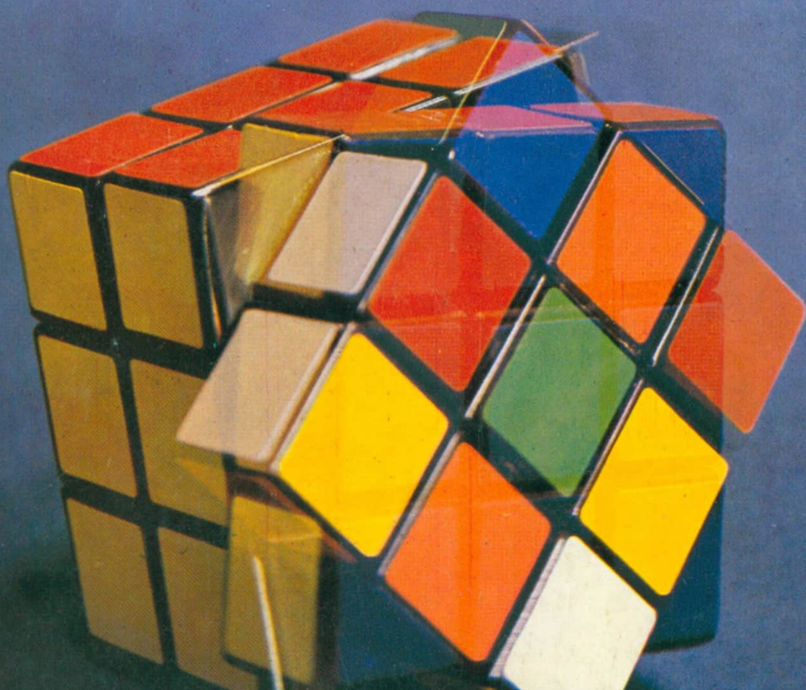
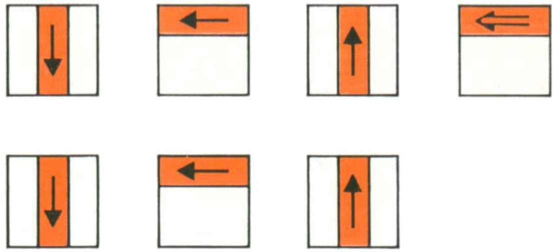
Wolfgang Schifferdecker

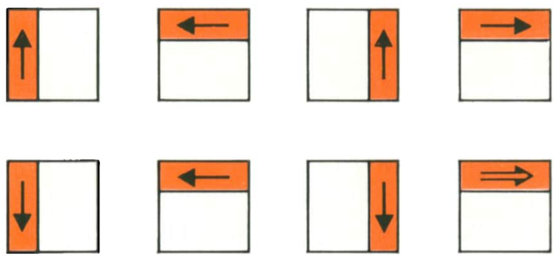
Der Dreh mit dem Würfel



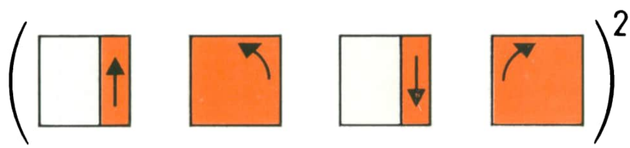
$A_1 =$



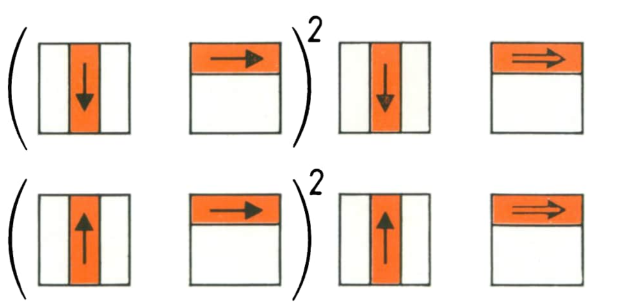
$A_2 =$



$A_3 =$



$A_4 =$



W. Schifferdecker

Der Dreh mit dem Würfel

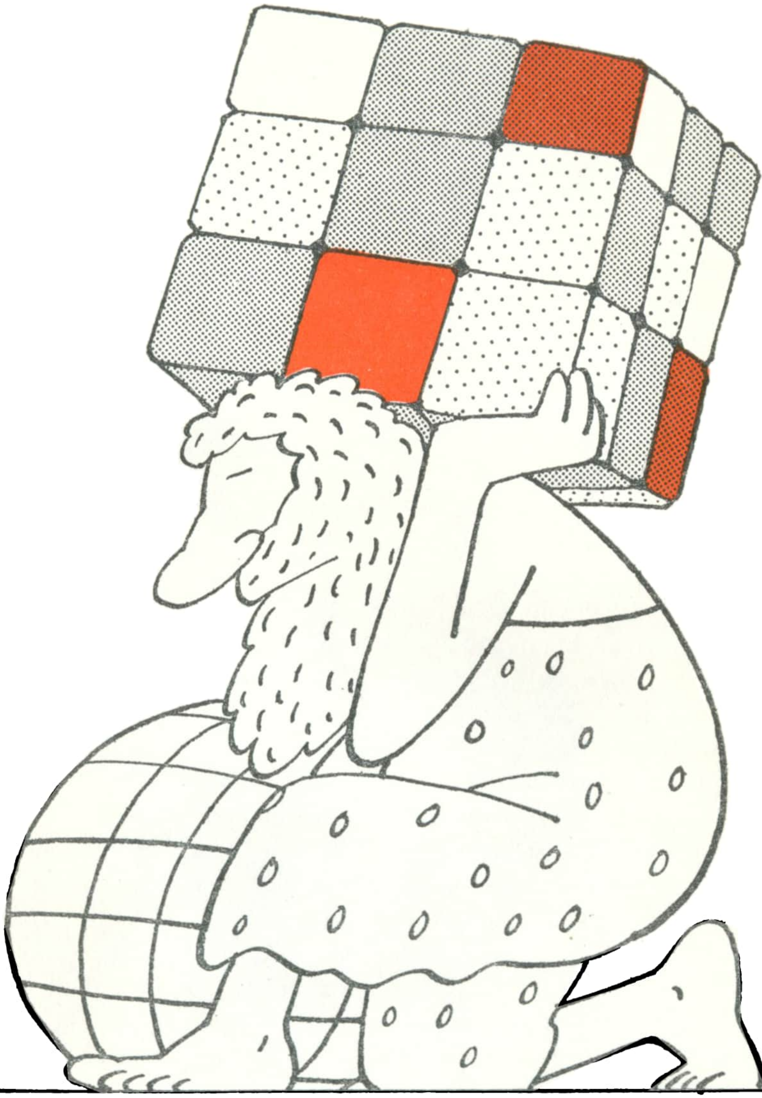
Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin

2. Auflage 1983. 21.—35. Tausend

Verlag für populärwissenschaftliche Literatur, Leipzig 1982
VNL 212-475/170/83
LSV 1009/00770
Lektor: Eckhart Reinhold
Einbandfotos: Stefan Thomm
Illustrationen: Manfred Bofinger
Zeichnungen: Willy Weitzmann
Buchgestaltung: Peter Mauksch
Printed in the German Democratic Republic
Satz und Druck: Gutenberg Buchdruckerei und Verlagsanstalt Weimar,
Betrieb der VOB Aufwärts
Buchbinderei: Papier- und Plastverarbeitung Leipzig
Best.-Nr. 6538711

Wer den Spieltrieb kennt, weiß,
welcher Zauber ihm innewohnt.
Gerhart Hauptmann

Für Skeptische



Warum noch ein Würfelbuch?

Haben Sie eine Ahnung, wieviel Geduld ein Lehrer braucht, wenn seine Schüler immer wieder mit derselben Sache Schwierigkeiten haben? Er erklärt sie ihnen einmal, zweimal ... fünfmal – die Probleme bleiben! Er sucht Rat bei erfahrenen Kollegen – die aber sind in der gleichen Zwangslage wie er. Was kann der arme Lehrer nun noch tun? Er denkt sich neue, bessere Methoden des Vermittelns aus!

So etwa muß es dem Dozenten für Innenarchitektur und Design *Ernö Rubik* an der Budapester Hochschule für Angewandte Künste ergangen sein, als er bei seinen Studenten ständig auf ungenügendes räumliches Vorstellungsvermögen stieß. Da sich diese spezielle Fähigkeit zwar schlecht durch Erklärungen, gut jedoch durch entsprechendes Training verbessern läßt, suchte Rubik nach einem geeigneten Hilfsmittel. Er fand es in einem hübschen würfelförmigen Farbenpuzzle.

Ob der Erfinder damit sein ursprüngliches Anliegen verwirklicht sah, wissen wir nicht; gewiß aber hat er die erstaunlichen Möglichkeiten dieses Würfels als packendes Unterhaltungsspiel erkannt, denn Rubik ließ seine Idee am 31. Januar 1975 patentieren. Daß daraus wenige Jahre später eine Weltsensation wird, hat er damals bestimmt noch nicht geahnt.

Sie merken schon, wir sind mitten in einem kurzen Abriß der Geschichte des »Magischen Würfels«, den Sie – warum sollten Sie sonst dieses Büchlein lesen – zweifellos kennen und der Sie vielleicht schon manche Stunde beschäftigt hat.

Wollen Sie mehr über seine Geschichte erfahren? Gut! Vorläufig gab es noch keine Weltsensation, und Ernö Rubik, er war dreißig Jahre alt, hatte 1974 sein erstes gebrauchsfähiges Muster gebaut. Anfangs mit sechs einfarbigen Flächen versehen, ist der Würfel durch wenige Drehungen seiner Schichten in einen völlig bunten

Zustand überführbar. Nun benötigte der Erfinder selbst noch etwa vier Wochen, bis er sein eigenes Werk beherrschte, den Würfel also aus jeder beliebigen Verdrehung in seinen ursprünglichen Zustand versetzen konnte.

So war der Schöpfer dieses interessanten Rätsels gezwungen, es ebenfalls mit all den Schwierigkeiten zu lösen, die einige Jahre später Millionen Menschen in aller Welt erstaunlich viel Zeit und Nerven kosten sollten.

Doch zunächst wurde der magische Würfel ausschließlich in Ungarn und nur in recht kleiner Serie produziert, von millionenfacher Verbreitung konnte keine Rede sein. Unter den Wissenschaftlern dieses Landes aber sprach sich Rubiks Idee bald herum, und so wurde der Würfel 1978 auf einem internationalen Mathematikerkongreß in Helsinki von ungarischen Teilnehmern herumgereicht. Nun bekamen ihn Kollegen aus verschiedenen Ländern in die Hände, die der Würfel buchstäblich von Stund an nicht mehr losließ. Man fand und berechnete an ihm Strategien und Teiloperationen für seine Lösungen. Der Würfel diente als Beispiel für bekannte mathematische Beziehungen, aber auch eine Reihe neuer interessanter theoretischer Erkenntnisse über dieses Spielzeug wurde gewonnen.

Wie die Zahl aller möglichen Würfelstellungen ermittelt werden kann, steht im 6. Kapitel. Es sind, man ist kaum geneigt, das zu glauben, *über 43 Trillionen!* Haben Sie eine Vorstellung von der Größe dieser zwanzigstelligen Zahl?

Hätte man von jeder erreichbaren Stellung einen Würfel, und würde man sie aneinanderlegen, die entstehende Schlange führte mehr als sechzig milliardenmal um die Erde. Ist Ihnen diese Zahl immer noch nicht vorstellbar? Jeder der etwa vier Milliarden Erdbewohner könnte also mehr als fünfzehn Windungen dieser Schlange erhalten. Würde er nun Tag und Nacht all seine Würfel aufsammeln und für jeden nur eine Sekunde benötigen, hätte er in siebzigjähriger Arbeit erst ein Fünftel seines Besitzes geborgen. Jedoch genug der Zahlenspielereien, zurück zur Geschichte des magischen Würfels.

Auf einer ungarischen Spielwarenmesse hatte der amerikanische Spielzeugkonzern »Ideal Toy Corporation« den richtigen Riecher: Er erwarb die Lizenz zur Produktion und zum Verkauf dieses

Puzzlespiels, startete eine Werbekampagne, und nun begann etwas, was in dieser Branche wohl noch nicht erlebt worden war: Ein wahres Würfelfieber verbreitete sich über viele Länder. Der rätselhafte, in sich bewegliche Plastkörper mit den vielen bunten Flächen fand reißenden Absatz, die Produktion in Ungarn, den USA, Japan und anderen Staaten konnte den Bedarf bald nicht mehr decken. Überall wurde »gewürfelt«, Computerrechenzeit blockiert, wurden Nächte durchwacht, Vorlesungen oder Unterrichtsstunden versäumt, Ehekrisen ausgelöst, Arbeitszeit zweckentfremdet ...

Und da es noch keine allgemein zugänglichen Lösungsvorschriften gab, waren viele Menschen, die es nicht schafften, diese »harte Nuß« selbst zu knacken, der Verzweiflung nahe. Nach und nach aber erschienen in Zeitschriften Algorithmen zur Lösung des Problems, in mehreren Ländern wurden Würfelbücher verlegt; jedermann konnte sich einen Lösungsweg beschaffen, die Wogen glätteten sich langsam.

Manch einer stieg nach dem Kennenlernen einer Lösung aus dem Kreis der Würfelenthusiasten aus. Viele aber blieben diesem Spiel treu, entdeckten immer neue Schönheiten in ihm, kürzere Zugfolgen, schnellere Strategien, hübsche Muster, brachten zusätzliche Schwierigkeiten am Würfel an, lernten Entdeckerfreude kennen, kurz: Sie fanden immer weitere geistige Anregung an diesem genial durchdachten Spielzeug.

Natürlich gibt es auch eine Menge Feinde dieses farbigen Puzzles. Sie sind der Meinung, der magische Würfel zerstöre jede Geselligkeit, die Beschäftigung mit ihm schlucke geistige Potenzen, die sinnvoller angewendet werden könnten, und diese Leute bezweifeln, daß er überhaupt einen didaktischen Wert besitzt. Tatsächlich gibt in der Anfangsphase fast jeder Mensch, der sich intensiv mit Rubiks Meisterstück befaßt, Anlaß zu dieser Einschätzung. Wenn man jedoch bedenkt, wieviel Geselligkeit das so beliebte Fernsehen zerstört, wieviel Stumpfsinn hier oft verbreitet wird, muß man den Würfel in dieser Beziehung nachgerade als harmlos bezeichnen. Oft resultieren die Vorbehalte der Würfelgegner aus der Angst, selbst von der Würfelkrankheit angesteckt zu werden. Manche fürchten dann die Niederlage im Falle der eigenen Beschäftigung mit diesem »Teufelswerk«.

Wer sich aktiv darum bemüht, die Geheimnisse des Würfels zu entdecken, wird ganz nebenbei einige nützliche Fähigkeiten trainieren:
Geduld, um die unvermeidlichen Irrtümer und Fehlschläge zu verkraften,
Konzentration, um die Fehlerquote möglichst gering zu halten,
Phantasie, um sich neue Ziele oder neue Bewegungsvarianten auszudenken,
schnelles Erfassen von Situationen und Entscheidungsfreudigkeit, falls man versucht, den Würfel in möglichst kurzer Zeit zu richten,
Risikobereitschaft, wenn es darum geht, bereits Erreichtes aufs Spiel zu setzen, um dem eigentlichen Ziel näher zu kommen,
mathematisches Denken für alle, die versuchen, tiefer in die Würfelproblematik einzudringen.
Es war nicht verwunderlich, daß sich bald Menschen in Würfelklubs zusammenfanden, daß Wettbewerbe veranstaltet und Rekorde aufgestellt wurden. Heute muß man unseren Würfel schon aus jeder beliebigen Stellung in weniger als dreißig Sekunden zurückdrehen können, wenn man in den Kreis der Weltrekordverdächtigen im »Würfelrichten nach Zeit« vorstoßen will.
Andererseits gibt es Leute, die sich den Würfel während des Richtens nur insgesamt dreimal betrachten und ihn ansonsten blind zurückdrehen können.
Schließlich werden auch Wettbewerbe veranstaltet, bei denen eine möglichst geringe Zugzahl gefragt ist. Bisher gibt es ein System, nach dem ein beliebiges Farbgemisch mit nur 52 Zügen zu entwirren ist. Allerdings sind die dazugehörigen Listen der verschiedenen Zugfolgen so umfangreich, daß sie wahrscheinlich kein Mensch auswendig lernen und beherrschen kann. Zweifellos sind demnächst Vorschriften zu erwarten, nach denen noch weniger Züge erforderlich sind; diese Algorithmen werden naturgemäß immer umfangreicher. Strategien, bei denen weniger als 18 Züge prinzipiell ausreichen, sind auf keinen Fall möglich, das wurde bereits mathematisch nachgewiesen.
Wir sehen, es gibt viele Möglichkeiten, sich mit dem Würfel zu beschäftigen. Was aber macht seinen eigentlichen Reiz aus? Wie ist es möglich, daß er wie wohl noch kein Puzzlespiel vorher Millionen

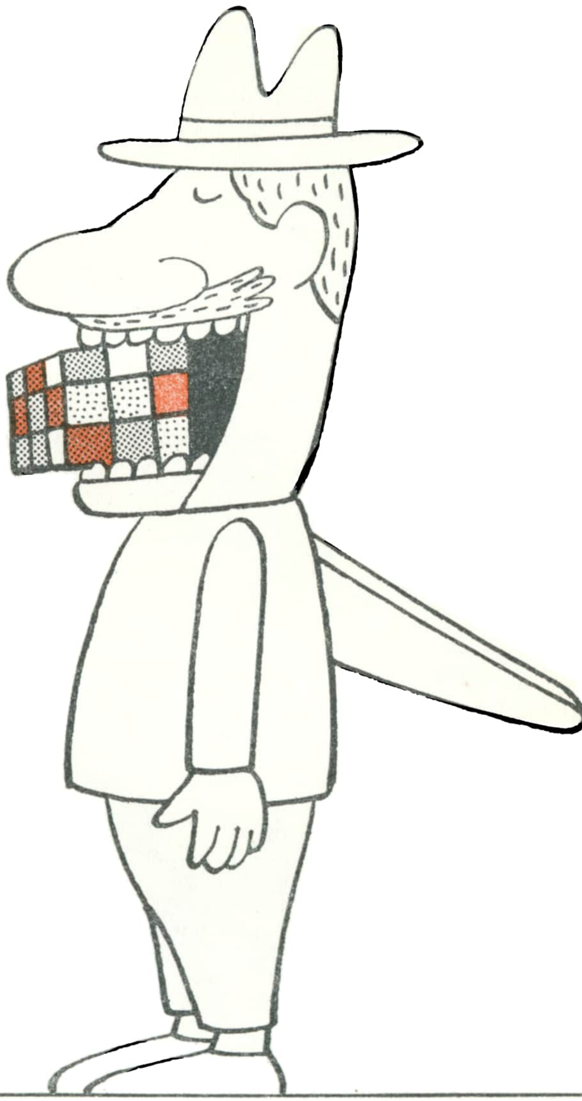
von Menschen aller Alters- und Bildungsstufen in seinen Bann ziehen konnte, daß er immer noch Tausende beschäftigt, die bereits Lösungsvarianten kennen?

Sind es die mehr als 43 Trillionen unterschiedlichen Gesichter, die er haben kann? – Sicher nicht, denn *ein* bunter Würfel ist von einem *anders* bunten Würfel kaum zu unterscheiden, zumindest nicht so, daß uns jede nächste Farbkombination aufs neue entzückt. Nein, so einfach läßt sich die Wirkung von Rubiks Erfindung nicht erklären. Vielmehr dürfte ihre Faszination in der ungeheuren Herausforderung dieses unscheinbaren Körpers an unseren menschlichen Geist bestehen. Seine vielfältigen Stellungsmöglichkeiten sind ihm ja durchaus nicht von vornherein anzusehen. Kennt man noch keinen Lösungsweg, ist jede Würfelbewegung wie das Tappen in einem unbekannten Labyrinth. Nie weiß man, wie weit man noch vom Ausgang entfernt ist, ob man sich ihm überhaupt nähert. Und sind einige Farbenflächen so zusammengefügt, daß eine Lösung nahe scheint – wenige Züge weiter ist alles bereits Geordnete wieder vernichtet.

Aber auch wenn man schon einen Lösungsweg weiß, also keine Angst mehr zu haben braucht, den Ausgang nicht zu finden, zieht es einen immer wieder in das Labyrinth hinein, denn es ist noch voller Geheimnisse und Schönheit. Neue Wege sind zu erschließen. Zufällig oder mit Bedacht werden manche Gesetzmäßigkeiten entdeckt, die beim ersten Suchen verborgen blieben. Man erreicht es, sich sicher und frei hierbei zu bewegen und auch andere Ziele anzustreben, statt immer nur den Ausgang zu suchen.

Neben der Herausforderung an unseren Verstand, neben Unterhaltung und Nervenkitzel, ist es nicht zuletzt ein schönes Gefühl, den Würfel spielend in den Händen zu halten; er hat eine ideale Form und Größe, eine angenehme Oberflächenbeschaffenheit, das Wechselspiel der sich ordnenden Farben fasziniert und beruhigt uns, und irgendwie staunen wir immer wieder darüber – auch wenn wir das Innenleben von Rubiks Erfindung genau kennen –, wie alles so phantastisch zusammenhält.

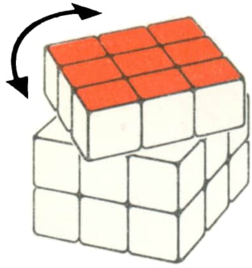
Für technisch Interessierte



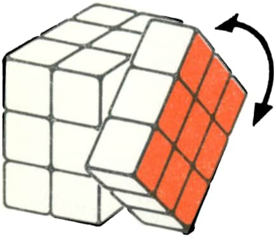
Wir wenden uns nun dem Würfel selbst zu. Bis zu diesem Abschnitt konnten Sie das Büchlein auch stehend in einer vollbesetzten Bahn oder an einem anderen unruhigen Ort lesen, von nun an sollten Sie sich dorthin zurückziehen, wo Sie ungestört sind. Ein bequemer Sessel, davor ein Tisch und nicht zu wenig Zeit bieten gute Voraussetzungen. Natürlich gehört auch Ihr Würfel dazu, egal, ob er sich im »jungfräulichen« Zustand befindet oder völlig bunt ist. Falls Sie ein Gläschen Ihres Lieblingsgetränkes zur Hand haben möchten, ist dagegen nichts einzuwenden.
Stellen Sie den Würfel, wenn Sie nun bereit sind, vor sich auf den Tisch, damit wir ihn gemeinsam betrachten können. Viele kleine, bunte Würfelchen haften aneinander. Wir erkennen drei horizontal liegende Schichten, eine untere, die auf der Tischplatte ruht, eine obere, auf die wir draufsehen, und dazwischen eine mittlere.
Jede Schicht, wir sehen es an der oberen, besteht aus neun Würfelchen, der ganze Würfel also aus siebenundzwanzig. Doch halt, das können wir nicht mit Sicherheit behaupten, denn das mittlere Würfelchen der mittleren Schicht kann man nicht sehen! Sechsundzwanzig Würfelchen sind es aber ganz bestimmt.
Natürlich kann der Würfel auch in senkrechte Schichten eingeteilt werden, dann gibt es sogar zwei Möglichkeiten:

- Drei Schichten liegen hintereinander, die vordere, uns zugewandte, eine hintere, von uns weggewandte, und wiederum eine mittlere dazwischen.
- Drei Schichten liegen nebeneinander, eine linke, eine mittlere und eine rechte.

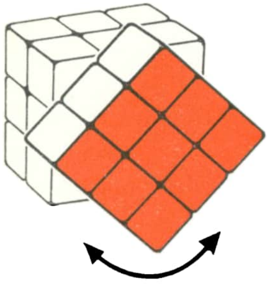
Diese insgesamt neun Schichten sind es, die man drehen kann. Nehmen Sie den Würfel in die Hand, versuchen Sie es mit der oberen Schicht, linksherum, rechtsherum, alles ist möglich.



Auch die rechte Schicht ist natürlich drehbar,



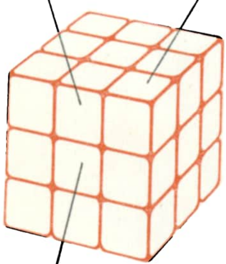
ebenso wie zum Beispiel die vordere



oder alle anderen Schichten. Voraussetzung für die Drehbarkeit einer Schicht ist aber, daß keine andere so gedreht ist, daß sie ihr im Wege steht.

Soviel zu den Schichten des Würfels. Ist Ihnen alles klar ? Sicherlich! Dann können wir fortfahren und betrachten nun die einzelnen Würfelchen, von denen es drei verschiedene Arten gibt.

- Die Würfelchen an den acht Ecken nennen wir ihrem Platz entsprechend *Eckwürfel*. Jeder von ihnen trägt drei Farbflächen.
- An den zwölf Kanten sitzt je ein *Kantenwürfel*, der nur zwei Farbflächen besitzt.
- In der Mitte einer jeden Würfelfläche befindet sich ein einfarbiger *Mittelwürfel*.



Drehen Sie bitte eine beliebige Schicht oder auch mehrere Schichten, und Sie werden etwas sehr Wichtiges feststellen: Eckwürfel bleiben immer Eckwürfel, egal, wo sie sich aufhalten, Kantenwürfel bleiben stets Kantenwürfel, und auch Mittelwürfel bleiben, was sie sind.
Abgesehen von diesem grundlegenden Gesetz, kann man jedes einzelne Würfelchen an alle Stellen des Rubikwürfels transportieren und braucht dazu niemals mehr zu tun, als zwei Schichten je einmal um 90 oder 180° zu drehen, man benötigt also höchstens zwei Züge. Probieren Sie es!
Wenn Sie bei diesen Versuchen einmal auf die Mittelwürfel achten, werden Sie feststellen, daß sie ihre Lage *zueinander* niemals ändern können. Sie sind, wie wir bald sehen, starr miteinander verbunden. Somit bestimmen diese Würfelchen von vornherein die Stellung der Farbflächen auf dem gerichteten Würfel zueinander.
Da aber nicht alle erhältlichen Rubikwürfel die gleiche Farbzusammenstellung aufweisen, müssen wir darauf verzichten, einzelne Farben oder ihre Kombinationen zur Beschreibung des Würfels heranzuziehen.

Ebenso wie die Mittelwürfel die Lage der Farbflächen diktieren,
legen sie auch die Stellung jedes einzelnen Würfelchens fest: Zwei auf angrenzenden Flächen liegende Mittelwürfel, also beispielsweise der obere und ein seitlicher, bestimmen, *welcher* Kantenwürfel zwischen sie gestellt werden muß: nämlich genau *der*, der ihre beiden Farben aufweist. Versuchen Sie es, betrachten Sie zwei Mittelwürfel angrenzender Flächen und suchen Sie den Kantenwürfel, der zwischen sie gehört. Es gibt wirklich nur einen! Ihn zu finden ist eine gute Übung für später.

An dieser Stelle kommen wir gleich auf ein neues Problem zu sprechen: Solch ein Kantenwürfel vermag, wie einzusehen ist, zwar an der richtigen Stelle zwischen seinen Mittelwürfeln zu sitzen, aber so, daß seine beiden Farbflächen genau vertauscht sind. Wir wollen ihn dann »verkippt« nennen, einverstanden?

Als nächstes sind die Eckwürfel dran! Auch ihr Platz ist bestimmt, allerdings jeweils von *drei* um die Ecke herum liegenden Mittelwürfeln. Versuchen Sie es auch hier: Schauen Sie sich drei solcher Mittelwürfel an und suchen Sie den Eckwürfel, der deren drei Farben besitzt. Haben Sie ihn gefunden?

Betrachten Sie jetzt bitte den rechten oberen Eckwürfel, unabhängig davon, ob er richtig sitzt oder nicht. Solch ein Würfelchen hat sogar drei Möglichkeiten, sich an einer Stelle aufzuhalten: Eine davon sehen Sie vor sich. Die zweite wäre, wenn seine jetzige Oberfarbe auf der rechten Seitenfläche läge und sich seine anderen Farben auf entsprechend anderen Flächen befänden. Der ganze Eckwürfel wäre dann um 120° nach rechts gedreht. Drittens kann das Würfelchen seinen Platz aber auch so eingenommen haben, daß seine Oberfarbe auf der Vorderfläche liegt; dann ist der Eckwürfel um 120° nach links gedreht.

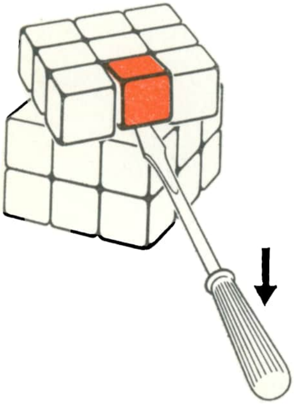
Sitzt ein Eckwürfel auf seinem Platz und liegen die Farben noch falsch, wollen wir ihn »verdreht« nennen. Also: Kantenwürfel können *verkippt*, Eckwürfel *verdreht* sein, obwohl sie an ihrem richtigen Platz sitzen.

Das soll zur äußeren Beschreibung des magischen Würfels und seiner Zugmöglichkeiten zunächst ausreichen. Wenden wir uns seinem »Innenleben« zu!

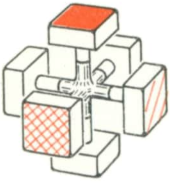
Besser als alle Beschreibungen dürfte die eigene Anschauung sein;

 wir werden den Würfel also auseinandernehmen. Keine Angst, er geht gewiß nicht zu Bruch, auch dann nicht, wenn Sie für »zwei linke Hände« bekannt sein sollten; und zusammensetzen können Sie ihn garantiert auch wieder.

Was Sie als Werkzeug benötigen, ist ein Schraubenzieher oder ein Teelöffelstiel – irgend etwas Festes, Flaches. Nun drehen Sie die obere Schicht um 45°, also so, daß die Eckwürfel genau über den seitlichen Mittelwürfeln stehen. Mit dem flachen Werkzeug können Sie jetzt einen *Kantenwürfel* der oberen Schicht herausheben. Die Abbildung zeigt, wie das gemacht wird.

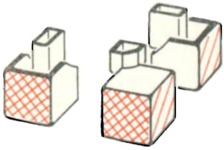


Fast von selbst fallen dann die beiden benachbarten Eckwürfel heraus, alle anderen Würfelchen können ebenfalls leicht entnommen werden. Was in Ihren Händen verbleibt, ist ein Gestell mit federnd angeschraubten, drehbaren Mittelwürfeln.



Sie sehen, ein zentrales siebenundzwanzigstes Würfelchen existiert nicht.

Auf Ihrem Tisch liegen nun alle Kanten- und Eckwürfel, jede Art mit einer für sie typischen Nocke versehen.



Nehmen Sie einen zweifarbigen Kantenwürfel und setzen Sie ihn zwischen zwei beliebige Mittelwürfel in das Gestell. Man erkennt leicht, wie er gehalten wird, nicht wahr? Setzen Sie daneben einen weiteren Kantenwürfel ein und drehen Sie den ersten über den neuen hinweg auf einen anderen Mittelwürfel, so sehen Sie, wie der Kantenwürfel auch während der Drehung am Herausfallen gehindert wird.
Zwischen den beiden Kantenwürfeln kann ein Eckwürfel eingesetzt werden, und es ist erkennbar, wie dieser von allen seinen Nachbarwürfeln festgehalten wird, aber auch, wie alle Drehrichtungen realisierbar sind. Damit haben Sie Ernö Rubiks geniale Erfindung begriffen. Wären Sie auch darauf gekommen?
Auf die beschriebene Weise könnten Sie das Gestell nun wieder mit Würfelchen füllen. Dieses wahllose Vorgehen birgt jedoch eine Gefahr in sich: Die Chance, den Würfel richtig zusammenzusetzen, so, daß er durch *Drehungen* in seinen Urzustand zu bringen ist, beträgt nur 1 : 12. Das heißt, lediglich ein Zwölftel aller Zusammenbaumöglichkeiten ist geeignet, den Würfel durch Drehungen seiner Schichten zu richten.
Besser ist folglich, gezielt vorzugehen, die Würfelchen gleich an die von den Farben der Mittelwürfel diktierten Plätze zu bringen. Sie bestimmen also die Farben der einzusetzenden Kanten- oder Eckwürfel, suchen diese auf dem Tisch und fügen sie ein, bis nur noch ein Kantenwürfel übrigbleibt. Jetzt muß die Schicht, in die dieser hineingehört, wieder um 45° gedreht werden – ebenso wie beim Auseinandernehmen –, und das letzte Würfelchen kann leicht in den Verband seiner Brüder hineingedrückt werden.
Somit kennen Sie eine Methode, den Würfel zu richten. Es bleibt aber hoffentlich nicht die einzige, das wäre unfair und beraubt Sie einer Fülle interessanter Beschäftigungsmöglichkeiten.
Dennoch haben viele Menschen den Rubikwürfel auf diese Weise beherrschen gelernt: Man kann am so gerichteten Würfel nämlich

gut die Wirkung von verschiedenen (am besten mehrfach wiederholten) Zugkombinationen studieren. Hat man eine interessante Kombination gefunden, eine, die nur an einer geringen Anzahl von Würfelchen etwas bewirkt, die restlichen aber unverändert läßt, wird sie notiert, und man kann sich einer neu ausgedachten Zugkombination zuwenden. Sollte man sich einmal »verfransen«, kein Problem, der Würfel ist ja schnell wieder auseinandergebaut und zusammengesetzt. Also, wenn Sie auf diese Weise das Würfelrichten erlernen wollen – bitte! Auf keinen Fall aber dürfen Sie dann vorläufig die nächsten Kapitel lesen!

Noch etwas: Falls kein ladenneuer Würfel verwendet wurde, werden Sie beim Auseinanderbauen bemerkt haben, daß sich im Innern des Würfels Abriebstaub gesammelt hat. Dieser sollte hin und wieder mit einem feuchten Tuch entfernt und alle Gleitflächen der Würfelchen sowie des Gestells sollten dünn mit Vaseline bestrichen werden. Wenn zusätzlich möglicherweise vom Herstellungsprozeß noch vorhandene Grate mit feinstem Schmirgelpapier entfernt werden, besitzen Sie einen phantastisch leicht laufenden Würfel, mit dem Sie alle Bewegungen viel schneller und leichter als vorher durchführen können. Außerdem ist Ihr Würfel dann wesentlich länger gebrauchsfähig, denn sonst schleifen sich die Flächen und Nocken schneller ab, so daß beim Drehen ständig die Gefahr des Auseinanderfallens besteht.

Sollte dieser Zustand eintreten, kann etwas Abhilfe dadurch geschaffen werden, daß Sie die Farbfolien der *Mittelwürfel* entfernen und die darunterliegenden Plättchen vorsichtig lösen, wodurch die Befestigungsschrauben sichtbar werden. Wenn man diese kräftig nachzieht, gewinnt der Würfel etwas an Stabilität zurück. Mit geeignetem Klebstoff können die Plättchen neu befestigt werden, die Folien sind selbstklebend. Dem Würfel ist bei sorgfältiger Arbeitsweise kein Eingriff anzusehen.

Damit sind wir am Ende dieses Kapitels. Sie sollten es sich gut überlegen, ob Sie noch heute weitermachen wollen. Das nächste Kapitel wird Sie einige Konzentration kosten. Sie sind bereit? – Bitte!

Für Ungeduldige

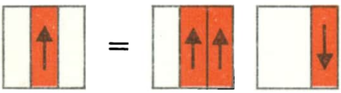
So, jetzt wissen Sie etwas über die Geschichte des Würfels, über seinen Aufbau, seine Bewegungsmöglichkeiten, seine Pflege und wollen ihn nun endlich wieder in seinen geordneten Urzustand zurückdrehen können. Verständlich. Die Überschrift des Kapitels verspricht Ihnen ja, daß dies leicht und schnell gehen wird. Und dennoch ist noch einmal ein ganz klein wenig Geduld erforderlich, wir müssen erst eine Methode finden, nach der die Bewegungen symbolisiert werden, gewissermaßen eine Zeichensprache, die Sie erkennen läßt, was gerade zu tun ist.
Hierfür kommt uns der Umstand zugute, daß fast alle Bewegungen, die am Würfel möglich sind, auf seiner Vorderseite sichtbar werden. Sie erinnern sich, unter Vorderseite verstehen wir die uns zugewandte Fläche des Würfels. Zeichnen wir also diese Fläche auf und versehen wir sie mit einem Symbol für die jeweilige Drehbewegung, dann können wir uns hervorragend verständigen.
Richtungen symbolisiert man am besten mit einem Pfeil, und damit auch kein Mißverständnis darüber aufkommt, *welche* Schicht in Pfeilrichtung bewegt werden soll, kennzeichnen wir sie zusätzlich farbig.



Diese drei Zeichnungen sind Beispiele für Drehungen verschiedener Schichten um jeweils 90°, also für Vierteldrehungen. Versuchen Sie es am Würfel:
Nach der linken Zeichnung soll die obere Schicht in Pfeilrichtung gedreht werden, nach der mittleren Zeichnung die linke und nach der rechten Zeichnung die vordere, Ihnen zugewandte Schicht. Diese drei Beispiele genügen doch sicherlich, nicht wahr?

Nun müssen wir aber auch Drehungen um 180° symbolisieren, also halbe Drehungen. Hierfür verwenden wir einfach einen Doppelpfeil.

Die untere Schicht erfährt nach dieser Zeichnung eine halbe Drehung. Die Richtung ist dabei gleichgültig, weil die Drehung linksherum wie auch die rechtsherum zum gleichen Ergebnis führt. Wir werden dennoch den Pfeil verwenden, damit Sie sich so die Zugfolgen besser einprägen.
Etwas schwieriger sind die Bewegungen der Mittelschichten, meist werden sie in zwei Zügen ausgeführt, also zum Beispiel:

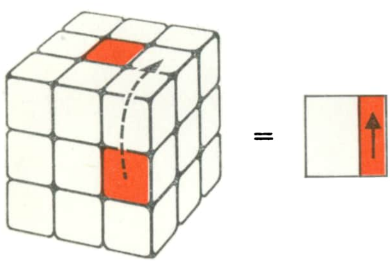


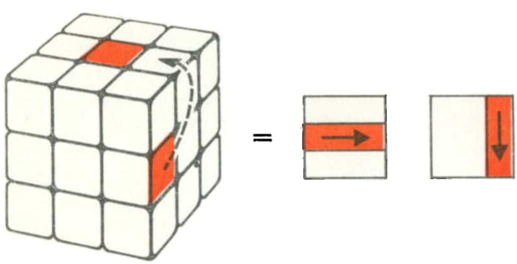
Links steht das von uns verwendete Bewegungssymbol, und die beiden rechten Quadrate kennzeichnen die Ausführung in zwei Zügen. Probieren Sie es einfach. Es gibt auch Leute, die schieben die Mittelschicht mit einem Finger oder mit dem Daumen in die gewünschte Richtung. Das soll aber Ihrer persönlichen Geschicklichkeit überlassen bleiben.
Mehr zu wissen ist für unsere schnell erlernbare Variante nicht nötig, es kann losgehen!

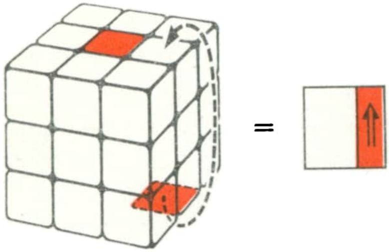
Die erste Schicht

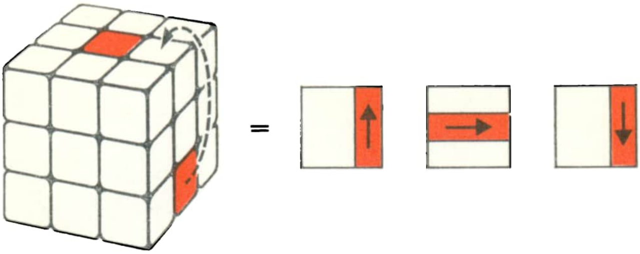
Wir werden zunächst *eine* Schicht richten, und diese soll vorläufig die *obere* des Würfels sein.
Am einfachsten ist es, den *Mittelwürfel* zu setzen (das einfarbige Würfelchen in der Flächenmitte). Sie brauchen sich nur eine Ihnen einprägsame Farbe auszuwählen und den ganzen Würfel so zu drehen, daß der Mittelwürfel dieser Farbe nach oben zeigt; fertig!
Diese Farbe soll nun die gesamte obere Fläche annehmen, und alle Würfelchen der oberen Schicht müssen dabei an der richtigen Stelle stehen. Wir müssen deshalb darauf achten, daß dieser Mittelwürfel immer auf der oberen Fläche liegt.

22 Fast ebenso einfach wird es, den ersten *Kantenwürfel* zu richten. Das sind, wir wissen es noch, die zweifarbigen Würfelchen. Suchen Sie sich in der unteren Schicht oder der horizontalen Mittelschicht einen Kantenwürfel, der Ihre gewählte Farbe besitzt. Nun dreht man den ganzen Würfel so, daß dieses Würfelchen in der *rechten Schicht vorn oder unten* sitzt. Vergessen Sie dabei aber nicht, den Mittelwürfel ihrer Wahl stets oben zu lassen, der ganze Würfel darf also nur noch um seine senkrechte Achse gedreht werden.
Eines der nächsten Bilder zeigt, wie Sie den Kantenwürfel an die richtige Stelle neben den von Ihnen gewählten Mittelwürfel bringen können.

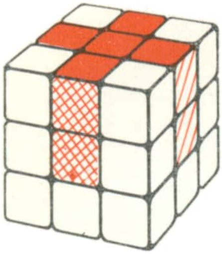




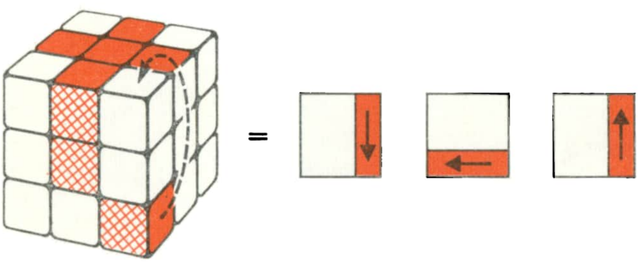


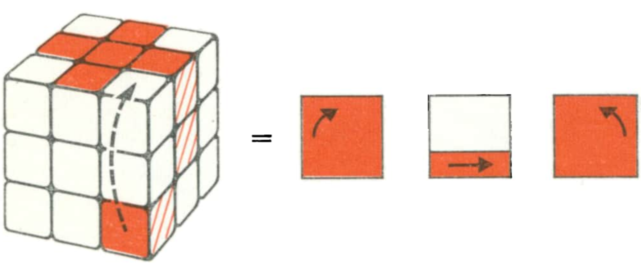


Drehen Sie nun die obere Schicht so, daß die zweite, also seitliche Farbe des soeben gesetzten Kantenwürfels über einem Mittelwürfel der gleichen Farbe steht.
Gut, den ersten Kantenwürfel konnte man noch völlig willkürlich setzen, die drei nächsten haben zu diesem aber eindeutige Positionen. Diese Positionen sind jedoch leicht zu ermitteln, da sie durch die Farbe des oberen Mittelwürfels und die jeweilige Farbe eines der drei verbleibenden seitlichen Mittelwürfel bestimmt werden.
Sie drehen den ganzen Würfel um seine senkrechte Achse, so daß Ihr eben gesetzter Kantenwürfel nicht mehr in der rechten Schicht liegt, sehen sich die Farbe des nun rechten Mittelwürfels an und suchen den Kantenwürfel, der dessen Farbe und die von Ihnen gewählte Oberfarbe besitzt.
Sollte er in der oberen Schicht liegen, aber noch nicht richtig, muß man ihn erst durch Drehen der senkrechten Schicht, in der er liegt, aus der oberen Schicht nach unten bringen.
Nun wird die untere oder mittlere Schicht so gedreht, daß der zu setzende Kantenwürfel wieder in der rechten Schicht vorn oder unten sitzt. Sie können ihn jetzt nach den obigen Zeichnungen auf die gleiche Weise an die richtige Stelle setzen wie unseren ersten Kantenwürfel; danach aber sofort die obere Schicht wieder so drehen, daß beide gesetzte Kantenwürfel auf ihren seitlichen Mittelwürfeln stehen.
Die beiden verbleibenden Kantenwürfel werden nun ebenso gerichtet wie der zweite, es gibt keinen Unterschied.
Wenn Sie fertig sind, bilden die vier Kantenwürfel in der oberen Schicht ein einfarbiges Kreuz und stehen mit ihren seitlichen Flächen auf Mittelwürfeln von jeweils gleicher Farbe.



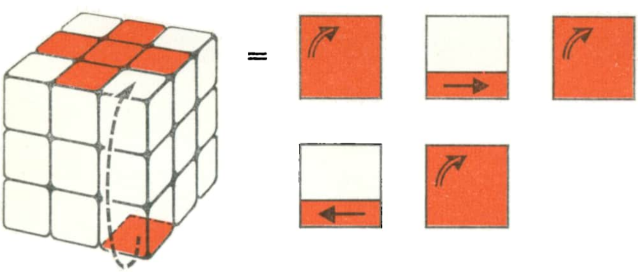
Die erste Hürde wäre genommen, vor allem auch bezüglich der Verständigung zwischen uns. Sollte es nicht sofort geklappt haben, verlieren Sie nicht den Mut, fangen Sie getrost noch einmal von vorn an, es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.
Als nächstes sind die vier *Eckwürfel* der oberen Schicht an der Reihe. Zuerst sucht man sich am besten in der unteren Schicht ein solches dreifarbiges Würfelchen, das diese Oberfarbe an seiner *Seite* aufweist. Dann dreht man die Unterschicht so, daß der ganze Würfel einem der beiden nächsten Bilder entspricht.



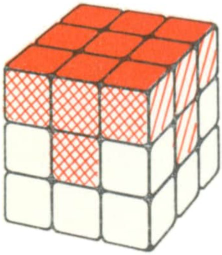


Mit den dazugehörigen Bewegungsabläufen wird der Eckwürfel an die richtige Stelle bugsiert.
Auf diese Weise können Sie nun alle Eckwürfel richten, die in der

Unterschicht liegen und die die von Ihnen gewählte Oberfarbe an der Seite haben.
Als nächstes sollten Sie nachsehen, ob ein Eckwürfel bereits in der Oberschicht sitzt, jedoch noch falsch. Falsch heißt, daß er entweder die Oberfarbe nicht oben hat oder daß er nicht zu den von Ihnen bereits gesetzten Kantenwürfeln paßt. Wenn ein solcher Eckwürfel vorhanden ist, dann drehen Sie den ganzen Würfel so, daß dieses falsche Würfelchen oben rechts vorn sitzt, und bringen es mit einem der soeben behandelten Eckwürfelzüge in die Unterschicht. Sollte der nach unten gebrachte Eckwürfel die von Ihnen gewählte Oberfarbe an seiner Seite haben, so haben Sie ja bereits gelernt, ihn richtig zu »positionieren«. Es ist jedoch auch möglich, daß ein nach oben gehörender Eckwürfel in der Unterschicht sitzt und die Oberfarbe auf seiner *Unterseite*, also auch der Unterseite des ganzen Würfels, hat.
Einen solchen Eckwürfel bringen Sie mit folgendem Bewegungsablauf an seinen richtigen Platz, wobei besonders auf die richtige Ausführung der 180°-Drehung geachtet werden muß.



Es muß gut aufgepaßt werden, daß die Würfelchen zu Beginn der Zugfolge unter der richtigen Stelle sitzen. Orientieren Sie sich an den bereits gerichteten Kantenwürfeln, zwischen die der Eckwürfel gesetzt werden soll.
Nun ist Ihnen alles bekannt, was für eventuell noch nicht gesetzte Eckwürfel der Oberschicht erforderlich ist. Damit wäre die erste Schicht auch schon fertig. Sie muß die von Ihnen gewählte Oberfarbe als geschlossene Fläche aufweisen, und jede Seite der Oberschicht muß einfarbig über ihrem seitlichen Mittelwürfel von gleicher Farbe stehen.



Sie können sich nun getrost eine Pause gönnen, bevor die nächste Etappe in Angriff genommen wird.

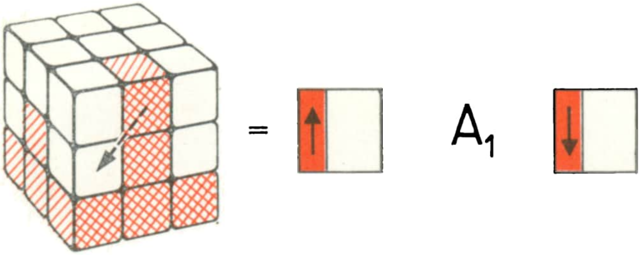
Die zweite Schicht

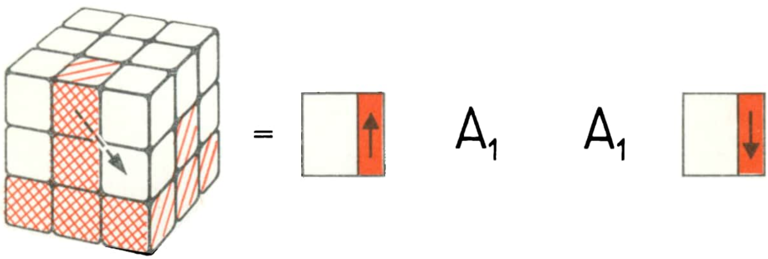
Für die beiden jetzt noch zu richtenden Schichten benötigen Sie nur noch genau vier verschiedene Bewegungsabläufe, die auf dem Vorsatz vorn und hinten zum schnellen Auffinden zusammengestellt sind und mit den Symbolen A_1 bis A_4 bezeichnet werden.
Bei unserer Schnellernvariante geht es nun mit der horizontalen Mittelschicht weiter. Dafür drehen Sie den ganzen Würfel auf den Kopf, also so, daß die bereits fertige Fläche zuunterst ist. Die Mittelschicht kann komplett mit einem Ablauf, unserem ersten, gerichtet werden.

A_1 = 

Suchen Sie sich in der nunmehr oberen Schicht ein Würfelchen, das in die horizontale Mittelschicht gehört. Die Farbe, die alle Würfelchen der *oberen* Schicht besitzen müssen, ist die des nun oberen Mittelwürfels. Jedes Würfelchen, das diese Farbe *nicht* besitzt, gehört in die von uns zu richtende Mittelschicht. Sie brauchen aber nur die vier oberen *Kantenwürfel* zu kontrollieren, weil in jeder Mittelschicht nur solche Würfelchen sitzen können.
Jetzt drehen wir die obere Schicht so, daß die Seitenflächen dieses Würfelchens auf einem gleichfarbigen seitlichen Mittelwürfel steht. Durch Vergleich der Oberfarbe unseres Würfelchens mit der Farbe der beiden seitlichen Mittelwürfel ermittelt man, ob der Kantenwürfel nach links oder nach rechts in die Mittelschicht wandern soll.

Nun machen Sie, je nach Notwendigkeit, eine der beiden folgenden Bewegungen, die unseren ersten Ablauf enthalten:





Auf die gleiche Weise kann nun die gesamte zweite Schicht gerichtet werden.
Es ist jedoch möglich, daß Sie in der Oberschicht kein Würfelchen mehr finden, das in die Mittelschicht gehört, die Mittelschicht jedoch noch falsch liegende Würfelchen aufweist. Dann dreht man den ganzen Würfel so, daß ein solches falsches Würfelchen links vorn liegt, und führt die erste soeben behandelte Operation durch, also A_1 mit der ein- und ausleitenden Zusatzbewegung. Danach liegt dieser falsche Kantenwürfel in der oberen Schicht, und man kann ihn auf die beschriebene Weise an die richtige Stelle bringen.
Damit wissen Sie alles, was zum Richten der zweiten Schicht benötigt wird, und wenn es gelungen ist, sieht Ihr Würfel schon ganz gut aus, oder?
Vor dem Endspurt kann man sich wieder eine kleine Pause gönnen. Aller Anfang ist schwer, und der Spaß soll ja andauern.

Die dritte Schicht

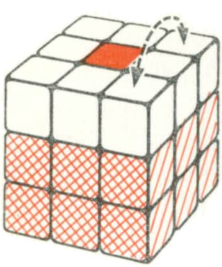
Sie haben glücklicherweise schon einige Erfahrungen im Auffinden von Würfelchen erworben, denn für die letzte, also obere Schicht ist das besonders wichtig. Zunächst werden die *Eckwürfel an ihren richtigen Platz* gesetzt, unabhängig davon, ob sie vielleicht noch verdreht sind.

Alle diese Eckwürfel besitzen auf einer Fläche die Farbe des oberen Mittelwürfels. Diese interessiert uns im Augenblick nicht! Jede der vier Seitenfarben finden Sie auf jeweils zwei Eckwürfeln wieder.

Suchen Sie zwei solche Würfelchen, die auf *einer gemeinsamen Kante* liegen, sich also nicht diagonal gegenüberstehen. Jetzt wird die obere Schicht gedreht, bis diese beiden Eckwürfel über dem bereits gerichteten Flächenteil sitzen, der die ihnen *gemeinsame Farbe* aufweist. Anschließend dreht man den ganzen Würfel so, daß diese Fläche nach rechts weist.

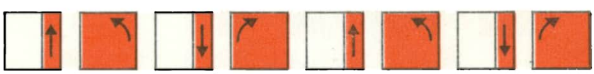
Jetzt kontrollieren Sie, ob der rechte vordere Eckwürfel irgendwo die Farbe des fertigen Vorderflächenteils besitzt. Wenn ja, sitzen beide rechte Eckwürfel bereits auf ihrem richtigen Platz. Wenn nicht, so sind beide vertauscht und werden mit Hilfe unseres zweiten Ablaufes gerichtet.

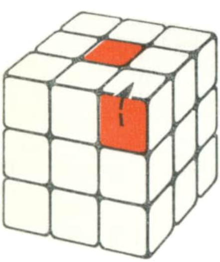
$A_2 =$ 

 $= A_2$

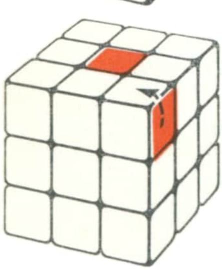
Nun muß noch kontrolliert werden, ob die beiden linken oberen Eckwürfel richtig sitzen. Das ist der Fall, wenn der vordere irgendwo die Farbe des fertigen Vorderflächenteils aufweist. Sollte das nicht zutreffen, wird der ganze Würfel so gedreht, daß die linke Seite nun rechts ist, und der soeben beschriebene Ablauf 2 wird wieder durchgeführt. Spätestens jetzt sitzen alle Eckwürfel auf ihrem rich-

tigen Platz, sie können jedoch, wie bereits gesagt, noch verdreht sein, d. h., die nach oben gehörende Farbe einiger oder aller Würfelchen befindet sich noch an der Seite.
Mit dem dritten Bewegungsablauf drehen wir die *verdrehten Eckwürfel* einen nach dem anderen richtig.
Aber halt, noch nicht beginnen: Nach jedem einzelnen Ablauf wird der ganze Würfel wieder sehr bunt aussehen und erst nach dem letzten richtig gedrehten Eckwürfel wieder in Ordnung sein!
Drehen Sie also den ganzen Würfel so, daß sich ein Eckwürfel, der gedreht werden soll, *vorn rechts* befindet. Natürlich muß er weiterhin in der oberen Schicht sein. Nun merken Sie sich die Farbe des zu Ihnen zeigenden, also vorderen Mittelwürfels. Dieser muß so lange vorn bleiben, bis der letzte Eckwürfel richtig gedreht ist!
Beim Ablauf 3 ist zum ersten Mal im Vorsatz eine Klammer mit einer zweiten Potenz zu sehen. Das bedeutet, daß alles in der Klammer Stehende zweimal ausgeführt wird. Im Fall $A_3 \cdot A_3$, wir können auch $(A_3)^2$ schreiben, ist dann alles in der Klammer Stehende viermal erforderlich, da ja der gesamte Ablauf 3 zweimal ausgeführt werden soll.

$A_3 =$ 

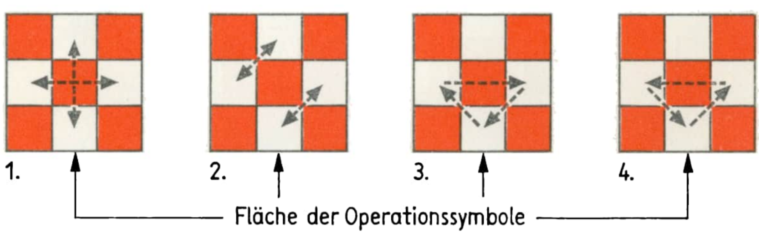


$= A_3$



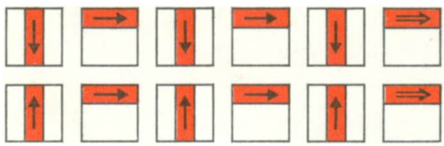
$= A_3 \cdot A_3$

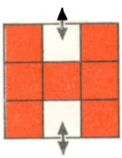
Nun können Sie aber endgültig mit dem Drehen des ersten Eckwürfels beginnen.
Achtung, den *Würfel nicht loslassen!* Der gemerkte Mittelwürfel muß weiterhin zu Ihnen weisen. Drehen Sie die *obere* Schicht jetzt so, daß ein neuer zu drehender Eckwürfel vorn rechts sitzt, und drehen Sie ihn wieder nach einer der beiden gezeichneten Operationen in die richtige Stellung.
Danach wird die obere Schicht abermals so gedreht, daß ein noch zu orientierender Eckwürfel nach vorn rechts kommt. Die jeweilige Operation wird angewendet, bis die oberen Flächen aller vier Eckwürfel die Farbe des oberen Mittelwürfels angenommen haben. Wenn Sie jetzt noch die obere Schicht so drehen, daß die Seitenflächen der Eckwürfel über den bereits fertigen Flächen gleicher Farbe stehen, ist auch dieses Problem gelöst.
Nun bleiben uns nur noch die oberen *Kantenwürfel.* Wir wollen auch sie zunächst *auf ihre richtigen Plätze* bringen, unabhängig davon, daß sie noch verkippt sein können. Vier Vertauschungsmöglichkeiten sind noch gegeben.



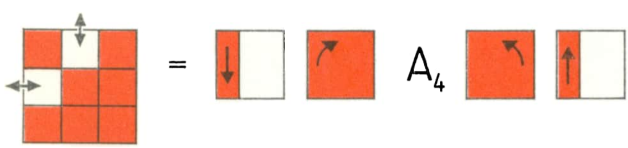
Von jetzt an genügt es, die Oberfläche, von oben gesehen, zu zeichnen. Die Fläche mit den Operationssymbolen bleibt natürlich weiterhin die Vorderfläche!
Wenn Ihre Kantenwürfel nach Zeichnung 1 oder 2 vertauscht sein sollten, so führen Sie sofort Ablauf 1 durch! Danach sind Ihre Kantenwürfel unbedingt nach Zeichnung 3 oder 4 vertauscht.
Jetzt muß der ganze Würfel so gedreht werden, daß der bereits an der richtigen Stelle sitzende Kantenwürfel hinten ist. Sollte nun ein Tausch nach Bild 3 nötig sein, wenden Sie den Ablauf 1 an. Ist dagegen ein Tausch nach Zeichnung 4 notwendig, wird der Ablauf 1 zweimal hintereinander ausgeführt. Nun sitzen alle Wür-

felchen an den richtigen Stellen im Würfel. Es können aber noch zwei oder vier obere Kantenwürfel verkippt sein.
Unser vierter und letzter Ablauf *kippt zwei Kantenwürfel* der Oberschicht, die vorn und hinten sitzen.

A_4 = 

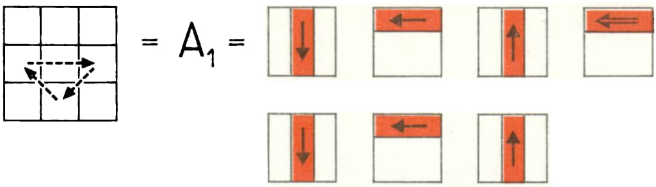
 = A_4

Sollten diese beiden an Ihrem Würfel verkippt sein, können Sie sie also sofort richtig orientieren.
Wenn alle vier Kantenwürfel verkippt sind, entsteht nach Anwendung von A_4 die soeben abgebildete Stellung, die wiederum mit diesem Ablauf zu richten ist.
Sind jedoch beieinanderliegende Kantenwürfel verkippt, wird der Würfel so gedreht, daß er der nächsten Abbildung entspricht, und die dazugehörige Operation durchgeführt.

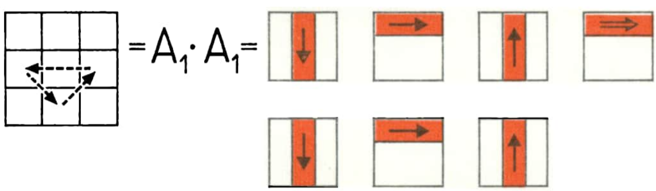


Sehen Sie, Sie haben es geschafft, der gesamte Würfel ist gerichtet. Herzlichen Glückwunsch! Versuchen Sie es noch ein paarmal, Sie werden sehen, es geht immer besser. Übung macht den Meister!
Wir können noch einige Vereinfachungen anwenden, die vermeiden, daß die Abläufe 1 und 3 zweimal hintereinander ausgeführt werden müssen:
Sie haben sicher schon bemerkt, daß der Ablauf 1 einen zyklischen

32. Dreiertausch von Kantenwürfeln der oberen Schicht im Uhrzeigersinn bewirkt.

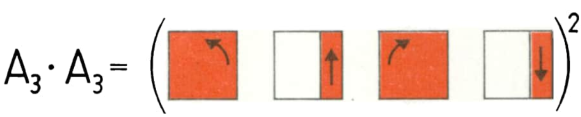


Solch ein Dreierzyklus zweimal durchgeführt, ist natürlich identisch mit *einem* Dreierzyklus entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir können uns nun die zweifache Ausführung von A_1 sparen, wenn wir diesen Ablauf rückwärts bzw. spiegelverkehrt durchführen, was in diesem Fall dasselbe ist.



Unser Ablauf 3 wiederum dreht einen Eckwürfel in Uhrzeigerrichtung.

Auch hier ist es so, daß die Rückwärtsbewegung dasselbe bewirkt wie die zweimalige Anwendung vorwärts.



Wir können also auch hierbei Bewegungen sparen.
Nun ist nur noch etwas Übung erforderlich, und Sie werden den Würfel mit Sicherheit bald in weniger als drei Minuten richten können. Die vier Bewegungsabläufe und eventuell zwei ihrer

Umkehrungen beherrschen Sie gewiß schon bald auswendig. Dann
geht es nur noch darum, die jeweilige Situation rasch zu erfassen und schnell zu handeln.

Vielleicht noch ein paar Worte zur Übungsmethodik:

Es ist günstig, stets dieselbe Farbe für die erste Schicht zu verwenden. Damit gewinnt man wesentlich schneller den erforderlichen Blick über die Würfelchen dieser Schicht wie auch über die aller anderen Schichten.

Auch das Richten der ersten Schicht sollte immer wieder geübt werden; hier kann man viel Zeit, aber auch eine Menge Züge sparen.

Am bereits gerichteten Würfel können unsere Abläufe wunderbar trainiert werden. Mehrfache Anwendung hintereinander muß nämlich das ursprüngliche Würfelbild ergeben. Bei dreimaliger Ausführung von A_1 bzw. A_3 (oder ihren Umkehrungen) ist der Würfel wieder geordnet; für A_4 reicht eine einmalige Wiederholung, was leicht einzusehen ist. Der Ablauf 2 allerdings muß zwölfmal hintereinander ausgeführt werden, damit man wieder zum ursprünglichen Würfelzustand gelangt. Sollte Ihnen das zuviel sein, können Sie nach einer zweimaligen Anwendung von A_2 den ganzen Würfel um 180° um seine senkrechte Achse drehen und erhalten nach weiteren zwei Anwendungen den gerichteten Würfel zurück.

Das Problem besteht nun darin, alle erforderlichen Züge im Kopf zu behalten. Vielleicht nützen Ihnen dabei Lernhilfen: So kann man beispielsweise die Schichten mit Konsonanten, die Pfeilrichtungen mit Vokalen symbolisieren und die Abläufe zu Wörtern kombinieren. Soweit möglich, benutzt man die Anfangsbuchstaben, also

linke Schicht = L
rechte Schicht = R
vordere Schicht = V
mittlere Schicht = M (bisher verwendeten wir ja nur *eine* der drei Mittelschichten).

Da »oben« und »unten« mit Vokalen beginnen, nehmen wir statt dessen die Himmelsrichtungen, wie sie auf einer Landkarte angeordnet sind.

obere (nördliche) Schicht = N
untere (südliche) Schicht = S

34 Nun brauchen wir noch die Richtungen der Pfeile

nach oben = O
nach unten = U
nach links = I
nach rechts = E

Für die beiden letzten Richtungen wurde einfach der zweite Buchstabe benutzt. Kombinieren wir nun jeweils Schicht- und Pfeilrichtungen aller Bewegungen unserer Abläufe zu Wörtern, so erhalten wir

A_1 = MUNIMO NII MUNIMO

A_2 = LONIRONE LUNIRUNEE

A_3 = ROVIRUVE ROVIRUVE

A_4 = MUNEMUNE MUNEE MONEMONE MONEE

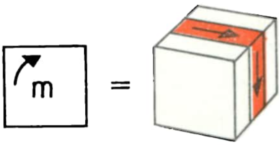
Wer über ein gutes Zahlengedächtnis verfügt, nimmt statt Buchstaben Zahlenfolgen, um sich die Kombinationen zu merken; auch Melodien oder Rhythmen, nach denen gedreht wird, sind möglich. Hier ist jedem »Eselsbrückenbauer« ein breites Betätigungsfeld gegeben.

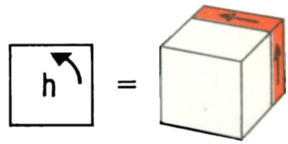
Viel Spaß dabei!

Für Faulpelze

Wie richtet man den Würfel in möglichst wenig Zügen?

Um es vorwegzunehmen: Die wörtliche Erfüllung dieser Aufgabenstellung ist ein unmögliches Unterfangen. Wenn es mehr als 43 Trillionen mögliche Würfelstellungen gibt, so gibt es mindestens ebenso viele kürzeste Richtoperationen. Sie alle darzustellen ist selbstverständlich nicht möglich.
Bisher haben wir stets eine Aufgabe mit jeweils einem Bewegungsablauf gelöst, es ist aber durchaus sinnvoll, mehrere Probleme gleichzeitig zu bewältigen, wodurch viele Züge eingespart werden können. Das jedoch bedeutet schon eine recht große Liste von möglichen Varianten. Generell kann man sagen: Je geringer die Gesamtanzahl von Zügen sein soll, um so größer wird die Anzahl der notwendigen unterschiedlichen Bewegungsabläufe.
Wir müssen uns folglich auf einen Kompromiß einigen, und der soll sein, daß wir die Lösungsstrategie unserer Schnellernvariante beibehalten, d. h. das Richten des Würfels nach dem Ablauf erste Schicht, Mittelschicht, Eckwürfel der dritten Schicht, Kantenwürfel der dritten Schicht, aber dabei mit jedem Bewegungsablauf mehrere Aufgaben lösen. Einverstanden? Bevor wir beginnen, brauchen wir allerdings noch neue Bewegungssymbole.
Es gibt am Würfel zwei Schichten, deren Bewegungen auf der Vorderfläche nicht sichtbar werden; das sind die beiden Schichten hinter der Vorderschicht, also die hintere Schicht und die zwischen Vorder- und Hinterschicht liegende Mittelschicht. Für deren Bewegungen sollen ab jetzt folgende Symbole gelten:

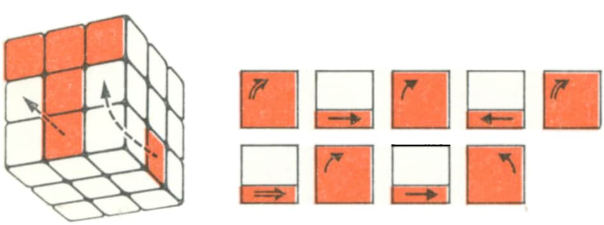




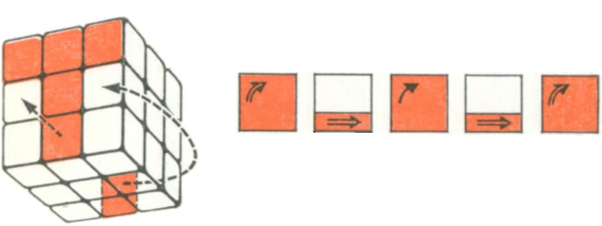
Sicher sind Sie inzwischen mit der Symbolik in diesem Buch so vertraut, daß weitere Bemerkungen hierzu überflüssig sind.
Mit der ersten Schicht halten wir uns in diesem Kapitel nicht noch einmal auf, bei einiger Übung werden Sie selbst auf Tricks kommen, Züge einzusparen. Gehen wir also zur zweiten Schicht über. Diesmal lassen wir die erste Schicht aber oben und drehen sie erst beim Richten der dritten Schicht auf die Unterseite des Würfels.
Wir wollen nun die horizontale Mittelschicht so richten, daß stets *zwei* Würfelchen, die auf eine Seite gehören, gleichzeitig und richtig gekippt an ihren Platz gelangen. Dadurch werden wir fast immer mit zwei Abläufen für die zweite Schicht auskommen, die ja aus vier Kantenwürfeln besteht.
Zunächst werden wir zwei solche Würfelchen, die in der *unteren* Schicht sitzen und eine gemeinsame Farbe aufweisen (aber nirgendwo die Farbe des unteren Mittelwürfels!), auf ihre Plätze bringen. Folgende Varianten gibt es:

Die beiden gemeinsamen Farben liegen auf Seitenflächen.

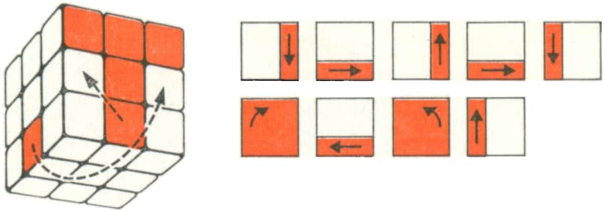
Hier gibt es drei Möglichkeiten, die durch Drehen der Unterschicht einzustellen sind.



(1)



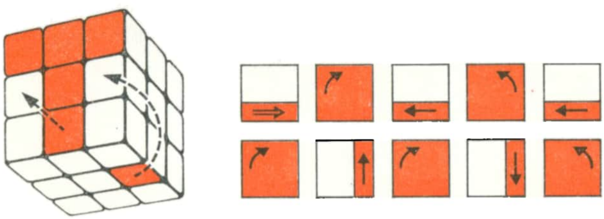
(2)



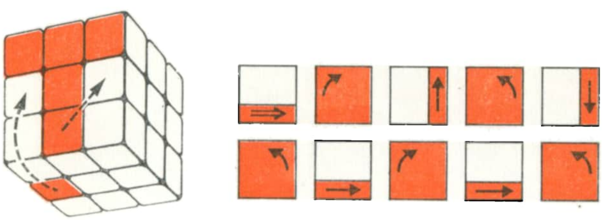
(3)

Eine der gemeinsamen Farben liegt auf einer Seitenfläche, die andere auf der Grundfläche.

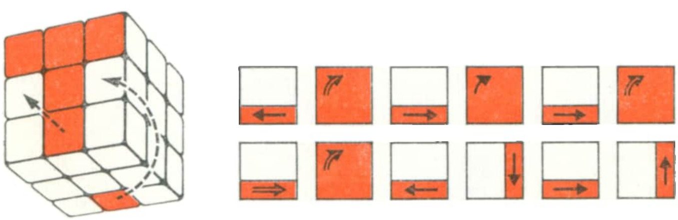
Nun gibt es sechs unterschiedliche Möglichkeiten, da man nicht mehr je zwei durch Drehen der Unterfläche ineinander überführen kann.



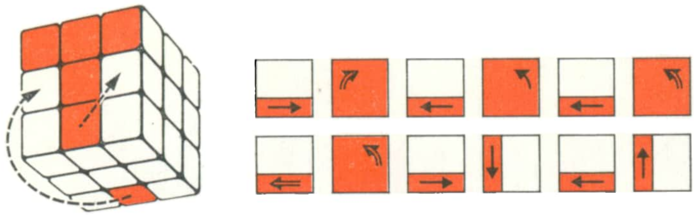
(4)



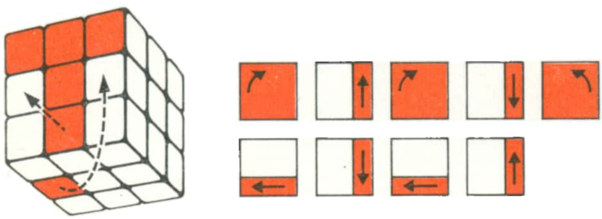
(5)



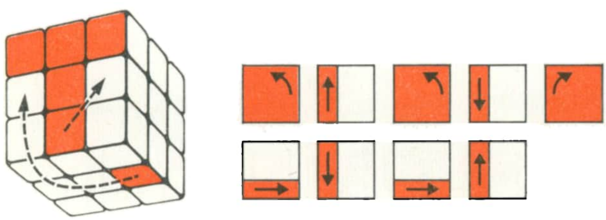
(6)



(7)



(8)

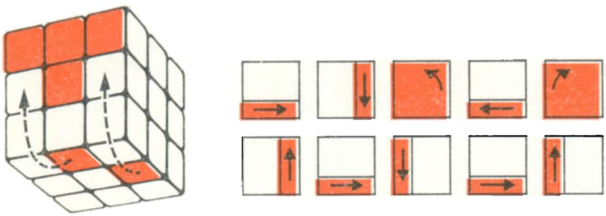


(9)

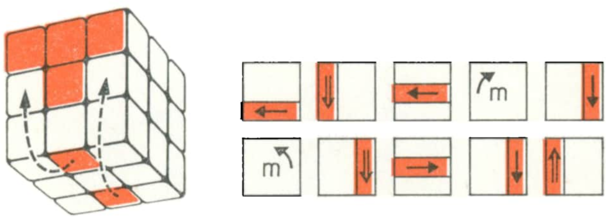
Die einleitenden Züge erscheinen sicher recht unnötig: Erst drehen Sie die untere Schicht so, daß sie der Abbildung entspricht, dann drehen Sie sie mit dem ersten Zug wieder weg. Wir wollen diese Züge aber der Übersicht halber beibehalten, damit immer ein zu setzender Kantenwürfel unter seinem Mittelwürfel sitzend dargestellt werden kann. Bei etwas Übung werden Sie überflüssige Einleitungszüge bald weglassen.

Doch nun zur letzten Möglichkeit, nach der zwei Würfelchen einer Seite der Mittelschicht in der Unterschicht sitzen.

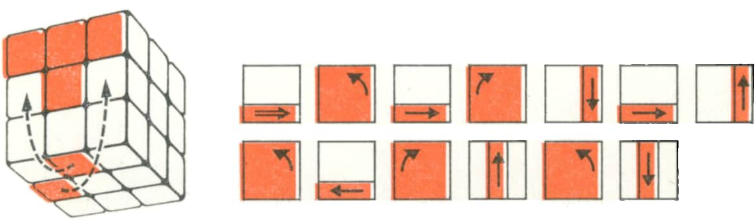
Beide gemeinsamen Farben liegen in der Grundfläche.
Es existieren wieder nur drei verschiedene Varianten.



(10)

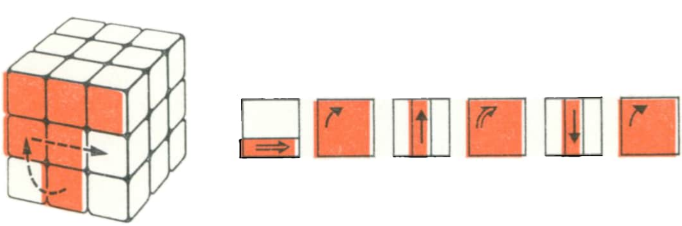


(11)

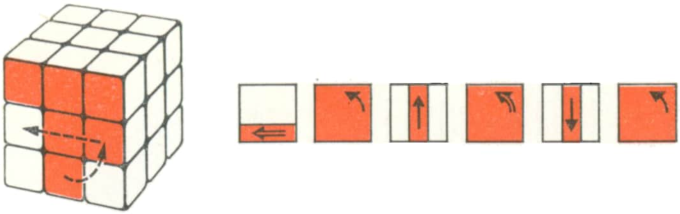


(12)

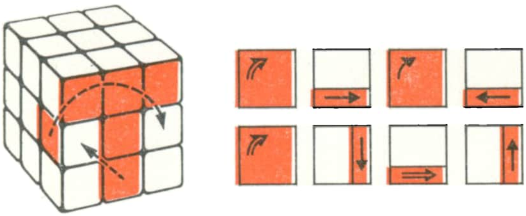
Tritt nun der Fall ein, daß schon ein Würfel in der Mittelschicht sitzt, in die er gehört, aber daß er sich am falschen Platz befindet, wollen wir ihn richten und dabei gleichzeitig einen Würfel aus der Unterschicht auf seinen Platz bringen. Bei **Verschiebung eines bereits in der Mittelschicht sitzenden Würfels** gibt es acht Möglichkeiten.



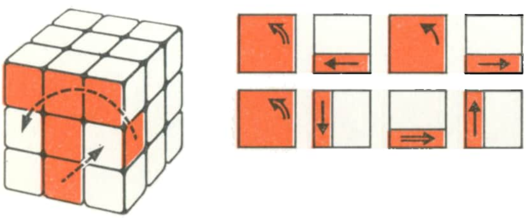
(13)



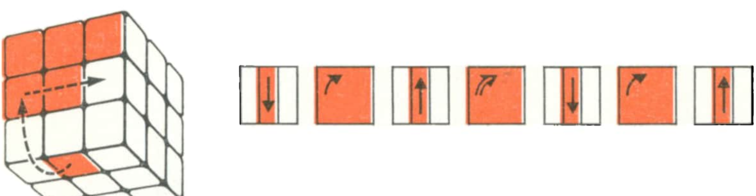
(14)



(15)

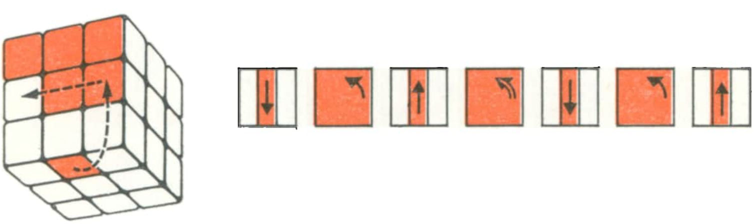


(16)

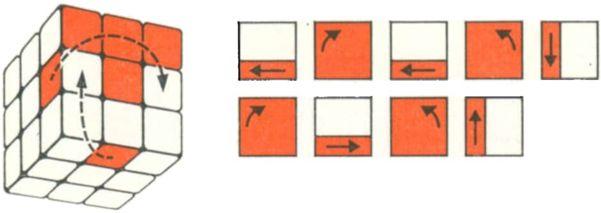


(17)

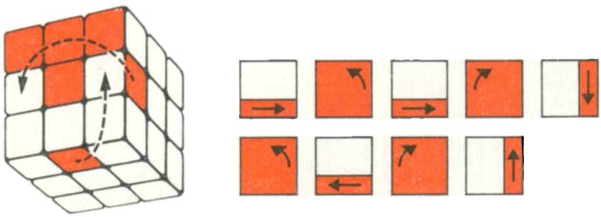
Erkannten Sie unseren Ablauf 1 in anderer Darstellung wieder? Und nun kommt er noch einmal, aber rückwärts.



(18)

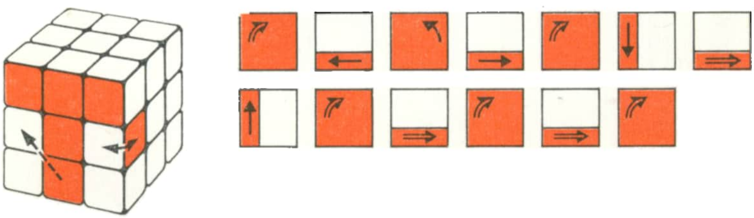


(19)

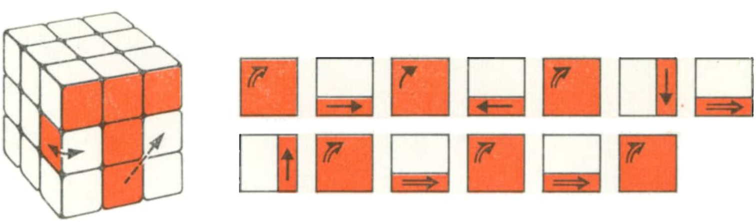


(20)

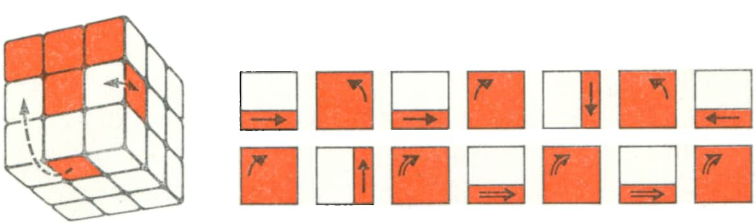
Bei der **Kippung eines Mittelschichtwürfels** kommen wir mit vier Varianten aus.



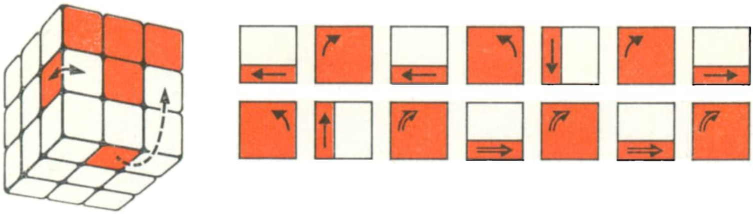
(21)



(22)

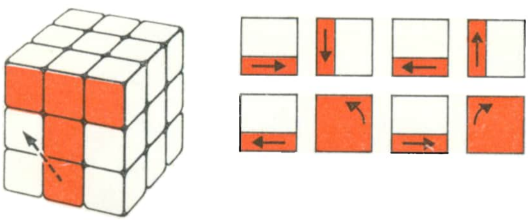


(23)

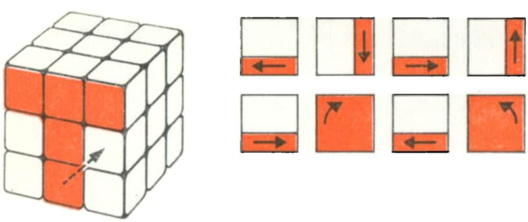


(24)

Sollte es jedoch nicht mehr möglich sein, zwei Kantenwürfel mit gleicher Farbe zu bewegen, dann müssen Sie auch **einen einzelnen Würfel in die Mittelschicht setzen** können.



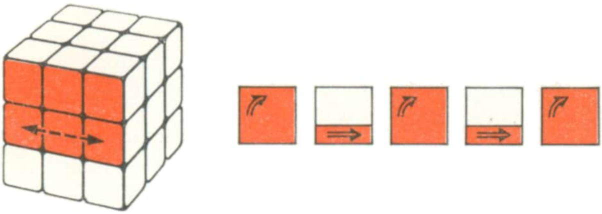
(25)



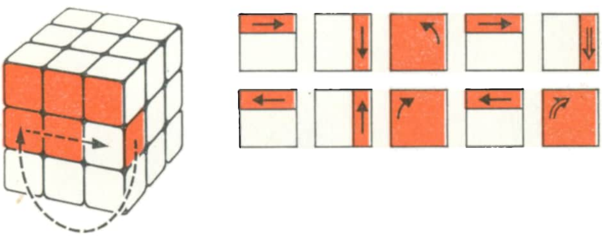
(26)

Dieser Ablauf ist universell anwendbar und kürzer als der aus unserer Schnellernvariante. Sie sollten ihn sich einprägen!
Nun haben Sie bestimmt keinen Mittelschichtwürfel mehr in der Unterschicht. Wenn jedoch von vornherein die betreffenden Kantenwürfel in der Mittelschicht falsch saßen und durch die bisherigen Bewegungen nicht verändert wurden, müssen Sie nun auch diese richten.

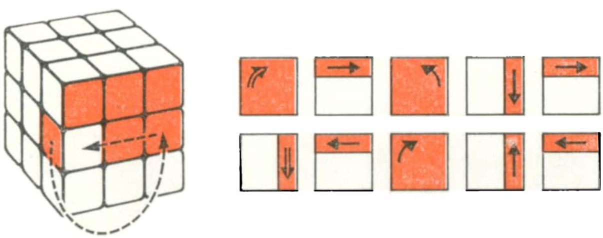
44 Zwei Würfel werden auf einer Seite der Mittelschicht getauscht.



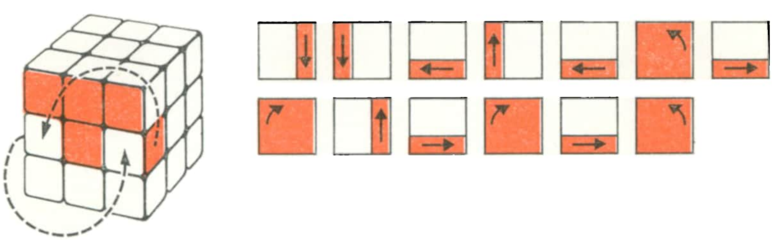
(27)



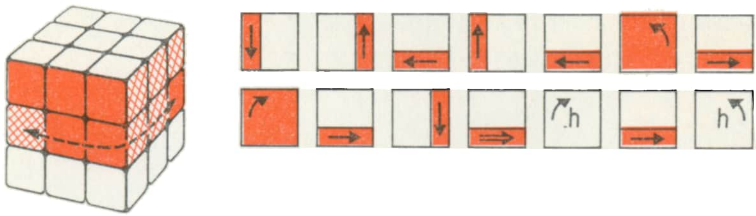
(28)



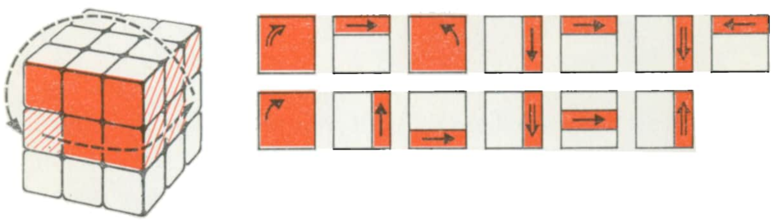
(29)



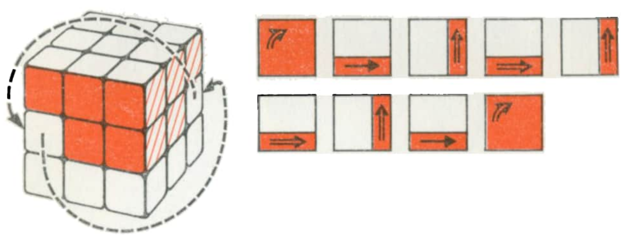
(30)



(31)

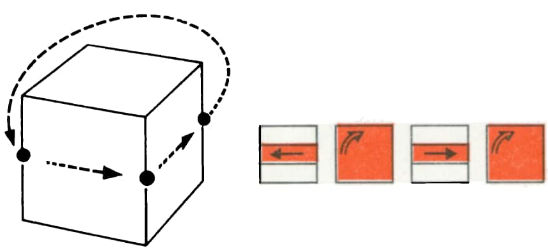


(32)



(33)

Beim **Dreierzyklus in der Mittelschicht** wird es zu unübersichtlich, auch die verschiedenen Kippungen zu berücksichtigen.

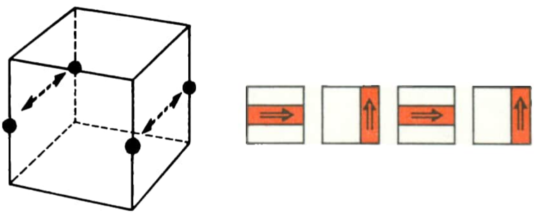


(34)

Sollte der Dreiertausch in umgekehrter Richtung nötig sein, stellen Sie den Würfel einfach auf den Kopf, aber so, daß der unbeteiligte Kantenwürfel wieder links hinten sitzt.

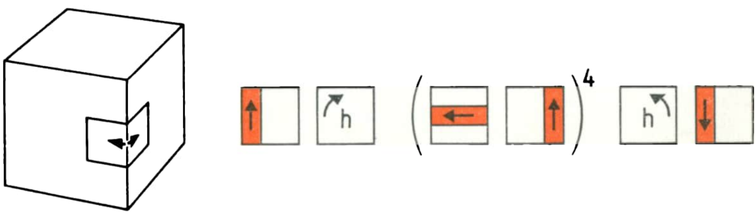
Zwei Würfelpaare werden getauscht.

(35)

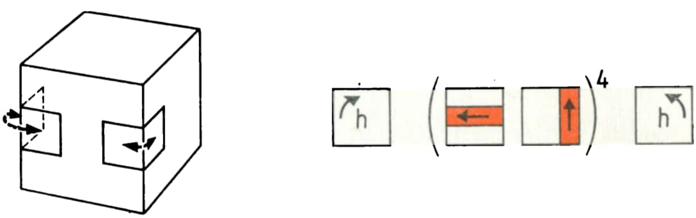


Schließlich ist es noch möglich, daß alle Würfel der zweiten Schicht an der richtigen Stelle sitzen, aber **einzelne Würfel verkippt** sind.

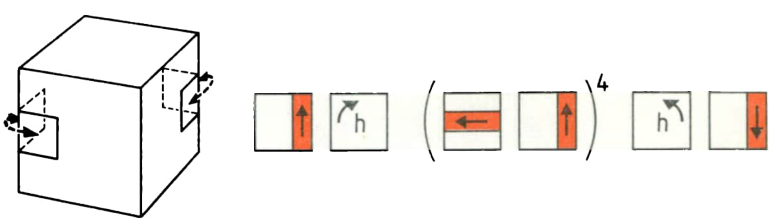
(36)



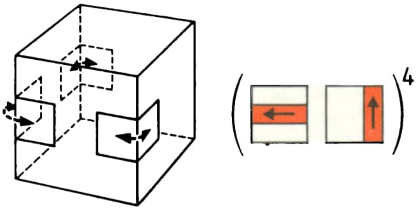
(37)



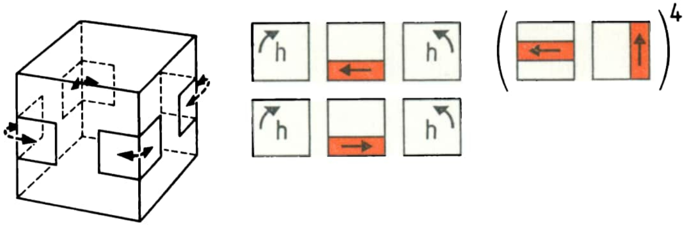
(38)



(39)



(40)



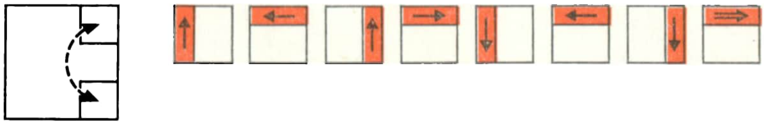
Damit ist, wie anfänglich gesagt, die Mittelebene im allgemeinen mit zwei Abläufen zu schaffen.

Oft entdecken Sie aber, daß mehrere der hier dargestellten Operationen zu einem Zeitpunkt möglich sind. Bei der Entscheidung, *welche* Sie anwenden werden, sollten Sie unbedingt von der Reihenfolge ausgehen, in der die Bewegungsabläufe hier vorgestellt wurden. Versuchen Sie also zuerst, zwei Würfel aus der unteren Schicht in die Mittelschicht zu bekommen. Nur wenn das nicht mehr möglich ist, setzen Sie einen einzelnen mit Veränderung eines anderen in die Mittelschicht, dann einen ohne Bewegung eines anderen, und nun erst wenden Sie Bewegungen innerhalb der Mittelschicht bzw. am Schluß Kippungen an. Diese Reihenfolge der Auswahl gilt für jede Operation neu.

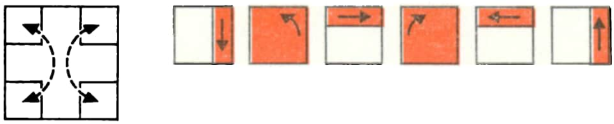
Jetzt ist die letzte Schicht an der Reihe, die wir mit insgesamt drei Abläufen richten werden. Dafür stellen Sie nun den Würfel auf den Kopf, so daß die zu richtende Schicht oben ist.

Wir werden uns wiederum damit begnügen, die obere Fläche von oben darzustellen, die Fläche mit den Bewegungssymbolen bleibt aber die Vorderfläche.

Nach der im dritten Kapitel beschriebenen Methode suchen Sie jetzt **zwei oder zweimal zwei zu vertauschende Eckwürfel** und richten sie nach einem der folgenden Abläufe.



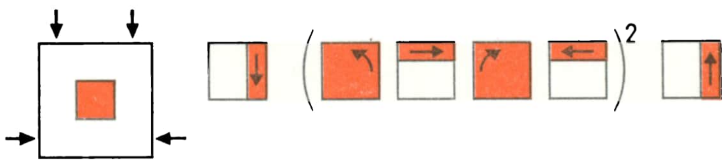
(41)



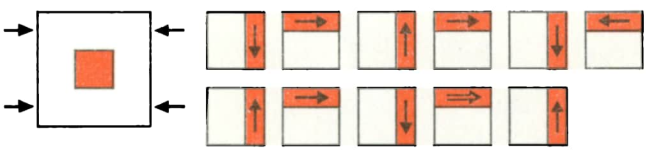
(42)

Im ersten Ablauf haben Sie sicherlich den bekannten A_2 wieder entdeckt.

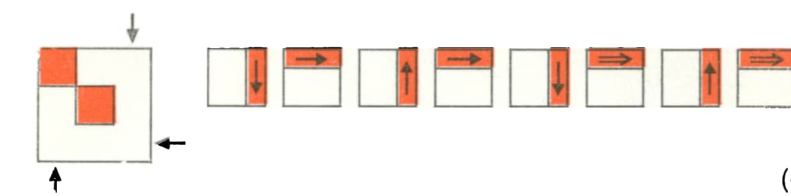
Jetzt müssen **verdrehte Eckwürfel** wahrscheinlich noch gerichtet werden. Die folgenden sieben Abbildungen stellen sämtliche Möglichkeiten dar, die auftreten können. Die Pfeile weisen auf die Seitenflächen, die nach oben gedreht werden sollen.



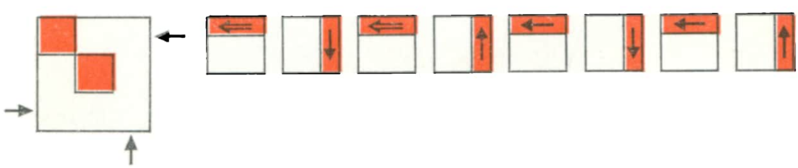
(43)



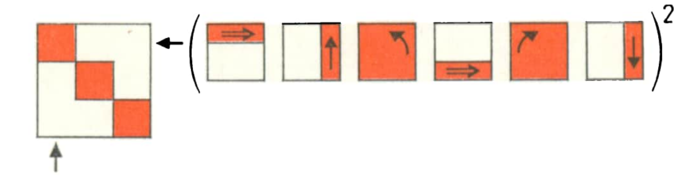
(44)



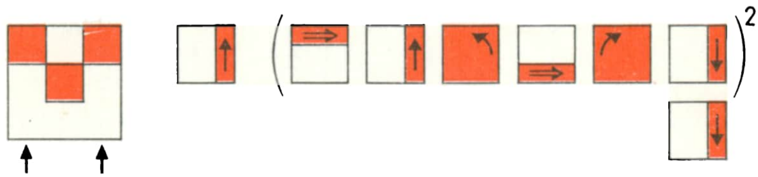
(45)



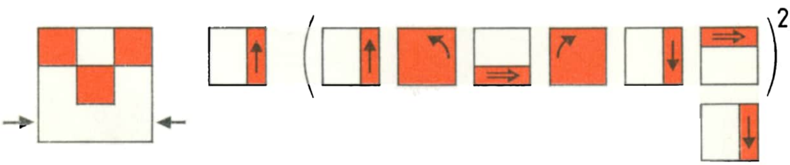
(46)



(47)



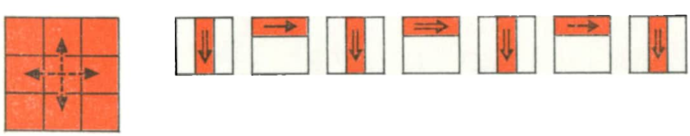
(48)



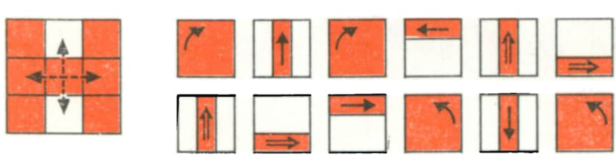
(49)

Nun bleiben uns nur noch die **Kantenwürfel.** Aus dem vorangegangenen Kapitel wissen Sie bereits, daß es nur vier Möglichkeiten gibt, nach denen sie noch vertauscht sein können. Wir wollen jetzt aber stets gleichzeitig die möglichen Verkippungen berücksichtigen. In den folgenden Darstellungen bleiben die Kantenwürfel, die vor dem zu erfolgenden Tausch verkippt sind, ihre Oberfarbe also noch an der Seite haben, weiß.

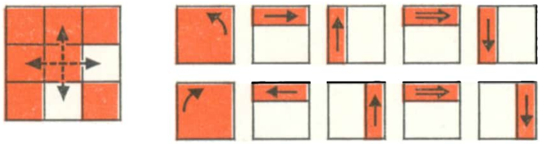
Zwei Paare tauschen über Kreuz.



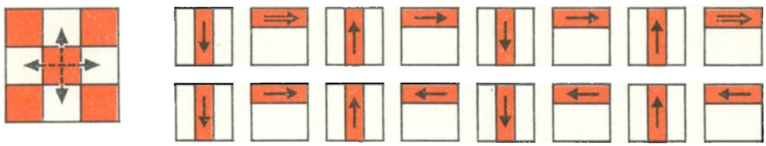
(50)



(51)

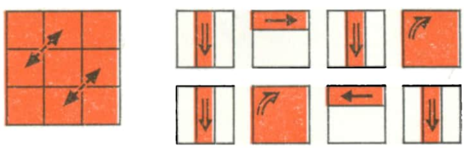


(52)

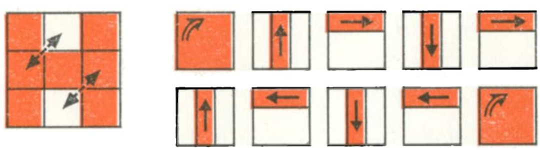


(53)

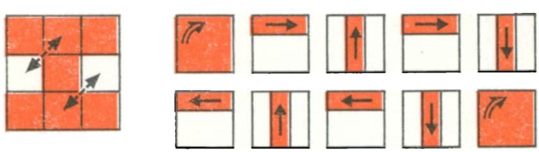
Zwei Paare tauschen parallel.



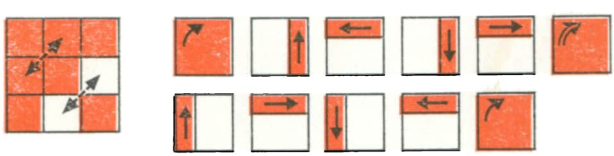
(54)



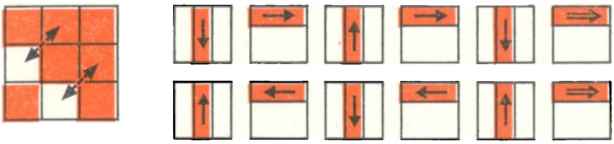
(55)

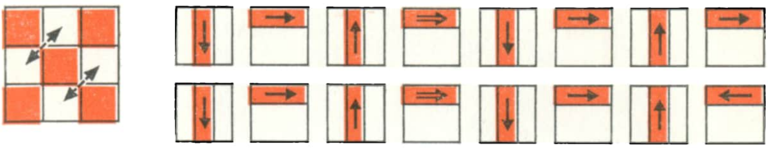


(56)



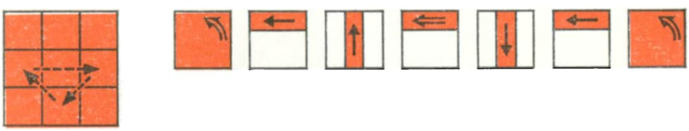
(57)

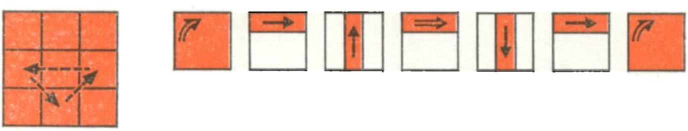

(58)

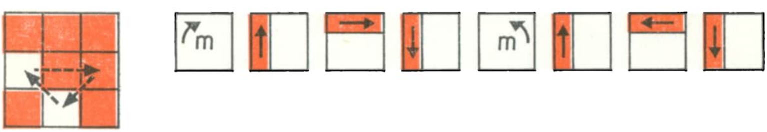

(59)

Dreierzyklen.

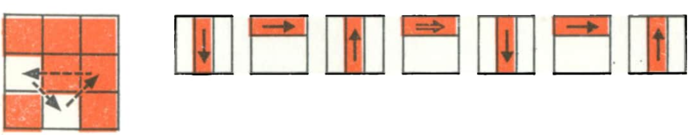
Der vierte Kantenwürfel ist bereits richtig gekippt.

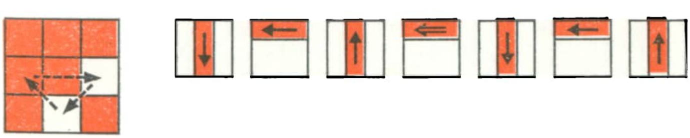

(60)

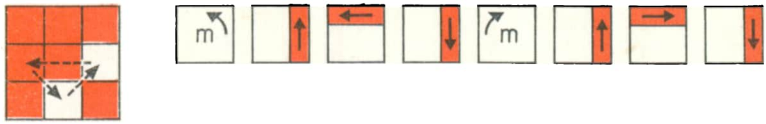

(61)



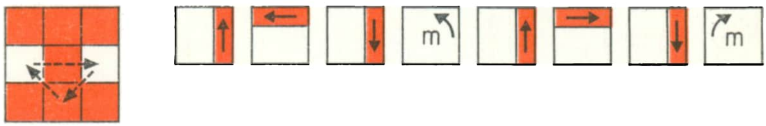
(62)


(63)

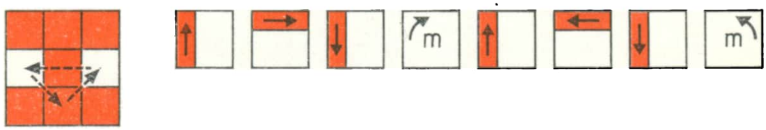

(64)



(65)

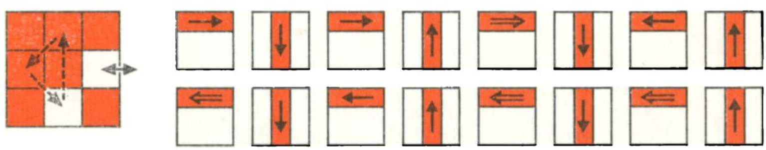


(66)

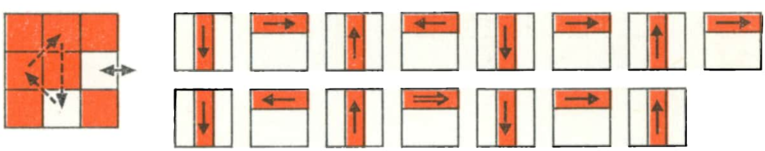


(67)

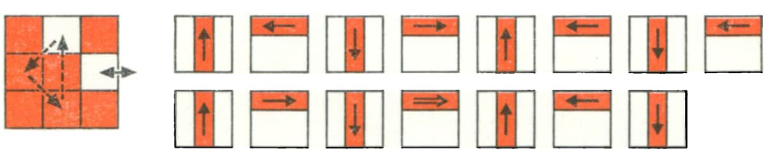
Der vierte Kantenwürfel muß noch verkippt werden.



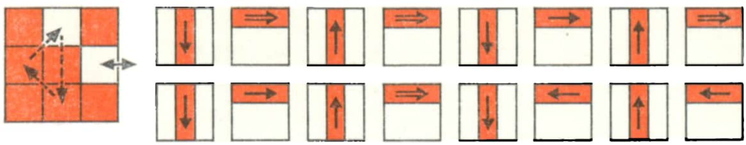
(68)



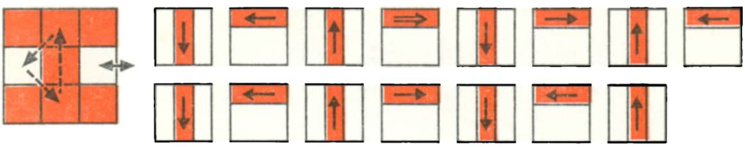
(69)



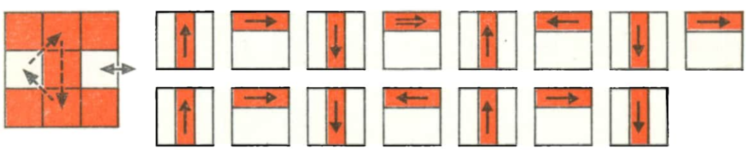
(70)



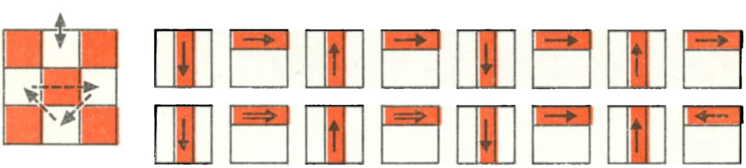
(71)



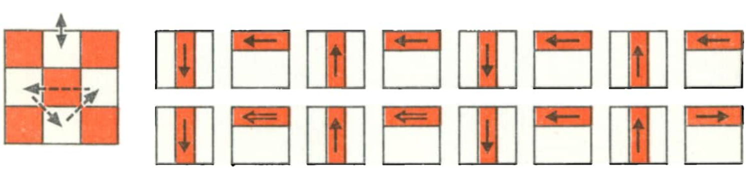
(72)



(73)

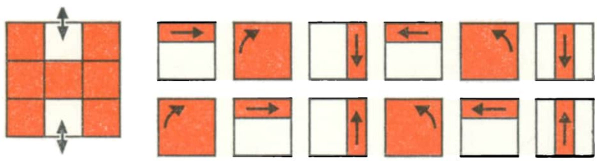


(74)

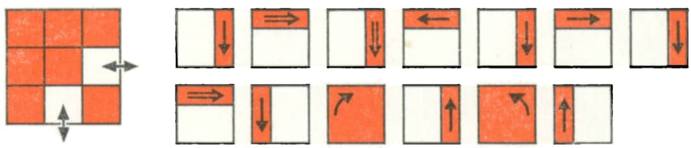


(75)

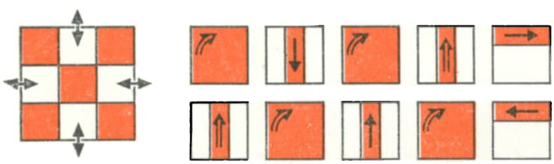
54 Schließlich besteht noch die Möglichkeit, daß bereits nach dem Richten der Eckwürfel alle Kantenwürfel an ihren Plätzen sitzen, jedoch noch **Kippungen** erforderlich sind:



(76)



(77)



(78)

So, das war's! Sie sind jetzt in der Lage, den Würfel in wenigen einzelnen Zügen zu richten, durchschnittlich werden es etwa siebzig Züge sein. Eine Abschätzung der maximalen Zugzahl ist sehr schwierig, da für die erste und die zweite Schicht zu viele unterschiedlich behandelbare Varianten auftreten können; es liegt also an Ihrem eigenen Geschick, wenig Züge durchzuführen.
Bei der dritten Schicht läßt sich eindeutig eine Zugzahl für die ungünstigste Variante bestimmen, sie beträgt 39:

1 für die Drehung der oberen Ebene
8 für den ungünstigeren Eckwürfeltausch
14 für die ungünstigste Eckendrehung
16 für den ungünstigsten Kantenwürfeltausch.

Sinn dieses Kapitels war jedoch nicht, daß Sie versuchen, alle auf-

geführten Operationen auswendig zu lernen, um den Würfel in sehr kurzer Zeit richten zu können. Die Zeit, die Sie zum Überlegen brauchen, *welche* Operation anzuwenden ist, wird meist länger sein als die Zeit für ein paar zusätzliche Züge, die jedoch schnell und sicher beherrscht werden.
Vielmehr sollten Sie erkennen, daß für jedes Einzelproblem eine relativ kurze Operation zu finden ist. *Wie*, das werden wir im nächsten Kapitel behandeln.
Wenn Sie sich jedoch weitere Abläufe einprägen wollen, wären für die Mittelschicht die Abläufe 25 und 26 zu empfehlen. Dabei sollten Sie versuchen, jeweils den ersten Zug wegfallen zu lassen, indem Sie die Unterschicht gleich entsprechend drehen. Die beiden Eckwürfeltauschoperationen 41 und 42 der letzten Schicht müßten Sie beherrschen, auch die Drehungen 43 bis 46. Für Drehungen von zwei Eckwürfeln können Sie getrost unseren A_3 verwenden.
Für die vier Möglichkeiten, die Kantenwürfel der letzten Schicht zu vertauschen, sollten Sie je eine kurze oder für Sie bequeme Möglichkeit kennen, unabhängig davon, welche Verkippung dabei auftritt. Die nach dem Tausch verbleibende Verkippung können Sie dann mit A_4 bzw. Operation 77 oder 78 beheben.
Wenn Sie diese fünfzehn Operationen beherrschen, schaffen Sie es bald bequem, den Würfel in anderthalb bis zwei Minuten, bei noch mehr Training in weniger als einer Minute zu richten, falls Sie derartige Ambitionen haben sollten.
Wenn Sie allerdings noch intensiver üben, weitere Abläufe, aber auch Strategien beherrschen und blitzschnell anwenden können, haben Sie vielleicht das Glück, an einer Weltmeisterschaft im Würfeldrehen teilnehmen zu können. Die erste fand am 5. Juni 1982 in Budapest statt, dreißig Landesmeister sind eingeladen worden, neunzehn Nationen nahmen teil. Jury-Vorsitzender war übrigens der Würfelerfinder Ernö Rubik selbst. Die Weltmeisterschaft wurde als Einzelwettkampf über drei Runden ausgetragen. Sieger war, wer den Würfel – gleich in welcher Runde – in der kürzesten Zeit zurückdrehte. Alle Teilnehmer begannen mit einem »gleichmäßig verdrehten« Würfel. Was, meinen Sie, war die Siegerzeit? 22,95 Sekunden! Sie wurde von dem sechzehnjährigen US-amerikanischen College-Studenten Minh Thai erreicht, der dafür mit einem gold-

belegten Rubikwürfel geehrt wurde. Erst der Sechstplazierte benötigte über 25, der Dreizehnte über 30 Sekunden. Und der Letzte des Wettkampfes schaffte es immerhin noch in 50,16 Sekunden.

Sie sehen, es ist einiges zu tun, um zu dieser Spitze vorzustoßen! Aber man muß ja nicht unbedingt Teilnehmer einer Weltmeisterschaft sein. Unser Würfel macht Millionen Menschen Freude, gibt, wie schon gesagt, Entspannung und geistige Anregung – auch wenn man nicht so schnell ist.

Darum wollen wir nun in den nächsten Kapiteln etwas tiefer in die Geheimnisse des magischen Würfels eindringen.

Für Tüftler

Wie kann man Operationen selbst erfinden?

Mit diesem Kapitel beginnt der eigentliche Spaß am magischen Würfel, ab jetzt sind eigene Ideen, ist eigene Schöpferkraft gefragt. Oder macht es Ihnen Vergnügen, immer nur nachzuvollziehen, was sich andere vor Ihnen ausgedacht haben? Sicher nicht. Selbst ist der Mann – die Frau übrigens nicht minder!

Vielleicht fragen Sie sich, warum neue Bewegungsabläufe erforderlich sind; in den vorangegangenen Kapiteln stehen ohnehin schon zu viele, um sich alle merken zu können.

Um das zu beantworten, müssen wir uns überlegen, was man von einem solchen Ablauf erwarten soll, welche Anforderungen an ihn zu stellen sind:

1. Zunächst muß die Operation natürlich eine überschaubare Veränderung am Würfel bewirken.
   Aber hier fangen schon die individuellen Unterschiede an! Manch einer kann einen Fünferzyklus von Kantenwürfeln mit den dazugehörigen Verkippungen überschauen, einem anderen fällt vielleicht ein Dreierzyklus schwer, wenn dieser nicht innerhalb einer Schicht abläuft.
   Welche Veränderung andererseits gesucht werden muß, richtet sich in erster Linie nach der verwendeten Lösungsstrategie, doch darauf werden wir im 7. Kapitel zurückkommen.
2. Nach Anwendung eines Bewegungsablaufes darf bisher Erreichtes nicht wieder zerstört sein.
   Veränderungen, die sich parallel zu den erwünschten ergeben, dürfen sich nur bei noch nicht gerichteten Würfelchen auswirken. Auch hier ist der gesuchte Bewegungsablauf im wesentlichen eine Frage der Strategie, weil diese bestimmt, was bereits gerichtet ist und was noch nicht.
3. Die Operation soll möglichst kurz und einprägsam sein. Der Grad der Einprägsamkeit ist natürlich wiederum für den einen oder

anderen Menschen sehr unterschiedlich. Ist Eingängigkeit für jemanden bei einem Ablauf nicht gegeben, kann das Anreiz sein, einen neuen zu suchen.

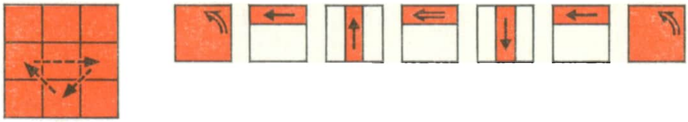
4. Die einzelnen Bewegungen der Zugfolge sollen leicht und schnell handhabbar sein.
   Hierzu ist – abgesehen von individuellen Unterschieden, z. B. zwischen Links- und Rechtshändern – generell zu sagen, daß Züge der hinteren Schichten unhandlicher sind als andere. Mittelschichtdrehungen erweisen sich als weniger griffgünstig als Außenschichtzüge, 180°-Drehungen sind weniger leicht auszuführen als solche um 90°. Schließlich ist es nicht zuletzt auch für die Schnelligkeit günstiger, die Operation jeweils nur an wenigen Schichten durchführen zu müssen als an einer Vielzahl von ihnen.

Wenden wir uns also dem Erfinden neuer Operationen zu! Zunächst ist es möglich – und relativ einfach –, aus bekannten Abläufen neue zu entwickeln. Einige Prinzipien dafür haben wir bereits angewendet, sie sollen hier in zusammengefaßter Form dargestellt werden.

Hilfszüge wollen wir die ein- und ausleitenden Bewegungen nennen, die den Würfel so umbauen, daß eine bekannte Operation ihre Wirkung an anderen als den ursprünglich dafür vorgesehenen Würfelchen zeigt.

Diesen Trick haben wir in unserer Schnellernvariante angewendet, als mit Hilfe von A_1, der ausschließlich in der oberen Schicht wirkt, die Mittelschicht gerichtet wurde. Auch die Kippung beieinanderliegender Kantenwürfel mittels Ablauf 4, der eigentlich gegenüberliegende Kantenwürfel kippt, ist uns inzwischen geläufig. Wichtig ist, daß alle einleitenden Bewegungen durch Umkehrung wieder rückgängig gemacht werden, sobald die bekannte Operation beendet wurde.

Sicherlich muß man erwägen, ob die Zugfolge mit den Hilfszügen nicht zu lang wird. Aber es sind auch sehr kurze Operationen nach dieser Technik erhalten worden. Schauen Sie sich die Operation 60 im Kapitel 4 noch einmal an, einen Dreierzyklus in der oberen Schicht.



Läßt man hier die erste und die letzte Drehung weg (es sind offensichtlich Hilfszüge), wird ein kürzerer Ablauf für einen Dreierzyklus sichtbar. Wir probieren es am besten am gerichteten Würfel.
Dieser neue Dreiertausch ist aber noch immer nicht »des Pudels Kern«, auf den stoßen wir, wenn erst mit dem dritten Zug begonnen, der vorletzte jedoch verdoppelt und der letzte weggelassen wird. In dem nun übriggebliebenen Mittelschichtdreierzyklus erkennt man unschwer die Operation 34 wieder.
Allgemein kann man sagen, daß Hilfszüge uns in die Lage versetzen, die Möglichkeiten einer Operation zu erweitern, beispielsweise aus *einem* Kantendreierzyklus *jeden* Kantendreierzyklus zu machen, dem die gleichen Kippungen innewohnen.
Eine weitere bereits von uns angewendete Methode ist die **Variation.** Hier gelangt man zu neuen Operationen, indem man die bekannten in der Reihenfolge oder Richtung ihrer Züge verändert.
Häufig entsteht durch *Umkehrung* ein uns interessierender Ablauf. Dabei wird die Zugfolge rückwärts ausgeführt, der letzte Zug also als erster und dieser wie auch jeder weitere entgegen seiner Pfeilrichtung. Wir haben diese Umkehrung bei den Abläufen A_1 und A_3 angewendet, um die Drehrichtung des Dreierzyklus bzw. der Eckwürfeldrehung umzukehren, erinnern Sie sich?
Zum anderen kann auch eine *Spiegelung* angewendet werden. In diesem Fall bleibt die Reihenfolge der Züge erhalten, jede Bewegung wird aber so ausgeführt, wie sie in einem durch eine Mittelschicht gelegten Spiegel zu sehen wäre. Beispiele hierfür sind alle aufeinanderfolgenden Paare der Operationen 13 bis 26. Man erkennt hier auch sehr klar, was die Spiegelung bewirkt, weshalb sich weitere Ausführungen hierzu erübrigen.
Schließlich können auch Spiegelung *und* Umkehrung benutzt werden. Führen wir am gerichteten Würfel die Operation 3 des vierten Kapitels durch, entsteht ein Problem, das mit der Operation 10 des vierten Kapitels lösbar ist. Versuchen Sie, den Zusammen-

hang zwischen beiden Zugfolgen zu erkennen, und bedenken Sie dann, daß – so unterschiedliche Aufgaben diese Operationen auch erfüllen –, wenn *eine* Operation gefunden wurde, sofort die zweite ersichtlich ist.

Eventuell kann man auch die **Kombination** von zwei Bewegungsabläufen als eine neue Operation ansehen. Beispiele dafür sind die Abläufe 21 bis 24. Bei allen sind die letzten fünf Züge die gleichen. Sie entsprechen der Operation 27. Die dieser Zugfolge vorangestellten Züge sind identisch mit den Abläufen 16, 15, 20 und 19. Zwei Operationen wurden also miteinander kombiniert. Schauen Sie selbst, wie durch diese Kombination die erwünschte Wirkung erreicht wird.

Nun möchten wir uns endlich den *neu* zu erfindenden Operationen zuwenden. Auch hier gibt es einige Prinzipien. Zunächst ein einfaches Problem.

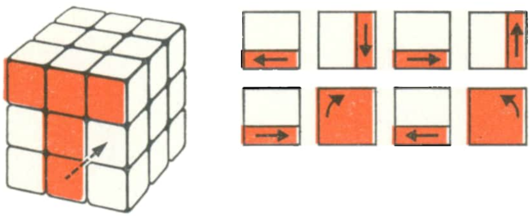
Beginnen Sie die erste Schicht einmal nicht mit den Kanten-, sondern mit den Eckwürfeln. Sie sind ebenso zu setzen, wie in unserer Schnellernvariante gezeigt ist. Wenn die Eckwürfel gerichtet sind, werden die Kantenwürfel dazwischengesetzt. Das aber erfordert neue, wenn auch einfache Zugfolgen. Beim Suchen danach werden Sie bald das Prinzip entdeckt haben: Der Zusammenbau der gesamten Kante erfolgt außerhalb der oberen Schicht, diese wurde sozusagen »weggedreht«. Erst wenn die Kante durch ihren dazugehörigen Kantenwürfel komplettiert ist, wird sie in ihre Schicht zurückgedreht.

Haben Sie sich die entsprechenden Züge erarbeitet, sollten Sie sie nicht vergessen; man kann beim Setzen der ersten Schicht Zeit und Bewegungen sparen, wenn man nicht auf eine Reihenfolge angewiesen ist.

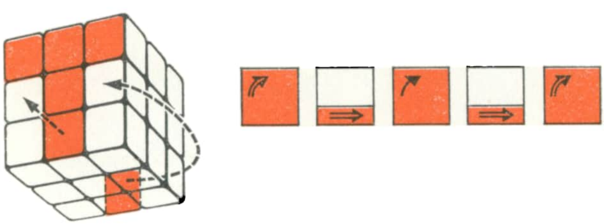
Schwieriger wird die Suche nach neuen Zügen, wenn bereits eine Schicht fertiggebaut ist. Dann muß sie ja erhalten bleiben, und eine ganze Schicht ist nicht »wegzudrehen«. Man geht hierbei so vor, daß ihre Teile zeitweilig »zerstört« werden und die Reparatur anschließend entweder auf eine andere Weise geschieht oder nach einigen Zusatzbewegungen erfolgt.

An diesem Problem scheitern die meisten Versuche, den Würfel zu richten; hier beginnt die „Hohe Schule“ des Würfeldrehens.

Eines der kürzesten Beispiele ist die Operation 26.



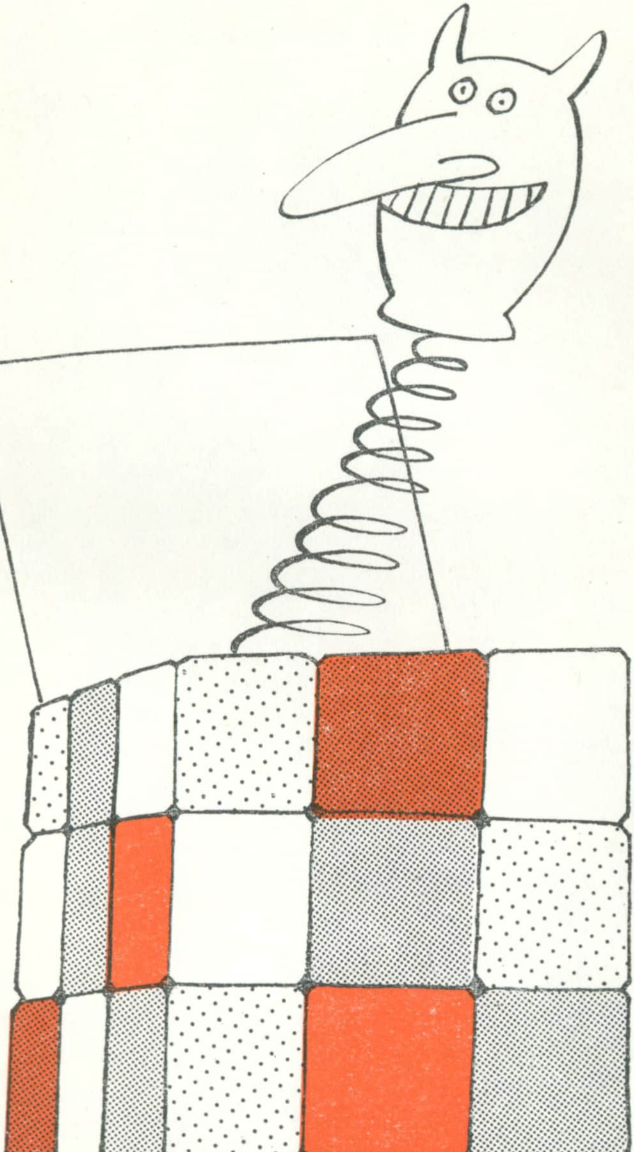
Probieren Sie sie am gerichteten Würfel, aber nicht vergessen, daß man beim Anwenden dieses Ablaufes normalerweise nur die erste Schicht fertiggestellt hat.
Die einleitende Bewegung ist unwichtig für unsere Betrachtung. Die nächsten drei Züge bringen den rechten oberen Eckwürfel in die untere Schicht, zerstören die obere also zeitweilig, während die letzten vier Drehungen die Reparatur auf eine andere Weise, also nicht durch Umkehrung der »Zerstörungsoperation«, vornehmen. Dabei gelangt ein Kantenwürfel aus der unteren Schicht in die Mittelschicht, was der Zweck dieses Ablaufes war.
Ein Beispiel für die genannten »Zusatzbewegungen« ist die Operation 2 im Kapitel 4.



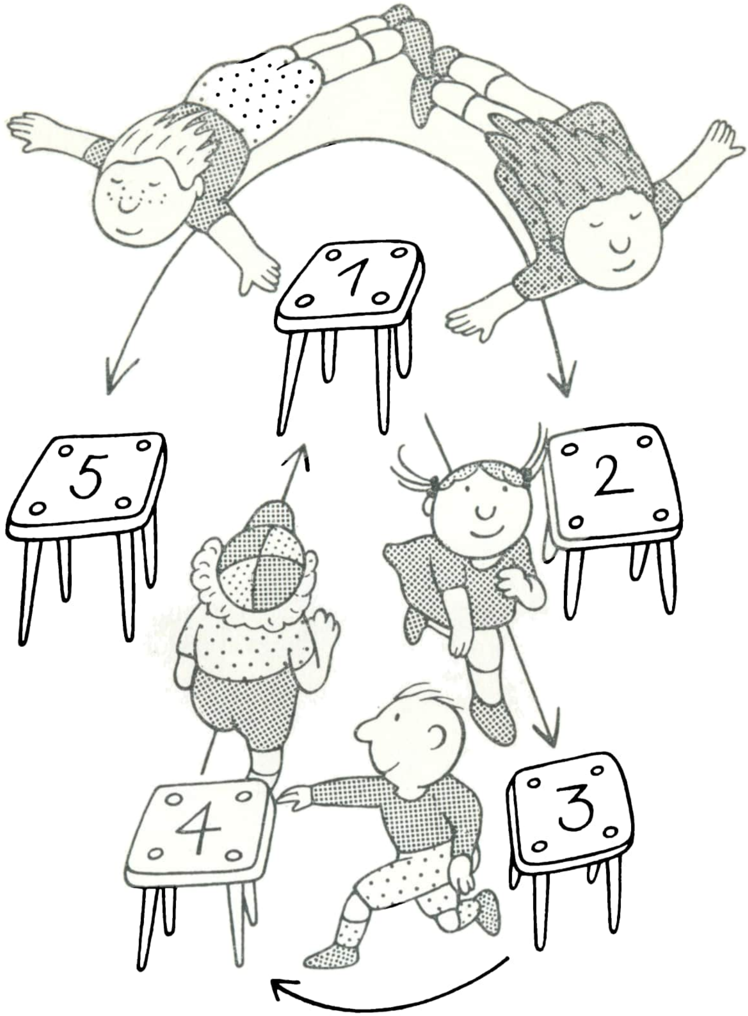
Sie sehen es sicher sofort: Die ersten beiden Züge bringen eine gesamte Kante weg, dann erfolgt die Zusatzbewegung, worauf die Kante wieder gesetzt wird.
Suchen nach neuen Abläufen bedeutet, zu probieren und immer wieder zu probieren, wobei man nicht vergessen darf, zu notieren, was bereits versucht wurde.

Gutes Gelingen !

Für Rechner



Unberechenbar ist der Würfel sicher in seiner Wirkung auf den Menschen: Den einen läßt er kalt, der andere schlägt sich mit ihm die Nächte um die Ohren.
Aber seine *Züge* sind durchaus berechenbar – und das soll in diesem Kapitel verdeutlicht werden. Nein, Sie brauchen nicht gleich die nächsten Seiten zu überblättern – es wird wirklich nicht kompliziert.
Bevor es losgeht, wollen wir uns eines alten Spiels erinnern, das besonders gern an Kindergeburtstagen gespielt wird:
Die Kinder sitzen im Kreise auf Stühlen, eines steht mit verbundenen Augen in der Mitte. Nun wechseln die Sitzenden ihre Plätze, das »blinde« Kind setzt sich auf den Schoß eines anderen Kindes und muß erraten, wer es ist. Kennen Sie dieses Spiel noch? In Berlin heißt es »Hänschen, piep einmal!«.
Wir wollen diesem Kinderspaß ein wenig nachgehen. Dabei interessiert uns nicht das Erraten, sondern nur der Platzwechsel. Nehmen wir an, sechs Kinder beteiligen sich an dem Spiel; fünf von ihnen tauschen folglich ihre Plätze. Außerdem sollen die Stühle der Reihe nach numeriert sein, also von 1 bis 5. Wir suchen jetzt eine Methode, einen Platzwechsel darzustellen, wie er z. B. auf dem Bild vorgenommen wird.
Wir sehen, daß eine zyklische Dreiervertauschung erfolgt, die wir kurz Dreierzyklus nennen wollen. Das Kind, das auf Platz 1 saß, wechselt auf Platz 3, das von Platz 3 auf Platz 4, und das Kind von Platz 4 sitzt nun auf Stuhl 1. Die Kinder der Plätze 5 und 2 haben ihre Plätze getauscht. Wir nennen das einen Tausch oder auch Zweierzyklus.
Eine weitere Vereinfachung der Ausdrucksweise soll noch vorgenommen werden: Wir formulieren nur »1 geht nach 3, 3 nach 4 usw.« und lassen alles Überflüssige weg.



$$= (134)(25)$$

 Diesen Wechsel schreibt man folgendermaßen auf:

(134) (25)

Jede Klammer beinhaltet einen Zyklus. Insgesamt erkennen wir: 1 geht nach 3, 3 nach 4, und 4 geht nach 1, während 2 und 5 tauschen. Der gleiche Wechsel wird zum Beispiel auch durch die Zyklen

(413) (25)
(341) (52)
(52) (134)

ausgedrückt.
All diese Bezeichnungen sind lediglich unterschiedliche »Namen« für den gleichen Wechsel. Dagegen ist mit dem Zyklus

(143) (25)

ein völlig anderer Tausch beschrieben, was Sie sich am besten an einer Zeichnung klarmachen können.
Rückt dagegen jedes Kind nur um einen Stuhl in Richtung der Numerierung weiter, entsteht ein Fünferzyklus der Form

(12345).

Es ist leicht zu erkennen, daß dieser Tausch, sollte er fünfmal wiederholt werden, zum Ausgangszustand zurückführt, daß jedes Kind dann also wieder an seinem alten Platz sitzt. Aber das gilt natürlich für *jeden* fünfmal wiederholten Fünferzyklus, nicht wahr? Diese Tatsache ist wichtig, deshalb muß man sie sich merken!
Nun wollen wir uns ansehen, welche Sitzordnung entsteht, wenn mehrere Vertauschungen hintereinander durchgeführt werden. (Solche Hintereinanderfolgen von Zyklen werden Multiplikation genannt.) Nehmen wir drei Spiele mit folgenden Zyklen an.

1. Spiel: (14235)
2. Spiel: (13) (25) (4) — 4 bleibt auf seinem Platz sitzen. Einerzyklen werden weggelassen, wir schreiben also einfach (13) (25)
3. Spiel: (154) (23)

Verfolgen wir jetzt den Wechsel jedes Kindes in allen Spielen.

1 geht im ersten Spiel nach 4, dort bleibt es im zweiten Spiel sitzen und geht im dritten und letzten Spiel nach 1. Sind die drei Spiele beendet, hat es seinen ursprünglichen Sitzplatz wieder eingenommen. Jetzt kann ein beliebiger anderer Wechsel verfolgt werden, nehmen wir den von 2.

1. Spiel: 2 geht nach 3
2. Spiel: 3 geht nach 1
3. Spiel: 1 geht nach 5

Folglich geht 2 im Ergebnis aller drei Spiele nach 5. Nun müssen wir verfolgen, wo 5 hingewandert ist.

1. Spiel: 5 geht nach 1
2. Spiel: 1 geht nach 3
3. Spiel: 3 geht nach 2

Also geht 5 im Ergebnis aller drei Spiele nach 2, d. h., der Zyklus ist abgeschlossen, 5 und 2 haben die Plätze getauscht. Wenn Sie sich 3 und 4 anschauen, werden Sie feststellen, daß diese wie soeben 1 auf ihre alten Plätze gelangen.

Das Ergebnis der drei vorgenommenen Wechsel läßt sich als Multiplikation der drei Zyklen folgendermaßen darstellen:

$$(14235) \cdot [(13)\ (25)] \cdot [(154)\ (23)] = (25).$$

Noch etwas: Aufeinanderfolgende Zyklen, die keine Zahl gemeinsam haben, d. h. elementfremd sind, können vertauscht werden. Das bedeutet:

$$(13) \cdot (25) = (25) \cdot (13).$$

$(13) \cdot (25)$ ist das Ergebnis der beiden Spiele (13) und (25). Dieses Ergebnis ist aber das gleiche wie der Wechsel (13) (25) bei *einem* Spiel.
Damit werden unsere eckigen Klammern und die Multiplikationszeichen überflüssig. Wir können das Ergebnis der Spiele also formulieren:

$$(14235)(13)(25)(154)(23) = (25).$$

Jetzt kommen wir noch einmal zu der Vertauschung auf unserer Zeichnung zurück, also zu

$(134)\ (25)$.

Nun wird es interessant: Wir nehmen an, die Kinder führen den Wechsel nach dieser Vorschrift dreimal hintereinander durch; dann können wir, da es sich, wie schon gesagt, um Multiplikationen handelt, zur Potenzschreibweise übergehen:

$[(134)\ (25)]^3$.

Weil die einzelnen Zyklen (134) und (25) elementfremd sind, ist es möglich, sie zu vertauschen. Es gilt daher:

$[(134)\ (25)]^3 = (134)^3\ (25)^3$.

Hieraus ist sehr gut zu ersehen, daß 1, 3 und 4 wieder auf ihren Plätzen sitzen, während 2 und 5 getauscht haben müssen. Das Ergebnis ist demnach:

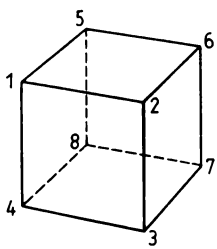
$(134)^3\ (25)^3 = (25)$.

Führen die Kinder den Wechsel (134) (25) nur zweimal hintereinander durch, so sitzen 2 und 5 wieder auf ihren Plätzen, während die anderen innerhalb ihres Zyklus zwei Stühle weitergerutscht sind:

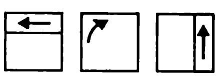
$[(134)\ (25)]^2 = (134)^2\ (25)^2 = (143)$.

Das war doch bisher nicht schwierig, oder? Und nun wissen Sie bereits alles, was man zum Ausrechnen von Zügen am magischen Würfel benötigt. Wir können uns ihm mit dem erworbenen Wissen also wieder zuwenden.
Sicherlich ist Ihnen die Parallele zu dem Kinderspiel bereits aufgefallen: Die Kinder entsprechen den Würfelchen, während die einzelnen Spiele Zügen oder ganzen Operationen entsprechen.
Alle Bewegungen am Würfel sind Zyklen. Dreht man eine äußere Schicht um 90°, ergeben sich ein Viererzyklus von Eckwürfeln und ein Viererzyklus von Kantenwürfeln. Beim Bewegen einer Mittelschicht um 90° finden ein Viererzyklus von Kantenwürfeln und einer von Mittelwürfeln statt. Drehungen um 180° bewirken aus-

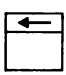
schließlich Zweierzyklen, die wir immer Tausch genannt haben. Sehen Sie sich das einmal in Ruhe an!
Da wir mit solchen Zyklen auf dem Papier schon umgehen können, wollen wir sie auch anwenden. Zuvor allerdings müssen – wie beim Spiel die Stühle – die Orte, an denen Würfelchen sitzen, gekennzeichnet werden.
Beginnen wir mit den Eckwürfeln, sie erhalten Ziffern. Die Kantenwürfel interessieren vorerst noch nicht.

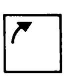


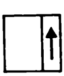
Lassen Sie uns als Beispiel folgende Zugkombination ausrechnen.



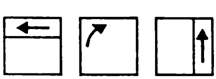
Also Rechtsdrehung der oberen, der vorderen und der rechten Schicht. Die Eckwürfelzyklen der einzelnen Drehungen sind:

 = (1562)

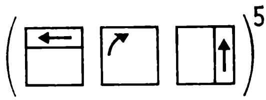
 = (1234)

 = (2673)

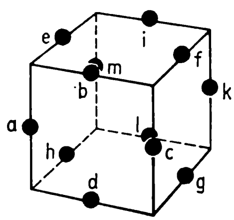
Verfolgt man die einzelnen Wechsel vom ersten bis zum dritten Zug, so ergibt sich:

 = (1562) (1234) (2673) = (15734) (26).

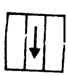
Wiederholt man diesen Ablauf fünfmal, sitzen die am Fünferzyklus teilnehmenden Würfelchen wieder auf ihren ursprünglichen Plätzen, es hat damit lediglich der folgende Zweiertausch stattgefunden:

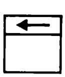
 $= [(15734)\,(26)]^5 = (15734)^5\,(26)^5 = (26).$

Versuchen Sie das am gerichteten Würfel, bedenken Sie dabei aber bitte, daß wir die Kantenwürfel nicht berücksichtigt haben. Wenn man sich vorstellt, man hätte die Zugfolge an einem durchmischten Würfel durchgeführt und würde noch keine Lösung kennen, so wäre es kaum möglich, die wesentlichen Veränderungen zu bemerken. Beim Rechnen dagegen springen sie gleich ins Auge. Mit diesem Ablauf ist man sofort in der Lage, *alle* Eckwürfel an ihren richtigen Platz zu bringen. Jetzt müßte eine Operation gesucht werden, die dasselbe mit den Kantenwürfeln geschehen läßt und dabei keine Eckwürfel verändert.
Wir kennzeichnen die Kantenwürfel mit Buchstaben.

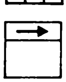


Durch eine einfache Überlegung ist jedem klar, daß eine Kombination aus Drehungen von Mittelschichten und *einer* äußeren Schicht nicht zu Veränderungen an Eckwürfeln führen kann, wenn die Drehung der äußeren Schicht insgesamt 0°, 360°, 720° ... beträgt. Die Kantenwürfel dagegen werden durch diese Züge beeinflußt. Nehmen wir deshalb einen derartigen Bewegungsablauf als Beispiel:

 = (bdli)

 = (beif)

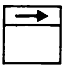
 = (bild)

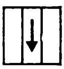
 = (bfie)

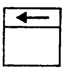
So ergibt sich der Fünferzyklus

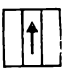
(bfeli).

Die Eckwürfel stehen an ihrem Platz, weil sich die beiden Drehungen der oberen Schicht gegenseitig aufheben.
Der folgende ähnliche Ablauf

 = (bfie)

 = (bdli)

 = (beif)

 = (bild)

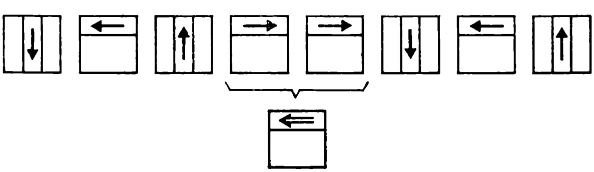
führt zu einem anderen Fünferzyklus

(bilfe).

Wieder sind die Eckwürfel an ihren alten Platz unverändert zurückgekehrt.
Nun kann man beide Abläufe und damit beide Fünferzyklen kombinieren und erhält

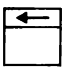
(bfeli) (bilfe) = (bef).

i und l bleiben auf ihren Plätzen, es hat ein Dreierzyklus stattgefunden. Die Bewegungen kombiniert ergeben somit unseren bekannten A_1.

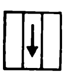


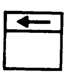
Jetzt könnte man wirklich schon *jedes* Würfelchen an seinen Platz bringen. Zu lösen bleibt aber noch das Problem der Orientierungen, also Verdrehungen oder Verkippungen. Hier reichen die Ziffern oder Buchstaben nicht mehr aus. Suchen wir eine andere Symbolik.

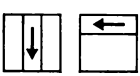
Jedes Würfelchen besitzt Flächen, die nach oben, unten, vorn, hinten, links oder rechts weisen. Mit den Anfangsbuchstaben dieser Richtungen können wir alle Würfelchen genau fixieren, der vordere obere Kantenwürfel hieße also *vo* oder *ov*, der rechts danebenliegende Eckwürfel *vor* oder *rov* usw.
Durch diese Kennzeichnung kann bei unseren Zyklen auch dargestellt werden, *wohin* die einzelnen *Farbflächen* wandern, indem man stets die Buchstaben der Flächen, die ineinander übergeführt werden, an die jeweils gleiche Stelle der Buchstabengruppen stellt. Ein Beispiel ist immer am anschaulichsten. Sehen Sie sich die beiden Viererzyklen einer Rechtsdrehung der oberen Ebene an, sie lauten

 = (ovr, olv, ohl, orh) (ov, ol, oh, or).

Das bedeutet einerseits, daß z. B. der Eckwürfel ovr in den Eckwürfel olv übergeht, andererseits wird hierdurch auch erkennbar, daß dabei die obere Fläche des Eckwürfels oben bleibt, die Vorderfläche zur linken Seitenfläche wird und die rechte Seitenfläche als Vorderfläche erscheint.
Bleiben wir bei einer Operation, die nur eine Mittelschicht und eine äußere Schicht bewegt, damit wir nicht auf die Eckwürfel zu achten haben:

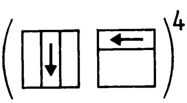
 = (ov, vu, uh, ho)

 = (ov, ol, oh, or) · Eckwürfelzyklus

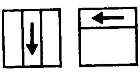
 = (ov, vu, uh, ro, vo, uv, hu, or)
(ho, ol, oh, lo) · Eckwürfelzyklus.

Vielleicht haben Sie Schwierigkeiten beim Übergang vom dritten zum vierten Glied im Achterzyklus. Dann sollten Sie bedenken, daß, wenn *oh* zu *or* wird, automatisch *ho* zu *ro* werden muß. Der Zyklus ist wie immer dann beendet, wenn eine Buchstabengruppe erreicht ist, die mit der ersten Gruppe tauscht.
Was aber entnehmen wir der Rechnung? Zunächst, daß nach acht-

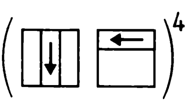
facher Anwendung alles beim alten bleibt. Aber mehr noch: Die ersten vier Glieder des Achterzyklus bestehen aus den gleichen Buchstaben wie die letzten vier Glieder. In unserer früheren Schreibweise mit nur einem Buchstaben pro Würfelchen hatten wir folglich einen Viererzyklus. Bei viermaliger Anwendung des Ablaufes stehen also alle Würfelchen an ihrem Platz (glücklicherweise sind auch dann die Eckwürfel wieder dort angekommen, wo sie hingehören).
In unserer Schreibweise aber lautet nun der Viererzyklus

 = (ov, vo) (vu, uv) (uh, hu) (ro, or).

Diese vier Kantenwürfel sind also verkippt.
Übersichtlicher wird der Zyklus in folgender Form geschrieben:

 = (ov, vu, uh, ro)$_+$ (ol, oh)$_+$.

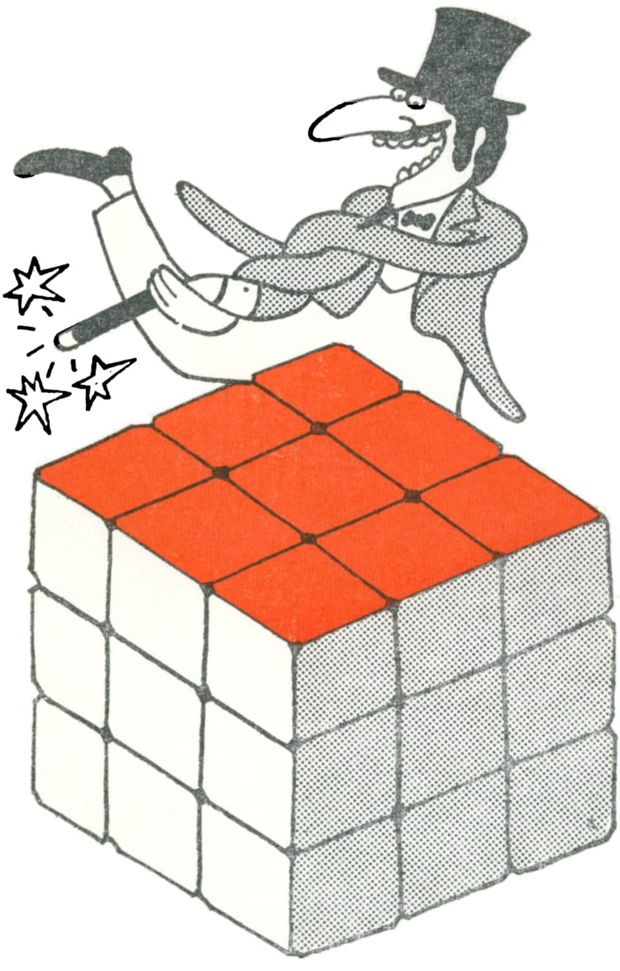
Hieraus erkennt man, daß nach viermaliger Anwendung alles an seinem Platz ist, die Würfelchen im Viererzyklus sind jedoch verkippt. Die Kantenwürfel im Zweierzyklus erscheinen dagegen nach viermaliger Anwendung der zwei Züge wieder mit ihrer alten Orientierung. Somit hat das Gesamtergebnis folgende Form:

 = (ov)$_+$ (vu)$_+$ (uh)$_+$ (ro)$_+$.

Wendet man diesen Ablauf am gerichteten Würfel an, kann die Rechnung leicht überprüft werden.
Analog werden auch Drehungen der Eckwürfel berechnet. Da sie nach zwei Richtungen verdreht sein können, erhalten Rechtsdrehungen ein Plus-, Linksdrehungen ein Minuszeichen.
Stellen Sie sich nun noch einmal vor, Sie hätten einen bunten Würfel erhalten und noch keine Lösung zur Hand. Wieviel übersichtlicher ist das Probieren auf dem Papier als das am Würfel. Und um ein Probieren handelt es sich ja, das wir Berechnen genannt haben.
Zugegeben, man wird dabei meist auf längere Abläufe stoßen, dafür schafft man es aber mit einer sicheren Methode, den Lösungsweg

 zu finden. Später kann man am Würfel eventuell die kürzeren Operationen ermitteln.

Es gibt eine Reihe von Spielen – und sicher werden demnächst weitere erscheinen –, die ganz ähnliche Prinzipien aufweisen wie unser Würfel, bei denen aber die Kenntnis des Würfellösungsweges nicht ausreicht. Jetzt sind Sie jedoch in die Lage versetzt, den Lösungsweg solcher Puzzles auszurechnen. Doch auch an Rubiks magischem Würfel gibt es noch Probleme, die nicht mittels unserer Abläufe lösbar sind.



Hier soll eines vorgestellt werden, und Sie können es durch Rechnen lösen, natürlich auch mit Hilfe der im vorangestellten Kapitel erläuterten Prinzipien.

Bewegt man ausschließlich die obere und die rechte Schicht in verschiedenen Richtungen, entsteht rasch ein buntes Farbengemisch. Lediglich ein Quader innerhalb des Würfels bleibt gerichtet erhalten. Natürlich muß der Würfel durch Drehungen eben dieser beiden Schichten wieder zu richten sein. Das ist, versuchen Sie es, keine einfache Aufgabe. An ihr können Sie das Errechnen eines Lösungsweges ausprobieren.

Wenn Sie es geschafft haben, herzlichen Glückwunsch! Jetzt dürften Ihnen ähnliche Puzzles auch keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Da wir gerade beim Rechnen sind: Sicherlich möchte der eine oder andere wissen, wie man auf die Zahl der möglichen Würfelstellungen kommt. So schwer ist das nicht!

Wir haben acht Eckwürfel. Diese können

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

mögliche Stellungen zueinander einnehmen. Jede dieser Positionen kann mit allen Kantenwürfelstellungen kombiniert sein, und das sind

$$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 11 \cdot 12.$$

Jetzt haben wir schon $8! \cdot 12!$ mögliche Würfelansichten. Das aber ist noch nicht alles. Jeder Kantenwürfel kann verkippt sein, was 2^{12} Verkippungsmöglichkeiten ergibt, und jeder Eckwürfel kann in einer Position drei Orientierungen aufweisen, das sind insgesamt 3^8. Aber nicht alle dieser Bilder sind durch Drehungen zu erreichen, nur bei einem Zwölftel von ihnen ist das möglich. (Im zweiten Kapitel wurde erwähnt, daß es zwölf nicht ineinander überführbare Möglichkeiten gibt, den Würfel zusammenzubauen.) Wir müssen also das Produkt aus $8!$, $12!$, 2^{12} und 3^8 durch 12 dividieren und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{8! \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 3^8}{12} &= 8! \cdot 11! \cdot 2^{12} \cdot 3^8 \\ &= 40\,320 \cdot 39\,916\,800 \cdot 4\,096 \cdot 6\,561 \\ &= 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000,\end{aligned}$$

womit wir die genaue Zahl ermittelt haben. (Beginnen Sie lieber nicht nachzuzählen!)
Vielleicht aber interessieren auch die zwölf verschiedenen Möglichkeiten des Zusammenbauens? Da die Würfelchen sich stets nur innerhalb *der Bahnen* bewegen können, die durch den Zusammenbau vorgegeben sind, werden diese *Orbits* genannt.
Wenn man den Würfel auseinandernimmt, willkürlich zusammensetzt und nach unserer Strategie richtet, kann man auf folgende Endzustände stoßen:

1. Der Würfel ist völlig in Ordnung.
2. Zwei Kantenwürfel sind vertauscht.
3. Ein Kantenwürfel ist verkippt.
4. Ein Eckwürfel ist nach rechts verdreht.
5. Ein Eckwürfel ist nach links verdreht.
6. Kombination aus 2. und 3.
7. Kombination aus 4. und 2.
8. Kombination aus 4. und 3.
9. Kombination aus 4., 2. und 3.
10. Kombination aus 5. und 2.
11. Kombination aus 5. und 3.
12. Kombination aus 5., 2. und 3.

Und schließlich soll noch eine »mathematische« Seite des Würfels erwähnt werden: Wieviel Züge sind mindestens erforderlich, um jede beliebige Stellung der 43 Trillionen Würfelstellungen zu erhalten?
Gehen wir vom gerichteten Würfel aus. Das Drehen an einer Schicht kann drei Stellungen ergeben, je nachdem, ob wir 90°, 180° oder 90° in der entgegengesetzten Drehrichtung ansetzen. Da sechs äußere Schichten vorhanden sind, kann unser Würfel beim ersten Zug achtzehn Gesichter annehmen. (Die Mittelschichtbewegungen werden nicht berücksichtigt, sie können ja durch Drehungen der beiden benachbarten Schichten realisiert werden.)
Da der zweite Zug an einer anderen Schicht durchgeführt wird, sind nur noch fünfzehn neue Stellungen möglich, aber fünfzehn für *jedes* Bild der vorausgegangenen achtzehn möglichen Bilder.

Die Anzahl der möglichen verschiedenen Würfelstellungen beträgt also nach dem

0. Zug: 1
1. Zug: $1 + 18$
2. Zug: $1 + 18 + 18 \cdot 15$
3. Zug: $1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot 15^2$
4. Zug: $1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot 15^2 + 18 \cdot 15^3$

.

.

.

n. Zug: $1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot 15^2 \ldots + 18 \cdot 15^{n-1}$.

In einer Sammlung mathematischer Gleichungen finden wir für die Summenformel

$$1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot 15^2 + \ldots 18 \cdot 15^{n-1} = 18 \frac{15^n - 15}{15 - 1} + 1.$$

Das »n« kann jetzt für die 43 Trillionen möglicher Würfelstellungen nach der Gleichung

$$1 + 18 \frac{15^n - 15}{15 - 1} \geq 4{,}3252 \cdot 10^{19}$$

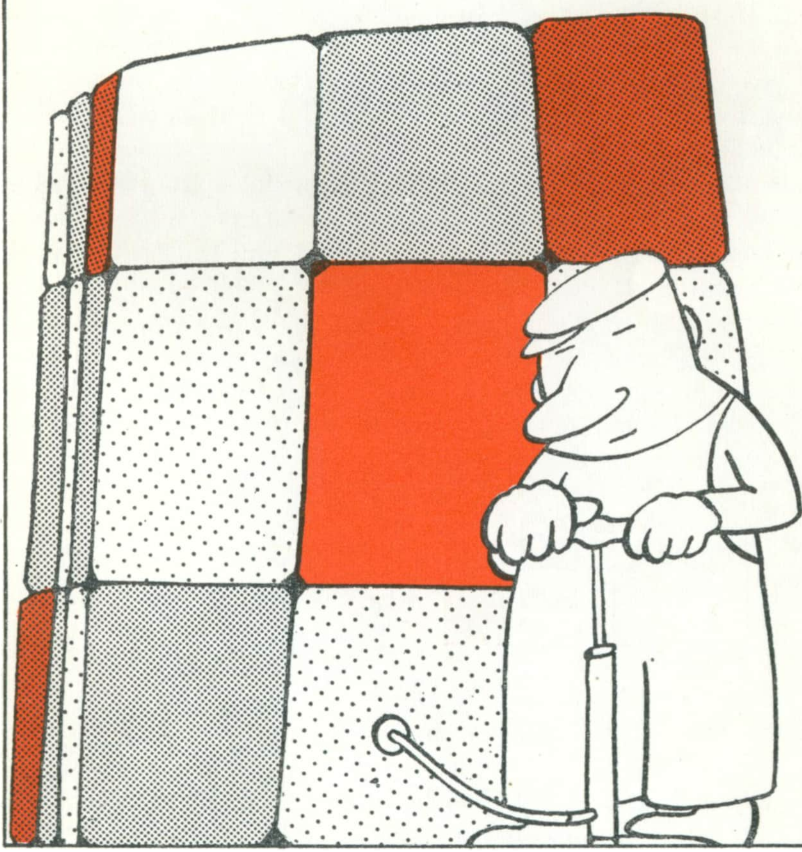
errechnet werden. Man erhält

$$n \geq 16{,}6,$$

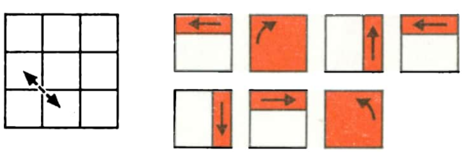
also etwa 17.
Mit weniger als siebzehn Zügen kann man folglich nicht sämtliche möglichen Würfelansichten erhalten. Eine gewisse Anzahl der in die Berechnung aufgenommenen Bewegungen führt zu gleichen Würfelstellungen. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache ist gezeigt worden, daß auch nicht alle Positionen mit weniger als achtzehn Zügen realisiert werden können. Umgekehrt kann man sagen, daß es keine Strategie gibt, die prinzipiell jedes Farbgemisch in weniger als achtzehn Zügen entwirren kann. Die genaue Zugzahl der kürzesten Strategie ist noch nicht bekannt.
Schließlich ist es in diesem Kapitel noch erwähnenswert, daß schon ein jahrhundertealtes anregendes Denkspiel existiert, das den

Namen »Magischer Würfel« trägt. Es besteht aus siebenundzwanzig gleich großen, nicht zusammenhängenden Würfelchen, die mit den Zahlen 1 bis 27 gekennzeichnet sind. Diese Würfelchen kann man natürlich zu einem Würfel zusammenbauen, der unserem Rubikwürfel ähnlich sieht. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß dabei jeweils die Summe der Zahlen auf den neben-, über- und hintereinanderliegenden drei Würfelchen gleich sein soll. Sie können das ja einmal versuchen. Dafür brauchen Sie keine Würfelchen zu bauen, man kann die Lösung natürlich auch auf dem Papier finden. Aber ganz einfach ist es gewiß nicht. Vielleicht sei noch verraten, daß es viele Lösungsmöglichkeiten gibt, die Summe dabei aber stets 42 betragen wird.
Die Diagonalen können in die Aufgabe nicht mit einbezogen werden, es entstehen also an den Würfelseiten keine »Magischen Quadrate«, bei denen bekanntlich auch die Summe der jeweils auf einer Diagonalen liegenden Zahlen den Reihen- und Spaltensummen gleich sein muß. Diesen „Magischen Quadraten“ wurde im Mittelalter Zauberkraft zugesprochen, woraus ihr Name resultiert, und davon wohl abgeleitet auch eine der Bezeichnungen des Gegenstandes dieses Büchleins.
Aber damit wollen wir es an Theorie bewenden lassen und uns in den nächsten Kapiteln wieder praktischen Fragen des magischen Würfels zuwenden.

Noch mehr für Tüftler



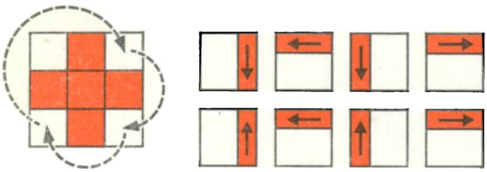
Wie neue Bewegungsabläufe gefunden werden können, wissen wir nun. *Welche* dieser Abläufe jedoch erforderlich sind, richtet sich nach der verwendeten Lösungsstrategie. Damit ist das prinzipielle Herangehen an den Lösungsweg gemeint, sind also die Art und Reihenfolge seiner einzelnen Teilabschnitte zu verstehen.
Die Strategie in den Kapiteln 3 und 4 unseres Büchleins ist jeweils dieselbe: schichtweiser Aufbau des Würfels, die Mittelschicht als zweite Schicht, die dritte Schicht in der Reihenfolge Eckwürfel – Kantenwürfel. Aber selbstverständlich gibt es auch noch **andere Strategien.**
Daß man in der ersten Schicht die Reihenfolge Kantenwürfel – Eckwürfel vertauschen oder miteinander vermengen kann, haben wir bereits im vorletzten Kapitel erwähnt und geübt. Aber auch in der dritten Schicht ist eine umgekehrte Reihenfolge möglich, können also zuerst die Kanten- und danach die Eckwürfel gerichtet werden. Dadurch machen sich jedoch bereits neue Bewegungsabläufe notwendig. Beispielsweise ist nun, da die Eckwürfel noch nicht fixiert sind, unter Umständen ein Austausch nur zweier Kantenwürfel erforderlich. Dafür ein Bewegungsablauf:



Schauen Sie sich an, wie sich hierbei die Eckwürfel verändern! Einen Tausch *gegenüberliegender* Kantenwürfel sollten Sie versuchen, selbständig herauszufinden. Recht einfach geht das mit Hilfszügen, kürzer ist jedoch sicherlich ein spezieller Zug.
Andererseits wird aber, wenn unsere Kantenwürfel bereits gesetzt

sind, ein isolierter Tausch von zwei Eckwürfeln, wie er etwa unserem
A_2 entspricht, nicht mehr erforderlich sein. Eckwürfel können nun nur noch paarweise oder als Dreierzyklus vertauscht sein.

Hier ein kurzer Ablauf als Beispiel für solch einen Eckwürfeldreierzyklus, der nicht die Kantenwürfel beeinflußt.



Den parallelen Tausch zweier *Paare* können Sie inzwischen gewiß durch Vergleich der Abläufe 42 und 43 im Kapitel 4 ermitteln. Das Austauschen von Eckwürfelpaaren über Kreuz ist sicher ebenfalls leicht zu finden.

Die soeben beschriebene Strategie war der unseren ja noch sehr ähnlich und bezog sich ausschließlich auf die dritte Schicht. Etwas entfernter ist schon eine, bei der die Mittelschicht zuletzt gerichtet wird. Viele »Schnellwürfler« benutzen sie. Welche Vorteile bietet diese Strategie?

Die Abläufe beim Richten von Würfelchen in der (nach *unserer* Variante) dritten Schicht werden kürzer, wenn man keine Rücksicht auf die bereits fertige Mittelschicht zu nehmen braucht. Versuchen Sie doch, solche zu finden! Die Bewegungen zum Umplazieren innerhalb der Mittelschicht aber sind allesamt sehr kurz. Zwei Beispiele kennen wir schon: den Dreierzyklus 34 und den Tausch paralleler Paare 35, beide im Kapitel 4.

Einen Austausch zweier Paare über Kreuz finden Sie wieder selbst, ja?

Schließlich sind für das Kippen von Kantenwürfeln (es kann ja nur noch für zwei oder vier der Würfelchen notwendig werden) mit den Abläufen A_4 und 40 ebenfalls Beispiele gegeben. (Der Ablauf 38 kann in dieser Strategie nicht verwendet werden!)

Eine prinzipiell doch schon andere strategische Variante wäre die, daß zuerst alle Eckwürfel gesetzt und richtig gedreht werden. Man kann das, wenn keine Rücksicht auf Kantenwürfel zu nehmen ist, in sehr kurzen Zugfolgen erreichen. Versuchen Sie es! In maximal fünf Zügen sitzen die Eckwürfel in den zwei Schichten, in die sie hineingehören, mit je höchstens sechs weiteren Zügen sind sie darin am richtigen Platz. Die Drehungen erreichen Sie mit den Abläufen 43 bis 49. Allerdings muß man jetzt in der Lage sein, *jede* äußere Schicht bezüglich der Verdrehungen von Eckwürfeln übersehen zu können, und nicht nur die *eine* Schicht, für die man schon einen geübten Blick hat.

Hier haben Sie wirklich wieder ein neues Betätigungsfeld für eigene Überlegungen, eine frische Quelle für weitere Erfolgserlebnisse – und das macht doch Spaß, oder?

Die Übersichtlichkeit zum schnellen Erfassen der Situation, das muß zugegeben werden, ist geringer geworden. Wir lernen aber unseren magischen Würfel mit jeder Strategie besser kennen, besonders, wenn wir sie uns selbst erarbeiteten.

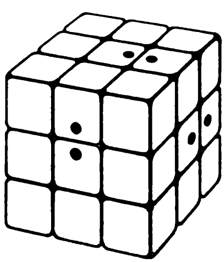
Nach dem Setzen und Drehen der Eckwürfel werden die Kantenwürfel wieder schichtweise geordnet. Die erste Schicht – es kann eine äußere, aber auch eine Mittelschicht sein – ist nach kurzen Überlegungen ohne besondere Abläufe lösbar, für die beiden anderen werden am besten bekannte Dreierzyklen verwendet.

Schließlich können Sie es auch umgekehrt machen: zuerst alle Kantenwürfel richten, was Ihnen nicht mehr schwerfallen dürfte, dann die Eckwürfel. Es ist prinzipiell möglich, mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Dreierzyklus alle Eckwürfel an ihre Plätze zu bringen. Besser aber ist es, wenn Sie sich noch weitere Bewegungsabläufe erarbeiten. Zwei Anregungen dafür sind gegeben worden.

Das soll, was neue Strategien betrifft, ausreichen. Es wäre schade, wenn Sie die eine oder andere nicht auszuarbeiten versuchen würden. Sie wüßten dann nicht, wie schön das Erfolgserlebnis ist, eigene Züge zu entdecken, die für eine bestimmte Strategie notwendig sind. Zum anderen tröstet *Ihre* Strategie mit *Ihren* Zugfolgen Sie vielleicht über die doch ein wenig vorhandene Traurigkeit hinweg, in diesem Buch – oder anderswo – einen Lösungsweg verraten bekommen und das Problem nicht selbst »geknackt« zu haben.

Nicht zu schnell die Flinte ins Korn werfen! Fangen Sie den

Abschnitt ruhig noch einmal von vorn an und gönnen Sie Ihren kleinen, grauen Zellen keine Ruhe.
Oder wollen wir erst noch ein Problem behandeln, bei dem mehr verraten wird? Gut, aber danach nehmen Sie eine neue Strategie in Angriff, abgemacht? Nun, dann sollen Sie jetzt eine äußerst mysteriöse Sache erfahren.
Unbemerkt sind an unserem Würfel bei den einzelnen Operationen weitere, zusätzliche Bewegungen abgelaufen. Sie machen es äußerst unwahrscheinlich, daß der Würfel von Ihnen bisher zwei- oder gar dreimal in den gleichen gerichteten Endzustand versetzt worden ist. Das sei völlig unmöglich, er sah immer gleich aus, meinen Sie? Genau darin liegt ja das Geheimnis, aber wir wollen es lüften.
Die Mittelwürfel können zu den anderen Würfelchen verdreht sein, ohne daß es ihnen anzusehen ist. Durch eine einfache Kennzeichnung werden diese Bewegungen sichtbar. Dazu verhelfen uns kleine Stückchen weißen oder farbigen Klebebandes, die am *gerichteten* Würfel jeweils auf eine Seite der Mittelwürfel und die unmittelbar danebenliegenden Kantenwürfel geklebt werden, zum Beispiel so, wie es die folgende Abbildung zeigt:

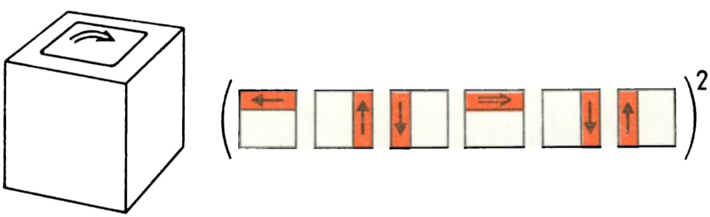


Wir haben somit **gekennzeichnete Mittelwürfel** erhalten. Wenn Sie einen auf diese Weise präparierten Würfel verdrehen und anschließend wieder richten, werden Sie bemerken, daß die Kennzeichnungen nicht mehr alle beieinanderliegen. Das also sind die zusätzlichen Bewegungsmöglichkeiten, die dem magischen Würfel innewohnen. Und da wir schon gerechnet haben, wollen wir es noch ein letztes Mal tun:
Fünf der Mittelwürfel können unabhängig voneinander jede denkbare Verdrehung annehmen, der sechste aber ist bei allen daraus

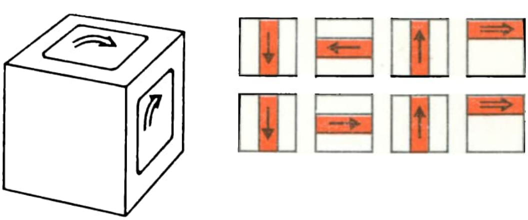
 resultierenden Stellungen nur noch in der Lage, zwei zueinander um 180° verdrehte Positionen einzunehmen. Das sind

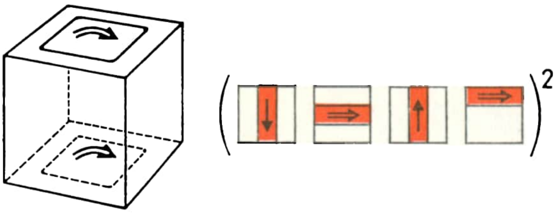
$$4^5 \cdot 2 = 2048$$

verschiedene Verdrehungsmöglichkeiten der Mittelwürfel. Deshalb war es wohl tatsächlich unwahrscheinlich, daß Ihr magischer Würfel mehrmals gleichartig gerichtet war, oder?
Wenn man nun bedenkt, daß *jede* dieser Mittelwürfelpositionen über 43 Trillionen Gesichter haben kann, kommen wir jetzt auf mehr als 88 Trilliarden unterschiedlicher Würfelstellungen. Nun gut, die eine wie die andere Zahl ist nicht mehr vorstellbar, beschäftigen wir uns lieber damit, wie auch die Mittelwürfel gerichtet werden können.
Es dürfte inzwischen wohl ausreichen, einige kurze Bewegungsabläufe und ihre Wirkungen vorzustellen.
Beginnen wir mit der 180°-Drehung eines Würfelchens, sie ist, wie bereits angedeutet, die einzige Art, auf die *ein* Mittelwürfel verdreht sein kann.

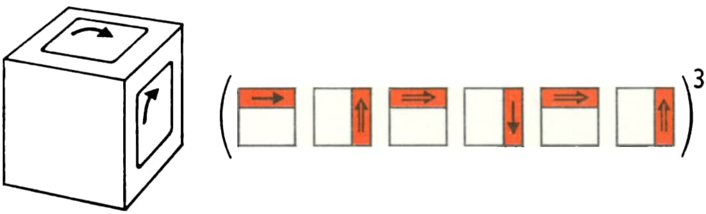


Nun zwei weitere 180°-Drehungen, diesmal jedoch jeweils an *zwei* Würfelchen.

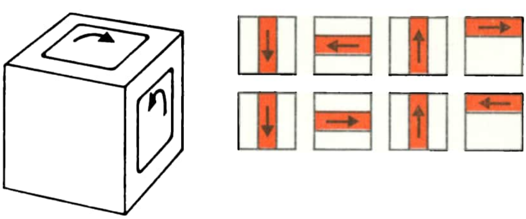


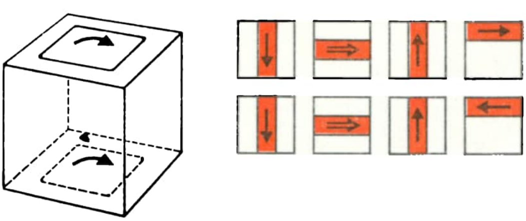


Der nächste Ablauf bewirkt Rechtsdrehungen um 90° an zwei Mittelwürfeln.



Entsprechende Linksdrehungen ergeben sich natürlich, wenn der Ablauf rückwärts durchgeführt wird.
Schließlich noch je eine Links- und eine Rechtsdrehung um 90°.



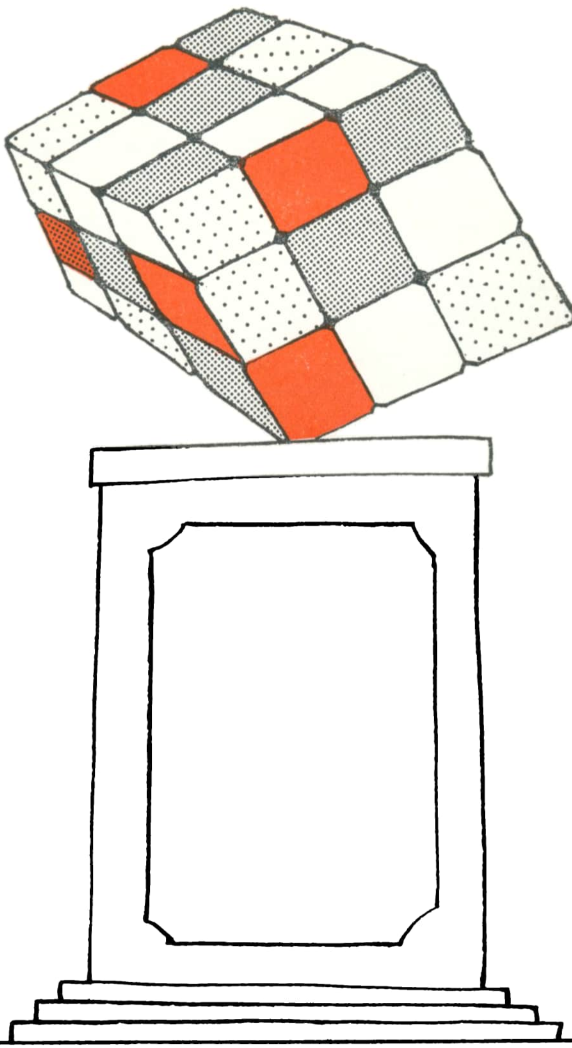


Beachten Sie bitte im letzten Fall, daß der untere Mittelwürfel auf der Zeichnung durch den Würfel hindurch gesehen wird. Seine

 scheinbare Rechtsdrehung ist natürlich, von unten gesehen, eine Linksdrehung.
Diese sechs kurzen Abläufe reichen aus, um gekennzeichnete Mittelwürfel zu orientieren. Da es auch Rubikwürfel gibt, die anstelle der Farbflächen Figuren oder spezielle Muster aufweisen, sind diese Abläufe sehr wichtig.
Zum Abschluß dieses Problems gleich wieder eine Aufgabe: Durch welche Kombinationen zweier Abläufe werden Rechtsdrehungen sowohl des oberen als auch des unteren Mittelwürfels erreicht?
Als letzte Anregung soll noch der **Würfel mit nichtunterscheidbaren Würfelchen** genannt sein. Am leichtesten werden diese Würfel angefertigt, indem man von zwei Kantenwürfeln einer Schicht die seitlichen Farbfolien abzieht, wodurch beide nicht mehr unterscheidbar sind. Es ist also möglich, daß sie beim Richten des Würfels unbemerkt vertauscht werden. Geschieht diese Vertauschung *vor* dem Richten der letzten Schicht, wird es unmöglich, den restlichen Teil des Würfels vollständig zu ordnen. Bei dieser Variante kommt also der *Zufall* mit in das Spiel, was einen besonderen Reiz ausmacht. Man entdeckt die am Anfang vollzogene Vertauschung erst ganz zum Schluß und muß sie dann wieder rückgängig machen.
Auch von zwei Eckwürfeln einer Schicht lassen sich Farbfolien mit demselben Effekt entfernen. Es darf hierbei nur noch die gemeinsame Farbe übrigbleiben. Weitere Möglichkeiten wären, Farbfolien so zu entfernen, daß die Kippung bzw. Drehung von Würfelchen nicht mehr erkennbar ist.

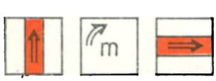
Viel Vergnügen bei den beschriebenen Spielarten!

Für Ästheten



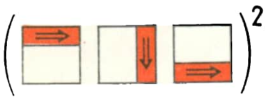
Gewiß wird mancher Leser nach den vorangestellten Kapiteln fragen, ob sich die Möglichkeiten unseres magischen Würfels darin erschöpfen, daß man ihn in seinen ursprünglichen Zustand zurückdrehen kann, in dem jede seiner sechs Flächen ihre eigene, vorgegebene Farbe aufweist, oder darin, daß immer neue Varianten für diese eine Aufgabe gesucht werden. Nein, zweifellos kann das noch nicht alles sein!
Aus diesem Grunde haben wir uns für das letzte Kapitel etwas besonders Hübsches aufgehoben: Würfelmuster.
Da inzwischen Bewegungen, die an unserem Würfel ablaufen, von Ihnen gut überblickt werden, wollen wir diese Würfelmuster hier nicht einfach nur vorstellen, sondern uns auch dafür interessieren, durch welche uns bereits bekannten Prozesse sie entstehen können. Damit wird es leichter möglich, sich selbst weitere solcher Muster einfallen zu lassen. Doch genug der Vorrede, beginnen wir!
Jeder, der ein Weilchen am gerichteten Würfel »herumspielt«, wird rasch auf zwei der einfachsten Muster kommen: auf die **gewanderten Mittelwürfel**

und sicher auch auf das des **Schachbrettwürfels.**



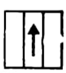
Das **verschnürte Päckchen** (man kann dieses Muster auch als **sechs Pluszeichen** ansehen) wird wohl mit etwas größeren Schwierigkeiten entdeckt werden.

Die **vier Minuszeichen** finden die meisten Würfler wieder sehr viel leichter.

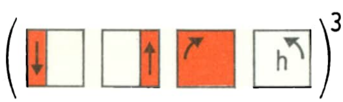


Wie Sie sehen, liegen die vier Balken, aus denen die Zeichen bestehen, parallel zueinander. Nach dem zusätzlichen Zug

stehen jedoch je zwei von ihnen senkrecht aufeinander. Wird statt dessen aber nur



angewendet, erscheinen auf dem magischen Würfel **sechs Minuszeichen.** Übrigens ist ein Muster, bei dem von sechs solchen Balken je zwei senkrecht aufeinanderstehen, nicht realisierbar.
Auch eine hübsche **Zickzacklinie** ist recht einfach hervorzuzaubern.

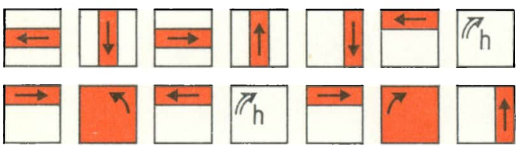


So, jetzt haben Sie beim Anschauen des Musters vergessen, welches die Vorderseite war, stimmt's ? Nun, es war eine, auf der die Diagonale von oben links nach unten rechts verläuft. Wenn Sie diese Fläche vorn behalten und den Ablauf abermals anwenden, ist das Muster wieder verschwunden. Wird bei den Bewegungen dagegen eine Fläche mit einer Diagonale von unten links nach oben rechts als Vorderseite verwendet, entsteht ein neues Muster:
Vier Pluszeichen auf den Seitenflächen, Ober- und Unterseite bleiben einfarbig. Wenn eine von ihnen als Vorderseite verwendet und die Bewegungen ein drittes Mal wiederholt werden, bleiben nur noch

zwei Pluszeichen übrig, aber auf den anderen vier Flächen wird je eine **Diagonale** sichtbar.

Den Würfel mit diesem Muster nun vollständig zurückzudrehen ist doch sicher keine Schwierigkeit mehr für Sie, oder? Dabei sollten Sie jedoch nur den hier dargestellten Ablauf nutzen und nicht etwa den ganzen Würfel schichtweise richten.

Weil wir uns gerade mit Diagonalen beschäftigen: **Sechs Diagonalen,** also auf jeder Fläche eine, sind im »normalen« Würfelorbit nicht zu realisieren. Es handelt sich dabei aber um ein so schönes Muster, daß sich ein kleiner Umbau lohnt. Zuerst jedoch der notwendige Ablauf.



Der Eckwürfel hinten links unten müßte nun noch nach links gedreht werden, und die sechs Diagonalen wären fertig. Allerdings ist uns ja bekannt, daß es unmöglich ist, ein *einzelnes* Würfelchen zu drehen oder zu kippen. Nach dem Lesen des 2. Kapitels haben wir jedoch gelernt, den Würfel auseinanderzunehmen, so daß wir die winzig kleine Korrektur nach dem Entfernen *eines* danebenliegenden Kantenwürfels leicht bewerkstelligen können.

Dies soll unser einziges Muster aus einem anderen Orbit bleiben; Sie können sich natürlich weitere ausdenken und zusammenbasteln, wenn Sie mögen.

Für uns ist jetzt aber der Moment gekommen, an dem wir uns mit einer Serie von Mustern näher befassen, sie also in ihrer Entstehung verfolgen wollen. Dabei sollen nach Möglichkeit unsere in der Schnellernvariante benutzten Abläufe Verwendung finden.

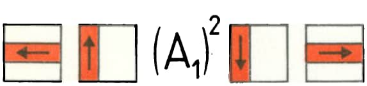
Beginnen wir mit einem Kantendreierzyklus um eine Ecke herum. Unser guter alter Ablauf 1 ist genau der richtige dafür. Doch da dieser nur in der oberen Schicht wirksam wird, bringen wir durch zwei einleitende Bewegungen den vorderen, rechten Kantenwürfel dort hinein. Wie stets werden die einleitenden Bewegungen abschließend wieder rückgängig gemacht.

Was wir jetzt vor uns haben, ist noch kein Muster, meinen Sie? Stimmt! Wir wollen uns aber, wie schon gesagt, die *Entwicklung* von Mustern ansehen. Also weiter!

Wenn man sich vorstellt, daß der soeben umwanderte Eckwürfel linksherum gedreht wird, sieht man in Gedanken schon ein Muster erscheinen, oder?

Wie aber ist diese Drehung zu bewerkstelligen? Da ein einzelner Eckwürfel nicht drehbar ist, werden wir zusätzlich den Eckwürfel unten links hinten drehen, diesen aber selbstverständlich rechtsherum. Linksdrehungen von Eckwürfeln, wir erinnern uns, erreicht man durch zweimalige Anwendung von A_3 (oder, schneller, durch A_3 rückwärts), Rechtsdrehungen werden durch A_3 hervorgerufen. Die zusätzlichen Bewegungen im nächsten Ablauf setzen diese Eckwürfel jeweils an die gewünschte Stelle.

Oben vorn ist eine **Kofferecke** entstanden! Bringen wir nun den einsamen verdrehten Eckwürfel unten links hinten durch Drehen des ganzen Würfels nach oben rechts vorn, vertauschen hier ebenfalls die darumliegenden drei Kantenwürfel zyklisch,



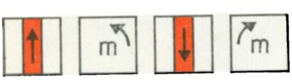
so besitzt unser Würfel **zwei Kofferecken.** (Auch dabei sollte anstelle von $(A_1)^2$ der Ablauf 1 rückwärts angewendet werden.) Sie haben gewiß inzwischen bemerkt, daß A_1 glücklicherweise auch gleich die richtigen Verkippungen für dieses Muster hervorruft.

Bei den nun folgenden Operationen muß der magische Würfel seine jetzt vorliegende Stellung behalten, die zuletzt gefertigte Kofferecke soll also oben rechts vorn sitzen. Falls Sie nicht mehr wissen, welche das war – es ist die rechtsherum verdrehte.

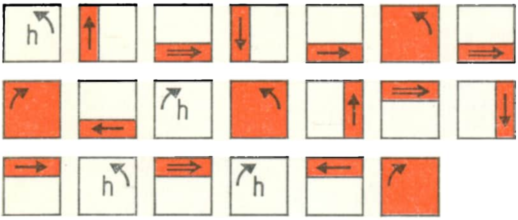
Die Bewegungsfolge,

bei der ja die Mittelwürfel wandern, läßt uns zu einer der schönsten Ansichten gelangen, zum **Würfel im Würfel.** Ebenso wie bei den Kofferecken ist dieses Muster eigentlich zweifach vorhanden.
Werden die in dem »Innenwürfel« sitzenden Eckwürfel noch einmal gedreht,

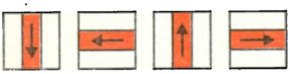
so entsteht, ein Muster, das **verdrehte Ringe** genannt wird.
Schauen Sie selbst, warum es so heißt!
Ein nochmaliges Verdrehen der Eckwürfel mit diesem Bewegungsablauf läßt uns mit etwas optischem Abstraktionsvermögen einen **Würfel im Würfel im Würfel** erblicken, also drei ineinandergeschachtelte Kuben.
Werden jetzt die Mittelwürfel erneut auf Wanderschaft geschickt, bewirkt dies das Bild eines **Schachbrettwürfels im Würfel.**



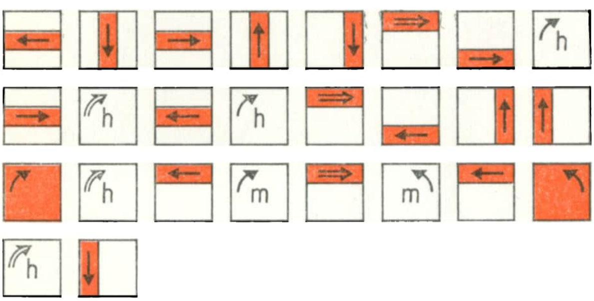
Nun können Sie sich abermals Ihr Talent beweisen, indem Sie – möglichst ohne Vorlage – den Würfel mit den eben erwähnten Bewegungen oder ihren Umkehrungen zurückdrehen, denn wir wollen die schönsten Muster noch einmal mit einzelnen, kürzeren Abläufen aus dem gerichteten Rubikwürfel entstehen lassen.



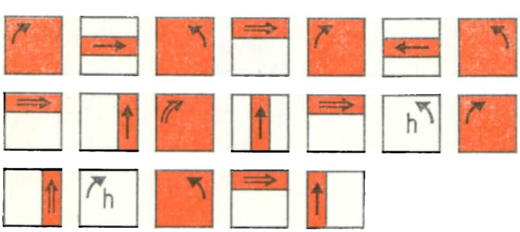
Unsere **Kofferecken** bilden sich durch die folgende zusätzliche Bewegung.



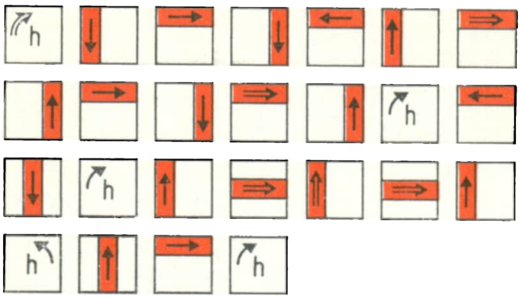
Verdrehte Ringe



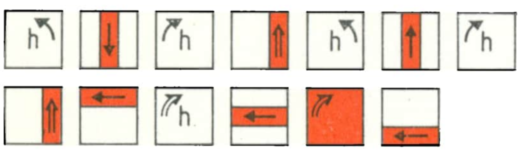
Neben den »verdrehten Ringen« sind aber auch **vertauschte Ringe** möglich, der Farbkontrast ist hier noch größer.



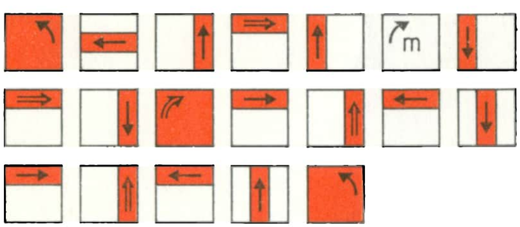
Auch **getauschte Ecken** können entstehen, unsere bisherigen »Koffer-ecken« waren lediglich »gedrehte Ecken«.



Als Abschluß unserer Musterkollektion sollen noch zwei Schlangen erzeugt werden, die sich um den Würfel herumwinden. Eine von ihnen, die kürzere, wird **Python** genannt.



Die andere, längere – wie sollte sie anders als **Anaconda** heißen ?



Das mag als kleine Auswahl von vielen, vielen möglichen hübschen Mustern genügen. Fassen Sie es bitte als Anregung auf, selbst nach neuen, interessanten Würfelansichten zu suchen oder, noch besser, sich solche Ansichten auszudenken und sie anschließend am Würfel zu realisieren. Zunächst kann dabei das ausgedachte Muster mit mehreren einzelnen Abläufen hergestellt werden, dann kann man versuchen, einen einzigen, kürzeren Ablauf zu finden.

Unmögliche Würfelstellungen sollten jedoch von vornherein ausgeschlossen werden, deshalb noch einige Worte dazu.
Im Kapitel 5 wurden die zwölf verschiedenen Orbits behandelt, für jeden Orbit wurde jedoch nur ein Beispiel genannt. Aus ihnen lassen sich jedoch andere ableiten, die selbstverständlich auch nicht durch Drehung aus dem normalen Würfel realisierbar sind. Der Orbit, der durch Vertauschen zweier Kantenwürfel entstand, ist zum Beispiel identisch mit dem, bei dem zwei Eckwürfel vertauscht sind, d. h., man kann einen Würfel mit vertauschten Kantenwürfeln durch Drehungen in einen mit vertauschten Eckwürfeln und auch in einen mit einem zyklischen Vierertausch von Kanten-, Eck- oder auch Mittelwürfeln überführen.
Inwiefern ist das für unsere Muster wichtig? Zum einen wissen wir, für welche Muster prinzipiell keine Bewegungsabläufe gefunden werden können. Andererseits besteht aber, wie uns bekannt ist, ohne weiteres die Möglichkeit, *zwei* Paare von Kantenwürfeln zu tauschen (siehe Kapitel 4, Abläufe 50 bis 59). Das gibt uns die Möglichkeit zu kombinieren, also z. B. einen Kantenwürfeltausch *und* einen Eckwürfeltausch oder einen Eckwürfeltausch *und* einen Kantenwürfelviererzyklus vorzunehmen. Übrigens geschieht genau das bei unserem Ablauf 2; zum Zeitpunkt seiner Anwendung ist die Position der Kantenwürfel allerdings unwichtig. Auch einen Kantenwürfelviererzyklus und einen Mittelwürfelviererzyklus kann man kombinieren usw.
Eine *Verkippung* läßt sich dagegen ausschließlich durch eine weitere Verkippung erreichen und wird nicht etwa durch irgendeinen zusätzlichen Austausch von Würfelchen oder eine Verdrehung von Eckwürfeln möglich. Analoges trifft auch für die *Verdrehungen* zu. Soll also zum Beispiel ein Eckwürfel linksherum gedreht werden, ist das *nur* erreichbar, wenn zusätzlich zwei weitere nach links oder einer nach rechts gedreht werden.
Das alles sollte man beim Erfinden von Würfelmustern beachten.
Haben Sie sich aber ein besonders schönes Muster ausgedacht, das diese Forderungen nicht erfüllt, ist seine Realisierung nur durch Umbau des Würfels möglich – eventuell aber nicht einmal dadurch. Bleibt noch die Möglichkeit, die Farbplättchen auszutauschen, aber das würde wohl zu weit gehen.

 Sind weitere Anregungen darüber, welche Muster gesucht werden könnten, erforderlich? Nun gut, dann sehen wir uns einmal den »Schachbrettwürfel« an: Er ist so gefärbt, daß die beiden sich normalerweise gegenüberliegenden Farben stets auf einer Seite zu finden sind. Man kann dieses Muster aber auch sehr viel schöner gestalten, nämlich so, wie es die Farben der »gewanderten Mittelwürfel« vorgeben. Diese bewegen sich, achten Sie einmal darauf, in zwei Dreierzyklen.

Versuchen Sie nun, einen so gefärbten Schachbrettwürfel zu erhalten. Es lohnt sich! Werden an ihm dann die Bewegungen für unser bisheriges Schachbrettmuster angewendet, entsprechen die Farbvertauschungen einer noch komplizierteren Gesetzmäßigkeit, aber die müssen Sie selbst herausbekommen. Ohne Fleiß kein Preis!

Sehr hübsche Würfel mit vier oder auch sechs Seiten, die jeweils drei Streifen unterschiedlicher Farbe – Trikoloren – aufweisen, sind erreichbar. Allerdings heißt es hier, gut zu überlegen, was möglich und was unmöglich ist.

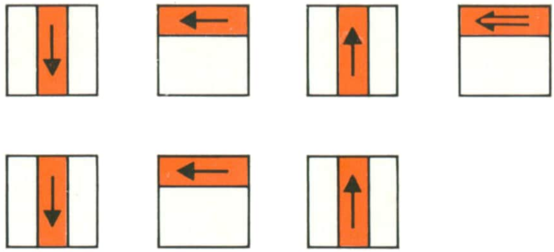
Die erdachten Muster sollten zunächst durch »Würfelrichten«, also schichtweise, aufgebaut werden. Danach ist man in der Lage, genau zu ermitteln, welche Vertauschungen, Zyklen, Verkippungen oder Verdrehungen notwendig sind, um die jeweilige Würfelansicht aus einem zurückgedrehten magischen Würfel zu erzeugen. Dafür können Sie dann als nächstes entsprechende Bewegungsabläufe entwickeln.

Muster, auch bekannte, durch schichtweisen Aufbau hervorzurufen erfordert ein gutes Gedächtnis und ein entwickeltes räumliches und farbliches Vorstellungsvermögen. Versuchen Sie es beispieslweise, den Würfel im Würfel auf diese Weise herzustellen! Es wird nicht einfach sein, Ihnen aber zweifellos viel Freude bereiten.

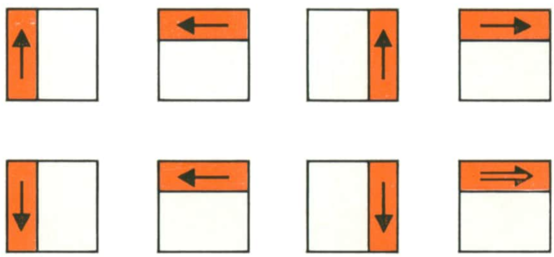
Ja, nun sind wir am Ende unseres Büchleins angelangt, das hoffentlich ein wenig Kurzweil, aber auch etwas geistige Anregung gegeben hat – und die Fähigkeit, ihn zu beherrschen, den

DREH MIT DEM WÜRFEL!

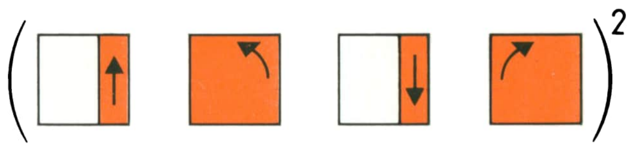
$A_1 =$



$A_2 =$



$A_3 =$



$A_4 =$