Individuenname
Eigenschaft 34, 128, 209f.
Einsetzungsregel *71*, 224
Einzelaussage 130
Element einer Klasse *135*
Eliminierbarkeit von Definitionen 252
Enthaltenseinsbeziehung 138f., 143f.
Entscheidung
– aussagenlogischer Ausdrücke 67
– mit Hilfe von Normalformen 74ff.
– auf indirektem Wege 71ff.
– prädikatenlogischer Ausdrücke 155f., 173ff.
– mit Hilfe von Normalformen 189ff.
– auf indirektem Wege 177ff.
Entscheidungsproblem 67, 221ff.
Entscheidungsverfahren 67, 221ff.
–, aussagenlogische 67, 74ff., 221
–, prädikatenlogische 180ff., 221ff.
„entweder – oder" 51f.
erfüllbar
–, aussagenlogisch *65*, 155f.
–, prädikatenlogisch *153*, 155f.
Erkenntnistheorie 3, 6, 33, 125
Erklärung 261f.
„es gibt" 130, 134, 202f., 220f.
„es ist nicht wahr, daß" 42, 44, 133f.
Existentialaussage *130*, 146, 202f., 220f.
– und Allaussage *160*
–, negierte 132
– in der natürlichen Sprache 144f.
Existentialoperator 130, 134, 144, 147f., 202
– und Alloperator 166
–, negierter 134
Existenzaussage *siehe* Existentialaussage
Existenzquantor *siehe* Existentialoperator
Exklusion *53*, 84, 89f.
– und Alternative 54f.
Extension eines Begriffs 125ff., *126*

Fachsprache *siehe* Wissenschaftssprache
Falschheit 35, 36
–, absolute 39, 55f.
–, relative 39, 55
Falsifikation 264
Felapton 220
Ferio 170
Fesapo 220
Festsetzungsdefinition 251

Feststellungsdefinition 250
Formalismus 22
Formregel 23
Frage 25ff.
Fragenlogik 26
Fragesatz 25f.

Gattungsbegriff und Artbegriff *138*, 143f., 254f.
Gegenimplikation *siehe* Replikation
„genau dann, wenn" 47, 60
Gesetz
–, assoziatives 274
–, aussagenlogisches *65*, 66
–, distributives 274
–, kommutatives 57, 274
–, logisches 34, 50
–, prädikatenlogisches *153*, 154f.
Gesetzeslogik 9
Gleichheit 202
Grundzeichen 22

Haubersches Theorem 172
Hinterglied einer Implikation 56
Hinweis 236
Hypothese 262ff.
–, bestätigte 263f.
–, falsifizierte 264

Identität 199ff.
– von Individuen 199, 210f.
Identitätsaussage 200
„immer wenn – so" 56, 62
Imperativlogik 26
Implikation 56, *57*, 90, 92, 95ff.
– und Alternative *68*
– und Äquivalenz 62f.
– und Replikation 62
Individualbegriff 27f., 204
Individuenbereich 34, 128, 151, 153
Individuenkonstante 142
Individuenname 27f., 129, 203f.
Individuenvariable 129, 134
Individuum 27f., 34, 121f., 135
Induktion 265ff.
–, aufzählende 265ff.
– durch vollständige Aufzählung 265f.
–, ausschaltende 265, 267ff.
–, unvollständige 266f.
Intension eines Begriffs 125ff., *126*
Interpretation *siehe* Belegung, prädikatenlogische
Interrogativlogik 26
„ist" 136, 139, 200, 238

„jedes" 131, 134
Jota-Operator 204

Kategorie, semantische 24
Kennzeichnung 203ff.
Kettenschlußregel 91
Klammern 47
Klasse
– von Individuen 28, 122, 123, 125, 135
– und Allgemeines 124
– von Klassen 123, 125
–, leere *siehe* Nullklasse
– höherer Stufe *siehe* Klasse von Klassen
Klassenname 27
Klassifikation 255ff.
Komplementärklasse 175
Konjunktion 45, *46*, 84, 88
– und Alternative *69*, 90
Konklusion 85f., 102
Konnektor
–, aussagenlogischer 84
–, logischer 40, 41
–, zweistelliger 47
Konstante 41
–, aussagenlogische 142
–, prädikatenlogische 142
Kontextdefinition *siehe* Definition, implizite
Kontradiktion
–, aussagenlogische *65*, 66, 156
–, prädikatenlogische *153*, 156

Kontraposition
–, Regel der 87, 88
–, Regel der zusammengesetzten 91
–, Schluß der 168
Kontravalenz 51, *52*, 54, 89f.
Konversion, Schluß der 168

Logik
–, angewandte 227
– der Aufforderungen 8, 26
– der Aussagen 8f., 26, 127
–, Bedeutung des Wortes 4f.
–, dialektische 3, 7f., 83, 125, 152
– der Dinge 5
–, elementare 10
–, formale *7*, 38f., 125, 152, 232f., 258
–, Anwendung 4
–, Aufbau 9f.
–, Axiomatisierung 224f.
–, Gegenstand 3, 5ff.
–, Geschichte 1f.
–, philosophische Interpretation 3f.
– und Mathematik 1f.
– und Philosophie 1ff., 11f.
–, Sprache 22, 23, 41
– der wissenschaftlichen Forschung 5
– der Fragen 8, 26
– der Geschichte 5
–, intuitionistische 9
–, klassische 9
–, mathematische 1f.
–, mehrwertige 39f.
–, nichtklassische 9
–, reine 227
–, symbolische 1f.
–, traditionelle 1, 167ff., 198
–, zweiwertige 9, 39
Logistik 1f.

Merkmal 34, 209f.
–, individuelles 123
–, invariantes 122f.
Metasprache 29
Metatheorie 28f.
Methode 228f.
–, dialektisch-materialistische 228, 230ff.
– der Resterscheinung 270
– der Übereinstimmung 268f.
– des Unterschieds 269f.
– der begleitenden Veränderungen 271
Methodik 229
Methodologie 227ff.
Millsche Methoden der Induktion 267ff.
Mittelbegriff 169
Modus 169f.
–, gültiger 170
– (ponendo) ponens 90, 172f.
– ponendo tollens 88, 90, 173
– tollendo ponens 88, 90, 173
– (tollendo) tollens 90, 172f.

„nachdem“ 84
Name 16, 27
–, allgemeiner 27f., 204, 208
–, metasprachlicher 30
Negat 42
Negation
–, aussagenlogische *42*, 44f., 84
–, dialektische 44f.
–, mehrfache 42ff.
–, prädikatenlogische 132f., 163ff.
Neutralität
–, aussagenlogische *65*, 66
–, prädikatenlogische *153*
„nicht“ 42, 44, 132ff., 163ff., 213
Nichtidentität 202
Nominaldefinition 244, 249ff.
Normalform 67
–, alternative 79f., 191f.
–, kanonische konjunktive 102
–, konjunktive 78f., 190f.
–, verneinungstechnische 75, 76
Normenlogik 26
Nullklasse 126, 153, 219ff.
„nur wenn – so“ 59, 62

Objektsprache 28
– und Metasprache 29ff.
Objekttheorie 28
„obwohl“ 91
„oder“ 50f., 52, 53, 55, 88ff.
–, ausschließendes 52
–, einschließendes 52
„oder (auch)“ 51
„oder/und“ 51
Operator 130, 132
Opposition, Schluß der 168
Ordnungsrelation 218
„Organon“ 167

Philosophie, marxistisch-leninistische 3
Prädikat 133
–, einstelliges 133f., 214
–, mehrstelliges 133f., 214
–, negiertes 134, 213
–, nicht negiertes 213
– der ersten Stufe 209, 214
– höherer Stufen 209ff., 214
Prädikatenkonstante 142
Prädikatenlogik 10, 121ff., 150
–, einstellige 10, 221f.
–, mehrstellige 10, 222
– mit Identität 199ff.
– der ersten Stufe 10, 121ff.
– höherer Stufen 10, 207ff.
Prädikatenprädikat *siehe* Prädikat höherer Stufen
Prädikatenvariable 133f., 208
Prädikatsbegriff 169
Pragmatik 16
Prämisse 85
Praxis 49, 225f.

Quadrat, logisches 167, 176
Quantor *siehe* Operator

Realdefinition 243, 245ff.
Reduktion
–, induktive 261, 265ff.
–, nichtinduktive 261, 272ff.
–, progressive 262ff.
–, regressive 261f.
Regel
–, methodische 26, 96f., 228f.
– zur Reduzierung von Negationszeichen *43*
– zur Umformung von All- in Existentialaussagen und umgekehrt *160*
– zur Umformung von Alternativen in Implikationen *69*
– zur Umformung von Alternativen in Konjunktionen *69*
– zur Umformung von Implikationen in Alternativen *68*
– zur Umformung von Konjunktionen in Alternativen *69*
Regellogik 9
Relation 133f.
–, asymmetrische 215f.
–, intransitive 216f.
–, irreflexive 215
–, konnexe 218
–, nichtreflexive 215
–, nichtsymmetrische 215f.
–, nichttransitive 216
–, reflexive 215
–, symmetrische 215f.
–, transitive 216
Relationslogik 10
Replikation 59, *60*, 90
– und Alternative 69
– und Äquivalenz 62f.
– und Implikation 62

Sachdefinition *siehe* Realdefinition
Sachverhalt 25, 33f., *35*, 45
Satz 24ff.
– vom ausgeschlossenen Dritten 55f., 152, 197, 198, 208f.
– der Identität 198f.
– vom ausgeschlossenen Widerspruch 48f., 197, 198, 208
Satzlogik 9
Schaltalgebra 110ff.

Schließen 85, *86*, 87
–, aussagenlogisches 85ff., 149f.
–, deduktives 86, 258ff.
–, plausibles 276ff.
–, prädikatenlogisches 148ff.
–, reduktives 86, 257ff., 279
Schluß 85f.
–, deduktiver 86f., 195, 258f.
–, reduktiver 259ff.
–, unmittelbarer 167f.
–, verkürzter 97ff.
–, zwingender 87
Schlußfigur 169
Schlußregel 23, 26f., 86f., 96f.
– und Äquivalenz 95f., 159
–, gültige 87, 95
– und Implikation 92f., 95ff., 158
Schlußschema 88
Semantik 16
Semiotik 15f.
Sigmatik 16
Sinnregel 23
Sollsatzlogik 26
„sowohl – als auch" 45, 84
Sprache
–, formalisierte 22ff., 31
–, natürliche 17, 19
– und Wissenschaften 17ff.
–, symbolisierte 21f., 23
Sprachstufen 28ff.
Stufen, semantische *siehe* Sprachstufen
Subalternation, Schluß der 168
Subjektsbegriff 169
Subordination *siehe* Artbegriff und Gattungsbegriff
Syllogismus 169
–, disjunktiver 173
–, hypothetischer 172f.
Syllogistik 169ff.
Syntaktik 15f.

Terminologie 18
Terminus 18
Transitivität, Regel der 91

Umformung prädikatenlogischer Ausdrücke 162
Umformungsregel 23, 86f.
„und" 45, 84, 146f., 239f.
Unterscheidung 236f.
„unverträglich" 53
Urteil 37f.

Variable 41
–, freie 128, *132*
–, gebundene *132*
Vergleich 236
Vorderglied einer Implikation 56

„während" 84
Wahrheit 35f., 225f.
–, absolute 35f., 39f., 55f.
–, objektive 35, 36, 37
–, relative 35f., 39f., 55f.
Wahrheitskriterium 49, 226
Wahrheitsmatrix 48, 67
Wahrheitswert 39, 194,
„weder – noch" 84
„weil" 83f.
„wenn – so" 56, 63
Werteverlauf 48
werteverlaufsgleich 54
Widerlegung 194, 197f.
Widerspiegelung 123f.
Widerspruch
–, dialektischer 49f.
–, logischer 49f., 189, 212
Widerspruchsfreiheit
– von Definitionen 252
–, logische 221
Wirkungsbereich eines Operators 132, 161, 162
Wissenschaftslogik 5
Wissenschaftssprache 19ff.

Zahlwörter, unbestimmte 144f.
Zeichen 15f., 41
Zeichenreihe 16, 41
Zuordnungsdefinition 251
„zwar – aber auch" 84
Zweiwertigkeit, Prinzip der *39*, 40

SYMBOLREGISTER

Z .	15	~ ∃(x)	132
A .	15	~ ∀(x) .	133
O .	15	A(x), B(x), . .	133f.
M .	15	R(x, y), S(x, y).	133f.
p . . .	26	~ P(x) . .	134
p!, !p :	26	~ R(x, y),	134
p?, ?p .	26	$\breve{R}$(y, x) . .	141
p, q, r,	38f.	a . .	167
w . .	40	e	167
f .	40	i .	167
~	42	o .	167
∧	46	=	199
∨	51	≠	202
) (	52	ι(x) .	204
| .	53	ℭ(A) .	210
→	56f.	ℑ(R, S)	210
←	59f.	$\overset{e}{=}$	211
↔ . .	60f.	$\overset{!}{=}$.	211
x, y, z,	129	$=_{\mathrm{Def}}$	238
∃(x)	130	↛	269
∀(x)	131	⇒	269