LINDNER

Lehrbuch der Physik

für Ingenieure



Lehrbuch der Physik

für Ingenieur- und Fachschulen

von Studiendirektor

Helmut Lindner

Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida

3. Auflage

Mit 721 Bildern, 64 Tabellen, 304 Beispielen und einer Farbtafel

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Als Lehrbuch an den Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt
Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen

Berlin, den 25. 4. 1955

Redaktionsschluß 30. 1. 1969

ES 20 C 3 (18 B 1)
Copyright by VEB Fachbuchverlag Leipzig 1969
Verlagslektor: Alfred Sommer
Einbandentwurf: Gerhard Raschpichler, Leipzig
Satz und Druck: VEB Fachbuchdruck Naumburg (Saale) IV/26/14, Auftrags-Nr. 67
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/73/69
19,80

Vorwort

Die Physik bildet neben der Mathematik eine der wissenschaftlichen Grundlagen der Technik. Ohne ein bestimmtes Maß physikalischer Kenntnisse können die technischen Fachkräfte vom Facharbeiter bis zum leitenden Ingenieur nicht die erforderliche Sicherheit und Wendigkeit bei der Lösung ihrer Aufgaben erlangen, können sie vor allem auch nicht schöpferisch an der Entwicklung der Technik teilnehmen. Die Entwicklung der Technik ist aber eine der wichtigsten Voraussetzungen für den Aufbau unserer Friedenswirtschaft.

Dieses Lehrbuch der Physik ist für den werdenden Ingenieur und insbesondere für das Direktstudium an den Ingenieur- und Fachschulen bestimmt. Es kann aber auch in allen anderen Lehrgängen mit ähnlichem Bildungsziel sowie als Hilfsmittel beim Selbststudium verwendet werden.

Die Gliederung des Stoffes folgt den neuesten Lehrplänen der Ingenieur- und Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik. Diese setzen die auf der polytechnischen Oberschule erworbenen physikalischen und mathematischen Grundkenntnisse voraus. Da in den Ingenieur- und Fachschulen die Anfänge der Differential- und Integralrechnung bereits im 1. Studienjahr gelehrt werden, ist es möglich, sie nunmehr auch im Physikunterricht anzuwenden. Weil die Begriffe der Infinitesimalrechnung bei Studienbeginn aber noch nicht zur Verfügung stehen, wurde insbesondere in der Mechanik eine Darstellungsform gewählt, die ein Verständnis auch ohne Zuhilfenahme der höheren Mathematik ermöglicht.

Mit Rücksicht auf die speziellen Bedürfnisse einiger Schulen wurden auch die Grundbegriffe der geometrischen Optik mit behandelt. Dieses Kapitel kann jedoch unbeschadet des weiteren Zusammenhanges überschlagen werden. Die Festigkeitslehre wurde bewußt beiseitegelassen, da sie an den Ingenieur- und Fachschulen als besonderes Fach mit im wesentlichen technischer Betonung behandelt wird. Über die Festigkeitslehre ist außerdem im VEB Fachbuchverlag bereits geeignete Fachliteratur erschienen.

Im Sinne einer einheitlichen und rationellen Darstellungsweise baut das Buch konsequent auf der Verordnung vom 31. Mai 1967 über die physikalisch-technischen Einheiten auf. Auch werden die verbindlichen Formelzeichen laut TGL 0-1304 weitgehend verwendet und fast durchgängig nur noch Größengleichungen gemäß TGL 0-1313 benutzt. Die Zahlenwerte der allgemeinen Konstanten und atomaren Größen entsprechen den internationalen Empfehlungen der IUPAP gemäß der Warschauer Erklärung vom September 1963.

Den Mitgliedern der „Arbeitsgemeinschaft Literatur" der Zentralen Fachkommission für Physik sei an dieser Stelle für zahlreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge, die zur vorteilhaften Veränderung einiger Abschnitte führten, herzlichst gedankt.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 15

1. Physikalische Größen und Gleichungen 16
1.1. Physikalische Größen 16
1.2. Internationales Einheitensystem 16
1.2.1. Längeneinheit: das Meter . . 17
1.2.2. Masseeinheit: das Kilogramm 20
1.2.3. Zeiteinheit: die Sekunde . . 21
1.2.4. Krafteinheiten: das Kilopond und das Newton . . 21
1.2.5. Dichte 23
1.3. Physikalische Gleichungen 25
1.3.1. Größengleichungen 25
1.3.2. Zugeschnittene Größengleichungen 26
1.3.3. Einheitengleichungen 26
1.3.4. Dimensionen 26

Mechanik des Massenpunktes und des starren Körpers

2. Lehre von den Bewegungen (Kinematik) 27
2.1. Grundbegriffe der Bewegungslehre 27
2.1.1. Geschwindigkeit 28
2.1.2. Beschleunigung 30
2.2. Bewegung auf gerader Bahn. 31
2.2.1. Gleichförmige Bewegung . 31
2.2.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung 32
2.2.3. Freier Fall 36
2.2.4. Senkrechter Wurf . 38
2.3. Bewegung auf der Kreisbahn 39
2.3.1. Gleichförmige Bewegung auf der Kreisbahn 39
2.3.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Kreisbahn 42
2.4. Geschwindigkeit und Beschleunigung als vektorielle Größen 45
2.4.1. Relativität der Bewegungen und das Unabhängigkeitsprinzip 45
2.4.2. Geschwindigkeit als Vektorgröße 47
2.4.3. Waagerechter und schräger Wurf 48
2.4.4. Krummlinige Bewegung . 51
2.4.5. Radialbeschleunigung der Kreisbewegung . . . 52
3. Kräfte im Gleichgewicht . . 53
3.1. Kraft als vektorielle Größe 54
3.2. Gleichgewicht zweier Kräfte 54
3.3. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt 55
3.3.1. Zusammensetzung von Kräften 55
3.3.2. Zerlegung von Kräften . . . 57
3.4. Kräfte am starren Körper. . 59
3.4.1. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten . 59
3.4.2. Drehmoment 61
3.4.3. Zusammensetzung von Drehmomenten 62
3.4.4. Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) 65

3.4.5. Kräftepaar 68
3.4.6. Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper . . 69
4. Kräfte am bewegten Massenpunkt 70
4.1. Grundgesetz der Dynamik . 70
4.2. Trägheitskräfte 72
4.3. Bewegungshemmende Kräfte 74
4.3.1. Haftreibung 74
4.3.2. Gleitreibung und Fahrwiderstand 75
5. Arbeit und Energie 77
5.1. Arbeit bei mechanischen Vorgängen 77
5.2. Potentielle und kinetische Energie 80
5.3. Gesetz von der Erhaltung der Energie 82
5.4. Leistung 83
5.4.1. Leistung bei Drehbewegungen 85
5.4.2. Wirkungsgrad 86
5.5. MKS- und CGS-System . . . 87
6. Impuls und Stoß 88
6.1. Kraft und Impulsänderung . 88
6.2. Gesetz von der Erhaltung des Impulses 90
6.3. Gerader Stoß 91
6.3.1. Unelastischer Stoß 91
6.3.2. Energieverhältnisse beim unelastischen Stoß 92
6.4. Elastischer Stoß 93
6.4.1. Reflexionsgesetz 95
7. Kräfte an rotierenden Körpern 96
7.1. Energie des rotierenden Körpers 96
7.2. Berechnung von Massenträgheitsmomenten 97
7.3. Satz von STEINER 100
7.4. Anwendung des dynamischen Grundgesetzes auf rotierende Körper 101
7.5. Drehimpuls 103
7.5.1. Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses 103
7.5.2. Drehimpuls als vektorielle Größe 104
7.5.3. Kreisel 105
7.6. Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem 107
7.6.1. Zentrifugalkraft 107
7.6.2. Fliehkraft und Schwerkraft 109
7.6.3. CORIOLIS-Kraft 110
8. Gravitation 112
8.1. Gravitationsgesetz . . . 112
8.2. KEPLERsche Gesetze . . . 114

Lehre von den Schwingungen

9. Kinematik der harmonischen Schwingung 117
9.1. Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Bewegung . . . 117
9.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung der harmonischen Bewegung 120
9.3. Überlagerung harmonischer Schwingungen 122
9.3.1. Zusammensetzung von parallel zueinander verlaufenden Schwingungen 122
9.3.2. Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen . . 124
9.3.3. Schwebungen 126
9.3.4. Kippschwingungen 127
10. Dynamik schwingender Körper 128
10.1. Kraftgesetz der harmonischen Schwingung 128
10.2. Lineare Federschwingung . . 129
10.3. Dreh- (Torsions-) Schwingungen 132
10.4. Mathematisches Pendel . . 133
10.5. Physisches Pendel 134
10.6. Bestimmung von Massenträgheitsmomenten aus Schwingungen 136

Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

11. Ruhende Flüssigkeiten und Gase 138
11.1. Kennzeichen des flüssigen Zustandes 138
11.2. Kennzeichen des gasförmigen Zustandes 140
11.3. Oberflächenspannung 142
11.4. Druck und Druckausbreitung 145
11.4.1. Druckeinheiten 145
11.4.2. Druck in Flüssigkeiten (hydrostatischer Druck) 147
11.4.3. Druck und Volumen der Gase 150
11.4.4. Schweredruck in Gasen . . 153
11.4.5. Archimedisches Prinzip . . 156

12. Strömende inkompressible Flüssigkeiten 160
12.1. Reibungsfreie Strömungen . 160
12.1.1. Grundbegriffe des Strömungsfeldes 160
12.1.2. Durchfluß 162
12.1.3. Gesetz von BERNOULLI . . . 163
12.1.4. Ausfluß 165
12.1.5. Weitere Anwendungen der BERNOULLIschen Gleichung . 166
12.2. Strömungen mit Reibung . . 169
12.2.1. Innere Reibung 169
12.2.2. Anwendungen des Reibungsgesetzes 171
12.2.3. Grenzschicht und Wirbelbildung 174
12.2.4. Strömungswiderstand von Körpern 176
12.2.5. Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen 178

Wärmelehre

13. Verhalten der Körper bei Temperaturänderung 183
13.1. Wesen von Temperatur und Wärme 183
13.2. Temperaturmessung 184
13.3. Ausdehnung fester und flüssiger Körper 185
13.3.1. Lineare (Längen-) Ausdehnung 185
13.3.2. Kubische (räumliche) Ausdehnung 188
13.4. Ausdehnung der Gase . . . 190
13.4.1. Gesetz von GAY-LUSSAC . . . 190
13.4.2. Absolute Temperatur 193
13.4.3. Gasthermometer 194
13.5. Zustandsgleichung der Gase . 195
13.5.1. Allgemeine Gaskonstante . . 195
13.5.2. Spezielle Gaskonstante . . . 198
14. Wärme als Energieform . . . 200
14.1. Wärmemenge 200
14.2. Spezifische Wärme 201
14.2.1. Spezifische Wärme fester und flüssiger Stoffe 201
14.2.2. Wärmeinhalt und Wärmekapazität 203
14.2.3. Bestimmung der spezifischen Wärme fester und flüssiger Stoffe 204
14.2.4. Spezifische Wärme der Gase 204
15. Änderungen des Aggregatzustandes 205
15.1. Schmelzen und Erstarren . . 206
15.1.1. Besonderheiten beim Schmelzen und Erstarren 207
15.2. Verdampfen und Kondensieren 209
15.2.1. Besonderheiten beim Verdampfen und Kondensieren . 210
15.3. Dämpfe 211
15.3.1. Dampf- und Gaszustand . . 211
15.3.2. Dampfdruck und Temperatur 213
15.3.3. Luftfeuchtigkeit 216
16. Zustandsänderungen der Gase 219
16.1. Erster Hauptsatz der Wärmetheorie 220
16.2. Isochore Zustandsänderung . 220
16.3. Isobare Zustandsänderung . 221
16.4. Isotherme Zustandsänderung 223
16.4.1. Arbeit bei isothermen Vorgängen 224
16.5. Adiabatische Zustandsänderung 227
16.5.1. Arbeit bei adiabatischen Vorgängen 229
16.6. Polytrope Zustandsänderung 229
16.7. Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen . . 230
17. Kreisprozesse 231
17.1. Wirkungsweise einer Wärmekraftmaschine 231
17.2. Kältemaschine und Wärmepumpe 234
17.3. CARNOTscher Kreisprozeß . . 236
17.4. Reversible und irreversible Vorgänge 239
17.5. Zweiter Hauptsatz der . . . Wärmethorie 240
17.5.1. Entropie beim CARNOTschen Kreisprozeß 240
17.5.2. Entropiezuwachs bei Erwärmung 241
17.5.3. Entropiezunahme beim Mischvorgang 242
18. Reale Gase 244
18.1. Isothermen eines realen Gases 244
18.2. Kritischer Zustand . . . 245
18.3. Verflüssigung der Gase . . 245
19. Kinetische Wärmetheorie . . 247
19.1. AVOGADROsche Konstante . . 247
19.2. Molekulargeschwindigkeit . . 249

19.2.1. Mittlere energetische Geschwindigkeit 249
19.2.2. Molekularenergie und Temperatur 251
19.2.3. MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung 252
19.3. Theorie der spezifischen Wärme 254
19.4. Stoßzahl und mittlere freie Weglänge 257
20. Ausbreitung der Wärme . . . 259
20.1. Konvektion 260
20.2. Wärmeleitung 260
20.3. Wärmeübergang 263
20.4. Wärmedurchgang 263

Grundbegriffe der Wellenlehre

21. Mechanische Wellen 265
21.1. Wesen der Wellenbewegung . 265
21.2. Beschreibung der Wellenbewegung 266
21.3. Arten der Wellen 268
22. Schall als Wellenerscheinung 271
22.1. Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen 271
22.2. Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten 273
22.3. Schallgeschwindigkeit in Gasen 273
22.4. Geschwindigkeit von Seilwellen 275
22.5. DOPPLER-Effekt 275
23. Schallfeld und seine Größen 278
23.1. Schallschnelle 278
23.2. Energiedichte 279
23.3. Schallwechseldruck 280
23.4. Schallstrahlungsdruck . . . 281
23.5. Schallstärke 281
23.6. Vergleich von Schallstärken 283
23.7. Empfindlichkeit des Gehörs 283
23.8. Lautstärke 284
23.9. Ultraschall 286

Geometrische Optik

24. Wesen und Ausbreitung des Lichtes 289
24.1. Wesen des Lichtes 289
24.2. Lichtstrahlen 291
24.3. Lichtgeschwindigkeit 292
25. Reflexion des Lichtes 293
25.1. Ebener Spiegel 294
25.2. Gekrümmter Spiegel 295
25.2.1. Sphärischer Hohlspiegel . . 296
25.2.2. Abbildung im Hohlspiegel . . 297
25.3. Sphärischer Wölb- (Konvex-) Spiegel 300
26. Brechung (Refraktion) des Lichtes 301
26.1. Brechungsgesetz 301
26.2. Planparallele Platte 303
26.3. Prisma 304
26.4. Totalreflexion 306
27. Zerlegung (Dispersion) des Lichtes 308
27.1. Dispersion 308
27.2. Spektren 309
28. Linsen 311
28.1. Dünne Linsen 311
28.1.1. Brennweite und Vorzeichenregeln 311
28.1.2. Abbildungsgesetze 313
28.2. Dicke Linsen 316
28.3. Linsensysteme 316
28.4. Linsenfehler 318
28.4.1. Chromatischer (Farb-) Fehler 318
28.4.2. Sphärischer (Kugel-) Fehler 319
28.4.3. Astigmatismus und weitere Fehler 319
29. Optische Instrumente . . . 321
29.1. Auge 321
29.1.1. Sehweite und Sehwinkel . . 321
29.1.2. Sehschärfe 321
29.2. Lupe 322
29.3. Fotografische Kamera . . . 323
29.4. Projektionsapparat 325
29.5. Fernrohre 326
29.5.1. Astronomisches Fernrohr . . 326
29.5.2. Terrestrisches Fernrohr . . . 326
29.5.3. GALILEIsches Fernrohr . . . 327
29.6. Mikroskop 327

Wellenoptik

30. Ausbreitung und Überlagerung von Wellen 329
30.1. HUYGENSsches Prinzip . . . 329
30.2. Reflexion von Wellen . . . 330
30.3. Brechung von Wellen . . . 332
30.4. Interferenz von Wellen . . . 333
30.5. Stehende Wellen 336
31. Interferenz und Beugung des Lichtes 338

31.1. Voraussetzungen für Interferenzerscheinungen 338
31.2. Interferenzen gleicher Neigung 340
31.3. Farben dünner Blättchen 341
31.4. Interferenzen gleicher Dicke. 343
31.5. Beugung von Wellen 345
31.5.1. Beugung am einfachen Spalt 346
31.5.2. Beugungsgitter 348
31.5.3. Auflösungsvermögen optischer Instrumente . . . 349
32. Polarisation des Lichtes . . 352
32.1. Polarisation durch Reflexion und Brechung 353
32.2. Polarisation durch Doppelbrechung 353
33. Strahlungsgesetze 356
33.1. Größen des Strahlungsfeldes 356
33.2. Temperaturstrahlung. . . . 359
33.2.1. Reflexion und Absorption der Temperaturstrahlung . . 360
33.2.2. KIRCHHOFFsches Strahlungsgesetz 363
33.2.3. STEFAN-BOLTZMANNsches Gesetz 365
33.2.4. Spektrale Verteilung der Temperaturstrahlung. 366
33.2.5. Temperaturmessung durch Strahlung. 367
34. Wellen und Teilchen 368
34.1. Zur Entstehung der Quantenvorstellung 368
34.2. Lichtelektrischer Effekt . . 370
34.3. Masse-Energie-Beziehung . . 372
34.4. Relativistische Massenzunahme 373
34.5. Dualismus Welle-Korpuskel 375
34.6. HEISENBERGsche Unschärfebeziehung. 378
35. Fotometrie 379
35.1. Spektrale Empfindlichkeit des Auges 379
35.2. Farben 380
35.3. Fotometrische Grundgrößen. 382
35.3.1. Lichtstärke 382
35.3.2. Lichtstrom 383
35.3.3. Beleuchtungsstärke . . . 385
35.3.4. Leuchtdichte 386
35.4. Fotometrische Meßgeräte . . 388
35.5. Strahlungsgrößen und fotometrische Größen . . 390

Elektrizitätslehre

36. Elektrische Grundgrößen . . 391
36.1. Elektrischer Strom. 391
36.2. Elektrische Spannung . . 393
36.3. Elektrischer Widerstand . . 396
36.3.1. Spezifischer Widerstand . . 397
36.3.2. Widerstand und Temperatur 398
37. Gleichstromkreis. 399
37.1. OHMsches Gesetz. 399
37.2. Verzweigter Stromkreis. . . 400
37.2.1. Nebenwiderstände für Strommesser 402
37.3. Unverzweigter Stromkreis. . 403
37.3.1. Vorschaltwiderstand und Spannungsteiler 405
37.3.2. Vorschaltwiderstände für Spannungsmesser 406
37.4. Klemmenspannung und innerer Widerstand 407
37.5. WHEATSTONEsche Brücke . . 408
37.6. Leistung und Arbeit des elektrischen Stromes. 409
37.6.1. Berechnung der Leistung . . 409
37.6.2. Berechnung der Arbeit . . . 411
38. Elektrisches Feld 411
38.1. Grunderscheinungen ruhender Ladungen 411
38.2. Elektrisches Feld im Vakuum 413
38.2.1. Elektrische Feldlinien . . . 413
38.2.2. Influenz 415
38.3. Elektrische Feldgrößen . . . 416
38.3.1. Elektrische Feldstärke . . . 416
38.3.2. Flächendichte 418
38.3.3. Verschiebungsdichte 419
38.4. Kraftwirkungen und Arbeit im elektrischen Feld 420
38.4.1. Kraft zwischen zwei Punktladungen 420
38.4.2. Kraft zwischen zwei geladenen Platten 421
38.4.3. Potential 422
38.5. Kapazität. 423
38.5.1. Zusammenschaltung von Kondensatoren 424
38.6. Energie des elektrischen Feldes 428
38.7. Elektrisches Feld und Stoff 429
38.7.1. Dielektrizitätszahl 429
38.7.2. Vorgänge im Dielektrikum 431
38.7.3. Piezoelektrischer Effekt . . 432

38.7.4. Bildung elektrischer Doppelschichten 433
38.7.5. Thermoelektrische Erscheinungen 433
39. Magnetisches Feld 435
39.1. Grunderscheinungen des Magnetismus 435
39.2. Strom und Magnetfeld . . . 436
39.3. Magnetische Feldgrößen . . 438
39.3.1. Magnetische Feldstärke. . 438
39.3.2. Durchflutungssatz 439
39.3.3. Induktion. 441
39.3.4. Magnetischer Fluß 444
39.4. Magnetisches Feld und Stoff 445
39.4.1. Permeabilitätszahl 445
39.4.2. Magnetisierungskurve und Hysteresis 446
39.4.3. Para- und diamagnetische Stoffe 448
39.5. Induktionsvorgänge 450
39.5.1. Induktionsgesetz. 450
39.5.2. Induktion in bewegten Leiterteilen. 452
39.5.3. Gleichstromgenerator. . . . 454
39.5.4. Selbstinduktion 456
39.5.5. LENZsche Regel 458
39.6. Kraftwirkungen im Magnetfeld 459
39.6.1. Kraftwirkung auf einen geraden Stromleiter 459
39.6.2. Anwendungen der Kraftwirkung auf Stromleiter . . . 460
39.6.3. Kraftwirkung zwischen Stromleitern 463
39.6.4. Definition der Stromstärke . 465
39.6.5. Energie des magnetischen Feldes 465
39.6.6. Zugkraft eines Magneten . . 467
39.6.7. Gegenüberstellung elektrischer und magnetischer Größen. 468
40. Stromleitung in festen Körpern 469
40.1. Metallische Leiter . 470
40.1.1. HALL-Effekt. 471
40.2. Vorgänge in Halbleitern . . 472
40.2.1. Eigenleitung 472
40.2.2. n-Leitung. 474
40.2.3. p-Leitung. 475
40.2.4. n-p-Gleichrichtung. 475
40.2.5. Prinzip des Transistors . . 477
41. Stromleitung in Elektrolyten 478
41.1. Ionenleitung und Ionenbeweglichkeit 478
41.2. FARADAYsche Gesetze . . 481
41.3. Galvanische Elemente . . . 483
41.3.1. Polarisation und Depolarisation 484
41.3.2. Akkumulatoren 485
42. Stromleitung in Gasen . . . 486
42.1. Unselbständige und selbständige Gasentladung 486
42.2. Glimmentladung in verdünnten Gasen. 488
42.2.1. Teile der Glimmentladung . 488
43. Elektrischer Strom im Vakuum 489
43.1. Geschwindigkeit und Energie freier Elektronen 490
43.2. Elektronenbefreiung aus Metallen 491
43.2.1. Glühemission . . 493
43.2.2. Feldemission . 493
43.2.3. Fotoemission . . . 493
43.2.4. Sekundäremission 494
43.3. Ablenkung von Elektronenstrahlen in Feldern. 494
43.3.1. Ablenkung von Elektronen im elektrischen Feld 494
43.3.2. Ablenkung von Elektronen im magnetischen Feld 495
43.4. Diode (Zweielektrodenröhre) 496
43.5. Triode (Dreielektrodenröhre) 497
43.5.1. Verstärkerwirkung einer Triode 498
43.6. Katodenstrahl-Oszillograf . . 499
44. Wechselstrom 500
44.1. Grundeigenschaften des Wechselstroms 500
44.1.1. Entstehung einer sinusförmigen Wechselspannung . 500
44.1.2. Wechselstromgenerator . . . 502
44.1.3. Mittelwerte von Wechselspannungen und -strömen. . 503
44.2. Widerstände im Wechselstromkreis 506
44.2.1. Rein ohmscher Widerstand . 506
44.2.2. Induktiver Widerstand . . 506
44.2.3. Kapazitiver Widerstand . . 508
44.2.4. Addition phasenverschobener Spannungen und Ströme . 509
44.2.5. Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen . 511

44.2.6. Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen . 513
44.2.7. Resonanz im Wechselstromkreis 515
44.3. Leistung im Wechselstromkreis 517
44.3.1. Wirkleistung 517
44.3.2. Blindleistung 518
44.3.3. Wechselstromleistung im allgemeinen Fall 519
44.4. Bedeutung des Blindstromes und seine Kompensation . . 521
44.5. Transformator 522
44.6. Dreiphasenstrom 523
44.6.1. Entstehung eines Dreiphasenstroms 523
44.6.2. Dreieckschaltung 524
44.6.3. Sternschaltung 524
44.7. Wechselstrommotoren . . . 525
44.7.1. Synchronmotor 525
44.7.2. Asynchronmotoren 526
45. Elektromagnetische Schwingungen und Wellen . . . 528
45.1. Einfacher Schwingkreis . . . 528
45.2. Triode als Schwingungserzeuger 532
45.3. Dipol als Schwingkreis . . . 532
45.4. Freie elektromagnetische Wellen 533

Atomphysik

46. Atomhülle 535
46.1. Bestandteile der Atome . . . 535
46.2. Ordnungszahl und Massenzahl 537
46.3. Bau des Wasserstoffatoms . 539
46.3.1. Bohrsche Postulate 539
46.3.2. Spektrallinien des Wasserstoffs 540
46.3.3. Quantenzahlen 543
46.3.4. Wellenmechanisches Atommodell 544
46.4. Atomhüllen der Elemente . . 546
46.5. Röntgenstrahlung 549
46.5.1. Bremsstrahlung 550
46.5.2. Charakteristische Strahlung 551
46.6. Energiebändermodell 553
46.6.1. Darstellung der metallischen Leitung 553
46.6.2. Bändermodell der Halbleiter 555
47. Atomkern 556
47.1. Natürliche Radioaktivität . . 556
47.2. Gesetze des radioaktiven Zerfalls 557
47.2.1. Allgemeine Merkmale . . 557
47.2.2. Zerfallsgesetz 558
47.2.3. Aktivität 559
47.3. Natürliche Zerfallsreihen . . 560
47.3.1. Uranreihe 560
47.3.2. Thoriumreihe 562
47.3.3. Aktiniumreihe 562
47.3.4. Weitere natürliche radioaktive Nuklide 563
47.4. Massen der Atomkerne . . 563
47.4.1. Isotope Kernarten 563
47.4.2. Massendefekt 564
47.5. Künstliche Umwandlung von Atomkernen 565
47.5.1. Prinzip der Kernumwandlung 565
47.5.2. Künstliche Radionuklide . . 567
47.6. Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Stoff . . 569
47.6.1. Strahlennachweis 569
47.6.2. Eigenschaften der α-Strahlen 571
47.6.3. Eigenschaften der β-Strahlen 572
47.6.4. Eigenschaften der γ-Strahlen 572
47.6.5. Strahlendosis 574
47.6.6. Dosisleistungskonstante . . . 575
47.7. Kernspaltung 575
47.7.1. Grundvorgang der Kernspaltung 575
47.7.2. Kernspaltungsenergie . . . 576
47.7.3. Kettenreaktion 577
47.7.4. Gewinnung von Kernenergie für friedliche Zwecke . . . 578
47.8. Anwendung von Radionukliden 579
47.9. Prinzip der thermonuklearen Reaktionen 581
47.10. Kosmische Strahlung 582
Bildquellenverzeichnis 585
Sachwortverzeichnis 586

Einleitung

Die Naturwissenschaft von heute ist die Technik von morgen, und die Technik von heute ist hervorgewachsen aus naturwissenschaftlichen Erkenntnissen vergangener Jahrhunderte und Jahrzehnte. Deshalb sollte der werdende Ingenieur, ehe er an eigentliche technische Aufgaben herangeht, sich vor allem ein sicheres Fundament physikalischer Kenntnisse schaffen.

„Physik", vom griechischen „physis" (Natur) stammend, bedeutete ursprünglich allgemein die Wissenschaft von der Natur. Heute verstehen wir darunter nur die Lehre von den Gesetzen der unbelebten Natur, soweit diese nicht auf chemischer Veränderung der beteiligten Körper beruhen.

Um diese Gesetze aufzufinden, bedarf es zunächst sorgfältiger und aufmerksamer **Beobachtung** aller erreichbaren Vorgänge. Die Erscheinungen der freien Natur aber sind zumeist nur flüchtig, wiederholen sich nie unter denselben Bedingungen und sind nicht reproduzierbar. Daher hat der künstlich geschaffene Naturvorgang, das **Experiment,** überragende Bedeutung gewonnen. Zum genauen Vergleich der beobachteten Zustände und Vorgänge dient die exakte **Messung.** Unter Zusammenfassung einzelner Messungen und Meßreihen sucht der Physiker Regelmäßigkeiten aufzufinden, die ihn schließlich auf das **Naturgesetz** führen.

Fast alle Naturgesetze stehen zueinander in Beziehung. Das eine folgt aus dem anderen, so wie alle Erscheinungen der Natur einen untrennbaren Zusammenhang bilden. Sofern eine Gruppe von Gesetzmäßigkeiten noch nicht sicher in dieses allgemeine Gebäude eingegliedert werden kann, sucht man eine vorläufige Erklärung, eine **Hypothese,** aufzustellen. Hypothesen müssen aber sofort verworfen werden, wenn sie in Widerspruch zu den Tatsachen geraten!

Die Physik gliedert sich in ihrer Arbeitsweise in **theoretische Physik** (mathematische Entwicklung und Zusammenfassung von Naturgesetzen) und **Experimentalphysik** (Herleitung von Gesetzen aus der unmittelbaren Erfahrung). Die in der Physik gewonnenen Erkenntnisse und allgemeingültigen Gesetze werden in kollektiver Zusammenarbeit mit den speziellen technischen Fachrichtungen zur Lösung technischer und kultureller Probleme angewendet.

1. Physikalische Größen und Gleichungen

1.1. Physikalische Größen

Die Physik stellt somit ein weitgehend in sich geschlossenes System von Naturgesetzen dar. Die Formulierung dieser Gesetze selbst wie auch ihre gegenseitige Verknüpfung geschieht mit Hilfe mathematischer Gleichungen. In diesen Gleichungen erscheinen die physikalischen Begriffe in der Form **physikalischer Größen.** Die in den einzelnen Teilgebieten der Physik verwendeten Größen sind recht zahlreich, hängen aber wegen ihrer gegenseitigen, in den Naturgesetzen gegebenen Beziehungen eng miteinander zusammen. Daher ist es möglich, sie auf nur wenige einfache **Grundgrößen** zurückzuführen und mit ihrer Hilfe alle übrigen als **abgeleitete Größen** darstellen. So ist z. B. die Geschwindigkeit eine abgeleitete Größe, die man als Quotient der beiden Grundgrößen Länge und Zeit definieren kann. Ebenso ist auch die Kraft eine abgeleitete Größe, die sich aus den Grundgrößen Masse, Länge und Zeit aufbauen läßt usw.
Die physikalischen Größen haben deshalb nicht die Bedeutung einfacher Zahlenwerte, sondern sie definieren zugleich den durch sie dargestellten Begriff mittels einer bestimmten Meßvorschrift. So liegt z. B. dem Begriff der Länge eine zweckmäßig ausgewählte Maßeinheit zugrunde, und die Größe l gibt zugleich an, wie oft die benutzte Einheit darin enthalten ist.

(1) **Jede physikalische Größe ist das Produkt aus einem Zahlenwert und einer Maßeinheit (im folgenden stets als Einheit bezeichnet).**

Dies kommt in entsprechenden Gleichungen zum Ausdruck, wie z. B. $l = 50$ m oder $\varrho = 2$ g/cm^3, in denen die darin enthaltenen Einheiten ausdrücklich mitgeschrieben werden müssen.
Soll nur der *Zahlenwert* einer Größe bezeichnet werden, so setzt man ihr Formelzeichen in geschweifte Klammern. Die Gleichung

$$\{l\} = 50$$

bedeutet, daß die Längeneinheit 50mal in der Länge l enthalten ist. Steht das Formelzeichen jedoch in eckigen Klammern, so ist allein ihre *Einheit* gemeint. Die Gleichung

$$[l] = \mathrm{m}$$

ist daher zu lesen: die Einheit der Länge l ist das Meter. Der Inhalt des Satzes (1) läßt sich somit durch die Gleichung ausdrücken

$$\begin{aligned} \textit{Größe} &= \textit{Zahlenwert} \cdot \textit{Einheit} \\ l \quad &= \{l\}\,[l]. \end{aligned}$$

1.2. Internationales Einheitensystem

Die in der Physik und Technik zu benutzenden Maßeinheiten bilden ein international vereinbartes Maßsystem. Dieses Maßsystem baut sich auf folgenden 6 **Grundeinheiten** auf:

1. Einheit der **Länge:** **1 Meter = 1 m**
2. Einheit der **Masse:** **1 Kilogramm = 1 kg**
3. Einheit der **Zeit:** **1 Sekunde = 1 s**
4. Einheiten der **Temperatur:** **1 Grad Kelvin = 1 °K**
5. Einheit der **Stromstärke:** **1 Ampere = 1 A**
6. Einheit der **Lichtstärke:** **1 Candela = 1 cd**

Alle anderen Einheiten (z. B. die Einheiten für die Kraft, die elektrische Spannung usw.) stehen durch bestimmte Definitionen mit diesen Grundeinheiten in Zusammenhang und heißen deshalb **abgeleitete Einheiten.**
Da es oft vorkommt, daß die gesetzlichen Einheiten für das praktische Rechnen zu groß oder zu klein sind, dürfen in den meisten Fällen dezimale Vielfache oder Bruchteile gebildet werden, die man durch folgende Vorsätze kennzeichnet:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung			Beispiel	
Tera	T	1000000000000	(10^{12})	Einheiten	TΩ	Teraohm
Giga	G	1000000000	(10^{9})	Einheiten	GeV	Gigaelektronenvolt
Mega	M	1000000	(10^{6})	Einheiten	MW	Megawatt
Kilo	k	1000	(10^{3})	Einheiten	km	Kilometer
Hekto	h	100	(10^{2})	Einheiten	hg	Hektogramm
Deka	da	10	(10^{1})	Einheiten	dag	Dekagramm
Dezi	d	0,1	(10^{-1})	Einheiten	dm	Dezimeter
Zenti	c	0,01	(10^{-2})	Einheiten	cm	Zentimeter
Milli	m	0,001	(10^{-3})	Einheiten	ms	Millisekunde
Mikro	μ	0,000001	(10^{-6})	Einheiten	μA	Mikroampere
Nano	n	0,000000001	(10^{-9})	Einheiten	nm	Nanometer
Pico	p	0,000000000001	(10^{-12})	Einheiten	pF	Picofarad
Femto	f		(10^{-15})	Einheiten	fm	Femtometer
Atto	a		(10^{-18})	Einheiten	am	Attometer

1.2.1. Längeneinheit: das Meter

Die Grundlage des internationalen Einheitensystems ist das **Meter.** Es wurde im April 1795 von der französischen Nationalversammlung eingeführt und sollte ursprünglich den zehnmillionsten Teil eines Erdmeridianquadranten (Bild 1) darstellen.

Nach neueren Messungen beträgt aber die Länge des Viertelbogens etwa 10002300 m. Trotzdem hat man das einmal festgelegte Maß unverändert beibehalten, da es allein auf die Einheitlichkeit und Genauigkeit der zu verwendenden Maßstäbe ankommt. Deshalb wurde durch die Konvention vom 20. 5. 1875 das Meter als *internationales* Maß festgelegt.

Das **Urmeter** ist ein Stab aus einer Legierung von 90 % Platin und 10 % Iridium, aufbewahrt in Paris, und wurde aus 31 gleichwertigen Exemplaren ausgewählt. Deutschland bekam das beim „Deutschen Amt für Meßwesen und Warenprüfung" in Berlin liegende Stück Nr. 18 zugeteilt (Bild 2).



Bild 1. Erdmeridianquadrant

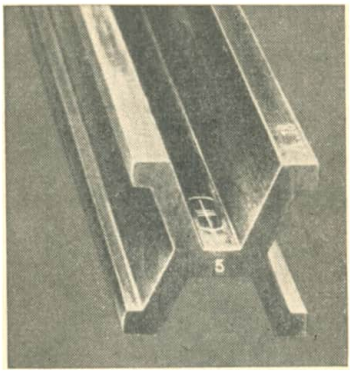


Bild 2. Ende A des Meter-Prototyps Nr. 18

Da damit gerechnet werden muß, daß derartige Legierungen im Laufe längerer Zeit Veränderungen im Feingefüge erleiden, hat die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht festgesetzt, daß 1 Meter gleich der Länge von 1650763,73 Wellen der orangen Linie des Krypton-Isotopes Kr 86 (gemessen im Vakuum) ist. Somit ist die Längeneinheit für alle Zeiten unveränderlich festgehalten. Das Urmeter wird aber auch weiterhin unter den bisherigen Bedingungen aufbewahrt.

Weitere, noch gebräuchliche, aber nicht verbindliche Längeneinheiten sind:
1 Seemeile = 1852 m (Länge einer Bogenminute auf dem Erdmeridian)
1″ (englischer und russischer Zoll) = 25,4 mm
1 ÅE (Ångströmeinheit) = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 0,1 nm
1 XE (X-Einheit) = 10^{-13} m = 10^{-11} cm = 10^{-4} nm

1.2.1.1. Längenmessung

Als Urmaße der Technik dienen die mit größter Präzision hergestellten **Parallelendmaße.** Ihre Endflächen sind so genau gearbeitet, daß sie bei Berührung fest aneinander haften und bei 1 ··· 20 mm beispielsweise eine Genauigkeit von ± 0,08 μm verbürgen (Bild 3).

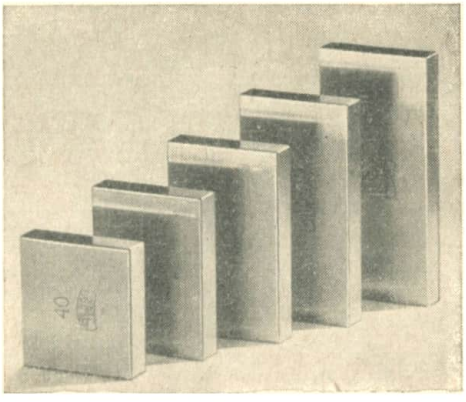
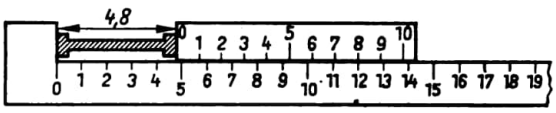


Bild 3. Parallelendmaße

Zum genaueren Ablesen von geteilten Maßstäben verwendet man vielfach den **Nonius.** Dieser ist ein Hilfsmaßstab, auf welchem 9 Striche des Hauptmaßes in 10 Teile zerfallen (Bild 4). Derjenige Teilstrich des Nonius, der mit einem Strich des Hauptmaßes zusammenfällt, gibt die Zehntel an.

Bild 4. Schema eines Nonius, Ablesung = 4,8 Längeneinheiten



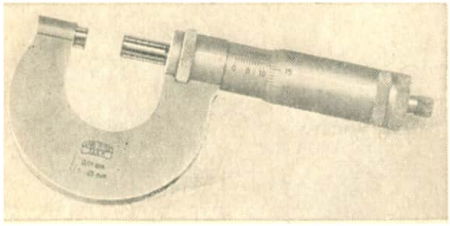


Bild 5. Schraubenlehre

Für Feinmessungen dient in vielen Fällen die **Schraubenlehre** (Bild 5). Bei einer vollen Umdrehung der Teilungstrommel bewegt sich die Spindel um 0,5 mm vorwärts. Die Trommel selbst hat 50 Teilstriche, so daß man 0,01 mm bequem messen kann. Gute Schraubenlehren weisen einen Fehler von höchstens ± 0,002 mm auf.
Genaueste Längenmessungen werden mit optischen (z. B. Interferenzkomparator von Zeiss) und elektrischen Geräten (z. B. Kapazitätsänderung eines Schwingkreises) ausgeführt.

1.2.1.2. Flächenmessung

Flächeneinheit: das Quadratmeter

1 m²	= 100 dm²	= 10000 cm²	
1 cm²	= 100 mm²		
1 km²	= 100 ha	= 10000 a	
1 a	= 100 m²		

Neben der rein rechnerischen Ermittlung von Flächeninhalten kommt man häufig in die Lage, den Inhalt gezeichnet vorliegender unregelmäßiger Flächen zu bestimmen. Hierzu eignet sich besonders das **Polarplanimeter** (Bild 6). Mit dem Fahrstift S umfährt man den Rand der Fläche. Die Rolle R führt dabei n Umdrehungen aus. Die Fläche ist dann $A = kn$, wobei k eine Konstante ist, die von der Fahrarmeinstellung und dem Rollenumfang abhängt.

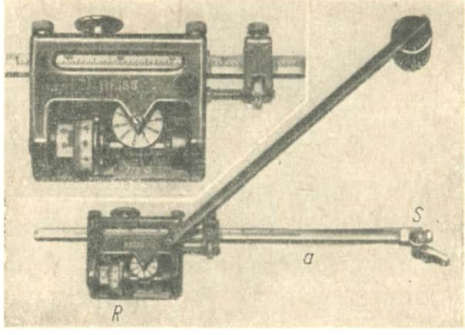


Bild 6. Polarplanimeter. Links oben: Umdrehungszähler und Ablesung der Fahrarmeinstellung

1.2.1.3. Volumenmessung

Volumeneinheit: das **Kubikmeter**

$1\,m^3$	$= 1000\,dm^3$
	$= 10^6\,cm^3$
$1\,cm^3$	$= 1000\,mm^3$
1 l (Liter)	$= 1{,}0\,dm^3$

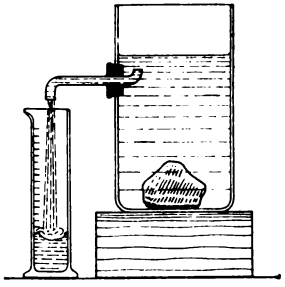


Bild 7. Überlaufgefäß

Das Volumen unregelmäßiger kleiner Körper mißt man mit dem **Überlaufgefäß** (Bild 7). Dieses wird zunächst bis zum Abfluß des letzten Tropfens mit Wasser gefüllt.
Nach Einlegen des Körpers läuft dann gerade so viel Wasser ab, wie sein Volumen beträgt.

1.2.2. Masseeinheit: das Kilogramm

Gleichzeitig mit der Schaffung des Meters hat man auch die Masseeinheit festgelegt und mit **Kilogramm** bezeichnet.
Das **Urkilogramm** ist ebenfalls in Paris aufbewahrt, die DDR besitzt als Prototyp die später hergestellte Kopie Nr. 55 (Bild 8). Er ist ein Zylinder aus Platin-Iridium von 39 mm Durchmesser und 39 mm Höhe.

1 kg	= 1000 g (Gramm)
1 g	= 1000 mg (Milligramm)
1000 kg	= 1 t (Tonne)
100 kg	= 1 dt (Dezitonne)

Ursprünglich sollte das Kilogramm zugleich auch die Einheit des Gewichtes darstellen und wurde auch lange Zeit in diesem Sinne benutzt. Wir werden jedoch in 1.2.4. sehen, daß das Gewicht eine Kraft ist und hierfür andere Maßeinheiten (z. B. N und kp) vorgesehen sind. Daher soll man auch die zum Wägen benutzten Körper nicht „Gewichte" nennen; denn jede solche Waage ist ein Gerät zum Massenvergleich und dient somit zur Massenbestimmung mit Hilfe von „Wägestücken" (Bild 9).
Sobald es im täglichen Leben (z. B. beim Einkaufen von Lebensmitteln) und in der Technik (z. B. bei der Gewinnung und Verarbeitung von Kohle und anderen Rohstoffen) auf eine bestimmte Menge ankommt, rechnet man daher durchaus richtig mit deren Masse in Kilogramm und sagt einfach 1 kg Brot usw.

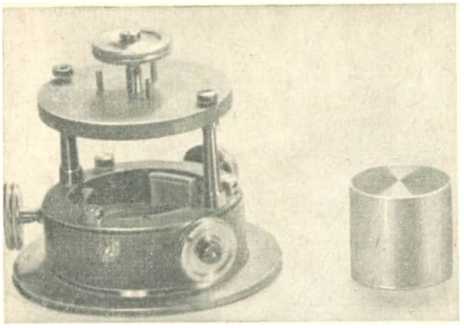


Bild 8. Originalprototyp des Urkilogramms mit seiner Haltevorrichtung

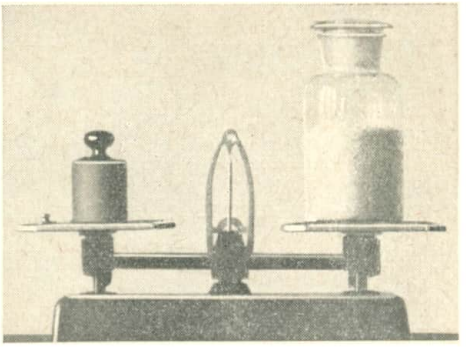


Bild 9. Nicht Gewichtsbestimmung, sondern Massenvergleich

1.2.3. Zeiteinheit: die Sekunde

Als Zeiteinheit in Physik und Technik gilt die **Sekunde,** der 86400ste Teil eines mittleren Sonnentages[1]). Für beide deutschen Staaten gilt die Mitteleuropäische Zeit (MEZ), d.h. die Ortszeit für 15° östliche Länge. Das Zeitsignal wird täglich ab 12.55 Uhr von einigen Rundfunksendern ausgestrahlt.

1 h (Stunde) = 60 min = 3600 s

Für Präzisionsmessungen dient heute die **Quarzuhr,** deren wichtigster Teil ein vibrierender Quarzstab ist, der einen elektrischen Schwingkreis steuert.

1.2.4. Krafteinheiten: das Kilopond und das Newton

Geht man zunächst von der Masseeinheit, dem Kilogramm, aus, so übt diese Masse infolge der Anziehungskraft der Erde eine bestimmte, senkrecht nach unten gerichtete Kraft aus. Diese Kraft nennt man das **Gewicht.** Dieses ist keineswegs konstant, sondern hängt ganz von dem Ort ab, an dem sich das Massestück von 1 kg befindet. Ein und dasselbe Kilogrammstück ist am Nordpol rund 0,2 % schwerer und am Äquator rund 0,3 % leichter als bei uns.

---

[1]) Da die Anzahl der auf 1 Jahr entfallenden mittleren Sonnentage gewissen geringfügigen astronomischen Schwankungen unterworfen ist, ist die Sekunde nunmehr als der 31 556 925,974 7te Teil eines Jahres, bezogen auf den 1. Januar 1900, 12 Uhr, festgelegt worden

Um von diesen geographisch bedingten Zufälligkeiten unabhängig zu sein, hat man 1934 für die **Krafteinheit** das **Kilopond** eingeführt.

Es ist dies diejenige Kraft, mit der die Masse 1 kg bei einer Schwerebeschleunigung von 9,806 65 m/s² (d. i. ein an sich willkürlich festgelegter Wert, der dem Schwerewert unter 45° nördlicher Breite in Meereshöhe nahekommt) auf ihre Unterlage drückt.

1 kp	=	1000 p (Pond)
1 p	=	1000 mp (Millipond)
1000 kp	=	1 Mp (Megapond)

Dem Anfänger bereitet die Unterscheidung zwischen Masse und Kraft häufig Schwierigkeiten. Man merke sich daher, daß eine gegebene Masse an allen Punkten der Welt eine konstante, unveränderliche Größe darstellt, während die Kraft als Folge der gegenseitigen Anziehung erst dann auftritt, wenn sich eine zweite Masse, z. B. diejenige der Erde, in ihrer Nähe befindet. Die Größe dieser Kraft hängt dann von der Größe der beiden Massen und ihrem Abstand ab (s. Gravitation 8.1.). Auf dem Mond hat z. B. die Masse 1 kg das Gewicht, d. h. die Schwerkraft, von nur etwa $^1/_6$ kp. Deshalb werden mit einer gewöhnlichen Waage nur Massen verglichen und keine Gewichte bestimmt, weil die Schwerkraft auf beide Waagschalen in gleicher Weise einwirkt und sich daher örtliche Unterschiede der Schwerebeschleunigung nicht bemerkbar machen können.

Kraftmesser heißen **Dynamometer.** Hierfür eignen sich in einfachen Fällen gespannte Federn (Bild 10).

In der Tafel der gesetzlichen Einheiten ist dem Kilopond aber eine andere Krafteinheit vorangestellt, und zwar die Einheit **1 Newton,** abgekürzt 1 N. Sie ist unmittelbar, d. h. ohne verbindende Zahlenfaktoren, aus den Einheiten 1 m, 1 kg und 1 s gebildet:

1 Newton ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.

Der Zusammenhang zwischen der Krafteinheit Newton und der häufig verwendeten Krafteinheit Kilopond wird durch die Definition hergestellt:

$$1\ \text{kp} = 9{,}80665\ \text{N}$$

$$1\ \text{N} = \frac{1}{9{,}80665}\ \text{kp} = 0{,}10197\ \text{kp}$$

Wenngleich der Gebrauch des Kiloponds auch heute noch sehr weit verbreitet ist, sollte man das Newton bevorzugen, da es fast alle physikalischen Berechnungen außerordentlich vereinfacht.

1.2.5. Dichte

Vergleicht man verschiedene Stoffe gleichen Rauminhalts, so zeigen sich mitunter auffällige Massenunterschiede, wie etwa Blei gegenüber Kork (s. Bild 11). Andererseits kann ein entsprechend großes Korkstück durchaus genausoviel wiegen wie ein kleineres Stück Blei. Brauchbare Vergleichszahlen erhält man erst dann, wenn man die Massen gleicher Raumteile gegenüberstellt. Man erhält dann die Dichte.

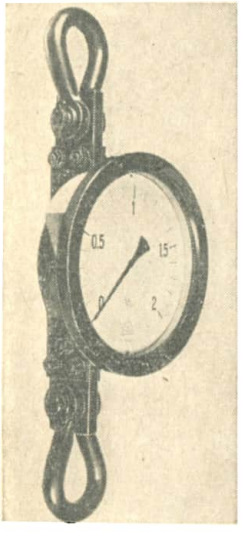


Bild 10. Technischer Zugkraftmesser

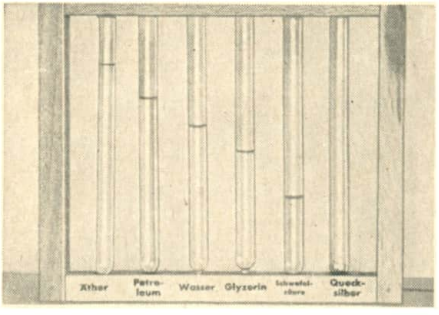


Bild 11. Gleich große Massen verschiedener Flüssigkeiten

Unter der Dichte eines Körpers versteht man den Quotienten aus Masse und Volumen.

Nur in den seltensten Fällen hat man genau ein Kubikzentimeter des betreffenden Stoffes bei der Hand. Deshalb wägt man den Körper erst, bestimmt dann sein Volumen und rechnet:

$$\textbf{Dichte} = \frac{\textbf{Masse}}{\textbf{Volumen}} \text{ oder abgekürzt:}$$

(2) $$\boxed{\varrho = \frac{m}{V}}$$

Einheiten der Dichte ϱ: $1\ \mathrm{g/cm^3} = 1\ \mathrm{kg/dm^3} = 1\ \mathrm{t/m^3}$

Ein unmittelbarer Zusammenhang mit den in der Chemie gebräuchlichen relativen Atommassen besteht nicht. Beispielsweise ist die Dichte des Kaliums trotz höherer Atommasse (39) geringer als die des Magnesiums mit der Atommasse 24 (Unterschied im Atomvolumen und der Packungsdichte).

Dichte einiger fester Stoffe bei 20 °C[1]) in g/cm³

Lithium	0,534	Steinkohle	1,5	Aluminiumleg.	
Kalium	0,862	Wolfram	19,1	AlCuMg	
Natrium	0,971	Gold	19,29	(„Duralumin")	2,79
Magnesium	1,74	Platin	21,5	Fichtenholz	0,5
Aluminium	2,72	Osmium	22,5	Eichenholz	0,82
Eisen	7,2···7,8	Messing	8,6	Granit	2,8
Kupfer	8,93	Germanium	5,35	Beton	2,2
Blei	11,34	Magnesiumleg. MgAl		Ziegelstein	2,6
Zink	7,12	(„Elektron")	1,8	Fensterglas	2,5

Die in der Tabelle genannten Zahlen sind nicht immer maßgebend, da es sehr auf die innere Struktur und die Herstellungsweise der betreffenden Stoffe ankommt.
Die Dichte von **Flüssigkeiten** kann man mit einem **Pyknometer** bestimmen (Bild 12). Dies ist ein Fläschchen, dessen Volumen zuvor sorgfältig gemessen wird. Man füllt es dann mit der Flüssigkeit, bis diese aus der im Stopfen befindlichen Durchbohrung austritt, wo man den Rest abwischt. Eine genauere Methode wird in 11.4.5. behandelt.

Dichte einiger Flüssigkeiten in g/cm³

Quecksilber bei 0 °C	13,5951	Äther bei 18 °C	0,72
Quecksilber bei 20 °C	13,5457	Seewasser	1,02
Wasser bei 0 °C	0,999841	Petroleum	0,85
Wasser bei 20 °C	0,998205	Schwefelsäure, konzentr.	1,84
Äthylalkohol bei 18 °C	0,79	Benzin	0,70
Benzol bei 18 °C	0,8786		

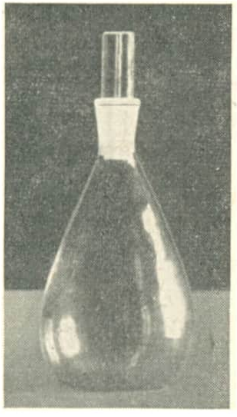


Bild 12. Pyknometer

Um handliche Zahlen zu bekommen, rechnet man bei **Gasen** meist in Kilogramm je **Kubikmeter** bei 0 °C und 760 Torr (11.4.1.). Ein Vergleich zeigt dann, daß Wasserstoff von allen Gasen die kleinste Dichte hat. Auch merke man sich die Dichte der Luft von 1,293 kg/m³.

Dichte einiger Gase bei 0 °C und 760 Torr in kg/m³

Wasserstoff	0,090	Ammoniak	0,771
Sauerstoff	1,429	Kohlendioxid	1,977
Luft	1,293	Kohlenoxid	1,250
Stickstoff	1,251	Chlor	3,22
Helium	0,179		

[1]) Da bei wechselnder Temperatur alle Körper ihr Volumen verändern, ist auch die Dichte von der Temperatur abhängig. Die meisten Körper dehnen sich bei Erwärmung aus, weshalb dann die Dichte abnehmen muß

1.3. Physikalische Gleichungen

1.3.1. Größengleichungen

Die zur Formulierung der Naturgesetze aufgestellten Gleichungen sind keine gewöhnlichen mathematischen Formeln. Da sie aus physikalischen Größen gebildet sind, werden sie zwangsläufig zu **Größengleichungen,** in denen grundsätzlich jede Größe als *Produkt aus Zahlenwert und Einheit* erscheint. Man soll daher stets nur mit Größengleichungen rechnen! Wie dies praktisch zu geschehen hat, sei an folgendem Beispiel gezeigt.

Beispiel: Wie groß ist die Masse von 300 m Kupferdraht, dessen Durchmesser 1 mm beträgt? – Zunächst ist die Gleichung (2) $\varrho = m/V$ nach der gesuchten Größe m umzustellen, und man erhält

$$m = \varrho V.$$

Den Wert von ϱ entnimmt man der Tabelle S. 24 und findet $\varrho = 8{,}93\ \mathrm{g/cm^3}$. Das Volumen V drückt man zweckmäßig in $\mathrm{cm^3}$ aus und erhält es als Produkt aus Länge und Querschnitt: $V = lA$. Diese Größen sind in die Gleichung einzusetzen:

$$m = \varrho V = \varrho lA$$

$$m = \frac{8{,}93\ \mathrm{g} \cdot 30000\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}00785\ \mathrm{cm^2}}{\mathrm{cm^3}} = 2103\ \mathrm{g} = 2{,}103\ \mathrm{kg}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Einheiten wie Faktoren zu behandeln sind und auch gegenseitig gekürzt werden können. In diesem Beispiel wurden die gegebenen Größen vor dem Einsetzen in die Gleichung in einheitliche Maßeinheiten umgerechnet.
Die Größengleichungen schreiben jedoch nicht vor, welche Einheiten zu verwenden sind. Ihr Vorteil besteht darin, daß sie unabhängig von der Wahl der Einheiten stets zum richtigen Ergebnis führen. Man kann daher die Größen auch mit den Maßeinheiten einsetzen, wie sie in der Aufgabe gegeben sind:

$$m = \frac{8{,}93\ \mathrm{g} \cdot 300\ \mathrm{m} \cdot 0{,}785\ \mathrm{mm^2}}{\mathrm{cm^3}}.$$

Die zum Ausrechnen erforderliche Einheitlichkeit muß dann durch Hinzufügen von Umrechnungsfaktoren nachträglich herbeigeführt werden. In diesem Beispiel ersetzt man zweckmäßigerweise 1 m durch 10^2 cm bzw. 1 $\mathrm{mm^2}$ durch $10^{-2}\ \mathrm{cm^2}$:

$$m = \frac{8{,}93\ \mathrm{g} \cdot 300 \cdot 10^2\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}785 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm^2}}{\mathrm{cm^3}} = 2103\ \mathrm{g}.$$

Schließlich können auch Einheiten verwendet werden, die in der Aufgabe überhaupt nicht genannt wurden, wie etwa:

$$m = \varrho V = 8{,}93\ \mathrm{kg/dm^3}\ 3 \cdot 10^3\ \mathrm{dm} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{dm^2} = 2{,}103\ \mathrm{kg}.$$

Selbstverständlich wird man stets denjenigen Weg wählen, der in einfachster Weise zum gewünschten Ziel führt.

1.3.2. Zugeschnittene Größengleichungen

Mitunter kommt es auch vor, daß Gleichungen benutzt werden, die nur für ganz bestimmte Einheiten Gültigkeit haben. Dann sollte man diese nur in der Form **zugeschnittener Größengleichungen** verwenden. In einer solchen dividiert man jede Größe durch die in ihr enthaltene Einheit. Diese Quotienten stellen nach Satz (1), S. 16, reine Zahlenwerte dar.

Beispiel: Für die Schallgeschwindigkeit in der Luft gilt die Näherungsformel

$$c \Big/ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 331{,}6 + 0{,}6\, t/^{\circ}\mathrm{C}\,.$$

Bei der Temperatur $t = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ erhält man

$$c \Big/ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = (331{,}6 + 12) = 343{,}6\,.$$

Bringt man die auf der linken Gleichungsseite stehende Einheit m/s nach rechts, so entsteht zwangsläufig das vollständige Ergebnis $c = 343{,}6$ m/s.

1.3.3. Einheitengleichungen

Oftmals kommt es darauf an, lediglich über die in einer Gleichung vorkommenden Einheiten Klarheit zu gewinnen. Dann setzt man alle Größen in eckige Klammern, womit nach 1.1. zum Ausdruck kommt, daß dann nur die Einheiten gemeint sind.

Beispiel: Aus der Definition für die Dichte $\varrho = \frac{m}{V}$ folgt die *Einheitengleichung*

$$[\varrho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\,.$$

1.3.4. Dimensionen

Um schematisch darzustellen, in welcher Weise eine physikalische Größe mit den in ihr enthaltenen Grundgrößen zusammenhängt, benutzt man oftmals den Begriff der **Dimension** (Größenart). Die in der Mechanik verwendeten Grundgrößen haben die Dimensionen Länge L, Zeit T und Masse M. Zum Beispiel entsteht das Volumen V stets als Produkt dreier Längen und hat daher die Dimension L^3. Die Dichte ϱ ist demzufolge von der Dimension $\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$ usw. Da die Dimensionen nicht an spezielle Einheiten gebunden sind, erleichtern sie in vielen Fällen den Überblick über komplizierte Zusammenhänge.

Physikalische Größen, bei deren Bildung sich die Einheiten herauskürzen, werden als dimensionslos bezeichnet. Sie entstehen z. B., wenn sie als Verhältnis zweier Größen definiert werden, denen die gleiche Einheit zukommt. Beispielsweise wird das Bogenmaß eines Winkels (s. 2.3.1.) durch das Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$ bestimmt. Der sich ergebende Winkel ist daher dimensionslos und hat die Einheit 1.

Mechanik des Massenpunktes und des starren Körpers

2. Lehre von den Bewegungen (Kinematik)

2.1. Grundbegriffe der Bewegungslehre

Von den in der Natur beobachtbaren Erscheinungen fallen diejenigen am meisten auf, bei denen sich irgendwelche Körper gegenüber ihrer Umgebung bewegen. Um die außerordentlich vielfältigen Bewegungsmöglichkeiten besser ordnen zu können, läßt man bei der Untersuchung dieser Vorgänge die Frage nach der Ursache, d. h. den beteiligten Kräften und den entstehenden Wirkungen auf andere Körper, zunächst außer Betracht. Die Bewegungslehre behandelt demnach nur den zeitlichen Ablauf der Ortsveränderung eines Körpers, ohne nach deren Ursache oder Wirkung zu fragen.

Alle Bewegungen lassen sich auf zwei Hauptarten zurückführen. Bewegen sich alle Punkte des Körpers mit gleich großer Geschwindigkeit auf parallelen Linien, so spricht man von einer **fortschreitenden Bewegung** (Translation), während bei der **Drehbewegung** (Rotation) die auf der Drehachse befindlichen Punkte in Ruhe bleiben und die übrigen Kreisbahnen unterschiedlicher Geschwindigkeit beschreiben. Beide Bewegungsarten können auch gleichzeitig stattfinden, wie z. B. bei einem auf der Straße rollenden Rad oder einer Luftschraube. Ändert sich die Bewegungsrichtung periodisch, so handelt es sich um Schwingungen.

Zur Darstellung eines Bewegungsvorganges kann man zunächst die **Bahn** des Körpers verfolgen und sie in ein Koordinatensystem einzeichnen. Im einfachsten Fall, etwa bei einer angestoßenen Billardkugel, ist die Bahn eine Gerade (Bild 13). Sie kann auch kreisförmig sein, oder, wie bei einem geworfenen Stein, die Form einer Parabel haben (Bild 14).

Die genaue **Bahnkurve** zu kennen ist zwar sehr wichtig; doch läßt diese Darstellungsweise ein wesentliches Merkmal des Vorganges nicht erkennen. Außer der beobachteten Ortsveränderung bedarf es noch einer Größe, die auch die hierfür benötigte Zeit enthält. Diese ist die **Geschwindigkeit** des Körpers. Aus der Bahnkurve läßt sich allerdings entnehmen, daß sich die Bewegungsrichtung u. U. fortgesetzt ändert. Es genügt

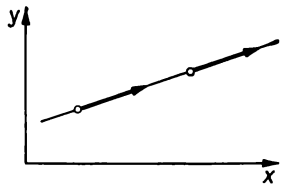


Bild 13. Bahnkurve eines geradlinig bewegten Körpers mit Geschwindigkeitsvektoren

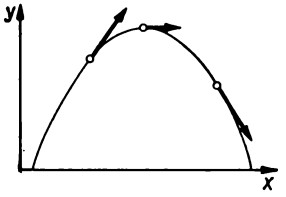


Bild 14. Bahnkurve eines krummlinig bewegten Körpers (Wurfparabel) mit einigen Geschwindigkeitsvektoren

daher nicht, die Geschwindigkeit lediglich durch einen Zahlenwert nebst dazugehöriger Einheit zu kennzeichnen. Vielmehr muß auch die jeweilige Richtung mit angegeben werden. Physikalische Größen, denen sowohl eine *Richtung* als auch ein *Betrag* zukommt, nennt man **vektorielle Größen.** Außer der Geschwindigkeit gibt es noch viele andere physikalische Größen, zu deren Beschreibung die Angabe einer bestimmten *Richtung* gehört und die demnach als **Vektoren** zu behandeln sind, wie z. B. die Beschleunigung, die Kraft, die elektrische und magnetische Feldstärke usw. Solche Größen aber, denen von Natur aus keine Richtung zu eigen ist, nennt man **Skalare.** So sind z. B. die Masse und die Temperatur eines Körpers skalare Größen.
Die vektoriellen Eigenschaften der Geschwindigkeit seien jedoch vorläufig noch beiseite gelassen. Sie werden in 2.4. eingehender behandelt.

2.1.1. Geschwindigkeit

In erster Linie muß die Geschwindigkeit zum Ausdruck bringen, ob sich ein Körper schneller oder langsamer bewegt. Praktisch stellt man dies fest, indem man eine bestimmte Strecke Δs vorgibt und dann mißt, in welchem Zeitraum Δt die Strecke Δs zurückgelegt wird. Dann errechnet man die **Geschwindigkeit** v als den **Quotienten aus dem zurückgelegten Weg** Δs **und der dazu benötigten Zeit** Δt.

(3) $$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$ **Geschwindigkeit** v.

Hieraus folgt die Einheitengleichung

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Einheit der Geschwindigkeit: 1 m/s

Bei Fahrzeugen ist es meist üblich, die Geschwindigkeit in km/h auszudrücken. Es bedeutet z. B. 72 km/h soviel wie $\frac{72000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$. Man erhält also die Geschwindigkeit in m/s, wenn man den in km/h gegebenen Zahlenwert einfach durch 3,6 dividiert:

$$1\,\mathrm{km/h} = \frac{1}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}; \quad 1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}.$$

Da sich die Bahnkurve zur Darstellung des zeitlichen Bewegungsablaufes nicht eignet, verwendet man ein anderes Diagramm. Man trägt die zurückgelegte Strecke s als Ordinate und die verflossene Zeit t als Abszisse auf und erhält so das **Weg-Zeit-Diagramm.** Auf Bild 15a ist es eine ansteigende Gerade. Sie bringt zum Ausdruck, daß in gleichen Zeitabschnitten Δt stets gleich große Wegstrecken Δs zurückgelegt werden. Verläuft die Bahn außerdem noch geradlinig (was in diesem Schaubild nicht zum Ausdruck kommt!), so handelt es sich um eine **gleichförmig geradlinige Bewegung.** Vollkommen gleichförmige Bewegungen kommen in der Natur jedoch nur selten vor. Meistens wird die Geschwindigkeit von einem Bahnpunkt zum nächsten infolge kleinster Unebenheiten oder wechselnder Bewegungswiderstände mehr oder weniger schwanken, so daß sich das Diagramm (15b) einer **ungleichförmigen Bewegung** ergibt.

Man sieht hier sofort, daß der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die verschiedensten Werte annimmt. Aber auch innerhalb des gewählten Zeitintervalls Δt ändert sich die Geschwindigkeit, so daß man nach Gleichung (3) nur die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt erhält (Bild 15c).

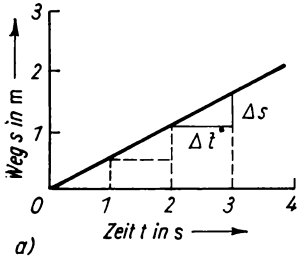


Bild 15a. Gleichförmige Bewegung

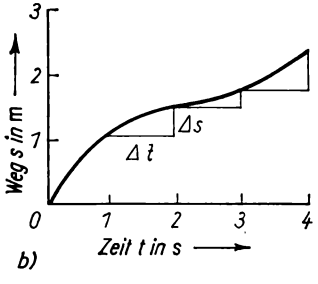


Bild 15b. Ungleichförmige Bewegung

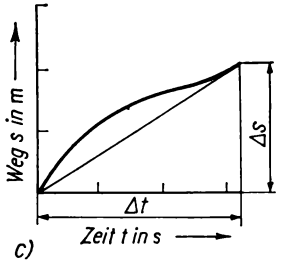


Bild 15c. Mittlere Geschwindigkeit

Die Differenzquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bringen somit nicht den wirklichen Verlauf der Geschwindigkeit zum Ausdruck. Um die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick darzustellen, kann man vielmehr nur einen Zeitpunkt herausgreifen, womit das Zeitintervall Δt äußerst klein wird. Gleichzeitig wird auch die dazugehörige Wegstrecke Δs verschwindend klein, und die durch den Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ beschriebene Kurvensekante wird zur *Tangente.* Dies entspricht dem Übergang vom Differenzenquotienten zum *Differentialquotienten:*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

Mit den zur Verfügung stehenden Meßgeräten kann man allerdings immer nur Differenzen und niemals Differentiale feststellen, d. h. Größen, die einen bestimmten endlichen Wert haben. Dennoch ist es erst mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung möglich, alle Feinheiten der Naturvorgänge mathematisch exakt zu erfassen und darzustellen.

2.1.2. Beschleunigung

Der veränderliche Charakter der Geschwindigkeit ist aus den Bildern 15a···c nur am unterschiedlichen Anstieg der Kurventangente zu erkennen. Der Betrag der Geschwindigkeit selbst läßt sich aus dem s,t-Diagramm nicht ohne weiteres ablesen. Einen besseren Überblick gewährt daher ein Diagramm, das die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit abbildet. Bild 16a zeigt die einfachste Form eines solchen **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms:** Die Geschwindigkeit v hat einen stets gleichbleibenden Betrag. Es liegt eine gleichförmige Bewegung vor.

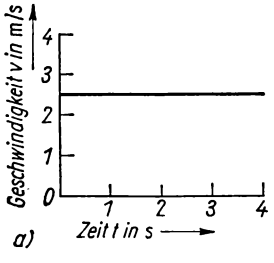


Bild 16a. Gleichförmige Bewegung

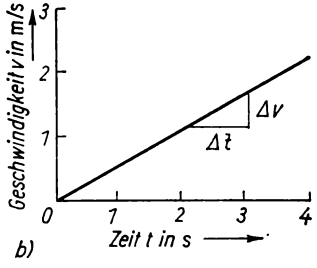


Bild 16b. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

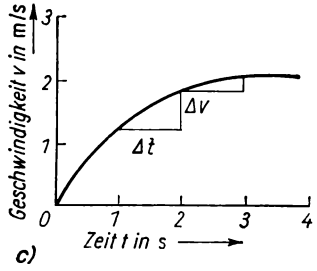


Bild 16c. Abnehmende Beschleunigung

Dagegen läßt Bild 16b erkennen, daß die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit gleichmäßig anwächst. Mehr oder weniger angenähert ist dies bei allen Anfahrvorgängen der Fall. Beim Anfahren eines Zuges oder beim Start einer Rakete wird die Endgeschwindigkeit erst nach einer bestimmten Zeit erreicht. Beim Bremsen hingegen nimmt die Geschwindigkeit immer mehr ab. Um derartige Geschwindigkeitsänderungen rechnerisch zu erfassen, benutzt man den Begriff der **Beschleunigung** a.
Die Beschleunigung erfaßt nicht die Geschwindigkeit v selbst, sondern nur ihre Änderung, d. h. ihren Zuwachs oder ihre Abnahme Δv im zugehörigen Zeitraum Δt. Die **Beschleunigung** ist daher der **Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung Δv und der dazugehörigen Zeit Δt.**

(5) $$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$ **Beschleunigung a**

Um die Einheit der Beschleunigung zu finden, bildet man hieraus die Einheitengleichung

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m/s^2}$$

Einheit der Beschleunigung: 1 m/s²

Wenn die Geschwindigkeit *abnimmt*, hat die Größe a die Bedeutung einer **Verzögerung.** Ihr Zahlenwert hat dann *negatives* Vorzeichen:

Beschleunigung: $a > 0$
Verzögerung: $a < 0$

Ungefähre Beschleunigungs- und Verzögerungswerte in m/s²

Anfahren von Güterzügen	0,08	Bremsen von Güterzügen	—0,15
desgl. von Personenzügen	0,12	desgl. von Personenzügen	—0,30
desgl. der Berliner S-Bahn	0,55	Auto mit 4-Rad-Bremse	—5,15

Die beim Anfahren und Bremsen von Fahrzeugen auftretenden Beschleunigungen bzw. Verzögerungen sind jedoch nur annähernd konstant. Man erkennt dies schon daran, daß der Übergang in die angestrebte Endgeschwindigkeit allmählich erfolgt und die Beschleunigung dabei immer geringer wird. Die Geschwindigkeitskurve im v,t-Diagramm ist daher irgendwie gekrümmt (Bild 16c). Um die in einem *bestimmten Augenblick* wirkende Beschleunigung zu ermitteln, muß man sich daher das Zeitintervall Δt unendlich klein denken und die Beschleunigung durch den *Differentialquotienten*

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

ausdrücken.

Die Beschleunigung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit.

2.2. Bewegung auf gerader Bahn

2.2.1. Gleichförmige Bewegung

Bei dieser einfachsten aller Bewegungsformen ergibt sich die zurückgelegte Wegstrecke Δs unmittelbar aus der Definition (3), nämlich als Produkt aus der Geschwindigkeit v und der verstrichenen Zeit Δt:

$$\Delta s = v\,\Delta t.$$

Die zurückgelegte Strecke geht in anschaulicher Weise aus dem v,t-Diagramm hervor. Man sieht nämlich, daß das Produkt $v\Delta t$ gleich dem Inhalt des auf Bild 17 schraffierten Flächenstreifens ist. Für einen beliebigen, von $t = 0$ an gerechneten Zeitraum entsteht dann die gesamte Wegstrecke s durch Summierung aller in diesem Zeit-

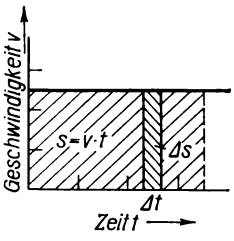


Bild 17. Der Weg als Flächeninhalt im v,t-Diagramm

intervall liegenden Flächenstreifen. Die Summe ist der Inhalt des ganzen Rechteckes.

Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung:

(7) $$\boxed{s = vt}$$

Mit Hilfe der genaueren Definition (4) der Geschwindigkeit erhält man den zurückgelegten Weg durch Integration der Gleichung

$$\int \mathrm{d}s = \int v \, \mathrm{d}t .$$

Diese ist leicht durchführbar, weil ja v eine konstante Größe ist. Man erhält zunächst das unbestimmte Integral

$$s = vt + C .$$

Der Wert der Integrationskonstanten C ergibt sich durch Festlegung einer *Anfangsbedingung*. Allgemein ist es üblich, den Anfang der Meßstrecke mit $s_0 = 0$ zu bezeichnen und auch die Zeitzählung (z. B. bei Verwendung einer Stoppuhr) mit $t_0 = 0$ zu beginnen. Setzt man also $t = t_0 = 0$ und $s = s_0 = 0$ in die letzte Gleichung ein, so erhält man $C = 0$. Hieraus folgt dann in Übereinstimmung mit (7)

$$s = vt.$$

Beispiele: 1. Legt ein Zug 400 m in 25 s zurück, so ist seine mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{400\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{s}} = 16\,\mathrm{m/s} .$$

2. Welche Strecke legt ein Kraftwagen mit der Geschwindigkeit 80 km/h in 15 s zurück?

$$s = vt = \frac{80\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{s}}{3{,}6\,\mathrm{s}} = 333{,}3\,\mathrm{m} .$$

2.2.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Das charakteristische Merkmal einer beschleunigten Bewegung ist die ständige Änderung der Geschwindigkeit. Dabei ist es nicht notwendig, daß sie bei Beginn der Zeitmessung, wie etwa auf Bild 16b angegeben ist, gleich Null sei. Es ist durchaus möglich, daß die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ schon einen gewissen Anfangsbetrag v_0 hat, wonach sich das auf Bild 18 angegebene Diagramm ergibt.
Die Beschleunigung ist dann definitionsgemäß gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ und der verstrichenen Zeit t

(8) $$a = \frac{v - v_0}{t} .$$

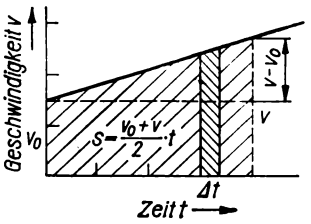


Bild 18. Zur Berechnung des Weges bei beschleunigter Bewegung

Man kann das auch anders ausdrücken und sagen, daß die Endgeschwindigkeit v gleich der Summe aus dem Anfangsbetrag v_0 und dem Geschwindigkeitszuwachs at ist.

(9) $\boxed{v=v_0+at}$ **Endgeschwindigkeit v.**

Der dabei zurückgelegte Weg läßt sich nach dem gleichen Verfahren wie bei der gleichförmigen Bewegung ermitteln. Auch hier ergibt die Summierung aller einzelnen Flächenelemente $v\Delta t$ den Gesamtweg s als entsprechenden Flächeninhalt im v,t-Diagramm. Die Fläche hat jetzt die Gestalt eines Trapezes und kann in ein Rechteck $s_1 = v_0 t$ und ein darüberstehendes Dreieck zerlegt werden. Der Inhalt des Dreiecks aber ist gleich dem halben Produkt aus der Zeit t und dem Geschwindigkeitszuwachs $v - v_0$, d. h. $s_2 = \frac{(v-v_0)\,t}{2}$, und wegen $(v - v_0) = at$ ist dann $s_2 = \frac{at^2}{2}$. So erhält man

(10) $\boxed{s=v_0 t+\frac{at^2}{2}}$ **Weg-Zeit-Gesetz der beschleunigten Bewegung.**

Auf rein rechnerische Weise erhält man das Ergebnis durch Integration von Gleichung (6):

$$\int \mathrm{d}v = \int a\,\mathrm{d}t,$$

wobei die Beschleunigung a eine konstante Größe ist. Man erhält

$$v = at + C.$$

Die Integrationskonstante C erhält man aus der Anfangsbedingung, daß der bewegte Körper zur Zeit $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 haben möge. Dann folgt aus der letzten Gleichung $C = v_0$ und damit wie oben, Gleichung (9),

$$v = at + v_0.$$

Um nun den während der Zeit t zurückgelegten Weg zu errechnen, ersetzt man nach Gleichung (4) die Geschwindigkeit v durch den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ und erhält aus

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at + v_0 \quad \text{das unbestimmte Integral}$$

$$\int \mathrm{d}s = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t,$$

dessen Lösung die Gleichung

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C'$$

ist. Wenn man wieder annimmt, daß zur Zeit $t = 0$ die zurückgelegte Strecke $s_0 = 0$ ist, hat auch die Integrationskonstante C' den Wert Null, und es folgt wie vorhin

$$s = v_0 t + \frac{a t^2}{2}.$$

Auf noch kürzere Art gewinnt man den zurückgelegten Weg, wenn man die unter der Geschwindigkeitskurve liegende Fläche mit der bekannten Trapezformel ausdrückt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t. \tag{11}$$

Man benutzt diese Gleichung mit Vorteil, wenn die Beschleunigung a nicht gegeben ist. Wenn dagegen die Zeitdauer t des Vorgangs nicht bekannt ist, läßt sich t durch den aus (8) entstehenden Ausdruck $t = \frac{v - v_0}{a}$ ersetzen, und es folgt dann durch Umformung von $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}. \tag{12}$$

Aus diesen allgemeingültigen Gleichungen lassen sich leicht weitere Sonderfälle ableiten.

a) Start aus der Ruhelage

Startet ein Körper aus der Ruhelage, so ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Seine Endgeschwindigkeit ist dann nach Gleichung (9)

$$v = at$$

oder auch nach Gleichung (12)

$$v = \sqrt{2as}.$$

Der zurückgelegte Weg ist ferner nach Gleichung (11) wegen $v_0 = 0$

$$s = \frac{v}{2} t$$

oder auch nach Gleichung (10)

$$s = \frac{a t^2}{2}.$$

Bild 19 zeigt einen kleinen Wagen, der ein sanftes Gefälle hinabrollt. Ein schwingendes Pendel gibt durch einen Hebel den Wagen frei. Außerdem zeichnet es mit

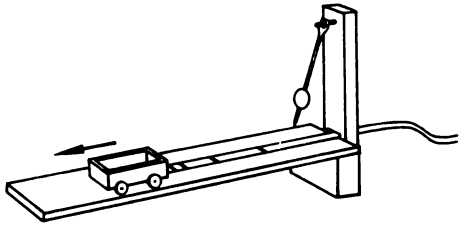


Bild 19. Aufzeichnung einer beschleunigten Bewegung mit einem schwingenden Pendel

einem Pinsel in gleichen Zeitabständen Strichmarken auf ein nachgezogenes Papierband. Man sieht dann auf dem Band, daß die aufeinanderfolgenden Strichabstände sich wie die Quadratzahlen 1:4:9:16 usw. verhalten. Dies beweist, daß die Beschleunigung a konstant ist und der Vorgang nach der zuletzt genannten Gleichung verläuft.

b) Verzögerte Bewegung

Wenn die Geschwindigkeit eines Körpers im Laufe der Zeit abnimmt, wird die Geschwindigkeitsänderung $(v - v_0)$ negativ. Der negative Wert der Beschleunigung a bringt dann, wie schon erwähnt, eine verzögerte Bewegung zum Ausdruck. Das v,t-Diagramm zeigt eine entsprechend fallende Gerade (Bild 20). Alle Gleichungen aber bleiben unverändert!

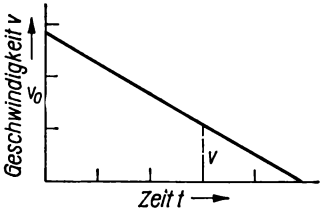


Bild 20. Verzögerte Bewegung

Bei dem häufig vorkommenden Fall, daß ein Körper von gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 bis zum Stillstand abgebremst wird, ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$ zu setzen. Aus Gleichung (9) erhält man damit z. B. die Anfangsgeschwindigkeit bei gegebener Bremszeit t:

$$v_0 = -at.$$

Da hier die Größe a im Sinne einer Verzögerung negatives Vorzeichen hat, verschwindet das in der Gleichung stehende negative Vorzeichen beim Ausrechnen wieder.

In entsprechender Weise ergibt sich aus Gleichung (12) der Bremsweg

$$s = -\frac{v_0^2}{2a}$$

oder bei gegebenem Bremsweg die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{-2as}.$$

Beispiele: 1. Welche Zeit braucht ein Personenzug, um nach der Abfahrt die Geschwindigkeit $v = 72$ km/h zu erreichen? ($a = 0{,}12$ m/s^2) – Nach Gleichung (5) ist

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{72\,\text{m} \cdot \text{s}^2}{3{,}6\,\text{s} \cdot 0{,}12\,\text{m}} = 167\,\text{s}.$$

2. Ein Fahrzeug verringert seine Geschwindigkeit auf den Endwert 27 km/h. Wie groß ist seine Anfangsgeschwindigkeit, wenn die Bremsstrecke 80 m und die Verzögerung $-2{,}5$ m/s^2 beträgt? – Aus Gleichung (12) ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2as} = \sqrt{\frac{27^2\,\text{m}^2}{3{,}6^2\,\text{s}^2} + \frac{2 \cdot 2{,}5\,\text{m} \cdot 80\,\text{m}}{\text{s}^2}} = 21{,}5\,\text{m/s}.$$

3. Ein Wagen durchfährt mit gleichmäßiger Beschleunigung innerhalb von 20 s die Strecke 300 m und verdoppelt dabei seine Geschwindigkeit. Wie groß sind Anfangs- und Endgeschwindigkeit?

In die Gleichung (12) $v^2 = v_0^2 + 2as$ setzt man nach Gleichung (8) die Beschleunigung $a = \frac{v - v_0}{t}$ ein, womit

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2(v - v_0)s}{t}$$

wird. Mit $v = 2v_0$ erhält man hieraus

$$v_0 = \frac{2s}{3t} = \frac{2 \cdot 300\,\text{m}}{3 \cdot 20\,\text{s}} = 10\,\text{m/s}\,; \quad v = 20\,\text{m/s}\,.$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch die einfache Überlegung, daß die gegebene Strecke s mit der mittleren Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{v_0 + 2v_0}{2} = \frac{3v_0}{2}$$

durchfahren wird. Dann folgt aus Gleichung (7)

$$s = v_m t = \frac{3v_0 t}{2} \quad \text{ebenfalls}$$

$$v_0 = \frac{2s}{3t} = 10\,\text{m/s}\,.$$

2.2.3. Freier Fall

Fällt ein Körper frei herunter, so vollzieht sich ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (Entdeckung des italienischen Physikers GALILEI, Bild 21). Die Beschleunigung ist dabei von der Masse des fallenden Körpers unabhängig. Wenn leichte Körper langsamer fallen als schwere, so liegt das nur am Luftwiderstand. Experimentell kann man das angenähert wie folgt bestätigen. Läßt man zwei Körper von gleich großer Masse zu gleicher Zeit fallen, so bleibt ihre Geschwindigkeit unverändert, wenn man sie miteinander verbindet. Der nunmehr doppelt so schwere Körper fällt dann genauso schnell wie beide einzeln.
Man kann auch eine lange Glasröhre luftleer pumpen (Fallröhre) und darin eine Bleikugel zugleich mit einer Flaumfeder herabfallen lassen. Beide kommen gleichzeitig am Boden an (Bild 22).
Ursache des Fallvorganges ist die Anziehungskraft der Erde. Diese bewirkt, daß alle in der Nähe der Erde befindlichen Körper ein Gewicht besitzen, d. h. mehr oder weniger schwer sind. Daher nennt man die dadurch entstehende Beschleunigung

$$\boxed{g = 9{,}81\ \text{m/s}^2} \quad \textbf{Schwerebeschleunigung } g$$

Für einfachere technische Berechnungen genügt es meistens, mit diesem runden Zahlenwert von 9,81 m/s² zu arbeiten. Man muß sich diese Zahl und ihre Bedeutung daher gut merken.

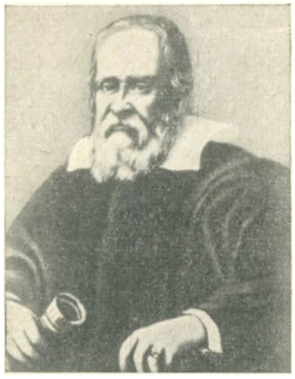


Bild 21. Galileo Galilei (1564 bis 1642)

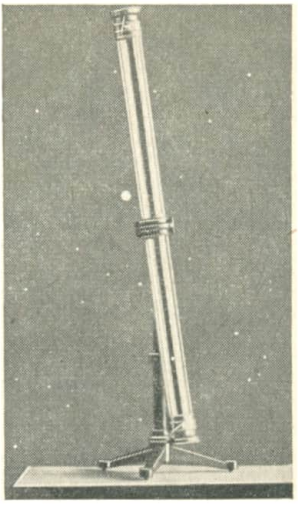


Bild 22. Fallröhre



Bild 23. Aufzeichnung der Schreibspitze einer schwingenden Stimmgabel auf einer berußten, frei fallenden Glasplatte

Besser als mit Fallversuchen mißt man den genauen Wert von g mit Hilfe von Pendeln[1]). Als Richtwert für europäische Schwereuntersuchungen gilt der im Potsdamer Geodätischen Institut ermittelte Wert. Weil die Erde keine homogene Kugel ist, hat die Schwerebeschleunigung an jedem Ort der Erdoberfläche einen etwas abweichenden Wert:

Potsdam	9,81274 m/s²	Normbeschleunigung zur	
Äquator	9,78 m/s²	Definition des Kiloponds	9,80665 m/s²
Pol	9,83 m/s²	Wert bei 45° Breite und	
		0 m Höhe nach letzter	
		Berechnung	9,80629 m/s²

Da die Schwerebeschleunigung innerhalb nicht allzu großer Höhenunterschiede konstant ist, gelten für den freien Fall die bereits abgeleiteten Gesetze (8) bis (12) der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$):

(13) $\boxed{h = \frac{g}{2} t^2}$ **Fallhöhe h**

[1]) Siehe 10.5.

(14) $\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ **Fallzeit** t

(15) $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$ **Fallgeschwindigkeit** v

Beispiele: 1. In der 1. Sekunde fällt ein Körper demnach um $h = \frac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 2} = 4{,}9$ m. Am Ende dieser Strecke beträgt seine Geschwindigkeit

$$v = gt = \frac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81\,\mathrm{m/s}\,.$$

2. Mit welcher Endgeschwindigkeit schlägt ein Gegenstand auf, der in einen 300 m tiefen Schacht hineinfällt? – Nach (15) ergibt sich

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 300\,\mathrm{m}} = 76{,}7\,\mathrm{m/s}\,.$$

Infolge des Luftwiderstandes kann der volle Betrag jedoch nicht erreicht werden.

2.2.4. Senkrechter Wurf

Wird ein Körper senkrecht *nach unten* geworfen, so liegt ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor, zu der die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 hinzutritt. Man kann daher alle für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung geltenden allgemeinen Gesetze ohne zusätzliche Überlegungen anwenden. Es ist lediglich zu beachten, daß man, wie beim freien Fall, die zurückgelegte Strecke vom Startpunkt aus, d. h. von oben nach unten zählt und damit auch die Beschleunigung g mit ihrem positiven Wert einsetzt. Beim Wurf *nach oben* ist dagegen der Startpunkt unten, so daß die Größe g als Verzögerung mit ihrem negativen Zahlenwert anzusetzen ist.

(16) $\boxed{v = v_0 \pm gt}$ **Endgeschwindigkeit** v

(17) $\boxed{h = v_0 t \pm \frac{g}{2} t^2}$ **Wurfhöhe** h

(18) $\boxed{v = \sqrt{v_0^2 \pm 2gh}}$ **Endgeschwindigkeit** v bei gegebener Wurfhöhe

(Das Minuszeichen gilt jeweils beim Wurf *nach oben*.)

Beim senkrechten Wurf *nach oben* wird die Endgeschwindigkeit v mit zunehmender Steighöhe immer kleiner. Schließlich wird eine bestimmte Höhe h_{max} erreicht, wo der Körper umkehrt und wieder nach unten zu fallen beginnt. In diesem Augenblick ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$. Die letzte Gleichung lautet dann: $0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_{max}}$.

Quadriert man und löst nach v_0 auf, so ergibt sich diejenige Anfangsgeschwindigkeit, die notwendig ist, damit der Körper gerade die Höhe h_{max} erreicht:

$$v_0 = \sqrt{2gh_{max}}.$$

Um die maximale Höhe h_{max} zu erreichen, muß ein Körper mit derselben Geschwindigkeit abgeworfen werden, mit welcher er beim freien Fall aus dieser Höhe unten ankommt.

Zur Berechnung dieser maximalen Wurfhöhe muß man die letzte Formel nach h_{max} auflösen:

(19) $$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$ **maximale Wurfhöhe h_{max}**

Beispiel: Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 18$ m/s nach oben geschleuderter Ball die 15 m hohe Decke einer Sporthalle? — Nach (18) ist $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{(18^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 15)\ \mathrm{m^2/s^2}} = 5{,}45$ m/s.

2.3. Bewegung auf der Kreisbahn

2.3.1. Gleichförmige Bewegung auf der Kreisbahn

Alle Punkte eines rotierenden Körpers mit Ausnahme derjenigen, die auf der Drehachse liegen, bewegen sich auf Kreisbahnen. Dabei ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von einem Bahnpunkt zum anderen. Sehen wir von dieser Richtungsänderung vorläufig ab, so kann es auch hier wieder gleichförmige (z. B. die Riemenscheibe eines Elektromotors) und beschleunigte bzw. verzögerte (z. B. beim Anlaufen und Auslaufen rotierender Maschinenteile) Drehvorgänge geben.
Untersucht man die Drehbewegung genauer, so findet man, daß ein um das festliegende Drehzentrum laufender Punkt P je Zeiteinheit einen bestimmten Winkel durchläuft (Bild 24). Entsprechend der geradlinigen Bewegung definiert man dann als **Winkelgeschwindigkeit ω** den **Quotienten aus dem Drehwinkel $\Delta\varphi$** und dem **Zeitabschnitt Δt**, in dem dieser durchlaufen wird:

(20) $$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$ **Winkelgeschwindigkeit ω**

Besonders zu beachten ist, daß der Winkel φ hierbei nicht im Gradmaß, sondern im **Bogenmaß** eingesetzt werden muß. Unter dem Bogenmaß versteht man das Verhältnis der Länge s eines Kreisbogens zum zugehörigen Krümmungsradius r (Bild 25):

(21) $$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}}$$ **Winkel φ im Bogenmaß**

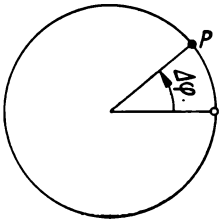


Bild 24. Im Zeitraum Δt durchläuft Punkt P den Winkel $\Delta\varphi$

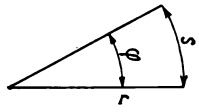


Bild 25. Zur Definition des Winkels φ im Bogenmaß

Beim Vollkreis ist z. B. $s = 2\pi r$ (Kreisumfang) und demzufolge $\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$, entsprechend dem vollen Winkel von 360°. Dem Winkel 180° ist die Bogenlänge des Halbkreises $s = \pi r$ zugeordnet, womit sich der Winkel $\varphi = \pi$ ergibt usw.

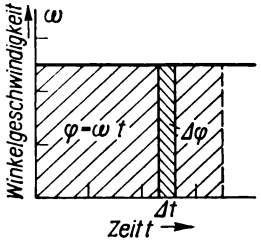
Gradmaß	Bogenmaß
360°	$2\pi = 6{,}28$
180°	$\pi = 3{,}14$
90°	$\pi/2 = 1{,}57$
57,3°	1
1°	0,01745
usw.	

Um Verwechslungen mit dem Gradmaß zu vermeiden, wird dieses oft mit der Bezeichnung **rad** (Radiant) und die Winkelgeschwindigkeit mit rad/s als Maßeinheit versehen. Bei entsprechenden Rechnungen darf die Bezeichnung **rad** jedoch nicht mitgeschrieben werden. Damit folgt aus (20) die Einheitengleichung

$$[\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Einheit der Winkelgeschwindigkeit: $1\ ^1/_{\mathrm{s}}$

Den Bewegungsvorgang kann man, wie dies auch bei der geradlinigen Bewegung durchgeführt wurde, mit Hilfe entsprechender Diagramme darstellen. Erfolgt die Bewegung des umlaufenden Punktes gleichförmig, dann werden in gleichen Zeitabschnitten auch jeweils gleich große Drehwinkel durchlaufen, und die Winkelgeschwindigkeit ω ist konstant. Das ω,t-Diagramm (Bild 26) ist daher eine Parallele zur Zeitachse. Der im Zeitraum Δt durchlaufene Winkel $\Delta\varphi$ ist ein Flächenstreifen vom Inhalt $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$. Der gesamte Drehwinkel φ, der vom Zeitpunkt $t = 0$ an zurückgelegt wird, ist die Summe aller auf den Zeitraum t entfallenden Flächenelemente, d. h. gleich dem Rechteck unter der Kurve. Damit ist



(22) $\boxed{\varphi = \omega t}$ **gesamter Drehwinkel φ**

Bild 26. ω,t-Diagramm bei gleichförmiger Bewegung auf Kreisbahn

Denkt man aber daran, daß die Drehbewegung durchaus nicht vollkommen gleichförmig abzulaufen braucht, sondern die Winkelgeschwindigkeit je nach den technischen Gegebenheiten schwanken, zu- oder abnehmen kann, so ist sie für einen bestimmten Augenblick mit Hilfe des Differentialquotienten auszudrücken:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{23}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist der Differentialquotient des Drehwinkels nach der Zeit.

Durch Integration dieser Gleichung erhält man

$$\int \mathrm{d}\varphi = \int \omega \mathrm{d}t$$

und hieraus wie vorhin

$$\varphi = \omega t,$$

wenn die Integrationskonstante so bestimmt wird (s. S. 32), daß für $t = 0$ auch der anfangs vorhandene Drehwinkel $\varphi_0 = 0$ ist.

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ hängt nun aufs engste zusammen mit der **Bahngeschwindigkeit** $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Nach (21) ist nämlich $\varphi = \frac{s}{r}$ oder auch $s = r\varphi$. Setzt man dies in die Gleichung ein, so erhält man

$$v = \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t}$$

und nach beiderseitiger Division durch den Radius r

$$\frac{v}{r} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Das Verhältnis $\frac{v}{r}$ muß daher die Winkelgeschwindigkeit ω sein. Das Produkt der Winkelgeschwindigkeit ω mit dem Bahnradius r ist demnach die Geschwindigkeit v des auf der Kreisbahn umlaufenden Punktes:

$$\boxed{v = r\omega} \quad \textbf{Bahn-(Umfangs-)geschwindigkeit } v \tag{24}$$

Zur Messung gleichförmiger Drehbewegungen verwendet man in der technischen Praxis **Drehzahlmesser,** mit denen man die in der Zeiteinheit stattfindende Anzahl z von Umdrehungen unmittelbar bestimmen kann:

$$\boxed{n = \frac{z}{t}} \quad \textbf{Drehzahl } n. \tag{25}$$

Die Dauer *einer* Umdrehung ist dann der reziproke Wert der Drehzahl:

$$\boxed{T = \frac{1}{n}} \quad \textbf{Dauer einer Umdrehung } T.$$

Die Drehzahl n sagt aus, daß ein betrachteter Punkt den Kreisumfang $2\pi r$ in der Zeiteinheit n-mal durchläuft. Die Bahngeschwindigkeit v als Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der Zeit ergibt sich daher mit Hilfe der Drehzahl n zu

$$v = 2\pi r n. \tag{26}$$

Diese Beziehung ist u. a. von Bedeutung beim Antrieb von Maschinen, deren Drehzahl nach Wunsch geändert werden soll. Die Bahngeschwindigkeit v ist dabei durch den Treibriemen vorgegeben. Das Produkt rn muß dann konstant bleiben. Ein vergleichsweise kleiner Radius des angetriebenen Rades liefert deshalb eine entsprechend große Drehzahl und umgekehrt.
Dividiert man schließlich noch die letzte Gleichung (26) beiderseits durch den Radius r, so folgt die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Drehzahl n:

$$\omega = 2\pi n. \tag{27}$$

Beispiele: 1. Die Schnittgeschwindigkeit beim Drehen eines Werkstückes ist 50 m/min. Der Durchmesser beträgt 80 mm. Die Drehzahl n ist zu berechnen. –

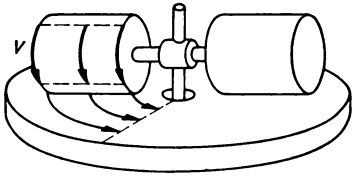


Bild 27. Umfangsgeschwindigkeit v und am Boden zurückgelegte Wege beim Kollergang

Durch Auflösung von (26) nach n entsteht

$$n = \frac{v}{d\pi} = \frac{50\,\mathrm{m}}{0{,}08\,\mathrm{m} \cdot 3{,}14 \cdot \mathrm{min}} = 199\,{}^{1}/\mathrm{min}.$$

2. Bei einem Kollergang laufen zwei schwere Walzen im Kreise um eine senkrechte Achse und zerdrücken durch ihr Gewicht das Mahlgut. Bei dieser erzwungenen Bewegung ist die Umfangsgeschwindigkeit v des der Antriebswelle zugekehrten Teils der Walzen größer und die des abgekehrten Teils kleiner als die Laufgeschwindigkeit v' am Boden (Bild 27). Daher wird das Mahlgut zugleich zerrieben.

2.3.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Kreisbahn

Beobachtet man das Schwungrad eines anlaufenden Motors, so sieht man, wie sich seine Drehzahl immer mehr steigert. Es führt eine **beschleunigte Drehbewegung** aus (Bild 28). Wenn er dagegen nach dem Abschalten seinen Lauf wieder verlangsamt, liegt eine **verzögerte Drehbewegung** vor. Man erfaßt diesen Vorgang mittels der **Winkelbeschleunigung** α als Quotienten aus der Zu- oder Abnahme $\Delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit und der verstrichenen Zeit Δt:

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \quad \textbf{Winkelbeschleunigung } \alpha \tag{28}$$

Die entsprechende Einheitengleichung lautet

$$[\alpha] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{{}^{1}/\mathrm{s}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$

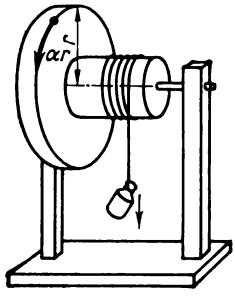


Bild 28. Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung, hervorgerufen durch eine fallende Masse

Einheit der Winkelbeschleunigung: $1\ ^1/_{s^2}$

Die gleichen Überlegungen, die bei geradliniger Bewegung dazu führten, anstelle des Differenzenquotienten den Differentialquotienten zu bevorzugen, sind auch hier anzuwenden. Man definiert dann

(29) $$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$ **Winkelbeschleunigung α**

Die Winkelbeschleunigung ist gleich dem Differentialquotienten der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit.

Die weiteren Gesetze der beschleunigten Drehbewegung folgen in gleicher Weise, wie dies für die geradlinige Bewegung (s. 2.2.2.) durchgeführt wurde, d. h. durch Integration der letzten Gleichung. Sie führt zu Ergebnissen, die mit denen der geradlinigen Bewegung in formaler Hinsicht völlig übereinstimmen.
Ein anderer Weg, um diese Gesetze zu erhalten, besteht darin, von der einfachen Beziehung $v = r\omega$ auszugehen und sie in den Ausdruck für die Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ einzusetzen:

$$a = \frac{r \Delta \omega}{\Delta t}.$$

Dividiert man beide Seiten durch den Bahnradius r, so folgt

$$\frac{a}{r} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt wiederum die Winkelbeschleunigung α dar. Ihr Produkt mit dem Bahnradius r ist demnach die Beschleunigung des umlaufenden Punktes:

(30) $$\boxed{a = r\alpha}$$ **Bahnbeschleunigung a**

Es stellt sich also heraus, daß die drei Grundgrößen der geradlinigen und der Kreisbewegung durch leicht einprägsame Beziehungen zusammenhängen:

$$\varphi = \frac{s}{r}; \qquad \omega = \frac{v}{r}; \qquad \alpha = \frac{a}{r}.$$

Alle Größen der Kreisbewegung entstehen aus den entsprechenden der geradlinigen Bewegung, indem man letztere durch den Bahnradius dividiert.

Um zu den Gesetzen der Drehbewegung zu gelangen, hat man daher nichts weiter zu tun, als die für den betreffenden Fall analoge, für die geradlinige Bewegung gültige Gleichung, beiderseits durch den Bahnradius r zu dividieren.

Die einander entsprechenden Bewegungsgesetze sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Vergleich zwischen geradliniger und Drehbewegung

geradlinige Bewegung		Drehbewegung	
Größe	Gleichung	Größe	Gleichung
Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Weg (gleichförmig)	$s = vt$	Drehwinkel (gleichförmig)	$\varphi = \omega t$
Weg (beschleunigt)	$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t$	Drehwinkel (beschleunigt)	$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t$
Endgeschwindigkeit	$v = at + v_0$	End-Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \alpha t + \omega_0$
Endgeschwindigkeit	$v = \sqrt{2as + v_0^2}$	End-Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi + \omega_0^2}$

Beispiele: 1. Welche Winkelbeschleunigung hat ein Rad, das vom Stillstand aus innerhalb von 3 min die Drehzahl $n = 2500\ ^1/\text{min}$ erreicht? –

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi \cdot 2500}{60\ \text{s}} = 261{,}8\ ^1/\text{s}\ ; \quad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{261{,}8}{\text{s} \cdot 180\ \text{s}} = 1{,}45\ ^1/\text{s}^2\ .$$

2. Ein Schwungrad von 0,5 m Durchmesser und der anfänglichen Drehzahl 500 ^{1}/min läuft in 15 s bis zum Stillstand aus. Welches ist die Verzögerung am Radumfang und wieviel Umdrehungen finden noch statt? –

Aus der Gleichung (30) $a = \alpha r$ wird mit $\alpha = -\frac{\omega_0}{t}$ und $\omega_0 = 2\pi n$

$$a = -\frac{2\pi r n}{t} \quad \text{bzw.}$$

$$a = -\frac{2\pi \cdot 0{,}25\ \text{m} \cdot 500}{60\ \text{s} \cdot 15\ \text{s}} = -0{,}87\ \text{m/s}^2\ ;$$

ferner ist nach (11)

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \quad \text{bzw. mit } \omega = 0$$

$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{2\pi n t}{2} = \pi n t\ ;$$

da eine Umdrehung dem Winkel 2π entspricht, finden noch

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\pi n t}{2\pi} = \frac{nt}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$z = \frac{500 \cdot 15\ \text{s}}{60\ \text{s} \cdot 2} = 62{,}5$$

Umdrehungen statt. Dies entspricht dem Produkt aus der mittleren Drehzahl während des Auslaufvorganges und der Zeit bis zum Stillstand.

2.4. Geschwindigkeit und Beschleunigung als vektorielle Größen

2.4.1. Relativität der Bewegungen und das Unabhängigkeitsprinzip

So einfach die Messung einer Geschwindigkeit zu sein scheint, gibt es doch Fälle, bei denen eine Geschwindigkeitsmessung grundsätzlich nicht möglich ist. Nehmen wir an, wir säßen in einem allseitig geschlossenen Kasten, der sich völlig gleichförmig geradeaus bewegt (Bild 29). Es wäre uns ohne irgendeine Verbindung mit der Außenwelt in der Tat unmöglich, seine Geschwindigkeit zu messen oder überhaupt nur festzustellen.

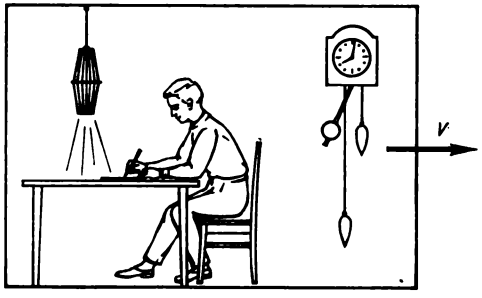


Bild 29. Die gleichförmig geradlinige Bewegung ist in einem allseitig geschlossenen Kasten nicht feststellbar

Wir nehmen im täglichen Leben die Erde als ruhend an, obwohl wir wissen, daß sie sich um ihre Achse dreht und zugleich mit einer Geschwindigkeit von etwa 30 km/s um die Sonne läuft. Die Sonne bewegt sich wiederum mitsamt der Erde um das Zentrum des Milchstraßensystems, wobei eine Geschwindigkeit von 220 km/s geschätzt wird. Das heißt: Es ist überhaupt unmöglich, die „wahre Geschwindigkeit" eines Körpers anzugeben.

Alle gemessenen Geschwindigkeiten gelten **nur in bezug auf einen als ruhend angenommenen Beobachter.** Man kann nur **Relativ-** und niemals Absolutbewegungen bestimmen. Den Standpunkt, von dem aus jede Bewegung beurteilt und gemessen wird, nennt man das **Bezugssystem.** Bei der Untersuchung irdischer physikalischer Vorgänge wählt man als Bezugssystem im allgemeinen die *ruhend gedachte Erde.*

Es gilt demnach das **Relativitätsprinzip** der gleichförmig geradlinigen Bewegung:

(31) **Eine gleichförmig geradlinige Bewegung ist für den bewegten Körper selbst physikalisch wirkungslos und ohne äußeren Bezugspunkt nicht feststellbar. Der Körper kann ebensogut als ruhend angenommen werden.**

Ein derartig gleichförmig bewegter Körper bildet für den mitbewegten Beobachter ein sogenanntes „gleichförmig bewegtes Bezugssystem **(Interialsystem)**". Die Sache wird sofort anders, wenn der Körper gegen ein Hindernis stößt. Dann ist seine Geschwindigkeit nicht mehr gleichförmig, und es treten neue Erscheinungen auf. Man spricht hier allgemein von **„beschleunigten Bezugssystemen".** So sind bewegte Fahrzeuge wegen ihrer schwankenden Geschwindigkeit genaugenommen immer beschleunigte Bezugssysteme.

In der technischen Praxis vorkommende Relativbewegungen bestehen oft darin, daß sich zwei Körper mit den von der ruhenden Erde aus gemessenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf parallelen Bahnen bewegen. Nimmt man den ersten Körper als Bezugssystem an und mißt von hier aus die Geschwindigkeit des zweiten, so ergibt sich als **Relativgeschwindigkeit** die Differenz

$$v_{rel} = v_2 - v_1.$$

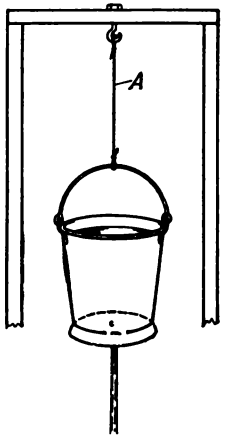


Bild 30. Wird der Faden bei A durchgebrannt, so fällt der Eimer herunter, und das Wasser hört auf zu fließen

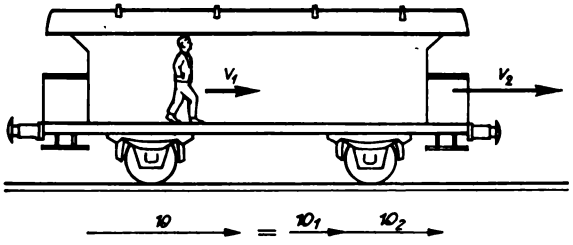


Bild 31. Ungestörte Überlagerung zweier Geschwindigkeiten

Beispiele: 1. Fällt ein mit Wasser gefüllter Eimer frei herunter und hat sein Boden ein Loch, so fließt während des Fallens nichts aus. Eimer und Wasser haben stets die gleiche Geschwindigkeit und sind relativ zueinander in Ruhe (Bild 30).

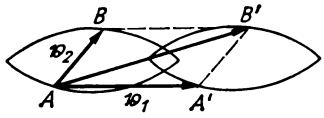
2. Ein Kraftwagen überholt mit der Geschwindigkeit $v_2 = 72$ km/h einen zweiten, dessen Geschwindigkeit $v_1 = 54$ km/h beträgt. Welche absolute Länge hat die Überholstrecke, wenn sich das erste Fahrzeug gegenüber dem zweiten um 120 m verschiebt? –
Der Überholer legt die Strecke 120 m mit der Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = v_2 - v_1 = 5$ m/s zurück und benötigt dazu die Zeit $t = \frac{s_{rel}}{v_{rel}} = \frac{120\,\text{m}}{5\,\text{m/s}} = 24\,\text{s}$; in dieser Zeit wird die Strecke $s = v_2 t = 20\,\text{m/s} \cdot 24\,\text{s} = 480\,\text{m}$ durchfahren.

Wir haben somit erkannt, daß eine geradlinig-gleichförmige Bewegung auf einem Körper keinerlei physikalische Wirkung hervorbringt. Mithin spielen sich alle Vorgänge auf und in einem solchen Körper ab, als ob er ruhe, d. h. vollkommen ungestört ist. In einem fahrenden Zug kann man ruhig auf und ab gehen, die Eigenbewegung des Zuges hat keinen Einfluß darauf. Ein außerhalb des Zuges ruhender Beobachter sieht jedoch beide Vorgänge zugleich. Ihm erscheint die Geschwindigkeit des Fahrgastes als Summe: Zugbewegung plus Gehbewegung innerhalb des fahrenden Wagens (Bild 31). Er sieht sie als Differenz, wenn die Bewegungen entgegengerichtet sind. Man nennt dies das **Prinzip der ungestörten Superposition** (Überlagerung) oder auch das

(32) **Unabhängigkeitsprinzip: Zwei gleichzeitig stattfindende Bewegungen eines Körpers sind unabhängig voneinander. Sie setzen sich so zusammen, als ob sie zeitlich nacheinander stattfinden würden.**

Dieser Satz gilt aber auch für Bewegungen, die nicht längs derselben Geraden erfolgen.
Auf einem gleichförmig geradeaus fahrenden Schiff geht beispielsweise ein Mann quer über das Deck auf die andere Seite. Da für ihn die Schiffsbewegung nicht spürbar ist, geht seine Querbewegung ungestört vor sich. Ein außerhalb des Schiffes ruhender Beobachter stellt dagegen fest, daß die wahre Bewegung längs einer *schrägen Linie*

Bild 32. Parallelogramm der Bewegungen



erfolgt (Bild 32). Der tatsächlich zurückgelegte Wert ergibt sich geometrisch als die Diagonale des aus den beiden Teilbewegungen gebildeten Parallelogramms:

(33) **Die Gesamtbewegung ist gleich der Diagonalen des aus den beiden Teilbewegungen gebildeten Parallelogramms.**

2.4.2. Geschwindigkeit als Vektorgröße

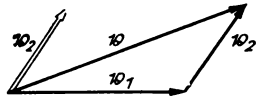
Die soeben gewonnene Erkenntnis zwingt dazu, die Geschwindigkeit als gerichtete Größe, d. h. als **Vektorgröße** zu behandeln. Um beide Eigenschaften des Geschwindigkeitsvektors, nämlich seinen *Betrag* und seine *Richtung*, darzustellen, zeichnet man ihn als einen *Pfeil*, dessen Richtung dorthin weist, wohin sich der Körper bewegt und dessen Länge nach einem zweckmäßig gewählten Maßstab den Betrag der Geschwindigkeit angibt.
Bei schriftlichen Rechnungen kennzeichnet man Vektoren durch *Frakturbuchstaben* wie $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{F}$ usw. Vielfach verwendet man auch gewöhnliche Buchstaben mit einem darübergesetzten Pfeil, z. B. $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$ usw. Fehlt diese besondere Kennzeichnung, so bedeuten *gewöhnliche Buchstaben* immer nur *Beträge*!
Aus dem Unabhängigkeitsprinzip folgt nun auch sofort, wie Vektoren zu addieren sind. Hierbei bezeichnet man oft die beiden zu addierenden vektoriellen Größen als **Komponenten** und deren Summe als **Resultierende.**

(34) **Parallelogrammsatz: Die Summe zweier Vektoren ist gleich der Diagonalen des aus den beiden Komponenten gebildeten Parallelogramms.**

Beim Betrachten von Bild 32 findet man, daß es an sich gar nicht nötig ist, das vollständige Parallelogramm zu zeichnen. Um die Resultierende zu erhalten, genügt es durchaus, wenn man nach Zeichnen von $\mathfrak{v}_1$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ unter Parallelverschiebung an den Endpunkt von $\mathfrak{v}_1$ ansetzt. Der nunmehr erhaltene Endpunkt von $\mathfrak{v}_2$ ist auch der Endpunkt der Resultierenden $\mathfrak{v}$. Anstatt des Parallelogramms genügt also ein Dreieck (Bild 33).
Diese Arbeitsregel gilt nicht nur für Geschwindigkeiten, sondern auch für alle anderen in der Physik vorkommenden vektoriellen Größen. Der Parallelogrammsatz nimmt dann die Form an:

(35) **Vektoren werden addiert, indem man sie parallel zu sich selbst verschoben aneinandersetzt. Die Summe ist der Vektor, der vom Anfang des ersten bis zum Ende des letzten Vektors zeigt.**

Bild 33. Addition von Vektoren



Um dieses Verfahren gegenüber der einfachen Addition von Zahlenwerten zu unterscheiden, spricht man auch häufig von **geometrischer Addition.** Schriftlich bringt man das in der Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

zum Ausdruck. Dagegen bedeutet die in gewöhnlichen Buchstaben geschriebene Gleichung

$$v = v_1 + v_2$$

nur die einfache algebraische Addition von Beträgen. Sie ist nur in dem Sonderfall richtig, wenn die beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ parallel zueinander gerichtet sind.

Die umgekehrte Aufgabe besteht darin, einen gegebenen Vektor in zwei Komponenten zu zerlegen. Das ist aber nur dann eindeutig möglich, wenn deren beide Richtungen vorher bekannt sind. Dann zieht man durch den Endpunkt des gegebenen Vektors die beiden Parallelen zu den gegebenen Richtungen. Die beiden anliegenden Seiten des Parallelogramms sind die gesuchten Komponenten. Hierbei kommt es häufig vor, daß die beiden Komponenten einen rechten Winkel bilden sollen. Nach Bild 34 ergeben sich dann die Beträge der Komponenten

$$v_1 = v \sin \alpha \quad \text{und} \quad v_2 = v \cos \alpha .$$

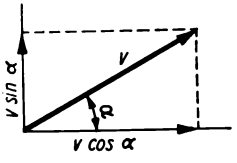


Bild 34
Zum Projektionssatz

Dies besagt auch der für alle Vektoren gültige

(36) **Projektionssatz:**
Die Komponenten eines Vektors nach zwei rechtwinklig zueinander stehenden Richtungen sind gleich dessen Projektionen auf diese Richtungen.

Beispiel: Eine Motorfähre überquert mit der Eigengeschwindigkeit 3 m/s in rechtwinkliger Richtung einen Fluß. Das Wasser strömt mit 3,8 m/s. Unter welchem Winkel wird die Fähre abgetrieben, und welche resultierende Geschwindigkeit besitzt sie?
Die Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 stehen rechtwinklig aufeinander. Es ist daher

$$\tan \alpha = \frac{v_2}{v_1} = 1{,}2667 \quad \text{und} \quad \alpha = 51{,}7° .$$

$$\text{Ferner ist } v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(3^2 + 3{,}8^2)\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 4{,}84\ \text{m/s} .$$

2.4.3. Waagerechter und schräger Wurf

Ein in *horizontaler Richtung* abgeworfener Körper führt ebenfalls zwei Bewegungen zu gleicher Zeit aus. Die eine ist ihm durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufgeprägt, mit der er freigegeben wird. Die andere wird ihm durch die Fallbewegung erteilt, der er wie jeder andere, nicht unterstützte Körper unterworfen ist. Dadurch kommt eine zusammengesetzte Bewegung zustande. Die resultierende Bewegung ergibt sich aus dem Unabhängigkeitsprinzip so, als ob beide Bewegungen einzeln stattfänden. Dies läßt sich mit Hilfe der auf Bild 35 angegebenen Vorrichtung leicht zeigen. Während

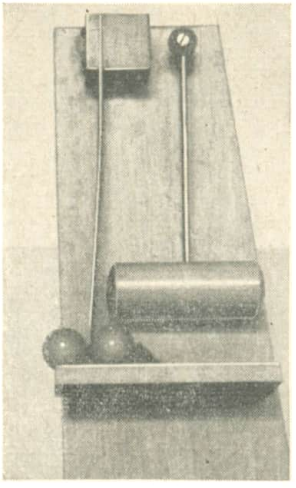


Bild 35. Die linke Kugel wird beim Anschlag des Hammers waagerecht abgeworfen, die rechte fällt (hier durch die Blattfeder noch festgeklemmt) durch ein Loch nach unten. Beide Kugeln erreichen den Boden gleichzeitig

die eine Kugel frei herabfällt, wird die andere im gleichen Augenblick waagerecht fortgeschleudert. Das für Zeitunterschiede sehr empfindliche Ohr hört beide Kugeln zugleich am Boden aufschlagen. Um die Form der Bahnkurve zu untersuchen, sei für die Fallbewegung die von oben nach unten positiv gezählte y-Achse und für die Startgeschwindigkeit v_0 die positive x-Achse zugrunde gelegt. Dann liegen die beiden Gleichungen vor:

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad \text{und} \quad x = v_0 t .$$

Man erhält y als Funktion von x, wenn man in die 1. Gleichung $t = \frac{x}{v_0}$ einsetzt.

(37) $$\boxed{y = \frac{gx^2}{2v_0^2}}$$ **Bahngleichung des waagerechten Wurfes**

Da g und v_0 konstante Größen sind, stellt diese Gleichung eine **Parabel** dar. Man nennt sie die **Wurfparabel.**

Trägt man, wie dies auf Bild 36 geschehen ist, für einige Bahnpunkte die Geschwindigkeitsvektoren ein, so zeigen sie die in jedem Augenblick vorhandene Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung an. Die Krümmung der Wurfparabel kommt dadurch zustande, daß zwar die Horizontalkomponente v_0 stets konstant bleibt, die Vertikalkomponenten v_1, v_2,... jedoch immer größer werden. Somit muß sich die Richtung des resultierenden Vektors fortgesetzt ändern. Wären beide Komponenten konstant, so bliebe auch die Richtung des resultierenden Vektors immer die gleiche. Ein Geschwindigkeitsvektor kann demnach seine Richtung nur dann ändern, wenn auf den sich bewegenden Körper eine Beschleunigung einwirkt. In diesem Fall ist es die Schwerebeschleunigung.

Während wir bisher unter der Beschleunigung nur die zeitliche Änderung des Geschwindigkeits*betrages* verstanden haben, stellen wir nunmehr fest, daß auch zur *Richtungs*änderung eine Beschleunigung erforderlich ist.

Beim *schrägen Wurf* nach oben beschreibt der Körper ebenfalls eine *Wurfparabel.* An schief in die Höhe geschickten Wasserstrahlen ist diese Kurve sehr

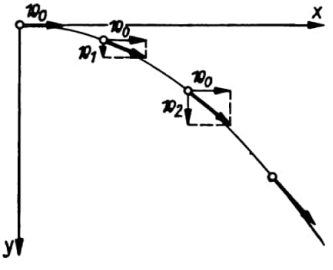


Bild 36. Wurfparabel

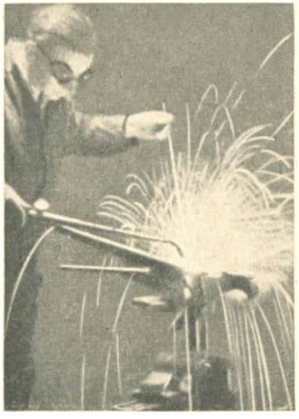


Bild 37. Fliegende Funken beschreiben Wurfparabeln

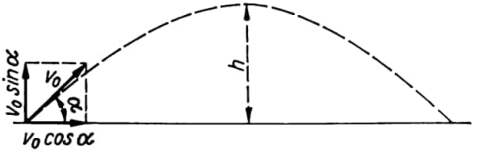


Bild 38. Wurf schräg aufwärts. v_0 Anfangsgeschwindigkeit in Wurfrichtung

schön zu sehen. Die Parabel ist, wenn man vom Luftwiderstand absieht, symmetrisch gestaltet (Bild 37). Ihre Bahngleichung läßt sich in ähnlicher Weise wie beim waagerechten Wurf aufstellen.

Zur Berechnung der Einzelheiten muß man die schräge Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach dem Projektionssatz in eine horizontale und vertikale Komponente zerlegen (Bild 38). Erstere ist $v_0 \cos \alpha$, letztere $v_0 \sin \alpha$. Da beide unabhängig voneinander betrachtet werden können, ist die Wurfhöhe entsprechend Gleichung (19):

(38) $$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$ **Wurfhöhe h_{max}**

Die Zeitdauer des ganzen Wurfs setzt sich aus dem Anstieg und dem Wiederherabfallen zusammen. Sie ist also gleich der doppelten Fallzeit aus der Höhe h. Setzt man den soeben berechneten Wert in Gleichung (14) ein und multipliziert mit 2, so erhält man

(39) $$\boxed{t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$$ **Wurfzeit t**

In dieser Zeit legt der Körper mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$ die horizontal gerichtete Strecke $v_0 t \cos\alpha$ zurück. Setzt man für t die Wurfzeit ein, so ergibt sich

(40) $$\boxed{s = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}}$$ **Wurfweite s**

Diese ist am größten, wenn der Körper unter einem Winkel von 45° abgeworfen wird; denn $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, und der größte Wert, den ein Sinus annehmen kann, ist 1. Die größte Weite wird daher bei einem Winkel von $2\alpha = 90°$ oder $\alpha = 45°$ erreicht. Da nun $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ist die größte Wurfweite $s_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.

Jede kleinere Wurfweite kann also entweder durch einen flacheren oder steileren Wurf erzielt werden.

2.4.4. Krummlinige Bewegung

Am Beispiel des waagerechten Wurfes haben wir erkannt, wie eine gekrümmte Bahn zustande kommt: Auf den betrachteten Körper wirkt eine Beschleunigung ein, deren Richtung mit der ursprünglichen Bewegung nicht zusammenfällt. Während wir bei den früheren Betrachtungen unter der Beschleunigung nur die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsbetrages verstanden haben, ergibt sich jetzt, daß auch zur Änderung der Geschwindigkeitsrichtung eine Beschleunigung vorhanden sein muß. Eine krummlinige Bewegung kann daher nur zustande kommen, wenn der Körper in jedem Augenblick einer Beschleunigung unterworfen ist, die ihn aus seiner geradlinigen Bewegung fortgesetzt ablenkt. Um das deutlicher zu sehen, seien auf Bild 39 die Vektoren für zwei aufeinander folgende Bahnpunkte miteinander verglichen. Die Geschwindigkeitsvektoren sind stets *tangential* zur Bahnkurve gerichtet, da sie ja den augenblicklichen Bewegungszustand kennzeichnen. Darunter sind die beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ unter Beibehaltung ihrer Richtung und ihres Betrages nach einem gemeinsamen Ursprung verschoben. Man sieht dann, daß sich der Vektor $\mathfrak{v}_2$ als geometrische Summe des ursprünglichen Vektors $\mathfrak{v}_1$ und eines Zusatzvektors $\Delta\mathfrak{v}$ zeichnen läßt. Der Quotient aus dieser Geschwindigkeitsänderung $\Delta\mathfrak{v}$ und der dazugehörigen Zeit Δt ist der **Vektor der Beschleunigung** $\mathfrak{a}$, der zwangsläufig mit der Richtung von $\Delta\mathfrak{v}$ zusammenfällt.

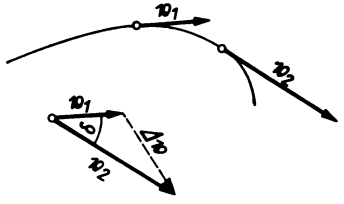


Bild 39. Änderung des Geschwindigkeitsvektors

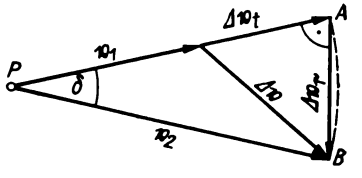


Bild 40. Zerlegung des Vektors der Geschwindigkeitsänderung

Die auf Bild 39 wiedergegebene Skizze stellt einen ganz beliebigen Fall dar, wobei der von den beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ eingeschlossene Winkel δ der Deutlichkeit halber recht groß gezeichnet wurde. In Wirklichkeit muß man sich die beiden Bahnpunkte äußerst dicht beieinander liegend vorstellen; denn erst beim Übergang von der Differenz Δt zum Differential $\mathrm{d}t$ erhält man den Beschleunigungsvektor:

$$\mathfrak{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Denkt man sich die beiden Bahnpunkte sehr nahe beieinander liegend, so wird der von den beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ eingeschlossene Winkel δ sehr klein. (Da sich dies schlecht zeichnen läßt, ist dieser Winkel auf Bild 40 ebenso wie auf Bild 39 übertrieben groß dargestellt.) Dann kann man den Vektor $\Delta\mathfrak{v}$ in zwei Komponenten zerlegen, indem man mit dem Radius v_2 einen Kreisbogen AB schlägt. Ist also der Winkel δ äußerst klein, dann steht die Komponente $\Delta\mathfrak{v}_r$ senkrecht auf $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$,

während die andere Komponente Δv_t mit der Richtung von v_1 und v_2 zusammenfällt. Die Komponente Δv_t hat demnach die Richtung der Bahntangente. Die senkrecht dazu gerichtete Komponente Δv_r fällt in die Richtung des Krümmungsradius.
Bildet man die Quotienten aus den Beträgen von Δv_r und Δv_t und der Zeit Δt, in der diese Änderungen entstehen, so erhält man die Beträge der

$$\text{Tangentialbeschleunigung} \quad a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$$

und die

$$\text{Radialbeschleunigung} \quad a_r = \frac{\Delta v_r}{\Delta t}.$$

2.4.5. Die Radialbeschleunigung der Kreisbewegung

Zwei Sonderfälle sind besonders einfach zu übersehen. Wenn nämlich die Radialbeschleunigung $a_r = 0$ ist, verbleibt allein die Tangentialbeschleunigung, d. h., die Richtung der Geschwindigkeit bleibt konstant, und es liegt eine geradlinige beschleunigte Bewegung vor. Wenn dagegen die Tangentialbeschleunigung $a_t = 0$ ist, bleibt der Betrag der Geschwindigkeit v konstant. Dagegen ändert sich fortgesetzt ihre Richtung, was auf die Radialbeschleunigung a_r zurückzuführen ist. Wenn ihr Betrag konstant ist, kommt eine gleichförmige Kreisbewegung zustande.

(41) **Ein Körper bewegt sich nur dann auf einer Kreisbahn, wenn er eine konstante, nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Beschleunigung erfährt.**

Bei der Betrachtung von Drehbewegungen hatten wir uns bisher lediglich mit der tangentialen Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit) beschäftigt. Daß die gleichzeitige Existenz der Radialbeschleunigung hierbei keine Rolle spielte, ist wieder ein Beweis für die Gültigkeit des Unabhängigkeitsprinzips.
Auf Bild 41 sind diese Beziehungen genauer zu sehen. Der in der kurzen Zeit Δt zurückgelegte Kreisbogen AB hat die Länge $v\Delta t$. Man kann ihn bei kleinem Winkel δ gleich der Bogensehne AB setzen. Durch Parallelverschieben der beiden Vektoren v_1 und v_2 entsteht das darunter gezeichnete Dreieck. Wegen der Gleichheit der Beträge von v_1 und v_2 sind die beiden schraffierten Dreiecke einander ähnlich, und hinsichtlich der Beträge besteht die Proportion

$$\frac{v\Delta t}{r} = \frac{\Delta v_r}{v} \quad \text{oder umgeformt}$$

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

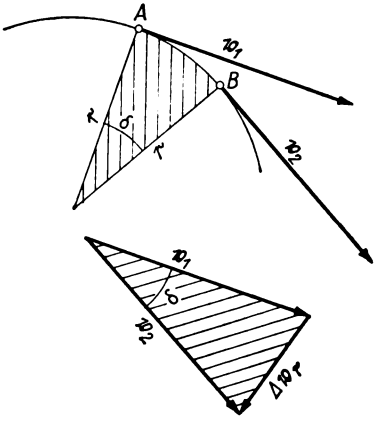


Bild 41. Radialkomponente bei konstantem Betrag der Bahngeschwindigkeit

$\frac{\Delta v_r}{\Delta t}$ ist der Betrag des Vektors der Radialbeschleunigung. Dieser Vektor weist ständig nach dem Drehzentrum hin. In der Skizze ist das nicht genau der Fall, weil hier der Deutlichkeit halber der Winkel δ viel zu groß gezeichnet wurde.
Als Ergebnis erhält man damit den Betrag

(42) $\boxed{a_r = \frac{v^2}{r}}$ **Radial- oder Zentralbeschleunigung a_r**

oder wegen $v = r\omega$

$$\boxed{a_r = r\omega^2}$$

Beispiele: 1. Die Trommel einer Zentrifuge hat die Drehzahl 3000 ^{1}/min. Wie groß ist die Radialbeschleunigung a am Umfang der Trommel von 15 cm Radius? Vergleiche mit der Schwerebeschleunigung! –

$$a = r\omega^2 = \frac{0{,}15\,\mathrm{m} \cdot 4\pi^2 \cdot 3000^2}{3600\,\mathrm{s}^2} = 14800\,\mathrm{m/s^2};$$

das ist rund das 1480fache der Schwerebeschleunigung! Ultrazentrifugen erreichen Drehzahlen bis $n = 40000$ ^{1}/min.

2. Welchen Einfluß hat die Erdumdrehung am Äquator ($r = 6378$ km) auf die Schwerebeschleunigung? – Aus der Dauer einer Erdumdrehung $T = 24$ h folgt die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \quad \text{und damit}$$

$$a = r\omega^2 = \frac{6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 4\pi^2}{(24 \cdot 3600)^2\,\mathrm{s}^2} = 0{,}034\,\mathrm{m/s^2}, \text{ d. i. } \approx 3{,}4\,{}^0/_{00} \text{ des Wertes von } g.$$

3. Kräfte im Gleichgewicht

Will man einen Körper in Bewegung setzen, bedarf es einer körperlichen Anstrengung, einer **Kraft.** Außer der Muskelkraft gibt es aber auch zahlreiche weitere Kräfte, welche dieselbe Wirkung hervorbringen: die magnetische und elektrische Anziehungskraft, elastische und Reibungskräfte usw. Kräfte können aber nicht nur den Bewegungszustand der Körper verändern, sondern auch deren äußere Form und innere Struktur, so daß letzten Endes alle Veränderungen der physikalischen Welt auf das Wirken von Kräften zurückzuführen sind. Deswegen kommt dem Begriff der Kraft in der Mechanik ganz besondere Bedeutung zu. Die Lehre von den Kräften wird heute allgemein als *Dynamik* bezeichnet.
Aber auch dort, wo keine äußeren Veränderungen bemerkbar werden, sind oftmals Kräfte wirksam. Sie stehen dann untereinander im Gleichgewicht und heben sich gegenseitig auf. Diesen speziellen Teil der Dynamik bezeichnet man als *Statik*. Alle Vorgänge dagegen, bei denen Kräfte sichtbare Bewegungen hervorrufen, werden zur *Kinetik* gerechnet.

3.1. Kraft als vektorielle Größe

Eine Kraft läßt sich stets durch 3 Merkmale kennzeichnen, und zwar durch (Bild 42)

1. ihre **Richtung:** zeichnerisch dargestellt durch einen *Pfeil*;
2. ihren **Betrag:** dargestellt durch die *Länge* dieses Pfeils nach einem beigegebenen Maßstab (z. B. 1 kp $\triangleq$ 1 cm);
3. ihren **Angriffspunkt:** d. h. den Punkt, in welchem die Kraft am Körper angreift.

Die Gerade, auf welcher der Kraftvektor liegt, nennt man die **Wirkungslinie** der Kraft.

Demnach ist die Kraft eine gerichtete, d. h. eine vektorielle Größe. Hinsichtlich der Schreibweise gilt in entsprechender Weise, was in 2.4.2. zur Geschwindigkeit gesagt wurde. Um den Vektorcharakter zum Ausdruck zu bringen, bezeichnet man Kräfte mit Frakturbuchstaben $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$,... Wenn nur die Beträge gemeint sind, verwendet man die sonst üblichen lateinischen Buchstaben F, F_1, F_2,...

3.2. Gleichgewicht zweier Kräfte

Wirken an einem starren Körper 2 Kräfte F_1 und F_2 von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung in derselben Wirkungslinie, so halten sie sich im Gleichgewicht:

(43) **Im Gleichgewicht ist Kraft gleich Gegenkraft.**

Wenn also ein Körper im Ruhezustand ist, können gleichwohl Kräfte vorhanden sein. Diese befinden sich aber im Gleichgewicht.

Dieser Sachverhalt ist nur ein besonderer Fall des allgemeinen, von NEWTON aufgestellten Wechsel- oder Gegenwirkungsprinzips:

(44) **Gegenwirkungsprinzip:**
Übt ein Körper auf einen anderen eine Kraft aus, so wirkt dieser mit einer gleich großen Kraft von entgegengesetzter Richtung auf den ersten Körper zurück.

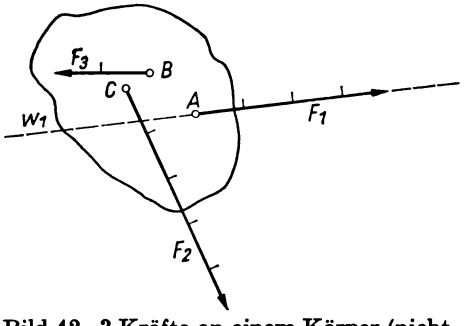


Bild 42. 3 Kräfte an einem Körper (nicht im Gleichgewicht) A, B, C Angriffspunkte, w_1 Wirkungslinie von F_1

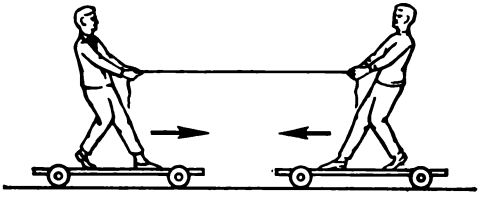


Bild 43. Zum Gegenwirkungsprinzip

Es besagt also, daß Kräfte niemals auf einen Körper allein, sondern stets nur paarweise zwischen zwei Körpern zugleich, und zwar in entgegengesetzter Richtung wirksam sind. Welche von diesen beiden man als Kraft oder Gegenkraft bezeichnet, ist an sich belanglos, beide sind physikalisch gleichberechtigt.
Besonders deutlich erkennt man dieses Prinzip, wenn zwei Personen auf je einem leicht beweglichen Wagen stehen und gemeinsam ein Seil festhalten (Bild 43). Es ist gleichgültig, ob der eine daran zieht und der andere das Seil scheinbar nur festhält oder umgekehrt: Immer rollen sie aufeinander zu. Der Kraftaufwand ist für beide stets gleich groß.
Hängt beiderseits eines gespannten Fadens nach Bild 44 je ein Körper von der Masse 1 kg, so beträgt die Spannkraft nicht etwa 2 kp, sondern nur 1 kp. Der eine Körper wirkt hier nur als Gegenkraft zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts.
In diesen Beispielen sind die beiden Kräfte von völlig gleicher Art und auch sofort zu erkennen.
Oft aber muß man das Vorhandensein der Gegenkraft erst durch eine besondere Überlegung erschließen. So übt ein auf der Tischplatte ruhender Körper eine nach unten gerichtete Kraft aus, die durch sein Gewicht, d. h. durch die Erdanziehung, bewirkt wird. Da er nicht in Bewegung gerät, muß noch eine zweite Kraft von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung wirksam sein, die ihr das Gleichgewicht hält. Derartige, von einer festen Unterlage ausgehenden Gegenkräfte nennt man **Zwangskräfte.** Da sie bei jeder unnachgiebigen Führung (z. B. Eisenbahnschienen, Gleit- und Fahrbahnen, Radlagern) auftreten, werden sie auch als **Führungskräfte** bezeichnet.

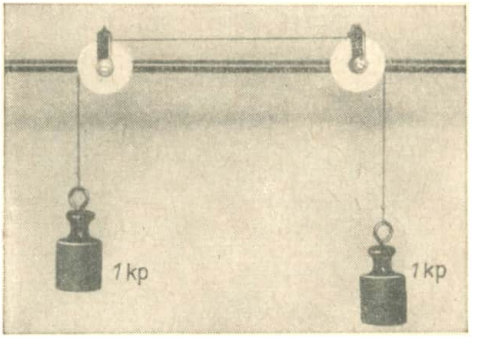


Bild 44. Kraft und Gegenkraft. Die Spannkraft des Fadens beträgt nur 1 kp!

Die von dem betreffenden Körper selbst gegen die Führung ausgeübte Kraft dagegen stellt eine **eingeprägte Kraft** dar. Diese erst bestimmt den Betrag der jeweiligen Führungskraft, und die Führungskraft verschwindet sofort, wenn die entsprechende eingeprägte Kraft wegfällt.

3.3. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

3.3.1. Zusammensetzung von Kräften

Wenn in einem Punkt mehrere Kräfte angreifen, kann man die Frage nach der Gesamtwirkung dieser Kräfte stellen. Man nennt dabei die Teilkräfte auch **Komponenten** und die Gesamtkraft **Resultierende.** Die Resultierende muß gerade so groß und so gerichtet sein, daß sie die Komponenten vollständig ersetzt, weshalb sie auch oft

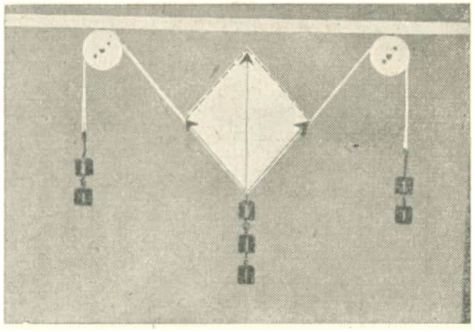


Bild 45. Parallelogramm der Kräfte

Ersatzkraft genannt wird. Statt mehrerer Einzelkräfte hat man dann nur noch eine Kraft vorliegen, wodurch sich die Lösung vieler Aufgaben vereinfacht. Das allgemeine Prinzip, nach dem diese Zusammenfassung zu geschehen hat, ist wieder der für alle Arten von Vektoren gültige *Parallelogrammsatz* (34). Im vorliegenden Fall nennt man ihn den

(45) **Satz vom Parallelogramm der Kräfte:**

Bilden 2 Kräfte einen Winkel miteinander, so ist die Resultierende gleich der Diagonalen des aus den beiden Komponenten gebildeten Parallelogramms.

Das Kräfteparallelogramm läßt sich nach Bild 45 durch einen einfachen Versuch veranschaulichen. Je zwei Körper gleicher Masse rufen in einem und demselben Punkt zwei schräg nach oben wirkende Zugkräfte hervor. Ihre Resultierende wird durch die Gegenkraft (Gewicht von 3 Körpern gleicher Masse) kompensiert, womit das System im Gleichgewicht ist.
Vektormäßig schreibt man hierfür kurz

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

muß aber dabei beachten, daß hier keine einfache algebraische, sondern **geometrische Addition** vorliegt, wie dies bereits in 2.4.2. betont wurde.
Wenn der Winkel zwischen den beiden Komponenten gegeben ist, läßt sich zur Berechnung der Resultierenden der Cosinussatz der Trigonometrie anwenden (Bild 46)

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,.$$

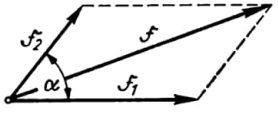


Bild 46. Resultierende zweier Kräfte

Bilden die beiden Komponenten einen rechten Winkel miteinander, so ist $\cos\alpha = 0$, und es ergibt sich der Betrag der Resultierenden nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,.$$

Nur in einem Sonderfall darf man die Beträge der Vektoren algebraisch addieren, nämlich dann, wenn sie auf derselben Wirkungslinie liegen (Bilder 47 und 48). Dann bilden die Komponenten den Winkel $\alpha = 0°$ bzw. $180°$ miteinander, und es folgt unmittelbar:

Wirken mehrere Kräfte in derselben Wirkungslinie, so ist der Betrag der Resultierenden gleich der Summe bzw. Differenz der Beträge der Einzelkräfte.

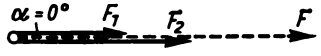


Bild 47. Gleich gerichtete Kräfte

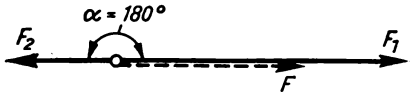


Bild 48. Entgegen gerichtete Kräfte

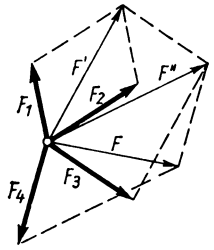


Bild 49. Entstehung des Krafteckes

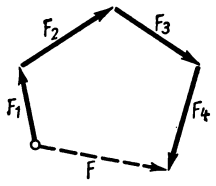


Bild 50 Kräftepolygon

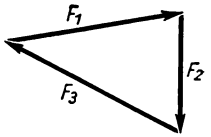


Bild 51. 3 Kräfte im Gleichgewicht

Sind mehr als 2 Komponenten mit gleichem Angriffspunkt zusammenzufassen, so kann man erst 2 von ihnen zu einer Resultierenden F' und diese mit der 3. Kraft zu einer neuen Resultierenden F'' vereinigen. So fortfahrend, erhält man die Gesamtresultierende F (Bild 49).

Man findet jedoch sofort, daß man sich die Konstruktion der einzelnen Parallelogramme ersparen kann. Es genügt einfach, die Komponenten nach dem bereits in 2.4.2. ausgesprochenen Satz schrittweise aneinanderzusetzen. Es ergibt sich auf diese Weise ein gebrochener Linienzug, den man **Krafteck** (Kräftepolygon) nennt (Bild 50).

Die Resultierende weist dann vom Ausgangspunkt nach dem erreichten Endpunkt.

Um die Resultierende aus mehreren Teilkräften zu finden, setzt man diese unter Parallelverschiebung schrittweise aneinander. Die Resultierende ist dann die Schlußlinie des gebildeten Kraftecks.

Ergibt sich der Fall, daß der Endpunkt des Kräftepolygons mit dem Ausgangspunkt zusammenfällt, so ist die Resultierende gleich Null, d. h., alle Kräfte halten sich im **Gleichgewicht** (Bild 51).

Wenn sich bei gleichem Umlaufsinn der Kräfte das Krafteck schließt, besteht Gleichgewicht.

3.3.2. Zerlegung von Kräften

In vielen Fällen liegt die umgekehrte Aufgabe vor, eine gegebene Kraft in einzelne Teilkräfte zu zerlegen. Da deren Vereinigung wieder die ursprüngliche Kraft ergeben muß, gilt auch hier das Prinzip der Vektoraddition:

Um eine Kraft in ihre Komponenten zu zerlegen, zieht man zu den vorher ermittelten Wirkungslinien die Parallelen und erhält aus dem gebildeten Parallelogramm die beiden Komponenten.

Bilden diese Wirkungslinien insbesondere einen rechten Winkel, so haben die beiden Komponenten nach Bild 52 die Beträge

$$F_1 = F \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad F_2 = F \cos \alpha .$$

Dies ist wiederum nichts anderes als eine Anwendung des für alle Arten von Vektoren gültigen **Projektionssatzes** (36).

Als häufig vorkommendes Beispiel sei hier die **schiefe Ebene** angeführt, auf der sich nach Bild 53 eine schwere Walze befinden möge. Die im Mittelpunkt der Walze angreifende Schwerkraft, d. h. ihr Gewicht G, zieht lotrecht nach unten. Man sieht, daß G nicht durch den Auflagepunkt läuft und sich unter Anwendung des Projektionssatzes in zwei Komponenten zerlegen läßt: den parallel zur Bahn gerichteten **Hangabtrieb** F_H und die rechtwinklig zur Bahn gerichtete **Normalkraft** F_N. Das Parallelogramm ist in diesem Fall ein Rechteck. Das Kräftedreieck aus G, F_H und F_N ist ähnlich dem Bahndreieck mit der Basis b, der Höhe h und der Länge l (gleiche Winkel). Damit folgt aus

(46) $\quad F_H : G = h : l \quad$ der **Hangabtrieb** $\quad F_H = \dfrac{Gh}{l} = G \sin \alpha .$

(47) $\quad F_N : G = b : l \quad$ die **Normalkraft** $\quad F_N = \dfrac{Gb}{l} = G \cos \alpha .$

Man nennt das Verhältnis $h:b$ den **Anstieg** einer schiefen Ebene. Ohne weiteres sieht man: Je geringer der Anstieg ist, desto kleiner wird der Hangabtrieb, während die drückende Normalkraft mit zunehmendem Anstieg abnimmt.

Bei Eisenbahnlinien versteht man unter der **Steigung** das Verhältnis $h:l$, also den Sinus des Steigungswinkels.

Beispiele: 1. Welche Zugkraft benötigt ein Güterzug ($G = 800$ Mp) bei einer Steigung von 1:120? – Sieht man von den Reibungskräften ab, so muß die Zugkraft den Hangabtrieb überwinden. Dieser ist nach (46)

$$F_H = \frac{Gh}{l} = \frac{800\,\text{Mp} \cdot 1}{120} = 6{,}67\,\text{Mp} .$$

2. Der auf Bild 54 angegebene Mast wird durch 2 Spannseile gehalten, von denen das waagerechte die Zugkraft $F_1 = 250$ kp ausübt. Mit welcher Kraft F_2 muß das schräge Seil gespannt sein, und wie groß ist die im Mast vertikal gerichtete Druckkraft F? –

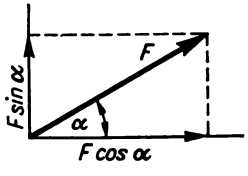


Bild 52. Projektion einer Kraft auf zwei zueinander senkrecht stehende Wirkungslinien

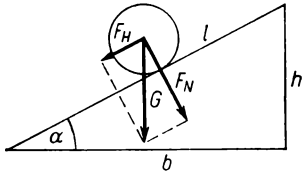


Bild 53. Kräfte an der schiefen Ebene

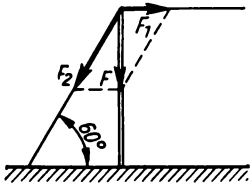


Bild 54. Spannkräfte

Gegeben sind F_1 und die Wirkungslinien von F_2 und F. Man zieht durch den Endpunkt von F_1 die Parallele zu F_2 und durch den Endpunkt von F die Parallele zu F_1. Damit stellen F_1 und F_2 die Komponenten von F in Richtung der Spannseile dar. Das von den Kräften gebildete Dreieck liefert $F_2 = \frac{F_1}{\cos 60°} = 500$ kp und $F = F_1 \tan 60° = 433$ kp.

3.4. Kräfte am starren Körper

3.4.1. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten

Einen Gegenstand, der unter dem Einfluß von außen wirkender Kräfte seine Gestalt nicht ändert, nennt man einen **starren Körper.** Dies ist daran zu erkennen, daß die gegenseitigen Abstände aller seiner Punkte unveränderlich sind. Wenn man von geringfügigen, durch die elastischen Eigenschaften des Materials bedingten Formänderungen absieht, kann man alle festen Bau- und Maschinenteile der Technik als starre Körper betrachten.
Die hier wirkenden Kräfte greifen nicht immer im gleichen Punkt an und können auch die unterschiedlichsten Richtungen haben. Der Einfachheit halber seien hier nur Kräfte behandelt, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen.
Ein solches ebenes Kräftesystem war bereits auf Bild 42 angedeutet, und es entsteht die Frage, wie die Resultierende in diesem Fall zu konstruieren ist.
Hinsichtlich der eintretenden Wirkung ist es nun gleichgültig, ob eine Kraft (bei gleicher Richtung und Größe) den Körper schiebt oder zieht. Es ist ferner ohne Einfluß, ob die Kraft direkt oder unter Vermittlung einer Stange oder eines Seiles (Bild 55) angreift. Daher gilt der Satz:

(48) **Am starren Körper kann man eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie nach Belieben verschieben.**

In kürzerer Form drückt dies der Satz aus:

An einem starren Körper angreifende Kraftvektoren sind linienflüchtig.

Soll beispielsweise die Resultierende der auf Bild 56 angegebenen drei Kräfte F_1, F_2 und F_3 ermittelt werden, so verschiebt man zuerst F_1 bis zur Wirkungslinie von F_2 und erhält dabei die Resultierende F'. Sowohl F' als auch F_3 verschiebt man bis zum

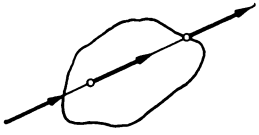


Bild 55. Verschiebung einer Kraft längs ihrer eigenen Wirkungslinie

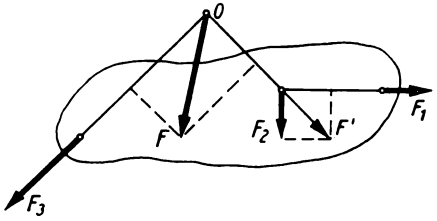


Bild 56. Addition von Kräften durch Verschieben

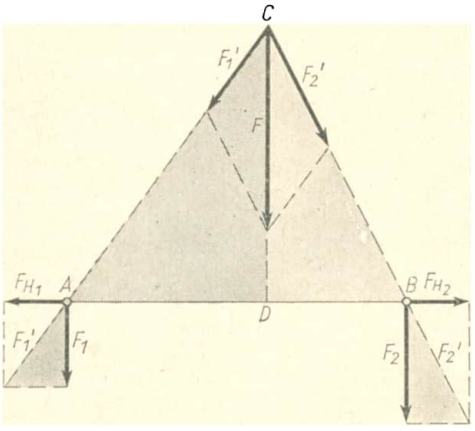


Bild 57. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte F_1 und F_2

Schnittpunkt O ihrer Wirkungslinien und findet so die Resultierende F. Man überzeuge sich durch Zeichnen eines ähnlichen Beispiels davon, daß die Reihenfolge dieser Verschiebungen nach Belieben vertauscht werden kann.
Diese Methode des Verschiebens versagt jedoch, wenn die beiden Komponenten parallel zueinander verlaufen. Der Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien liegt im Unendlichen. Dieser Fall liegt beispielsweise bei einem Balken vor, auf welchem 2 Lasten nebeneinanderstehen. Man kann sich mit folgender Überlegung helfen:

Nach Bild 57 werden den gegebenen Kräften F_1 und F_2 beiderseits 2 gleiche, entgegen gerichtete Hilfskräfte F_{H1} und F_{H2} zugefügt. Da sich ihre Wirkung gegenseitig aufhebt, wird am ursprünglichen Sachverhalt nichts geändert. Aber man kann jetzt F_{H1} mit F_1 zur Resultierenden F_1' sowie F_{H2} mit F_2 zur Resultierenden F_2' vereinigen. Dann verschiebt man F_1' und F_2' bis zum Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien, wo sich das Parallelogramm zeichnen läßt und die Gesamtkraft F entsteht. Diese kann in ihrer eigenen Richtung beliebig verschoben werden. Ihr Betrag ergibt sich als Summe von F_1 und F_2.
Der beiderseitige Abstand von F gegenüber F_1 und F_2 kann auch durch Rechnung gefunden werden:
Bei der Betrachtung der besonders hervorgehobenen Dreiecke findet man, daß diese ähnlich sind. Es gelten daher die Proportionen:

$$\frac{F_{H1}}{F_1} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \quad \text{und} \quad \frac{F_{H2}}{F_2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}},$$

was umgeformt ergibt

$$\overline{CD} = \frac{F_1 \overline{AD}}{F_{H1}} \quad \text{und} \quad \overline{CD} = \frac{F_2 \overline{BD}}{F_{H2}}.$$

Setzt man die rechten Seiten einander gleich und bedenkt, daß $F_{H1} = F_{H2}$ ist, so hat man

$$F_1 : F_2 = \overline{BD} : \overline{AD}$$

Die Wirkungslinie der Resultierenden zweier paralleler Kräfte teilt deren Abstand im umgekehrten Verhältnis der Beträge dieser Kräfte.

Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$F_1 \cdot \overline{AD} = F_2 \cdot \overline{BD}.$$

Damit haben wir das *Hebelgesetz* gefunden, von dem in 3.4.3. ausführlicher die Rede sein wird. Das Hebelgesetz läßt sich somit aus dem Parallelogramm der Kräfte herleiten.

3.4.2. Drehmoment

Kann sich ein starrer Körper um einen festen Punkt bewegen, so ist eine am Körper angreifende Kraft bestrebt, ihn um diesen Punkt zu *drehen* (Bild 58). Die Wirkung der Kraft F hängt aber davon ab, welchen Abstand l ihre Wirkungslinie vom Drehpunkt hat. Das Produkt aus dem Betrag der Kraft F und diesem Abstand l bezeichnet man als Drehmoment:

(49) $\boxed{M = Fl}$ **Drehmoment** M

Der Betrag des Drehmomentes ist gleich dem Produkt aus der angreifenden Kraft und dem Abstand des Drehpunktes von der Kraftrichtung.

Man beachte hierbei, daß dieser Abstand durch das vom *Drehpunkt* auf die Wirkungslinie gefällte Lot gegeben ist. Dieses wird auch als *Arm* der Kraft bezeichnet.

Aus der Definition $M = Fl$ ergibt sich die

Einheit des Drehmomentes: 1 Nm oder 1 kpm.

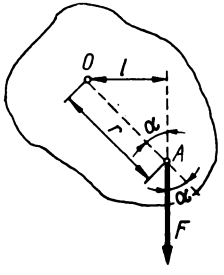


Bild 58. Definition des Drehmoments $M = Fl$

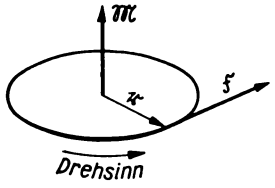


Bild 59. Das Drehmoment als vektorielle Größe

Auf Bild 58 bildet die Verbindungslinie r zwischen Drehpunkt O und Angriffspunkt A mit der Kraft F keinen rechten Winkel, sondern den beliebigen Winkel α. Man sieht aber ohne weiteres, daß $l = r \sin \alpha$ ist und deshalb das Drehmoment unter Verwendung von r auch

(50) $M = Fr \sin \alpha$

geschrieben werden kann. Hiermit bestätigt sich übrigens auch der in 3.4.1. aufgestellte Satz (48); denn eine Verschiebung der Kraft F längs ihrer eigenen Wirkungslinie ändert nichts an der Größe des Momentes $M = Fl$. Verläuft die Wirkungslinie durch den Drehpunkt selbst, so wird mit $l = 0$ auch $M = 0$, d. h., es kann überhaupt keine Drehung stattfinden.

Ein Drehmoment hat stets einen bestimmten **Drehsinn.** Man unterscheidet **rechts- und linksdrehende Momente.** Um in zusammenhängenden Rechnungen beide Arten zu unterscheiden, gibt man **rechtsdrehenden** Momenten (Uhrzeigersinn!) **negatives** und **linksdrehenden** Momenten (Gegenzeigersinn!) **positives** Vorzeichen.

In den vorstehenden Gleichungen ging es allerdings nur um den *Betrag* des Drehmomentes. Das Drehmoment ist jedoch das Produkt zweier vektorieller Größen. Der eine Faktor ist

die Kraft $\mathfrak{F}$. Nimmt man als zweiten Faktor die Verbindungslinie zwischen Drehpunkt und Angriffspunkt der Kraft, so ist diese ebenfalls eine gerichtete Größe und wird als **Radiusvektor** $\mathfrak{r}$ bezeichnet (Bild 59). Auch das Drehmoment selbst hat vektoriellen Charakter. Die Richtung des Momentenvektors legt man so fest, daß Kraftvektor $\mathfrak{F}$, Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und Momentenvektor $\mathfrak{M}$ wie die Achsen eines dreiachsigen Koordinatensystems aufeinander senkrecht stehen, wobei der Vektor $\mathfrak{M}$ in die Richtung der Drehachse fällt. Er stellt einen **axialen Vektor** dar. Für das Vorzeichen aller axialen Vektoren gilt die **Schraubenregel** (Korkenzieherregel, Bild 60):

(51) **Der Vektor des Drehmomentes weist vom Beschauer weg, wenn die Drehung im Uhrzeigersinn erfolgt.**

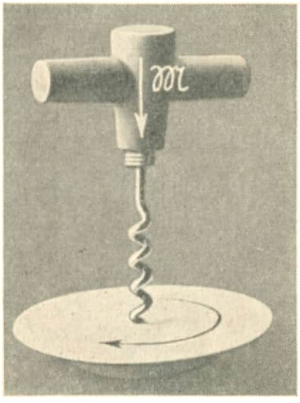


Bild 60. Schraubenregel für axiale Vektoren

In dieser Weise ist das sogenannte **Vektorprodukt**

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

zu verstehen. Diese in der Vektorrechnung übliche Kurzform darf aber nur in dem Sinne aufgefaßt werden, daß der Betrag von $\mathfrak{M}$ nach Gleichung (50) bzw. nach Bild 58 zu berechnen ist. Der Ausdruck $\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$ gilt also nur in Verbindung mit der Gleichung $M = Fr \sin \alpha$.

3.4.3. Zusammensetzung von Drehmomenten

Wirken an einem Körper verschiedene Kräfte in entgegengesetztem Drehsinn, so taucht die wichtige Frage auf, unter welcher Bedingung Gleichgewicht bestehen kann. Um sie zu beantworten, werde die auf Bild 61 dargestellte Vorrichtung benutzt. Am Umfang einer um ihren Mittelpunkt drehbaren Kreisscheibe sind zwei Fäden befestigt, an denen zwei verschieden große, durch angehängte Körper hervorgerufene Kräfte F_1 und F_2 wirken. Gleichgewicht stellt sich erst ein, wenn sich die Scheibe um einen bestimmten Winkel gedreht hat. Da der den linken Körper tragende Faden am Scheibenumfang befestigt ist, bildet die Wirkungslinie von F_1 mit dem Arm l_1 dauernd einen rechten Winkel. Das linksdrehende Moment ist daher $M_1 = F_1 l_1$. Der Arm l_2 der Kraft F_2 liegt dagegen nicht fest. Man kann nun die Kraft F_2 nach dem Parallelo-

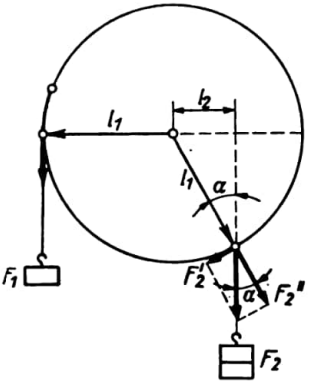


Bild 61. Drehmoment $F_1 l_1 = F_2 l_2$

grammsatz in zwei Komponenten F_2' und F_2'' zerlegen. Das Moment der Kraft F_2'', deren Wirkungslinie durch den Drehpunkt läuft, ist offenbar gleich Null. Dafür greift die Kraft F_2' rechtwinklig am Arm l_1 an. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt die Proportion $F_2' : F_2 = l_2 : l_1$, woraus $F_2' l_1 = F_2 l_2$ folgt.
Das von der Kraft F_2 hervorgerufene rechtsdrehende Moment $M_2 = F_2 l_2$ hält demnach dem linksdrehenden Moment $M_1 = F_1 l_1$ das Gleichgewicht. Es gilt also

$$F_1 l_1 = F_2 l_2.$$

Dies ist das bereits von ARCHIMEDES (287 bis 212 v. u. Z.) entdeckte **Hebelgesetz**, das in 3.4.1. schon auf andere Weise abgeleitet wurde. Man kann es leicht auf mehr als 2 Kräfte ausdehnen und in folgender Weise aussprechen:

> **Ein starrer, um einen festen Punkt drehbarer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Momente gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist.**

Drückt man das in einer Gleichung aus, so schreibt man zweckmäßig alle linksdrehenden Momente auf die eine Gleichungsseite und die rechtsdrehenden auf die andere, so z. B.

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4.$$

Im Fall des Gleichgewichts gilt demnach

$$M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 0$$

oder kürzer:

$$\boxed{\sum M = 0}$$

Meist stellt man einen Hebel in vereinfachter Form dar, etwa als einen um einen festen Punkt drehbaren Stab. Liegt der Drehpunkt irgendwo zwischen den beiden Kräften, spricht man von einem *zweiseitigen Hebel* (Zange, Waage, Schere). Ein *einseitiger Hebel* liegt dagegen vor, wenn der Drehpunkt am Hebelende liegt (Brechstange, Schubkarre, Greifer eines Löffelbaggers).
Unter Zuhilfenahme gedachter Drehmomente kann man auf bequeme Art die Lage der Resultierenden mehrerer paralleler Teilkräfte finden. Wir denken uns diese an einem Hebel angebracht (Bild 62). Das Gleichgewicht kann dadurch erreicht werden, daß man eine entgegen gerichtete Zusatzkraft F anbringt, die gleich der Summe der Beträge aller Teilkräfte ($F + F_2 + F_3 + \cdots$) ist. Dann wählt man einen beliebigen

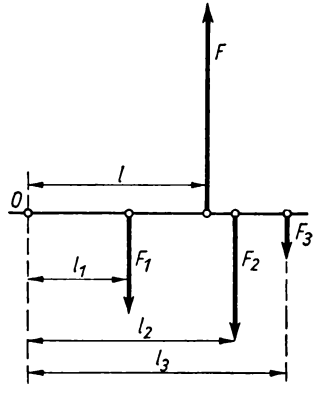


Bild 62. Ermittlung der Lage der Resultierenden F mit Hilfe von Drehmomenten

Bezugspunkt O als gedachten Drehpunkt. Hat die Zusatzkraft F den richtigen Abstand l vom Drehpunkt, so liefert sie das Moment

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$$

In Worten ausgedrückt heißt das:

(52) **Das Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der Momente aller Einzelkräfte.**

Der gesuchte Abstand l der Zusatzkraft F ergibt sich nunmehr aus der Gleichung

$$l = \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Der Einfachheit halber kann man den Bezugspunkt O mit dem Angriffspunkt einer der gegebenen Teilkräfte zusammenfallen lassen.

Eine der vielen Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes ist die Ermittlung von **Auflagerkräften.** Das Gesamtgewicht von Trägern, Maschinenwellen oder anderen Bauteilen, die ihrerseits eine oder mehrere Teillasten tragen können, verteilt sich in bestimmter Weise auf die beiden Lager. Man kann dies auch so auffassen, daß in den beiden Lagern je eine nach oben gerichtete Zwangskraft (s. 3. 2.) wirkt und daß diese beiden Zwangskräfte dem Gesamtgewicht das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich das linke Lager als Drehpunkt und den Träger im rechten Lager angehoben, so ist das hierzu erforderliche Drehmoment gleich dem Produkt aus der rechten Auflagerkraft mit dem Abstand der beiden Lager. Die linke Auflagerkraft erhält man, wenn man das rechte Lager als Drehpunkt wählt und sich den Träger an der Stelle des linken Lagers angehoben denkt.

Beispiele: 1. (Bild 63) Eine 5 m lange Fahnenstange ($G = 12$ kp) ist mit 10 kp belastet und wird durch das Seil BC gehalten. Welche Zugkraft wirkt im Halteseil? –

Denkt man sich die Stange bei A drehbar, so ergibt das im Schwerpunkt (in der Stangenmitte) angreifende Eigengewicht ein rechtsdrehendes Moment M_1, desgleichen die im Endpunkt angreifende Last das Moment M_2. Die zugehörigen Hebellängen sind die vom Drehpunkt A auf die Wirkungslinien gefällten Lote, die sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz zu 2 m bzw. 4 m berechnen. Das Halteseil liefert ein linksdrehendes Moment $M = F \cdot 1{,}5$ m, da es rechtwinklig an der Stange angreift.

Aus der Gleichung

$$M = M_1 + M_2 \quad \text{bzw.} \quad F \cdot 1{,}5\ \text{m} = 12\ \text{kp} \cdot 2\ \text{m} + 10\ \text{kp} \cdot 4\ \text{m}$$

erhält man $F = 42{,}7$ kp.

2. Die auf Bild 64 angegebene Welle vom Eigengewicht 6 kp trägt 3 Riemenscheiben von 5 kp, 8 kp und 4 kp. Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B? –

In bezug auf das linke Lager gilt die Gleichung

$$F_B \cdot 130\ \text{cm} = 5\ \text{kp} \cdot 30\ \text{cm} + 8\ \text{kp} \cdot 70\ \text{cm} + 4\ \text{kp} \cdot 150\ \text{cm} + 6\ \text{kp} \cdot 75\ \text{cm},$$

wonach $F_B = 13{,}5$ kp ist. Das Eigengewicht der Welle greift in der Wellenmitte an. In bezug auf das rechte Lager gilt die Gleichung

$$F_A \cdot 130\ \text{cm} = 8\ \text{kp} \cdot 60\ \text{cm} + 5\ \text{kp} \cdot 100\ \text{cm} - 4\ \text{kp} \cdot 20\ \text{cm} + 6\ \text{kp} \cdot 55\ \text{cm},$$

wonach $F_A = 9{,}5$ kp ist (das Drehmoment der rechten Riemenscheibe ist rechtsdrehend).

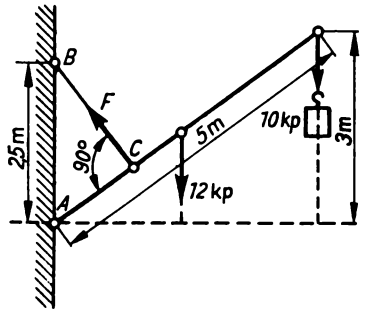


Bild 63. Beispiel für Drehmomente

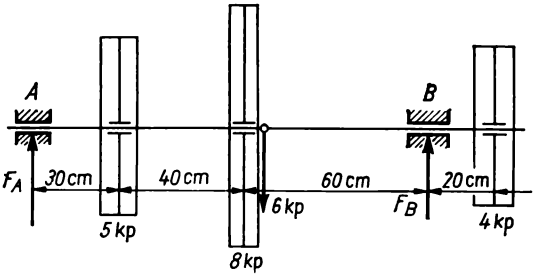


Bild 64. Auflagerkräfte einer mehrfach belasteten Welle

3.4.4. Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)

Die im täglichen Leben und in der Technik vorkommenden Körper sind von verschiedenster Gestalt und mehr oder weniger kompliziert zusammengesetzt. Um das Verhalten eines solchen Gegenstandes unter dem Einfluß von Kräften zu berechnen, geht man deshalb von der vereinfachenden Vorstellung aus, seine gesamte Masse sei in einem einzigen Punkt, dem **Massenmittelpunkt** S, vereinigt. Es besteht dann die Aufgabe, die geometrische Lage dieses Punktes zu finden.

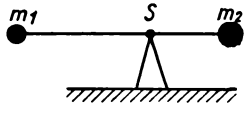


Bild 65
Massenmittelpunkt S

Als einfachstes Beispiel sei ein aus zwei, durch einen masselosen Stab miteinander verbundenen punktförmigen Massen m_1 und m_2 bestehendes System gewählt. Es stehe unter dem Einfluß der Schwerkraft, wobei die beiden Massen m_1 und m_2 den Gewichten G_1 und G_2 proportional sind. Unterstützt man den Stab nach Bild 65 in einem Punkt S so, daß die von den beiden Gewichten hervorgerufenen Drehmomente gleich groß sind, so muß er nach dem Hebelgesetz im Gleichgewicht sein. Der Unterstützungspunkt am Ort S ist dann der *Massenmittelpunkt* des Systems; denn man kann die beiden Einzelmassen m_1 und m_2 gedanklich weglassen und durch eine einzige Masse der Größe $m = m_1 + m_2$ ersetzen. Mit Rücksicht darauf, daß das Verhalten eines Körpers oft unter dem Einfluß der Schwerkraft interessiert, nennt man den Massenmittelpunkt auch **Schwerpunkt.**

Jeder beliebige starre Körper läßt sich nun aus vielen kleinen, gleich großen *Massenelementen* zusammengesetzt denken. Dann gibt es auch immer einen Punkt, in bezug auf welchen die Summe aller von den einzelnen Massenelementen hervorgerufenen Drehmomente gleich Null ist.

(53) **Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) eines Körpers ist derjenige Punkt, in bezug auf welchen die Summe aller von den Schwerkräften seiner Massenelemente hervorgerufenen Drehmomente gleich Null ist.**

Der Schwerpunkt unregelmäßiger Flächen läßt sich experimentell auf folgende Art finden: Man hängt die aus Holz oder Karton geschnittene Fläche an zwei verschiede-

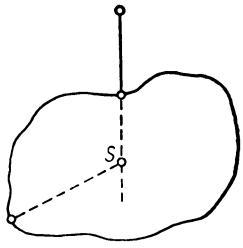


Bild 66. Ermittlung des Schwerpunktes einer Fläche durch zweimaliges Aufhängen

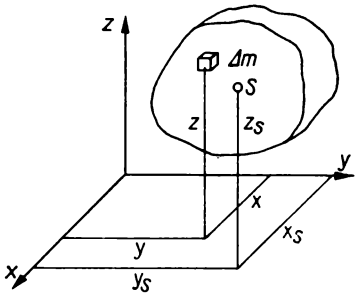


Bild 67. Zur Berechnung des Massenmittelpunktes

nen Punkten ihres Randes an einem Faden auf (Bild 66). Die lotrechte Verlängerung des Fadens nennt man eine **Schwerlinie.** Der Schnittpunkt zweier beliebiger Schwerlinien ist der Schwerpunkt.

Bei symmetrischen Flächen bzw. Körpern sind *Symmetrieachsen* zugleich *Schwerlinien,* und der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Symmetrieachsen (z. B. beim Rechteck im Schnittpunkt der Diagonalen, bei der Kugel im Mittelpunkt usw.).

Zur Berechnung des Massenmittelpunktes zerlegt man den gegebenen Körper in n einzelne Massenelemente Δm und bezieht die von ihnen hervorgerufenen Momente auf die drei Koordinatenachsen x, y, z (Bild 67). Bezüglich der y-Achse ist deren Drehmoment gleich Null, wenn nach Satz (53) die Gleichung besteht

$$x_S m - \sum_1^n x_i \cdot \Delta m_i = 0,$$

wobei x_S denjenigen Abstand von der y, z-Ebene bedeutet, den die Gesamtmasse m haben muß, um der Summe der einzelnen Momente $x_i \cdot \Delta m_i$ das Gleichgewicht zu halten. Daher ist die x-Koordinate des Massenmittelpunktes S:

$$x_S = \frac{\sum_1^n x_i \cdot \Delta m_i}{m}.$$

In entsprechender Weise gilt

$$y_S = \frac{\sum_1^n y_i \cdot \Delta m_i}{m} \quad \text{und} \quad z_S = \frac{\sum_1^n z_i \cdot \Delta m_i}{m}.$$

Handelt es sich um einen *homogenen* Körper, so kürzt sich wegen $m = \varrho V$ die Dichte ϱ aus allen Gliedern heraus, und man kann anstatt der Massenelemente Δm die Volumenelemente ΔV einsetzen:

$$x_S = \frac{\sum_1^n x_i \cdot \Delta V_i}{V} \quad \text{usw.}$$

Bei flächenhaft ebenen Gebilden kann man von Flächenelementen ΔA ausgehen, wobei dann zwei Koordinaten genügen:

$$(54) \qquad x_S = \frac{\sum_1^n x_i \cdot \Delta A_i}{A}; \qquad y_S = \frac{\sum_1^n y_i \cdot \Delta A_i}{A}.$$

Sofern der Körper eine der mathematischen Berechnung zugängliche Form hat, läßt sich die Aufteilung noch weiter verfeinern, indem man von den Massenelementen Δm zu den entsprechenden Differentialen dm übergeht:

$$(55) \qquad x_S = \frac{\int x\,dm}{m} \quad \text{usw.}$$

Passende Beispiele werden meist im Mathematikunterricht geübt. Für einige regelmäßige Flächen sind die Schwerpunkte aus den Bildern 68 bis 71 ersichtlich.

Bild 68. Halbkreis
$y_S = \frac{4r}{3\pi}$

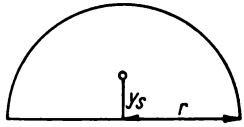
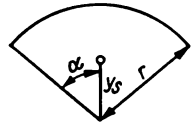


Bild 69. Kreissektor
$y_S = \frac{120° \, r \sin \alpha}{\alpha° \, \pi}$



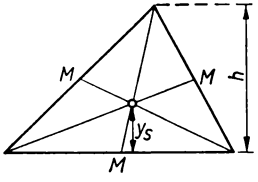


Bild 70
Dreieck
$y_S = \frac{h}{3}$

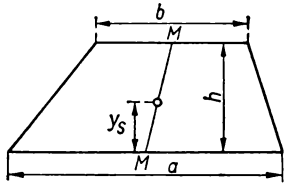


Bild 71. Trapez
$y_S = \frac{h\,(a + 2\,b)}{3\,(a + b)}$

Beispiele: 1. Welche Kraft ist erforderlich, um durch Druck nach unten eine 6 kp schwere Stange um die Kante O (Bild 72) zu kippen? – Denkt man sich das Gewicht der Stange in ihrem Schwerpunkt S vereint, so lautet das Hebelgesetz:

$$F\frac{(l_1 - l_2)}{2} = G\frac{l_2}{2} \quad \text{und} \quad F = \frac{Gl_2}{l_1 - l_2} = \frac{6 \text{ kp} \cdot 100 \text{ cm}}{80 \text{ cm}} = 7{,}5 \text{ kp}.$$

2. Der Schwerpunkt der in Bild 73 skizzierten Fläche ist zu ermitteln. –
Durch Zerlegung erhält man zwei Teilflächen $\Delta A_1 = (4 \cdot 5)\text{ cm}^2 = 20\text{ cm}^2$ und $\Delta A_2 = (5 \cdot 2)\text{ cm}^2 = 10\text{ cm}^2$, deren Teilschwerpunkte S_1 und S_2 die Koordinaten $x_1 = 2{,}5$ cm, $x_2 = 7{,}5$ cm, $y_1 = 2$ cm und $y_2 = 1$ cm haben. Nach (54) sind die Koordinaten des Schwerpunktes S der Gesamtfläche A

$$x_S = \frac{x_1 \cdot \Delta A_1 + x_2 \cdot \Delta A_2}{A} = \frac{2{,}5 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}^2 + 7{,}5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}^2} = 4{,}2 \text{ cm};$$

$$y_S = \frac{y_1 \cdot \Delta A_1 + y_2 \cdot \Delta A_2}{A} = \frac{2 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}^2} = 1{,}7 \text{ cm}.$$

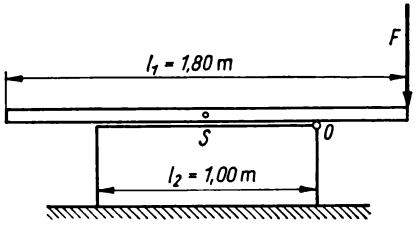


Bild 72

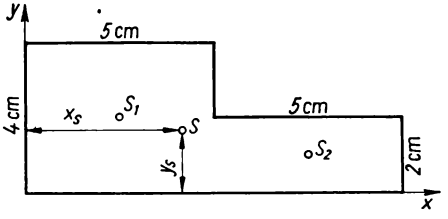


Bild 73

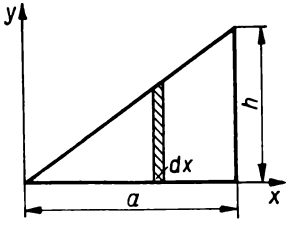


Bild 74. Zum Schwerpunkt des Dreiecks

3. Der Schwerpunkt der auf Bild 74 angegebenen Dreiecksfläche ist zu ermitteln. – Das in Gleichung (54) stehende Flächenelement ist in diesem Fall der Flächenstreifen $y\,dx$. Für die x-Koordinate des Schwerpunktes ist daher das zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ genommene bestimmte Integral zu verwenden:

$$x_S = \frac{\int_0^a xy\,dx}{A}\,.$$

Mit $y = \frac{hx}{a}$ und dem Flächeninhalt des Dreiecks $A = \frac{ah}{2}$ wird daraus

$$x_S = \int_0^a \frac{2hx^2}{a^2h}\,dx = \frac{2}{3}\,a\,.$$

Nach Zerlegung des Dreiecks in parallel zur x-Achse verlaufende Flächenstreifen der Breite dy findet man in entsprechender Weise

$$y_S = \frac{h}{3}\,.$$

3.4.5. Kräftepaar

Zwei gleich große, jedoch entgegengesetzte (antiparallele) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten nennt man ein **Kräftepaar.** Man könnte zunächst daran denken, diese beiden, auf Bild 75 mit F_1 und F_2 bezeichneten Kräfte entsprechend dem auf Bild 57 benutzten Schema durch Hinzunahme von 2 Hilfskräften F_{H1} und F_{H2} zusammenzufassen. Dies gelingt jedoch nicht, da der Schnittpunkt der sich ergebenden Resultierenden F_1' und F_2' im Unendlichen liegt. Vielmehr bilden F_1' und F_2' ein neues Kräftepaar, das dem ursprünglichen gleichwertig sein muß, da sich F_{H1} und F_{H2} gegenseitig aufheben.
Man erkennt aber ohne weiteres, daß ein solches Kräftepaar den Körper zu *drehen* bestrebt ist. Aus Bild 75 ist zu ersehen, daß das entsprechende Moment $M = F_1 l$ sein muß, wenn man den Angriffspunkt von F_2 als Drehpunkt wählt bzw. $M = F_2 l$ in

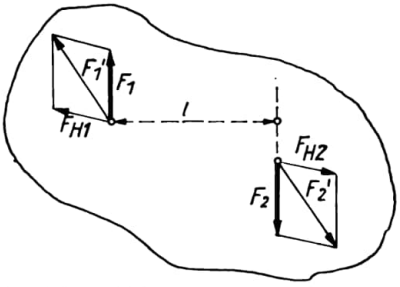


Bild 75. Kräftepaar

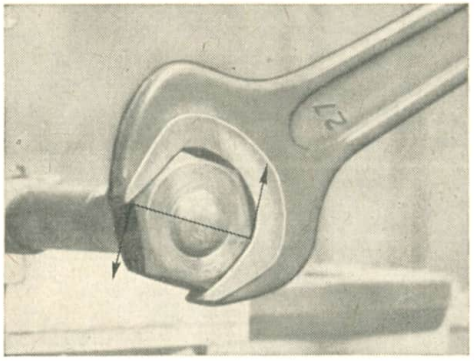


Bild 76. Kräftepaar am Schraubenschlüssel

bezug auf den Angriffspunkt von F_1. Verlegt man den Drehpunkt in die Mitte von l, so wird das Moment $M = F_1 \frac{l}{2} + F_2 \frac{l}{2}$ oder wegen $F_1 = F_2 = F$ wiederum $M = Fl$.

(56) **Der Betrag des Drehmoments eines Kräftepaares ist gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte und deren gegenseitigem Abstand.**

Es mag auffallen, daß der Ausdruck $M = Fl$ mit dem für das Moment einer einzelnen Kraft gültigen identisch ist. Geht man aber von einer beliebigen Einzelkraft F_1 aus, die an einem um eine feste Achse drehbaren Körper angreift, so kann man im Drehpunkt O nach Bild 77 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte F_2 und F_3 anbringen, ohne daß sich an der Gesamtwirkung etwas ändert. Das Ergebnis ist dann ein aus F_1 und F_2 gebildetes Kräftepaar mit dem Moment $M = Fl$ und eine im Drehpunkt O angreifende Einzelkraft F_3.

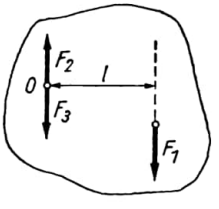


Bild 77. Ersatz der Einzelkraft F_1 durch Kräftepaar F_1, F_2 und Einzelkraft F_3

Wäre nun anfangs noch eine weitere Kraft gegeben gewesen, so hätte man auch diese unter Annahme desselben Bezugspunktes O in ein Kräftepaar und eine Einzelkraft zerlegen können. Beide Kräftepaare und Einzelkräfte ließen sich dann zu einem resultierenden Kräftepaar und einer resultierenden Einzelkraft zusammensetzen. Dies in Gedanken erweitert, führt zu dem Satz:

Ein beliebiges, an einem starren Körper angreifendes System von Kräften läßt sich stets auf ein einziges Kräftepaar und eine Einzelkraft reduzieren.

3.4.6. Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper

Somit kann ein unter dem Einfluß beliebiger Kräfte stehender Körper sowohl eine fortschreitende als auch eine Drehbewegung ausführen. Der Körper bleibt nur dann in Ruhe, wenn weder die eine noch die andere Bewegung möglich ist. Damit keine fortschreitende Bewegung eintreten kann, genügt es, daß die Resultierende aller

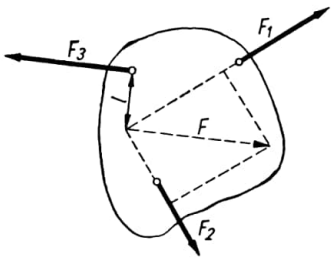


Bild 78. Mehrere Kräfte an einem Körper, deren Resultierende gleich Null ist

angreifenden Kräfte gleich Null ist, d. h., daß sich das Krafteck schließt. Damit muß die Bedingung erfüllt sein

$$\Sigma \mathfrak{F} = 0.$$

Aber auch, wenn dies der Fall ist, kann noch ein resultierendes Moment verbleiben, das dem Körper eine Drehung erteilen wird. Dies zeigt z. B. Bild 78. Hier ergeben die 3 zum Krafteck vereinigten Kräfte F_1, F_2, F_3 zwar die Resultierende Null. Faßt man jedoch F_1 und F_2 durch Verschieben zur Resultierenden F zusammen, so sieht man, daß diese zusammen mit F_3 ein linksdrehendes Kräftepaar mit dem Moment $M = F_3 l = F l$ ergibt. Erst wenn noch ein gleich großes, im entgegengesetzten Sinne wirkendes Moment vorhanden ist, besteht Gleichgewicht.

Das ergibt die zweite Bedingung:

$$\Sigma \mathfrak{M} = 0.$$

Zusammengefaßt gelten die beiden

Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper:

1. Die Resultierende aller angreifenden Kräfte muß gleich Null sein.

2. Die Summe aller Drehmomente muß gleich Null sein.

Ein frei beweglicher Körper befindet sich also nur dann im Gleichgewicht, wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt werden.

4. Kräfte am bewegten Massenpunkt



Bild 79. Isaac Newton (1643 bis 1727)

4.1. Grundgesetz der Dynamik

Eine wichtige und alltäglich zu beobachtende Eigenschaft aller Körper ist die **Trägheit** (oder das Beharrungsvermögen). Einerseits bleibt ein Körper so lange an seinem Ort ruhig liegen, bis er durch einen äußeren Anstoß in Bewegung gebracht wird. Andererseits

bleibt ein bewegter Körper so lange in geradlinig gleichförmiger Bewegung, bis irgendwelche Kräfte diesen Zustand ändern. Fehlen solche Kräfte, so gilt das

(57) **Trägheitsgesetz** (1. NEWTONsches Bewegungsgesetz):
Ein Körper bleibt so lange im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, wie keine Kräfte auf ihn einwirken.

Aus dem Trägheitsgesetz folgt unmittelbar, daß jede auf einen Körper einwirkende Kraft seinen Bewegungszustand ändert. Befand er sich ursprünglich im Ruhezustand, so gerät er in gleichförmig beschleunigte Bewegung. Diese Beschleunigung hält genau so lange an, wie die Kraft einwirkt. Befindet sich der Körper bereits in Bewegung und wirkt die Kraft der Bewegung entgegen, so wird diese verzögert.

Kraft ist die Ursache der Beschleunigung (oder Verzögerung) eines Körpers.

Um die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung zu klären, kann man nach Bild 80 folgenden Versuch durchführen: An einem leichtbeweglichen Wagen ist ein Kraftmesser befestigt. Die an dem Faden hängende Masse übt die Zugkraft F aus. Gibt man den zuvor festgehaltenen Wagen frei, so setzt er sich mit einer bestimmten Beschleunigung in Bewegung. Sie läßt sich leicht aus der in einer bestimmten Zeit t durchlaufenen Wegstrecke s nach der Beziehung (10) $a = \frac{2s}{t^2}$ errechnen.

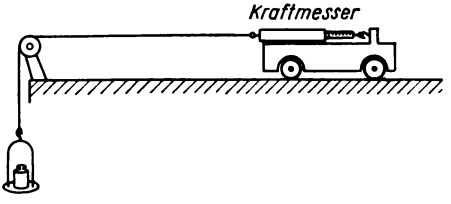


Bild 80. Zur Herleitung des dynamischen Grundgesetzes

Durch Zulegen von weiteren Massestücken kann nun die Zugkraft F beliebig geändert werden. Man findet dann, daß die doppelte Zugkraft $2F$ auch die doppelte Beschleunigung $2a$ hervorruft, der dreifache Wert von F auch den dreifachen Wert von a zur Folge hat usw. Die Beschleunigung a ist also der wirkenden Kraft F direkt proportional. Mit einem Proportionalitätsfaktor k gilt also $a = kF$.
Läßt man in einer weiteren Versuchsreihe die Zugkraft F konstant, belastet aber den Wagen mit zusätzlichen Massestücken, so wird die Beschleunigung a jedoch geringer. Der Körper setzt der Kraft einen wesentlich größeren Widerstand entgegen, seine Trägheit nimmt mit steigender Belastung immer mehr zu. Diese Eigenschaft aller Körper, sich gegenüber einer sie bewegenden Kraft mehr oder weniger träge zu verhalten, beschreibt man nun dadurch, daß man sagt, sie haben eine bestimmte **Masse** m. Damit läßt sich das für die Beschleunigung gefundene Gesetz $a = kF$ vervollständigen, wenn man den Proportionalitätsfaktor $k = \frac{1}{m}$ setzt. Damit wird $a = \frac{1}{m} F$, oder in anderer Schreibweise

(58) $\boxed{F = ma}$ **Grundgesetz der Dynamik** (2. NEWTONsches Bewegungsgesetz):

$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}}$

Betrachtet man die Masse als Grundgröße, so folgt dann, daß die **Kraft** eine **abgeleitete Größe** ist, und zwar abgeleitet aus den beiden Größen Masse und Beschleunigung.

Die aus (58) gebildete Einheitengleichung liefert

$$[F] = [m]\,[a] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}.$$

Einheit der Kraft: 1 kg m/s² = 1 Newton = 1 N

Der großen Bedeutung wegen sei hier die Definition des Newton und seine Umrechnung in das Kilopond nochmals wiederholt:

1 Newton ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.

Auch das Gewicht G eines Körpers stellt eine Kraft dar; läßt man ihn los, so bewegt er sich, frei fallend, mit der gleichbleibenden Beschleunigung g (s. 2.2.3.). Folglich gilt das Grundgesetz in der Schreibweise:

(59) $\boxed{G = mg}$ **Gewicht = Masse · Schwerebeschleunigung**

Setzt man in diese Gleichung die Masse $m = 1$ kg ein, so ergibt sich die Kraft $F = 1\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}81\ \mathrm{kg\,m/s^2} = 9{,}81$ N. Diese Kraft ist das bereits in **1.2.4.** erwähnte Kilopond:

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = \frac{1}{9{,}80665}\,\mathrm{kp};\quad 1\,\mathrm{kp} = 9{,}80665\,\mathrm{N}}$$

Berechnungen, in denen die Masse m vorkommt, werden besonders einfach, wenn man die zugehörige Kraft in Newton einsetzt. Erhält man andererseits das Newton als Ergebnis, so kann dieses nachträglich leicht in Kilopond umgerechnet werden.

Beispiele: 1. Welche Zugkraft ist erforderlich, wenn ein Triebwagen von 80 t Masse mit einer Beschleunigung von 50 cm/s² anfahren soll? –

$$F = ma = \frac{80000\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 40000\ \mathrm{kgm/s^2} = 4080\ \mathrm{kp}.$$

2. Welche Beschleunigung erfährt der auf Bild 80 angegebene Wagen, wenn er samt Kraftmesser die Masse $m_1 = 0{,}5$ kg hat und durch einen fallenden Körper der Masse $m_2 = 0{,}15$ kg angetrieben wird? – Die gesamte in Bewegung versetzte Masse ist $m = m_1 + m_2$; die bewegende Kraft ist das Gewicht $F = m_2 g$. Das Grundgesetz liefert

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{0{,}65\ \mathrm{kg\,s^2}} = 2{,}26\ \mathrm{m/s^2}.$$

4.2. Trägheitskräfte

Bereits bei der Betrachtung relativer Bewegungen (2.4.1.) hatten wir festgestellt, daß in allen *gleichförmig* zueinander bewegten Bezugsystemen dieselben Naturgesetze gelten. Auch das Trägheitsgesetz (57) gilt ganz unabhängig davon, mit welcher Geschwindigkeit sich der Beobachtungsort bewegt. Es gilt im „ruhenden" Laboratorium ebenso wie im gleichförmig dahinfahrenden Zug.

Wenn aber der Beobachtungsort in *beschleunigter* oder *verzögerter* Bewegung ist, ändern sich die Verhältnisse. Es können da Massen in beschleunigte Bewegung geraten, ohne daß man eine entsprechende Kraft auszuüben braucht. Sitzt man z. B. in einem Eisenbahnwagen und beobachtet eine am Boden liegende Kugel, so rollt diese beim plötzlichen Anfahren rückwärts. Auch die Fahrgäste verspüren eine der Richtung der Beschleunigung entgegengesetzte Kraft, und schlecht gestaute Koffer können sogar aus dem Gepäcknetz fallen. Erst an solchen und ähnlichen dem Trägheitsgesetz scheinbar zuwiderlaufenden Erscheinungen bemerkt der Beobachter, daß er sich in einem **beschleunigten Bezugssystem** befindet.
Der Widerspruch gegen das Trägheitsgesetz läßt sich aber lösen, wenn man sich auf das NEWTONsche Grundgesetz (58) beruft und eine Kraft als bewegende Ursache annimmt. Diese Kraft läßt sich allerdings *nur innerhalb des beschleunigten Bezugssystems* messen, indem man z. B. die erwähnte Kugel an einer Spannfeder (Bild 81) befestigt. Sie ergibt sich als Produkt aus der Masse und einer Beschleunigung, die entgegengesetzt gleich derjenigen ist, mit der sich das beschleunigte Bezugssystem gegen einen außerhalb befindlichen Beobachter bewegt. Man nennt sie Trägheitskraft:

(60) $\boxed{F_T = -ma}$ **Trägheitskraft** F_T

Trägheitskräfte wirken im beschleunigten Bezugssystem. Sie haben ihre Ursache darin, daß sich das System mit dem Beobachter beschleunigt bewegt und die betrachtete Masse allein ihrer Trägheit unterliegt.

Für einen außerhalb des beschleunigten Bezugssystems (z. B. des anfahrenden Zuges) stehenden Beobachter (z. B. einen Mann am Bahndamm) existiert diese Kraft nicht. Er sieht lediglich, daß die betrachtete Masse dem Trägheitsgesetz zufolge im Ruhezustand verharrt und gegenüber dem beschleunigten System eine Relativbewegung ausführt.

Beispiele: 1. Ein in einem frei fallenden Aufzug befindlicher Körper verliert scheinbar sein Gewicht. Der Beobachter im Innern des Aufzugs befindet sich in einem mit der Beschleunigung g bewegten Bezugssystem. Von seinem Standpunkt aus entsteht die Trägheitskraft $F_T = -mg$. Zusammen mit dem Gewicht $G = mg$ wird die resultierende Kraft $G + F_T = 0$.

2. Wie kann man mittels eines aufgehängten Lotes die Beschleunigung eines bewegten Fahrzeuges messen (Bild 82)? –
Die an der Masse des Lotes wirkende Trägheitskraft $F_T = -ma$ ergibt mit $G = mg$ die Resultierende $F_T = m\sqrt{a^2 + g^2}$. Ihr entspricht die resultierende Beschleunigung a_R, die eine Schrägstellung des Lotes bewirkt. Aus dem Winkel α der Lotabweichung läßt sich a berechnen.

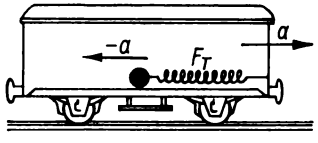


Bild 81. Trägheitskraft einer Masse im beschleunigten Bezugssystem

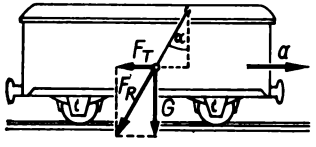


Bild 82. Lot im beschleunigten Wagen

3. Welche Zugkraft zeigt der Kraftmesser an, wenn sich der auf Bild 80 dargestellte Wagen in Bewegung befindet? –
Bei festgehaltenem Wagen zeigt der Kraftmesser die volle Zugkraft $F = m_2 g$ an. Im bewegten Zustand stellen Kraftmesser und Wagen ein beschleunigtes Bezugssystem dar, dessen Beschleunigung auf S. 72 mit $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$ berechnet wurde. Die am Kraftmesser zusätzlich auftretende Trägheitskraft ist $F_T = -m_2 a$ und ergibt mit der Kraft $F = m_2 g$ die Resultierende $F' = F + F_T = m_2 g\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)$. Die auf S. 72 gegebenen Zahlenwerte ergeben $F' = 1{,}13$ N.

4.3. Bewegungshemmende Kräfte

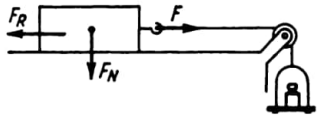
Die Massenträgheit bestimmt zwar einen wesentlichen Teil der zur Beschleunigung eines Körpers erforderlichen Kraft. In den meisten Fällen treten jedoch noch weitere Kräfte hinzu, die den Bewegungsablauf hemmen. Man faßt sie unter dem Begriff der **Reibung** zusammen. Wegen des zusätzlichen Kraftbedarfs ist sie häufig unerwünscht. Andererseits wären manche Arten der Kraftübertragung (Treibriemen, Fortbewegung beim Gehen und Fahren) ohne Reibung undenkbar.
Die zur Bewegung eines Körpers erforderliche Kraft besteht demnach im allgemeinen aus zwei voneinander unabhängigen Anteilen. Die Überwindung der Massenträgheit erfordert eine Kraft, die nach dem Grundgesetz (58) von der angestrebten Beschleunigung abhängt. Dagegen ist die zur Überwindung der Reibung notwendige Kraft in erster Näherung von der Geschwindigkeit unabhängig. Die Gesamtkraft ist also stets als *Summe aus beiden Kräften* anzusetzen. Es kann aber vorkommen, daß die zur Überwindung der Trägheit erforderliche Kraft größenmäßig hinter der Reibungskraft so zurücktritt, daß die erstere kaum bemerkt wird, wie es z. B. beim Herausziehen eines Nagels oder beim Abschleppen eines Steinblockes der Fall ist. In früheren Zeiten gelang es daher nicht, Massenträgheit und Reibungseinflüsse auseinanderzuhalten, so daß das Trägheitsgesetz verhältnismäßig spät entdeckt wurde.
Die Hauptursache der Reibung ist die unebene Oberfläche der Körper. Bei mikroskopischer Betrachtung erweisen sich selbst mit großer Sorgfalt bearbeitete Oberflächen noch als rauh und zerklüftet. Die Reibung äußert sich als eine der Bewegung entgegen gerichtete *Kraft*.

Die Reibungskraft ist der bewegenden Kraft entgegen gerichtet.

4.3.1. Haftreibung

Bei dem Versuch, einen auf einer Unterlage ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, macht sich zunächst die **Haftreibung** geltend. Man kann folgenden Versuch anstellen: Ein Holzklotz steht auf dem Tisch. Von einem am Faden angehängten Körper wird eine seitliche Zugkraft ausgeübt (Bild 83). Steigert man diese durch schrittweises Zulegen von Wägestücken, so bleibt der Klotz zunächst liegen. Dies beweist, daß die Reibungskraft F_R der jeweiligen Zugkraft F entgegengesetzt gerichtet und ebenso groß wie diese ist. Man belastet so lange weiter, bis der Klotz zu rutschen beginnt. In

Bild 83. Bestimmung der Reibungskraft F_R



diesem Augenblick ist die Zugkraft F ebenso groß wie der Maximalwert der Haftreibung F_R geworden. Bei weiterer Vergrößerung der Zugkraft F wird dann $F > F_R$, und der Klotz bewegt sich beschleunigt vorwärts. Stellt man beispielsweise fest, daß der Körper vom Gewicht $G = 500$ p bei einer Zugkraft von $F = 300$ p ins Gleiten gerät, so ist in diesem Augenblick auch $F_R = 300$ p, und man kann schreiben $F_R : G = 300\text{ p} : 500\text{ p}$ oder $F_R = 0{,}6\,G$. Den bei diesem Versuch ermittelten Zahlenfaktor 0,6 nennt man die **Haftreibungszahl** μ_0. Wenn man bei einem zweiten Versuch den Klotz auf die schmale Seite stellt, erhält man dasselbe Ergebnis:

Die Reibungskraft ist bei gleichem Gewicht von der Größe der berührenden Oberflächen unabhängig. Sie hängt nur von der Beschaffenheit der einander berührenden Oberflächen ab.

Ferner wird die Reibungskraft F_R nur von der senkrecht zur berührten Unterlage wirkenden Kraftkomponente hervorgerufen, die als *Normalkraft* F_N bezeichnet wird. Damit wird

(61) $\boxed{F_R = \mu_0 F_N}$ **Coulombsches Reibungsgesetz**

Auf einfache Weise bestimmt man μ_0 dadurch, daß man eine schiefe Ebene (Bild 84) so lange neigt, bis der daraufgestellte Probekörper abzugleiten beginnt. Dies geschieht bei demjenigen Neigungswinkel α, für den Reibungs- und Hangabtriebskraft gleich groß werden. Man nennt ihn auch den **Reibungswinkel** α. Die Normalkraft ist nach (47)

$F_N = G\,\frac{b}{l} = G\cos\alpha,$

die Hangabtriebskraft ist nach (46)

$F_H = G\,\frac{h}{l} = G\sin\alpha$. Demnach ist

Reibungskraft = Hangabtriebskraft

$$\mu_0 G\cos\alpha = G\sin\alpha$$

(62) $\boxed{\mu_0 = \tan\alpha}$

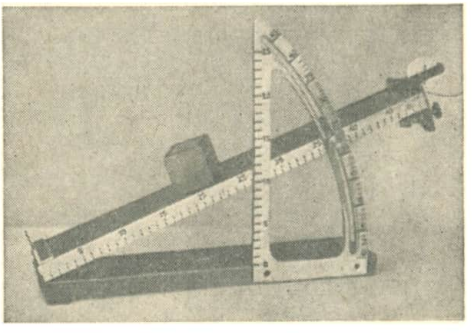


Bild 84. Bestimmung der Haftreibungszahl

4.3.2. Gleitreibung und Fahrwiderstand

Die Reibung ist erheblich **kleiner,** wenn sich der Körper im Gleiten befindet. Um die **Gleitreibung** zu messen, stellt man den gleichen Versuch wie vorhin an. Durch leichtes Beklopfen der Unterlage beseitigt man jedoch das Anhaften und vergrößert die Zug-

kraft so lange, bis der Körper in gleichförmige Bewegung gerät. Während dieser besteht Gleichgewicht zwischen Zug- und Reibungskraft.
Noch viel kleiner wird die Reibung, wenn ein Körper auf seiner Unterlage rollt. Man spricht dann von der *Rollreibung*. Bei einem einfachen Wagenrad sind beide Reibungsvorgänge zu sehen: an der Achse Gleitreibung (Gleitlager!)[1]) und am Boden Rollreibung. Beide Vorgänge faßt man mit Hilfe der **Fahrwiderstandszahl** μ zusammen.

Ungefähre Haft- und Gleitreibungszahlen

Material	Haftreibung	Gleitreibung trocken	Gleitreibung geschmiert	Gleitreibung mit Wasser
Stahl/Stahl	0,15	0,1	0,009	—
Stahl/Rotguß	0,18	0,16	0,01	—
Metall/Holz	0,6 ··· 0,5	0,5 ··· 0,2	0,08 ··· 0,02	0,25
Holz/Holz	0,65	0,4 ··· 0,2	0,16 ··· 0,04	0,25
Lederriemen/Grauguß	0,56	0,28	0,12	0,38
Eisen/Eis	—	—	—	0,014
gebremstes Auto				
auf Pflaster	—	0,5	—	0,2
desgl. auf Asphalt	—	0,3	—	0,15

Ungefähre Fahrwiderstandszahlen

Straßenbahn	0,006 (Rillenschienen)	gummibereifte Fahrzeuge	
Eisenbahn	0,002	auf Pflaster	0,04
Fuhrwerk auf gutem Erdweg	0,05	desgl. auf Asphalt	0,02
desgl. auf Asphalt	0,015	Loren in Bergwerken	0,01

Beispiele: 1. Welche Kraft ist aufzuwenden, um einen Kraftwagen ($m = 1200$ kg) auf horizontaler Straße in gleichförmiger Geschwindigkeit zu halten (Fahrwiderstandszahl $\mu = 0{,}02$)? –

$$F = \mu m g = 0{,}02 \cdot 1200\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 235{,}4\,\text{N} = 24\,\text{kp}\,.$$

2. Bei welchem Anstieg einer Bahnstrecke beginnen die Räder einer 60 Mp schweren Lokomotive ($m_2 = 60$ t), die einen Zug (Gesamtmasse $m_1 = 800$ t) zieht, zu rutschen? (Haftreibungszahl der Triebräder $\mu_0 = 0{,}15$, Fahrwiderstand des Zuges $\mu = 0{,}002$) –

Es gilt die Gleichung

Reibungskraft der Lokomotive = (Hangabtrieb + Fahrwiderstand) des ganzen Zuges,

wobei die Reibungskraft der Lokomotive vom Gewicht G_2 nach Gleichung (61) $\mu_0 G_2 \cos\alpha$ und $G_2 \cos\alpha$ die entsprechende Normalkraft ist. Der Hangabtrieb des ganzen Zuges ist nach Gleichung (46) $F_H = G_1 \sin\alpha$ und der Fahrwiderstand $\mu G_1 \cos\alpha$. Somit wird

$$\mu_0 m_2 g \cos\alpha = m_1 g \sin\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha\,.$$

[1]) Wegen des immer vorhandenen Schmiermittels meistens Flüssigkeitsreibung

Beiderseitiges Dividieren durch cos α und g ergibt

$$\mu_0 m_2 = m_1 \tan\alpha + \mu m_1$$

und damit

$$\tan\alpha = \frac{\mu_0 m_2 - \mu m_1}{m_1} = 0{,}0093 \quad \text{oder} \quad 1:108.$$

5. Arbeit und Energie

5.1. Arbeit bei mechanischen Vorgängen

Die Wirkung einer Kraft wird erst dann sichtbar, wenn sie irgendeine Bewegung oder Formänderung wie z. B. die Dehnung einer Feder hervorruft. Die Größe der mit Hilfe einer Kraft erzielten Wirkung läßt sich durch den Begriff der **Arbeit** erfassen. Er ist aus zahlreichen Vorgängen des täglichen Lebens und der Technik hinreichend bekannt. Es kommt aber darauf an, ein Maß zu finden, mit dem man, unabhängig vom jeweiligen Charakter des Vorganges, die Arbeit messen kann. Bei näherer Betrachtung ergibt sich, daß in allen Fällen mit Hilfe einer Kraft ein Weg zurückgelegt wird. *Ruhende Kräfte können niemals Arbeit verrichten!* Für die Berechnung der Arbeit gilt zunächst grundsätzlich:

(63) **Arbeit = Kraft in Richtung des Weges · Weg.**

Die Einheit der Arbeit folgt aus der entsprechenden Einheitengleichung

$$[W] = [F]\,[s] = \text{Nm}$$

Einheit der Arbeit:

1 Newtonmeter (1 Nm) = 1 Joule (1 J) = 1 Wattsekunde (1 Ws) = 1 kgm²/s². Die Arbeit 1 Newtonmeter (Nm) oder Joule (sprich: schul) wird verrichtet, wenn mit der Kraft 1 N ein Weg von 1 m zurückgelegt wird.

Verwendet man als Krafteinheit das Kilopond, so erhält man das **Kilopondmeter (kpm)** (Bild 85).

Für Umrechnungszwecke merke man sich:

$$1\ \text{J} = \frac{1}{9{,}80665}\ \text{kpm}; \qquad 1\ \text{kpm} = 9{,}80665\ \text{J}$$

Soll beispielsweise ein Fahrzeug vorwärtsbewegt werden, so darf man nicht etwa mit dem Gewicht rechnen (dieses wird ja von der Straße getragen), sondern mit der *Zugkraft*, die mit

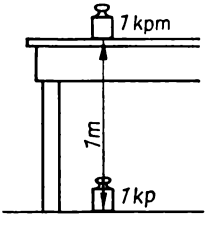


Bild 85. Die Arbeit 1 kpm

dem zurückgelegten *Weg* zu multiplizieren ist (Bild 86). Diese Zugkraft kann mittels eines Kraftmessers, der zwischen Wagen und Pferd eingespannt wird, gemessen werden.
Sie ist bei konstanter Geschwindigkeit entgegengesetzt gleich dem Fahrwiderstand und bei horizontaler Bahn nach (61) $F_R = \mu G$. Damit ist zum Zurücklegen des Weges s die Arbeit

$$W = F_R s = \mu G s$$

zu verrichten.
Häufig kommt es jedoch vor, daß die Richtungen der wirkenden Kraft und des bewegten Körpers nicht übereinstimmen.

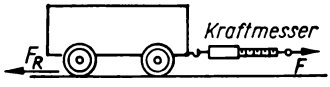


Bild 86. Zur Arbeit einer Zugkraft

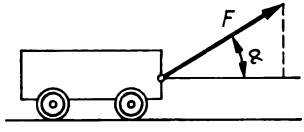


Bild 87. Projektion einer Kraft auf die Bewegungsrichtung

Das ist auf Bild 87 angedeutet, wo die Zugkraft F mit der Bewegungsrichtung den Winkel α einschließt. In diesem Fall ist nur die Komponente $F \cos \alpha$ wirksam, und man muß rechnen

(64) $$W = Fs \cos \alpha.$$

Hieraus geht hervor, daß nicht nur bei der Kraft $\mathfrak{F}$, sondern auch beim Weg $\mathfrak{s}$ die Richtung zu berücksichtigen ist. Beide sind vektorielle Größen, nicht aber die Arbeit, die skalaren Charakter hat. Die letzte Gleichung (64) wird nun mit der in der Vektorrechnung üblichen Schreibweise in der Form

$$\boldsymbol{W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}}$$

dargestellt. Dieses **skalare Produkt** zweier Vektoren bedeutet also nicht etwa das Produkt zweier Beträge, sondern gilt nur in Verbindung mit der für die Beträge gültigen Gleichung (64)!
Darüber hinaus muß aber noch daran gedacht werden, daß die Kraft längs ihres Weges durchaus nicht immer konstant zu sein braucht, sondern ihren Wert von einem Bahnpunkt zum nächsten verändern kann. Dann ist der Ausdruck $W = Fs \cos \alpha$ nur für ein äußerst kleines Wegelement Δs brauchbar. Der entsprechende Anteil ΔW der Arbeit ist hierbei

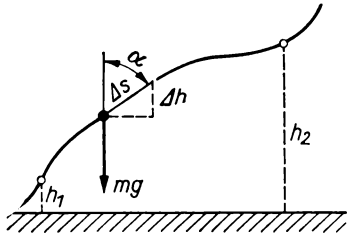
(65) $$\Delta W = F \cos \alpha \cdot \Delta s.$$

Im Grenzfall geht man von hier aus zum Differential ds über und erhält die gesamte verrichtete Arbeit durch Integration der Gleichung

(66) $$W = \int F \cos \alpha \, ds.$$

Am einfachsten berechnet sich die Arbeit, wenn ein Körper im Schwerefeld der Erde bewegt werden soll. Die wirkende Kraft F ist dabei konstant und gleich dem Gewicht

Bild 88. Arbeit im Schwerefeld



$G = mg$ des Körpers. Die Bahn möge nach Bild 88 von beliebiger Gestalt sein. Ein herausgegriffenes Wegelement Δs läßt sich wegen

$$\Delta s \cos \alpha = \Delta h$$

durch den zugehörigen Höhenunterschied Δh ersetzen. Die für einen Höhenunterschied $h = h_2 - h_1$ benötigte Arbeit erhält man dann durch Summierung der Teilarbeiten $\Delta W = mg \cdot \Delta h$:

(67) $\boxed{W = mgh}$ **Hubarbeit W**

Es kommt also in diesem Fall nicht auf den tatsächlich zurückgelegten Weg, sondern nur auf den bewältigten Höhenunterschied an:

Die entgegen der Schwerkraft verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Weg, auf dem der Körper bewegt wird, und wird allein vom Höhenunterschied bestimmt.

Unter Benutzung von Gleichung (66) kommt man zum gleichen Ergebnis. Berechnet man das bestimmte Integral zwischen zwei Bahnpunkten, denen die Höhen h_1 und h_2 zukommen, so schreibt man

$$W = \int_{h_1}^{h_2} mg \cos \alpha \, ds = \int_{h_1}^{h_2} mg \, dh$$

und erhält daraus

$$W = mg\,(h_2 - h_1).$$

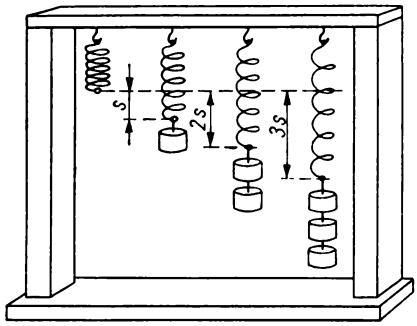


Bild 89. Dehnung einer Schraubenfeder

Bei der Berechnung der zum Spannen einer Schraubenfeder erforderlichen Arbeit ist dagegen zu beachten, daß die Kraft F längs des Weges s nicht konstant ist. Wie aus Bild 89 zu ersehen ist, nimmt die zur Dehnung notwendige Kraft vom Anfangswert Null bis zum Endwert F gleichmäßig zu. Es ist nicht der Endwert der Spannkraft F_{max}, sondern der Mittelwert $F_{max}/2$ einzusetzen:

(68) $\boxed{W = \frac{F_{max} s}{2}}$ **Dehnungsarbeit W einer elastischen Feder**

Dieses Ergebnis folgt auch aus dem Ansatz (66), wenn man beachtet, daß wegen des Zusammenfallens von Kraft- und Dehnungsrichtung $\cos \alpha = 1$ ist. Ferner muß noch die Kraft F als Funktion des Weges ausgedrückt werden. In diesem Fall ist die

Dehnung der Kraft proportional, d. h., es ist $F = Ds$. Man erhält somit

$$W = \int_0^{s_{max}} Ds \, ds$$

und nach Integration

$$W = \frac{Ds_{max}^2}{2}.$$

Nun aber ist Ds_{max} die maximale Kraft F_{max} am Ende des Vorganges, woraus sich wiederum

$$W = \frac{F_{max} s_{max}}{2}$$

ergibt.

Schließlich sei noch diejenige Arbeit berechnet, die zur Beschleunigung einer Masse aufzuwenden ist. Auch hier ist mit einer bestimmten Kraft F ein Weg zurückzulegen. Nach dem Grundgesetz (58) ist $F = ma$. Wenn die Bewegung aus der Ruhelage beginnt, ist die zurückgelegte Strecke nach (11) $s = \frac{vt}{2}$ (v Endgeschwindigkeit), womit die Arbeit $W = \frac{mavt}{2}$ wird. Setzt man noch für die Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$ ein, so erhält man $W = \frac{mv^2t}{2t}$ oder

(69) $$\boxed{W = \frac{mv^2}{2}}$$ **Beschleunigungsarbeit W**

Beispiele: 1. Ein Kraftwagen hat die Masse 900 kg und soll nach dem Anfahren die Geschwindigkeit 20 m/s erreichen.
Welche Arbeit ist ohne Berücksichtigung der Reibung aufzuwenden? –
Nach (69) ist $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{900\,\text{kg} \cdot 400\,\text{m}^2}{2\text{s}^2} = 180000\,\text{kg m}^2/\text{s}^2 = 18350\,\text{kpm}$.

2. Welche Arbeit ist aufzuwenden, um eine Last von 200 kg auf einer um 40° ansteigenden Schrotleiter 5 m weit aufwärts zu verschieben (Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}3$)? –
Die Arbeit setzt sich zusammen aus der Hubarbeit und der Reibungsarbeit. Die erste ist $W_1 = mgh$ mit $h = s \sin \alpha$. Die zweite ist $W_2 = \mu F_N s$ mit $F_N = mg \cos \alpha$. Damit ist die Gesamtarbeit

$$W = mgs (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$
$$W = 200\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 5\,\text{m}\,(0{,}643 + 0{,}3 \cdot 0{,}766) = 8562\,\text{kgm}^2/\text{s}^2 = 873\,\text{kpm}.$$

5.2. Potentielle und kinetische Energie

Die Verrichtung einer bestimmten Arbeit zieht an den davon betroffenen Körpern immer Veränderungen nach sich. Sie sind am Bewegungszustand des Körpers, seiner Lage oder seiner Form erkennbar. Dabei kann man häufig beobachten, daß der Körper von selbst wieder in den früheren Zustand zurückkehrt und seinerseits Arbeit verrichtet, die man bei entsprechenden Vorkehrungen auch ausnutzen kann. Es ist

also festzustellen, daß sich die einmal verrichtete Arbeit vorübergehend oder auch längere Zeit gleichsam aufbewahren läßt. Diese in einem Körper gespeicherte Arbeit nennt man **Energie.**

Energie ist die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.

Ein besonders einfaches Beispiel bietet sich beim Emporwinden einer Last. Sie kann sich in jedem Augenblick wieder senken und eine entsprechende Arbeit an die Antriebskurbel abgeben. Solchermaßen gespeicherte Arbeit nennt man **potentielle Energie** (Lageenergie). Jeder Körper besitzt derartige Energie, sofern für ihn die Möglichkeit besteht, vermöge der Erdanziehung tiefer zu gelangen. So ist in den zahlreichen Steinen eines Hauses die gesamte beim Ziegeltragen aufgewandte Arbeit in Form potentieller Energie enthalten. Hochgelegene Wassermassen in Gebirgsseen enthalten große Vorräte an potentieller Energie, die sich besonders bequem nutzbar machen lassen.

(70) $\boxed{W_{pot} = Gh = mgh}$ **Potentielle Energie W_{pot} eines gehobenen Körpers**

Ebenso enthalten auch zusammengedrückte oder gedehnte elastische Federn potentielle Energie. Sie ist gleich dem Betrag derjenigen Arbeit, die zu ihrer Verformung aufzuwenden ist. Man denke dabei an eine aufgezogene Uhr, deren gespannte Feder einen bestimmten Vorrat an potentieller Energie enthält.
Aber auch bewegte Körper haben die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Sie enthalten **kinetische Energie** (Bewegungsenergie). Zweifellos hängt diese von der Masse und der Geschwindigkeit des bewegten Körpers ab.
Um sie zu berechnen, ist zu bedenken, daß auch die Bewegungsenergie aus Arbeit entsteht; denn um einen Körper in Bewegung zu setzen, muß man ihn aus der Ruhelage beschleunigen, bis er die Geschwindigkeit v erreicht hat. Beim Abbremsen spielt sich derselbe Vorgang in umgekehrter Reihenfolge ab. Für die frei werdende Arbeit muß sich zwangsläufig derselbe Ausdruck ergeben, der sich in Formel (69) für die Beschleunigungsarbeit ergab.

(71) $\boxed{W_{kin} = \frac{mv^2}{2}}$ **Kinetische Energie W_{kin}**

Beispiel: Ein Rammbär von 50 kg fällt aus einer Höhe von 1,80 m. Zu berechnen sind die potentielle Energie am Anfang und die kinetische Energie am Ende des Vorgangs.–

$$W_{pot} = mgh = \frac{50\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m} \cdot 1{,}8\,\text{m}}{\text{s}^2} = 882{,}9\,\text{kgm}^2/\text{s}^2 = 882{,}9\,\text{Ws} = 90\,\text{kpm}.$$

Setzt man nach (15) $v^2 = 2gh$, so wird

$$W_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh.$$

Das bedeutet: Die beim freien Fall frei werdende kinetische Energie ist gleich der potentiellen Energie vor dem Herabfallen!

5.3. Gesetz von der Erhaltung der Energie

Das Ergebnis des letzten Beispiels kann nur im ersten Augenblick überraschen; denn man kann nach aller Erfahrung nicht erwarten, daß ein Rammbär mehr Arbeit verrichtet, als man vorher in ihn hineingesteckt hat. Wenn das möglich wäre, könnte man ja die Masse mit der gewonnenen Energie wieder auf die alte Höhe heben, zusätzlich noch eine Maschine antreiben, und dies noch beliebig lange! Daß dies im Prinzip unmöglich ist, beweisen die zahlreichen mißlungenen Versuche, ein **Perpetuum mobile** zu bauen, d. h. eine Vorrichtung, welche sich von selbst ohne äußere Energiezufuhr fortdauernd bewegt und sogar noch Arbeit nach außen abgibt. Vielmehr wird das gesamte Naturgeschehen beherrscht vom



Bild 90. Robert Mayer (1814 bis 1878)

(72) **Gesetz von der Erhaltung der Energie** (in voller Allgemeingültigkeit aufgestellt von Robert Mayer 1842):

Energie kann weder verschwinden noch von selbst entstehen, sie kann nur ihre Form ändern.

Man betrachte als weiteren Fall ein schwingendes Pendel (Bild 91). Im höchsten Punkt seiner Bewegung hat der Körper nur potentielle und, wenn er durch seine tiefste Lage schwingt, nur kinetische Energie. In den Zwischenlagen sind beide Energiearten gleichzeitig vorhanden. Doch muß ihre Gesamtsumme immer konstant bleiben. Es findet hier selbsttätig eine fortwährende periodische Energieumwandlung statt. In jedem Augenblick ist die Gleichung erfüllt:

$$W_{pot} + W_{kin} = \text{konst.}$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur in grober Näherung bei Vernachlässigen der Reibung. In Wirklichkeit werden die Ausschläge des Pendels im Laufe der Zeit immer kleiner, bis es zum Schluß stehenbleibt. Es gibt seine Energie an die umgebende Luft und die Aufhängevorrichtung ab. Die mechanische Energie verwandelt sich nach und nach in Wärmeenergie, und diese müßte man in die Gleichung mit einbeziehen.
Rechnet man daher auch die Umgebung des Pendels mit hinzu, so bezeichnet man die Gesamtheit aller an dem Vorgang beteiligten Körper als ein **abgeschlossenes System** und kann dann sagen:

Die Gesamtsumme der Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt stets konstant.

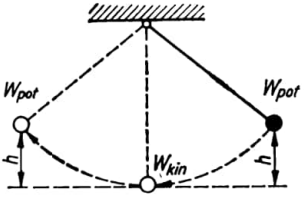


Bild 91. Energieumwandlung bei einem schwingenden Pendel

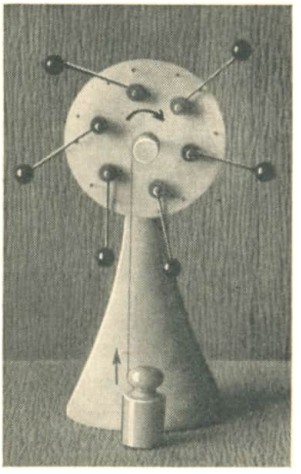


Bild 92. Vorschlag eines Perpetuum mobile

Beispiele: 1. Ein Kraftwagen hat die Geschwindigkeit 10 m/s und bremst plötzlich scharf ab. Wie lang wird die Schleifspur der Räder? ($\mu = 0{,}3$) - Die kinetische Energie des Wagens setzt sich während des Bremsens in Reibungsarbeit um: $\frac{m}{2} v^2 = F_R s$, wobei die Reibungskraft $F_R = \mu G$ und s die Bremsstrecke ist.

Es ist demnach $\frac{mv^2}{2} = \mu mgs$ und

$$s = \frac{v^2}{2g\mu} = \frac{100\,\mathrm{m^2 \cdot s^2}}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^2 \cdot 0{,}3}} = 17\,\mathrm{m}.$$

2. Ein Holzklotz gleitet auf einer schiefen Ebene vom Gefälle 3:1 aus 0,8 m Höhe abwärts. Welche Endgeschwindigkeit erreicht er bei einer Gleitreibungszahl von 0,4? - Die anfänglich vorhandene potentielle Energie Gh wird zum Teil von der Reibung aufgezehrt: $W = \mu F_N l$, wobei nach (47) $F_N = G\frac{b}{l}$ ist. Die noch verbleibende Energie setzt sich in kinetische um: $Gh - \frac{\mu Gbl}{l} = \frac{m}{2} v^2$ oder kürzer: $mg\,(h - \mu b) = \frac{m}{2} v^2$;

$$v = \sqrt{2g\,(h - \mu b)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\,(0{,}8 - 0{,}4 \cdot 0{,}27)\,\mathrm{m}} = 3{,}68\,\mathrm{m/s}.$$

3. Ein Perpetuum mobile soll nach Ansicht seines Erfinders folgendermaßen arbeiten (Bild 92): 6 Massestücke sind an einer drehbaren Kreisscheibe derart angebracht, daß sie beim Übergang auf die rechte Hälfte um Gelenke umklappen und dadurch an einem längeren Hebelarm als auf der linken Seite wirken. Beim Übergang auf die linke Seite knicken die Hebel von selbst ein, so daß hier alle Hebelarme kürzer werden. Also müßte sich das Rad von selbst immer schneller rechtsum drehen. Wo liegt der Fehler des Erfinders?

5.4. Leistung

Aus vielerlei Gründen kommt es sehr darauf an, innerhalb welcher Zeit eine bestimmte Arbeit verrichtet wird. Je größer die von irgendeiner Maschine in einem vorgegebenen Zeitraum bewältigte Arbeit ist, desto größer ist auch ihr technischer und ökonomischer Nutzen. Als Gradmesser für die in der Zeiteinheit gewonnene oder verbrauchte Arbeit dient die **Leistung:**

(73) $$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad \textbf{Leistung} = \frac{\textbf{Arbeit}}{\textbf{Zeit}}$$

Die entsprechende Einheitengleichung lautet

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}$$

Einheit der Leistung: $1\ \mathrm{kg\ m^2/s^3} = 1\ \mathrm{Nm/s} = 1\ \mathrm{Watt\ (1\ W)}$

Geht man dagegen von der Arbeit 1 kpm aus, so erhält man als Einheit der Leistung **1 kpm/s.**
Unter 1 kpm/s stellt man sich am einfachsten die Leistung vor, die vollbracht wird, wenn eine Last von 1 kp innerhalb einer Sekunde um 1 m gehoben wird.
Die von JAMES WATT eingeführte **Pferdestärke** (PS) ist jedoch keine gesetzliche Einheit mehr, darf aber bis auf weiteres noch benutzt werden.

Umrechnung der Leistungseinheiten:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{Nm/s} = \frac{1}{9{,}80665}\ \mathrm{kpm/s}$$

$$1\ \mathrm{kpm/s} = 9{,}80665\ \mathrm{W}; \quad 1\ \mathrm{PS} = 75\ \mathrm{kpm/s}$$

$$1\ \mathrm{PS} = 735{,}5\ \mathrm{W}\ \text{(genau: } 735{,}499\ \mathrm{W}); \quad 1\ \mathrm{kW} = 1{,}36\ \mathrm{PS}$$

Zu einer anderen Berechnungsweise der Leistung gelangt man, wenn die Arbeit in die beiden Faktoren Kraft und Weg zerlegt wird. Es ergibt sich dann $P = \frac{Fs}{t}$ und wegen $\frac{s}{t} = v$ der Ausdruck

(74) $$\boxed{P = Fv}$$

Hieraus ist erkennbar, daß die aufzuwendende Leistung bei konstant bleibender Kraft F mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird. Es ist ja auch bekannt daß z. B. die begrenzte Leistung eines Mopeds nicht ausreicht, um etwa die Geschwindigkeit von 100 km/h zu erzielen.

Die Leistung ist daher eine Größe, die im allgemeinen mit dem zeitlichen Ablauf des Vorganges veränderlich ist. Sowohl die Kraft F als auch die Geschwindigkeit v können von einem Augenblick zum anderen schwanken. Eine bestimmte Leistung ist demnach nur für einen äußerst kleinen Zeitraum $\mathrm{d}t$ definiert, und zwar durch den Differentialquotienten

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Mit der Gleichung (73) erhält man daher immer nur die mittlere Leistung innerhalb eines endlichen gemessenen Zeitraumes t.

Beispiele: 1. Aus einem Staubecken in 80 m Höhe fließen je Minute 100 $\mathrm{m^3}$ Wasser durch eine Turbine (Bild 93). – Die theoretische Leistung beträgt, wenn die kinetische Energie des abfließenden Wassers vernachlässigt wird,

$$P = Fv = \frac{Fs}{t} = \frac{100\,000\ \mathrm{kp} \cdot 80\ \mathrm{m}}{60\ \mathrm{s}} = 133\,333\ \mathrm{kpm/s} = 1308\ \mathrm{kW}.$$

2. Welche Leistung muß der Motor eines Kraftwagens von 1000 kg Masse aufbringen, wenn er den Wagen innerhalb von 50 s aus der Ruhelage auf 90 km/h Endgeschwindigkeit beschleunigen soll und die Bewegungswiderstände nicht berücksichtigt werden? –
Da Masse m und Beschleunigung a konstant sind, bleibt auch die Kraft F während des ganzen Beschleunigungsvorganges gleich groß. Dagegen nimmt die Geschwindigkeit v

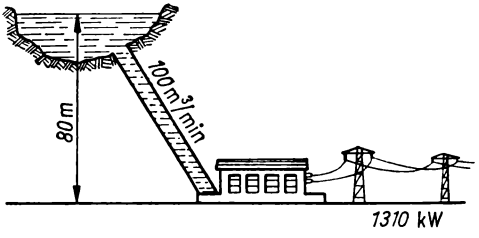


Bild 93. Leistung einer talwärts fließenden Wassermenge (bei vollständiger, d. h. verlustloser Ausnutzung!)

fortwährend zu, weshalb in diesem Fall Gleichung (74) anzuwenden ist. Sie besagt, daß die Leistung proportional zur Geschwindigkeit anwächst. Am Ende ist sie

$$P = Fv = mav = \frac{mv^2}{t} = \frac{1000\,\text{kg} \cdot (90/3{,}6)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{50\,\text{s}} = 12500\,\text{W} = 12{,}5\,\text{kW}\,;$$

zur Berechnung der *durchschnittlichen* (mittleren) Leistung muß man die mittlere Geschwindigkeit 45 km/h zugrunde legen, und man erhält

$$P = F\,\frac{v}{2} = ma\,\frac{v}{2} = 6{,}25\,\text{kW}.$$

5.4.1. Leistung bei Drehbewegungen

Wie bereits gezeigt wurde (S. 44), sind die Gesetze der Drehbewegung denen für die geradlinige Bewegung genau analog. Das heißt, unter Beibehaltung des mathematischen Aufbaus der Gleichungen sind lediglich die einzelnen Größen auszutauschen. Soll die Leistung einer rotierenden Maschine berechnet werden, ist daher anstelle der Geschwindigkeit v die Winkelgeschwindigkeit ω und anstelle der Kraft F das Drehmoment M zu setzen. Dann entsteht aus (74) der Ausdruck für die Leistung

(75) $$\boxed{P = M\omega}$$

Die entsprechende Einheitengleichung

$$[P] = [M]\,[\omega] = \text{Nm}\,\frac{1}{\text{s}}$$

zeigt sofort die Richtigkeit dieser Überlegungen.
Da in der technischen Praxis sehr häufig Drehmomente und Drehzahlen von Kraft- und Arbeitsmaschinen angegeben werden, kommt dieser Gleichung besondere Bedeutung zu.
Gleichzeitig weist Gleichung (75) einen Weg, um die Leistung von Kraftmaschinen zu messen. Dabei bedient man sich oft des Bremszaumes (Pronyscher *Zaum*, Bild 94). Auf der Welle der Maschine wird eine Graugußscheibe festgekeilt. Gegen diese drücken sich zwei Bremsbacken mit einem daran befestigten Hebel. Läßt man die Maschine laufen, so wird die Reibungskraft zwischen Scheibe und Bremsbacken bestrebt sein, den Zaum mitzunehmen. Damit das nicht geschieht, wird das Hebelende so lange mit Wägestücken belastet, bis der Zaum zwischen den Anschlägen A in der Schwebe bleibt. Durch Anziehen der Schrauben S und wechselnde Belastung kann die gewünschte Drehzahl der Maschine hergestellt werden.

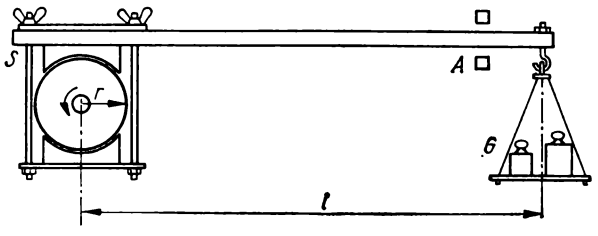


Bild 94. Pronyscher Zaum

Bei konstant gehaltener Drehzahl wird das von der Maschine erzeugte Drehmoment M durch dasjenige der Reibungskraft $F_R r$ ausgeglichen. Dieses ist wiederum gleich dem Moment des belasteten Hebels Gl, so daß $M = Gl$ ist. Die Leistung ist dann

$$P = M\omega = Gl \cdot 2\pi n$$

und kann aus der Hebellänge l, der Last G und der Drehzahl n leicht berechnet werden.

5.4.2. Wirkungsgrad

Die Wirkungsweise aller mechanisch wirkenden Maschinen (Hebezeuge, Getriebe, Wasserturbinen usw.) beruht darauf, daß diesen Vorrichtungen je Zeiteinheit ein bestimmter Energiebetrag zugeführt wird, den sie in geeigneter Form wieder abgeben sollen. Da nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie keine Energie verschwinden kann, sollte man erwarten, daß die im gleichen Zeitraum abgegebene Energie gleich der zugeführten ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß die abgegebene Leistung P_a stets kleiner als die zugeführte Leistung P_z ist; denn auch bei bester technischer Konstruktion wird ein Teil der zugeführten Energie in nicht erwünschter Weise umgesetzt, wie z. B. durch die Reibung in den Lagern und zwischen den Zahnrädern, die Entstehung von Luft- und Wasserwirbeln, den Energieaufwand für die Steuer- und Regelorgane usw. Meistens verwandelt sich hierbei ein Teil der zugeführten Energie in Wärmeenergie. Es gilt also immer die Ungleichung

$$P_a < P_z.$$

Das Verhältnis dieser beiden Leistungen ist der

$$\textbf{mechanische Wirkungsgrad} = \frac{\textbf{abgegebene Leistung}}{\textbf{zugeführte Leistung}}$$

(76) $$\boxed{\eta = \frac{P_a}{P_z}}$$

Der Wirkungsgrad wird vielfach in Prozenten angegeben und beträgt bei Flaschenzügen grober Bauart etwa 75 % je Rolle, bei sorgfältigster mechanischer Ausführung nahezu 100 %.

Bei Antriebsmaschinen (Dampf- und Verbrennungskraftmaschinen usw.) versteht man unter dem Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_e}{P_i}.$$

Hierbei bedeutet P_e die **effektive Leistung,** die z. B. mittels des PRONYschen Zaumes (5.4.1.) an der Antriebswelle gemessen wird (Bremsleistung), und P_i die **indizierte Leistung,** die sich aus dem Kolbenquerschnitt, dem Hub, dem Druckverlauf und der Drehzahl berechnen läßt.

Beispiel: Eine Druckpumpe fördert mit einem Wirkungsgrad von 75 % je Minute 120 m³ Wasser auf eine Höhe von 8 m. Wieviel Watt nimmt der Antriebsmotor auf, wenn er seinerseits mit einem Wirkungsgrad von 95 % arbeitet? –

Die von der Pumpe abgegebene Leistung beträgt $P_a = \frac{mgh}{t}$. Die Pumpe erfordert die Antriebsleistung $P_{z1} = \frac{P_a}{\eta_1}$ und der Motor $P_{z2} = \frac{P_{z1}}{\eta_2}$;

$$P_{z2} = \frac{mgh}{t\,\eta_1\eta_2} = \frac{120000\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m} \cdot 8\,\text{m}}{\text{s}^2 \cdot 60\,\text{s} \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}95} = 220{,}3\,\text{kW}.$$

5.5. MKS- und CGS-System

In der Einführung (1.2.) wurde bereits einiges über die Grundlagen des heutigen Einheitensystems gesagt. Aus den weiteren Darlegungen war dann zu ersehen, in welcher Weise die abgeleiteten Einheiten, wie z. B. diejenigen für die Kraft, Arbeit und Leistung, aus den für die Länge, Masse und Zeit festgelegten Grundeinheiten hervorgehen. Auch alle weiteren in der Mechanik erforderlichen Einheiten lassen sich in zwangloser und einfacher Weise daraus herleiten. Zur quantitativen Erfassung aller Gesetze der Mechanik genügen also vollständig die 3 Grundeinheiten: das Meter, das Kilogramm und die Sekunde. Verknüpft man diese durch einfaches Multiplizieren oder Dividieren, d. h. ohne Verwendung vermittelnder Zahlenfaktoren, so entstehen daraus die **kohärenten Einheiten** wie z. B. das Newton (kg m/s^2) oder das Watt ($\text{kg m}^2/\text{s}^3$).

Dieses kohärente Einheitensystem nennt man das **MKS-System.** Durch Hinzunahme des Ampere erhält man daraus das MKSA-System (auch GIORGISches System genannt). Wegen seiner Klarheit und Übersichtlichkeit sollte man ihm bei allen Gelegenheiten den Vorzug geben. Alle übrigen Einheiten dagegen, die sich durch Umrechnungsfaktoren mit diesen kohärenten Einheiten in Verbindung bringen lassen, nennt man **inkohärente Einheiten.** Hierzu gehören z. B. die Tonne (1 t = 1000 kg), das Kilopond (1 kp = 9,80665 N), die Kilowattstunde (1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ Ws) und viele andere. Ihr Gebrauch ist lediglich aus den Gründen ihrer weiten Verbreitung gerechtfertigt. In den eigentlichen Rechnungen sollte man sie vermeiden.

Obwohl die Grundeinheiten des MKS-Systems schon seit langem festliegen, hatte sich in der vergangenen Zeit ein anderes, ebenfalls kohärentes Einheitensystem eingebürgert. Es war das auf dem **Zentimeter** (cm), dem **Gramm** (g) und der **Sekunde** (s) basierende **CGS-System.** Da es in der physikalischen und technischen Literatur noch gelegentlich verwendet wird, sind die wichtigsten dieser Einheiten in der folgenden Übersicht mit angeführt. Durch Vergleich der entsprechenden Einheiten findet man z. B. leicht die Bedeutung der Krafteinheit Dyn (Kurzzeichen dyn):

1 dyn ist die Kraft, die der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm/s² erteilt.

Größe	Formelzeichen	Einheit CGS-Einheit	Einheit MKS-Einheit	Umrechnung
Geschwindigkeit	v	1 cm/s	1 m/s	
Beschleunigung	a	1 cm/s²	1 m/s²	
Masse	m	1 g	1 kg	
Kraft	F	1 g cm/s² = 1 dyn	1 kg m/s² = 1 N (Newton)	10^5 dyn = 1 N
Drehmoment	M	1 dyn cm	1 Nm	10^7 dyn cm = 1 Nm
Arbeit, Energie	W	1 g cm²/s² = 1 erg	1 kg m²/s² = 1 J (Joule)	10^7 erg = 1 J
Leistung	P	1 g cm²/s³ = 1 erg/s	1 kg m²/s³ = 1 W (Watt)	10^7 erg/s = 1 W

6. Impuls und Stoß

6.1. Kraft und Impulsänderung

Nach dem Grundgesetz der Dynamik wirkt jede an einem Körper angreifende Kraft beschleunigend. Wenn aber diese Kraft einwirkt, so geschieht das während einer bestimmten Zeitdauer Δt. Je länger diese anhält, desto mehr wird die Geschwindigkeit anwachsen, weil ja die Beschleunigung länger aufrechterhalten bleibt. Der erreichte Geschwindigkeitszuwachs muß daher vom Wert des Produktes $F \cdot \Delta t$ abhängen. Man nennt es den **Kraftstoß** (oder auch Antrieb; s. a. Bild 97).
Ist die Kraft F während der Zeitdauer Δt von konstantem Betrag, so ist der Kraftstoß gleich dem Flächeninhalt des auf Bild 95 gezeichneten Rechtecks.

Es ist natürlich ebenso möglich, daß die Kraft während ihres Einwirkens nicht konstant bleibt. Bei stoß- und ruckartigen Vorgängen hat man dann einen zeitlichen Verlauf, wie etwa Bild 96 zeigt. Das Produkt aus F und Δt wird dann durch die unter der Kurve liegende Fläche dargestellt, und der Kraftstoß wird zum Zeitintegral $\int F \, dt$.

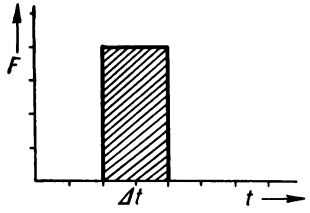


Bild 95. Kraftstoß bei zeitlich konstanter Kraft

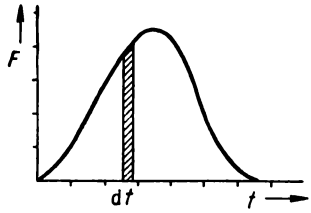


Bild 96. Kraftstoß bei zeitlich veränderlicher Kraft



Bild 97. Kraftstoß

Der Kraftstoß $F\,\Delta t$ ergibt sich aber auch durch einfache Umformung des Grundgesetzes (58):

$$F = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v\,.$$

Das auf der rechten Seite stehende Produkt ist gleich der Differenz $(mv_2 - mv_1)$, wenn v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten bei Beginn und Ende des Vorganges sind. Wie sich anschließend herausstellen wird, kommt aber dem Produkt mv eine besondere physikalische Bedeutung zu. Man bezeichnet es als den **Impuls** p der Masse m oder auch als **Bewegungsgröße.** Die Impulsänderung bringt man daher durch die Schreibweise $\Delta p = \Delta(mv)$ zum Ausdruck und erhält die Gleichung

(77) $$\boxed{F \cdot \Delta t = \Delta(mv)}$$

Der Kraftstoß ist gleich der durch ihn hervorgerufenen Änderung des Impulses.

Aus der Einheitengleichung

$$[p] = [m]\,[v] = \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \quad \text{folgt die}$$

Einheit des Impulses p: 1 kgm/s

Durch Umstellen der Gleichung (77) erhält man

(78) $$\boxed{F = \frac{\Delta\,(mv)}{\Delta t}}$$

und damit eine neue *Definition der Kraft:*

Die Kraft F ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses mv.

Dies ist die ursprüngliche Newtonsche Fassung des 2. Bewegungsgesetzes. Die heute meistgebrauchte Form (58) geht hieraus unmittelbar hervor, wenn man bedenkt, daß die Masse m während des Vorganges im allgemeinen konstant bleibt. Dann braucht man nur die Geschwindigkeitsänderung Δv zu beachten und erhält

$$F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = ma\,.$$

Beispiel: Welche treibende Kraft ist nötig, um einem Fahrzeug von 5 t Masse innerhalb von 4 s die Geschwindigkeit 18 km/h zu erteilen? –
Die anfängliche Geschwindigkeit und damit auch der Impuls zu Beginn des Vorgangs sind gleich Null.

$$F = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{5000\,\text{kg} \cdot 18\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s} \cdot 4\,\text{s}} = 6250\,\text{N} = 637\,\text{kp}.$$

6.2. Gesetz von der Erhaltung des Impulses

Man betrachte zwei leicht bewegliche Massen, zwischen denen eine gespannte Feder eingeklemmt ist (Bild 98). Wenn diese sich plötzlich entspannt, werden die Massen m_1 und m_2 auseinandergetrieben. Dabei ist die treibende Kraft für beide Massen nach dem Gegenwirkungsprinzip (3.2.) dieselbe und auch die Zeitdauer Δt bis zur schließlich erfolgenden Trennung. Jede Masse erfährt also denselben Kraftstoß, womit auch die Impulse gleich groß sein müssen. Wegen ihrer entgegengesetzten Richtung ergibt sich

(79) $$m_1 v_1 = -m_2 v_2 \quad \text{oder} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Vorher war das System Masse *1* – Feder – Masse *2* in Ruhe, hatte also insgesamt den Impuls Null. Während und nach dem Vorgang ist die Impulssumme immer noch Null. Dies ergibt verallgemeinert das

(80) **Gesetz von der Erhaltung des Impulses:**

Die Gesamtsumme der Impulse aller Teile eines abgeschlossenen Systems bleibt konstant.

Es ist ein wichtiges Gegenstück zum Energiesatz und von ebenso weitreichender Bedeutung für das gesamte physikalische Geschehen.
Es drückt zunächst die Unmöglichkeit aus, den Gesamtimpuls eines bewegten oder ruhenden Systems von Körpern von innen heraus irgendwie zu ändern. Nur durch Verbindung mit seiner Umgebung, durch Hinzunehmen äußerer Kräfte, wie Reibung usw., kann man es bremsen oder beschleunigen.
Besteht das System aus gegeneinander beweglichen Teilen, so bringt jede Impulsänderung des einen eine entgegengesetzte Impulsänderung des anderen Teils hervor.
Auf dem Impulssatz beruht auch der *Raketenantrieb* und die Bewegung der künstlichen Satelliten. Die durch Oxydation des Treibstoffes entstehenden Verbrennungsgase müssen die Ausströmdüsen mit möglichst großer Geschwindigkeit c verlassen. Dadurch verringert sich die Masse m der Rakete stetig. Wird die während eines sehr kleinen Zeitraumes entweichende Masse mit dm bezeichnet, so hat deren Impuls den Betrag $c\,dm$. Als Folge hiervon ändert die Rakete ihre Geschwindigkeit um den Betrag dv. Nach Gleichung (79) ist dann (Bild 99)

$$c\,dm = -m\,dv.$$

Beiderseitiges Integrieren ergibt

$$\int \frac{dm}{m} = -\int \frac{dv}{c} \quad \text{und} \quad \ln m = -\frac{v}{c} + C.$$

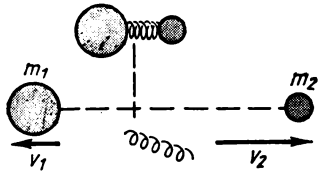


Bild 98. Impulserteilung durch eine sich entspannende Feder

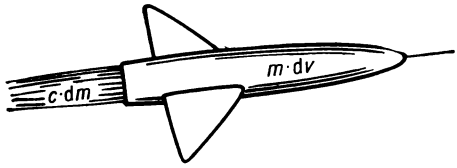


Bild 99. Zur Herleitung der Raketengleichung

Die Integrationskonstante C folgt aus der Annahme, daß beim Start ($v = 0$) die Rakete die Masse $m = m_0$ hat. So ist $C = \ln m_0$ und

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{c}.$$

Nach Entlogarithmieren entsteht damit

(81) $$\boxed{\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{v}{c}}}$$ **Ziolkowskische Raketengleichung**

Sie gilt allerdings nur bei Abwesenheit von äußeren Kräften. Erfolgt jedoch der Start an der Erdoberfläche, so ist die Wirkung der Schwerkraft in die Rechnung einzubeziehen, wodurch die Zusammenhänge komplizierter werden.

Beispiel: Die Geschwindigkeit der ausströmenden Verbrennungsgase möge $c = 2000$ m/s betragen, und es soll die für künstliche Erdtrabanten erforderliche Endgeschwindigkeit $v = 7900$ m/s erreicht werden. – Dann ergibt sich das Massenverhältnis

$$\frac{m}{m_0} = e^{-3{,}9} = e^{\frac{1}{3{,}9}} = \frac{1}{49};$$

die Startmasse m_0 muß also mindestens das 49fache der Leermasse m betragen.

6.3. Gerader Stoß

6.3.1. Unelastischer Stoß

Der Impulssatz bietet eine rechnerische Grundlage zur Behandlung von Stoßvorgängen aller Art. Dabei ist grundsätzlich zu beachten, daß sowohl Kraftstoß als auch Impuls vektorielle Größen und nach den Gesetzen der Vektoraddition zu behandeln sind. Fällt jedoch die Stoßrichtung mit der Verbindungsgeraden der beiden Massen zusammen, so handelt es sich um den Sonderfall des **geraden Stoßes**, und man kann dann einfach mit den Beträgen rechnen. Beim **unelastischen Stoß** prallen 2 Massen zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit gemeinsamer Geschwindigkeit

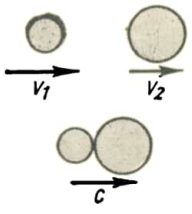


Bild 100. Nach dem unelastischen Stoß eilen beide Körper mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter

weiter (Bild 100). Zwei feuchte Tonkugeln bleiben nach dem Stoß aneinander haften. Eine Pistolenkugel, die in einen Holzklotz fährt, bewegt sich mit diesem zusammen weiter geradeaus.

Im folgenden seien: v die Geschwindigkeiten vor dem Stoß,
c die Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Dann ist nach dem Impulssatz

vor dem Stoß:		nach dem Stoß:
$m_1 v_1 + m_2 v_2$	$=$	$(m_1 + m_2)c$

und

$$\boxed{c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}} \quad (82)$$

gemeinsame Endgeschwindigkeit c nach dem unelastischen Stoß

Beispiele: 1. Ein Straßenbahnwagen fährt mit der Geschwindigkeit $v_1 = 5$ m/s gegen einen zweiten, aber ruhenden Wagen von gleich großer Masse. Mit welcher Geschwindigkeit fahren beide nach dem Einklinken der Kupplung weiter? – v_2 ist hier gleich 0; $m_1 = m_2$;

$$c = \frac{m_1 v_1}{2 m_1} = \frac{5\ \text{m}}{2\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{m/s}\,.$$

2. Auf einen mit der Geschwindigkeit $v_1 = 3$ m/s rollenden Wagen von $m_1 = 1500$ kg fällt von oben eine Masse von $m_2 = 500$ kg. Um wieviel ändert sich die Geschwindigkeit? – Die in die Bewegungsrichtung fallende Impulskomponente der Last m_2 ist gleich Null, so daß $m_2 v_2 = 0$ ist.

$$c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1500\ \text{kg} \cdot 3\,\text{m}}{2000\ \text{kgs}} = 2{,}25\ \text{m/s}\,.$$

Die Geschwindigkeit nimmt um 0,75 m/s ab.

6.3.2. Energieverhältnisse beim unelastischen Stoß

Es sollen jetzt die vor und nach dem Stoß vorhandenen Energien verglichen werden. Der Einfachheit halber sei die gestoßene Masse m_2 als ruhend angenommen, so daß $v_2 = 0$ ist. Es sind die kinetischen Energien

vor dem Stoß:		nach dem Stoß:
$W_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$	bzw.	$W = \frac{(m_1 + m_2)\,c^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(m_1^2 v_1^2)}{2\,(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2\,(m_1 + m_2)}$

$$\boxed{W = W_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \quad (83)$$

Energie W nach dem unelastischen Stoß $(v_2 = 0)$

Da die Energie W nach dem Stoß kleiner als die Energie W_0 vor dem Stoß ist, geht demnach mechanische Energie verloren, was auch begreiflich ist: Plastische Verformung, innere und äußere Reibung wandeln mechanische Energie in Wärme um. Diese Vorgänge sind überhaupt die Voraussetzung dafür, daß ein Stoß unelastisch erfolgen kann.
Beim *Schmieden* ist die Hauptabsicht die Verformung des Werkstückes. Möglichst viel Energie soll in Verformungsarbeit umgesetzt werden.

Beispiel: Ein Hammer von $m_1 = 15$ kg Masse schlägt mit der Geschwindigkeit $v_1 = 5$ m/s auf das Schmiedestück von $m_2 = 5$ kg Masse, das auf einem Amboß von $m_3 = 1{,}5$ t Masse ruht. Der Untergrund ist nachgiebig, so daß der Amboß der gemeinsamen Stoßgeschwindigkeit zu folgen vermag, wodurch ein unelastischer Stoß zustande kommt. – Es ist die Energie vor dem Stoß $W_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ und die Energie nach dem Stoß zufolge (83) $W = W_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$; die Differenz $\Delta W = W_0 - W = W_0 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$ wird zur Verformung des Werkstückes umgesetzt und berechnet sich hier zu $\Delta W = 185{,}6$ J; als „Wirkungsgrad" des Vorganges wird das Verhältnis

$$\eta = \frac{\Delta W}{W_0} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

bezeichnet. Es beträgt in diesem Fall $\eta = \frac{1505\,\text{kg}}{1520\,\text{kg}} = 0{,}99$. Man sieht hier auch, wann der Wirkungsgrad recht günstig wird: Die Masse des Ambosses muß recht groß sein!

6.4. Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß fahren beide Massen nach dem Zusammenprall ohne Energieverlust wieder auseinander (Bild 101). Wenn der Vorgang auch außerordentlich rasch verläuft (Bild 102), kann man ihn stets in 3 Teilabschnitte zerlegen:

1. Zusammenstoß der Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2;

2. Veränderung der beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bis zu einem Augenblick, da beide Massen die gleiche Geschwindigkeit c haben. Diese ergibt sich wie beim unelastischen Stoß nach Gleichung (82).

3. Die federnd zusammengepreßten Massen drücken sich voneinander und nehmen dabei die neuen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 an.
Wie in Bild 101 angedeutet, wird die Masse m_1 beim Zusammenstoß zweimal nacheinander abgebremst. Beide Male verliert sie wegen der Symmetrie des Vorganges den gleichen Geschwindigkeitsbetrag, so daß die gemeinsame Geschwindigkeit c das arithmetische Mittel aus dem Anfangswert v_1 und Endwert c_1 sein muß. Aus $c = \frac{v_1 + c_1}{2}$ ergibt sich daher $c_1 = 2c - v_1$. Für die Masse m_2 gilt eine analoge Überlegung.

(84) $\boxed{\begin{aligned} c_1 &= 2c - v_1 \\ c_2 &= 2c - v_2 \end{aligned}}$ **Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoß**

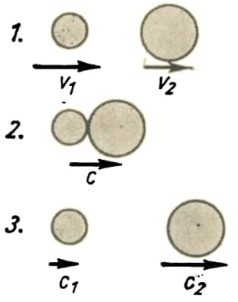


Bild 101. Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß

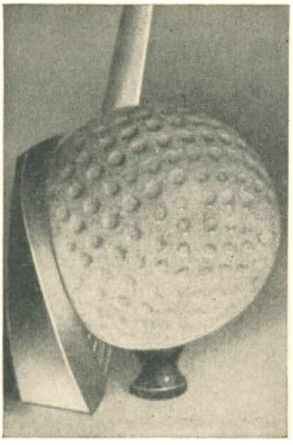


Bild 102. Zeitlupenaufnahme des elastischen Stoßes gegen einen Gummiball. Während der Berührungszeit von 1/5000 s legen beide Körper gemeinsam 1 cm zurück

Für den vereinfachenden Fall, daß der angestoßene Körper m_2 vor dem Stoß ruht, also $v_2 = 0$ ist, erhält man unter Benutzung von (82)

(85)
$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ c_2 &= v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

Geschwindigkeiten c nach dem elastischen Stoß gegen eine ruhende Masse m_2

Berechnet man hieraus die Summe der nach dem Stoß vorhandenen kinetischen Energie, so erhält man

$$\frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2 (m_1 - m_2)^2}{2 (m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 v_1^2 \cdot 4 m_1^2}{2 (m_1 + m_2)^2}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß hierbei $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ herauskommt. Das ist die Anfangsenergie der stoßenden Masse. Im Gegensatz zum unelastischen Stoß treten also keinerlei Verluste an mechanischer Energie auf:

Beim elastischen Stoß bleiben Impuls und Energie erhalten.

Beispiele: Elastische Stoßvorgänge kann man sehr schön beim Rangieren von Güterwagen beobachten.

1. Ein Wagen stößt gegen einen ruhenden Wagen von gleicher Masse. $m_1 = m_2$; $v_2 = 0$. – Nach (85) ist

$$c_1 = v_1 \frac{0}{2m_1} = 0.$$

Der stoßende Wagen bleibt stehen.

$$c_2 = v_1 \frac{2m_1}{2m_1} = v_1.$$

Der gestoßene Wagen fährt mit der Geschwindigkeit v_1 davon. Die Wagen haben ihre Geschwindigkeiten ausgetauscht.

2. Zwei Wagen gleich großer Masse stoßen mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit zusammen: $v_1 = -v_2$; $m_1 = m_2$. - Nach (82) ist die gemeinsame Geschwindigkeit während der Berührung $c = 0$ und damit nach (84) $c_1 = -v_1$ und $c_2 = v_1$.
Die Wagen fahren mit denselben Geschwindigkeiten entgegengesetzt auseinander.

3. Ein Wagen fährt gegen einen Prellbock. $m_2 = \infty$; $v_2 = 0$. - Nach (84) ist

$$c_1 = 2c - v_1 \quad \text{und nach (82)} \quad c_1 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} - v_1\,; \quad c_1 = \frac{2m_1v_1}{\infty} - v_1 = -v_1\,.$$

4. Gegen einen anfänglich ruhenden Wagen der Masse m_2 stößt ein anderer Wagen der Masse m_1. Wie groß sind die beiden Massen, wenn beide mit gleicher Geschwindigkeit auseinanderfahren sollen? - Setzt man $c_1 = -c_2$, so ergibt die Gleichsetzung der beiden Gleichungen (85): $m_1 - m_2 = -2m_1$ und $m_2 = 3m_1$. Der angestoßene Wagen muß die 3fache Masse haben!

Hier ist aus Gründen der einfachen Darstellung nur der **gerade Stoß** behandelt worden, bei dem die Stoßrichtung in die Verbindungsgerade der Schwerpunkte fällt. Das ist beim **schiefen** Stoß anders. Man denke z. B. an das seitliche Treffen zweier Billardkugeln, wobei dann die Kugeln in einem Winkel auseinanderweichen. Um derartige Vorgänge zu erfassen, muß daran gedacht werden, daß **Impulse Vektoren** sind, d. h. gerichtete Größen. Die Zusammensetzung erfolgt dann gemäß dem Additionsprinzip für Vektoren nach dem Parallelogrammsatz.

6.4.1. Reflexionsgesetz

Es sei hier nur noch der Fall behandelt, bei dem eine elastische Kugel schief gegen eine feste Wand prallt (Bild 103). Man kann ihre Geschwindigkeit v in eine normale (v_1) und tangentiale (v_2) Komponente zerlegen. Nach dem Ergebnis von Beispiel 3 kehrt sich durch den Rückprall die Komponente v_1 um, während Komponente v_2 durch den Stoß nicht beeinflußt werden kann, da die Kugel in tangentialer Richtung keine stoßende Berührung mit der Oberfläche erfährt.
Nach dem Stoß entsteht also die Geschwindigkeit v' durch Zusammensetzung der Komponenten $-v_1$ und v_2. Aus den geometrischen Verhältnissen ergibt sich dann das

Reflexionsgesetz des elastischen Stoßes:

Beim elastischen Stoß einer Kugel gegen eine feste Wand ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt unverändert.

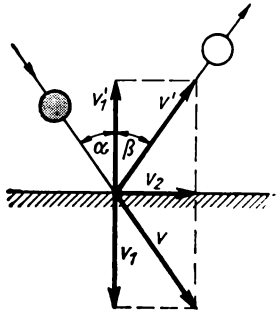


Bild 103. Reflexionsgesetz des elastischen Stoßes

7. Kräfte an rotierenden Körpern

7.1. Energie des rotierenden Körpers

Offensichtlich haben nicht nur geradlinig bewegte Massen kinetische Energie, sondern auch rotierende Massen, wie umlaufende Maschinenteile, Schwungräder usw. Letztere sind ja gerade deswegen angebracht, um als Energiespeicher einen gleichmäßigen Lauf der Motoren zu erzielen (Bild 104).

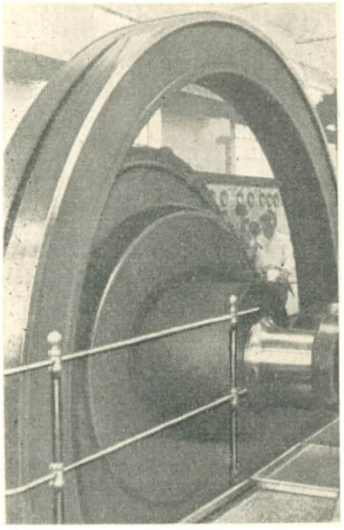


Bild 104. Schwungrad einer Dampfmaschine (Rotationsenergie)

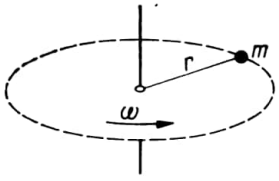


Bild 105. Umlaufender Massenpunkt

Um das Problem zu vereinfachen, sei zunächst ein einfacher Massenpunkt m betrachtet, der nach Bild 105 mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r um einen Punkt rotieren möge. Dann ist seine Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$. Die kinetische Energie ist ferner nach (71)

$$W_{kin} = \frac{mv^2}{2} = mr^2 \frac{\omega^2}{2}.$$

Zur Vereinfachung faßt man nun den Ausdruck mr^2 für sich zusammen und bezeichnet ihn als **Massenträgheitsmoment** J.

(86) $\boxed{J = mr^2}$ **Massenträgheitsmoment J eines Massenpunktes**

Einheit des Massenträgheitsmomentes: 1 kg m².

Man kann also im obigen Ausdruck für die kinetische Energie den Faktor mr^2 durch J ersetzen und erhält

(87) $\boxed{W_{\text{kin}} = \frac{J}{2}\omega^2}$ **Energie eines rotierenden Körpers**

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Energie eines geradlinig bewegten Massenpunktes $\frac{m}{2}v^2$, so bemerkt man in formaler Hinsicht eine vollkommene Übereinstimmung. Wie bei der geradlinigen Bewegung kommt es ja darauf an, eine Masse m entgegen ihrem Beharrungsvermögen in Bewegung zu setzen. Der bei einer beabsichtigten Drehung fühlbare Widerstand rührt von derselben Massenträgheit her. Nur muß man sich merken, daß in solchen Fällen nicht die Masse m, sondern das Massenträgheitsmoment J maßgebend ist.

7.2. Berechnung von Massenträgheitsmomenten

Da die Definition $J = mr^2$ nur für einen Massenpunkt gilt, ist diese allenfalls noch auf kleine Körper anwendbar, die im Verhältnis zu ihrem Abstand von der Drehachse nur geringe Abmessungen aufweisen. Einen ausgedehnten Körper zerlegt man gedanklich in lauter kleine Massenteilchen Δm und stellt sich vor, daß jedes einzelne in einem bestimmten Abstand r die Drehachse umkreist. Es ist also zu beachten, daß im allgemeinen jedes Massenteilchen Δm einen anderen Abstand r von der Drehachse hat. Das gesamte Massenträgheitsmoment ist dann gleich der Summe.

(88) $\boxed{J = \sum r^2 \cdot \Delta m}$ **Massenträgheitsmoment J**

Mit elementaren Mitteln kann diese Summe nur näherungsweise ermittelt werden.

Näherungsweise Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines dünnen Stabes. Man zerlegt den Stab nach Bild 106 gedanklich in 5 kurze Teilstücke von der Masse $\Delta m = \varrho A \cdot \Delta l$ (ϱ Dichte, A Querschnitt, Δl Teillänge). Dann wird das Massenträgheitsmoment in bezug auf seinen Endpunkt $J = \sum r^2 \cdot \Delta m$ mit $r = {}^1/_2\,\Delta l$, ${}^3/_2\,\Delta l$, ${}^5/_2\,\Delta l$, ${}^7/_2\,\Delta l$ und ${}^9/_2\,\Delta l$:

$$J \approx [({}^1/_2)^2 + ({}^3/_2)^2 + ({}^5/_2)^2 + ({}^7/_2)^2 + ({}^9/_2)^2]\,\varrho A \cdot \Delta l^3 = \frac{165}{4}\varrho A \cdot \Delta l^3 .$$

Mit $\Delta l = \frac{l}{5}$ und $\varrho A l = m$ wird $J \approx \frac{165}{500} ml^2 = 0{,}33\, ml^2$. Der mathematisch genaue Wert ist $\frac{ml^2}{3}$.

Weit vorteilhafter ist es dagegen, vom einzelnen Massenelement Δm endlicher Größe zum Differential $\mathrm{d}m$ überzugehen und die Summation auf dem Wege der Integralrechnung vorzunehmen:

(89) $\boxed{J = \int r^2\,\mathrm{d}m}$

Berechnung des Massenträgheitsmoments eines homogenen Kreiszylinders in bezug auf seine Achse. Man zerlegt den Zylinder zweckmäßig in konzentrische dünnwandige Hohlzylinder von der Masse $\mathrm{d}m$ (Bild 107). In dem allgemeinen Ansatz $J = \int r^2\,\mathrm{d}m$ muß $\mathrm{d}m$

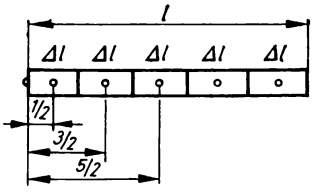


Bild 106. Zum Massenträgheitsmoment eines Stabes

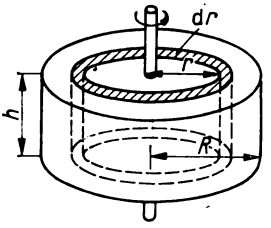


Bild 107. Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Kreiszylinders

als Funktion von r ausgedrückt werden. Der elementare Hohlzylinder hat die Masse $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V = 2r\pi h\varrho \cdot \mathrm{d}r$ (ϱ Dichte, V Volumen, h Höhe des Zylinders, $\mathrm{d}r$ Wanddicke). Nunmehr berechnet man das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = R$:

$$J = 2\pi\varrho h \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\varrho h R^4}{2}.$$

Mit der Gesamtmasse des Zylinders $m = \varrho R^2\pi h$ erhält man

$$V = \frac{mR^2}{2}.$$

In der folgenden Übersicht sind die Ergebnisse für einige häufig vorkommende, einfach geformte Körper aufgeführt.

Einige Massenträgheitsmomente

Körper	Lage der Drehachse	Massenträgheitsmoment J
Dünner Kreisring (Radius r)	Ringmitte, senkrecht zur Ringebene	mr^2
dünner Stab (Länge l)	Stabmitte, senkrecht zum Stab	$\frac{m}{12}\,l^2$
desgl.	Stabende, senkrecht zum Stab	$\frac{m}{3}\,l^2$
Kreisscheibe (Radius r)	senkrecht durch die Mitte der Scheibe	$\frac{m}{2}\,r^2$
desgl.	längs des Durchmessers	$\frac{m}{4}\,r^2$
Vollzylinder	Längsachse des Zylinders	$\frac{m}{2}\,r^2$
Rechteck (Diagonale d)	senkrecht durch die Flächenmitte	$\frac{m}{12}\,d^2$
Vollkugel (Radius r)	durch den Mittelpunkt	$\frac{2m}{5}\,r^2$
dünnwandige Hohlkugel (Radius r)	desgl.	$\frac{2m}{3}\,r^2$
Rechteck ab	längs der Seite b	$\frac{m}{3}\,a^2$

Da die elementaren Massenanteile als Produkt mit dem Quadrat ihres jeweiligen Abstandes von der Achse in die Berechnung eingehen, ist das Massenträgheitsmoment eine Größe, die sehr stark von der räumlichen Verteilung der Gesamtmasse rings um die Drehachse abhängt. Das Massenträgheitsmoment richtet sich daher nicht nur nach der geometrischen Form des vorliegenden Körpers, sondern vor allem nach der Lage der Drehachse.

Im Hinblick hierauf läßt es sich theoretisch beweisen, daß jeder Körper eine Achse *I* hat, für die das Massenträgheitsmoment am größten, und eine zweite *II*, für die das Massenträgheitsmoment am kleinsten ist. Beide Hauptträgheitsachsen stehen senkrecht aufeinander. Zu ihrer Ebene senkrecht verläuft eine 3. Hauptträgheitsachse *III* (Bild 108).

Bei komplizierten Körpern, die sich aus einzelnen, geometrisch einfach gestalteten Teilen zusammensetzen, bildet man die Summe aus den einzelnen Trägheitsmomenten:

Das gesamte Massenträgheitsmoment eines Körpers ist gleich der Summe der Massenträgheitsmomente seiner einzelnen Teile in bezug auf dieselbe Achse.

Um z. B. das Massenträgheitsmoment eines Schwungrades zu berechnen, wird man daher zunächst die Massenträgheitsmomente der Nabe (Hohlzylinder), der Speichen (Stäbe) und des Kranzes (Hohlzylinder) ermitteln und diese dann addieren.

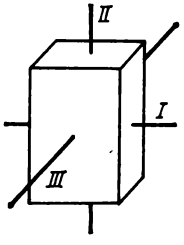


Bild 108
Hauptträgheitsachsen

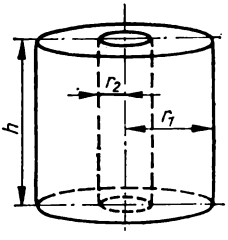


Bild 109
Hohlzylinder

Hierbei kommt oft das Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders vor. Faßt man diesen als einen Vollzylinder auf, aus dem das Innere herausgeschnitten ist, so erhält man (Bild 109):

$$J = J_1 - J_2 = m_1 \frac{r_1^2}{2} - m_2 \frac{r_2^2}{2} = (\varrho \pi r_1^2 h) \frac{r_1^2}{2} - (\varrho \pi r_2^2 h) \frac{r_2^2}{2};$$

$$J = \frac{\varrho \pi h}{2} (r_1^4 - r_2^4) = \varrho \pi h \, (r_1^2 - r_2^2) \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}.$$

Der vor dem Bruch stehende Ausdruck ist aber die Gesamtmasse m. Damit wird

(90) $$\boxed{J = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$$ **Massenträgheitsmoment J eines Hohlzylinders**

Beispiele: 1. Für einen Vollzylinder von 20 cm Radius und 50 kg Masse berechnet sich das Massenträgheitsmoment zu

$$J = \frac{m r^2}{2} = \frac{50\,\text{kg} \cdot 0{,}2^2\,\text{m}^2}{2} = 1\,\text{kgm}^2.$$

2. Welche kinetische Energie hat ein Schwungrad, dessen Massenträgheitsmoment 5 kgm² beträgt, bei einer Drehzahl von 5000 1/min? – $\omega = 523{,}6$ 1/s. Nach (87) ist

$$W_{\text{kin}} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{5\ \text{kgm}^2 \cdot 523{,}6^2}{2\ \text{s}^2} = 685400\ \text{kgm}^2/\text{s}^2 = 685400\ \text{J} = 69870\ \text{kpm}.$$

3. Ein drehbar gelagerter Vollzylinder ($r = 5$ cm, $m_1 = 40$ kg) wird dadurch in Drehung versetzt, daß um seinen Umfang ein Faden gewickelt ist, an dem ein Massestück $m_2 = 5$ kg hängt. Nach Durchlaufen der Höhe $h = 1$ m fällt das Massestück ab. Mit welcher Drehzahl rotiert der Zylinder weiter? –

Man geht vom Energiesatz aus und erhält die Gleichung:

Rotationsenergie der Walze + Endbetrag der kinetischen Energie des Fallstückes = Abnahme der potentiellen Energie des Fallstückes;

$$\frac{m_1 r^2 \omega^2}{4} + \frac{m_2 v^2}{2} = m_2 g h\,; \quad \text{mit } v = r\omega \quad \text{wird dann}$$

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4 m_2 g h}{m_1 + 2m_2}} = 39{,}6\ 1/\text{s} \quad \text{bzw.} \quad n = 378\ 1/\text{min}.$$

7.3. Satz von Steiner

Sehr oft kommt es vor, daß ein Körper um eine Achse rotiert, die nicht durch seinen Schwerpunkt verläuft. Auch außerhalb des Körpers selbst kann der Drehpunkt liegen. Wegen der exzentrischen Lage des Drehpunktes ist dann das Massenträgheitsmoment größer und muß besonders berechnet werden.
Gegeben sei ein Körper der Masse m, z. B. eine Kugel, die an einem masselosen Stab der Länge a befestigt ist, der sich um seinen Endpunkt 0 (Bild 110) drehen möge. Die Kugel hat die Bahngeschwindigkeit $v = a\omega$, und die kinetische Energie ihrer im Schwerpunkt S vereinigt gedachten Masse ist gleich $\frac{ma^2\omega^2}{2}$. Während eines Umlaufs dreht sie sich aber außerdem einmal um ihre eigene Achse; d. h., sie hat für sich allein noch einmal dieselbe Winkelgeschwindigkeit und damit eine zusätzliche kinetische Energie von $\frac{J_S\omega^2}{2}$, wobei J_S das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich derjenigen Achse ist, die durch ihren Schwerpunkt parallel zur Drehachse des Stabes läuft. Die Gesamtenergie ist somit

$$W_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{2}(J_S + ma^2).$$

Der Klammerausdruck ist das gesuchte Massenträgheitsmoment:

(91) $$\boxed{J = J_S + ma^2}$$

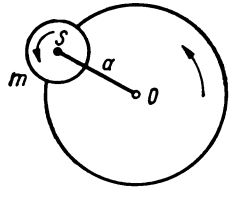


Bild 110. Zum Satz von Steiner

Man nennt diesen Sachverhalt den

Satz von Steiner:

Das Massenträgheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine beliebige Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment seiner im Schwerpunkt vereinigten Masse bezüglich dieser Achse und seinem Trägheitsmoment bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden, zur ersteren parallelen Achse.

Beispiele: 1. Welches Massenträgheitsmoment hat eine 8 kg schwere und 4 m lange Stange, deren Drehpunkt 80 cm von dem einen Ende entfernt liegt? –
Die Entfernung des Drehpunktes vom Schwerpunkt ist $a = 1{,}2$ m, so daß

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2 = 8\,\text{kg}\left(\frac{4^2}{12} + 1{,}2^2\right)\text{m}^2 = 22{,}19\,\text{kg m}^2.$$

2. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment einer Kugel, die auf einer ebenen Unterlage rollt? –
Da sich die Kugel dabei ständig um einen Punkt ihrer Oberfläche dreht, gilt nach dem Satz von STEINER

$$J = \frac{2mr^2}{5} + mr^2 = \frac{7mr^2}{5}.$$

7.4. Anwendung des dynamischen Grundgesetzes auf rotierende Körper

Wenn ein anfangs stillstehendes Rad in Rotation versetzt werden soll, muß man an seinem Umfang eine Kraft angreifen lassen, etwa mit Hilfe eines Treibriemens oder einer Drehkurbel. Solange die Kraft wirkt und keine anderen Kräfte die Bewegung hemmen, wird die Drehbewegung eine beschleunigte sein. Umgekehrt muß eine entsprechende Kraft wirken, wenn die Bewegung eines Rades gebremst werden soll.
Es sei zunächst wieder der einfache Massenpunkt m angenommen (Bild 105), der auf einer Kreisbahn vom Radius r in Bewegung gesetzt werden soll. Nach dem Grundgesetz der Dynamik (58) ist die erforderliche Kraft $F = m\,a$ oder nach Gleichung (30)

$$F = mr\alpha$$

(α Winkelbeschleunigung). Multipliziert man beide Seiten mit r, so erhält man

$$Fr = mr^2\alpha.$$

Auf der linken Seite steht das Drehmoment $Fr = M$, und auf der rechten bemerkt man den Ausdruck mr^2, der nach (86) das Massenträgheitsmoment des Massenpunktes darstellt. Dies auf ausgedehnte Körper angewandt, ergibt:

Drehmoment = Massenträgheitsmoment · Winkelbeschleunigung

(92) $$\boxed{M = J\alpha}$$

Vergleicht man dieses Gesetz mit dem Grundgesetz der Dynamik für die geradlinige Bewegung, so fällt auf, daß auf der linken Seite nicht eine Kraft F, sondern das Drehmoment $Fr = M$ steht. Das aber muß so sein, weil die Wirkung einer Kraft ganz von

dem Hebelarm abhängt, an dem sie angreift. Ohne Kenntnis dieses Hebelarmes r wäre die Angabe der Kraft F gegenstandslos. Die Kraft F wird z. B. niemals eine Drehung hervorrufen, wenn sie an der Drehachse ($r = 0$) angreift.
Damit findet sich: Alle für rotierende Massen gültigen Gesetze und Beziehungen haben die gleiche Form wie diejenigen, die für die geradlinige Bewegung gelten. Sie sind einander *analog* und unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß an Stelle der Größen F, m, a usw. die entsprechenden Größen M, J, α usw. einzusetzen sind.

Gegenüberstellung der wichtigsten Größen der Dynamik (siehe auch Tabelle S. 44)

geradlinig bewegter Körper		rotierender Körper	
Größe	Bezeichnung	Größe	Bezeichnung
Kraft	F	Drehmoment	$M = Fr$
Beschleunigung	a	Winkelbeschleunigung	α
Masse	m	Massenträgheitsmoment	J
Grundgesetz	$F = ma$	Grundgesetz	$M = J\alpha$
	$F = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t}$		$M = \frac{\Delta (J\omega)}{\Delta t}$
Arbeit	$W = Fs$	Arbeit	$W = M\varphi$
Leistung	$P = Fv$	Leistung	$P = M\omega$
Kinetische Energie	$W = \frac{m}{2} v^2$	Kinetische Energie	$W = \frac{J}{2} \omega^2$
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$p_\varphi = J\omega$

Beispiele: 1. Eine massive Schwungscheibe soll aus dem Stillstand innerhalb von 15 s auf eine Drehzahl von 500 1/min gebracht werden. Mit welcher Kraft muß sie am äußeren Umfang gedreht werden? (Maße der Scheibe: $r = 25$ cm; $m = 18$ kg) –
Für J ergibt sich (Formel für die Kreisscheibe) 0,5625 kgm².

Nach (92) ist die Kraft am Umfang $F = \frac{J\alpha}{r}$. Mit der Winkelbeschleunigung (28) $\alpha = \frac{\omega}{t}$ erhält man

$$F = \frac{J\omega}{rt} = \frac{0{,}5625 \text{ kgm}^2 \cdot 2\pi \cdot 500}{60 \text{ s} \cdot 0{,}25 \text{ m} \cdot 15 \text{ s}} = 7{,}85 \text{ N} = 0{,}8 \text{ kp}.$$

2. Das Massenträgheitsmoment eines Turbinenrades beträgt 637 kgm². Das treibende Wasser ruft ein Drehmoment von 147 Nm hervor. Wie lange dauert es, bis eine Drehzahl von 320 1/min erreicht wird? – Nach (28) ist die Anlaufzeit $t = \frac{\omega}{\alpha}$. Hier steht im Zähler die am Schluß erreichte Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ und im Nenner die Winkelbeschleunigung (92) $\alpha = \frac{M}{J}$. Nach Einsetzen erhält man

$$t = \frac{2\pi n J}{M} = \frac{2\pi \cdot 320 \cdot 637 \text{ kgm}^2}{60 \text{ s} \cdot 147 \text{ Nm}} = 145 \text{ s}.$$

7.5. Drehimpuls

7.5.1. Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses

Das zuletzt mit Gleichung (92) gewonnene dynamische Grundgesetz für den rotierenden Körper läßt sich mit $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ auch in die Form bringen

(93) $$\boxed{M = \frac{\Delta (J\omega)}{\Delta t}}$$

Wie sich sogleich erweisen wird, ist es hierbei sinnvoll, das Differenzzeichen Δ vor das Produkt $(J\omega)$ zu setzen. Dieses Produkt ist nämlich dem *Impuls mv analog* und wird **Drehimpuls** genannt. Gleichung (93) ist damit vollkommen analog zur NEWTONschen Definition (78) der Kraft und lautet in Worten:

Das Drehmoment M ist gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses $J\omega$.

Für den recht einfachen Fall des im Abstand r von der Drehachse umlaufenden Massenpunktes findet man beispielsweise mit dem Massenträgheitsmoment nach Gleichung (86) $J = mr^2$

(94) $$\boxed{J\omega = mr^2\omega}$$ **Drehimpuls $J\omega$ eines umlaufenden Massenpunktes**

Die Anlogie zwischen dem Impuls mv eines geradlinig bewegten Körpers und dem Drehimpuls $J\omega$ besteht aber nicht nur in formaler Hinsicht. Sie erstreckt sich vor allem auf das physikalische Verhalten. Das so bedeutungsvolle Gesetz von der Erhaltung des Impulses (80) kann in voller allgemeiner Gültigkeit auf den Drehimpuls übertragen werden. Es lautet dann:

(95) **Satz von der Erhaltung des Drehimpulses:**
Beim Fehlen äußerer Kräfte bleibt die Summe der Drehimpulse (Gesamtdrall) eines abgeschlossenen Systems konstant.

Dieser Erhaltungssatz läßt sich schon mit Hilfe eines einzigen rotierenden Körpers bestätigen. Nach Bild 111 ist ein Ball an einem Faden befestigt, der durch ein Rohr geführt ist. An diesem schwingt man den Ball im Kreis herum und erteilt ihm damit einen bestimmten Drehimpuls. Zieht man jetzt an der Schnur und verkürzt damit den Radius r des Drehkreises, so bemerkt man, daß die Winkelgeschwindigkeit ω des Balls beträchtlich zunimmt. Sie verlangsamt sich wieder, wenn man dem Zug der Schnur nachgibt und den Radius r dadurch vergrößert. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses $mr^2\omega$ muß nämlich das Produkt $r^2\omega$ immer den gleichen Wert behalten. In dem Maße, wie man den Faktor r^2 verkleinert, muß der andere Faktor ω größer werden und umgekehrt.

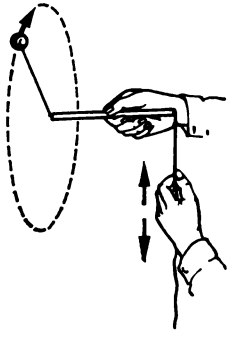


Bild 111. Erhaltung des Drehimpulses



Bild 112. Gegenläufige Drehung von Rad und Drehscheibe

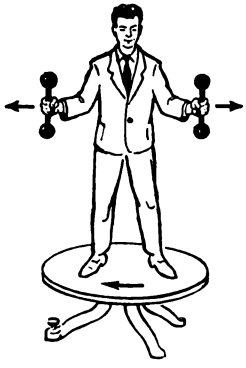


Bild 113. Veränderung des Massenträgheitsmomentes

Noch eindrucksvollere Versuche lassen sich anstellen, wenn man ein System aus zwei rotierenden Teilen zusammenstellt, wie etwa in den folgenden Beispielen.

Versuche: 1. Man stelle sich auf eine Drehscheibe (Bild 112) und halte an einem Handgriff ein Rad in die Höhe, so daß dessen Achse senkrecht steht. Greift man jetzt mit der anderen Hand in die Speichen und erteilt dem Rad einen kräftigen Drehschwung, so beginnt die Drehscheibe sofort im entgegengesetzten Sinn zu rotieren. Beide Körper, Rad und Person einschließlich der Drehscheibe, bilden ein abgeschlossenes System, dessen Gesamt-Drehimpuls nach wie vor gleich Null ist.

2. Man läßt sich, auf der ruhenden Drehscheibe stehend, ein bereits rotierendes Rad von einer anderen Person übergeben. Die Scheibe bleibt in Ruhe. Wendet man das Rad jetzt um 180°, so beginnt die Drehscheibe zu rotieren. Die Rotation hört aber sofort wieder auf, wenn man das Rad in seine alte Lage zurückdreht.

3. Man stelle sich auf die Drehscheibe, lasse sie von außen her in Umdrehung versetzen und halte mit angewinkelten Armen je eine Hantel (Bild 113). Streckt man jetzt beide Arme zur Seite aus, so wird das Massenträgheitsmoment beträchtlich vergrößert und die Rotation entsprechend verlangsamt. Die umgekehrte Wirkung tritt ein, wenn man die Hantel gegen die Brust zieht. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses muß jede Veränderung des Massenträgheitsmomentes eine gegenläufige Veränderung der Winkelgeschwindigkeit nach sich ziehen.

Beispiel: Welche Winkelgeschwindigkeit erreicht eine Kreisscheibe von 10 kg Masse und 1 m Radius, an deren Umfang 1 min lang eine Kraft von 1 kp treibend wirkt? – Nach (94) ergibt sich

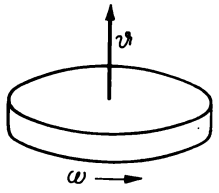
$$\omega = \frac{mr^2\omega}{J} = \frac{mr^2at}{J} = \frac{Frt}{J} = \frac{Frt \cdot 2}{mr^2} = \frac{9{,}81\ \mathrm{kgm/s^2} \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot 60\ \mathrm{s} \cdot 2}{10\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m^2}} = 117{,}72\ ^1/\mathrm{s}$$

$$\text{oder } n = 1124\ ^1/\mathrm{min}.$$

7.5.2. Drehimpuls als vektorielle Größe

In 3.4.2. war gezeigt worden, daß das Drehmoment $\mathfrak{M}$ seinem Wesen nach eine vektorielle Größe ist und durch einen Pfeil dargestellt werden kann, dessen Richtung nach der *Schraubenregel* (51) definiert wird.

Bild 114. Vektor des Drehimpulses



Auch der Drehimpuls eines rotierenden Körpers ist durch einen Vektor darstellbar. Bisher haben wir lediglich mit seinem Betrag $J\omega$ gerechnet. Um ihn als Vektor zu kennzeichnen, verwendet man den Buchstaben $\mathfrak{D}$. Die Richtung dieses Vektors wird ebenfalls durch die Schraubenregel festgelegt, und zwar so, daß der Drehsinn durch denjenigen der *Winkelgeschwindigkeit* ω bestimmt wird. Denkt man z. B. an eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Uhrzeigersinn rotierende Kreisscheibe (Bild 114), so weist der Vektor $\mathfrak{D}$ des Drehimpulses vom Beschauer weg. Der Drehimpuls ist somit ebenfalls ein axialer Vektor.
Wirkt auf die rotierende Scheibe ein zusätzliches Drehmoment M ein, so ändert sich dadurch auch deren Drehimpuls nach Gleichung (93). In vektorieller Form schreibt man sie

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta \mathfrak{D}}{\Delta t}. \tag{96}$$

Aus ihr ist zu entnehmen, daß der Vektor der Änderung des Drehimpulses $\Delta\mathfrak{D}$ in die gleiche Richtung weist, wie der Vektor $\mathfrak{M}$ des einwirkenden Momentes.
Sie bedeutet, wie schon in 7.5.1. gesagt wurde, daß das während der Zeit Δt auf den Körper einwirkende Drehmoment eine bestimmte Änderung $\Delta\mathfrak{D}$ des Drehimpulses hervorruft.

7.5.3. Kreisel

Der gegenseitige Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls ist anschaulich am **Kreisel** erkennbar. Hierunter versteht man einen starren Körper, der sich völlig frei oder um höchstens einen Punkt dreht; meistens verwendet man Rotationskörper wie Scheiben, Kegel, Kugeln usw. Die geometrische (Symmetrie-) Achse nennt man seine **Figurenachse.** Eine vollständige Theorie des Kreisels ist mathematisch sehr schwierig. Hier sollen nur einige Grundbegriffe und Bewegungen erläutert werden.
Ein nach Bild 115 in seinem Schwerpunkt unterstützter Kreisel ist ruhend im indifferenten Gleichgewicht. Er ist **kräftefrei.** Bei ungestörter Rotation um seine Figurenachse bleibt diese raumfest stehen. Dasselbe ist der Fall, wenn man ihn mit Hilfe eines Gegengewichtes nach Bild 116 horizontal lagert. Während dieser so gelagerte Kreisel rotiert, werde eine kleine Zusatzmasse m an den Hebel gehängt. Der Kreisel kippt dadurch nicht etwa nach oben, wie es bei fehlender Rotation der Fall wäre, sondern seine Achse dreht sich horizontal mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreise. Diese Bewegung nennt man **Präzession.**

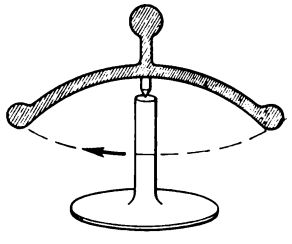


Bild 115. Kräftefreier (im Schwerpunkt unterstützter) Kreisel

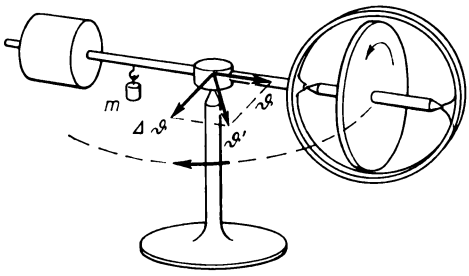


Bild 116. Präzession eines Kreisels

Die an einem Hebelarm wirkende Zusatzmasse ruft nämlich ein Drehmoment hervor, dessen Vektor $\mathfrak{M}$ im Bild nach links vorn weist. Es ruft nach Gleichung (96) den zusätzlichen Drehimpuls $\Delta\mathfrak{D}$ hervor, dessen Vektor nach dem vorhin Gesagten in dieselbe Richtung wie der des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ weist. Dieser Vektor $\Delta\mathfrak{D}$ und der Drehimpulsvektor $\mathfrak{D}$ der rotierenden Kreiselmasse setzen sich nach dem Parallelogrammsatz zu dem neuen Vektor $\mathfrak{D}'$ zusammen. Die Kreiselachse wandert in diese neue Lage, wodurch sich zugleich $\mathfrak{D}$ mitdreht usw.

Der Vektor des Drehimpulses $\mathfrak{D}$ hat die Tendenz, sich dem Vektor eines auf den Kreisel einwirkenden Momentes parallel zu richten.

Wenn man die Zusatzmasse m wegläßt, bleibt die Kreiselimpulsachse unverändert stehen. Dreht man jetzt die Kreiselachse im Sinne der vorhin eingetretenen Präzession, so tritt die umgekehrte Wirkung ein (erzwungene Präzession). Es entsteht ein Drehmoment, das den Kreisel nach unten drückt. Diese Erscheinung tritt bei dem schon erwähnten Kollergang (2.3.1.) auf. Der Umlauf der Walzen stellt eine erzwungene Präzession dar, wodurch die auf das Mahlgut wirkende Kraft verstärkt wird.

Sehr deutlich ist die Präzessionsbewegung bei einem Kreisel, dessen Achse schräg auf dem Boden steht (Bild 117). Sein Gewicht ruft ein Drehmoment M hervor, das den ruhenden Kreisel umkippen würde. Es liefert den Zusatzdrehimpuls $\Delta\mathfrak{D}$, der sich mit dem ursprünglichen Vektor $\mathfrak{D}$ zum resultierenden Vektor $\mathfrak{D}'$ zusammensetzt. Die Figurenachse läuft auf einem Kegelmantel um.

Beim *Kreiselkompaß* von Anschütz wirkt das Moment der rotierenden Erde derart auf den Impulsvektor des Kreisels ein, daß sich dieser genau in die Nord-Süd-Richtung einstellt und diese auch beibehält.

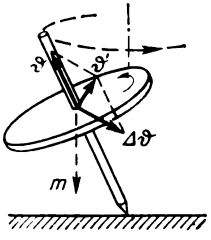


Bild 117. Präzession, verursacht durch das Eigengewicht des Kreisels

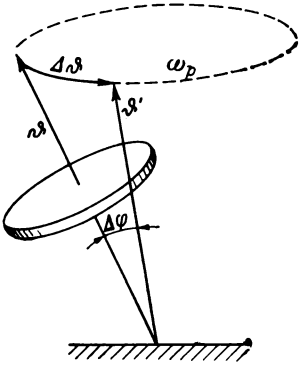


Bild 118. Zur Berechnung der Präzessionsfrequenz

Die **Winkelgeschwindigkeit der Präzession** läßt sich berechnen, wenn man von der Gleichung (96) $\mathfrak{M} = \frac{\Delta \mathfrak{D}}{\Delta t}$ ausgeht. Dreht sich die Kreiselachse als Folge der Präzession um den Winkel $\Delta\varphi$, so ändert der Vektor des Drehimpulses unter Beibehaltung des Betrages seine Richtung (Bild 118). Diese Änderung ist gleich dem Vektor $\Delta\mathfrak{D}$, den man zu $\mathfrak{D}$ hinzufügen muß, um $\mathfrak{D}'$ zu erhalten. $\Delta\mathfrak{D}$ kann nun bei kleinem Drehwinkel $\Delta\varphi$ gleich dem zu $\Delta\varphi$ gehörigen Bogen gesetzt werden, dessen Länge nach (21) $\Delta\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \cdot \Delta\varphi$ ist. Man erhält mithin $\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{D} \cdot \Delta\varphi}{\Delta t}$. Der Quotient $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ist aber die Winkelgeschwindigkeit ω_p, mit der die Kreiselachse präzediert. Ihr Betrag ist

(97) $$\boxed{\omega_p = \frac{M}{J\omega}}$$ **Winkelgeschwindigkeit ω_p der Präzession**

Der Kreisel präzediert daher um so schneller, je langsamer der Kreisel selbst rotiert und je größer das einwirkende Drehmoment M ist. Eine große Kreiselmasse dagegen verlangsamt die Präzession.

7.6. Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem

7.6.1. Zentrifugalkraft

Am Ende der „Bewegungslehre" (2.4.4.) hatte sich herausgestellt, daß jeder im Kreis bewegte Körper nach dem Mittelpunkt hin beschleunigt werden muß, wenn er auf der Kreisbahn bleiben soll. Es muß also eine nach dem Drehzentrum hin gerichtete Kraft aufgewandt werden, um ihn auf der Kreisbahn zu halten. Da die Beschleunigung nach (42) den Betrag $a_r = \frac{v^2}{r}$ bzw. $a_r = \omega^2 r$ hat, ergibt sich für die nach dem Rotationszentrum gerichtete Kraft, die man *Radial-* oder *Zentripetalkraft* nennt, nach dem Grundgesetz (58) der Betrag

$$F_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r .$$

Wenn man z. B. einen Schleuderball im Kreis herumschwingt, muß man diesen mit beträchtlichem Aufwand an Zentripetalkraft nach innen ziehen. Man hat aber dabei das Gefühl, als ob der Ball nach außen zöge, und kann das damit erklären, daß diese radial nach außen drängende Kraft die zur Zentripetalkraft gehörige Gegenkraft ist, die ihr das Gleichgewicht hält (Bild 119). Dies ist

(98) $$\boxed{F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r}$$ **Flieh- oder Zentrifugalkraft F_Z**

Läßt man den Ball plötzlich los und verfolgt ihn mit dem Blick weiter, so sieht man, wie sich der Ball vom Ausgangspunkt in radialer Richtung entfernt.
Dem Wesen nach gehört die Fliehkraft aber zu den in 4.2. behandelten *Trägheitskräften*. Der *außen*stehende Beobachter sieht nämlich, daß der Ball nicht in radialer Richtung, sondern tangential davonfliegt, d. h. unter Beibehaltung derjenigen Rich-

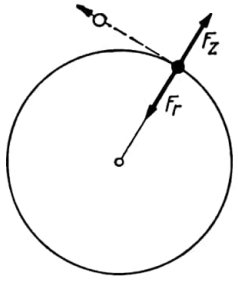


Bild 119. Zentripetal- und Zentrifugalkraft. Bei Fortfall der Zentripetalkraft fliegt der Körper tangential davon

tung, die er im Augenblick des Loslassens hatte. Die radial gerichtete Zentrifugalkraft ist nur für den an der Rotation beteiligten Werfer (Beobachter) vorhanden. Er beurteilt die Bewegung nicht von einem ruhenden, sondern vom rotierenden Bezugssystem aus.

Die Zentrifugalkraft ist eine Trägheitskraft, die nur in rotierenden Bezugssystemen auftritt.

Wie Gleichung (98) lehrt, steigt die Fliehkraft mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Bei der 10fachen Drehzahl wird die Fliehkraft 100mal so groß. Dabei kann man die Schwerkraft mit Leichtigkeit weit übertreffen. Die Technik macht von der Fliehkraft vielfachen Gebrauch. Beim *Fliehkraftregler* der Dampfmaschine streben zwei rotierende Körper nach außen und heben sich gleichzeitig nach oben. Dabei

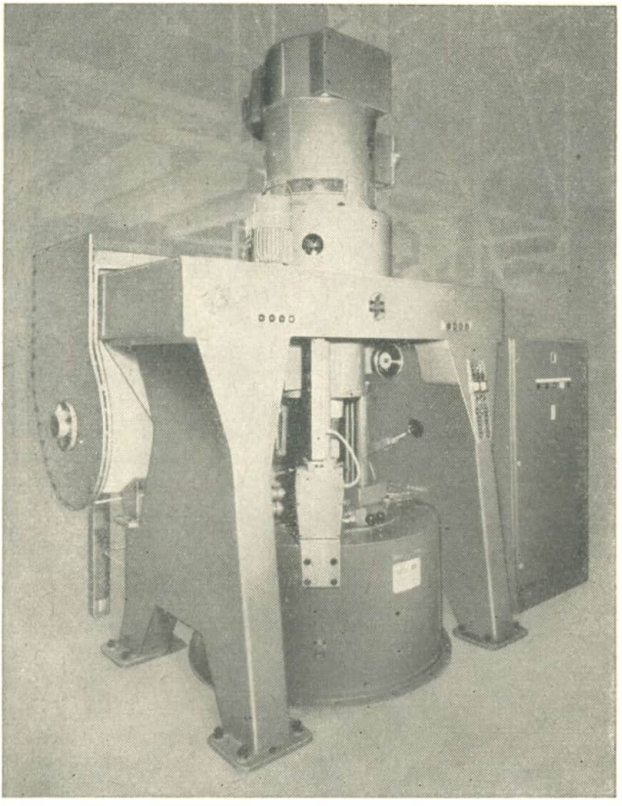


Bild 120. Großzentrifuge zur Zucker-Sirup-Trennung $n =$ $= 1000^1/\text{min}$, Füllung 1000 kg

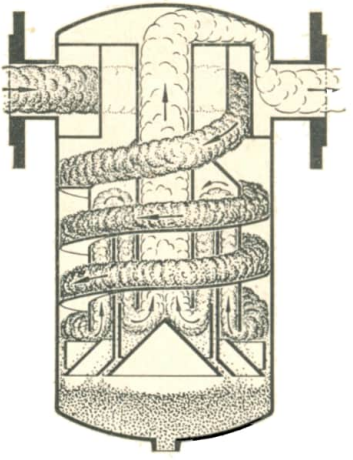


Bild 121. Schema eines Staubabscheiders

drosselt eine Hebelübertragung die Dampfzufuhr zur Maschine, wodurch die Drehzahl herabgesetzt wird und die Körper sich wieder senken usw. *Zentrifugen* dienen zur Entwässerung von Textilien, Kohle und anderen Industriegütern sowie zur Trennung von Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte (Bild 120). Der als *Zyklon* bekannte *Staubabscheider* zur Reinigung von Luft, Gasen und Dämpfen zwingt das angesaugte Gas durch ein System von Kanälen zu Kreisbewegungen, wodurch alle Staubteilchen nach außen geschleudert werden (Bild 121). An der Wand anprallend, fallen sie dann zu Boden und sammeln sich dort.

Es ist übrigens nicht nötig, daß der Drehpunkt sichtbar vorhanden ist. Auch beim Durchlaufen irgendeiner Kurve, d. h. bei jeder Richtungsänderung, tritt die Fliehkraft auf. Zu ihrer Berechnung muß man den Krümmungsradius der Bahn kennen.

Beispiele: 1. Welche Fliehkraft entwickelt eine Kugel von 2 kg Masse, die mit einer Drehzahl von $n = 300\,^1/\text{min}$ an einer 2 m langen Kette waagerecht im Kreis herumgeschwungen wird? – Es ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ und somit

$$F_z = mr\omega^2 = mr\,(2\pi n)^2 = \frac{2\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m}\,(2\pi \cdot 300)^2}{60^2\,\text{s}^2} = 3944\,\text{N} = 402\,\text{kp}\,.$$

2. Bei welcher Drehzahl zerreißt die Kette im Beispiel 1, wenn sie eine Belastung von 850 kp aushält? – Wenn die Kette reißt, überschreitet die auftretende Zentrifugalkraft die Zugfestigkeit. Im Grenzfall ist $F = mr\omega^2$.

$$\text{Damit wird } \omega = \sqrt{\frac{F}{mr}} \quad \text{und}$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{mr}} \quad \text{bzw.}$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{850 \cdot 9{,}81\,\text{kgm}}{\text{s}^2 \cdot 2\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m}}} = 7{,}27\,^1/\text{s} = 436\,^1/\text{min}\,.$$

7.6.2. Fliehkraft und Schwerkraft

Im Bereiche der Erdanziehung wirken Flieh- und Schwerkraft zusammen.

Zwar ist die Entstehungsursache der beiden Kräfte grundverschieden, in ihrer Wirkung aber sind sie insofern gleich, als beide den von ihnen erfaßten Körper beschleunigen. Wenn Fliehkraft und Schwerkraft in gleicher Richtung wirken, addieren sie sich. Bei entgegengesetzter Richtung ist die eine Kraft von der anderen zu subtrahieren, und bei beliebiger Richtung ist das Parallelogramm der Kräfte anzuwenden.

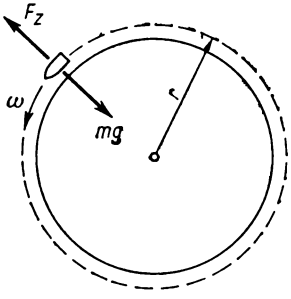


Bild 122. Künstlicher Satellit auf Kreisbahn

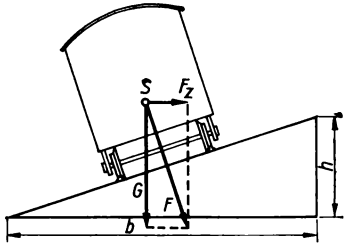


Bild 123. Zusammenwirken von Flieh- und Schwerkraft in einer Kurve

Soll sich ein Körper auf einer Kreisbahn *frei um die Erde* bewegen, so muß seine Geschwindigkeit so groß sein, daß die entstehende Fliehkraft gleich der Schwerkraft wird (Bild 122). Dann besteht die Gleichung

$$\frac{mv^2}{r} = mg \quad \text{und} \quad v = \sqrt{rg}\ ;$$

in Erdnähe darf für r der mittlere Erdradius 6380 km und der übliche Wert der Schwerebeschleunigung gesetzt werden, und man erhält

$$v = \sqrt{\frac{6{,}38 \cdot 10^6\,\text{m} \cdot 9{,}81\,\text{m}}{\text{s}^2}} = 7900\,\text{m/s}\,.$$

Dies ist die sogenannte **1. kosmische Geschwindigkeit,** die alle künstlichen Erdsatelliten mindestens haben müssen, wenn sie nicht auf die Erde zurückfallen sollen.

Beispiel: Welche Schräglage muß das Bahnprofil haben, damit ein Wagen mit 60 km/h eine Kurve von 200 m Krümmungsradius in voller Standfestigkeit durchfahren kann? – (Bild 123) Fliehkraft F_Z und Gewicht G bilden zusammen die Resultierende F, die im Schwerpunkt des Wagens angreift. Bei voller Standfestigkeit muß F senkrecht auf dem Bahnprofil stehen, so daß die Proportion $h:b = F_Z:G$ gilt. Hieraus berechnet sich

$$\tan\alpha = \frac{h}{b} = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{rg}$$

oder

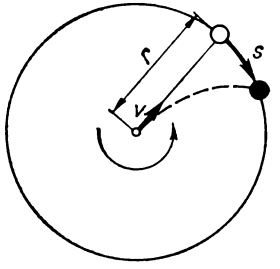
$$\tan\alpha = \frac{60^2\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{3{,}6^2 \cdot \text{s}^2 \cdot 200\,\text{m} \cdot 9{,}81\,\text{m}} = 0{,}142\ ; \quad \alpha = 8°\,.$$

Bemerkenswert ist, daß die Masse des Wagens im Ergebnis keine Rolle spielt. Wenn bei zu geringer Neigung des Profils und zu hoher Schwerpunktlage die Resultierende außerhalb der Standfläche fällt, kippt der Wagen um.

7.6.3. Corioliskraft

Bei der Drehbewegung tritt noch eine zweite Kraft auf, die nach ihrem Entdecker **Corioliskraft** genannt wird. Angenommen, eine Kreisscheibe rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Von ihrem Zentrum aus werde mit radialer Anfangsrichtung und

Bild 124. Entstehung der Coriolis-kraft



der Geschwindigkeit v eine Kugel abgeschleudert (Bild 124). Diese wird nach dem Trägheitsgesetz ihre Richtung beibehalten. Für einen außerhalb der Scheibe stehenden Beobachter bewegt sie sich nach dem Trägheitsgesetz in gerader Linie.
Die Scheibe dreht sich unter der Kugel vorbei; diese hinterläßt auf der Scheibe eine spiralige Spur. Ein auf der Scheibe stehender und mit ihr linksherum kreisender, nach außen blickender Beobachter wird daher feststellen, daß die Kugel von der radialen Richtung nach rechts abweicht. Es ist wiederum eine *Trägheitskraft* wirksam, die ihre Masse im rotierenden System ablenkt. Diese Kraft wird direkt fühlbar, wenn man, auf einem rotierenden Drehstuhl sitzend, eine Hantel radial nach außen streckt.

Die hier wirkende Beschleunigung läßt sich so berechnen:

Der radial bewegte Körper legt in der Zeit t vermöge seiner Trägheit die Strecke $r = vt$ zurück. Der anfänglich dabei angesteuerte Punkt des Kreisumfangs hat sich inzwischen um die Strecke $s = r\omega t = v\omega t^2$ weiterbewegt. Legt man dieser Abweichung eine wirkende Beschleunigung zugrunde, so ist $s = \frac{a_c}{2} t^2$. Durch Gleichsetzen erhält man

$$\frac{a_c t^2}{2} = v\omega t^2 \quad \text{und damit die}$$

Coriolisbeschleunigung: $a_c = 2v\omega$ bzw. die entsprechende Kraft

(99) $$\boxed{F_c = 2mv\omega}$$ **Corioliskraft** F_c

Diese Kraft tritt also immer dann auf, wenn ein Körper sich auf einer kreisenden Unterlage nach außen oder innen bewegt, und zwar, wie die Fliehkraft, nur im rotierenden Bezugssystem.

Beispiele: 1. Man will quer über ein Schiff auf die andere Seite gehen, während das Schiff eine Kurve durchfährt. Dies ist nur mit großer Mühe möglich, und man muß einen Fuß über den anderen setzen, um die beabsichtigte Richtung einzuhalten.

2. Eine Lokomotive von 80 t Masse fährt mit der Geschwindigkeit 72 km/h in nordsüdlicher Richtung. Nach welcher Richtung wirkt die durch die Erdumdrehung entstehende Coriolis-kraft und wie groß ist diese? – Da sich die Erde von West nach Ost dreht, wird die Lokomotive westwärts gegen die Schienen gedrückt.

$$F_c = 2mv\omega = \frac{2 \cdot 80000\ \text{kg} \cdot 72\ \text{m} \cdot 0{,}000073}{3{,}6\ \text{s}^2} = 233{,}6\ \text{kgm/s}^2 = 23{,}8\ \text{kp}\,.$$

3. Bild 125 zeigt die Spur eines geradlinig schwingenden Pendels auf einer kreisenden Unterlage. Foucault benutzte 1852 ein Pendel von 67 m Länge und wies damit die Erdumdrehung nach.



Bild 125. Spur eines geradlinig schwingenden Pendels auf einer linksumkreisenden Unterlage

Im Vergleich zu den sonst wirkenden Kräften spielt die von der Erdrotation hervorgerufene CORIOLISkraft praktisch keine Rolle. Dagegen ist sie von großer Bedeutung für das Klima der Erde (Westabweichung der Passatwinde).

8. Gravitation

8.1. Gravitationsgesetz

Als erste Grundeigenschaft der Masse hatten wir die Trägheit erkannt, die sich u. a. als Widerstand gegen jede von außen einwirkende Kraft zeigt. Hierzu tritt aber noch eine zweite physikalische Eigenschaft, die mit der Trägheit an sich nichts zu tun hat:
Wo irgend zwei Massen einander gegenüberstehen, ziehen sie sich von selbst gegenseitig an. NEWTON stieß 1687 auf diese Kraft, als er die Planetenbewegung mathematisch untersuchte, und entdeckte dabei das **Gravitationsgesetz**:

(100) $$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$ **Gravitationsgesetz**

Es gilt streng für zwei *punktförmige* Massen m_1 und m_2 im gegenseitigen Abstand r, wobei γ die **Gravitationskonstante** bedeutet:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\ s^2}.$$

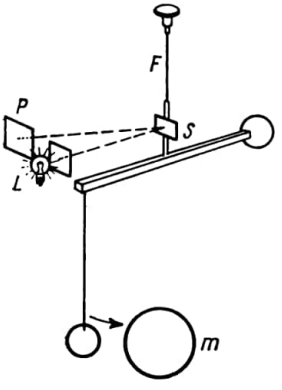


Bild 126a. Schema einer Drehwaage
F Aufhängefaden, S Spiegel, L Lichtquelle, P Fotoplatte, m ablenkende Masse

Das Gesetz ist auch für homogene Kugeln gültig. Dabei ist r der Abstand ihrer Schwerpunkte. Im übrigen kann es in dieser Form nur dann angewandt werden, wenn der Abstand r gegenüber den Abmessungen der Körper sehr groß ist.
Die Gravitation hat mit der elektrischen und magnetischen Anziehung nichts zu tun! Sie ist auch von der chemischen Beschaffenheit der Stoffe unabhängig. Im täglichen Leben und in der Technik macht sich die Massenanziehung zwischen einzelnen Körpern wegen ihrer geringen Größe nicht geltend.

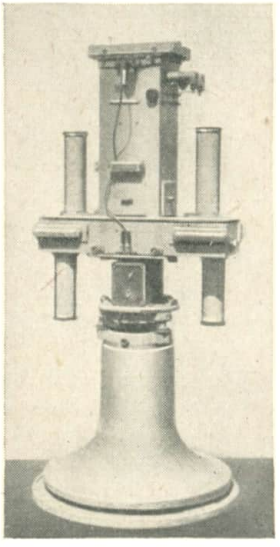


Bild 126b. Moderne Drehwaage für geophysikalische Untersuchungen

Derartig geringe Kräfte mißt man mit der **Drehwaage,** die seit ihrer Erfindung bis heute zu größter Vollkommenheit entwickelt wurde. Im Prinzip besteht sie aus einem feinen Metallfaden, der am unteren Ende einen Waagebalken mit 2 Wägestücken trägt. Bei Annäherung einer Masse wird das eine Wägestück angezogen und verdrillt den Aufhängefaden (Bild 126a). Die Verdrehung wird mittels eines Spiegels optisch bestimmt. Moderne Drehwaagen arbeiten vollautomatisch, da bereits die Nähe einer Person das Meßergebnis verfälscht (Bild 126b).

Grob spürbar wird die Massenanziehung erst dann, wenn wenigstens eine der beiden Massen sehr groß ist. Das ist bei unserem Erdkörper der Fall. Alle in der Umgebung der Erde befindlichen Körper erfahren eine zum Erdmittelpunkt hin gerichtete Kraft, die als **Gewicht** $G = mg$ in Erscheinung tritt. Bezeichnet man die Masse der Erde mit m_2, so gilt dann für eine beliebige Masse m_1 im Abstand r_1 vom Erdmittelpunkt

$$m_1 g_1 = \frac{\gamma m_1 m_2}{r_1^2}.$$

Hieraus folgt die **Schwerebeschleunigung** g_1 in der Entfernung r_1 vom Erdmittelpunkt

$$g_1 = \frac{\gamma m_2}{r_1^2},$$

und man sieht, daß diese keine Konstante ist, sondern mit dem Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt abnimmt. Da ihr Wert an der Erdoberfläche sich genau messen läßt, kann man den für eine beliebige andere Entfernung r_2 gültigen Wert g_2 leicht berechnen:

(101) $$\boxed{g_2 = g_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

Trägheit und Schwere sind zwei Eigenschaften der Masse, die nicht notwendig miteinander identisch sein müssen. NEWTON konnte wohl feststellen, daß träge und schwere Masse einander stets proportional sind. Doch konnte erst von ALBERT EINSTEIN im Rahmen seiner allgemeinen Relativitätstheorie (1916) bewiesen werden, daß die Erscheinungen der Trägheit und Schwere gemeinsamen Ursprungs sind.

Beispiele: 1. Mit welcher Kraft ziehen sich 2 einander berührende Eisenkugeln von je 10 kg Masse und 6,8 cm Radius gegenseitig an? – Der Abstand r ihrer Schwerpunkte ist 13,6 cm.

Nach (100) ergibt sich $F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3} \cdot 10^2\,\mathrm{kg^2}}{\mathrm{kg\,s^2} \cdot 0{,}136^2\,\mathrm{m^2}} = 3{,}61 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$.

2. Um die Masse m_2 der Erde zu berechnen, geht man davon aus, daß die Masse $m_1 = 1$ kg an der Erdoberfläche, d. h. im Abstand $r = 6380$ km vom Erdmittelpunkt, die Anziehungskraft 9,81 N erfährt. Dann ist nach (100)

$$m_2 = \frac{F r^2}{\gamma m_1} = \frac{9{,}81\,\mathrm{kgm} \cdot 6{,}38^2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^2}}{\mathrm{s^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,\mathrm{kg}} = 5{,}99 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \text{ oder rund } 6 \cdot 10^{21}\,\mathrm{t}\,.$$

3. Wie groß ist die Schwerebeschleunigung der Erde in 600 km Höhe, wenn der Erdradius $r_1 = 6380$ km beträgt und an der Erdoberfläche $g_1 = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ist? –
Nach Gleichung (101) ergibt sich mit $r_2 = (6380 + 600)$ km:

$$g_2 = \frac{g_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m}\,(6380)^2\,\mathrm{km^2}}{\mathrm{s^2}\,(6980)^2\,\mathrm{km^2}} = 8{,}20\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

8.2. Keplersche Gesetze

Das großartigste Beispiel für die allgemeine Massenanziehung bieten die Gestirne. Bei ihrer Bewegung unterliegen die Planeten von seiten der Sonne einer fortwährenden Zentripetalkraft, die kreisähnliche Bahnen erzwingt.
Dasselbe trifft auch für den Mond bei seinem Umlauf um die Erde zu, dessen Massenanziehung ihrerseits auf die Erde zurückwirkt. Beide Himmelskörper bewegen sich so um ihren *gemeinsamen Schwerpunkt*, welcher etwa $^3/_4$ Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt liegt (d. h. noch im Erdinnern). Eine sichtbare Folge dieser Bewegung sind Ebbe und Flut.

An Hand sorgfältig gesammelter astronomischer Daten fand KEPLER bereits 1609 die 3 Gesetze, welche die Bewegung der Planeten beherrschen:

1. Die Planeten bewegen sich auf *Ellipsen*, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der von der Sonne nach dem Standort des Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in *gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Achsen der Bahnellipsen.

Der Beweis des 1. Gesetzes sei hier übergangen, da er relativ weitschweifig ist. Zudem ist die Abweichung gegenüber einer Kreisbahn bei allen Planeten nur sehr gering, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht.

Übersicht über die Planeten

Planet	Sonnenentfernung (große Halbachse der Bahnellipse in Millionen km)	Umlaufzeit Jahre	numerische Exzentrizität	Masse gegen die Erde
Merkur	57,91	0,2408	0,206	0,053
Venus	108,21	0,6152	0,007	0,815
Erde	149,60	1,0000	0,017	1,000
Mars	227,9	1,8809	0,093	0,107
Jupiter	778,3	11,8622	0,048	318,00
Saturn	1428	29,4577	0,056	95,22
Uranus	2872	84,018	0,047	14,55
Neptun	4498	164,78	0,009	17,23
Pluto	5910	248,4	0,247	0,9
Sonne	—	—	—	$3{,}33 \cdot 10^5$
Mond	Erdentfernung 384400 km	27,32 Tage	0,0549	0,0123

$$\text{Numerische Exzentrizität} = \frac{\text{halber Abstand d. Brennpunkte}}{\text{große Halbachse der Bahn}}$$

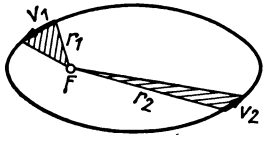
Beweis zum 2. Keplerschen Gesetz:

Dieses auch als **Flächensatz** bezeichnete Gesetz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von der *Erhaltung des Drehimpulses* (95). Den nach Gleichung (94) gültigen Ausdruck für den Drehimpuls eines Massenpunktes $J\omega = mr^2\omega$ kann man wegen $r\omega = v$ in die Form bringen

$$J\omega = mrv\,.$$

Das Produkt rv hat also stets den gleichen Wert. Wenn sich der Planet beim Durchlaufen der elliptischen Bahn der Sonne nähert, muß deshalb seine Bahngeschwindigkeit zunehmen. Sie nimmt wieder ab, wenn er sich von der Sonne entfernt. Das Produkt rv läßt sich aber als doppelter Flächeninhalt eines Dreiecks auffassen, dessen Basis gleich dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg und dessen Höhe gleich dem Sonnenabstand r ist (Bild 127).

Bild 127. Zum Flächensatz: F Brennpunkt der KEPLER-Ellipse (Standpunkt der Sonne)



Beweis zum 3. Keplerschen Gesetz: Fliehkraft und Massenanziehungskraft müssen (bei Annahme einer Kreisbahn) in jedem Augenblick einander gleich sein. Bedeutet m_1 die Masse der Sonne und m_2 die des Planeten, so folgt die Gleichung [s. Gleichungen (98) und (100)] $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 r\omega^2$. Man setzt nun die Zeit eines Umlaufes $T = \frac{1}{n}$, wobei n die Zahl der Umläufe je Zeiteinheit bedeutet. Dann ist $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$.

Dies eingesetzt, ergibt $\frac{m_1\gamma}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ oder umgeformt $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{m_1\gamma}$.

Die rechte Seite liefert einen Wert, der für alle Planeten gleich ist. Dann besagt die linke Seite, daß das Verhältnis $T^2:r^3$ bei allen Planeten übereinstimmt.

Die in 7.6.2. berechnete Geschwindigkeit $v = 7900$ m/s reicht gerade aus, um einen künstlichen Satelliten in der Nähe der Erdoberfläche auf einer Kreisbahn zu halten. Ist die Geschwindigkeit aber größer, so erfolgt die Bewegung nach den KEPLERschen Gesetzen auf einer elliptischen Bahn.

Von besonderem Interesse ist aber noch die Mindestgeschwindigkeit, die ein Körper der Masse m haben muß, um den *Anziehungsbereich der Erde* völlig *zu verlassen*. In diesem Fall muß seine kinetische Anfangsenergie mindestens ebenso groß sein wie diejenige Arbeit, die zur Entfernung des Körpers von der Erdoberfläche ($r = r_1$) bis zum Abstand $r = \infty$ erforderlich ist. Bedeutet g_1 die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche und g_2 in einem beliebigen Abstand, so gilt mit (101) zunächst der Ansatz

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{r=r_1}^{r=\infty} mg_2\,\mathrm{d}r = \int_{r=r_1}^{r=\infty} \frac{mg_1r_1^2}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Die Integration ergibt die **Fluchtgeschwindigkeit**

$$\frac{mv^2}{2} = mgr_1 \quad \text{bzw.}$$

$$v = \sqrt{2gr_1} = 11\,200\ \text{m/s}.$$

Sie wird auch häufig als **2. kosmische Geschwindigkeit** oder **parabolische Geschwindigkeit** bezeichnet, da sich der Körper dann nicht mehr auf einer elliptischen, sondern auf einer parabolischen Bahn mit dem Erdmittelpunkt als Brennpunkt von der Erde entfernt.

Lehre von den Schwingungen

Bei vielen natürlichen und technischen Vorgängen kann man schwingende Bewegungen beobachten, ein rhythmisches Hinundherpendeln um eine bestimmte Ruhelage. Das Uhrpendel, an Seilen hängende Lasten, das vibrierende Auspuffrohr sind nur einige Beispiele. Derartige Schwingungen können, von zahllosen nützlichen und interessanten Anwendungen abgesehen, auch von gefährlicher Wirkung werden und zur Zerstörung von Bauwerken und Maschinenteilen führen.
Form und Verlauf von Schwingungen sind außerordentlich vielfältig. Es zeigt sich aber, daß ein bestimmter, einfacher Typ sich nicht nur mathematisch bequem handhaben läßt, sondern auch vielen wirklichen Schwingungsvorgängen ziemlich genau entspricht. Es ist dies die **harmonische Schwingung** (sinusförmige Schwingung). Schwingungen von anderem Verlauf nennt man **anharmonisch.**

9. Kinematik der harmonischen Schwingung

9.1. Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Bewegung

Eine harmonische Bewegung kann als eine von der Seite her gesehene Kreisbewegung aufgefaßt werden, wie etwa der an die Wand geworfene Schatten einer im Vertikalkreis umlaufenden Kugel (Bild 128). Die Kugel scheint dort auf- und abzuschwingen. Hängt man jetzt eine zweite, an einer Schraubenfeder elastisch auf- und abschwingende Kugel in den Strahlengang, so vollführen beide Schatten die gleiche Bewegung, vorausgesetzt, daß Schwingungsweite und Frequenz richtig abgestimmt sind. Es gelingt dann leicht, beide Schatten für einige Zeit vollkommen zur Deckung zu bringen.

Diese schwingende Bewegung wird durch folgende Angaben charakterisiert:

Frequenz $f = \frac{z}{t}$: Anzahl z der Schwingungen je Zeiteinheit. Jede Schwingung besteht aus einem Hin- und Hergang.
Einheit der Frequenz: $1^1/s = 1$ **Hertz (Hz);**
1000 Hz = 1 kHz

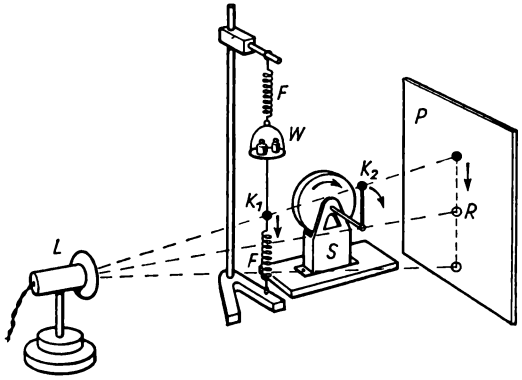


Bild 128. Vergleich der harmonischen Schwingung mit der gleichförmigen Bewegung auf der Kreisbahn
F Feder, W Schale mit Wägestücken zur Abstimmung der Frequenz, K_1 vertikal schwingende Kugel, K_2 rotierende Kugel, S Synchronmotor, L Lampe, R projizierte Ruhelage der Kugel K_1, P Projektionswand

Schwingdauer $T = \frac{1}{f}$: Zeitdauer für einen Hin- und Hergang

Elongation (Auslenkung) y: Entfernung des schwingenden Körpers von der Ruhelage zur Zeit t

Amplitude (Schwingweite) y_{max}: größte Entfernung aus der Ruhelage

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$: Winkelgeschwindigkeit des zugeordneten rotierenden Punktes [s. Gleichung (27), in der man $n = f$ zu setzen hat]

Phasenwinkel $\varphi = \omega t$: Winkel, den der zugeordnete umlaufende Punkt in der Zeit t durchlaufen hat (Bogenmaß!)

Um den zeitlichen Verlauf einer Schwingung darzustellen, zeichnet man den von einem Punkt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit durchlaufenen Kreis (Bild 129). Die Projektion dieser Bewegung auf den senkrechten Durchmesser liefert das Bild einer symmetrisch zum waagerechten Durchmesser verlaufenden harmonischen Schwingung. Der *maximal erreichte* Abstand des schwingenden Punktes von der Waagerechten ist der Kreisradius und zugleich die Amplitude y_{max} der Schwingung. Um nun die Abhängigkeit der jeweiligen Auslenkung y von der Zeit t, d. h. die Funktion $y = y(t)$, aufzuzeigen, legt man die Zeitachse in die Richtung des waagerechten Durchmessers und trägt die den einzelnen Zeitpunkten entsprechenden Auslenkungen y als Ordinaten auf. Die Verbindungslinie aller erhaltenen Punkte ergibt eine **Sinuskurve**. Aus Bild 129 ist sofort abzulesen:

$$y = y_{max} \sin \varphi .$$

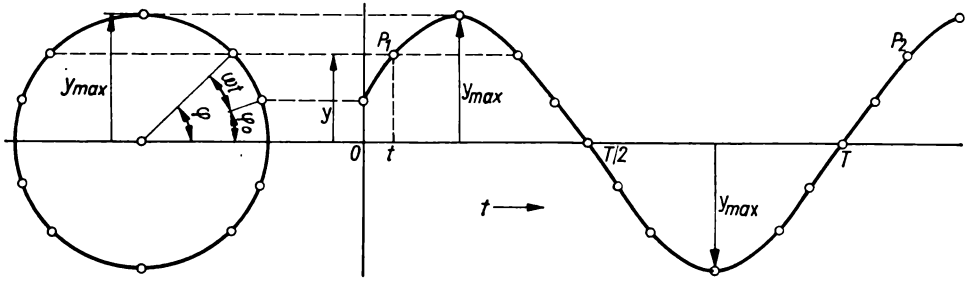


Bild 129. Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung

Das Argument φ der Sinusfunktion nennt man den **Phasenwinkel.** Im allgemeinen besteht er aus zwei Teilen. Der eine Teil ist derjenige Winkel φ_0, der die Anfangslage des schwingenden Punktes zur Zeit $t = 0$ angibt. Man bezeichnet ihn als **Phasenkonstante** (gelegentlich auch als Nullphasenwinkel). Der zweite Teil ist derjenige Winkel, den der Punkt im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = t$ überstreicht. Da seine Winkelgeschwindigkeit ω als konstant vorausgesetzt wird, hat er nach (22) den Betrag $\varphi' = \omega t$. Damit ist der Phasenwinkel

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \text{und}$$

(102) $$\boxed{y = y_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)}$$ **Elongation y der Sinusschwingung**

Aus Gründen rechnerischer Einfachheit legt man gern den Beginn der Zeitzählung mit jenem Augenblick zusammen, in dem der schwingende Körper durch seine Ruhelage geht. Da dann für $t = 0$ die Elongation $y = 0$ ist, muß in diesem Fall auch die Phasenkonstante φ_0 den Wert 0 haben. Es ergibt sich der vereinfachte Ausdruck

(103) $$\boxed{y = y_{max} \sin \omega t}$$

Während der Zeitdauer T einer vollen Schwingung durchläuft der zugeordnete rotierende Punkt den Winkel $\varphi = 360° = 2\pi$. Es ist daher $\omega T = \frac{\omega}{f} = 2\pi$. Hieraus folgt

(104) $$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$ **Kreisfrequenz ω**

Da sich die Beträge der Sinusfunktion in Abständen von jeweils 2π periodisch wiederholen, ergeben sich im weiteren Verlauf der Schwingung immer wieder Punkte, die sich in gleicher Schwingungsphase oder kurz in **gleicher Phase** befinden. Auf Bild 129 sind es z. B. die mit P_1 und P_2 bezeichneten Punkte. Ihre Phasenwinkel unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von 2π.

Beispiele: 1. Welche Kreisfrequenz hat eine Schwingung, deren Dauer 3,5 s beträgt? — Nach Gleichung (104) ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}5\ \text{s}} = 1{,}8\ ^1/\text{s}\,.$$

2. Welche Auslenkung zeigt ein schwingender Punkt 0,003 s nach Beginn der Schwingung aus der Ruhelage, wenn die Amplitude 3 cm und die Frequenz $25\,^1/\text{s}$ beträgt? – Es ist zunächst $\omega t = 2\pi f t = 0{,}471$ (Bogenmaß), was, in Gradmaß umgerechnet, 27° ergibt. Laut Tabelle ist $\sin 27° = 0{,}454$. Damit wird $y = 3\ \text{cm} \cdot 0{,}454 = 1{,}36\ \text{cm}$.

3. Ein Körper schwingt mit der Frequenz $8\,^1/\text{s}$ und hat die Amplitude 4 cm. Wieviel Sekunden nach dem Durchgang durch die Ruhelage beträgt die Elongation 3 cm? –
Da die Zeitzählung von der Ruhelage aus beginnt, ist $\varphi_0 = 0$. Aus Gleichung (103) erhält man zunächst

$$\sin \omega t = \frac{y}{y_{max}} = \frac{3\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 0{,}75\,.$$

Dem entspricht ein Winkel von $\varphi = \omega t = 48{,}6°$ bzw. (im Bogenmaß) 0,848.
Aus $\varphi = 2\pi f t$ folgt schließlich

$$t = \frac{\varphi}{2\pi f} = 0{,}017 \text{ s}.$$

4. Wieviel Schwingungen hat ein Körper nach Zurücklegen des Phasenwinkels $\varphi = 26{,}8$ (Bogenmaß) vollendet? – Da eine volle Schwingung dem Winkel 2π entspricht, gilt für z Schwingungen $z:1 = \varphi:2\pi$, wonach $z = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{26{,}8}{2\pi} = 4{,}27$ Schwingungen ist.

9.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung der harmonischen Bewegung

Jedesmal wenn der nach Bild 129 auf der Kreisbahn umlaufende Punkt den waagerechten Durchmesser schneidet, läuft die Sinuskurve durch die Zeitachse. Dort liegen jene Zeitpunkte, in denen der zugeordnete schwingende Punkt durch seine Ruhelage eilt. Da hier der Vektor der Bahngeschwindigkeit v mit seiner Projektion auf den senkrechten Durchmesser zusammenfällt und die Bahngeschwindigkeit nach (24) gleich dem Produkt aus dem Bahnradius und der Winkelgeschwindigkeit ist, gilt für die

(105) **Geschwindigkeit des schwingenden Punktes beim Durchgang durch die Ruhelage:**

$$v_{max} = y_{max}\omega .$$

Für beliebige Zeitpunkte erhält man die Geschwindigkeit durch Differenzieren der Funktion (102) nach der Zeit t:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d\,[y_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)]}{dt}$$

und erhält dabei

(106) $$v = y_{max}\,\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{oder auch}$$

$$v = y_{max}\,\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Der Phasenwinkel der Geschwindigkeit ist demnach um $\frac{\pi}{2}$ größer als derjenige der entsprechenden Elongation. Man sagt dafür:

Die Geschwindigkeit eilt der Elongation um eine viertel Schwingung voraus.

Dies kommt auf Bild 130 dadurch zum Ausdruck, daß die Kurve der Geschwindigkeit gegenüber derjenigen der Elongation um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ist.

Die zuvor gefundene Gleichung (105) entsteht aus (106) im Falle $\varphi_0 = 0$ für alle Phasenwinkel $\varphi = \omega t$, bei denen $\cos \omega t$ den Maximalwert 1 annimmt, d. h., wenn $\omega t = 0$, π, 2π usw. ist. An den Umkehrpunkten $\omega t = \pi/2, 3\pi/2$ usw. nimmt dagegen die Funktion $\cos \omega t$ den Wert Null an. Hier ist auch die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes Null. Da sie im weiteren Fortgang wieder zunimmt, folgt daraus, daß die harmonische Schwingung eine abwechselnd beschleunigte und verzögerte Bewegung sein muß.

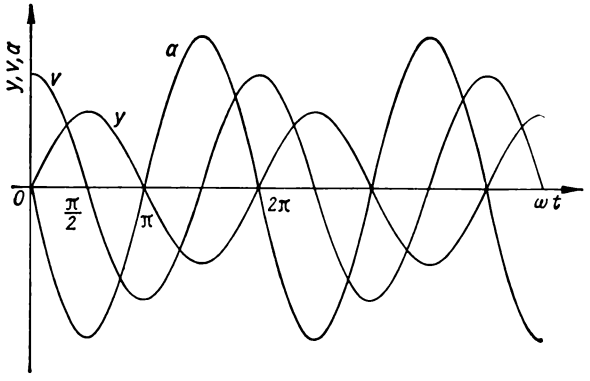


Bild 130
Elongation y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a der harmonischen Schwingung

Der Wert dieser Beschleunigung ergibt sich wiederum durch einen Vergleich mit der Drehbewegung; denn man erinnert sich (2.4.4.), daß diese nur zustande kommt, wenn eine nach dem Drehzentrum hin gerichtete Radialbeschleunigung wirksam ist. Die Projektion dieses Vektors a_r fällt dann mit der Beschleunigung des schwingenden Punktes zusammen, wenn sich dieser in den Umkehrpunkten befindet. Für den Kreisradius r hat man jetzt lediglich y_{max} zu setzen und findet so gemäß Gleichung (42) den Betrag der

(107) **Beschleunigung des schwingenden Punktes in den Umkehrpunkten:**

$$\boxed{a_{max} = y_{max}\,\omega^2}$$

Für beliebige Zeitpunkte erhält man die Beschleunigung durch Bildung der zweiten Ableitung der Funktion (102) bzw. der ersten Ableitung der Funktion (106):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,[y_{max}\,\omega \cos(\omega t + \varphi_0)]}{dt}$$

und findet hieraus

(108) $$a = -y_{max}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{oder auch}$$
$$a = y_{max}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Der Phasenwinkel der Beschleunigung ist demnach um π größer als derjenige der entsprechenden Elongation:

Die Beschleunigung eilt der Elongation um eine halbe Schwingung voraus.

Auf Bild 130 sieht man, daß die Kurve der Beschleunigung gegenüber derjenigen der Elongation um den Winkel π nach rechts verschoben ist.
Schließlich erkennt man auch, daß die Gleichung (107) nur einen Sonderfall der allgemeineren Gleichung (108) darstellt; denn die Funktion $\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$ erreicht in den Umkehrpunkten jeweils ihren Maximalwert 1.

Beispiele: 1. Mit welcher Geschwindigkeit eilt ein mit der Frequenz $12^1/_s$ schwingender Punkt durch die Ruhelage, wenn seine Amplitude 5 cm beträgt? –
Nach Gleichung (105) erhält man

$$v_{max} = y_{max}\,\omega = 5\text{ cm} \cdot 2\pi \cdot 12^1/_s = 377{,}0\text{ cm/s}.$$

2. Wie groß ist im vorigen Beispiel die nach der Ruhelage hin gerichtete Beschleunigung in dem Augenblick, in dem die Elongation 2 cm beträgt? –
Mit der Phasenkonstanten $\varphi_0 = 0$ ist zufolge Gleichung (103)

$$y_{max} = \frac{y}{\sin \omega t}.$$

Setzt man dies in Gleichung (108) ein, so ergibt sich

$$a = -y\omega^2 = -y\,(2\pi f)^2 = -11\,370\ \mathrm{cm/s^2}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Beschleunigung der Elongation entgegen gerichtet ist.

9.3. Überlagerung harmonischer Schwingungen

9.3.1. Zusammensetzung von parallel zueinander verlaufenden Schwingungen

Veranlaßt man einen Körper, gleichzeitig zwei verschiedenen Schwingungen zu folgen, so führt er zusammengesetzte Schwingungen aus. Man kann zu diesem Zweck zwei schwere, verstellbare Pendel durch eine leichte Querlatte verbinden und an ihrer Mitte eine Schreibfeder befestigen (Bild 131). Die Bewegung der Feder wird auf einen Papierstreifen aufgezeichnet, welcher langsam darunter vorbeigleitet.

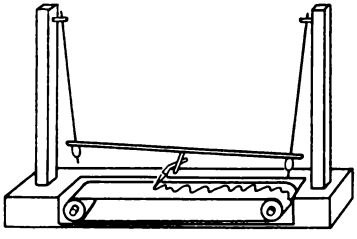


Bild 131. Aufzeichnung einer zusammengesetzten Schwingung

Es lassen sich u. a. folgende Versuche anstellen:

1. Beide Pendel haben gleiche Schwingdauer und werden zu gleicher Zeit ausgelöst. Sie schwingen also in gleicher Phase. Die Feder zeichnet die Schwingung als Sinuslinie.

2. Die Pendel werden aus entgegengesetzten Stellungen losgelassen, die von der Ruhelage gleich weit entfernt sind, womit eine Phasenverschiebung von 180° erreicht wird. Die Feder bleibt in Ruhe. Rechnerisch entspricht das einer Addition der beiden Sinusfunktionen:

$$\sin(\omega t + 180°) + \sin \omega t = \sin \omega t \cos 180° + \cos \omega t \sin 180° + \sin \omega t = 0.$$

3. Das eine Pendel wird losgelassen, wenn das andere gerade durch den Ruhepunkt schwingt. Die Phasenverschiebung beträgt jetzt 90°:

$$\sin(\omega t + 90°) + \sin \omega t = \sin \omega t \cos 90° + \cos \omega t \sin 90° + \sin \omega t = \\ = \cos \omega t + \sin \omega t.$$

Erweitert man diesen Wert mit $\sqrt{2}$, so erhält man

$$\sqrt{2}\,(\cos \omega t \sin 45° + \sin \omega t \cos 45°) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 45°),$$

d. h. wieder eine Sinusschwingung gleicher Periode aber mit einer Phasenverschiebung von 45°.

4. Das eine Pendel wird auf die halbe Schwingdauer verkürzt. Werden dann beide gleichzeitig ausgelöst, so führt der Zeichenstift keine sinusförmige Bewegung mehr aus, sondern zeichnet eine sich rhythmisch wiederholende, eigenartige Wellenlinie auf. Die Schwingung ist nicht mehr harmonisch.

5. Es entstehen immer neue Wellenbilder, wenn man Phase, Frequenz oder Amplitude der beiden Pendel willkürlich ändert.

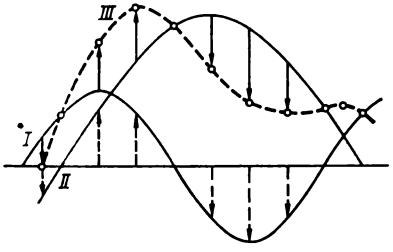


Bild 132. Grafische Addition zweier Schwingungen

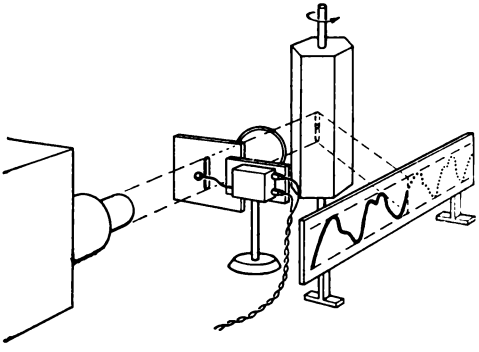


Bild 133. Sichtbarmachung von Schwingvorgängen mit dem Drehspiegel

Bild 134. Schwingungen des Klöppels einer Hausklingel



Derartige Schwingungsbilder lassen sich leicht zeichnen (Bild 132). Man trägt die beiden Sinuskurven I und II längs der gleichen (Zeit-) Achse auf, addiert die jeweiligen Auslenkungen vorzeichengerecht durch Aneinandersetzen und verbindet die erhaltenen Punkte miteinander (III).

Schnell verlaufende Schwingungen untersucht man zweckmäßig mittels Lichtzeigers und Drehspiegels (Bild 133). Um z. B. die Schwingungen eines Klingelklöppels sichtbar zu machen, läßt man ihn vor einem Spalt schwingen, beleuchtet diesen mit einem Projektor und richtet das Bild über einen rotierenden Spiegel auf eine weiße Wand. Der Spiegel zieht den Spalt zu einem Lichtband auseinander, und die Bewegung des Klöppels erscheint als dunkle Kurve. Eine dazwischengeschaltete Linse sorgt für die nötige Vergrößerung und scharfe Abbildung. Auch hier zeigt sich keine Sinuslinie, sondern eine gezackte Kurve, die durch Überlagerung einzelner Teilschwingungen entstanden (Bild 134) gedacht werden kann. Die Schwingungen fast aller Körper haben derart zusammengesetzten Charakter. Die rein harmonische Schwingung ist ein idealer Grenzfall.

Wie man durch Überlagerung einzelner Sinusschwingungen die verschiedensten Schwingungskurven erzeugen kann (Bilder 135 ··· 137), so lassen sich auch umgekehrt Schwingungen von beliebiger Kurvenform mit einer bestimmten mathematischen Methode in einzelne sinusförmige Teilschwingungen auflösen (FOURIERanalyse).

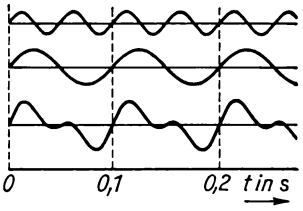


Bild 135. Addition zweier Schwingungen im Frequenzverhältnis 2:1

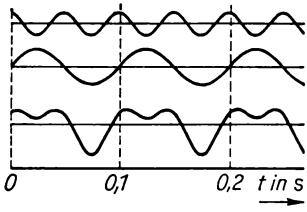


Bild 136. Frequenzverhältnis 2:1 mit gegenseitiger Phasenverschiebung

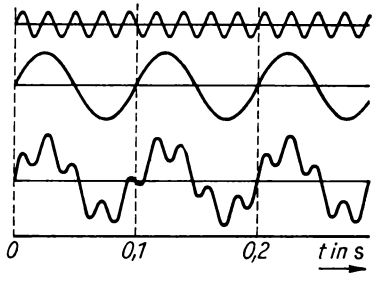


Bild 137. Überlagerung bei großem Frequenzunterschied

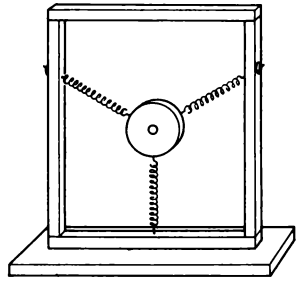


Bild 138. Herstellung elliptischer Schwingungen

9.3.2. Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen

Man kann es auch so einrichten, daß ein Körper zwei zueinander senkrechte Schwingungen gleichzeitig ausführt. Eine geeignete Vorrichtung ist eine schwere, durchlochte Scheibe, die zwischen drei gleichgespannten Federn aufgehängt ist (Bild 138). Sie kann sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung mit gleicher Frequenz schwingen. Ein Projektor wirft einen Lichtfleck durch das Loch an die Wand: Gibt man der Masse einen beliebigen Anstoß, so beschreibt der Lichtfleck Kreise oder Ellipsen. Man nennt sie **zirkular** bzw. **elliptisch polarisierte** (gerichtete) Schwingungen. Je nach dem Phasenunterschied können bei gleicher Amplitude und Frequenz der Komponenten folgende Formen auftreten (Bild 139):

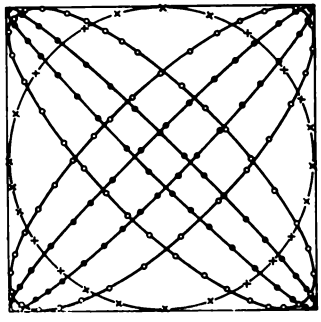


Bild 139. Lissajoussche Figuren bei einem Frequenzverhältnis 1:1

1. Beide Schwingungen gehen gleichzeitig durch die Null-Lage. Es entsteht ein diagonal verlaufender Strich, d. h. eine **linear polarisierte** Schwingung. Wegen $y = \sin \omega t$ und $x = \sin \omega t$ ist in jedem Augenblick

$y = x$, womit sich das Bild einer um 45° geneigten Geraden ergibt. Ebenso kommt bei einem Phasenunterschied von 180° eine Gerade zustande.

2. Der Phasenunterschied beträgt $T/4 = 90°$. Die vertikale Schwingung setzt erst ein, wenn die horizontale schon den 1. Umkehrpunkt erreicht hat. Es entsteht eine Kreisbahn, d. h. eine **zirkular polarisierte** Schwingung. Wegen $y = \sin \omega t$ und $x = \sin(\omega t + 90°) = \cos \omega t$ besteht die Beziehung $x^2 + y^2 = 1$, die für einen Kreis gültig ist.

3. Bei allen anderen Phasenunterschieden, z. B. $T/8$, entstehen Ellipsen verschiedener Form, wie sich auch mathematisch zeigen läßt.

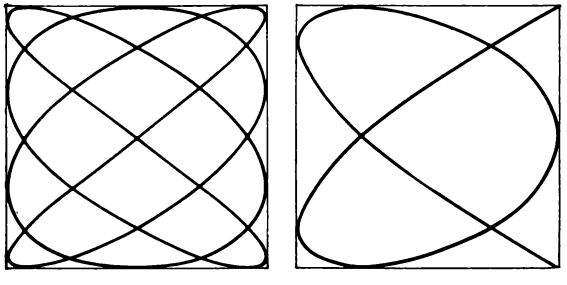


Bild 140a und b. Lissajoussche Figuren bei einem Frequenzverhältnis 3:4 und verschiedenen Phasenlagen

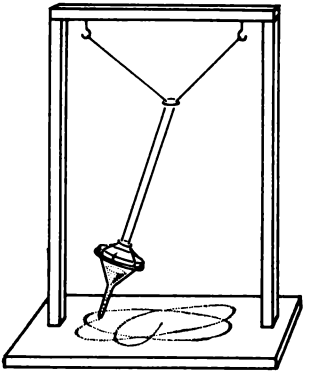


Bild 141. Sandstreuender Trichter zeichnet Lissajoussche Figuren

Sobald die Frequenzen beider Komponenten aber verschieden sind, schließen sich die Ellipsen nicht, und es entstehen eigenartig verschlungene Kurven. Nach ihrem Entdecker heißen sie **Lissajoussche Figuren** (Bild 140). Ihre Umhüllende ist im Fall gleicher Amplituden ein Quadrat, sonst aber ein Rechteck. Solche Figuren lassen sich leicht herstellen, wenn man einen sandstreuenden Trichter an ein Pendel hängt, das zu gleicher Zeit nach zwei zueinander senkrechten Richtungen schwingen kann (Bild 141).

Wie man derartige Figuren zeichnet, sei am Beispiel $f_1 : f_2 = 3:4\ (= 12:16)$ bei gleicher Amplitude erläutert (Bild 142). Man beschreibe in ein Quadrat einen Kreis und teile seinen Umfang in 12 (○) bzw. 16 (◎) Teile. Durch die Teilpunkte ziehe man Parallelen zu den Quadratseiten und erhält dadurch ein Netz von Rechtecken. Sobald man, an der Ecke eines beliebigen Rechteckes beginnend, in Richtung der Diagonalen einen fortlaufenden Kurvenzug in das Netz legt, entsteht eine Lissajoussche Kurve. Der im Bild ge-

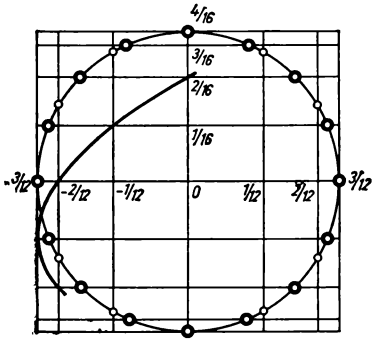


Bild 142. Konstruktion einer Lissajousschen Figur

machte Anfang entspricht einer Phasenverschiebung von $^2/_{16}\ T_2$. Bei anfänglicher Phasengleichheit muß man im Mittelpunkt des Quadrates beginnen.

Die LISSAJOUSschen Figuren stellen nur dann einen geschlossenen Linienzug dar, wenn die beiden Grundfrequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinanderstehen. Bei der geringsten Verstimmung aber ändert der Linienzug seine Gestalt ständig. Sehr schön kann man all diese Erscheinungen durch Überlagerung elektrischer Schwingungen studieren, die man auf dem Leuchtschirm einer Elektronenstrahl-Röhre (BRAUNsche Röhre) sichtbar macht.

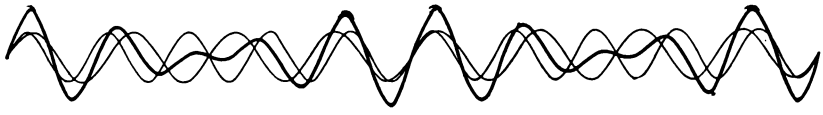


Bild 143. Entstehung von Schwebungen aus 2 Schwingungen benachbarter Frequenz

9.3.3. Schwebungen

Wenn die Frequenzen der beiden sich überlagernden Schwingungen sich nur wenig voneinander unterscheiden, entsteht ein typisches Schwingungsbild, das man **Schwebungen** nennt. Ein Bild solcher Schwebungen läßt sich nach dem in 9.3.1. angegebenen Verfahren durch Zeichnung gewinnen (Bild 143). Hierbei muß aber große Sorgfalt aufgewandt werden, wenn die resultierende Kurve sauber ausfallen soll. Das Charakteristische der resultierenden Schwingungskurve ist, daß ihre Amplituden in regelmäßigen Abständen von Null auf einen Höchstwert anschwellen und dann wieder auf Null abnehmen. Besser ist dies auf Bild 144 erkennbar.

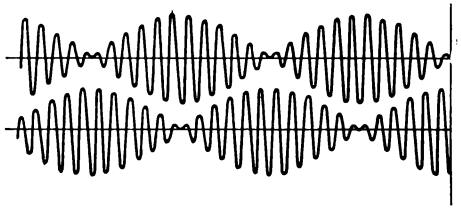


Bild 144. Schwebungen zweier gekoppelter Pendel

Schwebungen sind Schwingungen mit periodisch an- und abschwellender Amplitude.

Man versteht ferner unter der

Schwebungsfrequenz: die Anzahl der in der Zeiteinheit auftretenden Schwingungsmaxima oder -minima.

Wie läßt sich nun die Schwebungsfrequenz f aus den beiden Frequenzen f_1 und f_2 ihrer Komponenten bestimmen? Ein Schwebungsmaximum entsteht offenbar immer dann, wenn die Maxima der beiden Komponenten zur Deckung kommen (s. Bild 143), d. h. dann, wenn die eine Schwingung die andere „überholt". Finden z. B. in einer Sekunde $f_1 = 15$ und $f_2 = 14$ ganze Schwingungen statt und beginnen die beiden Schwingungen in gleicher Phasenlage, so befinden sie sich am Ende der ersten Se-

kunde abermals in gleicher Phase. Es findet in diesem Zeitraum gerade eine Schwebung statt. Es ist also

(109) $\boxed{f = f_1 - f_2}$ **Schwebungsfrequenz** f

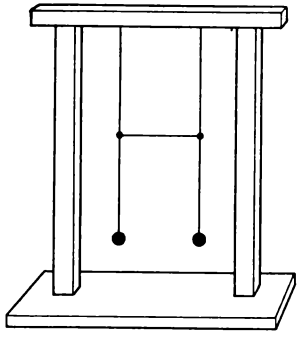


Bild 145. Gekoppelte Pendel

Schwebungen lassen sich experimentell sehr schön mit zwei gleich langen Fadenpendeln vorführen, die durch einen etwa in halber Höhe befestigten Querfaden mehr oder weniger eng miteinander verbunden sind (Bild 145). Sie werden zunächst in gleicher Phase zum Schwingen angestoßen, wobei man die Frequenz f_2 mißt. Bei einem 2. Versuch werden sie im Gegentakt, d. h. mit einem Phasenunterschied von 180°, zum Schwingen gebracht. Man sieht, wie der verbindende Querfaden die Pendellängen in anderer Weise beeinflußt als vorher und die größere Frequenz f_1 entsteht. Diese beiden Fälle nennt man die **Fundamentalschwingungen** des gekoppelten Systems.

Nun kommt der Hauptversuch: Man läßt das eine Pendel in Ruhe und stößt nur das andere an. Es dauert nur wenige Augenblicke, und das anfangs ruhende Pendel beginnt immer stärker zu schwingen, während das angestoßene allmählich zur Ruhe kommt. Dann hört das zweite Pendel mit Schwingen auf, und das erste gerät wieder in Bewegung. So setzt sich das Wechselspiel weiter fort, ein Hinundherfluten der Bewegungsenergie von einem Pendel zum anderen.

Mit einer Uhr kann man leicht die beiden Frequenzen f_1 und f_2 bestimmen und bestätigen, daß $f = f_1 - f_2$ ist.

Die meisten technischen Schwingungsvorgänge elektrischer, akustischer und mechanischer Art werden heute mit elektrischen **Oszillographen** sichtbar gemacht, wobei alle hier besprochenen Schwingungstypen auftreten können. Die Deutung derartiger Oszillogramme wird sehr erleichtert, wenn man sich im Zeichnen von Schwingungsbildern gut geübt hat.

Beispiel: Zwei gekoppelte, gleich lange Pendel führen in 5 min im Gleichtakt 350 bzw. im Gegentakt 315 Schwingungen aus. Wieviel Sekunden nach dem Anstoßen des ersten Pendels kommt das ins Mitschwingen geratende zweite Pendel erstmalig wieder zur Ruhe? – Die Frequenzen sind $f_1 = \frac{350}{300\,\mathrm{s}} = 1{,}167\,^1/\mathrm{s}$ und $f_2 = \frac{315}{300\,\mathrm{s}} = 1{,}050\,^1/\mathrm{s}$. Nach (109) ist die Schwebungsfrequenz $f = f_1 - f_2 = (1{,}167 - 1{,}050)\,^1/\mathrm{s} = 1{,}117\,^1/\mathrm{s}$. Die Dauer einer Schwebung beträgt demnach $1/f = 8{,}55$ s.

9.3.4. Kippschwingungen

Außer der harmonischen Schwingung ist der Typ der **Kippschwingung** von weitreichender Bedeutung. In einen dreieckigen, pendelnd aufgehängten Trog fließt ein Wasserstrahl (Bild 146). Sobald sich der Trog bis zu einer gewissen Höhe gefüllt hat, wird

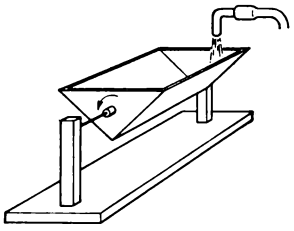


Bild 146. Entstehung von Kippschwingungen

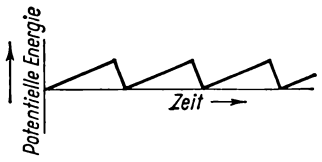


Bild 147. Energie-Zeit-Kurve einer Kippschwingung

das Gleichgewicht labil, das Gefäß kippt um und entleert seinen Inhalt. Es richtet sich wieder auf, und das Spiel beginnt von neuem. Man erkennt, daß es sich hier um einen Energiespeicher handelt, der sich periodisch lädt und entlädt. Die Ladung erfolgt allmählich von außen her, die Entladung geschieht nach außen und plötzlich. Stellt man die Bewegung grafisch dar, so entsteht eine *Sägezahnkurve* (Bild 147). Offenbar hängt die Frequenz von der je Zeiteinheit zufließenden Menge sowie vom Fassungsvermögen (Kapazität) des Gefäßes ab.
Kippschwingungen spielen heute eine große Rolle in den verschiedensten elektronischen Einrichtungen. Hierbei sind es meist Kondensatoren, die mit Hilfe eines elektrischen Stromes relativ langsam aufgeladen und nach Erreichen einer bestimmten Spannung plötzlich entladen werden. Auf diese Weise wird z. B. der im Fernsehempfänger hin und her eilende, das Bild aufzeichnende Elektronenstrahl gesteuert.

Beispiele: 1. Beim Anstreichen einer Saite mit dem Geigenbogen nimmt dieser die Saite ein wenig mit, bis ihre Spannung (Energiegehalt) so groß wird, daß sie sich vom Bogen losreißt und zurückspringt. Der Vorgang wiederholt sich einige hundertmal in der Sekunde. Auch hier hängt die Frequenz von der „Kapazität" (dem Energiegehalt der gespannten Saite) ab.

2. In ähnlicher Weise entstehen alle knarrenden und quietschenden Geräusche beim Anziehen von Bremsen, in schlecht geölten Türangeln usw.

10. Dynamik schwingender Körper

10.1. Kraftgesetz der harmonischen Schwingung

Ein Massenpunkt bewegt sich nur so lange auf einer Kreisbahn, wie die nach dem Mittelpunkt gerichtete Radialkraft wirkt. Ebenso muß der harmonisch schwingende Körper einer Kraft unterworfen sein, da er sich abwechselnd beschleunigt und verzögert bewegt. Diese Kraft folgt unmittelbar aus dem dynamischen Grundgesetz (58) $F = ma$, wenn man die Masse m mit der Beschleunigung a multipliziert, der sie während des Schwingens unterworfen ist. Hierfür ergab sich der mit Gleichung (108) gegebene Ausdruck, so daß die wirkende Kraft

$$F = -m\omega^2 y_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ist. Das Produkt $y_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ aber ist die Elongation y, d. h. die sich von einem Augenblick zum nächsten ändernde Entfernung der schwingenden Masse von ihrer Ruhelage. Die Kraft ist demnach

(110) $$F = -m\omega^2 y.$$

Das Minuszeichen spiegelt die Tatsache wider, daß die Kraft F der jeweiligen Elongation entgegen gerichtet ist. Sie ist in jedem Fall bestrebt, den schwingenden Körper in seine Ausgangslage zurückzutreiben.

Während der harmonischen Schwingung wirkt eine nach der Ruhelage hin gerichtete Kraft. Sie ist der jeweiligen Entfernung von der Ruhelage proportional.

Man erkennt übrigens auch, daß die mit Gleichung (110) gefundene rücktreibende Kraft aus der Radialkraft (98) $F_r = m\omega^2 r$ der Kreisbewegung hervorgeht, wenn man deren Vektor auf den Durchmesser projiziert. Aus Bild 148 ergibt sich dann die Proportion

$$m\omega^2 r : r = F : y$$

und hieraus wiederum für den Betrag von F

$$F = m\omega^2 y.$$

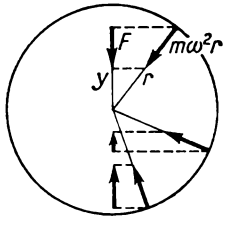


Bild 148. Projektion des Vektors der Radialkraft auf den Kreisdurchmesser

10.2. Lineare Federschwingung

Der letzte Merksatz gibt zugleich die Bedingung an, die eine Vorrichtung erfüllen muß, wenn sie harmonische Schwingungen ausführen soll: Die rücktreibende Kraft muß der jeweiligen *Elongation* der schwingenden Masse *proportional* sein. Dies ist z. B. bei einer Schraubenfeder der Fall, die an einem festen Gestell hängt und mit einem Körper der Masse m belastet ist (Bild 149). Die Eigenmasse der Feder sei demgegenüber vernachlässigt. Durch schrittweise zunehmende Belastung kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Kraft F der von ihr hervorgerufenen *Dehnung* y proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist die *Federkonstante* oder **Richtgröße** D. Es gilt das einfache Gesetz

(111) $$F = Dy$$

mit

(112) $$\boxed{D = \frac{F}{y}}$$ **Richtgröße** D

Einheit der Richtgröße: 1 N/m

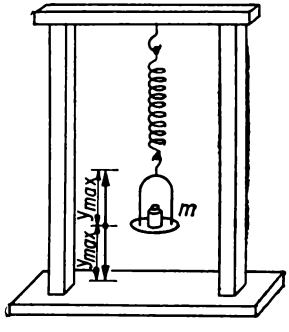


Bild 149. Schwingende Schraubenfeder

Veranlaßt man nun die Feder zu vertikal gerichteten Schwingungen, so ist die dehnende Kraft $F = Dy$ in jedem Augenblick entgegengesetzt gleich der rücktreibenden Kraft (110) $F = m\omega^2 y$. Für die Beträge gilt daher:

$$m\omega^2 y = Dy,$$

womit sich die Beziehung

$$m\omega^2 = D$$

ergibt. Hieraus folgt wegen $\omega = 2\pi f$ unmittelbar die Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

bzw. mit $T = \frac{1}{f}$

(113) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$ **Schwingdauer** T

Wie sich mit einigen einfachen Versuchen leicht bestätigen läßt, ist dreierlei zu erkennen:

1. Die Schwingdauer ist von der Amplitude y_{max} unabhängig.

2. Die Feder schwingt um so langsamer, je größer die angehängte Masse m ist.

3. Die Feder schwingt um so schneller, je größer ihre Federhärte, d. h., je größer die Richtgröße D ist.

Energiebetrachtung: Wie jedes System bewegter Massen enthält auch die linear an einer Feder schwingende Masse einen bestimmten Betrag an Energie. In einer beliebig angenommenen Entfernung y von ihrer Ruhelage hat sie zunächst potentielle Energie; denn um die Masse an diese Stelle zu bringen, muß nach Gleichung (68) die *Spannarbeit* $W = \frac{Fy}{2}$ verrichtet werden. Nach Gleichung (111) ist aber $F = Dy$, so daß die potentielle Energie $W_{pot} = \frac{Dy^2}{2}$ oder

$$W_{pot} = \frac{Dy_{max}^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

ist. Außerdem hat aber die schwingende Masse noch *kinetische Energie*

$$W_{kin} = \frac{mv^2}{2}.$$

Mit (106) $v = \omega y_{max}\cos(\omega t + \varphi_0)$ ist also

$$W_{kin} = \frac{m\omega^2 y_{max}^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Die Gesamtenergie ist in jedem Augenblick die Summe

$$W_{ges} = W_{pot} + W_{kin}.$$

Setzt man hier die soeben berechneten Werte ein und bedenkt noch, daß $m\omega^2 = D$ und $\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$ ist, so folgt

(114) $$\boxed{W_{ges} = \frac{m\omega^2 y_{max}^2}{2}}$$ **Gesamtenergie der linear schwingenden Masse**

Da dieser Ausdruck nur konstante Größen enthält, muß die Gesamtenergie in jedem Augenblick konstant sein. Das ist nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie auch nicht anders zu erwarten!

Schließlich erkennt man noch, daß die letzte Gleichung wiederum in zweierlei Weise gedeutet werden kann. Einerseits stellt sie die kinetische Energie dar, wenn die schwingende Masse durch ihre Ruhelage geht. In diesem Augenblick ist $W_{pot} = 0$. Andererseits kann sie mit $m\omega^2 = D$ in der Form $\frac{Dy_{max}^2}{2}$ geschrieben werden und stellt jetzt die potentielle Energie in den Umkehrpunkten dar, wo $W_{kin} = 0$ ist. Die Gleichung

$$W_{kinmax} = W_{potmax}$$

faßt also die periodische Umwandlung der beiden Energiearten noch einmal zusammen.

Beispiele: 1. Welche Richtgröße hat die Federung eines Kraftwagens, wenn sich die Karosserie bei einer Belastung mit 380 kp um 80 mm senkt? – Mit $F = 3728\ \mathrm{kg\,m/s^2}$ wird

$$D = \frac{F}{y} = \frac{3728\ \mathrm{kgm}}{\mathrm{s^2}\ 0{,}08\ \mathrm{m}} = 46\,600\ \mathrm{N/m}.$$

2. Ein Gegenstand von 50 g Masse hängt an einer Schraubenfeder. Im Ruhezustand ruft er eine Dehnung von 4 cm hervor. Wie groß sind Schwingdauer und Frequenz? –

$$\text{Mit } D = \frac{mg}{y} \text{ wird } T = 2\pi\sqrt{\frac{y}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}04\ \mathrm{m\,s^2}}{9{,}81\ \mathrm{m}}} = 0{,}4\ \mathrm{s};$$

$$f = {}^1/T = {}^1/0{,}4\ \mathrm{s} = 2{,}5\ {}^1/\mathrm{s}.$$

3. Wie groß ist der Phasenwinkel φ nach 5,5 s? – Dividiert man 5,5 s durch 0,4 s, so erhält man 13,75, d. h. 13 volle Schwingungen und ${}^3/_4 T$. Aus

$${}^3/_4 T : T = \varphi : 360°$$

erhält man $\varphi = 270°$.

4. Welche Masse m' ist an die im 2. Beispiel erwähnte Feder anzuhängen, wenn die Schwingdauer gerade 1 s betragen soll? – Durch Auflösen von Gleichung (113) nach m entsteht

$$m' = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = \frac{1^2\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{\mathrm{s^2} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m} \cdot 4\pi^2} = 0{,}311\ \mathrm{kg}.$$

5. Ein Stahlträger wird bei Belastung mit einer Masse von 50 kg um 2 cm durchgebogen und gerät durch Erschütterung in Schwingungen. Wie groß ist die Frequenz?

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{\mathrm{s^2} \cdot 0{,}02\mathrm{m} \cdot 50\,\mathrm{kg}}} = 3{,}5\ {}^1/\mathrm{s}.$$

10.3. Dreh- (Torsions-) Schwingungen

Wenn man nach Bild 150 die Achse einer schweren Scheibe an einer Schneckenfeder befestigt und die Scheibe ein Stück aus ihrer Ruhelage herausdreht, führt sie langsame **Drehschwingungen** aus wie die Unruhe einer Taschenuhr oder das Drehpendel einer Jahresuhr. An die Stelle der Schneckenfeder kann auch ein straff gespannter Stahldraht treten. Derartige Vorrichtungen nennt man auch **Torsionspendel.** Wegen der Drehbewegung der schwingenden Masse hat man hier ihr Massenträgheitsmoment J einzusetzen. Dementsprechend tritt an die Stelle der Richtgröße

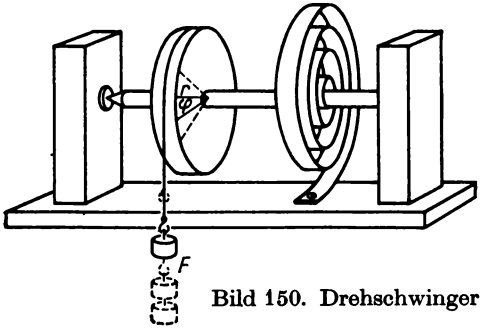


Bild 150. Drehschwinger

(115) **die Winkelrichtgröße** $D^* = \dfrac{\text{Drehmoment } M}{\text{Drehwinkel } \varphi}$

(116) $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{D^*}}}$ **Schwingdauer T des Drehschwingers**

Der in die Berechnung der Winkelrichtgröße eingehende Drehwinkel ist wieder im Bogenmaß einzusetzen.

Beispiele: 1. Welche Winkelrichtgröße hat der Aufhängedraht, wenn ein hängend und zentrisch daran befestigter Metallzylinder von 500 g Masse und 5 cm Durchmesser Drehschwingungen von 1,6 s Dauer ausführt? –
Das Trägheitsmoment des Körpers beträgt nach S. 98

$$J = \frac{mr^2}{2}.$$

Zusammen mit (116) ergibt dies

$$D^* = \frac{4\pi^2 J}{T^2} = \frac{4\pi^2 mr^2}{2T^2} = \frac{2\pi^2 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 0{,}025^2\,\text{m}^2}{2{,}56\,\text{s}^2} = 0{,}0024\,\text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

2. Die Kreisscheibe der in Bild 150 gezeigten Vorrichtung hat einen Durchmesser von 80 mm und wiegt 750 g. Eine am Umfang hängende Masse von 50 g ruft eine Verdrehung der Feder um 25° hervor. Wie groß ist die Schwingdauer? –
Nach (116) ist die Schwingdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D^*}}.$$

Setzt man hier das Massenträgheitsmoment $J = \dfrac{mr^2}{2}$ und die Winkelrichtgröße (115) $D^* = \dfrac{M}{\varphi} = \dfrac{Fr}{\varphi}$ ein, so ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr\varphi}{2F}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}75\,\text{kg}\cdot 0{,}04\,\text{m}\cdot 25°\,\pi s^2}{180°\cdot 2\cdot 0{,}05\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m}}} = 0{,}72\,\text{s}.$$

10.4. Mathematisches Pendel

Unter dem mathematischen Pendel versteht man einen masselosen Faden, an dem ein Massenpunkt im Schwerefeld der Erde Schwingungen ausführt. Es wird annähernd verwirklicht durch einen leichten Faden der Länge l, an dem die kleine Pendelkugel vom Gewicht $G = mg$ hängt. Einmal angestoßen, schwingt es lange Zeit hin und her. Um die Schwingdauer zu berechnen, kann man die senkrecht nach unten gerichtete Kraft $G = mg$ nach Bild 151 in eine radiale (F_1) und tangentiale (F_2) Komponente zerlegen. Erstere kann auf die Bewegung keinen Einfluß haben, da sie in bezug auf den Aufhängepunkt das Drehmoment Null ergibt. Hinsichtlich der tangentialen Komponente ergibt die Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke die Proportion

$$\frac{F_2}{G} = \frac{d}{l} \quad \text{oder} \quad F_2 = \frac{Gd}{l}.$$

Dies besagt, daß die Kraft F_2 der Elongation d proportional ist. Damit erweist sich das Pendel als ein harmonischer Schwinger, für den Gleichung (113) gelten muß. Die in dieser Gleichung vorkommende Richtgröße D ist aber im Falle des Pendels die rücktreibende Kraft F_2 je Längeneinheit, d. h.

$$D = \frac{F_2}{d} = \frac{G}{l} = \frac{mg}{l}.$$

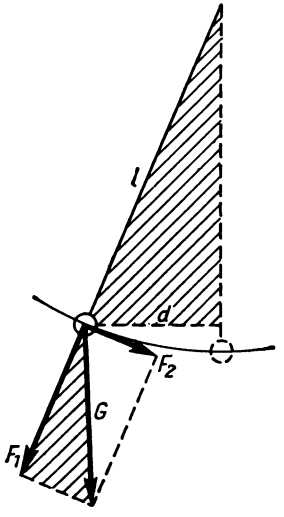


Bild 151. Kräfte am mathematischen Pendel

Setzt man dies in (113) ein, so erhält man

(117) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ **Schwingdauer T des mathematischen Pendels**

Hierin ist insofern eine Ungenauigkeit enthalten, als zur Berechnung der Richtgröße nicht der Abstand d, sondern das durchlaufene Bogenstück eingesetzt werden müßte; doch kann diese Abweichung bei kleinen Amplituden vernachlässigt werden. Das einfache Pendel ist somit, genau besehen, ein anharmonischer Schwinger, was sich besonders bei großen Amplituden bemerkbar macht. Die rechnerisch genaue Erfassung führt zu schwierigen Formeln (elliptische Integrale).

Die Gleichung zeigt in der Tat, daß T nur von der Pendellänge l und g allein abhängt!

Beispiele: 1. Ein Kran trägt eine Last an einem 15 m langen Seil. Wie groß ist die Schwingdauer? –
Da die Masse des Seils gegenüber derjenigen der Last vernachlässigt werden kann, wird näherungsweise die Gleichung für das mathematische Pendel verwendet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{15\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m}}} = 7{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

2. Wie lang ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung genau 1 Sekunde benötigt? – Durch Umformung von (117) erhält man

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{4\,\mathrm{s}^2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}}{4\pi^2\cdot\mathrm{s}^2} = 0{,}994\,\mathrm{m}\,.$$

Die Länge des **Sekundenpendels** beträgt rund 1 m.

10.5. Physisches Pendel

Im Gegensatz zum mathematischen Pendel bezeichnet man jeden anderen unter dem Einfluß der Schwere schwingenden Körper als **physisches** (körperliches) Pendel, wie z. B. ein aufgehängtes Brett oder das Perpendikel einer Uhr.
Da hier eine Drehung um den Aufhängepunkt erfolgt, kann man die Gleichung (116) für die Drehschwingung zugrunde legen. Der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt 0 ist r und das Drehmoment $M = Gd = Gr\sin\alpha$ (Bild 152). Für kleine Drehwinkel ist $\sin\alpha \approx \alpha$ (z. B. $\sin 3° = 0{,}05234$ und $3°$ im Bogenmaß $= 0{,}05236$), so daß $D^* = \dfrac{Gr\sin\alpha}{\alpha} \approx Gr$ ist und damit

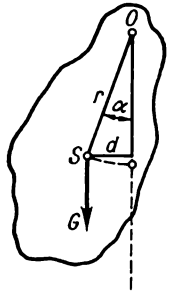


Bild 152. Physisches Pendel

(118) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}}}$$ **Schwingdauer T des physischen Pendels**

Hierbei bedeutet J das Massenträgheitsmoment des Körpers in bezug auf die durch den *Aufhängepunkt* gehende Achse.
Die **reduzierte Pendellänge** l' ist diejenige Länge eines mathematischen Pendels, dessen Schwingdauer mit der eines mit ihm verglichenen physischen Pendels übereinstimmt.
Man kann sie durch einen einfachen Versuch bestimmen. In demselben Punkt, um den der Gegenstand schwingt, befestigt man ein Fadenpendel und verändert seine Länge so lange, bis beide Pendel die gleiche Schwingdauer aufweisen. Das ist durch Probieren leicht zu erreichen. Wenn dann beide Pendel auf gleiche Schwingdauer abgeglichen sind und in der Ruhelage nach unten hängen, gibt der Endpunkt des Fadenpendels auf dem physischen Pendel die Lage des sogenannten **Schwingungsmittelpunktes** an. Der Schwingungsmittelpunkt ist somit der im Abstand l' senkrecht unter der Aufhängung liegende Punkt eines schwingenden Körpers. Durch Vergleich der Schwingdauer der beiden gleichschwingenden Pendel ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}\,.$$

Hieraus berechnet sich die reduzierte Pendellänge

$$l' = \frac{J}{mr}.$$

Den Schwingungsmittelpunkt kann man auch als **Stoßmittelpunkt** St bezeichnen. Führt man nämlich gegen einen Stab, der an einem kurzen Faden aufgehängt ist, einen Stoß (Bild 153) aus, so kann dreierlei eintreten: Ober- oder unterhalb von St getroffen, tritt am Aufhängepunkt ein kräftiger Rückstoß auf, der den Faden zerreißen kann; im Stoßmittelpunkt getroffen aber schwingt der Stab als Pendel um seine Aufhängung. Der schädliche Rückstoß bleibt aus.

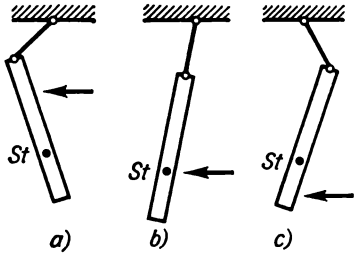


Bild 153. Schlag gegen einen aufgehängten Stab

Beispiele: 1. Ein dünner Stab schwingt um seinen Endpunkt. Beträgt seine Länge l, so ist sein Trägheitsmoment $J = \frac{m}{3} l^2$ und die Winkelrichtgröße $D^* = Gr = mg\frac{l}{2}$, so daß

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2 \cdot 2}{3mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}, \quad \text{d. h. } l' = \frac{2}{3} l.$$

Er hat also dieselbe Schwingdauer wie ein Fadenpendel von $^2/_3$ seiner Länge.

2. Schwere Klöppel von Glocken sind physische Pendel. Sie müssen so geformt sein, daß sie mit dem Stoßmittelpunkt anschlagen, sonst würde die Aufhängung bald zerstört werden.

Da die Schwingdauer des mathematischen Pendels nur von seiner Länge abhängt, kann man sich die schwingende Masse beliebig klein denken und Aufhänge- und Endpunkt miteinander vertauschen. Dem entspricht der Satz:

Die Schwingdauer eines physischen Pendels bleibt unverändert, wenn man Aufhänge- und Schwingungsmittelpunkt vertauscht.

Die reduzierte Pendellänge bleibt dabei natürlich erhalten. Das **Reversionspendel** (Bild 154) ist ein Stabpendel mit 2 verschiebbaren Massen und 2 Aufhängevorrichtungen. Man läßt es abwechselnd um je eines der beiden Schneidenpaare a und b schwingen und verstellt die Massen so lange, bis die Schwingzeiten genau übereinstimmen. Der Abstand l der beiden Schneiden läßt sich genauestens messen und ist gleich der Länge eines gleichschwingenden mathematischen Pendels, für das Gleichung (117) gilt. Das Reversionspendel dient zur Präzisionsbestimmung der Erdbeschleunigung g. Der in 2.2.3. erwähnte Potsdamer Normalwert ist damit gemessen worden.

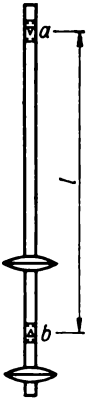


Bild 154. Reversionspendel

10.6. Bestimmung von Massenträgheitsmomenten aus Schwingungen

Bei komplizierten Körpern (z. B. Läufern von Elektromotoren, Propellern usw.) ist eine genaue Berechnung des Massenträgheitsmoments mitunter zu umständlich. Es ist dann viel einfacher, das Massenträgheitsmoment dadurch zu bestimmen, daß man den Gegenstand in geeigneter Weise aufhängt und als **physisches Pendel** schwingen läßt. Durch Abzählen der Schwingungen in einer bestimmten Zeit läßt sich die Schwingdauer T leicht ermitteln und nach Gleichung (118) das Massenträgheitsmoment ausrechnen.

Bild 155 zeigt dies für den Fall einer Riemenscheibe, die pendelnd auf zwei Schneiden gehängt wird. Gleichung (118) liefert das Massenträgheitsmoment in bezug auf die Drehachse $J = \dfrac{T^2 mgr}{4\pi^2}$.

Dabei bedeutet r den Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt und m die leicht zu bestimmende Gesamtmasse der Scheibe. Soll nun das Massenträgheitsmoment dieser Scheibe bezüglich ihres Schwerpunkts ermittelt werden, so ist nach dem Satz von STEINER hiervon der Betrag mr^2 abzuziehen: $J_S = J - mr^2$.

Beispiel: Die Riemenscheibe hat die Masse 800 g und den Radius $r = 6$ cm. Sie führt in 1 min 105 Schwingungen aus. – Es ist zunächst $T = \dfrac{60\,\mathrm{s}}{105}$ und in bezug auf die Drehachse

$$J = \frac{T^2 mgr}{4\pi^2} = \frac{60^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}}{105^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 4\pi^2} = 0{,}00390\,\mathrm{kgm}^2;$$

ferner ist $mr^2 = 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}06^2\,\mathrm{m}^2 = 0{,}00288\,\mathrm{kgm}^2$. Damit wird in bezug auf die durch den Schwerpunkt laufende Achse

$$J_S = J - mr^2 = (0{,}00390 - 0{,}00288)\,\mathrm{kg\,m}^2 = 0{,}00102\,\mathrm{kg\,m}^2.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Körper an einem langen Stahldraht aufzuhängen (Bild 156). Nach einer kleinen Verdrehung führt er dann **Torsionsschwingungen** mit der Schwingdauer T aus, für welche Gleichung (116) gilt, aus der sich das

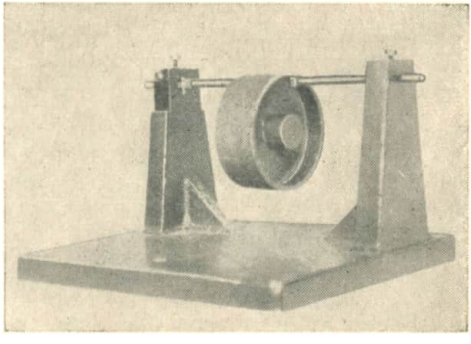
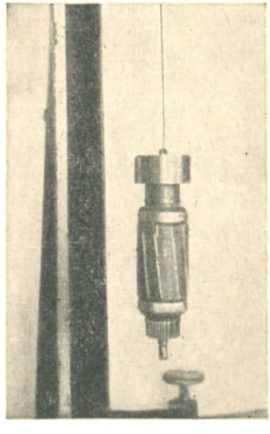


Bild 155. Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Riemenscheibe

Bild 156 Ermittlung des Trägheitsmomentes eines Motorankers



Massenträgheitsmoment J bezüglich der Drehachse berechnen ließe. Da aber die direkte Bestimmung der Winkelgröße D^* des Drahtes zuviel Umstände macht, stellt man noch einen zweiten Versuch an, indem man den Gegenstand mit einem zusätzlichen Hilfskörper belastet (auf Bild 156 ist es ein Hohlzylinder), dessen Massenträgheitsmoment J' sich genau ausrechnen läßt. Auf diese Weise erhält man die neue Schwingdauer T' und damit 2 Gleichungen, aus denen D^* herausfällt.

Es ist also $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D^*}}$ und damit $D^* = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$

bzw. $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J+J'}{D^*}}$ und damit $D^* = \frac{4\pi^2 (J+J')}{T'^2}$.

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten ergibt sich dann das gesuchte Massenträgheitsmoment zu $J = \frac{J'T'^2}{T'^2 - T^2}$.

Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

11. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

11.1. Kennzeichen des flüssigen Zustandes

Flüssigkeiten und Gase zeigen gegenüber den festen Körpern im physikalischen Verhalten weitgehende Besonderheiten, so daß eine ganze Anzahl weiterer Begriffe und Größen notwendig ist, um die hier waltenden besonderen Gesetzmäßigkeiten zu erfassen.

Das augenfälligste Merkmal der Flüssigkeiten ist die leichte Veränderlichkeit ihrer äußeren Gestalt. Die Formbeständigkeit der festen Körper beruht darauf, daß deren kleinste Bausteine, d. h. die Moleküle bzw. Atome, fest aneinander gebunden sind und auf diese Weise geometrisch genau definierte *Kristallgitter* bilden. Ihre freie Beweglichkeit ist daher weitgehend eingeschränkt. Sie können nur Schwingungen um die im Raum fixierten Punkte ausführen, deren Amplitude von der jeweiligen Temperatur abhängt. Die äußere Form fester Körper kann sich daher nur dann ändern, wenn sehr große äußere Kräfte auf sie einwirken. Ohne näher auf die physikalische Natur der inneren Bindungskräfte einzugehen, bezeichnet man diese allgemein als **Kohäsionskräfte.** Ihre Größe ist entscheidend für das Festigkeitsverhalten.

Daß auch in den Flüssigkeiten noch erhebliche Kohäsionskräfte vorhanden sind, beweist der **Heber** (Bild 157), der, einmal in Gang gebracht, auch im luftleeren Raum funktioniert. Der eine Schenkel taucht in das Gefäß. Solange die andere Öffnung tiefer liegt als der Flüssigkeitsspiegel, fließt Flüssigkeit aus. Sie bildet einen zusammenhängenden, nicht abreißenden Faden, dessen eines Ende schwerer ist und die restliche Flüssigkeit hinter sich herzieht.

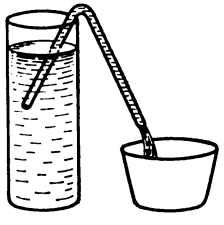


Bild 157. Winkelheber

Die Kohäsionskräfte der Flüssigkeiten werden nur dadurch leicht übersehen, daß ihre einzelnen Teilchen beim Einwirken äußerer Kräfte leicht gegeneinander verschiebbar sind. Den Teilchen fehlt jegliche gesetzmäßige Anordnung. Ihre leichte

gegenseitige Verschieblichkeit führt dazu, daß eine Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwerkraft sofort die Gestalt des Gefäßes annimmt, in das man sie hineingießt. An der freien Oberfläche aber stellt sich ein bestimmter Gleichgewichtszustand ein. Er ist dann erreicht, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht zur Resultierenden der dort wirkenden Kräfte verläuft. Solange das nicht der Fall ist, läßt sich die auf ein Volumenelement wirkende Kraft nach Bild 158 in eine tangential und normal zur Oberfläche gerichtete Komponente zerlegen. Die Flüssigkeitsteilchen müssen sich dann, der tangentialen Komponente folgend, so lange verschieben, bis diese Komponente verschwunden ist. Die Flüssigkeit strömt so lange, bis ihre freie Oberfläche in allen Teilen senkrecht zur wirkenden Kraft orientiert ist.

Die Oberfläche einer Flüssigkeit verläuft stets rechtwinklig zur wirkenden Kraft.

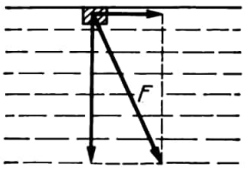


Bild 158. Wirkung einer Kraft F auf ein Flüssigkeitsteilchen

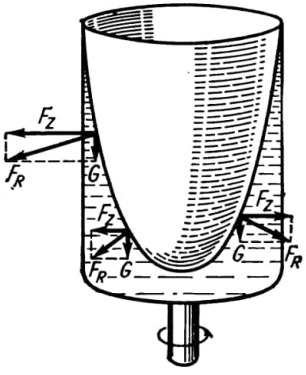


Bild 159. Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit



Bild 160. Zeitlupenaufnahme eines abfallenden Wassertropfens

Beispiele: 1. Im homogenen Schwerefeld der Erde liegen alle Flüssigkeitsspiegel waagerecht.

2. Das kontinuierliche Fließen von Wasserläufen kommt dadurch zustande, daß Schwerkraft und Wasseroberfläche nicht genau senkrecht zueinander stehen.

3. Eine rotierende Flüssigkeit bildet eine gekrümmte Oberfläche (Bild 159). Im Ruhezustand wirkt auf die im Gefäß befindliche Flüssigkeit allein die Schwerkraft G. Bei der Rotation tritt im Abstand r von der Drehachse die horizontal gerichtete Fliehkraft F_Z auf, womit sich die Resultierende F_R ergibt. Der sich rechtwinklig zur wirkenden Kraft stellende Spiegel muß sich an dieser Stelle entsprechend neigen. Die Fliehkraft ist aber proportional der Entfernung von der Achse, so daß die Neigung des Spiegels nach außen steiler wird. Der Querschnitt ist eine Parabel.

Fehlen äußere Kräfte, so verbleibt allein die Kohäsion. Sie ist an allen Stellen der Oberfläche nach innen gerichtet. Im schwerelosen Raum oder während des freien Fallens nehmen daher Flüssigkeiten die Form einer Kugel an (Bild 160).

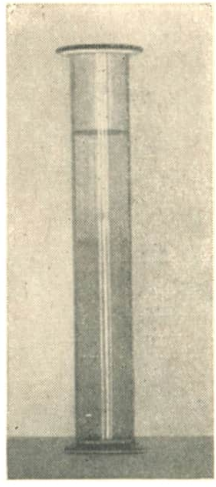
Bei aller Veränderlichkeit der äußeren Form lassen sich Flüssigkeiten jedoch nur sehr wenig zusammendrücken. Bei den meisten Betrachtungen kann man ihre geringe Kompressibilität (11.4.2.) vernachlässigen und mit einem praktisch konstanten Volumen rechnen.

Während die Teilchen der festen Körper je nach ihrer Temperatur mehr oder weniger heftige Schwingungen um ihre Ruhelage ausführen, befinden sich die Moleküle einer Flüssigkeit in unaufhörlicher, völlig regelloser Bewegung. In einem Tropfen verdünnter Milch sieht man bei etwa 800facher Vergrößerung zahlreiche winzige Fettkügelchen schwimmen. Sie zeigen eine fortgesetzte, unruhig hin und her verlaufende Zitterbewegung, verursacht von Dichteschwankungen, die infolge der Molekularbewegung in der Flüssigkeit entstehen. Nach ihrem Entdecker heißt diese Erscheinung **„Brownsche Bewegung"** (Bild 161).



Bild 161. BROWNsche Bewegung im Wasser schwebender Teilchen

Bild 162. Diffusion zweier Flüssigkeiten



Die Eigenbewegung der Moleküle hat zur Folge, daß sich alle Teile einer Flüssigkeit oder eines Gases im Laufe der Zeit von selbst durchmischen. Man nennt diesen Mischvorgang **Diffusion.** Schichtet man in einem Standzylinder auf eine konzentrierte Lösung von Kupfersulfat eine Säule reinen Wassers, so wird die anfangs scharfe Trennfläche im Laufe des Tages immer verschwommener (Bild 162). Die Lösung **diffundiert** in das reine Wasser und umgekehrt. Bei einer Wassersäule von 20 cm Höhe dauert es mehrere Monate, bis die Diffusion beendet ist.

11.2. Kennzeichen des gasförmigen Zustandes

Gase zeichnen sich gegenüber den festen Körpern und Flüssigkeiten durch ihre auffallend geringe Dichte aus. Zudem lassen sie sich sehr leicht zusammendrücken und füllen unter selbständiger Ausdehnung jedes ihnen dargebotene Volumen lückenlos aus. Dies deutet auf das praktisch vollständige Fehlen von Kohäsionskräften hin. Nur bei sehr großer Verdichtung macht sich eine schwache gegenseitige Anziehung

der Moleküle bemerkbar. Bei den meisten Überlegungen kann man aber darüber hinwegsehen und daher sagen, daß die Teilchen eines Gases völlig unabhängig voneinander sind.

Der Grund für ihr Auseinanderstreben liegt darin, daß sie sich, noch viel heftiger als die Teilchen einer Flüssigkeit, in unregelmäßiger Weise bewegen. Die mittlere Geschwindigkeit nimmt dabei mit der Temperatur zu. Die damit zusammenhängenden Fragen werden in der „Kinetischen Wärmetheorie" eingehender behandelt. Bis auf die dabei unvermeidlichen Zusammenstöße der Teilchen untereinander erfolgt die Bewegung eines einzelnen Teilchens im schwerefreien Raum dem Trägheitsgesetz zufolge streng geradlinig. Da man die Moleküle selbst nicht sichtbar machen kann, behilft man sich zur indirekten Demonstration mit einer kleinen Kammer, in die Rauch geblasen wird. Bei starker seitlicher Beleuchtung und etwa 100facher Vergrößerung erkennt man im Mikroskop, wie die auf dunklem Grund hell leuchtenden Partikeln in unaufhörlicher Bewegung hin und her fahren.

Beim Anprall gegen die Wände eines Gefäßes bewirken die Teilchen den *Gasdruck*. Dieser kommt also nicht, wie man früher glaubte, durch eine zwischen den Teilchen wirkende Abstoßungskraft zustande, sondern ist nichts anderes als die makroskopisch meßbare Wirkung des Impulses der Molekularbewegung. Eine andere beobachtbare Wirkung ist die viel rascher als bei Flüssigkeiten stattfindende Diffusion, infolge deren sich die Moleküle zweier verschiedener Gase sehr rasch und vollständig durchmischen.

Setzt man einen umgekehrten, mit Leuchtgas gefüllten Zylinder auf einen zweiten, der nur Luft enthält, so findet bereits nach wenigen Minuten vollkommene Durchmischung statt (Probe durch Anzünden). Daß die **Diffusionsgeschwindigkeit** mit abnehmender Molekularmasse zunimmt, zeigt ein Versuch mit einem Tonzylinder, dessen untere Öffnung in eine mit Wasser gefüllte Flasche mündet (Bild 163). Leitet man unter ein darübergestülptes Becherglas Stadtgas (wasserstoffhaltig!), so entsteht in der Tonzelle ein Überdruck, den das Steigrohr sofort anzeigt. Nach Wegnehmen des Glases entsteht ein Unterdruck, da der Wasserstoff wieder nach außen diffundiert.

Besondere Bedeutung haben Diffusionsvorgänge in der Vakuumtechnik. Unter anderem wird das Glas bei höherer Temperatur gasdurchlässig. Bild 164 zeigt, wie 1 mm dickes Jenaer Pyrexglas bei 400 °C und einem Druckunterschied von 1 at durch eine Fläche von 1 cm^2 je Stunde 2 mm^3 Heliumgas durchläßt.

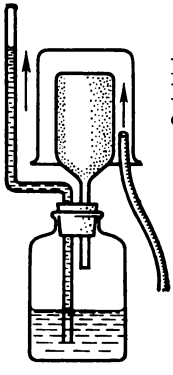


Bild 163
Diffusion von Wasserstoff durch einen Tonzylinder

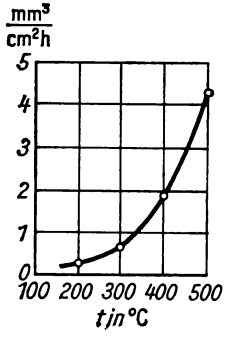


Bild 164. Gasdurchlässigkeit von Jenaer Pyrexglas

11.3. Oberflächenspannung

Die an der Oberfläche einer Flüssigkeit angreifenden inneren Kräfte rufen in ihrer Gesamtheit eine Wirkung hervor, die man als **Oberflächenspannung** bezeichnet. Man kann z. B. eine Aluminiummünze (einer solchen haftet stets eine Spur Fett an!) vorsichtig auf eine Wasserfläche legen. Sie geht nicht unter (Bild 165). Es sieht so aus, als bilde die Wasserfläche eine gespannte Haut. Das Zustandekommen der Oberflächenspannung erklärt sich damit, daß jedes in der Flüssigkeit befindliche Molekül

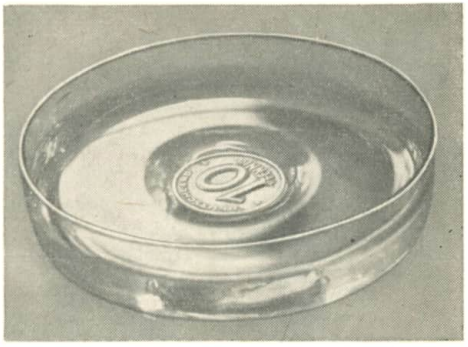


Bild 165. Schwimmende Münze

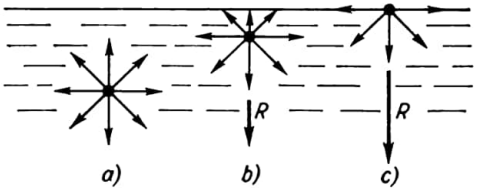


Bild 166. Moleküle im Innern einer Flüssigkeit

den von den ringsum liegenden Molekülen ausgeübten Kohäsionskräften unterliegt (Bild 166). Bei dem vollständig im Innern der Flüssigkeit liegenden Molekül (*a*) ist die Resultierende aller Anziehungskräfte gleich Null. Liegt aber das Molekül (*c*) in der Oberfläche, so verbleiben allein die in das Innere gerichteten Kräfte, die eine nach innen gerichtete Resultierende ergeben. Um ein Molekül von der Lage (*a*) aus in die Lage (*c*) zu bringen, kann dies nur unter Kraftaufwand geschehen.
Wenn also die Oberfläche einer Flüssigkeit vergrößert werden soll, läuft das darauf hinaus, daß eine große Zahl von Molekülen zusätzlich in die Oberfläche zu heben ist. Dies ergibt den Widerstand, den die Flüssigkeit dem Eindringen der Münze entgegensetzt; denn diese biegt die Oberfläche nach unten durch und vergrößert sie.

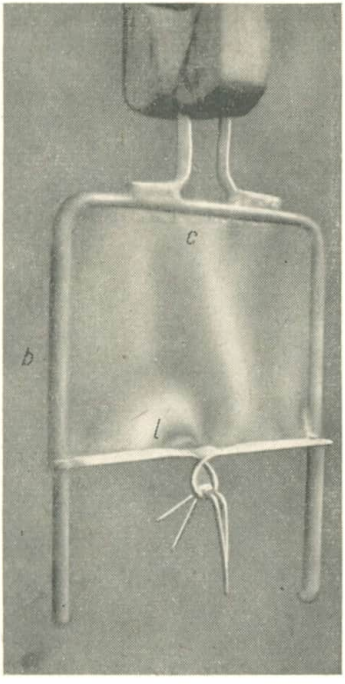


Bild 167. Belastete Seifenlamelle

Die Größe der Oberflächenspannung läßt sich mit einem aus Draht gebogenen Rähmchen demonstrieren (Bild 167), dessen eine Seite l mittels zweier angebogener Ösen leicht verschiebbar ist. Man schiebt diese Seite l zuerst nach oben und bringt ein wenig Seifenlösung in das Zwischenraum, wodurch l an c haften bleibt. Belastet man l durch angehängte Drahthäkchen, so spannt sich bei einer bestimmten Belastung zwischen l und c ein Häutchen aus. Die Länge b des Häutchens läßt sich dann innerhalb weiter Grenzen verschieben, ohne daß man die Belastung zu ändern braucht. Das für feste Körper gültige Gesetz der *elastischen* Dehnung trifft hier *nicht* zu. Die Kraft ist vielmehr vom Grad der Ausdehnung des Häutchens unabhängig, die Haut verhält sich ganz anders wie z. B. eine gespannte Gummimembran. Dies kommt daher, daß bei jeder Verlängerung um das Stück Δb die gleiche Anzahl von Molekülen in die Oberfläche eintritt. Man definiert daher:

$$\textbf{Oberflächenspanung } \sigma = \frac{\textbf{zur Dehnung der Oberfläche notwendige Kraft } F}{\textbf{Länge der Randlinie } l}$$

(119) $$\boxed{\sigma = \frac{F}{l}}$$ [1]) **Oberflächenspannung** σ

Einheit der Oberflächenspannung: 1 N/m

Man kann auch die zur Bildung bzw. Vergrößerung der Oberfläche $\Delta A = l\Delta b$ erforderliche **Arbeit** betrachten. Da die Kraft längs des Weges Δb konstant ist, ist diese Arbeit $\Delta W = F\Delta b$. Da nach (119) $F = \sigma l$ ist, kann man auch schreiben $\Delta W = \sigma l \Delta b = \sigma \Delta A$. Diese Arbeit ist als **Oberflächenenergie** (eine besondere Art potentieller Energie) in jeder Oberfläche enthalten. Hieraus ergibt sich als zweite Deutung der Größe σ:

$$\textbf{Spezifische Oberflächenenergie} = \frac{\textbf{Arbeit zur Vergrößerung einer Flüssigkeitsoberfläche}}{\textbf{Flächenzuwachs}}$$

(120) $$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}.$$

Die Oberflächenspannung sieht man auch bei der Bildung von Tropfen (Bild 160). Am Ausflußrohr bildet die Flüssigkeit eine Art Säckchen, in das so lange Flüssigkeit hineinläuft, bis es abreißt. Der abfallende Tropfen selbst zieht sich sofort *kugelförmig* zusammen, weil hierbei die Oberfläche ihren kleinstmöglichen Betrag erreicht.

So sind auch Seifenblasen genau kugelförmig. Der Druck in einer Seifenblase ergibt sich folgendermaßen: Denkt man sie sich aus 2 Halbkugeln zusammengesetzt (Bild 168), so wirkt senkrecht zur Randlinie die Kraft $F = 2\sigma l = 2\sigma 2\pi r$. Andererseits ergibt sich diese

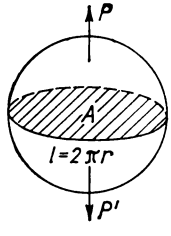


Bild 168. Zum Druck einer Seifenblase

[1]) Die bei dem beschriebenen Versuch gemessene Kraft F berechnet sich aber zu $F = 2\sigma l$, weil hierbei 2 Oberflächen (Vorder- und Rückseite der Seifenlamelle) gebildet werden

Kraft als Produkt aus dem Überdruck p und dem Querschnitt $r^2\pi$, so daß $p\pi r^2 = 4\sigma\pi r$ und

$$p = \frac{4\sigma}{r}$$

ist. Der in kleinen Seifenblasen herrschende Überdruck ist also größer als in einer großen Blase!

Oberflächenspannung σ in N/m	
Wasser 20 °C gegen feuchte Luft	0,0741
Benzol 20 °C gegen Luft	0,0288
Äthylalkohol 20 °C gegen Alkoholdampf	0,0220
Quecksilber gegen Luft	0,500
Quecksilber gegen Wasser	0,375
Seifenlösung gegen Luft	etwa 0,030

Zur Messung der Oberflächenspannung dient neben anderen Verfahren die **Steighöhenmethode.** Sie beruht auf der bekannten Tatsache, daß benetzende Flüssigkeiten in engen Röhrchen **(Kapillaren)** stets höher steigen, als der Spiegel im umgebenden Hauptgefäß steht (Bild 169). Dabei wird die Flüssigkeitssäule von der Höhe h und dem Gewicht $mg = \varrho Vg = \varrho\pi r^2 hg$ von der längs ihres oberen Randes wirkenden Kraft $\sigma 2\pi r$ getragen (Bild 170).

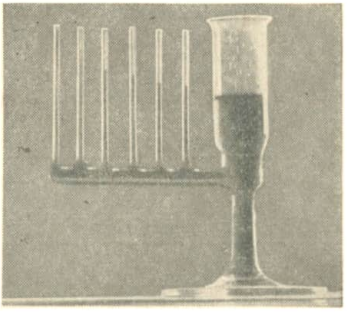


Bild 169. Kapillaren verschiedener Weite

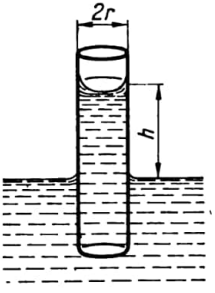


Bild 170. Kapillare Steighöhe bei benetzender Flüssigkeit

Nach Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält man unmittelbar

(121) $$\boxed{h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}}$$ **kapillare Steighöhe h**

(ϱ Dichte, g Schwerebeschleunigung)

Hieraus läßt sich die Oberflächenspannung σ leicht berechnen.

Die Flüssigkeitsoberfläche in der Kapillare ist mehr oder weniger gekrümmt und wird **Meniskus** genannt. Bei benetzender Flüssigkeit ist er konkav (vertieft). Bei nicht benetzenden Flüssigkeiten (z. B. Quecksilber in Glas) tritt die umgekehrte Wirkung, die **Kapillardepression**, ein. Der Meniskus ist konvex (nach oben gewölbt) (Bild 171).

Beispiele: 1. Ein gut benetzter Drahtring von 4 cm Durchmesser ist an dünnen Fäden aufgehängt und wird flach aus dem Wasser gehoben. Welche Kraft tritt im Moment des Abreißens auf? – Die dehnende Randlinie ist hier ein Kreis vom Umfang 12,6 cm. Aus Formel (119) ergibt sich $F = \sigma l$. Da die gebildete, ringförmige Lamelle Vorder- und Rückseite besitzt (dies ist übrigens auch bei Bild 167 der Fall), entstehen 2 Oberflächen. Deshalb ist die gesamte Kraft

$$F = 2\sigma l = 2 \cdot 0{,}0741 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 12{,}6\ \mathrm{cm} = 0{,}0187\ \mathrm{N} = 1{,}9\ \mathrm{p}.$$

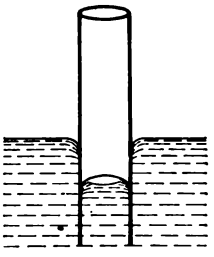


Bild 171. Kapillardepression bei nicht benetzender Flüssigkeit

2. Wie hoch steigt Wasser in einer vollkommen benetzbaren Kapillare von 0,1 mm Durchmesser? –

$$h = \frac{2\sigma}{\varrho g r} = \frac{2 \cdot 74\ \mathrm{g \cdot cm \cdot cm^3 \cdot s^2}}{\mathrm{s^2 \cdot cm \cdot 1\ g \cdot 981\ cm \cdot 0{,}005\ cm}} = 30{,}2\ \mathrm{cm}.$$

11.4. Druck und Druckausbreitung

11.4.1. Druckeinheiten

Eine wichtige, für Flüssigkeiten und Gase typische Größe ist der in ihrem Innern herrschende **Druck.**

Der Druck ist der Quotient aus der Kraft und der zur Kraftrichtung senkrecht liegenden Fläche.

Aus dieser Definition

$$\boxed{p = \frac{F}{A}} \quad \textbf{Druck } p \tag{122}$$

folgt die Einheitengleichung

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} \quad \text{und damit die}$$

Einheit des Druckes: 1 N/m²

Daneben werden in der Praxis noch andere Einheiten verwendet. Bei technischen Angaben bevorzugt man noch allgemein die **technische Atmosphäre:**

$$\boxed{\mathbf{1\ at = 1\ kp/cm^2}}$$

Hierbei ist das Kilopond (1.2.4.) mit 1 kp = 9,80665 N festgelegt. Bei der Messung des Luftdruckes und des Druckes von Gasen geht man von dem historischen Versuch Torricellis aus (Bild 172). Ein einseitig geschlossenes Rohr wird mit Quecksilber

gefüllt, mit dem Daumen zugehalten und die nach unten gekehrte Öffnung unter dem Spiegel eines ebenfalls mit Quecksilber gefüllten Napfes wieder freigegeben. Die Flüssigkeit in dem Rohr fällt dabei um ein Stück und hinterläßt im oberen Ende einen *luftleeren Raum* (**Vakuum**)[1]). Die Höhe der Quecksilbersäule zwischen dem Spiegel im Gefäß und der oberen Begrenzung des Meniskus im Rohr liefert die Größe des herrschenden Luftdruckes, den man in **Millimeter Quecksilbersäule** angibt. Demnach bezeichnet man:

1 mm Quecksilbersäule = 1 Torr.

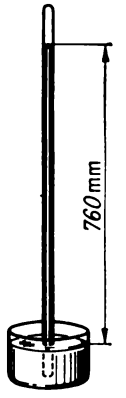


Bild 172
TORRICELLIS Versuch

Der Luftdruck ist nicht konstant, sondern je nach Höhen- und Wetterlage steten Schwankungen unterworfen. In Meereshöhe und bei einer Jahresmitteltemperatur von 15 °C beträgt dieser im Jahresdurchschnitt 760 Torr.
Man bezeichnet diesen Druck als **1 physikalische Atmosphäre** (Kurzzeichen: atm).

1 atm = 760 Torr

Im Wetterdienst wird der Luftdruck meist in **Millibar (mbar)** angegeben. Dabei ist:

10^5 N/m² =	10^6 dyn/cm²	= 1 Bar (bar)
100 N/m² =	1000 dyn/cm²	= 1 Millibar (mbar)
0,1 N/m² =	1 dyn/cm²	= 1 Mikrobar (µbar)

Aus der Dichte des Quecksilbers ergibt sich ferner (S. 150) die Beziehung zwischen Torr und Millibar:

760 Torr = 1013,25 mbar.

Umrechnung der Druckeinheiten

	N/m²	mbar	at	atm	Torr
1 N/m²	1	0,01	$1{,}019716 \cdot 10^{-5}$	$0{,}986923 \cdot 10^{-5}$	$0{,}750062 \cdot 10^{-2}$
1 mbar	100	1	$1{,}0197 \cdot 10^{-3}$	$0{,}986923 \cdot 10^{-3}$	0,750062
1 at	98066,5	980,665	1	0,967841	735,559
1 atm	101325	1013,25	1,03325	1	760
1 Torr	133,3224	1,333224	$1{,}359510 \cdot 10^{-3}$	$1{,}315789 \cdot 10^{-3}$	1

Bei technischen Fragen ist häufig der durch eine Wassersäule hervorgerufene Druck von Interesse. Da eine 10 m hohe Wassersäule von 1 cm² Querschnitt das Gewicht 1 kp hat, erzeugt sie einen Druck von 1 kp/cm²:

1 at = 10 mWs

[1]) Das Vakuum ist deshalb nicht vollkommen, weil sich der leere Raum sofort mit Quecksilberdampf füllt

Demgegenüber ist 1 atm eine etwas größere Einheit, und zwar

1 atm = 10,33 mWS.

Die zur Druckmessung verwendeten **Manometer** enthalten meist ein Bauteil, das sich elastisch verformt und die Bewegung auf einen Zeiger überträgt. Dies kann eine Membran sein, die sich unter Druck mehr oder weniger durchbiegt (Membranmanometer). Das zur Messung des Luftdruckes verwendete **Aneroidbarometer** (Bild 173) enthält hierfür eine oder mehrere luftleere Blechdosen. Zur Messung starker Drücke dient die **Bourdonsche Röhre,** eine zu einem Kreis gebogene Röhre von länglichem Querschnitt, die am einen Ende geschlossen ist (Bild 174). Wird diese an eine Druck-

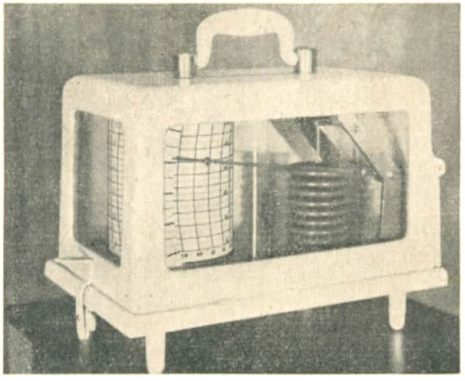


Bild 173. Barograph

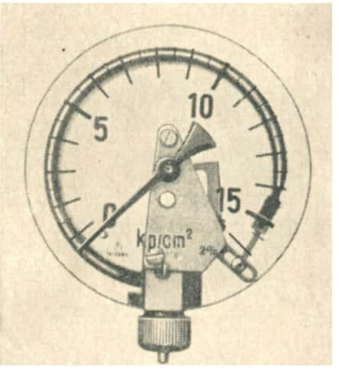


Bild 174. Röhrenfeder-Manometer (BOURDONsche Röhre)

leitung angeschlossen, so biegt sie sich ein wenig auf und bewegt einen Zeiger. Die äußere gekrümmte Seite des Rohres bietet dem Druck eine größere Fläche dar und erfährt demnach eine stärkere Kraft als die innere.

11.4.2. Druck in Flüssigkeiten (hydrostatischer Druck)

Der im Innern einer Flüssigkeit bestehende Druck wird von den Kräften gekennzeichnet, die an der betrachteten Stelle auf die Flächeneinheit einwirken. Dabei verursacht das stets vorhandene eigene Gewicht der Flüssigkeit den sogenannten **Schweredruck.** Dieser gleichsam natürlich vorhandene Druck läßt sich noch dadurch erhöhen, daß man noch eine zusätzliche Kraft von außen her ausübt. Nach Bild 175 geschieht das mittels eines Kolbens, der an einer Stelle der Gefäßwand eingesetzt ist. Dadurch entsteht der **Kolbendruck.** Die an beliebigen verschiedenen Stellen angebrachten Manometer zeigen dann eine Druckerhöhung an, die überall von gleich großem Betrag ist, und sei das Gefäß von noch so komplizierter Gestalt. Daraus ergibt sich:

Der Druck in einer Flüssigkeit breitet sich in gleicher Stärke allseitig aus.

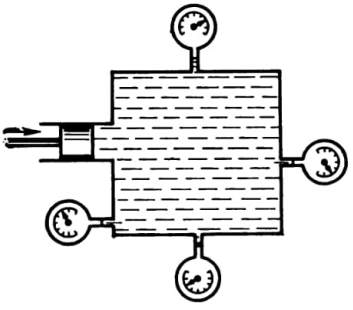


Bild 175. Allseitige Ausbreitung des Druckes

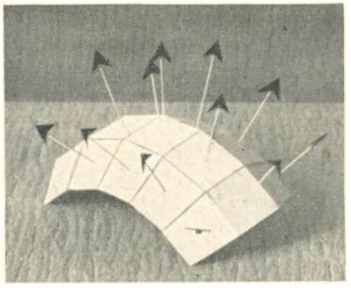


Bild 176. Nicht der Druck ist gerichtet, sondern die wirkende Kraft. Ihre Richtung ist diejenige der Flächennormalen

Die Frage nach einer etwaigen Richtung des Druckes ist daher von vornherein falsch gestellt. **Der Druck p** ist eine richtungslose Größe, ein Skalar und **kein Vektor**! Der Druck hat keine Richtung. Erst sein Produkt pA mit einer Fläche ergibt eine Kraft F, deren Richtung durch die Lage dieser Fläche bestimmt ist, und zwar hat der Kraftvektor stets die Richtung der Flächennormalen (Bild 176).

In vektorieller Schreibweise stellt man daher die Fläche $\mathfrak{A}$ als einen senkrecht zu ihr gerichteten Vektor dar. Die Kraft $\mathfrak{F}$ ist dann das Produkt

$$\mathfrak{F} = p\mathfrak{A}$$

Die Gleichung bringt zum Ausdruck, daß die Richtungen des Flächen- und des Kraftvektors zusammenfallen. Allein ihre Beträge unterscheiden sich um den Faktor p.

Die allseitige Ausbreitung des Druckes nutzt man dazu aus, um Kraftwirkungen durch mit Flüssigkeiten gefüllte Rohrleitungen zu übertragen (Wasserleitung, Öldruckbremse, hydraulische Presse). Die geringfügige Zusammendrückbarkeit **(Kompressibilität)** der Flüssigkeiten spielt hierbei praktisch keine Rolle.
Immerhin ist sie bei Wasser rund 100mal größer als die von Stahl. Dabei zeigt es sich, daß innerhalb gewisser Grenzen die *relative Volumenänderung* $\frac{\Delta V}{V}$ dem ausgeübten Druck proportional ist, d. h. $\frac{\Delta V}{V} = \alpha p$. Den Proportionalitätsfaktor α bezeichnet man als

(123) **Kompressibilität:** $\alpha = \frac{\Delta V}{V p}$

(ΔV Volumenabnahme, V Gesamtvolumen, p Druck)

Kompressibilität verschiedener Flüssigkeiten in cm²/kp

Wasser (1 ··· 25 at) 10 °C	0,000050
Wasser (400 ··· 500 at) 10 °C	0,000043
Quecksilber	0,000004
Glyzerin	0,000022
Äthylalkohol	0,000114

Die Größe des in einer bestimmten Tiefe der Flüssigkeit auftretenden **Schweredruckes** findet man, indem man sich eine Säule von der Höhe h und dem Querschnitt A aus der Flüssigkeit herausgeschnitten denkt. Ihr Gewicht ist

$$G = mg = Ah\varrho g.$$

Der Druck am Grunde der Säule ist daher gemäß der Definition (122)
$p = \frac{Ah\varrho g}{A}$ bzw.

(124) $\boxed{p = h\varrho g}$ **Schweredruck p einer Flüssigkeit**

Wie man hieraus ersieht, ist der Schweredruck der in einem Gefäß stehenden Flüssigkeit allein von deren Füllhöhe abhängig. Die Form des Gefäßes spielt dabei keine Rolle. Dies kann man auch allgemeiner ausdrücken:

In allen Punkten einer im Innern der Flüssigkeit liegenden horizontalen Niveaufläche ist der Schweredruck konstant.

Die Unabhängigkeit des Schweredruckes von der Gefäßform zeigt man mit dem auf Bild 177 dargestellten Versuch. Setzt man bei A verschieden gestaltete Gefäße gleich großer Bodenöffnung auf, so erweist sich bei gleichem Wasserstand die auf den Boden wirkende Kraft stets von gleicher Größe. Bei zu großer Druckhöhe h öffnet sich der durch den Körper vom Gewicht G angedrückte Verschlußdeckel. Es erschien früher merkwürdig, daß bei gleich großer Bodenfläche selbst ein ganz dünnes Röhrchen dieselbe Kraft am Boden erzeugt wie ein breites Gefäß mit einer viel größeren Wassermenge.
Der Versuch wird deshalb auch oft als *hydrostatisches Paradoxon* bezeichnet. Er wirkt aber nur dann paradox, wenn man Druck und Kraft miteinander verwechselt.
Die Abhängigkeit des Schweredruckes von der Dichte wird bei Verwendung eines U-Rohres (Bild 178) sichtbar. In den linken Schenkel gießt man eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 und in den rechten eine andere mit der Dichte ϱ_2. In dem durch die Grenz-

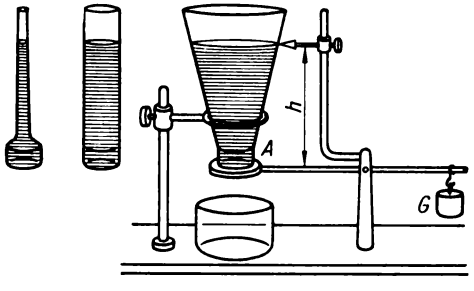


Bild 177. Hydrostatisches Paradoxon

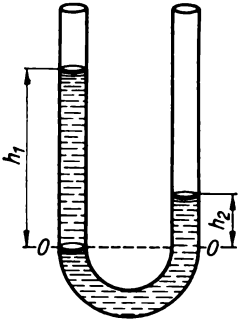


Bild 178. Druckhöhe und Dichte

fläche 0—0 gegebenen Niveau muß nach dem letzten Satz der Schweredruck konstant sein. Es gilt dort die Gleichung

$$h_1 \varrho_1 g = h_2 \varrho_2 g$$

und demzufolge

$$\boxed{h_1 : h_2 = \varrho_2 : \varrho_1}$$

Die Druckhöhen verhalten sich umgekehrt wie die Dichten.

Beispiele: 1. Wieviel Millibar entsprechen einem Druck von 760 Torr, wenn die Dichte des Quecksilbers bei 0 °C $\varrho = 13{,}5951$ g/cm³ und die Schwerebeschleunigung $g = 9{,}806\,65$ m/s² zugrunde gelegt werden? –

$$p = h\varrho g = 0{,}76 \text{ m} \cdot 13\,595{,}1 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}806\,65 \text{ m/s}^2 = 101\,325 \text{ N/m}^2 = \\ = 1013{,}25 \text{ mbar}.$$

2. Um wieviel ändert sich die Dichte von Seewasser ($\varrho = 1{,}02$ g/cm³) in 5000 m Tiefe? – Bezeichnet man die durch den Druck veränderte Dichte mit

$$\varrho' = \frac{m}{V'},$$

so ist das verringerte Volumen $V' = V - \Delta V$ bzw. nach (123) $V' = V - V\alpha p = V(1 - \alpha p)$. Die Masse m kann mit der ursprünglichen Dichte ϱ ausgedrückt werden, d. h. $m = \varrho V$. Nach Einsetzen erhält man

$$\varrho' = \frac{\varrho V}{V(1 - \alpha p)} = \frac{\varrho}{1 - \alpha p}.$$

Da die Kompressibilität für 500 at den Betrag $\alpha = 0{,}000\,043$ cm²/kp hat, ergibt sich

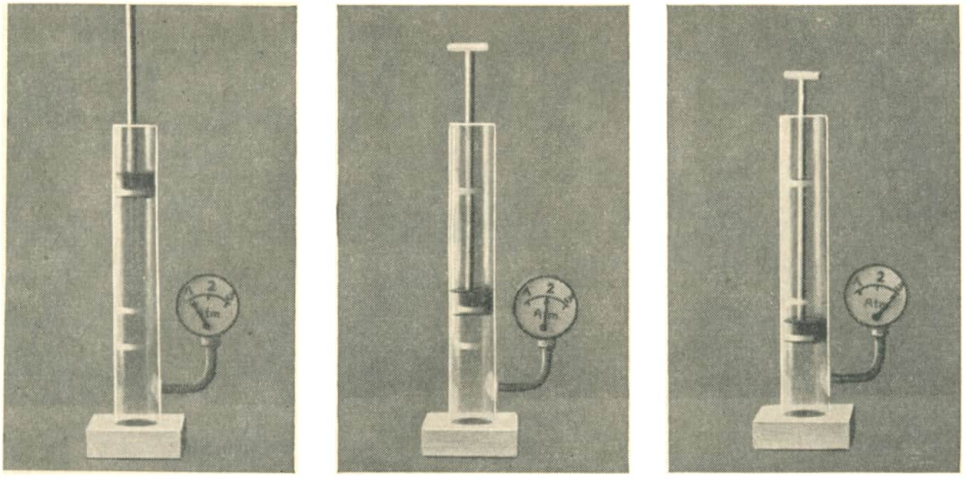
$$\varrho' = \frac{1{,}02 \text{ g/cm}^3}{1 - 0{,}000\,043 \cdot 500} = 1{,}04 \text{ g/cm}^3 \text{ (d. h. 2 \% Zunahme)}.$$

11.4.3. Druck und Volumen der Gase

Es war schon angedeutet worden, daß die Moleküle eines Gases bei ihrem Anprall gegen die Gefäßwandung die Erscheinung des Gasdrucks hervorrufen. Aus dieser einfachen Vorstellung folgt auch sofort der Zusammenhang zwischen Druck und Volumen; denn verringert man das Volumen eines Gases, so muß die Anzahl der gegen die Flächeneinheit stoßenden Moleküle entsprechend zunehmen und der Druck anwachsen.

Dies wird auch durch die Erfahrung bestätigt.

Ein Gefäß vom Volumen V sei durch einen leicht beweglichen, aber dicht schließenden Kolben verschlossen (Bild 179). Ein unten angebrachtes Manometer zeige zunächst den Druck p_0 an. Sodann drückt man den Zylinderinhalt auf die Hälfte zusammen. Der Druck steigt dadurch auf den doppelten Wert $2p_0$ an. Bei Verringerung des Volumens auf $\frac{V_0}{3}$ wächst der Druck auf das Dreifache, d. h. $3p_0$, usw. Man erkennt daraus,



a b c

Bild 179. Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE. Es verhalten sich die Rauminhalte wie $1 : {}^1/_2 : {}^1/_3$ und die Drücke wie $1 : 2 : 3$

daß das Produkt aus Druck p und Volumen V immer den gleichen Anfangswert $p_0 V_0$ behält.

$$pV = p_0 V_0 \quad \text{oder}$$

(125) $$\boxed{pV = \text{konst}}$$

Dieses für die Mechanik der Gase wichtigste Gesetz wurde von dem englischen Physiker BOYLE[1]) entdeckt und später von seinem Zeitgenossen, dem Franzosen MARIOTTE, gesichert.

Gesetz von Boyle-Mariotte:
Das Produkt aus Druck und Volumen eines eingeschlossenen Gases ergibt bei gleichbleibender Temperatur stets den gleichen Wert.

Die Temperatur des Gases darf sich während des Versuches deshalb nicht ändern, weil jede Temperaturerhöhung eine zusätzliche Drucksteigerung bewirkt.
Deshalb gilt das eben festgestellte Verhältnis von Druck und Volumen nur bei konstanter Temperatur! Stellt man also derartige Versuche an, so muß immer erst gewartet werden, bis sich die zusammengepreßte Luft wieder auf die ursprüngliche Temperatur abgekühlt hat.[2])

[1]) 1627 bis 1671
[2]) Wenn dies nicht beachtet wird, ist der Zusammenhang von p und V anderer Art und stellt ein besonderes Gesetz der Wärmelehre dar

Da sich das Volumen eines Gases als Quotient aus seiner Masse m und seiner Dichte ϱ ausdrücken läßt, kann man das Gesetz auch schreiben

$$\frac{pm}{\varrho} = \frac{p_0 m}{\varrho_0},$$

oder wegen der unverändert bleibenden Masse m:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{126}$$

Die Dichte eines eingeschlossenen Gases ist bei konstanter Temperatur seinem Druck proportional.

Bei zusammengepreßten Gasen ist in vielen Fällen nur der zusätzlich erzeugte **Überdruck** von Interesse, wobei man von dem bereits vorhandenen natürlichen Druck der Atmosphäre absieht. Den Gesamtdruck, unter dem ein Gas steht, d. h. unter Einrechnung des herrschenden äußeren Luftdrucks, bezeichnet man als **absoluten Druck.**

Es gilt also:

Absoluter Druck = jeweiliger Luftdruck + Überdruck

Bei der Anwendung des Gesetzes von BOYLE-MARIOTTE sind stets die **absoluten Drücke** einzusetzen!

Zur Messung schwacher Gasdrücke benutzt man anstelle der S. 147 schon erwähnten Metallmanometer **Flüssigkeitsmanometer.** Das *offene Manometer* ist ein beiderseits offenes, mit Flüssigkeit gefülltes U-Rohr, das zur Messung geringer Druckunterschiede dient (z. B. Stadtgasleitung). Man erhält den Druckunterschied unmittelbar in „Wasser- oder Quecksilbersäule".

Beim geschlossenen Manometer (Bild 180) enthält der geschlossene Schenkel Luft, die bei Druckeinwirkung auf den Spiegel im offenen Rohr nach dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz zusammengepreßt wird. Die Skalenwerte drängen sich bei höheren Drücken immer enger zusammen, wodurch sie sich nur ungenau ablesen lassen. Außerdem ist der starke Temperatureinfluß von Nachteil.

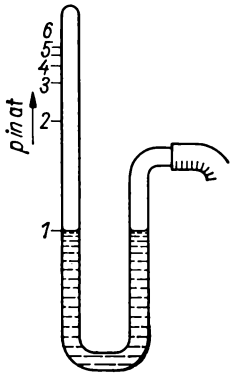


Bild 180. Druckskale eines geschlossenen Manometers

Zur Messung sehr kleiner Drücke verwendet man u. a. das **Manometer von MacLeod** (Bild 181). Es beruht ebenfalls auf dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE. Ein bestimmtes Volumen des Manometers (auf Bild 181 sind es 500 cm³) steht anfänglich mit dem zu messenden „Vakuum" in Verbindung. Durch Betätigen zweier Hähne wird es dann vom äußeren Luftdruck auf einen kleinen Bruchteil (z. B. 0,5 cm³) zusammengedrückt. Der entsprechend vervielfachte Druck des Restvolumens ist an einer Quecksilbersäule bequem ablesbar. Ein geringfügiger, jedoch vernachlässigbarer Fehler entsteht dadurch, daß diese Quecksilbersäule nicht mit einem wirklichen Vakuum, sondern mit dem gasverdünnten Meßraum in Verbindung steht. Es lassen sich damit Drücke bis hinab zu 10^{-6} Torr messen.

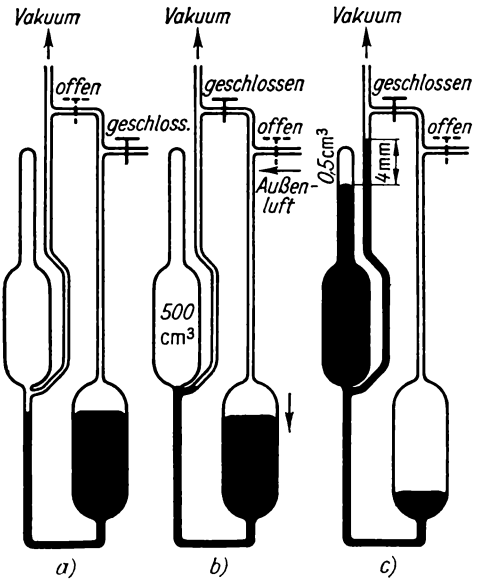


Bild 181. Messung geringer Drücke mit dem MacLeod-Manometer (schematisch)
a) Alle Teile sind im Vakuum.
b) Verbindung mit der Außenluft schafft im rechten Teil Überdruck.
c) Es werden z. B. 500 cm³ evakuierten Raumes auf 0,5 cm³ zusammengedrückt, d. h. auf $^1/_{1000}$. Diese 0,5 cm³ stehen unter einem Druck von 4 Torr, also beträgt das Vakuum 0,004 Torr

Beispiele: 1. Wieviel Wasser dringt in eine Taucherglocke von 6 m³ Inhalt, die umgestülpt in 20 m Tiefe versenkt wird? – Entsprechend dem Druck in dieser Tiefe steht die eingeschlossene Luft unter 3 at absolut und wird auf 2 m³ zusammengepreßt. Das eingedrungene Wasser (4 m³) muß durch Druckluft herausgepreßt werden.

2. Wie groß ist der absolute Druck, wenn in einem Behälter beim Barometerstand 765 Torr ein Überdruck von 12 at gemessen wird? – Der Barometerstand ergibt, in technische Atmosphären umgerechnet, $\frac{765}{735{,}6}$ at = 1,04 at. Das gibt zusammen 13,04 at.

3. Eine Sauerstoffflasche von 40 Litern Inhalt steht unter einem Überdruck von 25 at. Wieviel Sauerstoff entweicht bei einem Barometerstand von 720 Torr? – Der absolute Druck in der Flasche beträgt $p_1 = \left(25 + \frac{720}{735{,}6}\right)$ at = 25,979 at; nach dem Entweichen steht das Gas unter einem Druck von $p_2 = 0{,}979$ at und hat nach (125) das Volumen

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}.$$

Da das Volumen $V_1 = 40$ l in der Flasche zurückbleibt, entweicht

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right) V_1 = \left(\frac{25{,}98}{0{,}98} - 1\right) 40\,\text{l} = 1021\,\text{l}.$$

11.4.4. Schweredruck in Gasen

Der in der freien Atmosphäre feststellbare **Luftdruck** hat die gleiche Ursache wie der Schweredruck in Flüssigkeiten. Seine Größe hängt von der Höhe der Luftsäule ab, die auf einer gedachten Grundfläche lastet. Während aber die Dichte einer Flüssigkeitssäule wegen ihrer geringen Kompressibilität in erster Näherung als konstant an-

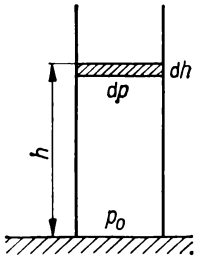


Bild 182. Zur barometrischen Höhenformel

gesehen werden kann, nimmt die Dichte der Luft infolge deren Zusammendrückbarkeit mit zunehmender Bodennähe stetig zu. Die Gleichung (124)

$$p = \varrho g h$$

kann daher nur für eine äußerst dünne, aus der Luftsäule herausgeschnittene Schicht dh angewandt werden, innerhalb deren die Dichte ϱ noch als konstant angenommen werden kann (Bild 182). Sie liefert zum Gesamtdruck den Beitrag

$$dp = \varrho g \, dh.$$

Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ist nun die Dichte eine Funktion des Druckes. Mit Gleichung (126) ist also

$$\varrho = \frac{\varrho_0 p}{p_0}.$$

Hier sollen p_0 und ϱ_0 die in der Höhe $h = 0$, d. h. die am Erdboden, geltenden Anfangswerte bedeuten. Da der Druck p mit zunehmender Höhe abnimmt, ist in der daraus folgenden Gleichung

$$dp = -\frac{\varrho_0 p}{p_0} g \, dh$$

die rechte Seite mit negativem Vorzeichen versehen. Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt dann

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \int_0^h dh,$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g h.$$

Durch Umformung entsteht daraus

(127) $$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}}$$ **Barometrische Höhenformel**

Die Druckverteilung in einem Gas ist daher grundsätzlich anders als in Flüssigkeiten. Während der Schweredruck in der Flüssigkeit bei konstanter Dichte linear mit der Tiefe zunimmt (Bild 183), wächst der **Luftdruck** mit zunehmender Bodennähe **exponentiell** an. Für die obere Grenze der Atmosphäre läßt sich daher kein bestimmter Wert angeben. Sie geht unter kontinuierlicher Verdünnung allmählich in den praktisch leeren Weltenraum über.

Die höchsten Polarlichter sind in 1000 km Höhe beobachtet worden, ein Zeichen dafür, daß auch hier noch Spuren von Luft vorhanden sein müssen.

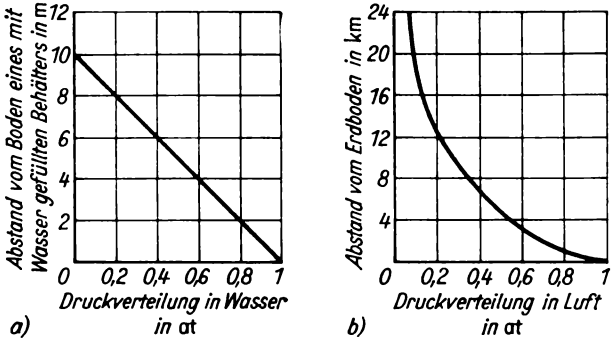


Bild 183. Druckverteilung im Wasser und in der Atmosphäre
a) Druckverteilung in Wasser,
b) Druckverteilung in Luft

Nach Messungen mit künstlichen Erdsatelliten liegt die Dichte der Atmosphäre z. B. in 600 km Höhe in der Größenordnung von 10^{-15} g/cm³. Sie ist hier jedoch starken Schwankungen unterworfen.

Das der barometrischen Höhenformel zugrunde liegende BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz berücksichtigt allerdings nicht die Temperatur der Luft, die mit zunehmender Höhe stark abnimmt. Daher stimmen die damit berechneten Werte nicht genau mit den in der folgenden Tabelle angegebenen tatsächlich gemessenen Werten überein.

Höhenlage und Luftdruck (Jahresmittel)

Höhe in m	Druck		Höhe in m	Druck	
	Torr	mbar		Torr	mbar
0	760,0	1013,3	1400	642,0	855,9
100	751,0	1001,3	2000	596,2	794,9
200	742,1	989,4	3000	525,8	701,0
500	716,0	954,6	5000	405,1	540,1
800	690,6	920,7	10000	198,2	264,2
1000	675,1	898,7	20000	41,0	54,7

Zur raschen und überschläglichen Berechnung der Luftdruckabnahme bei geringen Höhenunterschieden bedient man sich übrigens gern der **Faustregel:**

> **Mit je 10,5 m Erhebung nimmt der Luftdruck um je 1 Torr ab** (nur für kleine Höhenunterschiede und in der Nähe der Erdoberfläche gültig!).

Sie beruht auf der rohen und bei größeren Höhenunterschieden natürlich unbrauchbaren Annahme, daß der Luftdruck durch eine Luftsäule von konstanter Dichte $\varrho_0 = 1{,}293$ kg/m³ zustande käme. Der Druckabnahme von 1 Torr entspricht (Tabelle S. 146) die Differenz $\Delta p = 133{,}322$ N/m². Mit der für homogene Dichte geltenden Gleichung (124) ergibt sich dann

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\varrho_0 g} = \frac{133{,}322\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 1{,}293\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}} = 10{,}5\,\text{m}.$$

Beispiel: Unter Anwendung der barometrischen Höhenformel ist der theoretische Luftdruck in 10000 m Höhe zu berechnen. Auszugehen ist vom Luftdruck in Bodennähe $p_0 = 101325\ \mathrm{N/m^2}$ und der dort herrschenden Luftdichte bei 0 °C $\varrho_0 = 1{,}293\ \mathrm{kg/m^3}$. – Der Exponent in Gleichung (127) ist

$$-\frac{\varrho_0 g h}{p_0} = -\frac{1{,}293\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot 10000\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s^2} \cdot \mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3} \cdot \mathrm{s^2} \cdot 101325\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}} = -1{,}252.$$

Hiermit ergibt sich

$$p = 760\ \mathrm{Torr} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}252} = \frac{760\ \mathrm{Torr}}{3{,}4974} = 217\ \mathrm{Torr}$$

gegenüber einem gemessenen Wert von 198 Torr (Tabelle S. 155).

11.4.5. Archimedisches Prinzip

Aus der Tatsache, daß der Schweredruck in Flüssigkeiten und Gasen mit der Tiefe zunimmt, folgt auch die bekannte Erscheinung des **Auftriebes.** Alle in Flüssigkeit getauchten oder in Luft befindlichen Körper erscheinen leichter als außerhalb der Flüssigkeit bzw. im Vakuum.

Als eine nach oben gerichtete Kraft bewirkt der Auftrieb stets eine Gewichtsverminderung:

Auftrieb = Gewichtsverlust.

Die Größe des Auftriebes ergibt sich aus folgendem Gedankengang: Innerhalb einer Flüssigkeit von der Dichte ϱ_{Fl} befinde sich in der Tiefe x ein zylindrischer Körper der Höhe h mit dem Querschnitt A (Bild 184). Dann wirkt auf seine Oberseite die nach unten gerichtete Kraft $F_1 = xA\varrho_{\mathrm{Fl}}g$ und auf seine Unterseite die nach oben gerichtete Kraft $F_2 = (x + h)A\varrho_{\mathrm{Fl}}g$. Die in jeweils gleicher Höhe gegen die Seiten wirkenden Kräfte haben die Resultierende Null. Insgesamt verbleibt also eine nach oben wirkende Kraft der Größe $F_2 - F_1 = A\varrho_{\mathrm{Fl}}g\,(x + h - x) = Ah\varrho_{\mathrm{Fl}}g$, die man den **Auftrieb** nennt. Da Ah das Volumen des Körpers darstellt, ergibt sich

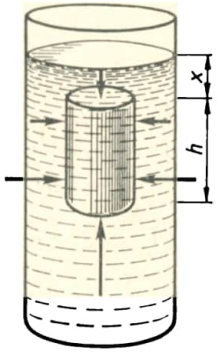


Bild 184
Entstehung des Auftriebs

(128) $\boxed{F_{\mathrm{A}} = V\varrho_{\mathrm{Fl}}g}$ **Auftrieb F_{A}**

Zu einem analogen Ergebnis kommt man, wenn man sich vorstellt, daß der Körper in Luft „getaucht" wird. Um den Auftrieb zu errechnen, den ein Körper in der Luft erfährt, ist lediglich die Dichte ϱ_{Fl} der Flüssigkeit durch die der Luft ϱ_{L} zu ersetzen.

Man nennt dieses Gesetz nach seinem Entdecker ARCHIMEDES das

Archimedische Prinzip:

(129) **Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht des vom Körper verdrängten Flüssigkeits- bzw. Gasvolumens.**

Der Auftrieb hängt demnach nur vom Volumen (der Wasserverdrängung) des eingetauchten Körpers ab, nicht aber von seinem Gewicht. Ein Bleiklotz hat bei gleichem eingetauchtem Volumen denselben Auftrieb F_A wie ein Stück Holz!
Gleichung (128) liefert bei Verwendung der üblichen Einheiten den Auftrieb F_A in **Newton.** Um die gegebenenfalls gewünschte nachträgliche Umrechnung in Kilopond zu umgehen, kann man auch an Stelle des Produktes $\varrho_{Fl} g$ die Wichte γ_{Fl} verwenden. Es ergibt sich dann der Auftrieb

(130) $$\boxed{F_A = V\gamma_{Fl}}$$

sofort in p bzw. kp, da die Wichte γ die Einheit p/cm³ bzw. kp/dm³ hat.

Je nach dem Eigengewicht G des Körpers können nun 3 Fälle eintreten:

1. $G > F_A$: Der Körper sinkt mit vermindertem Gewicht unter.
2. $G = F_A$: Der Körper schwimmt (bei teilweisem Eintauchen) oder schwebt (bei vollem Eintauchen) in der Flüssigkeit.
3. $G < F_A$: Der Körper steigt nach oben.

Im besonders wichtigen Fall des **Schwimmens** befinden sich somit Auftrieb und Gewicht des Körpers im Gleichgewicht. Hat also ein im Wasser schwimmender Holzklotz an der Luft das Gewicht 650 kp, so geht daraus unmittelbar hervor, daß sein eintauchendes Volumen 0,65 m³ betragen muß.

Schwimmgleichgewicht:

Beim Schwimmen im reinen Wasser ist das Gewicht des verdrängten Wassers gleich dem Eigengewicht des Körpers.

Nachweis: Ein Überlaufgefäß wird mit Wasser gefüllt. Legt man dann einen schwimmenden Körper hinein, so fließt gerade so viel Wasser ab, wie das Gewicht des Körpers beträgt.

Wenn ein Gegenstand schwimmt, ragt ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit heraus. Hat die Flüssigkeit die Dichte ϱ_{Fl} und wird das Volumen des eintauchenden Teils mit V_{Fl} bezeichnet, kann man den letzten Satz auch schreiben: $\varrho_{Fl} V_{Fl} = \varrho V$. Formt man diese Gleichung um in

$$\frac{V_{Fl}}{V} = \frac{\varrho}{\varrho_{Fl}}, \text{ so bedeutet das in Worten}$$

$$\frac{\text{eintauchendes Volumen}}{\text{Gesamtvolumen}} = \frac{\text{Dichte des schwimmenden Körpers}}{\text{Dichte der Flüssigkeit}}.$$

Hiernach läßt sich leicht feststellen, welcher Bruchteil eines schwimmenden Körpers aus der Flüssigkeit herausragt.
Dieser herausschauende Teil kann nun durch zusätzliche Belastung des Körpers noch vollends unter Wasser gedrückt werden. Sein Volumen stellt also die **Tragkraft** eines schwimmenden Gegenstandes dar, mit der man bei vollständigem Eintauchen äußerstenfalls rechnen kann.
Die Erscheinung des Auftriebes liefert bequeme Methoden zur **Bestimmung der Dichte.** Bei Verwendung der **hydrostatischen Waage** (Bild 185) bestimmt man zunächst durch gewöhnliche Wägung das *wahre Gewicht mg* des Körpers. Dann hängt man ihn mit einem Faden in Flüssigkeit und erhält das wegen des Auftriebes kleinere *scheinbare Gewicht m'g*. Hinsichtlich der Gewichte gilt die Gleichung

$$\text{scheinbares Gewicht:}\quad m'g = mg - \varrho_{\mathrm{Fl}} V g,$$

womit sich das Volumen des Körpers zu

$$V = \frac{m - m'}{\varrho_{\mathrm{Fl}}}$$

ergibt. Die Dichte des Körpers ist nun $\varrho_{\mathrm{K}} = \frac{m}{V}$, und unter Verwendung der letzten Gleichung errechnet sie sich zu

$$\varrho_{\mathrm{K}} = \frac{m}{m - m'} \varrho_{\mathrm{Fl}}.$$

Da die Gewichtsverminderung von der Dichte der Tauchflüssigkeit abhängt, hat man einen weiteren Weg, die Dichte von Flüssigkeiten sehr genau zu bestimmen. An der **Mohr-Westphalschen Waage** (Bild 186) hängt ein kleiner gläserner Tauchkörper an einem Platinfaden. Taucht der Körper in Wasser, so kann man das Gleichgewicht durch einen an Kerbe 10 gehängten Drahthaken wiederherstellen, wenn der

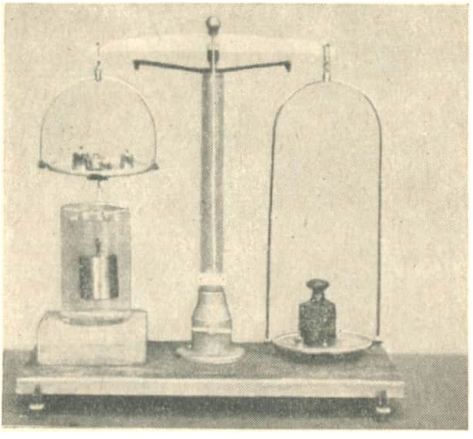


Bild 185. Hydrostatische Waage

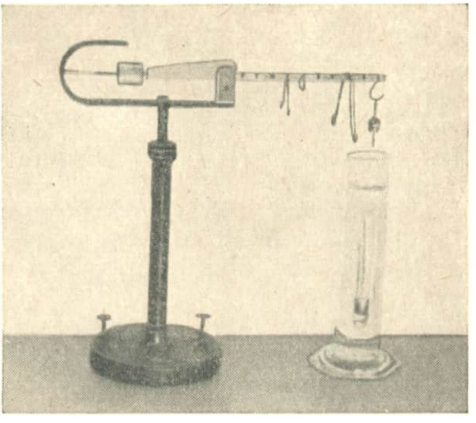
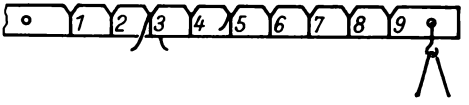


Bild 186. Mohr-Westphalsche Waage

Bild 187. Ablesung an der MOHR-WESTPHALschen Waage = 1,035



Dichtewert der Flüssigkeit gerade 1 ist. Zwei weitere Haken von $^1/_{10}$ bzw. $^1/_{100}$ der Masse des großen Reiters dienen zum Ausgleich, wenn der Dichtewert von 1 abweicht. Die Reiterstellung von Bild 187 würde z. B. einen Dichtewert von 1,035 anzeigen. Vor Gebrauch muß die Waage erst mit reinem Wasser ins Gleichgewicht gebracht werden. Da dieses bei Zimmertemperatur nicht den Dichtewert 1 hat, macht sich eine entsprechende Umrechnung mit einer *Dichtetabelle* erforderlich.

Bei sehr **genauen Wägungen** muß auch der *Auftrieb* in der Luft mit in Rechnung gezogen werden. Das *scheinbare Gewicht m'g*, das unter gewöhnlichen Umständen in der Luft festgestellt wird, ist auf das *wahre Gewicht mg* umzurechnen. Mit der Dichte ϱ_K des zu wägenden Körpers und derjenigen der Luft ϱ_L nimmt die obige Gleichung für das scheinbare Gewicht die Form an

$$m'g = \varrho_K V g - \varrho_L V g.$$

Hieraus folgt für das Volumen

$$V = \frac{m'}{\varrho_K - \varrho_L}$$

und für das wahre Gewicht $mg = \varrho_K V g$

$$mg = \frac{\varrho_K\, m'g}{\varrho_K - \varrho_L}\,.$$

Beispiele: 1. Ein Registrierballon faßt 5 m³ Wasserstoff von der Dichte 0,09 kg/m³. Wieviel dürfen Hülle und Ballast bei der Luftdichte 1,293 kg/m³ höchstens wiegen? – Der Auftrieb beträgt nach Gleichung (128) $F_A = V\varrho_L g$. Die Gasfüllung hat das Gewicht $G = V\varrho_G g$. Es verbleibt die Tragkraft

$$F = F_A - G = (\varrho_L - \varrho_G)\, Vg \quad \text{bzw.}$$

$$F = \frac{(1{,}293 - 0{,}090)\ \text{kg} \cdot 5\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} = 59\ \text{N} \ \text{ oder } \ 6{,}0\ \text{kp}\,.$$

2. Um die Dichte von Zucker zu bestimmen, wägt man ihn zweckmäßigerweise in Petroleum (ϱ = 0,8 g/cm³), damit er sich nicht auflöst. Wie groß ist diese, wenn das Stück in Luft 5,6 g und in Petroleum 2,8 g wiegt? – Nach der obigen Gleichung ist

$$\varrho = \frac{m\varrho_{Fl}}{m - m'} = \frac{5{,}6\ \text{g} \cdot 0{,}8\ \text{g}}{(5{,}6 - 2{,}8)\ \text{g cm}^3} = 1{,}6\ \text{g/cm}^3\,.$$

3. Wie groß ist die Masse eines Messingstückes (ϱ_M = 8,9 g/cm³), das bei normaler Luftdichte (ϱ_L = 0,001 29 g/cm³) genau 1 kp wiegt? – Aus der für das wahre Gewicht abgeleiteten Gleichung $mg = \dfrac{m'\varrho_M g}{\varrho_M - \varrho_L}$ erhält man

$$m = \frac{1\ \text{kg} \cdot 8{,}9\ \text{kg} \cdot \text{dm}^3}{\text{dm}^3\,(8{,}9 - 0{,}001\,29)\ \text{kg}} = 1{,}000\,145\ \text{kg}\,.$$

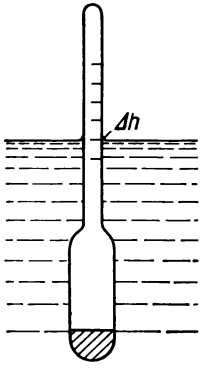


Bild 188. Aräometer

4. Der Hals eines Aräometers (Bild 188) hat einen Querschnitt von 50 mm². Um wieviel hebt sich dieser höher, wenn die Dichte der Flüssigkeit von 1,15 auf 1,20 g/cm³ steigt und der eingetauchte Teil anfänglich 5 cm³ verdrängt? – Weil das Gewicht des Aräometers nach wie vor dasselbe ist, muß auch der Auftrieb in beiden Fällen gleich sein. Mit dem anfänglich eintauchenden Volumen V, dem Halsquerschnitt A und dem Stück Δh, um das sich dieser in der zweiten Flüssigkeit zusätzlich heraushebt, ergibt sich $F_A = V\varrho_1 g$ im ersten Fall und $F_A = (V - A \cdot \Delta h)\,\varrho_2 g$ im zweiten Fall.

Daher gilt die Gleichung $V\varrho_1 = (V - A \cdot \Delta h)\,\varrho_2$

$$\text{und } \Delta h = \frac{V\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)}{A} = 0{,}42\text{ cm}.$$

12. Strömende inkompressible Flüssigkeiten

Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen bezeichnet man als **Strömungen.** Zwischen beiden besteht fürs erste der Unterschied, daß Flüssigkeiten praktisch inkompressibel (S. 148) sind, während das Volumen der Gase stark vom Druck abhängt (S. 150). Bei Gasströmungen bis zur Schallgeschwindigkeit (340 m/s) spielen jedoch Volumenänderungen nur eine geringfügige Rolle. Bis zu dieser Grenze behandelt man also beide als volumenbeständig, so daß für Flüssigkeiten und Gase meist die gleichen Gesetze gelten. Sieht man ferner von der inneren Reibung ab (12.2.1.), so spricht man von einer **idealen Flüssigkeit** im Gegensatz zu einer **realen (wirklichen)** Flüssigkeit.

12.1. Reibungsfreie Strömungen

12.1.1. Grundbegriffe des Strömungsfeldes

Strömungen können nur zustande kommen, wenn die einzelnen Teilchen einer Flüssigkeit irgendwelchen Kräften unterliegen. Solche können sowohl von außen her einwirken, wie z. B. die Schwerkraft, oder ihren Ursprung auch im Innern der Flüssigkeit selbst haben, wie etwa Stellen unterschiedlichen Druckes. Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen befinden sich diese Kräfte aber nicht im Gleichgewicht, sondern veranlassen die einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu bestimmten Bewegungen. Diese müssen den bereits dargestellten Gesetzen der Dynamik gehorchen.
Überblickt man jedoch das Verhalten der Flüssigkeit im ganzen, so treten im Zusammenwirken aller Einzelbewegungen charakteristische Erscheinungen auf. Der Raum, in dem man sie beobachtet, nennt man das **Strömungsfeld.** In diesem Strömungsfeld hat jedes Flüssigkeitsteilchen eine nach Betrag und Richtung ausgezeichnete Geschwindigkeit. Jedem Teilchen kann man daher einen Geschwindigkeitsvektor zuordnen, der sich zudem von einem Augenblick zum nächsten verändern

kann. Die Gesamtheit all dieser Vektoren bildet das **Geschwindigkeitsfeld,** dessen Aussehen u. U. fortgesetzt wechselt.
Anstatt nun diese Vektoren alle einzeln darzustellen, faßt man sie mit Hilfe von **Stromlinien** zusammen. Man legt diese so, daß die in den Punkten einer Stromlinie gezogenen Tangenten die Richtung der dort vorhandenen Geschwindigkeiten angeben (Bild 189).

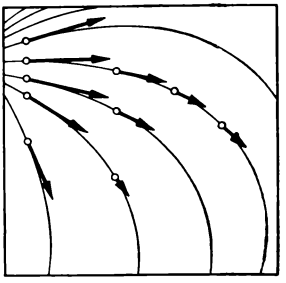
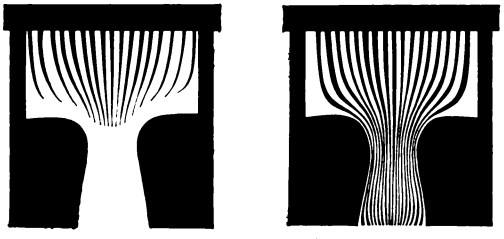


Bild 189. Strömungsfeld mit einigen Stromlinien und Geschwindigkeitsvektoren

Die Tangenten einer Stromlinie geben die Richtungen der längs der Stromlinie vorhandenen Geschwindigkeiten an. Die Gesamtheit aller Stromlinien ist ein Bild der Strömung in einem bestimmten Augenblick.

Der zeitliche Ablauf der Strömung wird nun besonders einfach, wenn jedes Flüssigkeitsteilchen immer genau an die Stelle weiterrückt, an der sich das nächste auf derselben Stromlinie zuvor befand. Dann stimmen die Bahnen der Teilchen mit den Stromlinien überein. Hält dieser Zustand längere Zeit an, so nennt man die Strömung **stationär.** Im allgemeinen ist dies bei langsamen Strömungen der Fall, in denen die Stromlinien dauernd ihre anfängliche Form beibehalten.
Stromlinien lassen sich durch Aufstreuen von Aluminiumpulver auf die Oberfläche oder Einbringen von Holzmehl oder gefärbten Flüssigkeitsfäden ins Innere der Flüssigkeit leicht sichtbar machen.



a) *b)*

Bild 190. Beginn (a) und weiterer Verlauf (b) der Strömung bei Eintritt in eine verengte Stelle

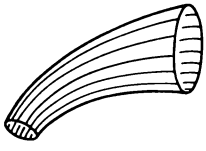


Bild 191. Stromröhre

Die Bilder 190a, b sind dadurch hergestellt, daß in eine schmale Kammer von oben her langsam reines und aus einer Reihe von Düsen gefärbtes Wasser einfließt.
Strömungen im Innern von Flüssigkeiten aber sind Vorgänge im Raum. Sie lassen sich übersichtlich zusammenfassen, wenn man eine geschlossene Kurve, z. B. einen Kreis, senkrecht zu den Stromlinien legt. Sie umfaßt dann eine Stromröhre (Bild 191), deren Mantelfläche von Stromlinien gebildet wird. Stellt man sich den Querschnitt einer Stromröhre sehr klein vor, so wird sie von einem **Stromfaden** durchflossen. Schließlich bezeichnet man noch das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Stromröhre fließende Volumen als **Strömungsfluß.**

Der Strömungsfluß ist der Quotient aus dem durch einen bestimmten Querschnitt tretenden Flüssigkeitsvolumen und der dazu benötigten Zeit.

(131) $$\boxed{Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$ **Strömungsfluß** Q

Die hieraus gebildete Einheitengleichung

$$Q = \frac{[\Delta V]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

liefert die

Einheit des Strömungsflusses: 1 $\mathrm{m^3\ 1/s}$.

12.1.2. Durchfluß

Die wichtigste Eigenschaft einer Stromröhre ist, daß keine Stromlinien in ihre Mantelfläche ein- oder austreten. Man kann sie also in Gedanken aus der Flüssigkeit herausnehmen und rechnerisch wie ein wirkliches Rohr behandeln. Da nun die Flüssigkeit nicht kompressibel ist, können innerhalb des Rohres nirgendwo Stauungen oder Verdünnungen auftreten. Es muß je Zeiteinheit ebensoviel Flüssigkeit in das Rohr eintreten, wie am anderen Ende herauskommt. Mit anderen Worten heißt das:

(132) **Der Strömungsfluß ist an allen Stellen einer Stromröhre konstant.**

Es werde nun eine Stromröhre betrachtet, die nach Bild 192 zylindrische Form hat. Jedes Flüssigkeitsteilchen möge die Geschwindigkeit v haben. Denkt man sich die Front der vorrückenden Flüssigkeit zunächst in Stellung *1*, dann wird sie nach Ablauf der Zeit Δt bei *2* angelangt sein und dabei die Strecke $\Delta s = v\Delta t$ zurückgelegt haben. Dann hat in dieser Zeit ein Flüssigkeitszylinder vom Querschnitt A und der Länge $\Delta s = v\Delta t$ die Stelle *1* passiert. Wegen $\Delta V = Av\Delta t$ ist dann der Strömungsfluß

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Av\Delta t}{\Delta t} \quad \text{bzw. gekürzt}$$

(133) $$Q = Av.$$

Jetzt geht man einen Schritt weiter und denkt an eine Stromröhre, die nach Bild 193 aus zwei zylindrischen Teilen mit den Querschnitten A_1 und A_2 besteht. Nach dem

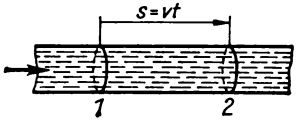


Bild 192. Strömungsfluß im Zylinder

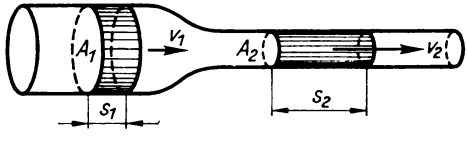


Bild 193. Strömung bei veränderlichem Querschnitt

vorhin ausgesprochenen Satz ist der Strömungsfluß in beiden Rohrabschnitten gleich groß. Auf Grund der letzten Gleichung (133) ergibt sich damit sofort

(134) $\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$ **Kontinuitätsgleichung**

In engen Rohren und schmalen Stellen eines Flußbettes hat man demnach größere Strömungsgeschwindigkeiten als an weiten Stellen. Eine derartige Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit ist am Stromlinienbild gut zu erkennen. Auf Bild 190b sieht man, wie die Stromlinien im Gebiet zunehmender Geschwindigkeit enger zusammenrücken und in der langsamer werdenden Strömung wieder auseinandertreten.

12.1.3. Gesetz von Bernoulli

Nach der Kontinuitätsgleichung (134) ändert die reibungsfrei durch eine Stromröhre gleitende Flüssigkeit bei jeder Veränderung des Querschnittes ihre Geschwindigkeit. Demnach muß auch ihre kinetische Energie zunehmen, wenn sich der Querschnitt verengt, und umgekehrt.

Wenn jedoch der Flüssigkeit von außen keine Energie zugeführt wird, muß die Frage auftauchen, wo dieser Energiezuwachs herrühren mag.

Zweifellos kommt die Bewegung der Flüssigkeit nur zustande, wenn eine bestimmte Druckdifferenz vorhanden ist, die auf sie einwirkt. Hat dieser Druck im weiteren Teil der Stromröhre zunächst den Wert p_1, so wirkt auf den Querschnitt eines betrachteten Volumenteils die Kraft $p_1 A_1$, die entsprechend der Geschwindigkeit v_1 das Volumenteil um die Strecke s_1 verschiebt (Bild 194). Dies entspricht der Arbeit $W_1 = p_1 A_1 s_1$. Im engeren Teil der Stromröhre legt dasselbe Volumen in der gleichen Zeit die Strecke s_2 zurück, was die Arbeit $W_2 = p_2 A_2 s_2$ ergibt. Da das Volumen V aber konstant bleibt, ist $V = A_1 s_1 = A_2 s_2$, so daß der Zuwachs an kinetischer Energie nur aus der Differenz der beiden Arbeiten $W_1 = p_1 V$ und $W_2 = p_2 V$ stammen kann.

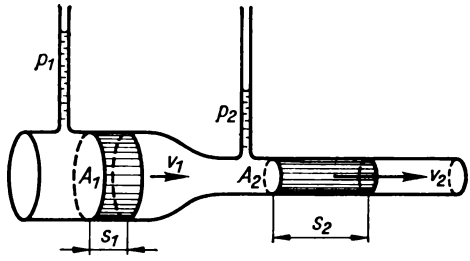


Bild 194. Arbeit des statischen Druckes

Es gilt also die Gleichung

$$V(p_1 - p_2) = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 .$$

Wird die Gleichung beiderseits durch V dividiert, so wird

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} v_2^2 - \frac{\varrho}{2} v_1^2 \quad \text{oder, anders geschrieben,}$$

(135) $$p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 .$$

Dabei bezeichnet man den Druck p als **statischen Druck** und die Größe $\frac{\varrho}{2} v^2$ als **dynamischen** (Stau-) **Druck.** Daß das zweite Glied die Einheit eines Druckes hat, erkennt man durch Einsetzen der Einheiten. Mit $[\varrho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und $[v^2] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ wird die Einheit des Produktes $[\varrho v^2] = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{m}^3\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

Der statische Druck kann mit jedem Manometer gemessen werden, dessen Öffnung parallel zur Strömungsrichtung in die Strömung einmündet. Der Staudruck dagegen bestimmt weitgehend die Kraft, mit der die Strömung auf entgegenstehende Hindernisse wirkt. Allerdings kommt es dabei noch sehr auf die Form des Körpers an und damit, in welcher Weise die Flüssigkeit das Hindernis umströmt. Noch kürzer gefaßt lautet die letzte Gleichung

(136) $$\boxed{p + \frac{\varrho}{2} v^2 = \text{konst}}$$ **Gesetz von Bernoulli**

oder in Worten:

Die Summe aus statischem und dynamischem Druck hat innerhalb einer Stromröhre stets den gleichen Wert.

Der wichtigste Inhalt des Bernoullischen Gesetzes besteht somit in der Klärung der in einer Strömung herrschenden Druckverhältnisse. Es zeigt vor allem auf, daß der *statische*, d. h. der mit einem Manometer meßbare Druck, an allen Stellen einer Strömung *geringer* ist als dort, wo die Flüssigkeit ruht.

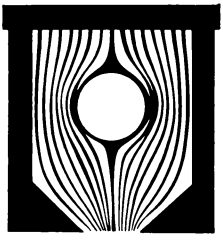


Bild 195. Langsame Strömung um einen Kreiszylinder

Solche ruhende Stellen treten auf, wenn ein festes Hindernis in die Strömung gestellt wird. Bild 195 zeigt z. B. den Querschnitt eines langsam umströmten Kreiszylinders. Die Stromlinien laufen ohne Unterbrechung um den Körper herum. An den beiden Stellen jedoch, wo sie senkrecht gegen die Oberfläche treffen, haben sie ein Ende. An der vorderen, der ankommenden Strömung zugewandten Seite liegt der **Staupunkt.** Hier und auch an seinem Gegenpunkt kann keine Strömung vorhanden sein. Wendet man Gleichung (135) auf den Staupunkt an, so ist dort die Strömungsgeschwindigkeit $v_2 = 0$. Der statische Druck p_2 muß dann gleich der Summe aus dem statischen und dynamischen Druck $p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$ in der Strömung sein. Diese Summe nennt man den **Gesamtdruck** p_0. Er ist der maximale Wert des in der Strömung möglichen statischen Druckes:

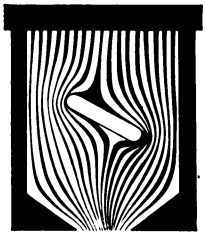


Bild 196. Strömung um eine schräge Platte

(137) $$\boxed{p_0 = p + \frac{\varrho v^2}{2}}$$ **Gesamtdruck** p_0

Im Staupunkt einer Strömung hat der statische Druck seinen Maximalwert.

Bei einer schräg zur Strömung orientierten Platte (Bild 196) liegen der Staupunkt und sein Gegenpunkt unsymmetrisch.

Die dort befindlichen Druckmaxima üben dann ein Drehmoment aus, das die Platte nicht etwa parallel, sondern rechtwinklig zur Strömung zu drehen sucht. Läßt man beispielsweise ein Blatt Papier in schräger Anfangslage los, so fällt es unter Schaukelbewegungen langsam zu Boden. Es pendelt um die waagerechte, d. h. rechtwinklig zur Strömung gerichtete stabile Lage hin und her.

12.1.4. Ausfluß

Strömt Flüssigkeit aus der Öffnung eines Behälters, so spricht man vom **Ausfluß.** Der Vorgang kann nur stattfinden, wenn der Druck *an der Öffnung niedriger* als im Innenraum ist. Im Innern des Gefäßes, wo die Flüssigkeit bzw. das Gas praktisch ruht, besteht der Gesamtdruck p_0. Gelangt der Strahl ins Freie, so unterliegt er dem dort bestehenden statischen Druck. Im freien Luftraum ist es der atmosphärische Luftdruck p. Hinzu kommt aber noch der dynamische Druck der Strömung. Daher ist Gleichung (137) unmittelbar anwendbar und liefert

(138) $$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}}$$ **Ausströmgeschwindigkeit v**

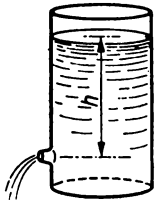


Bild 197. Ausfluß und Druckhöhe

Hier ist die Druckdifferenz $(p_0 - p)$ der Kürze halber mit Δp bezeichnet.
Häufig kommen mit Flüssigkeit gefüllte, oben offene Behälter vor, die unten einen Abfluß haben (Bild 197). Als Druckdifferenz Δp wirkt hier der Schweredruck der Flüssigkeit, der sich nach Gleichung (124) zu $h\varrho g$ ergibt. Nach Einsetzen dieses Ausdruckes in Gleichung (138) erhält man

(139) $$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$ **Torricellisches Ausflußgesetz**

Bei experimenteller Prüfung der Gleichungen (138) und (139) ergeben sich jedoch für v weit kleinere Werte, und zwar vor allem aus zwei Gründen: Die innere Reibung (Zähigkeit) verursacht Verluste, die bei Wasser im Mittel 3 % ausmachen. Noch mehr ins Gewicht fällt die Einschnürung des Strahls, besonders wenn die Öffnung nicht abgerundet, sondern seharfkantig in dünner Wand sitzt. Je nach Form und Lage der Öffnung ergeben sich dann bestimmte Ausflußzahlen μ, so daß $v = \mu\sqrt{2gh}$. (Bei scharfkantiger Öffnung in dünner Wand ist $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}64$.)

Eine Anwendung der Ausflußgleichung (138) ist das **Bunsensche Effusiometer** (Bild 198), mit dem man die Dichte von Gasen schnell miteinander vergleichen kann. Hierzu dient ein Glaszylinder G, der oben eine durch einen Hahn verschließbare feine Öffnung O_2 hat. Er steht in einem Gefäß mit Quecksilber oder Paraffinöl. Das eingeschlossene Gas steht somit unter dem Schweredruck der Flüssigkeit am Grunde des Zylinders. Öffnet man den Hahn H, so füllt sich der Zylinder von unten her mit Flüssigkeit und verdrängt das oben ausströmende Gas.
Man füllt den Apparat zunächst mit Luft und stellt die Ausströmzeit zwischen zwei am Schwimmer S angebrachten Marken M_1 und M_2 mit einer Stoppuhr fest. Die Dichte

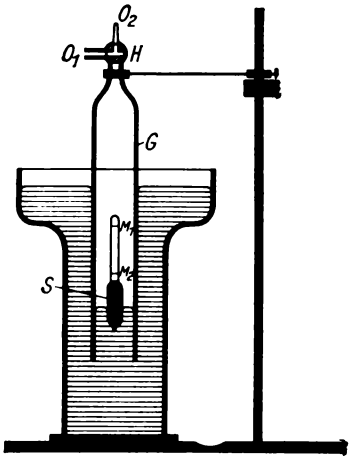


Bild 198. Apparat zur Bestimmung der Gasdichte

der Luft nimmt man mit 1,293 g/dm³ (d. h. im Normalzustand) als gegeben an. In einem zweiten Versuch füllt man den Meßzylinder mit dem zu untersuchenden Gas. Bildet man aus der Gleichung (138) die Quadrate der Ausströmgeschwindigkeiten, so folgt

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Diese stehen im umgekehrten Verhältnis wie die Quadrate der Ausströmzeiten. Es ist daher

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}.$$

12.1.5. Weitere Anwendungen der Bernoullischen Gleichung

In einer freien Luftströmung ist der statische Druck stets kleiner als derjenige in der umgebenden ruhenden Luft. Das führt zu manchmal paradox anmutenden Erscheinungen. Bläst man zwischen zwei gewölbte Postkarten, so werden sie nicht auseinandergetrieben, sondern legen sich zusammen (Bild 199). Im Zwischenraum ist der statische Druck kleiner als außerhalb. Bläst man in ein Rohr mit abgeflachter Ausmündung, so hebt sich ein davor gehaltenes Blatt flatternd gegen die Öffnung (Bild 200). Die Tragflügel der Flugzeuge sind an der Oberseite gewölbt (Bild 201). Dadurch ist die Strömungsgeschwindigkeit dort größer als an der Unterseite. Die Differenz der statischen Drücke bewirkt einen zusätzlichen *dynamischen Auftrieb*.
Beim **Zerstäuber** erzeugt der Luftstrom über einer Düse statischen Unterdruck, der die Flüssigkeit im Saugröhrchen anhebt. Am Düsenrand wird sie dann in kleine

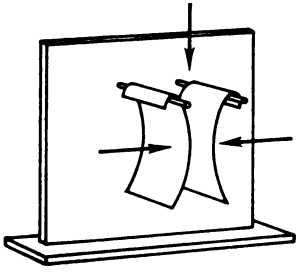


Bild 199. Strömung verursacht Unterdruck

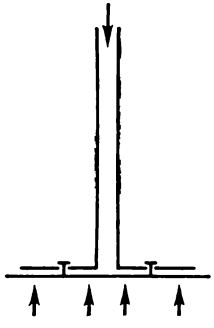


Bild 200. Der Luftstrom saugt das Blatt an



Bild 201. Tragflügelprofil

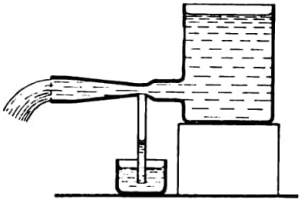


Bild 202. Heben von Wasser

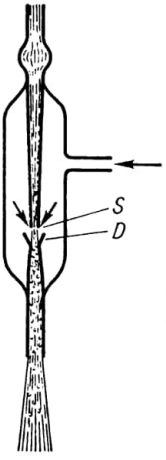


Bild 203. Wasserstrahlpumpe

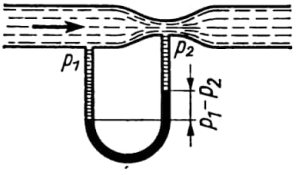


Bild 204. VENTURI-Rohr

Tröpfchen zerrissen. Zum **Heben von Wasser** kann man einen zur Verfügung stehenden Wasserstrom benutzen, der durch ein taillenförmig eingeschnittenes Rohr fließt (Bild 202). Hier ist der statische Druck kleiner als der Luftdruck. Eine Abzweigung wirkt als Saugrohr.

Zur einfachen Herstellung luftverdünnter Räume dient die **Wasserstrahlpumpe** (Bild 203). Ein schneller Wasserstrahl S fließt in die trichterartige Düse D. Die am freien Teil des Strahls anhaftende Luftschicht nimmt infolge der inneren Reibung (Bild 209) auch die benachbarten Luftschichten mit, wodurch eine Zone statischen Unterdrucks entsteht. Bei Wasserdampf als Treibmittel erreicht man etwa 2 Torr, bei Verwendung von Quecksilberdampf kommt man bis auf 10^{-3} Torr.

Auf dem BERNOULLIschen Gesetz beruhen auch einige im Bau sehr einfache Strömungsmeßgeräte.

Das **Venturirohr** ist ein eingeschnürtes Rohr, dessen seitliche Ansätze ein Manometer verbindet (Bild 204). Das Manometer zeigt den Unterschied der statischen Drücke p_1 und p_2 an. Das VENTURI-Rohr dient auch zur Messung großer Mengen in Wasserwerken, wobei der Druckunterschied die Geschwindigkeit anzeigt (Bild 205).

Das **Pitot-Rohr** ist ein in die Strömung hineinragendes Rohr (Bild 206), dessen Mündung quer zur Strömung gerichtet ist. Die Strömung staut sich vor dessen Öffnung O, so daß dort die Geschwindigkeit gleich Null ist. Nach dem BERNOULLIschen Gesetz

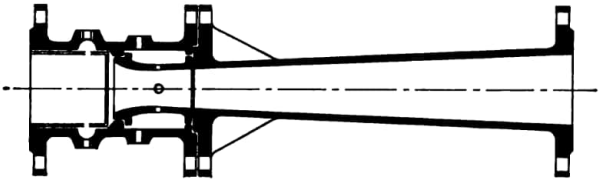


Bild 205. Technische Ausführung eines VENTURI-Rohres

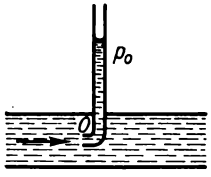


Bild 206. PITOT-Rohr

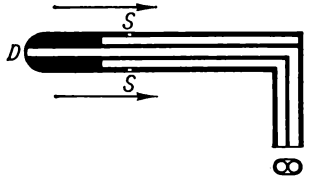


Bild 207. PRANDTLsches Staurohr

ist hier der Druck gleich dem der vor der Rohrmündung ruhenden Flüssigkeit. Das PITOT-Rohr mißt demnach den *Gesamtdruck* $p_0 = p + \frac{\varrho v^2}{2}$ nach Gleichung (137).

Das **Prandtlsche Staurohr** wird besonders zur Messung von Luftströmungen verwendet (Bild 207). An der Staudüse D besteht, wie beim PITOT-Rohr, der Gesamtdruck p_0, während die an der Oberfläche des Meßkörpers ausmündenden Düsen S den in der Strömung herrschenden statischen Druck p anzeigen. Sowohl die Düsen S als auch D werden mit den beiden Schenkeln eines Manometers verbunden, das somit die Differenz $p_0 - p$ anzeigt. Diese aber ist $p_0 - p = \frac{\varrho v^2}{2}$. Das PRANDTLsche Staurohr mißt deshalb unmittelbar den *Staudruck*.

Beispiele: 1. Welcher Unterdruck gegenüber der ruhenden Luft herrscht in einer offenen Luftströmung der Geschwindigkeit 8 m/s, wenn die Dichte der Luft mit $\varrho = 1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}$ angenommen wird? – Nach Gleichung (137) ist die Druckdifferenz

$$\Delta p = \frac{\varrho v^2}{2} = \frac{1{,}25\ \mathrm{kg} \cdot 64\ \mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3} \cdot 2 \cdot \mathrm{s^2}} = 40\ \mathrm{N/m^2} = 0{,}3\ \mathrm{Torr}\,.$$

2. Der Querschnitt eines VENTURI-Rohres verengt sich auf $^1/_4$, die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers beträgt 0,8 m/s. Welchen Niveauunterschied zeigen die Schenkel des Quecksilbermanometers? – Nach der Kontinuitätsgleichung strömt das Wasser an der engen Stelle mit 3,2 m/s. Dann ist wegen (135)

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{bzw.}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1000\ \mathrm{kg}\ (10{,}24 - 0{,}64)\ \mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3} \cdot 2 \cdot \mathrm{s^2}} = 4800\ \mathrm{N/m^2}\,,$$

was einen Niveauunterschied von 36 mm Quecksilbersäule ergibt.

3. Das an ein PRANDTLsches Staurohr angeschlossene Wassermanometer zeigt einen Druckunterschied $p_0 - p$ von 9 mmWS an. Welche Geschwindigkeit hat der anströmende Wind? –

Wegen $p_0 - p = \frac{\varrho}{2} v^2$ ist $v = \sqrt{\frac{2\,(p_0 - p)}{\varrho}}$;

hierbei ist 9 mmWS = 88,26 N/m² und $\varrho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$, so daß

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 88{,}26\ \mathrm{kgm^3}}{\mathrm{ms^2} \cdot 1{,}29\ \mathrm{kg}}} = 11{,}7\ \mathrm{m/s}\,.$$

12.2. Strömungen mit Reibung

12.2.1. Innere Reibung

Nicht nur zwischen festen Körpern, sondern auch bei der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen treten Reibungskräfte auf. Sie werden durch die den einzelnen Teilchen aufgezwungene gegenseitige Bewegung verursacht und unter dem Begriff der **inneren Reibung** zusammengefaßt. Beim Wasser ist sie nicht so auffällig wie bei dickflüssigen Ölen, Sirup oder Pech, deren **Viskosität** (Zähflüssigkeit) bedeutend größer ist.
Um den Begriff der inneren Reibung zu klären, denke man sich eine dünne ebene Platte, z. B. eine Messerklinge, in eine zähe Flüssigkeit, etwa Leim oder Sirup, getaucht. Zieht man die Platte parallel zu sich selbst heraus, so verspürt man einen deutlichen Widerstand (Bild 208). Er wird durch die **Reibungskraft** F_R verursacht, die

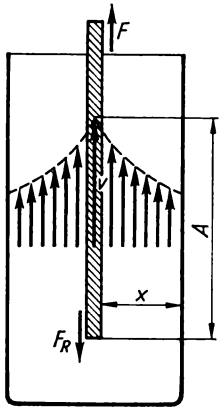


Bild 208. Bewegung einer Platte in zäher Flüssigkeit

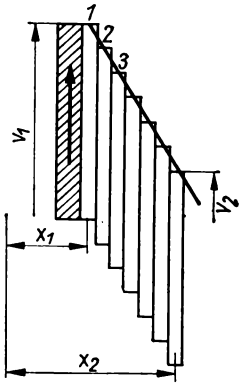


Bild 209. Zur Entstehung der inneren Reibung

der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Andererseits sieht man, daß zwischen der Platte und der unmittelbar angrenzenden Flüssigkeit keine Reibung auftreten kann; denn unmittelbar an der Platte bildet sich eine relativ zur Platte ruhende, fest anliegende Flüssigkeitshaut. Beiderseits dieser Haut wird die Flüssigkeit von der Platte nur noch zum Teil mitgenommen. Die Schicht, in der sich das abspielt, nennt man die **Grenzschicht.**
Man kann sich nun vorstellen, daß diese Grenzschicht wiederum aus einzelnen, parallel zur Bewegungsrichtung verlaufenden Schichten besteht. Diese können aufeinandergleiten, wie etwa die glatten Blätter eines Kartenspiels. Auf Bild 209 hat also die an der bewegten Platte haftende Schicht *1* die gleiche Geschwindigkeit v_1 wie die Platte selbst. Wegen der zwischen den Schichten vorhandenen Reibung wird die nächste Schicht *2* von der Schicht *1* teilweise (aber nicht vollständig!) mitgenommen und bleibt daher hinter Schicht *1* zurück. Ihre Geschwindigkeit ist um einen kleinen Betrag geringer als die von Schicht *1*. Durch dieses Zurückbleiben übt sie auf die Bewegung der Platte einen hemmenden Einfluß aus. Schicht *3* bleibt wiederum hinter

Schicht 2 zurück usw. So nimmt die Geschwindigkeit von Schicht zu Schicht ab, so daß die letzte Schicht nur noch die Geschwindigkeit $v_2 < v_1$ hat.
Die Erfahrung zeigt nun, daß die Reibungskraft um so größer wird, je schneller die Platte relativ zur Flüssigkeit bewegt wird. Will man ein Messer rasch aus einem Honigglas herausziehen, kann es beispielsweise geschehen, daß man das ganze Glas mitnimmt. Die Relativgeschwindigkeit gegenüber einer willkürlich herausgegriffenen Schicht nimmt aber mit wachsendem Abstand x von der Platte immer mehr zu. Um trotzdem ein eindeutiges Maß dafür zu haben, benötigt man daher eine Größe, die von diesem Abstand unabhängig ist. Diese ist das

$$\textbf{Geschwindigkeitsgefälle:} \quad -\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Auf Bild 209 ist angenommen, daß die Geschwindigkeit mit zunehmender Entfernung von der bewegten Platte linear abfällt. In diesem einfachen Fall verteilt sich die gesamte Geschwindigkeitsabnahme $v_1 - v_2$ auf die gesamte Schichthöhe $x_1 - x_2$. Das Geschwindigkeitsgefälle ist daher durch den Ausdruck

$$\frac{v_1 - v_2}{x_1 - x_2}$$

gegeben. Dieser Differenzenquotient ist im ganzen Bereich der Grenzschicht konstant. Man kann daher sagen, daß die von der inneren Reibung verursachte Gegenkraft diesem Geschwindigkeitsgefälle proportional ist. Außerdem muß die Reibungskraft noch der Fläche A proportional sein, mit der die bewegte Platte die Flüssigkeit berührt. Der Proportionalitätsfaktor schließlich, der die charakteristische stoffliche Eigenart der Flüssigkeit berücksichtigt, ist die **(dynamische) Zähigkeit oder Viskosität** η. Somit entsteht

(140) $$\boxed{F_R = -\eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}}$$ **Newtonsches Reibungsgesetz**

Das Geschwindigkeitsgefälle braucht nicht notwendig linear zu verlaufen. Die Oberfläche der von der Platte mitgenommenen Flüssigkeit kann z. B. wie auf Bild 208 auch gekrümmt sein. Dann beschreibt man das Geschwindigkeitsgefälle besser durch den Differentialquotienten $\frac{dv}{dx}$ und nennt ihn auch kurz den **Geschwindigkeitsgradienten.** Das Gesetz lautet allgemeingültiger

$$F_R = -\eta A \frac{dv}{dx}.$$

Die Einheit der dynamischen Viskosität folgt aus der Gleichung

$$[\eta] = \frac{[F_R]\,[dx]}{[A]\,[dv]} = \frac{\mathrm{Nms}}{\mathrm{m^2 m}} = \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m^2}}.$$

Einheit der dynamischen Zähigkeit η: 1 Ns/m²

Den 10. Teil hiervon bezeichnet man (nach dem französischen Strömungsforscher POISEUILLE) als **1 Poise** (sprich: Poase):

$$1\ \mathrm{P} = 0{,}1\ \mathrm{Ns/m^2} = 1\ \mathrm{dyn\ s/cm^2}$$

Zähigkeit einiger Stoffe

Stoff	Temperatur in °C	Dynamische Viskosität η in P
Luft	0	0,000171
Luft	20	0,000181
Wasser	0	0,018
Wasser	20	0,010
Wasser	98	0,003
Alkohol	20	0,012
Äther	20	0,0026
Glyzerin	20	8,6
Schmieröl, dick	20	3,5 ··· 30
Pech	20	300 Millionen
Wasserstoff	0	0,0000857

Zur direkten Messung der dynamischen Zähigkeit dient u. a. das **Höppler-Viskosimeter** (Bild 210). Sein Hauptteil ist eine genau kalibrierte, etwas schräg stehende Glasröhre, die mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllt wird. Durch ihr eigenes Gewicht sinkt eine Kugel nach unten. Gemessen wird die Sinkgeschwindigkeit zwischen zwei angebrachten Marken, die ein unmittelbares Maß für die in Poise ausgedrückte Viskosität ist. Durch Verwendung von Kugeln verschiedenen Durchmessers ist der Meßbereich außerordentlich groß (0,0001 ··· 10000 Poise), so daß die Viskosität von Gasen und auch von sehr zähen Flüssigkeiten und Pasten bestimmt werden kann.

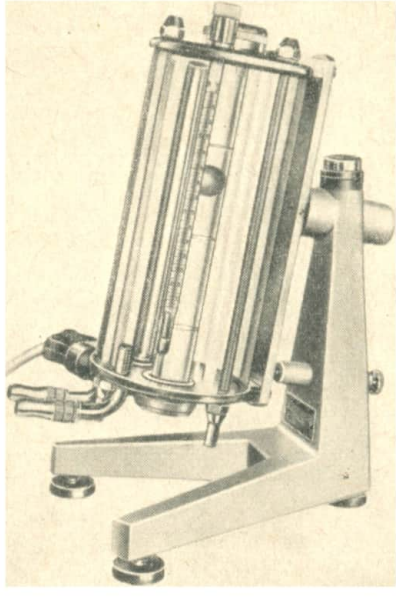


Bild 210. HÖPPLER-Viskosimeter

12.2.2. Anwendungen des Reibungsgesetzes

Die gedankliche Zerlegung der Flüssigkeit in einzelne, parallel aufeinander gleitende Schichten spiegelt sich auch

im äußeren Aussehen vieler Strömungen wider. So ist auf den Bildern 195, 196 das Aneinandervorbeigleiten der Schichten deutlich zu sehen. Derartige Strömungen bilden sich in allen langsam fließenden Flüssigkeiten und Gasen aus. Sie heißen daher **Schichten-** oder **laminare Strömungen.** In solchen Fällen läßt sich das NEWTONsche Reibungsgesetz anwenden.

Von großer praktischer Bedeutung ist z. B. die Berechnung der durch ein Rohr fließenden Flüssigkeitsmenge. Sie muß zweifellos durch die innere Reibung stark beeinflußt werden; denn diese bedeutet einen mehr oder weniger großen Energieverlust, der proportional mit der Rohrlänge anwachsen muß. Man kann diesen sehr anschaulich mit einer längeren, horizontal liegenden Röhre zeigen, die nach Bild 211 mit einem Wasserbehälter verbunden ist. In gleich großen Abständen zweigen Steigröhren ab, die als Druckmesser dienen.

Nach der Kontinuitätsgleichung (134) muß bei konstantem Rohrquerschnitt die Strömungsgeschwindigkeit in allen Rohrabschnitten gleich groß sein. Dann ist auch die kinetische Energie überall konstant. Ein längs des Rohres eintretender Energieverlust kann dann nur auf Kosten der potentiellen Energie gehen. Diese ist aber durch den jeweils herrschenden Druck gegeben. Die angesetzten Manometer zeigen in der Tat, daß der statische Druck bis zur Rohrmündung linear abfällt. Die BERNOULLIsche Gleichung, nach der bei konstanter Geschwindigkeit auch der statische Druck konstant bleiben muß, trifft hier nicht zu. Sie gilt nur für reibungsfreie Strömungen!

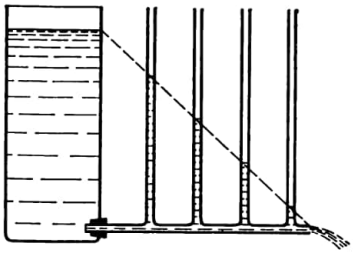


Bild 211. Verlust an potentieller Energie durch innere Reibung

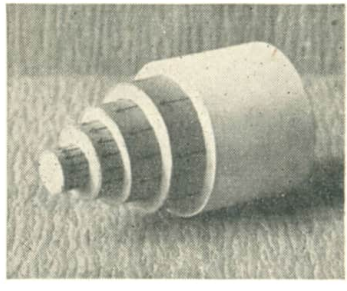


Bild 212. Modell der Schichtenströmung in einem engen Rohr

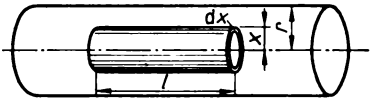
Die aus dem Rohr tretende Flüssigkeitsmenge läßt sich also nur unter Einbeziehung der Viskosität und der Rohrlänge berechnen. Für den Fall, daß es sich um enge und inwendig glatte Rohre mit laminarer Strömung handelt (Bild 212), gilt

$$V = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2) t}{8 \eta l} \tag{141}$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

Hierbei bedeutet V das in der Zeit t durchfließende Volumen, $(p_1 - p_2)$ die Druckdifferenz zwischen den beiden Rohrenden, r den Rohrradius und l die Rohrlänge.

Bild 213. Zur Herleitung des HAGEN-POISEUILLEschen Gesetzes



Herleitung: Man greife aus der Strömung einen kleinen Zylinder vom Radius x und der Länge l heraus (Bild 213). Auf seinen Querschnitt wirkt die Kraft $\pi x^2 (p_1 - p_2)$. Sie steht im Gleichgewicht mit der längs der Mantelfläche wirkenden Reibungskraft $F_R = \eta \frac{dv}{dx} \cdot 2x\pi l$.

Nach Gleichsetzen beider Kräfte wird

$$dv = \frac{(p_1 - p_2)\, x}{2\eta l}\, dx .$$

Zwischen den Grenzen x und r integriert, ergibt sich die Geschwindigkeit v als Funktion des Abstandes x von der Achse:

$$v = \frac{(p_1 - p_2)\,(r^2 - x^2)}{4\eta l} .$$

Durch eine kleine Ringfläche dA vom Radius x und der Breite dx fließt in der Zeit t die Menge

$$dV = vt\, dA = \frac{(p_1 - p_2)\,(r^2 - x^2)}{4\eta l}\, 2\pi\, xt\, dx,$$

was, zwischen den Grenzen 0 und r integriert, Gleichung (141) ergibt.

Auch sehr kleine Kugeln werden beim Absinken in einer Flüssigkeit oder in Luft von einer Schichtenströmung umflossen (Nebeltröpfchen!). Für den **Widerstand** F_W, d. i. die Kraft, die auf die bewegte Kugel einwirkt, gilt

(142) $$\boxed{F_W = 6\pi\eta v r}$$ **Stokessches Gesetz**

Hier bedeutet v die Geschwindigkeit der bewegten Kugel und r den Kugelradius. Die Herleitung erfordert schwierige mathematische Rechnungen. Das Gesetz ist u. a. von Bedeutung für die Absetzgeschwindigkeit von in Flüssigkeiten aufgeschlämmten Stoffen, die dann mehr oder weniger schnell **sedimentieren** (zu Boden sinken).
Man kann daraus auch die Fallgeschwindigkeit v berechnen, wenn die Dichte ϱ_1 der Teilchen und die der Flüssigkeit ϱ_2 bekannt sind. Das Gewicht eines kugelförmig angenommenen Teilchens ist dann $Vg\,(\varrho_1 - \varrho_2)$ und gleich dem obigen Sinkwiderstand. Deshalb ist

$$\frac{g\,(\varrho_1 - \varrho_2)\, 4\pi r^3}{3} = 6\pi\eta v r .$$

Damit wird

(143) $$\boxed{v = \frac{2\,(\varrho_1 - \varrho_2)\, g r^2}{9\eta}}$$ **Sinkgeschwindigkeit v kleiner Kugeln**

Beispiele: 1. Eine Staumauer hat 1,5 m unter dem Spiegel eine röhrenförmige Öffnung von 2 mm Radius und 2 m Länge. Wieviel Wasser von 20 °C geht hierdurch an einem Tag verloren? – Mit der Viskosität $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m^2}$ (s. Tabelle) und der Druckdifferenz $\Delta p = 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kp/m^2} = 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\,\mathrm{N/m^2}$ ergibt Gleichung (141)

$$V = \frac{\pi\,(2 \cdot 10^{-3})^4\,\mathrm{m^4} \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\,\mathrm{N/m^2} \cdot 86400\,\mathrm{s}}{8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m}} = 4\,\mathrm{m^3}.$$

2. Berechne die Sinkgeschwindigkeit von Sandkörnchen ($r = 1$ µm) in Wasser. – Es ist $\varrho_2 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, $\varrho_1 = 2{,}65\,\mathrm{g/cm^3}$, die Temperatur sei 20 °C, $\eta = 0{,}01$ P. Man erhält nach Einsetzen dieser Werte

$$v = \frac{2\,(2650 - 1000)\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m^2} \cdot \mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3 s^2} \cdot 9 \cdot 0{,}001\,\mathrm{Ns}} = 3{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s} = 0{,}00036\,\mathrm{cm/s}.$$

Hieraus erkennt man, wie langsam sich derartig feine Teilchen zu Boden setzen. In den Zentrifugen wirkt statt des Gewichts die viel größere Fliehkraft. Man kann auf diese Weise selbst feinste Aufschwemmungen von der Flüssigkeit trennen.

12.2.3. Grenzschicht und Wirbelbildung

Bei den letzten Betrachtungen stand die innere Reibung der Flüssigkeit im Vordergrund. Die zur Bewegung der Flüssigkeit selbst erforderlichen Kräfte wurden dagegen vernachlässigt. Bei langsamen Strömungen ist dies auch statthaft, da die zur Überwindung der Trägheit erforderliche Energie gegenüber der Reibungsarbeit nicht ins Gewicht fällt. Bei raschen Strömungen tritt jedoch eine neue Erscheinung auf. Es bilden sich spirale **Wirbel,** die als zusätzliche Flüssigkeitsbewegung eine Vergrößerung des Strömungswiderstandes bewirken. Wirbel sind starke Energieverbraucher, da die in ihnen enthaltene Flüssigkeit sehr rasch in kreisende Bewegung versetzt werden muß.

In besonderem Maße treten solche Wirbel an umströmten festen Körpern auf. Dabei ist es gleichgültig, ob ein ruhender Körper von der Flüssigkeit umströmt wird oder ob sich der Körper durch die ruhende Flüssigkeit bewegt. Experimentell einfacher läßt sich der erste Fall untersuchen. Als Beispiel diene zunächst nach Bild 214 ein in der Strömung ruhender Kreiszylinder.

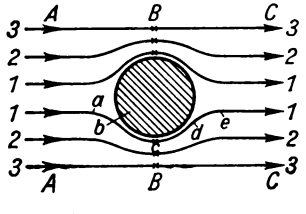


Bild 214. Strömung um einen Kreiszylinder

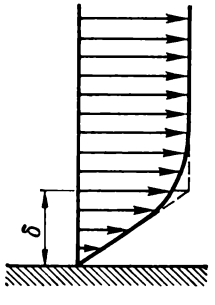


Bild 215. Geschwindigkeitsgefälle in der Grenzschicht

An seiner Oberfläche haftet zunächst eine Haut unbewegter Flüssigkeit. Von hier aus beginnt die schon in 12.2.1. erwähnte **Grenzschicht,** in der die Strömungsgeschwindigkeit vom Wert 0 bis zu ihrem Endwert in der freien Strömung zunimmt. Auf Bild 215 ist die Dicke der Grenzschicht mit δ angegeben. Im Gegensatz zu Bild 208 nimmt hier die Geschwindigkeit der Strömung gegen die feste Oberfläche hin ab. Ein dieser Grenzschicht angehörendes Flüssigkeitsteilchen steht sowohl unter der beschleunigenden Wirkung der freien Strömung als auch unter dem bremsenden Einfluß der Wand. Es möge sich dabei längs der Stromlinie 1 bewegen (Bild 214).

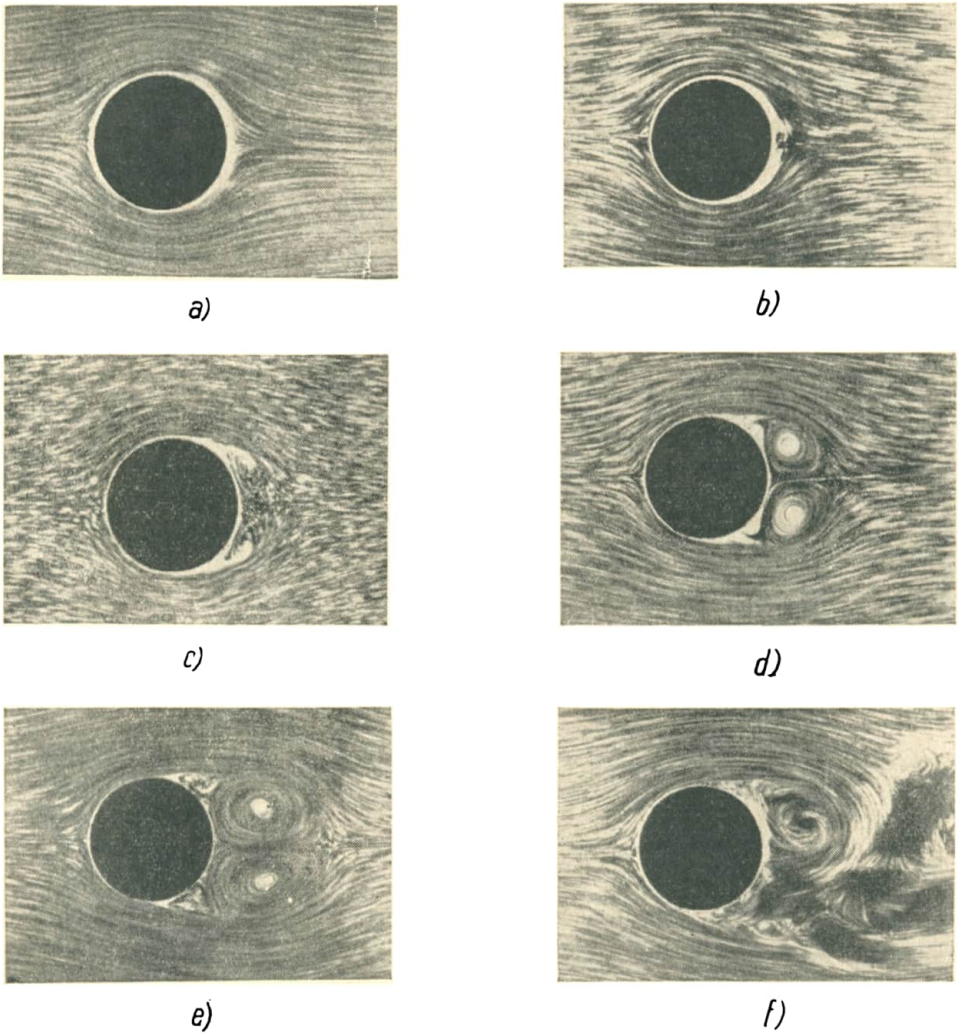


Bild 216a bis f. Entstehung von Wirbeln hinter einem umströmten Kreiszylinder

Verfolgt man die Stromlinie *1*, so nimmt von *a* bis *c* die Geschwindigkeit v zu und der statische Druck ab. Das Teilchen wird in das Druckgefälle hineingezogen. Von *c* an nimmt v ab und der statische Druck wieder zu. Das Teilchen muß nun gegen erhöhten Druck anlaufen und würde ohne weiteres bis *e* kommen, wenn seine bis *c* erreichte kinetische Energie voll erhalten bliebe. Infolge der Bremsung in der Grenzschicht wird ihm aber Energie entzogen. Es vermag nicht bis *e* zu gelangen. Es kommt vorzeitig zur Ruhe, und etwa bei *d* sammelt sich eine Schicht ruhender Flüssigkeit an. Die darübergleitenden schnelleren Schichten bewirken daher ein Einrollen der steckenbleibenden Grenzschicht nach der Wand zu, es entsteht eine Drehbewegung im Linkssinn, d. h. ein kleiner Wirbel. Dieser wandert mit der Strömung, neue Wirbel bilden sich und wachsen. Sie lösen sich schließlich los und schwimmen mit der Strömung davon. Die vorher anliegende Strömung reißt ab, indem die Stromlinien um die verwirbelte Zone herum ausbiegen (Bild 216). Auf diese Weise zieht jeder bewegte Körper ein verwirbeltes Feld hinter sich her.

12.2.4. Strömungswiderstand von Körpern

Die soeben geschilderte Wirbelbildung zusammen mit der inneren Reibung bedeutet, daß ein Körper nur unter Energieaufwand in einer Flüssigkeit bewegt werden kann. Das äußert sich in einer der Bewegung entgegenwirkenden Kraft, dem **Strömungswiderstand.**

Um einen ersten Anhaltspunkt für die Größe dieser Kraft zu finden, kann man von folgendem Gedankengang ausgehen (Bild 217). Hat der Körper die Geschwindigkeit v, den Querschnitt A und die Flüssigkeit die Dichte ϱ, so verdrängt er innerhalb der Zeitdauer Δt die Masse

$$\Delta m = \varrho \cdot \Delta V = \varrho A v \cdot \Delta t.$$

Dadurch erhält diese Masse einen Impuls

$$\Delta (mv) = \varrho A v^2 \cdot \Delta t.$$

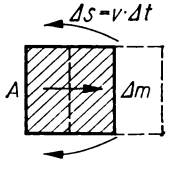


Bild 217. Verdrängung von Flüssigkeit bei der Bewegung eines Körpers

Nach Gleichung (78) ist aber die zeitliche Änderung des Impulses gleich der wirkenden Kraft

$$F = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t} = A \varrho v^2.$$

Die Überlegung trifft allerdings nicht ganz den wahren Sachverhalt; denn die an der Vorderseite des Körpers verdrängte Flüssigkeit gelangt auf mehr oder weniger großen Umwegen zur Rückseite des Körpers und gibt ihm einen Teil des Impulses wieder zurück. Man kann dann aber immer noch annehmen – und dies wird durch die experimentelle Erfahrung auch bestätigt –, daß der Strömungswiderstand dem Produkt $A \varrho v^2$ proportional ist. Setzt man an die Stelle des Produktes ϱv^2 den Staudruck, so kann man also sagen:

Der Strömungswiderstand ist dem Querschnitt des Körpers und dem Staudruck der Flüssigkeit proportional.

Der Proportionalitätsfaktor ist eine dimensionslose Zahl, deren Größe weitgehend von der Form des Körpers und dem Charakter der Strömung abhängt. Man nennt ihn den **Widerstandsbeiwert c**. Damit ist

(144) $$\boxed{F_W = cA\frac{\varrho}{2}v^2}$$ **Strömungswiderstand F_W**

Dabei bedeutet A die **Stirnfläche** des umströmten Körpers (d. i. der größte der Strömung entgegenstehende Querschnitt).
Wegen des komplizierten Verlaufes der **Turbulenz** (Verwirbelung) läßt sich die Zahl c nicht berechnen, sondern muß durch Versuche ermittelt werden, indem man den Körper im *Strömungs-* bzw. *Windkanal* aufhängt und den Widerstand mit einer Waage bestimmt (Bild 218).

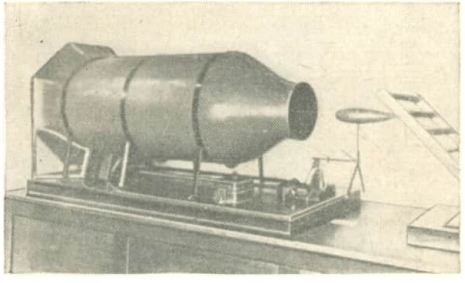


Bild 218. Windkanal mit stromlinienförmigem Versuchskörper

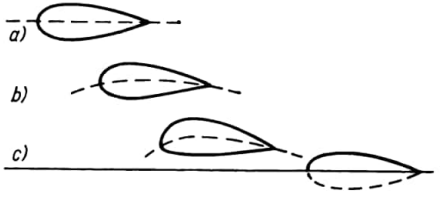
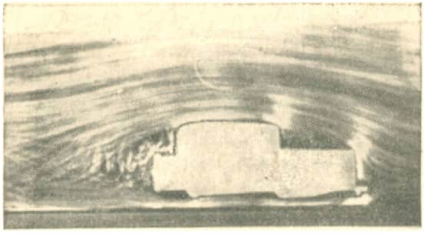


Bild 219. Stromlinienform in zunehmender Bodennähe

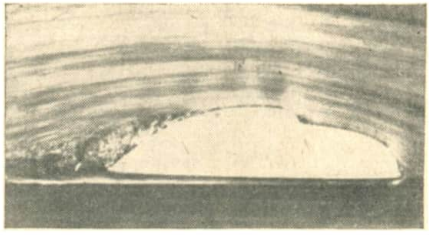
Widerstandsbeiwerte c einiger Körper

Dünne ebene Platte, senkrecht zur Stromrichtung	1,1
Offene Halbkugel, Höhlung gegen die Strömung	1,3 ··· 1,6
desgl., Rundung gegen die Strömung	0,35
Kugel	0,2 ··· 0,4
Stromlinienkörper	0,055
Kraftwagen Ifa F9 (Stirnfläche 1,74 m²)	0,48

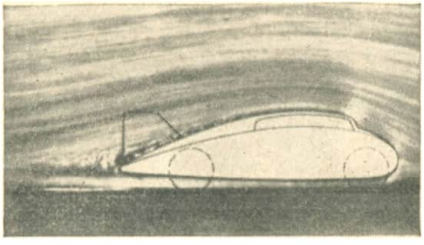
Um den Widerstand zu vermindern, muß man den Körper jeweils so gestalten, daß sich möglichst keine Wirbel bilden. Die Strömung darf sich an keiner Stelle von der Oberfläche ablösen. Die Stromlinien verlaufen dann wie in einer laminaren Strömung. Man nennt einen solchen Körper **stromlinienförmig.** Er ist vorn nicht etwa spitz, sondern sanft gerundet und läuft hinten mit schlanker Spitze aus.
Mit zunehmender Bodennähe flacht sich die untere Seite ab (Bild 219). Die richtige Form wird durch Modellversuche ermittelt. Bei Lokomotiven, Kraftwagen und anderen Fahrzeugen ist die reine Stromlinienform aus technischen Gründen kaum zu verwirklichen (herausragende Teile, wie Räder, Stoßstangen usw.!). Die wesentlichste Erkenntnis ist hier, daß die Hauptursache des Widerstandes nicht vorn, sondern am hinteren Ende des Fahrzeuges zu suchen ist. Die Formverbesserung der Fahrzeuge



a)



b)



c)

Bild 220
a) ältere Kraftwagenform,
b) Unvollkommene Stromlinienform (Wirbel am Heck),
c) Verbesserte Stromlinienform

(Bild 220) ist besonders deswegen wichtig, weil die erforderliche **Antriebsleistung mit der 3. Potenz der Geschwindigkeit ansteigt.** Da nach (74) die Leistung $P = Fv$ ist, ergibt sich auf Grund von (144):

(145) $$\boxed{P = \frac{cA\varrho v^3}{2}}$$ **Leistung P bei Bewegung gegen die Strömung**

Beispiele: 1. Berechne die Druckkraft gegen 1 Quadratmeter der Stirnfläche eines Schornsteins bei einer für das Binnenland angenommenen maximalen Windgeschwindigkeit von 45 m/s und der im Modellversuch ermittelten Widerstandszahl $c = 0{,}67$. –

$$F_w = \frac{cA\varrho v^2}{2} = \frac{0{,}67 \cdot 1\,\mathrm{m^2} \cdot 1{,}293\,\mathrm{kg} \cdot 45^2\mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3} \cdot \mathrm{s^2} \cdot 2} = 877{,}1\,\mathrm{N} = 89\,\mathrm{kp}.$$

2. Welche Antriebsleistung erfordert die Uberwindung des Luftwiderstandes eines Kraftwagens ($c = 0{,}5$) bei einer Geschwindigkeit von 108 km/h und einer Stirnfläche von 2,5 m²? –

$$P = \frac{cA\varrho v^3}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5\,\mathrm{m^2} \cdot 1{,}293\,\mathrm{kg} \cdot 27000\,\mathrm{m^3}}{\mathrm{m^3} \cdot 2 \cdot \mathrm{s^3}} = 21819\,\mathrm{kg\,m^2/s^3} = 29{,}7\,\mathrm{PS}$$

12.2.5. Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen

Obwohl die in der obigen Tabelle angegebenen Widerstandsbeiwerte c für die meisten Fälle der technischen Praxis ausreichend sind, zeigen genauere Untersuchungen, daß der Widerstandsbeiwert eines Körpers von bestimmter Form keine Konstante ist.

Sein jeweiliger Zahlenwert kann nur für ein nach Aussehen und relativer Ausdehnung genau definiertes Strömungs- bzw. Wirbelfeld Gültigkeit haben. Die exakte Berechnung des Widerstandsbeiwertes unter Berücksichtigung aller Feinheiten ist somit nicht möglich.

Nur in einigen wenigen Fällen wirbelfreier Strömungen läßt er sich genau angeben, und zwar z. B. für eine laminar umströmte Kugel. Für deren Strömungswiderstand wurde das Stokessche Gesetz (142) genannt. Setzt man diese Kraft gleich dem Strömungswiderstand nach Gleichung (144), so erhält man

$$6\pi\eta v r = c\,\frac{\varrho}{2}\,v^2\,\pi r^2$$

und daraus

$$c = \frac{12\eta}{\varrho r v}.$$

Hier läßt sich folgendes herauslesen: Der Widerstandsbeiwert c bleibt unverändert, wenn der Kugelradius im gleichen Maße verkleinert wird, wie man die Strömungsgeschwindigkeit v erhöht. Oder auch: Der Wert für c bleibt unverändert, wenn man das Medium mit geringer Zähigkeit η durch ein anderes Medium mit größerer Zähigkeit ersetzt, das eine entsprechend größere Dichte ϱ hat. Dann muß auch das Produkt rv bzw. der Quotient $\frac{\eta}{\varrho}$ konstant bleiben.

Es hat sich nun erwiesen, daß dieses Gesetz nicht nur bei einer laminar umströmten Kugel, sondern auch bei allen anderen umströmten Körpern gilt. Stets ist der Widerstandsbeiwert irgendeine, wenn auch nicht weiter bekannte Funktion des Ausdruckes $\frac{lv\varrho}{\eta}$. Hierbei bedeutet l im allgemeinen eine für die jeweilige Körperform charakteristische Länge, wie z. B. bei der Kugel den Radius r. Dieser Ausdruck ist, wie sich durch Einsetzen der Einheiten leicht bestätigt, dimensionslos.

(146) $$\boxed{Re = \frac{lv\varrho}{\eta}}$$ **Reynoldssche Zahl *Re***

Liegen demnach bei zwei verschiedenen Strömungsvorgängen an geometrisch ähnlichen Körpern gleich große Reynoldssche Zahlen vor, dann sind auch die Widerstandsbeiwerte gleich groß. Da einem bestimmten c-Wert ein ganz bestimmtes Strömungsbild entspricht, müssen dann auch die Stromlinien selbst geometrisch ähnlich verlaufen:

(147) **Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen:**

Bei gleicher Reynoldsscher Zahl liefern geometrisch ähnliche Körper auch geometrisch ähnliche Strömungen. Ihre Widerstandszahlen haben den gleichen Wert.

Man erhält somit eine formgetreue Wiedergabe der Strömungserscheinungen, wenn man verkleinerte Nachbildungen bei entsprechend erhöhter Geschwindigkeit beobachtet. Vorgänge, die in Wirklichkeit in Luft verlaufen, kann man auch in Wasser studieren, wenn man beachtet, daß Wasser einerseits größere Zähigkeit η, andererseits größere

Dichte ϱ hat. Beides zusammen wirkt sich so aus, daß $\frac{\varrho}{\eta}$ bei Wasser rund 14mal kleiner ist als bei Luft. Folglich muß man für entsprechend größere Geschwindigkeit sorgen. Das Verhältnis $\frac{\eta}{\varrho}$ nennt man

$$\text{(148)} \qquad \textbf{kinematische Zähigkeit } \nu = \frac{\textbf{dynamische Zähigkeit } \eta}{\textbf{Dichte } \varrho}$$

Die Einheit der kinematischen Zähigkeit folgt aus der Gleichung

$$[\nu] = \frac{[\eta]}{[\varrho]} = \frac{\mathrm{Ns\,m^3}}{\mathrm{m^2\,kg}} = \frac{\mathrm{kgm\,s\,m^3}}{\mathrm{s^2\,m^2\,kg}} = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Den 10000. Teil hiervon bezeichnet man (nach dem englischen Mathematiker STOKES) als **1 St (Stokes)**

$$\textbf{1 St} = 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s} = 1\ \mathrm{cm^2/s};\quad \textbf{1 cSt (Zentistokes)} = 10^{-2}\ \textbf{St}.$$

Zur Messung der kinematischen Zähigkeit dient heute noch oft das **Viskosimeter von Engler.** Es stellt ein Gefäß dar, aus welchem durch ein Röhrchen 200 $\mathrm{cm^3}$ der zu messenden Flüssigkeit ausfließen. Als Vergleich dient Wasser von 20 °C, das bei vorschriftsmäßigem Bau des Apparates 50 ··· 52 s zum Abfluß benötigt. Die Zähigkeit in ENGLER-Graden stellt das Verhältnis der Abflußzeiten des Öles zu der des Wassers dar. Die nicht mehr verbindliche Einheit *Grad Engler* (°E) ist daher nicht exakt definiert. Zur Umrechnung dienen besondere Tabellen. Von etwa 5 °E an aufwärts sind jedoch die Angaben in ENGLER-Graden denen in Zentistokes praktisch proportional, und man kann dann rechnen:

$$1\ ^\circ\mathrm{E} \approx 7{,}6\ \mathrm{cSt}.$$

Kinematische Zähigkeiten in $\mathrm{m^2/s}$

Wasser 0 °C	$1{,}79 \cdot 10^{-6}$	Luft 0 °C und 760 Torr	$1{,}32 \cdot 10^{-5}$
Wasser 20 °C	$1{,}01 \cdot 10^{-6}$	Luft 20 °C und 760 Torr	$1{,}50 \cdot 10^{-5}$

Von besonderem Interesse ist es, zu wissen, unter welchen Bedingungen die laminare in die turbulente Strömung übergeht. Da nach dem Ähnlichkeitsgesetz jedem Strömungsbild ein bestimmter Wert der REYNOLDSschen Zahl entspricht, muß auch dieses Umschlagen von dem einen zum anderen Zustand durch einen **kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl** charakterisiert sein.

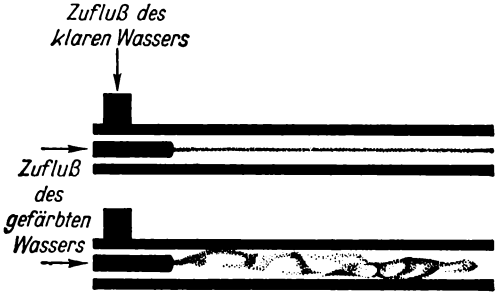
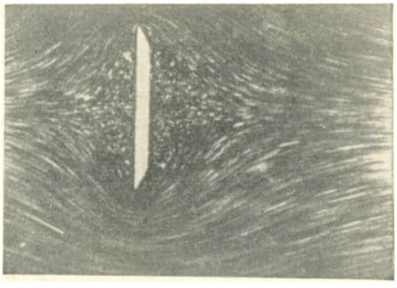
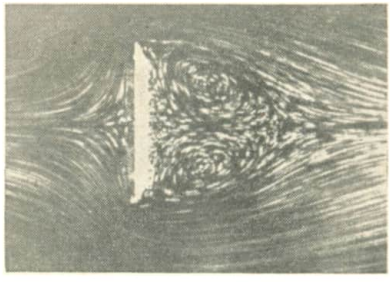


Bild 221. Umschlag der laminaren in die turbulente Strömung innerhalb eines Rohres

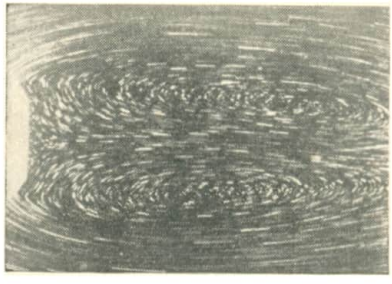
Auf Bild 221 sieht man z. B. die Strömung in einem Wasserrohr. Der aus einer Düse in die Rohrachse einfließende gefärbte Wasserfaden zeigt an, daß die Strömung im oberen Bild laminar ist. Wird die Geschwindigkeit des Wassers vergrößert, dann schlägt plötzlich, wie auf dem unteren Bild erkennbar ist, die Strömung in die turbulente Form um. Versuche ergaben, daß dies bei einem Wert von $Re = \frac{lv\varrho}{\eta} > 2300$ eintritt, wobei l den Rohrdurchmesser bedeutet.
Die kritischen Werte sind jedoch keine strengen Grenzen, und es ist durchaus möglich, bei vorsichtiger Handhabung eine Strömung auch weit oberhalb des kritischen Wertes laminar zu erhalten. Schließt z. B. das Rohr gut abgerundet an das Ausflußgefäß an, so kann in diesem Beispiel Re bis 20000 getrieben werden, ohne daß Turbulenz eintritt. Bei umströmten Körpern ist ferner die Beschaffenheit der Strömung, in die man das Modell hineinstellt, von großem Einfluß (Bild 222).



a)



b)



c)

Bild 222a bis c. Strömung um eine scharfrandige Platte bei verschiedener Reynoldsscher Zahl

Das für die Bewegung kleiner Kugeln gültige in 12.2.2. angeführte Stockessche Gesetz gilt für $Re = \frac{lv\varrho}{\eta} < 0{,}4$. Bis dahin ist die Strömung laminar und fast ausschließlich durch die Zähigkeit bedingt.

Beispiele: 1. Zur Bestimmung des Widerstandes eines Kraftwagens von 4 m Länge bei 36 km/h wird ein auf 10:1 verkleinertes Modell im Windkanal untersucht. Welchen Wert hat die Reynoldssche Zahl, und wie groß ist die erforderliche Windgeschwindigkeit? –

$$Re = \frac{lv}{\nu} = \frac{4\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m/s}}{1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 2670000$$

Entsprechend dem Verkleinerungsmaßstab von 10:1 muß die Anblasgeschwindigkeit $v = 360\ \text{km/h} = 100\ \text{m/s}$ sein.

2. Eine Kugel von 14 cm Durchmesser befindet sich in einem Luftstrom (20 °C) von der Geschwindigkeit 20 m/s. Wie groß muß die Kugel sein, wenn sich in einem Wasserstrom (20 °C) bei der Geschwindigkeit 10 m/s das gleiche Strömungsbild ergeben soll? – Bezeichnet man die in Luft gültigen Größen mit l, v, ν und die in Wasser gültigen mit l', v', ν', so ist wegen der Gleichheit der REYNOLDSschen Zahlen

$$\frac{lv}{\nu} = \frac{l'v'}{\nu'}$$

und hiernach der erforderliche Durchmesser im Wasser

$$l' = \frac{l\nu v'}{\nu v'} = \frac{0{,}14\,\text{m} \cdot 20\,\text{m/s} \cdot 1{,}01 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}}{1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s} \cdot 10\,\text{m/s}} = 0{,}0189\,\text{m}.$$

3. Warum muß man zur Untersuchung von Tragflügelprofilen sehr große Windkanäle bauen? – Die REYNOLDSschen Zahlen für Tragflügel liegen bei 10^6 und größer. Bei kleinen Modellen müßte daher die Geschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit werden. Dann aber kann man die Luft nicht mehr als inkompressible, ideale Flüsisgkeit betrachten, so daß die BERNOULLIsche Gleichung nicht mehr gilt.

4. Bei welcher Geschwindigkeit wird der durch ein gerades Rohr von 1 cm Durchmesser fließende Wasserstrom von 20 °C turbulent? – Aus Gleichung (146) erhält man mit dem kritischen Wert $Re = 2300$

$$v = \frac{Re\,\nu}{l} = 0{,}23\,\text{m/s}.$$

Wärmelehre

13. Verhalten der Körper bei Temperaturänderung

13.1. Wesen von Temperatur und Wärme

Beim Berühren eines Körpers empfinden wir **Wärme** oder **Kälte.** Diese Empfindungen werden durch einen je nach den Umständen unterschiedlichen Zustand der Körper hervorgerufen, den man **Temperatur** *(Warmheit)* nennt. Die durch den Nervenapparat unserer Haut vermittelte Gefühlsskala ist jedoch zu eng begrenzt und für jegliche Messung unzulänglich (Bild 223). Deshalb bedient man sich verschiedener Hilfsmittel (z. B. Thermometer), um Temperaturveränderungen möglichst fein abgestuft und deutlich sichtbar zu machen.
Um die Temperatur eines Körpers zu erhöhen, muß man ihm stets *Energie* zuführen, z. B. durch Reiben oder Rühren. Sie ist dann als *Wärmeenergie* im Körper aufgespeichert. Beim Abkühlen gibt er diese Energie wieder ab, indem er die ursprünglich kältere Umgebung aufwärmt, wie dies beispielsweise jeder Ofen tut.
Früher glaubte man an die Existenz eines besonderen „Fluidums", eines *Wärmestoffs*, der sich zwischen den Körpern hin und her bewege. Wir wissen heute vielmehr, daß die Wärmeenergie die *kinetische Energie* der sich fortgesetzt bewegenden Moleküle der Stoffe darstellt. Je *schneller* sie sich bewegen (bei den Gasen) bzw. je *größer die Amplitude* der Schwingungen ist (bei den festen Körpern), desto *größer* ist der

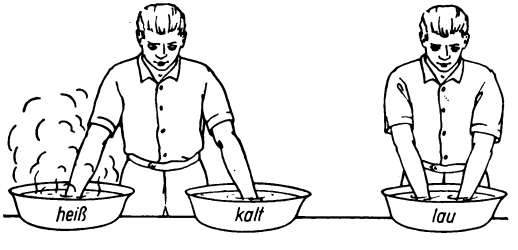


Bild 223. Die Unzuverlässigkeit des Wärmegefühls

a) Man taucht die Hände eine Weile in kaltes und heißes Wasser. b) Hält man dann beide Hände in eine Schüssel mit lauem Wasser, so empfindet die eine Hand dieses als heiß, die andere als kalt

Energiegehalt und damit die im ganzen Körper enthaltene *Wärmeenergie*. Im Lichte dieser Auffassung bildet die **mechanische Wärmetheorie**, auch **Thermodynamik** genannt, die Grundlage jeder modernen Wärmelehre.
Da sich alle Energiearten ineinander umwandeln lassen, kann man die Wärmeenergie ohne weiteres auf die bereits in der Mechanik benutzten 3 Grundgrößen Länge, Masse und Zeit zurückführen, aus denen ja auch die bekannte Energieeinheit, das **Joule** (bzw. die Wattsekunde oder das Newtonmeter), hervorgeht. Um hieraus die den besonderen Bedürfnissen der Wärmelehre angepaßte Einheit der Wärmeenergie, die **Kalorie**, zu gewinnen, bedarf es dann lediglich eines passend gewählten Umrechnungsfaktors (14.1.).
Ein entsprechendes Vorgehen zur Kennzeichnung des Wärmezustandes ist dagegen nicht möglich. Hier macht sich die Einführung einer neuen Grundgröße, der **Temperatur**, notwendig. Als Einheit der Temperatur t verwenden wir vorderhand den **Grad Celsius** (°C). Temperatur*unterschiede* dagegen werden mit der Abkürzung grd (in Frankreich und England mit deg) bezeichnet.

Die Grundgleichungen der Wärmelehre bauen auf den 4 Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und Temperatur auf.

13.2. Temperaturmessung

Da uns die Natur keine Temperaturskale vorschreibt, ist es an sich gleichgültig, welchen physikalischen Vorgang man zur Schaffung einer solchen zugrunde legt. Auf der bei Erwärmung stattfindenden Ausdehnung beruhen die für einfache Temperaturmessungen ausreichenden **Flüssigkeitsthermometer.** Sie sind in ganze oder zehntel Grad geteilt und mit Quecksilber oder gefärbtem Alkohol gefüllt. Nach internationalen Vereinbarungen ist eine Reihe von **Fest-(Fix-)punkten** vorgeschrieben, nach denen sich alle Temperaturmessungen zu richten haben.

0 °C ist die Temperatur des schmelzenden Eises bei 760 Torr (Eispunkt).
100 °C ist die Temperatur des siedenden Wassers bei 760 Torr (Wasserdampfpunkt).

Diese beiden Punkte sind wegen der großen Genauigkeit und Leichtigkeit, mit der man sie reproduzieren kann, gewählt worden.

Früher waren noch gebräuchlich die Skale nach RÉAUMUR: 0 °R (Eispunkt) bis 80 °R (Siedepunkt) und die Skale nach FAHRENHEIT: 32 °F (Eispunkt) bis 212 °F (Siedepunkt).

Zum Eichen taucht man das Thermometer mit der *ganzen Länge seines Quecksilberfadens* in zerstoßenes, schmelzendes Eis bzw. hängt es in den Dampfraum eines Siedekolbens.
Zum praktischen Gebrauch werden Quecksilberthermometer bis 650 °C, solche aus Quarzglas bis 800 °C hergestellt. Da Quecksilber bei 357 °C siedet, besteht bei höheren Temperaturen Explosionsgefahr. Für tiefe Temperaturen bis zu jener der flüssigen Luft ist eine Füllung aus Pentan verwendbar.

Für höhere und tiefere Temperaturen gelten die weiteren

Festpunkte:

−182,97 °C . . . Siedepunkt des flüssigen Sauerstoffs (Sauerstoffpunkt),
419,505 °C . . . Erstarrungspunkt des Zinks (Zinkpunkt)
444,60 °C . . . Siedepunkt des Schwefels (Schwefelpunkt),
960,8 °C . . . Erstarrungspunkt des flüssigen Silbers (Silberpunkt),
1063,0 °C . . . Erstarrungspunkt des flüssigen Goldes (Goldpunkt).

Für die dazwischenliegenden Intervalle sind zur exakten Temperaturbestimmung folgende Meßmethoden vorgeschrieben:

−182,97 °C ··· 0 °C ··· +630,5 °C	630,5 °C ··· 1063,0 °C	1063,0 °C ··· beliebig hohe Temperatur
elektrische Platin-Widerstandsthermometer	*Thermoelement mit Platin-Platinrhodium*	*Optische Pyrometrie*

Für noch tiefere Temperaturen liefert nur das Gasthermometer zuverlässige Angaben. **Thermoelemente** beruhen darauf, daß an der Berührungsstelle zweier verschiedener Metalle eine elektrische Spannung auftritt, sobald dort die Temperatur anders ist als im übrigen Stromkreis. Solche Elemente können außerordentlich klein und leicht gehalten werden. **Elektrische Widerstandsthermometer** beruhen auf der Änderung des elektrischen Widerstandes von Metallen und Halbleitern bei Temperaturänderung. Wegen ihrer exakten Arbeitsweise werden Temperaturfühler aus Platindraht bevorzugt (Bild 224), deren Widerstand z. B. bei 0 °C 100 Ω und bei 100 °C 138,50 Ω beträgt. Das die Temperatur anzeigende Meßinstrument kann weit von der Meßstelle entfernt sein.

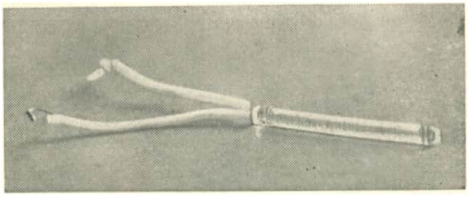


Bild 224. Fühler eines elektrischen Widerstandsthermometers (in Glas eingeschmolzene Platinwendel)

Zum bequemen Abschätzen von Oberflächentemperaturen verwendet man besondere **Farbanstriche (Thermocolore)**, d. h. Stoffe, die bei einer bestimmten Temperatur in eine *andere Farbe umschlagen*. Zum Beispiel wird rotes Quecksilberjodid-Kupferjodür bei 70 °C schokoladenbraun und gelbes Silberquecksilberjodid bei 40 °C orangerot.

13.3. Ausdehnung fester und flüssiger Körper

13.3.1. Lineare (Längen-) Ausdehnung

Betrachtet man zunächst nur die Längenänderung Δl, so kann man feststellen, daß sie der ursprünglichen Länge l_0 und der Temperaturänderung $\Delta t = (t - t_0)$ annähernd proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor hat je nach dem vorliegenden Material einen verschiedenen Wert. Man nennt ihn den **linearen Ausdehnungskoeffizienten** α.

Es ist also die

Längenzunahme:

(149) $$\boxed{\Delta l = \alpha\, l_0 \cdot \Delta t}$$

Daraus ergibt sich der

lineare Ausdehnungskoeffizient:

(150) $$\boxed{\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta t}}$$

Einheit des linearen Ausdehnungskoeffizienten α: 1/grd

Am einfachsten stellt man sich einen Stab von 1 m Länge vor. Bei Erwärmung um 1 grd wird er sich um eine Länge im Betrag von α ausdehnen. Wenn l_0 die ursprüngliche Länge bei der Anfangstemperatur t_0 ist, verlängert sich dann der Stab bei Erwärmung auf die Temperatur t um das Stück Δl. Hiernach erhält man

(151) $$\boxed{l = l_0 + \Delta l = l_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta t)}$$ **Gesamtlänge l**

Bei Abkühlung ist $t < t_0$, so daß eine *negative* Längenänderung (Verkürzung) herauskommt.

Bei größeren Temperaturunterschieden erweist es sich jedoch, daß die einfache lineare Beziehung (149) nicht mehr genau ist. Ein allgemeines, für alle festen und flüssigen Körper exakt gültiges Gesetz läßt sich nicht angeben.

Um dennoch zu einer besseren Annäherung an das wirkliche Verhalten der Körper zu gelangen, kann man die Annahme machen, daß der Ausdehnungskoeffizient α selbst wieder eine lineare Funktion der Temperatur ist:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta \cdot \Delta t.$$

Damit wird aus Gleichung (151)

(152) $$l = l_0\,(1 + \alpha_0 \cdot \Delta t + \beta \cdot \Delta t^2).$$

So hat man z. B. bei Platin die Werte $\alpha_0 = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ 1/grd und $\beta = 3{,}5 \cdot 10^{-9}$ 1/grd^2 ermittelt. Hieraus ist zu ersehen, daß der Koeffizient β erst bei höheren Temperaturen ins Gewicht fällt.

Um nun die Genauigkeit noch weiter zu treiben, könnte man auch noch β als lineare Funktion der Temperatur ansetzen und bekäme dann die Gleichung

$$l = l_0\,(1 + \alpha_0 \cdot \Delta t + \beta_0 \cdot \Delta t^2 + \gamma \cdot \Delta t^3).$$

Dieses Verfahren der schrittweisen Annäherung mittels einer Potenzreihe

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

ist nicht nur für den vorliegenden Fall der Wärmeausdehnung, sondern auch bei vielen anderen Gelegenheiten nützlich, wenn es sich um die Erfassung komplizierterer

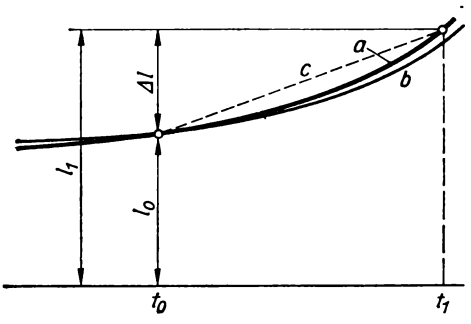


Bild 225. Zur näherungsweisen Darstellung der Wärmeausdehnung
a) wahrer Kurvenverlauf, b) Parabel 2. Grades, c) linearer Verlauf mit mittlerem Ausdehnungskoeffizienten

funktioneller Abhängigkeiten physikalischer Größen handelt. Die einfache lineare Beziehung (151) kann also nur dann angewandt werden, wenn alle Glieder mit höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Wird lediglich das quadratische Glied – wie in Gl. (152) – hinzugenommen, so hat die entsprechende Näherungskurve die Form einer Parabel, die sich der gegebenen Funktion im allgemeinen schon recht gut anschmiegt (Bild 225).

In der technischen Praxis vereinfacht man jedoch das Problem, indem man mit einem *mittleren Ausdehnungskoeffizienten* rechnet, der für ein bestimmtes größeres Temperaturintervall definiert ist. Man ersetzt also den in Frage kommenden Kurvenabschnitt näherungsweise durch seine Sekante. Die im folgenden genannten Zahlen sind die mittleren Ausdehnungskoeffizienten α im Temperaturbereich 0 ··· 100 °C.

Linearer Ausdehnungskoeffizient α in ^{1}/grd einiger fester Stoffe
(zwischen 0 und 100 °C)

Aluminium	0,000023	Platin	0,000009
Blei	0,000029	Wolfram	0,000004 ··· 9
Eisen, rein	0,000012	Glas	0,000006 ··· 9
Grauguß	0,000009	Quarzglas	0,00000054
Stahl V 2A	0,000016	Invar (64% Fe, 36% Ni)	0,000002
Konstantan	0,000015	Suprainvar (63% Fe,	
Kupfer	0,000016	32% Ni, 5% Co, 0,3% Mn)	0,0000001 ··· 5
Messing	0,000018	Kalkstein	0,000004
Zink	0,000036	Jenaer Pyrexglas	0,0000033

Bemerkenswert niedrig ist der Ausdehnungskoeffizient von geschmolzenem Quarz. Von allen natürlichen Werkstoffen dehnt er sich am wenigsten aus. Daher sind Laborgeräte aus Quarzglas besonders temperaturunempfindlich. Ein glühendes Quarzrohr kann man in kaltes Wasser tauchen, ohne daß es zerspringt. Für manche feinmechanischen Teile, Meßdrähte usw. muß man Invar oder Suprainvar (s. Tabelle) verwenden. Bei sehr langen Gegenständen macht sich die Wärmeausdehnung oft störend bemerkbar: Frei gespannte Drähte können bei großer Kälte reißen, Eisenbahnschienen werden oft durch Stoßfugen getrennt, Brücken und Fachwerke setzt man auf Rollenlager. Bei Rohrleitungen fängt man die Längenänderungen durch elastische Dehnungsglieder ab (Bild 227).

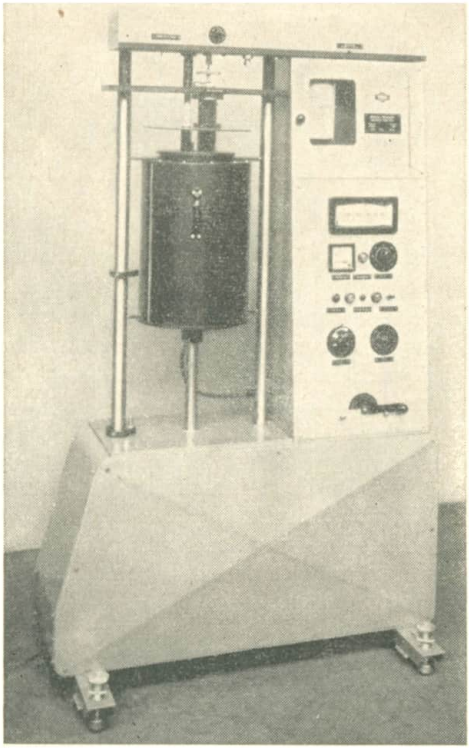


Bild 226. Gerät zur Messung der Wärmeausdehnung. Die Meßprobe befindet sich in dem trommelförmigen elektrischen Heizofen

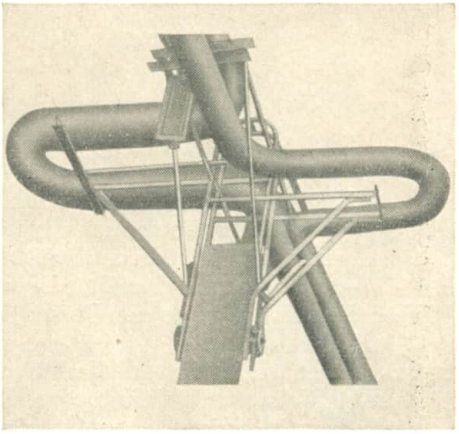


Bild 227. Dehnungsglieder einer Rohrleitung

Beispiele: 1. Um wieviel verlängert sich eine 25 m lange, stählerne Eisenbahnschiene bei Erwärmung um 30 grd ($\alpha = 0{,}000012^1/\text{grd}$)?

– Nach (149) ist $\Delta l = l\alpha \cdot \Delta t = 25\ \text{m} \cdot 0{,}000012\ ^1/\text{grd} \cdot 30\ \text{grd} = 0{,}009\ \text{m} = 9\ \text{mm}$.

2. Als elektrische Sicherung verwendet man häufig *Bimetallstreifen*. Zwei Metallstreifen mit verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten sind der Länge nach zusammengelötet oder -genietet. Bei Stromdurchgang dehnt sich die eine Seite stärker aus als die andere. Der Streifen verbiegt sich und unterbricht einen Kontakt.

3. Das auf Bild 226 wiedergegebene Gerät zur genauen Messung der Wärmeausdehnung enthält ein Quarzrohr, in das die stabförmige Probe eingesetzt wird. Die Differenz der Längenänderung bei fortschreitender Erwärmung wird auf einem Trommelschreiber registriert.

13.3.2. Kubische (räumliche) Ausdehnung

Gesamtvolumen:

(153) $$\boxed{V = V_0\,(1 + \gamma \cdot \Delta t)}$$

Kubischer Ausdehnungskoeffizient:

(154) $$\boxed{\gamma = 3\alpha}$$

Herleitung: Wir gehen zunächst von einem Würfel mit der Kantenlänge l_0 aus. Sein Volumen V_0 bei der Temperatur t_0 beträgt daher l_0^3. Nach Erwärmung um den Unterschied Δt beträgt die Kantenlänge $l_0\,(1 + \alpha\,\Delta t)$ und damit das neue Volumen $V = V_0\,(1 + \alpha\,\Delta t)^3$. Das ergibt ausgerechnet: $V_0\,(1 + 3\alpha\,\Delta t + 3\alpha^2\,\Delta t^2 + \alpha^3\,\Delta t^3)$. Nun ist α ohnehin schon eine sehr kleine Zahl, so daß die Glieder mit α^2 und erst recht mit α^3 im Verhältnis zu $3\alpha \cdot \Delta t$ vernachlässigt werden können.

Um den kubischen Ausdehnungskoeffizienten γ zu erhalten, braucht man daher nur die entsprechenden α-Werte mit dem Faktor 3 zu multiplizieren. Da man sich jeden Körper aus einzelnen kleinen Würfeln zusammengesetzt denken kann, gilt der kubische Ausdehnungskoeffizient für Körper *von beliebiger Gestalt*, d. h. *auch für hohle Körper*.

Nach einem ganz entsprechenden Gedankengang erhält man den

Ausdehnungskoeffizient für Flächen:

$$\boxed{\beta = 2\alpha}$$

Als unmittelbare Folge der räumlichen Ausdehnung muß sich bei jedem Temperaturwechsel die **Dichte** des betreffenden Stoffes ändern. Aus diesem Grund kann die Dichte eines Stoffes nur bei gleichzeitigem Vermerk der Temperatur genau angegeben werden. Bezeichnet man die Dichte bei der Anfangstemperatur t_0 mit $\varrho_0 = \frac{m}{V_0}$ und hat sie bei der beliebigen Temperatur t den Wert $\varrho = \frac{m}{V}$, so kann man in den zweiten Ausdruck das Volumen V nach Gleichung (153) einsetzen. Man erhält dann $\varrho = \frac{m}{V_0(1 + \gamma \cdot \Delta t)}$. Setzt man den Quotienten $\frac{m}{V_0} = \varrho_0$ ein, dann ergibt sich

(155) $$\boxed{\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta t}}$$ **Dichte ϱ in Abhängigkeit von der Temperatur**

Bei Flüssigkeiten, insbesondere beim *Wasser*, treten jedoch gegenüber diesem einfachen Gesetz derart starke Abweichungen auf, daß es sich empfiehlt, eine entsprechende *Dichtetabelle* zu verwenden. Beim Wasser liegt der besondere Fall vor, daß es bei 4 °C seine größte Dichte hat **(Dichteanomalie)** (Bild 228).

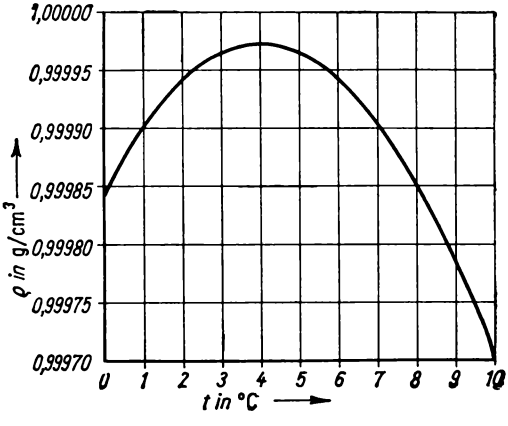


Bild 228. Dichte des Wassers von 0···10 °C

Dichte des Wassers

Temperatur in °C	Dichte in g/cm³	Temperatur in °C	Dichte in g/cm³	Temperatur in °C	Dichte in g/cm³
0	0,999841	7	0,999902	14	0,999244
1	0,999900	8	0,999849	15	0,999099
2	0,999941	9	0,999781	16	0,998943
3	0,999965	10	0,999700	17	0,998774
4	0,999973	11	0,999605	18	0,998595
5	0,999965	12	0,999498	19	0,998405
6	0,999941	13	0,999377	20	0,998203

Kubischer Ausdehnungskoeffizient γ in 1/grd einiger Flüssigkeiten (bei 18 °C)

Äther	0,00162	Schwefelsäure	0,00055
Äthylalkohol	0,00110	Quecksilber in Jenaer	
Benzol	0,00106	Thermometerglas Nr. 16	0,000157 (scheinbar)
Petroleum	0,00096	Nr. 2954	0,000163 (scheinbar)
Quecksilber	0,000181		
Wasser	0,00018		

Bei der Ausdehnung von *Flüssigkeiten in Gefäßen* rechnet man mit dem **scheinbaren kubischen Ausdehnungskoeffizienten.** Während sich die Flüssigkeit je Grad und Raumteil um γ ausdehnt, nimmt auch das Fassungsvermögen des Gefäßes je Grad und Raumteil um 3α zu. Damit beträgt der

$$\text{scheinbare Ausdehnungskoeffizient: } \gamma_{sch} = \gamma_{Flüss} - 3\alpha_{Gefäß}$$

Beispiele: 1. Ein Aluminiumgefäß von 1,5 Liter Inhalt wird von 15 °C auf 100 °C erwärmt. Wie groß ist die Volumenzunahme? – Mit $\gamma = 3\alpha = 0{,}000069$ 1/grd ist $\Delta V = V_0 \gamma \Delta t =$ $= 1{,}5\ \text{l} \cdot 0{,}000069\ ^1/_{\text{grd}} \cdot 85\ \text{grd} = 0{,}0088\ \text{l} = 8{,}8\ \text{cm}^3$.

2. Der scheinbare Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber ($\gamma = 0{,}000181\ ^1/_{\text{grd}}$) in einem Glasgefäß ($\alpha = 0{,}000006\ ^1/_{\text{grd}}$) beträgt $\gamma_{sch} = \gamma - 3\alpha = (0{,}000181 - 0{,}000018)\ ^1/_{\text{grd}} =$ $= 0{,}000163\ ^1/_{\text{grd}}$.

13.4. Ausdehnung der Gase

13.4.1. Gesetz von Gay-Lussac

Mit steigender Temperatur nimmt auch das Volumen der Gase zu. Man hat für den Volumenausdehnungskoeffizienten folgende Werte ermittelt:

Volumenausdehnung einiger Gase

Luft	$\gamma = 0{,}003674\ ^1/_{\text{grd}}$	Helium	$\gamma = 0{,}003660\ ^1/_{\text{grd}}$
Wasserstoff	$\gamma = 0{,}003663\ ^1/_{\text{grd}}$	Kohlendioxid	$\gamma = 0{,}003726\ ^1/_{\text{grd}}$

Aus diesen Zahlen erkennt man, daß für alle Gase γ nahezu den gleichen Wert hat. Diese praktisch gleiche Ausdehnung aller Gase wurde zuerst von dem französischen Gelehrten GAY-LUSSAC[1]) festgestellt:

Gesetz von Gay-Lussac für konstanten Druck:

(156) $$\boxed{V = V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta t)} \quad (V_0 \text{ Volumen bei } 0\,^\circ\text{C})$$

Auch dieses Gesetz stellt ebenso wie die entsprechenden Gleichungen (151) und (153) für die festen und flüssigen Körper nur eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse dar. Seine Gültigkeit wird vor allem dadurch eingeschränkt, daß alle Gase bei niederer Temperatur und hohem Druck in den flüssigen Zustand übergehen und sich schon vor diesem Übergang größere Abweichungen bemerkbar machen. Andererseits werden aber die aus dem GAY-LUSSACschen Gesetz resultierenden weiteren Gleichungen der Wärmelehre besonders einfach und übersichtlich, wenn man annimmt, daß es exakt gültig sei. Dies führte zur Definition des **idealen Gases:**

Das ideale Gas befolgt in allen Temperaturbereichen streng sowohl das Gay-Lussacsche als auch das Boyle-Mariottesche Gesetz.

Dieses Verhalten des idealen Gases kann man dadurch begründen, daß man seine kleinsten Teilchen als *punktförmig* annimmt und die wahre Größe der Atome bzw. Moleküle vernachlässigt. Außerdem muß man voraussetzen, daß zwischen diesen Teilchen *keinerlei* Kräfte bestehen. Man muß also auch über die in Wirklichkeit stets vorhandenen, wenn auch schwachen Kohäsionskräfte in den Gasen hinwegsehen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Gleichungen (151) und (153) und dem GAY-LUSSACschen Gesetz besteht darin, daß jetzt V_0 *nicht ein beliebiges* Anfangsvolumen, sondern das Volumen bei 0 °C bedeutet. Der Ausdehnungskoeffizient γ ist daher nur für diese Ausgangstemperatur 0 °C definiert.

$$\boxed{\gamma = 0{,}003661\ ^1/\text{grd} = \frac{1}{273{,}15}\ ^1/\text{grd}}$$

Ausdehnungskoeffizient des idealen Gases (bezogen auf das Volumen bei 0 °C)

Hiernach dehnt sich das ideale Gas z. B. zwischen 19 °C und 20 °C nicht um den gleichen Bruchteil seines Volumens, sondern um den gleichen *Betrag* aus wie zwischen 0 °C und 1 °C.

Bei gewöhnlicher Temperatur, d. h. weit vom Verflüssigungspunkt entfernt, verhalten sich Wasserstoff und Helium praktisch wie das ideale Gas. Das trifft auch bei den übrigen in der technischen Praxis vorkommenden Gasen meistens zu, so daß man in vielen Fällen mit dem GAY-LUSSACschen Gesetz rechnen kann, ohne größere Fehler zu begehen.

Wenn das erwärmte Gas in einem Gefäß eingeschlossen ist, kann es seinem Ausdehnungsbestreben nicht folgen, sein *Volumen* bleibt *konstant*. Dafür muß sich jetzt bei Erwärmung sein Druck ändern. Um diesen Druck zu berechnen, kann man von der Temperatur 0 °C ausgehen, bei der das Gas den Druck p_0 und das Volumen V_0

[1]) 1778 bis 1850

haben möge. Durch Erwärmen auf die Temperatur t erlangt es nach Gleichung (156) bei unverändertem Druck das Volumen

$$V = V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta t).$$

Wird es jetzt bei konstant bleibender Temperatur wieder auf das ursprüngliche Volumen V_0 zusammengedrückt, so geht das nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE (11.4.3.) vor sich, und der Druck steigt auf p:

$$pV_0 = p_0 V.$$

Nach Einsetzen des Wertes für V entsteht daraus

$$pV_0 = p_0 V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta t).$$

Kürzt man noch mit V_0, so entsteht

(157) $$\boxed{p = p_0 (1 + \gamma \cdot \Delta t)}$$ **Gesetz von Gay-Lussac bei konstantem Volumen** (p_0 Druck bei 0 °C)

Es besagt, daß der Druck eines eingeschlossenen Gases bei zunehmender Temperatur linear anwächst. Die Zahl γ nennt man den **Spannungskoeffizienten.** Auch dieser ist bei den meisten Gasen ungefähr gleich groß und – wie aus dieser Ableitung hervorgeht – beim idealen Gas gleich dessen Ausdehnungskoeffizienten.

Der γ-Wert für Luft läßt sich durch folgenden einfachen Versuch bestimmen (Bild 229). Die in einem Glaskolben eingeschlossene Luft wird in einem wassergefüllten Kochtopf von t_1 auf t_2 erwärmt. Zu den am angeschlossenen Quecksilbermanometer abgelesenen Drücken ist noch der äußere Luftdruck (Barometerstand) zu addieren. Es gilt dann mit den absoluten Drücken p_1 und p_2

$$p_1 = p_0 (1 + \gamma t_1), \quad \text{wonach} \quad p_0 = \frac{p_1}{1 + \gamma t_1}$$

$$p_2 = p_0 (1 + \gamma t_2) \qquad p_0 = \frac{p_2}{1 + \gamma t_2}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten erhält man

$$\frac{p_1}{1 + \gamma t_1} = \frac{p_2}{1 + \gamma t_2} \text{ und hieraus } \gamma = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t_2 - p_2 t_1}.$$

Beispiele: 1. Ein luftgefülltes Gefäß werde bei 0 °C verschlossen und dann von außen erwärmt. Bei welcher Temperatur steigt der Innendruck auf das Doppelte? – Man setzt $\frac{p}{p_0} = \frac{2}{1} = 2$. Dann wird nach (157) $t = \left(\frac{p}{p_0} - 1\right) \cdot \frac{1}{\gamma}$ d. h. $t = (2 - 1) \cdot 273{,}15\,\text{grd} = 273\,°\text{C}$.

2. Bei der Explosion von Sprengstoffen entwickeln sich Gasmassen von hoher Temperatur. Demzufolge entstehen große Druckwirkungen.

3. Erwärmte Luft hat infolge ihres bei gleichem Druck größeren Volumens eine geringere Dichte und steigt daher in der Atmosphäre nach oben: warme Aufwinde, Heißluftballon (Bild 230), Zug des Schornsteins.

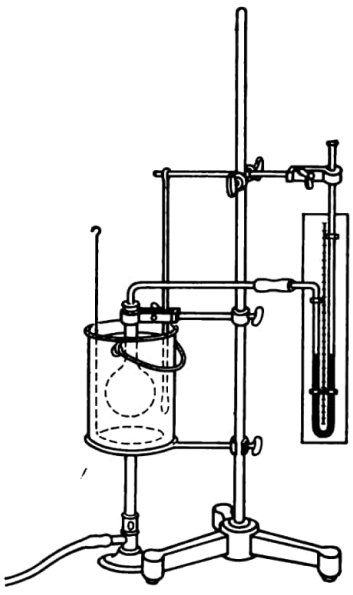


Bild 229. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der Luft



Bild 230. Mit Ölflamme geheizter Heißluftballon

13.4.2. Absolute Temperatur

Was für die Erwärmung des Gases ausgesprochen ist, gilt entsprechend auch bei der Abkühlung: Sein Volumen muß je Grad um den gleichen Betrag γ abnehmen. Man kann das grafisch darstellen (Bild 231) und erhält dabei eine gerade Linie. Bei weiterer Fortsetzung erreicht diese Gerade schließlich das Volumen 0. Dies müßte bei der Temperatur $t = -273{,}15\,°C$ eintreten, denn nach (156) ist dann $V = V_0\left(1 - \frac{273{,}15}{273{,}15}\right) = 0$. Man zieht hieraus den Schluß, daß eine *noch tiefere* Temperatur *nicht* existieren kann, da das Volumen V dann negativ werden müßte. Das aber ist physikalisch undenkbar. Man nennt diese Temperatur den **absoluten Nullpunkt.** Hier entsteht allerdings eine gedankliche Schwierigkeit; denn einerseits kann ein Gas niemals verschwinden, andererseits werden alle wirklichen (realen) Gase flüssig, wobei das GAY-LUSSACsche Gesetz ungültig wird. Diese Erklärung des absoluten Nullpunktes stützt sich demnach zunächst nur auf das ideale Gas. Der tiefere Sinn dieses Punktes liegt aber darin, daß hier die Moleküle keine kinetische Energie mehr enthalten. Das untere Ende der Temperaturskale wäre durch völligen Stillstand der Molekularbewegung ausgezeichnet.

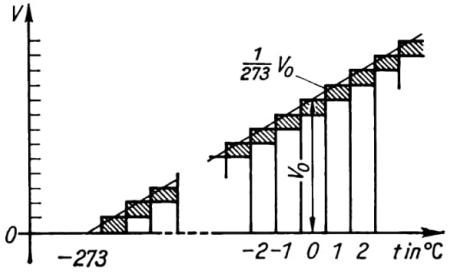


Bild 231. Schrittweise Abkühlung eines Luftvolumens

Es erweist sich vielfach als vorteilhaft, Temperaturen vom absoluten Nullpunkt an zu zählen. Man spricht dann von der *absoluten Temperatur:*

(158) $\boxed{T/°\mathrm{K} = t/°\mathrm{C} + 273{,}15}$ **Absolute Temperatur** T *(Grad Kelvin)*

Dem entspricht auch die **Definition der Celsiustemperatur:**

Der Grad Celsius ist als Temperaturdifferenz gleich dem Grad Kelvin. Die Celsiustemperatur 0 °C entspricht der Kelvintemperatur 273,15 °K.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (Bild 232) läßt sich ohne weiteres der Satz ablesen:

(159) $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}}$ **Das Volumen des idealen Gases ist bei konstantem Druck der absoluten Temperatur proportional**

Aus (157) ergibt sich in entsprechender Weise:

(160) **Der Druck des idealen Gases ist bei konstantem Volumen der absoluten Temperatur proportional:**

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}}$$

(p absoluter Druck; T absolute Temperatur).

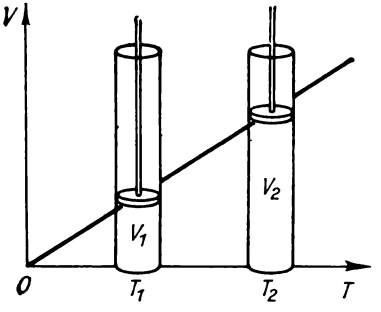


Bild 232. Abhängigkeit des Volumens von der absoluten Temperatur

Beispiel: Eine Stahlflasche enthält bei 25 °C Sauerstoff von 150 at Überdruck. Wie ändert sich der Druck, wenn die Flasche auf −10 °C abgekühlt wird? – In Gleichung (160) ist der absolute Druck, d. h. einschließlich des äußeren Luftdruckes, einzusetzen. Nimmt man diesen mit 736 Torr = 10000 kp/m² an, so erhält man aus $p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1}$

$$p_2 = \frac{1510\,000 \cdot 263}{298}\ \mathrm{kp/m^2} = 1\,333\,000\ \mathrm{kp/m^2}.$$

Dem entsprechen 132,3 at Überdruck.

13.4.3. Gasthermometer

Mit größerer Genauigkeit als alle anderen Substanzen arbeiten *Gase* als Thermometerfüllung, insbesondere die dem idealen Gas am nächsten kommenden Gase Wasserstoff und Helium. Die gesetzliche Temperaturskale teilt den Zwischenraum zwischen den Festpunkten so ein, wie sich hier das ideale Gas verhalten würde.
Das Prinzip eines **Gasthermometers** zeigt Bild 233. Ein (bis 1600 °C brauchbares) Platingefäß ist mit Wasserstoff gefüllt und steht mit einem Quecksilbermanometer

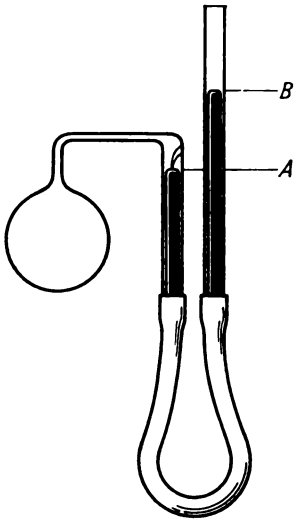


Bild 233. Schema eines Gasthermometers

in Verbindung. Durch Heben bzw. Senken kann der Meniskus bei A stets auf gleicher Höhe bzw. das Volumen konstant gehalten werden, so daß durch den Niveauunterschied von A und B der mit der Temperatur veränderliche *Druck* [Gleichung (157)] gemessen wird. Der äußere Luftdruck ist natürlich mit zu berücksichtigen.

13.5. Zustandsgleichung der Gase

Der Zustand des idealen Gases wird durch die 3 Größen p, V und T gekennzeichnet. Man nennt sie die **3 Zustandsgrößen.** Sie hängen nach dem GAY-LUSSACschen und BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz in bestimmter Weise miteinander zusammen. Im folgenden wird sich zeigen, daß diese Zusammenhänge in einer *einzigen* Gleichung zum Ausdruck gebracht werden können. Da das Volumen eines Gases *sowohl* vom Druck *als auch* von der Temperatur abhängt, denken wir uns einen Vorgang, bei dem sich *beide* Größen *gleichzeitig* ändern.

Wir nehmen die Änderung in 2 Schritten vor, indem wir ein abgeschlossenes Gasvolumen V_1 von der Temperatur T_1 bei konstant gehaltenem Druck p_1 erwärmen (Bild 234). Das Volumen vergrößert sich und wird nach (159) $V' = \frac{V_1 T_2}{T_1}$. Dann drücken wir das Gas auf das Volumen V_2 zusammen. Dabei sorgen wir dafür, daß die Temperatur T_2 erhalten bleibt. Nach dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz (125) wird $V_2 = \frac{V' p_1}{p_2}$. Nach Einsetzen des Wertes für V' wird $V_2 = \frac{V_1 p_1 T_2}{p_2 T_1}$ oder

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}} \quad . \tag{161}$$

Das heißt: Das durch die absolute Temperatur T dividierte Produkt aus dem absoluten Druck p und dem Volumen V hat für alle nur möglichen Zustände einer abgeschlossenen Gasmenge den gleichen Wert, so daß

$$\frac{pV}{T} = \text{konst ist.}$$

13.5.1. Allgemeine Gaskonstante

Die letzte Gleichung ist, wie gesagt, nur unter der Bedingung sinnvoll, daß es sich um eine bestimmte, z. B. in einem Gefäß eingeschlossene Gasmasse handelt. Dann ist es aber vorteilhafter, die Masse m des betrachteten Gases in die Rechnung mit ein-

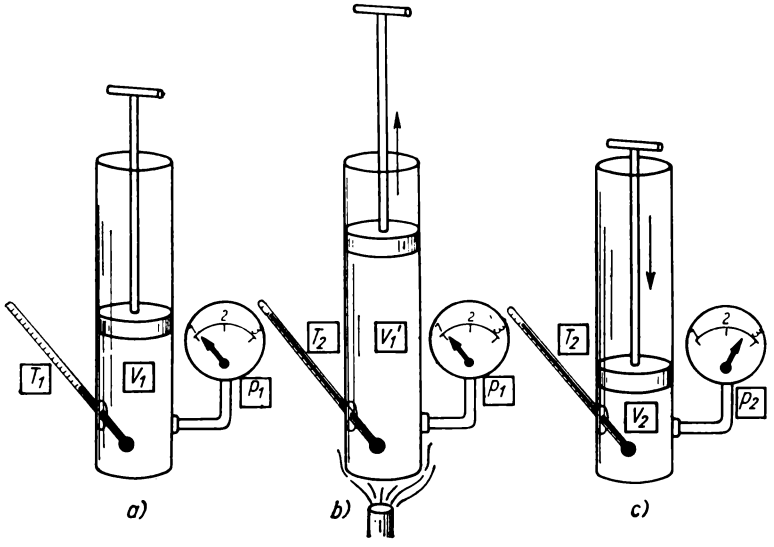


Bild 234. Zur Herleitung der Zustandsgleichung
a) Anfangszustand, b) Erwärmung bei konstantem Druck, c) Zusammenpressen bei konstanter Temperatur

zubeziehen. Da nun die rechte Seite der Gleichung $\frac{pV}{T} = \text{konst}$ ohnehin eine konstante Größe ist, kann man sie auch als Produkt aus der gleichfalls *konstanten Masse m* und einer weiteren Konstanten R auffassen. Letztere bezeichnet man als **Gaskonstante** R. Damit erhält man zunächst

$$\frac{pV}{T} = mR \quad \text{und hieraus}$$

(162) $$\boxed{pV = mRT}$$ **Zustandsgleichung des idealen Gases**

Der Zahlenwert der Gaskonstanten

$$R = \frac{pV}{mT}$$

hängt natürlich von den gewählten Einheiten und der Art des Gases ab. Läßt es sich dabei aber einrichten, daß das Verhältnis $\frac{V}{m}$ bei bestimmten, für den Druck p und die Temperatur T gewählten Werten für *alle* Gase den *gleichen* Wert hat, so muß auch die Gaskonstante R für *alle* Gase den gleichen Wert haben.
Das läßt sich erreichen, indem man von der relativen **Molekularmasse** M des Gases ausgeht. Diese ist gleich der Summe der in einem Molekül enthaltenen relativen Atommassen, z. B. für Kohlendioxid CO_2: $1 \cdot 12 + 2 \cdot 16 = 44$. Ferner schreibt man:

1 Kilomol = M Kilogramm

1 kmol = M kg

Nun stellt das in der Zustandsgleichung stehende Verhältnis $\frac{V}{m}$ bekanntlich das *spezifische Volumen* $v = \frac{1}{\varrho}$ dar, d. h. den reziproken Wert der Dichte ϱ. Es beträgt für Kohlendioxid (CO_2) bei 0 °C und 760 Torr $v = \frac{1\ \mathrm{m^3}}{1{,}977\ \mathrm{kg}} = 0{,}506\ \mathrm{m^3/kg}$. Nach Erweiterung mit der Molekularmasse M und Einsetzen von $M = 44$ erhält man

$$v = \frac{0{,}506\ \mathrm{m^3}\ M}{M\ \mathrm{kg}} \quad \text{oder}$$

$$v = \frac{0{,}506\ \mathrm{m^3} \cdot 44}{M\ \mathrm{kg}} = 22{,}3\ \mathrm{m^3}/M\ \mathrm{kg}\,.$$

Dieses, auf die Masse M kg (also nicht auf 1 kg) bezogene spezifische Volumen nennt man auch das **Molvolumen,** und man kann sich durch entsprechende Rechnungen leicht davon überzeugen:

Das auf M kg bezogene spezifische Volumen (das sogenannte Molvolumen) hat für alle Gase nahezu den gleichen Wert.

Für das ideale Gas ergibt sich das

Molvolumen des idealen Gases bei 0 °C und 760 Torr:

$$v = 22{,}414\ \mathrm{m^3}/M\ \mathrm{kg}$$

Dies folgt auch aus dem

Gesetz von Avogadro:

Gleiche Rauminhalte verschiedener Gase enthalten stets die gleiche Anzahl von Molekülen (Bild 236).

Demnach verhalten sich die in je einem Liter enthaltenen Gasmengen wie ihre Molekularmassen. Geht man also von Massen *verschiedener* Gase aus, die sich wie die relativen Molekularmassen verhalten, so müssen sie den gleichen Raum einnehmen. Wenn man daher für das Verhältnis $\frac{V}{m}$ das Molvolumen v einsetzt, muß auch die Gaskonstante R für *alle Gase ein und denselben Wert* haben. Bei ihrer Berechnung ist lediglich zu beachten, daß der Zahlenwert des vorhin genannten Molvolumens nur



Bild 235. Das Molvolumen

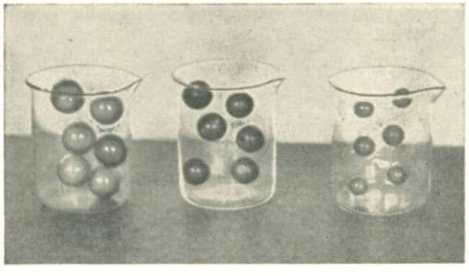


Bild 236. Modell des Gesetzes von AVOGADRO

für den Druck $p = 760$ Torr $= 101325$ N/m² und die Temperatur $T = 273{,}15$ °K zutrifft. Man erhält

$$R = \frac{pV}{mT} = \frac{101325\ \text{N}\ 22{,}414\ \text{m}^3}{\text{m}^3\ M\ \text{kg}\ 273{,}15\ \text{grd}} = 8314\ \text{Ws}/M\ \text{kg grd}.$$

(163) $$\boxed{R = 8314\ \text{Ws}/M\ \text{kg grd}}$$ **Allgemeine (universelle) Gaskonstante R**

oder auch

$$\boxed{R = 848\ \text{kpm}/M\ \text{kg grd}}$$

(da 9,81 Ws = 1 kpm ist)

Die Gaskonstante hat demnach die Einheit einer Arbeit je Kilogramm und Grad. Ihre tiefere Bedeutung wird sich bei der Betrachtung des 1. Hauptsatzes (16.3.) ergeben. Sie hängt aufs engste mit den spezifischen Wärmen der Gase zusammen.

13.5.2. Spezielle Gaskonstante

Wenngleich sich die Zustandsgleichung auch auf den Gesetzen des idealen Gases aufbaut, so ist sie dennoch von größtem praktischem Wert, da sich, wie schon gesagt, die meisten Gase mit guter Annäherung wie das ideale Gas verhalten. Mit ihrer Hilfe kann man immer eine der in der Gleichung enthaltenen Zustandsgrößen berechnen, wenn die übrigen bekannt sind.
Hierbei geht man in der Technik häufig von der *speziellen Gaskonstanten* aus, die sich nicht auf M kg, sondern auf 1 kg des betreffenden Gases bezieht:

Durch Einsetzen der relativen Molekularmasse in die allgemeine Gaskonstante erhält man die spezielle Gaskonstante.

Für Alkoholdampf erhalten wir beispielsweise aus der chemischen Formel C_2H_5OH $M = 46{,}05$ und daraus die Gaskonstante $R = \frac{848\ \text{kpm}}{46{,}05\ \text{kg grd}} = 18{,}4$ kpm/kg grd. Da sich alle Gleichungen auf das ideale Gas beziehen, weichen die damit errechneten Zahlenwerte von den wirklichen Werten meist ein wenig ab.
Diese auf 1 kg bezogenen Werte der Gaskonstanten kann man aus entsprechenden Tabellen entnehmen, die genauere Werte enthalten.
In der Technik hat man es vielfach mit *Gasgemischen* zu tun. Das „Generatorgas" ist beispielsweise eine Mischung aus Kohlenoxid, Wasserstoff und Stickstoff. Ebenso setzt sich auch die Luft aus mehreren Bestandteilen zusammen. In solch einem Fall empfiehlt es sich, erst eine **mittlere Gaskonstante** zu errechnen und dann die Zustandsgleichung anzuwenden. Da sich die Gaskonstante auf die Masseeinheit bezieht, sind hierzu die einzelnen in der Gesamtmasse m enthaltenen Anteile m_1, m_2, ... einzusetzen:

$$\boxed{R_m = \frac{m_1R_1 + m_2R_2 + m_3R_3 + \cdots}{m}}$$ **Mittlere Gaskonstante R_m**

Zahlentafel für Gase

Gas	Molekularmasse M	Gaskonstante R kpm/kg grd	Dichte ϱ bei 0 °C und 760 Torr kg/m³	spezifische Wärme bei 18 °C kcal/kg grd c_p	c_v	$\varkappa = c_p/c_v$ bei 18 °C	krit. Druck p_{krit} at	krit. Temp. t_{krit} °C	Siedepunkt bei 760 Torr °C
Wasserstoff	2,016	420,5	0,0899	3,403	2,417	1,41	13,2	—239,8	—252,8
Sauerstoff	32,000	26,49	1,429	0,218	0,156	1,40	50,8	—118,8	—183,0
Stickstoff	28,013	30,26	1,251	0,248	0,177	1,40	35	—147,1	—195,8
Kohlenoxid	28,011	30,27	1,250	0,249	0,178	1,40	35,7	—140,2	—191,5
Kohlendioxid	44,010	19,26	1,977	0,196	0,151	1,30	75	+ 31,5	— 78,5
Luft	—	29,25	1,293	0,240	0,171	1,40	39	—140,7	—194,4
Wasserdampf	18,015	47,06	0,768	0,48	0,37	1,30	225,7	+374,2	+100,0
Helium	4,003	211,81	0,179	1,25	0,75	1,66	2,34	—267,9	—268,9

Beispiele: 1. Berechne die mittlere Gaskonstante der Luft (rund 79 Volumenprozent Stickstoff und 21 % Sauerstoff). – Die Massenanteile sind gemäß $m = \varrho V$: 0,79 · 1,251 kg = = 0,988 kg Stickstoff und 0,21 · 1,429 kg = 0,300 kg Sauerstoff, zusammen m = 1,288 kg. Dann wird

$$R_m = \frac{m_1 R_1 + m_2 R_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}988 \cdot 30{,}26 + 0{,}3 \cdot 26{,}49)\ \text{kpm}}{1{,}288\ \text{kg grd}} = 29{,}4\ \text{kpm/kg grd}.$$

(Um einen genaueren Wert zu erhalten, muß man auch die übrigen Bestandteile der Luft berücksichtigen.)

2. Ein Zimmer enthält 300 m³ Luft bei 740 Torr und 20 °C. Wieviel wiegt die Luft? – Nach (162) ergibt sich

$$m = \frac{pV}{RT} = \frac{10330\ \text{kp}\ 740\ \text{Torr} \cdot 300\ \text{m}^3\ \text{kg grd}}{\text{m}^2\ 760\ \text{Torr} \cdot 29{,}25\ \text{kpm}\ 293\ \text{grd}} = 352\ \text{kg}\ .$$

3. Luft hat bei einem Druck von p = 10330 kp/m² und bei T = 273,15 °K eine Dichte von 1,293 kg/m³. – Ihre Gaskonstante beträgt nach (162)

$$R = \frac{pV}{mT} = \frac{10330\ \text{kp m}^3}{\text{m}^2\ 1{,}293\ \text{kg}\ 273{,}15\ \text{grd}} = 29{,}25\ \text{kpm/kg grd}.$$

4. Eine Stahlflasche von 10 l enthält 45 g Wasserstoff. Bei welcher Temperatur erreicht der Überdruck 50 at? –

$$\text{Nach (162) ist } T = \frac{pV}{mR} = \frac{510000\ \text{kp}\ 0{,}01\ \text{m}^3\ \text{kg grd}}{\text{m}^2\ 0{,}045\ \text{kg}\ 420{,}5\ \text{kpm}} = 269{,}5\,°\text{K} = -3{,}65\,°\text{C}.$$

5. Es wurde festgestellt, daß eine Substanz bei 445 °C als Gas unter einem Druck von 1 at besteht und dabei eine Dichte von 1,28 kg/m³ hat. Welches ist die Molekularmasse? – Aus (162) gewinnt man

$$R = \frac{Vp}{mT} = \frac{p}{\varrho T} = \frac{10000\ \text{kp m}^3}{\text{m}^2\ 1{,}28\ \text{kg}\ 718\ \text{grd}} = 10{,}88\ \text{kpm/kg grd};$$

$$\text{Aus der Beziehung } \frac{848\ \text{kpm}}{M\ \text{kg grd}} = \frac{10{,}88\ \text{kpm}}{\text{kg grd}} \text{ folgt}$$

$$M = \frac{848}{10{,}88} = 78\ (\text{Benzol } C_6H_6).$$

14. Wärme als Energieform

14.1. Wärmemenge

Es war eingangs gesagt worden, daß die in einem Körper enthaltene Wärme eine *Energiemenge* darstelle. In der Wärmelehre hat es sich als zweckmäßig erwiesen, hierfür eine besondere Maßeinheit zu verwenden. Es ist die

(164) **Einheit der Wärmemenge Q:**
1 cal (Kalorie) = 4,1868 Wattsekunden (Joule).

Mit dieser international getroffenen Festsetzung ist die frühere Definition der Kalorie ungültig geworden. Diese lautete: 1 cal erwärmt 1 g Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C. Sie entsprach einer Energiemenge von 4,1855 J. Die Abweichung ist also nur geringfügig, so daß man in einfachen Fällen noch mit der alten „Wasserkalorie" rechnen kann.
Im täglichen Leben wird oft von „Kalorien" schlechthin gesprochen. Man gibt z. B. an, der Mensch brauche zu seiner Ernährung täglich etwa 3000 Kalorien. Damit sind jedoch stets **Kilokalorien** (1 kcal = 1000 cal) und nicht Kalorien (cal) gemeint.
Die Beziehungen der Kalorie zu den übrigen Energieeinheiten ergeben sich durch einfache Umrechnung. So kann man beispielsweise leicht ausrechnen, wieviel Kilopondmeter, der viel gebrauchten Einheit der mechanischen Arbeit, einer Kilokalorie entsprechen. Man braucht nur daran zu denken, daß 1 kpm = 9,80665 Joule ist:

$$1\ \text{kcal} = \frac{1000 \cdot 4{,}1868\ \text{J}}{9{,}80665\ \text{J/kpm}} = 426{,}9\ \text{kpm}.$$

Man nennt dieses Verhältnis in veralteter Ausdrucksweise auch oft das „mechanische Wärmeäquivalent":

(165) **1 kcal = 426,9 kpm**

Umrechnung von Energieeinheiten

	erg	kpm	Wattsekunden Ws (Joule)	Kilowattstunden kWh	cal
1 erg =	1	$1{,}01972 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-14}$	$2{,}3884 \cdot 10^{-8}$
1 kpm =	$9{,}80665 \cdot 10^{7}$	1	9,80665	$2{,}73407 \cdot 10^{-6}$	2,3422
1 Ws =	$1 \cdot 10^{7}$	0,101972	1	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$	0,23889
1 kWh =	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	$3{,}67098 \cdot 10^{5}$	$3600 \cdot 10^{3}$	1	$860 \cdot 10^{3}$
1 cal =	$4{,}1868 \cdot 10^{7}$	0,42694	4,1868	$1{,}1630 \cdot 10^{-6}$	1

Diese Zahlen gelten für die *restlose* gegenseitige Umwandlung der verschiedenen Energiearten. Beispielsweise verwandelt sich mechanische Arbeit in vielen Fällen ohne unser Zutun in Wärmeenergie.
Wenn dabei mechanische Energie zu verschwinden scheint (z. B. beim Ablaufen einer Taschenuhr), entsteht eine entsprechende *Wärmemenge*. Wegen ihrer Geringfügigkeit

wird das oft übersehen. Wie groß diese Wärmemenge ist, hängt nicht vom Ergebnis eines entsprechenden Experimentes ab, sondern ergibt sich aus der genannten Definition. Somit bringt auch das früher häufig so genannte „elektrische Wärmeäquivalent"

1 Kilowattstunde (kWh) = 860 kcal

nichts anderes als wiederum die gesetzliche Definition der Kalorie zum Ausdruck, wobei lediglich andere Einheiten gewählt sind.

Beispiel: Welche Wärmemenge entsteht in jeder der 4 Bremsen eines 5-t-Kraftwagens, der aus einer Geschwindigkeit von 36 km/h zum Stillstand abbremst? – Seine kinetische Energie beträgt $W_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{5000\,\text{kg}\,100\,\text{m}^2}{2\text{s}^2} = 250000\,\text{Ws} = \frac{250000\,\text{Ws}\cdot\text{kcal}}{4186{,}8\,\text{Ws}} =$ $= 60$ kcal, d. h. je Rad 15 kcal.

14.2. Spezifische Wärme

14.2.1. Spezifische Wärme fester und flüssiger Stoffe

In vielen Fällen bewirkt die einem Körper zugeführte Wärmeenergie nichts weiter als eine Erhöhung seiner Temperatur. Soll hierbei eine bestimmte Endtemperatur t_2 erreicht werden, so hängt die erforderliche Wärmemenge nicht nur von der Anfangstemperatur t_1, d. h. also von der Differenz $(t_2 - t_1)$ ab, sondern auch von der Masse m und der Art des zu erwärmenden Stoffes. Von den gleichen Faktoren hängt auch die Wärmemenge ab, die einem Körper *entzogen* werden muß, wenn er sich *abkühlen* soll.
Die Überlegung führt daher zu dem Ausdruck:

(166) $\boxed{Q = cm\,(t_2 - t_1)}$ **zu- oder abgeführte Wärmemenge Q**

Der Proportionalitätsfaktor c ist

$\boxed{c = \frac{Q}{m\,(t_2 - t_1)}}$ **spezifische Wärme c**

Die zugeordnete Einheitengleichung lautet

$$[c] = \frac{[Q]}{[m]\,[t_2 - t_1]} = \frac{\text{kcal}}{\text{kg grd}}\,.$$

Einheit der spezifischen Wärme c: 1 kcal/kg grd

Wie man den Begriff der spezifischen Wärme veranschaulichen kann, ist auf Bild 237 gezeigt. Drei Stücke aus verschiedenen Metallen, aber *gleich großer Masse* sind zunächst durch Einhängen in siedendes Wasser auf *gleiche Temperatur* gebracht worden. Hiernach auf einen Paraffinblock gestellt, bringen sie ganz verschieden große Paraffinmengen zum Schmelzen.

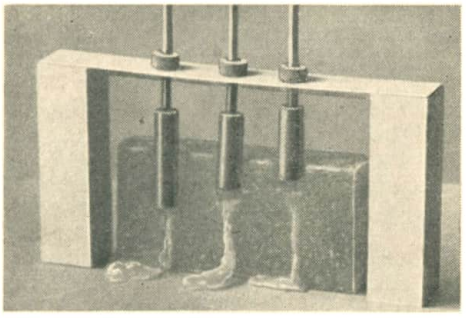


Bild 237. Gleiche Massen aus Aluminium, Eisen und Blei von gleicher Temperatur bringen verschiedene Paraffinmengen zum Schmelzen: verschiedene spezifische Wärmen

Da die spezifische Wärme temperaturabhängig ist, gelten Tabellenwerte genau nur für die angegebene Bezugstemperatur.

Spezifische Wärme c einiger fester und flüssiger Stoffe bei 20 °C (in kcal/kg grd)

Aluminium	0,214	Blei	0,031	Ziegelmauerwerk	0,22
Eisen, rein	0,111	Platin	0,032	dichte Gesteine	0,21
Grauguß	0,129	Quecksilber	0,033	Leichtbenzin	0,50
Kupfer	0,092	Holz	0,57	Äthylalkohol	0,577
Zink	0,092	Glas	0,17 ··· 0,20	Wasser	0,9990
Silber	0,056	Quarzglas	0,174		

Das Wasser hat demnach von allen festen und flüssigen Stoffen die größte spezifische Wärme. Damit erklären sich manche Klimaunterschiede. In der Nähe großer Wassermassen, auf Inseln und in Küstennähe, wirkt das im Sommer sich nur langsam erwärmende Wasser kühlend; im Winter dagegen wirkt es wie ein großer Wärmespeicher: *Seeklima* mit geringen jahreszeitlichen Temperaturgegensätzen.

Eine weitere Eigentümlichkeit der Wärmeenergie ist es, von einem Körper höherer Temperatur leicht auf einen anderen von niederer Temperatur überzugehen, bis schließlich eine einheitliche Temperatur erreicht ist. Der Ausgleich geht besonders schnell vor sich, wenn die Körper leicht miteinander vermengt werden können, wie z. B. zwei Flüssigkeiten, in Wasser geworfene Metallspäne o. ä.

Die erreichte **Mischtemperatur** sei mit t_m bezeichnet. Dabei gibt der warme Körper die Wärmemenge $Q = c_1 m_1 (t_1 - t_m)$ ab, wodurch er sich auf die Mischtemperatur abkühlt. Der kalte Körper nimmt *dieselbe* Wärmemenge $Q = c_2 m_2 (t_m - t_2)$ auf, wobei er die Temperatur t_m annimmt. Dies drückt sich aus in der

Richmannschen Regel:

(167) **abgegebene Wärme = aufgenommene Wärme**

$$c_1 m_1 (t_1 - t_m) = c_2 m_2 (t_m - t_2)$$

Bei der gegenseitigen Mischung zweier Wassermengen ist selbstverständlich $c_1 = c_2 = 1$ kcal/kg grd.

Beispiele: 1. Ein Wannenbad mit 80 kg Wasser von 75 °C soll auf 45 °C abgekühlt werden. Wieviel kaltes Wasser von 16 °C muß zugegossen werden? – Aus der letzten Gleichung findet man

$$m_2 = \frac{c_1 m_1 (t_1 - t_m)}{c_2 (t_m - t_2)} = \frac{80\,\text{kg}\,(75 - 45)\,\text{grd}}{(45 - 16)\,\text{grd}} = 83\,\text{kg}\,.$$

2. Welche Temperatur hat ein glühender Stahlbolzen ($c = 0{,}12$ kcal/kg grd) von 0,25 kg, der zum Abschrecken in 2 kg kaltes Wasser von 15 °C geworfen wird? Das Wasser habe sich dabei auf 30 °C erwärmt. –
Man bezeichnet die unbekannte Temperatur des Bolzens ($m_1 = 0{,}25$ kg, $c_1 = 0{,}12$ kcal/kg grd) mit t_1, die des Wassers ($m_2 = 2$ kg, $c_2 = 1$ kcal/kg grd) mit t_2 und die Mischtemperatur mit $t_m = 30$ °C. Die RICHMANNsche Regel liefert dann die Gleichung

$$\text{abgegebene Wärme} = \text{aufgenommene Wärme}$$

$$c_1 m_1 (t_1 - t_m) = c_2 m_2 (t_m - t_2).$$

Hieraus erhält man durch Auflösen nach t_1

$$t_1 = \frac{c_2 m_2 (t_m - t_2)}{c_1 m_1} + t_m \quad \text{bzw.}$$

$$t_1 = \frac{1 \cdot 2\,(30 - 15)\,\text{grd}}{0{,}12 \cdot 0{,}25} + 30\,°\text{C} = 1030\,°\text{C}.$$

14.2.2. Wärmeinhalt und Wärmekapazität

Unter dem **Wärmeinhalt** *(Enthalpie)* Q_i eines Körpers versteht man die von 0 °C an gerechnete im Körper enthaltene Wärmemenge:

(168) $\boxed{Q_i = cmt}$ **Wärmeinhalt** Q_i

Schließlich versteht man unter der *Wärmekapazität* eines Körpers die zu seiner Erwärmung um 1 grd erforderliche Wärmemenge:

(169) $\boxed{C = cm}$ **Wärmekapazität** C

Mischungsaufgaben, wie die Beispiele 1 und 2 des letzten Abschnittes, kann man anstelle mit der RICHMANNschen Regel auch mit Hilfe der Wärmeinhalte ausrechnen. Man geht hierbei ebenfalls davon aus, daß beim Mischvorgang im idealen Fall keine Wärme verlorengeht. Dann muß die Summe der Wärmeinhalte der beiden Körper *vor* dem Mischen gleich dem gesamten Wärmeinhalt *nach* dem Mischen (Bild 238) sein.

Beispiele: 1. Berechne den Wärmeinhalt von je 1 cm³ Aluminium und Blei bei 20 °C. – Die entsprechenden Massen sind $m = \varrho V = 2{,}72$ g bzw. 11,34 g, so daß nach (168)

$$Q_i = cm \cdot \Delta t = \frac{0{,}214\,\text{cal} \cdot 2{,}72\,\text{g} \cdot 20\,\text{grd}}{\text{g grd}}$$

$Q_i = 11{,}6$ cal (für Aluminium)
bzw. 7,0 cal (für Blei).

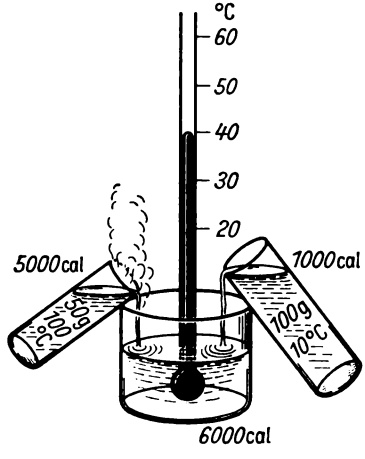


Bild 238. Wärmeinhalt beim Mischen zweier Wassermengen

2. Berechne das Beispiel 2 des letzten Abschnittes mit Hilfe von Wärmeinhalten. Man stellt die Gleichung auf:
Wärmeinhalt des Bolzens + Wärmeinhalt des Wassers = Wärmeinhalt beider Körper

$$c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_m;$$

$$t_1 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2)\, t_m - c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1} = \frac{c_2 m_2 (t_m - t_2)}{c_1 m_1} + t_m \text{ (wie vorhin)}.$$

14.2.3. Bestimmung der spezifischen Wärme fester und flüssiger Stoffe

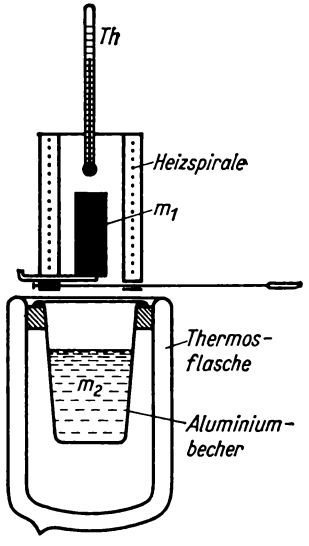


Bild 239. Bestimmung der spezifischen Wärme

Um die spezifische Wärme c eines *festen* Körpers zu bestimmen (Bild 239), bringt man den vorher gewogenen und dann auf die Temperatur t_1 erwärmten Gegenstand m_1 in ein **Kalorimeter,** das eine betimmte Menge m_2 Wasser enthält, dessen Temperatur t_2 vorher gemessen wurde. Im Kalorimeter stellt sich dabei die Mischtemperatur t_m ein. Um Wärmeverluste nach Möglichkeit zu vermeiden, macht man das Kalorimeter doppelwandig.
Da das Kalorimeter beim Einbringen des zu prüfenden Körpers mit *erwärmt* wird (ebenso die eintauchenden Teile von Thermometer und Rührstab), muß man zuvor seine Wärmekapazität C bestimmen. Diese wirkt sich praktisch so aus, als ob eine bestimmte Wassermasse gleich großer Wärmekapazität zusätzlich miterwärmt wird. Man nennt sie auch häufig den **Wasserwert** dieser Teile. Man kann ihn bei einfachen Messungen gleich der Wärmekapazität $c_3 m_3$ des Gefäßes setzen und den des Thermometers usw. vernachlässigen. (Sonst muß man den Wasserwert durch einen besonderen Mischungsversuch feststellen.)
Zur Berechnung der spezifischen Wärme c kann man die RICHMANNsche Regel verwenden:

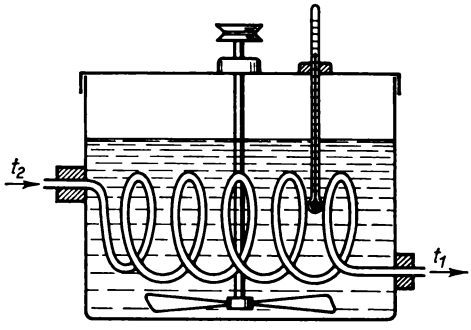
$$c m_1 (t_1 - t_m) = (c_w m_2 + C)(t_m - t_2), \text{ so daß } c = \frac{(c_w m_2 + C)(t_m - t_2)}{m_1 (t_1 - t_m)} \text{ ist.}$$

(c_w spezifische Wärme des Wassers)

14.2.4. Spezifische Wärme der Gase

Um die spezifische Wärme eines Gases, etwa der Luft, zu bestimmen, könnte man zunächst daran denken, ein erwärmtes, mit Luft von der Temperatur t_2 gefülltes, geschlossenes Gefäß in ein größeres Kalorimeter mit Wasser von der Temperatur t_1 zu stellen und die Mischtemperatur zu messen. Da aber der Wärmeinhalt der Gase außerordentlich gering ist und gegenüber dem des Gefäßes praktisch verschwindet,

Bild 240. Bestimmung der spezifischen Wärme eines Gases bei konstantem Druck



ist dieser Weg nicht gangbar. Es bleibt nur der Ausweg, eine erhitzte größere Gasmenge durch eine *Rohrschlange* strömen zu lassen, die in einem Kalorimetergefäß steht (*Strömungsmethode*, Bild 240). Beim Eintritt in das Kalorimeter wird die Temperatur t_2 durch ein *Thermoelement* gemessen, ebenso am Ausgang t_1. Die mit der Gasuhr festgestellte Masse m des Gases hat dann die Wärmemenge $cm\,(t_2 - t_1)$ an das Kalorimeter von der Wärmekapazität C abgegeben, das sich dabei um Δt erwärmt haben möge. Dann ist die gesuchte spezifische Wärme des Gases $c_p = \dfrac{C \cdot \Delta t}{m\,(t_2 - t_1)}$.

Grundsätzlich besteht aber zwischen dem ersterwähnten (in dieser Form praktisch *nicht* durchführbaren) Verfahren und der Strömungsmethode ein Unterschied: Im ersten Fall bleibt während der Messung das **Volumen konstant** (was eine **Druckänderung** im Gefäß zur Folge hat), im zweiten Fall kann sich das Gas ungehindert *ausdehnen* und *zusammenziehen*, wobei der **Druck unverändert** bleibt. Beide Methoden liefern unterschiedliche Werte, die man als

c_v spezifische Wärme bei konstantem Volumen und
c_p spezifische Wärme bei konstantem Druck

bezeichnet.

Einige Zahlenwerte sind in der Tabelle in 13.5.2. mit aufgeführt. Dabei ist immer $c_p > c_v$. Das ist leicht einzusehen; denn wenn sich ein Gas während der Erwärmung ausdehnt, verrichtet es unter Überwindung des äußeren Gegendrucks eine *Arbeit*. Hierfür muß also zusätzliche Energie in Form von Wärme zugeführt werden. Wir werden hierauf noch einmal zurückkommen und dann feststellen, daß die Differenz $c_p - c_v$ gleich der Gaskonstanten ist.

15. Änderungen des Aggregatzustandes

Bei den bisherigen Betrachtungen war davon ausgegangen worden, daß die einem Körper zugeführte Wärmemenge zwangsläufig zu einer Temperaturerhöhung führen müsse. Das braucht aber durchaus nicht immer zuzutreffen; denn es gibt Fälle, in denen die zugeführte Wärme ganz andere Wirkungen hervorruft. Am auffälligsten zeigt sich dies, wenn ein Körper seinen **Aggregatzustand** ändert.

Man unterscheidet aus der Erfahrung heraus **3 Aggregatzustände: fest, flüssig und gasförmig.** Die chemischen Elemente und viele einfache Verbindungen können je nach ihrer Temperatur in allen 3 Zustandsformen existieren. Kompliziertere Verbindungen wie etwa Holz und andere organische Stoffe zersetzen sich bei höheren Temperaturen chemisch. Wir schließen daher solche Stoffe aus den folgenden Betrachtungen aus.

15.1. Schmelzen und Erstarren

Die Ursache der Änderung des Aggregatzustandes ist wieder in der Wärmebewegung der Moleküle zu suchen. Im Kristallaufbau der festen Körper sind die kleinsten Teilchen in streng *geometrischer Ordnung* aneinander gebunden. Sie bilden ein *räumliches Gitter*. Bei Wärmezufuhr wird die Molekularbewegung so heftig, daß das Gitter zerfällt: Der Körper wird *flüssig*.

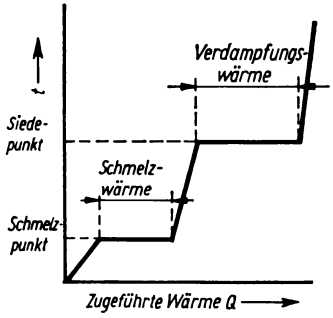


Bild 241. Wärmezufuhr und Temperaturerhöhung eines reinen Stoffes

Um dieses feste Gefüge zum Zerfall zu bringen, ist ein erheblicher Arbeitsaufwand erforderlich. (Man denke dabei an das Spalten von Holz.) Alle während des Schmelzens zugeführte Wärme wird hierzu verbraucht, und solange dieser Vorgang anhält, bleibt die Temperatur konstant. Hierauf beruht die Stabilität des **Schmelzpunktes.** Erst wenn die Umwandlung beendet ist und die Wärmezufuhr weiter andauert, kann die Temperatur der Flüssigkeit weiter ansteigen (Bild 241).

Die zum Schmelzen verbrauchte Energie ist in der Flüssigkeit gleichsam aufbewahrt und wird auch häufig **latente Wärme** genannt. Denn es erweist sich, daß diese Wärme beim Erstarren der Flüssigkeit restlos wieder zum Vorschein kommt. Entzieht man ihr Wärme, so kühlt sie sich zunächst nur bis zum **Erstarrungspunkt,** der mit dem Schmelzpunkt zusammenfällt, ab. Dann bleibt die Temperatur der Flüssigkeit unter stetiger weiterer Wärmeabgabe konstant, bis die Erstarrung beendet ist. Dem Gesetz von der Erhaltung der Energie zufolge sind die zum Schmelzen verbrauchten und beim Erstarren wieder frei werdenden Wärmemengen gleich groß. Bezogen auf je 1 kg des betreffenden Stoffes, nennt man sie die

$$\textbf{spezifische Schmelz- oder Erstarrungswärme } q = \frac{\textbf{zu- oder abgeführte Wärmemenge}}{\textbf{Masse des umgewandelten Stoffes}}$$

Ihre Einheit folgt aus der Gleichung

$$[q] = \frac{[Q]}{[m]} = \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}.$$

Schmelzpunkt und spezifische Schmelzwärme q einiger Stoffe

	Schmelzpunkt in °C	Schmelzwärme in kcal/kg		Schmelzpunkt in °C	Schmelzwärme in kcal/kg
Wasser	0	79,7	Eisen, rein	1539	64
Aluminium	660	94,6	Quecksilber	—38,83	2,7

Nachweis der Erstarrungswärme: Durch Eintauchen eines Glaskolbens in siedendes Wasser wird **Natriumthiosulfat** (Fixiernatron) geschmolzen und der Kolben mit einem Wattebausch verschlossen. Die Schmelze läßt sich hiernach weit unter den Erstarrungspunkt

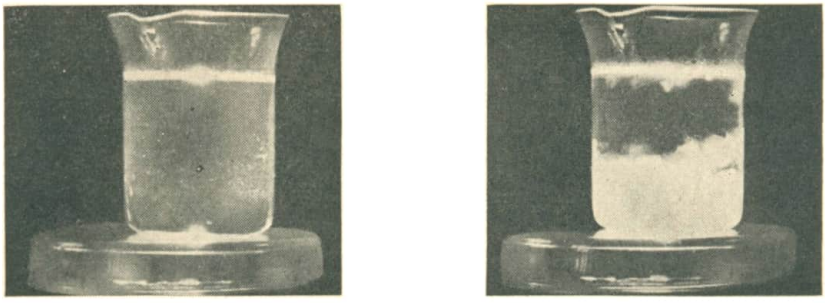


Bild 242. Zum Nachweis der Erstarrungswärme
a) Geschmolzenes und abgekühltes Natriumthiosulfat. b) Beginn der Erstarrung nach Einwerfen eines kleinen Kristalls

abkühlen (Erstarrungsverzug). Wirft man dann in die Schmelze einen kleinen Kristall dieses Salzes (Kristallisationskeim), so erstarrt die Masse zu einem festen Kuchen, wobei beträchtliche Erwärmung eintritt (Bild 242).

Beispiele: 1. Der kalte, über das Wassser streichende Wind erwärmt sich beim Gefrieren eines Sees: Entbindung von Erstarrungswärme.

2. Eis kann man im Eiskeller bis in den Sommer hinein aufbewahren, da es wegen der großen Schmelzwärme nur sehr langsam auftaut.

15.1.1. Besonderheiten beim Schmelzen und Erstarren

Schmelzen und Erstarren finden bei derselben Temperatur statt. *Reine* Stoffe haben *scharf bestimmte* Schmelztemperaturen, die unabhängig von schwankender Energiezufuhr oder -abgabe während des Umwandlungsprozesses konstant bleiben. Daher eignen sie sich besonders gut zur Reproduktion der *thermometrischen Fixpunkte.*
Sobald eine vorliegende Flüssigkeit nicht chemisch rein ist, sondern gelöste Stoffe enthält, ändert sich ihr Erstarrungspunkt. Für Wasser als Lösungsmittel gilt die Beziehung

$$\boxed{\Delta t = n \cdot 1{,}86\,\text{grd}} \quad \textbf{Gefrierpunktserniedrigung } \Delta t \textbf{ wäßriger Lösungen,}$$

wobei n die Anzahl der Mole je Liter Wasser ist.
Sie ist also proportional der *Anzahl* der gelösten *Teilchen* und *nicht* der Masse. Bei Stoffen, die dabei in Ionen zerfallen (Säuren, Basen, Salze), kann Δt wesentlich größer werden. Dies trifft z. B. für Meerwasser zu, das bei etwa —2,5 °C gefriert. Eine gesättigte Kochsalzlösung erstarrt erst bei —21 °C.
Mitunter kann das Erstarren bei der erwarteten Temperatur überhaupt ausbleiben, wenn man die Flüssigkeit vor Erschütterungen schützt und staubfrei aufbewahrt. Man nennt dies **Erstarrungsverzug.** Wasser läßt sich bis —10 °C abkühlen. Dieser Umstand ermöglicht auch die bequeme Durchführung des auf Bild 242 dargestellten Versuches.

Gemenge, wie keramische Massen und Gläser, haben *keinen* genauen Schmelzpunkt, sondern werden langsam weich. Ihre Zähigkeit nimmt mit steigender Temperatur ab. Hierauf beruhen die zur Temperaturmessung in den Öfen der keramischen Industrie benutzten **Segerkegel,** die beim Erreichen einer bestimmten Temperatur umkippen. Sie sind zwischen 600 und 2000 °C verwendbar (Bild 243).

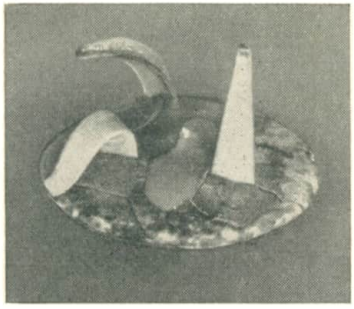


Bild 243. Verschiedene Segerkegel

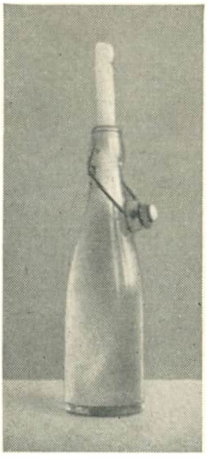


Bild 244. Beim Gefrieren schiebt das Wasser einen Eispfropfen aus der Flasche

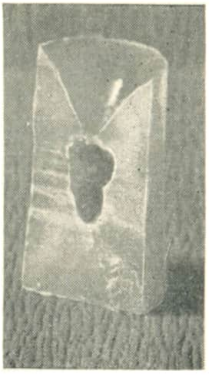


Bild 245. Querschnitt durch im Gefäß erstarrtes Paraffin

Die *Gläser* sind strenggenommen keine festen Körper, da ihnen die Kristallstruktur fehlt. Sie stellen *unterkühlte Schmelzen* dar.

Von vielfacher technischer Bedeutung ist schließlich noch der beim Wechsel des Aggregatzustandes auftretende **Dichtesprung.** Während das Wasser beim Gefrieren sein Volumen um 10 % vergrößert (Bild 244), ziehen sich die meisten anderen Stoffe, wie Paraffin (Bild 245) oder Gußeisen, beim Erstarren zusammen. Daher muß beim Gießen die Form um das *Schwindmaß* größer sein. Es beträgt, auf die Länge bezogen, bei Grauguß 1/96, Messing 1/65 und Blei 1/92.

Die Dichte eines Körpers kann aber auch dadurch verändert werden, daß man ihn einem größeren oder kleineren Druck aussetzt. Daher hängt auch der Schmelzpunkt vom Druck ab. Wenn z. B. Wasser sein Volumen beim Gefrieren vergrößert, so kann das Gefrieren verhindert werden, wenn man die Ausdehnung unterbindet. Sein Schmelzpunkt sinkt bei Druckerhöhung. Daher schmilzt Eis, wenn man es starkem Druck aussetzt.

In umgekehrter Weise verhalten sich Körper, die ihr Volumen beim Erstarren verringern. Hier bewirkt Erhöhung des äußeren Druckes eine Erhöhung des Schmelzpunktes.

Beispiele: 1. Der geringe Reibungswiderstand beim Eislaufen beruht darauf, daß sich infolge des starken Druckes unter dem Schlittschuh ein Wasserfilm bildet.

2. Auf Eisflächen liegende Felsblöcke sinken im Laufe der Zeit ein. Das entstehende Schmelzwasser quillt seitlich heraus und gefriert dann wieder.

3. Flüssiges Kohlendioxid geht durch starken Druck in den festen Zustand über.

15.2. Verdampfen und Kondensieren

Ganz entsprechende Erscheinungen treten auf, wenn ein Körper vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand übergeht. Sie werden allerdings insofern etwas komplizierter, als hinsichtlich der Umwandlungstemperatur und der Umwandlungswärme der von außen einwirkende Druck eine viel größere Rolle spielt.
Der Übergang selbst kann in zweierlei Form vor sich gehen, als **Verdunsten** oder **Sieden.** Im ersten Fall geht er relativ langsam und unabhängig vom Druck bei jeder beliebigen Temperatur vonstatten. Der zweite Fall tritt ein, wenn sich im Innern der Flüssigkeit Dampfblasen bilden, die besonders an den heißen Stellen der Gefäßwand unter Aufwallen an die Oberfläche steigen. Man stellt aber fest, daß der **Siedepunkt** stark vom *Druck* abhängt, unter dem die Flüssigkeit steht. Als *normalen* Siedepunkt bezeichnet man jenen bei 760 Torr.

Siedepunkt und spezifische Verdampfungswärme r bei 760 Torr

	Siedepunkt in °C	Verd.-Wärme in kcal/kg		Siedepunkt in °C	Verd.-Wärme in kcal/kg
Wasser	100	538,9	Eisen, rein	2880	
Quecksilber	357	68	Ammoniak	—33,4	326,8
Äthylalkohol	78,4	201	Schwefeldioxid	—10	93,1
Glyzerin	290		Frigen 12		
Aluminium	2500		(CF_2Cl_2)	—30	40,0

Führt man also einer Flüssigkeit fortlaufend Wärme zu, so steigt ihre Temperatur nur bis zum Siedepunkt. Wenn dieser erreicht ist, bleibt ihre Temperatur konstant, und alle während des Siedens zugeführte Wärme wird zur Verwandlung der Flüssigkeit in Dampf verbraucht. Die Überwindung der Kohäsionskräfte ist mit beträchtlichem Energieaufwand verbunden.

$$\textbf{Spezifische Verdampfungs- oder Kondensationswärme } r = \frac{\textbf{zu- oder abgeführte Wärmemenge}}{\textbf{Masse des umgewandelten Stoffes}}$$

Die beim Verdampfen aufgewandte Wärmeenergie ist in *latenter* Form im Dampf gespeichert und wird in dem Augenblick wieder frei, da dieser Dampf wieder **kondensiert,** d. h. sich zur Flüssigkeit *verdichtet.*
Wie aus obiger Tabelle ersichtlich, ist die Verdampfungswärme des Wassers mit $\approx$ 539 kcal/kg besonders groß. Die Verdampfungswärme r nimmt mit *steigender* Temperatur ab (siehe die Werte für r in der Dampftafel, S. 215).
Beim **Verdunsten** geht eine Flüssigkeit *unterhalb* des Siedepunktes langsam in Dampfform über. Hierzu wird die *gleiche* Wärme wie beim Verdampfen benötigt. In diesem Falle wird sie aber der Umgebung bzw. der Flüssigkeit selbst entzogen, die sich dabei *abkühlt.* Man spricht dann von **Verdunstungskälte,** einer Erscheinung, die uns im täglichen Leben oft begegnet.

Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme des Wassers. Man leitet Dampf von vorher gemessener Temperatur t_2 in ein Kalorimeter (Wärmekapazität C), das die Masse m_1 kalten Wassers von der Temperatur t_1 enthält. Der Dampf kondensiert und bringt das

Kalorimeter auf die Mischtemperatur t_m. Durch nachheriges Wägen stellt man die Masse des kondensierten Dampfes fest. Die vom Kalorimeter aufgenommene Wärmemenge $(C + c_w m_1)(t_m - t_1)$ rührt von 2 Vorgängen her: erstens von der Kondensation der Dampfmenge m_2 und zweitens von der Abkühlung des dabei gebildeten Wassers vom Siedepunkt t_2 auf die Mischtemperatur t_m. Daher die Gleichung:

$$(C + c_w m_1)(t_m - t_1) = r m_2 + c_w m_2 (t_2 - t_m)$$

[c_w spezifische Wärme des Wassers].

Hieraus erhält man

$$r = \frac{(C + c_w m_1)(t_m - t_1) - c_w m_2 (t_2 - t_m)}{m_2} .$$

Versuch: Man leite Druckluft oder Leuchtgas durch ein mit Äther halb gefülltes Reagenzglas, das in einem zweiten, etwas weiteren Glas steckt. Der Zwischenraum ist mit Wasser gefüllt. Nach kurzer Zeit sind beide Gläser zusammengefroren.

Beispiele: 1. In den Heizkörpern der Dampfheizung kondensiert der hindurchströmende Dampf teilweise und gibt dabei 539 kcal/kg Kondensationswärme ab. Somit können große Wärmemengen durch Rohrleitungen transportiert werden.

2. Dampf ist aus dem gleichen Grund ein guter Wärmespeicher.

3. Verlorengehender Dampf bedeutet großen Wärmeverlust, daher der geringe Wirkungsgrad gewöhnlicher Dampflokomotiven. Verwendung der Kondensationswärme des Abdampfes in Kraftwerken zur Fernheizung.

4. Auf die Hand gegossenes Benzin ruft starkes Kältegefühl hervor.

15.2.1. Besonderheiten beim Verdampfen und Kondensieren

Obwohl die Siedetemperatur als Übergang zwischen flüssigem und festem Zustand physikalisch genau definiert ist, tritt häufig **Siedeverzug** ein. Luftfreies Wasser kann man beispielsweise weit über den normalen Siedepunkt erhitzen. Dann setzt die Dampfbildung *verspätet* und stoßweise ein und kann zu gefährlichen Explosionen führen. Beseitigung des Siedeverzuges: Einleiten von Luftbläschen oder Einlegen von scharfkantigen „Siedesteinchen".

Nicht nur Flüssigkeiten, sondern auch feste Körper können unmittelbar in den Dampfzustand übergehen. Man nennt diesen Vorgang **Sublimation** und den entsprechenden Druck anstelle von Dampfdruck häufig **Sublimationsdruck.** Dieser Vorgang wird beispielsweise bei dem technisch wichtigen Verfahren der **Gefriertrocknung** zur Herstellung hitzeempfindlicher chemischer und medizinischer Präparate genutzt. Hier wird das Wasser bei Temperaturen zwischen —60 °C und 0 °C aus der Eisphase absublimiert.

Auf dem umgekehrten Weg gehen auch Gase unter Überspringen des flüssigen Zustandes sofort in den festen Zustand über. Auf diese Weise bilden sich die Schneekristalle. Auch Jod- und Schwefeldampf sublimieren unter Bildung winziger Kristalle.

Der Siedepunkt einer *Lösung* liegt stets *höher* als derjenige des reinen Lösungsmittels.

$$\boxed{\Delta t = n \cdot 0{,}515\ \text{grd}} \qquad \textbf{Siedepunktserhöhung } \Delta t \textbf{ wäßriger Lösungen}$$

wobei n die Anzahl der Mole je Liter Wasser ist.

Es gelten hier die gleichen Bemerkungen wie bei der Gefrierpunktserniedrigung.

Beispiel: Um wieviel erhöht sich der Siedepunkt einer 20%igen Zuckerlösung gegenüber dem des reinen Wassers? – Hier sind in 80 g Wasser 20 g Zucker gelöst, entsprechend 250 g Zucker in 1 l Lösung. Nach der Formel $C_{12}H_{22}O_{11}$ ist ein Mol = 342 g, so daß 1 l Lösung $\frac{250}{342} = 0{,}73$ Mol Zucker enthält. Das ergibt eine Erhöhung des Siedepunktes um

$$\Delta t = 0{,}73 \cdot 0{,}515\ \text{grd} = 0{,}376\ \text{grd}.$$

15.3. Dämpfe

15.3.1. Dampf- und Gaszustand

Wir haben bis jetzt die Ausdrücke „*Dampf*" und „*Gas*" nebeneinander gebraucht, müssen aber im folgenden lernen, daß ein grundsätzlicher *Unterschied* zwischen beiden Zuständen besteht. In einer mit Luft gefüllten Flasche mit angefügtem Quecksilbermanometer liegt ein verschlossenes Gläschen mit Wasser, Alkohol oder einer anderen Flüssigkeit. Durch Schütteln wird es zertrümmert (Bild 246). Augenblicklich steigt das Quecksilber und zeigt einen *höheren* Innendruck an. Nachdem ein bestimmter Teil der Flüssigkeit verdampft ist, bleibt der Druck konstant. Es hat sich zwischen der Flüssigkeit und ihrem Dampf ein **Gleichgewichtszustand** eingestellt. Dieses Gleichgewicht ist dadurch gekennzeichnet, daß hierbei flüssige und gasförmige Phase[1]) eines Stoffes beliebig lange *nebeneinander existieren*, wobei Druck und Temperatur ganz bestimmte, zueinander gehörige Werte aufweisen. In diesem Fall des Gleichgewichtes bezeichnet man die Gasphase als **Dampf** oder noch deutlicher als **gesättigten Dampf.**

Im Gleichgewicht ist der Raum über einer Flüssigkeit mit Dampf gesättigt. Er übt einen Druck aus, den man Dampf- oder Sättigungsdruck nennt. Der Dampfdruck hängt nur von der Temperatur und der chemischen Beschaffenheit der Flüssigkeit ab, nicht aber vom Volumen.

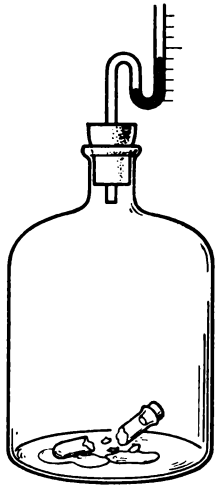


Bild 246. Dampfdruck

[1]) Die einzelnen Aggregatzustände eines bestimmten einheitlichen Stoffes bezeichnet man als „Phasen", wobei auch mehrere unterschiedliche Kristallformen des festen Zustandes als einzelne Phasen gezählt werden

Der Gaszustand kann dagegen nur dann vorliegen, wenn die dazugehörige flüssige Phase als Gleichgewichtspartner fehlt (Bild 247). In Anlehnung an den in der Technik üblichen Sprachgebrauch wird der Gaszustand manchmal als **überhitzter** oder **ungesättigter Dampf** bezeichnet.

Führt man z. B. den beschriebenen Versuch mit einer sehr geringen Flüssigkeitsmenge aus, so verdunstet diese vollständig, und der erzielte Druck ist geringer. Er liegt unterhalb des Sättigungsdruckes. Demzufolge haben wir jetzt physikalisch keinen Dampf, sondern ein Gas vor uns.

Um den Dampfdruck unabhängig von der Anwesenheit anderer Gase zu messen, kann man eine TORRICELLIsche Röhre (S. 146) verwenden,

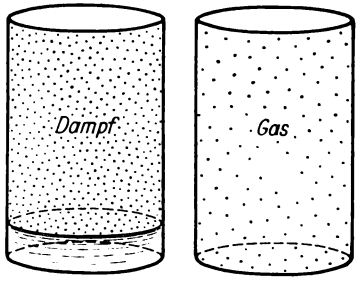


Bild 247. Dampf und Gas

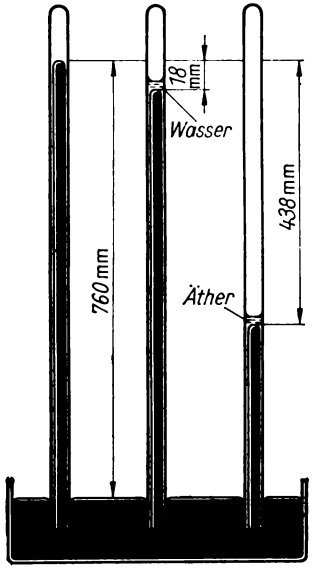


Bild 248. Messung des Dampfdruckes mit einer TORRICELLIschen Röhre

in die man von unten her eine kleine Probe der Flüssigkeit einfüllt (Bild 248). Das über der Quecksilbersäule befindliche Vakuum[1]) füllt sich sofort mit dem betreffenden Dampf, der mit der kleinen Restmenge an Flüssigkeit im Gleichgewicht steht. Die Differenz zwischen dem ursprünglichen und neuen Stand der Quecksilbersäule entspricht dem Dampfdruck.

Im Gegensatz hierzu setzt sich der beim Versuch (Bild 246) erhaltene Druck aus dem anfangs vorhandenen atmosphärischen Luftdruck und dem von der Flüssigkeit hervorgerufenen Dampfdruck zusammen. Diese beiden **Partial-** (Teil-) **drücke** ergeben den *Gesamtdruck*. Grundsätzlich gilt dabei das

> **Daltonsche Gesetz: Jedes Gas erfüllt den ihm dargebotenen Raum so, als ob es allein vorhanden wäre. Der Gesamtdruck mehrerer Gase ergibt sich als Summe der einzelnen Partialdrücke.**

Das Gesetz gilt jedoch exakt nur für ideale Gase, so daß bei dem beschriebenen Versuch und ähnlichen Verhältnissen gröbere Abweichungen auftreten können.

---

[1]) Da auch das Quecksilber bei Zimmertemperatur einen gewissen Dampfdruck hat, ist das Vakuum nicht vollkommen. Doch kann der sehr kleine Dampfdruck des Quecksilbers hierbei vernachlässigt werden

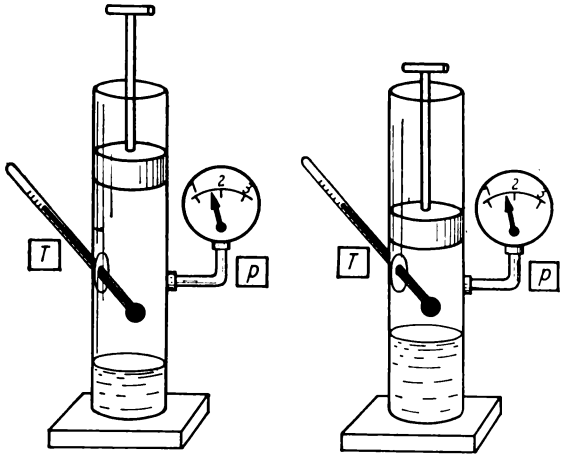


Bild 249. Der Druck eines Dampfes ist bei konstanter Temperatur von seinem Volumen unabhängig

Bei all diesen Vorgängen hat das Volumen keinen Einfluß auf den Dampfdruck.

Versuch: In einem Glaszylinder mit eingeschliffenen Kolben befindet sich heißes Wasser von konstant gehaltener Temperatur. Um den Dampfdruck auszugleichen, sei der Kolben mit einem Massenstück belastet. Man kann nun den Stempel *ohne* Änderung der wirkenden Kraft auf- und abwärts schieben, ein Zeichen dafür, daß der Dampfdruck trotz Volumenänderung konstant bleibt. Bei Vergrößerung des Volumens bildet sich unter lebhaftem Sieden des Wassers neuer Dampf, bei Verkleinerung schlägt sich eine entsprechende Dampfmenge als Wasser nieder (Bild 249).
Deshalb ist auch die Zustandsgleichung der Gase, in denen ja das Volumen eine ausschlaggebende Rolle spielt, für Dämpfe ungültig. Der Dampfdruck hängt vielmehr allein von der Temperatur ab.

Die Zustandsgleichung der Gase gilt für Dämpfe nicht.

Sättigungsdruck einiger Flüssigkeiten bei 20 °C

	Torr		Torr		Torr
Benzol	75	Schwefelkohlenstoff	298	Ramsay-Fett	$10^{-4}\cdots10^{-5}$
Chloroform	160	Wasser	17,535	Apiezonöl	10^{-7}
Äthylalkohol	44	Quecksilber	$1{,}220\cdot10^{-3}$	Öle für	
Diäthyläther	438	desgl. bei 100 °C	0,2713	Vakuumpumpen	$0{,}5\cdots0{,}05$

15.3.2. Dampfdruck und Temperatur

Erwärmt man Flüssigkeiten in verschlossenen Gefäßen, so stellt man fest:

Der Dampfdruck einer Flüssigkeit steigt mit zunehmender Temperatur.

Die jeweils zusammengehörigen Werte von Druck und Temperatur sind in den **Dampftabellen** verzeichnet.
Einen schnelleren Überblick gibt die **Dampfdruckkurve** des Wassers. Wie aus Bild 250 hervorgeht, erreicht die Kurve I bei 100 °C den normalen Luftdruck:

Am Siedepunkt ist der Dampfdruck gleich dem auf der Flüssigkeit lastenden Druck.

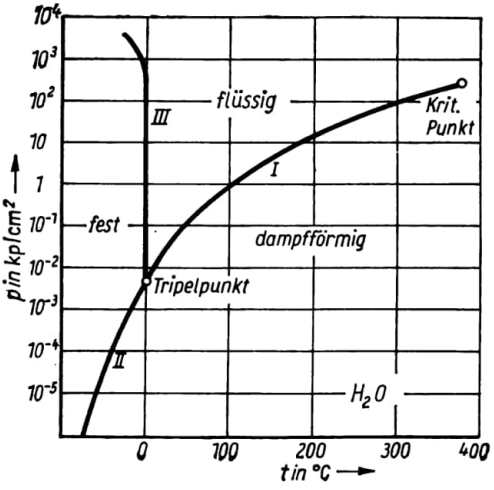


Bild 250. Dampfdruckkurve des Wassers

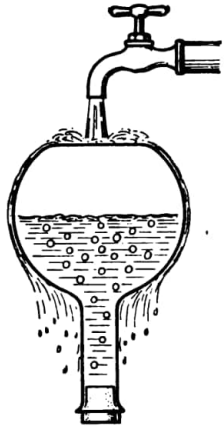


Bild 251. Sieden bei niederer Temperatur

Man ersieht auch aus der Kurve, daß Wasser sogar bei Zimmer- und niedrigerer Temperatur sieden kann, wenn nur der äußere Druck klein genug ist.

Versuch: In einem Glaskolben wird Wasser zum Sieden gebracht. Dann wird der Kolben mit einem Stopfen fest verschlossen und beiseite gestellt (Bild 251). Gießt man nach einer Weile kaltes Wasser über den umgekehrten Kolben, so fängt der Inhalt wieder heftig zu wallen an. Ursache: Kondensieren eines Teiles des über dem Wasser stehenden Dampfes, womit ein niedrigerer Druck entsteht, bei dem das Wasser wieder sieden kann.

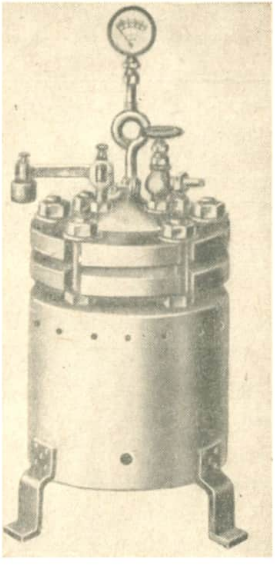


Bild 252. Kleiner Autoklav für 150 at Überdruck

Oberhalb von 100 °C wird der Dampfdruck des Wassers größer als der normale Luftdruck. Der Dampf vermag auf einen Kolben beträchtliche Kraft auszuüben. Man kann das auch umgekehrt ausdrücken: *Wächst* der auf der Wasseroberfläche liegende *Druck*, so *steigt* der *Siedepunkt*. Man kann ihn mühelos weit über 100 °C treiben, wenn man den Kessel zuschraubt: **Papinscher Topf.** In moderner Form findet er als **Autoklav** zum Kochen von Zellulose usw. Verwendung (Bild 252).
Aus der grafischen Darstellung des Dampfdruckes ist noch zu ersehen, daß auch das Eis (Kurve II) einen Dampfdruck hat. Grundsätzlich haben *alle* festen Stoffe einen *Dampfdruck*; bei den festen Metallen ist er unmeßbar gering, während z. B. Naphthalin (Mottenkugeln!) recht kräftig verdunstet.

Dampftabelle für Wasser

Absoluter Dampfdruck p in at	Temperatur t in °C	Raum von 1 kg Dampf v in m³/kg	Dichte des Dampfes ϱ in kg/m³	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i in kcal/kg	Gesamtwärme l in kcal/kg	Verdampfungswärme r in kcal/kg
0,010	6,7	131,6	0,0076	6,73	600,2	593,5
0,015	12,74	89,63	0,0112	12,78	602,9	590,1
0,020	17,20	68,25	0,0147	17,25	604,9	587,6
0,025	20,78	55,27	0,0181	20,82	606,4	585,6
0,030	23,77	46,52	0,0215	23,81	607,8	584,0
0,040	28,64	35,46	0,0282	28,67	609,8	581,1
0,050	32,55	28,72	0,0348	32,57	611,5	578,9
0,1	45,45	14,95	0,0669	45,45	617,0	571,6
0,2	59,67	7,789	0,1284	59,65	623,1	563,4
0,3	68,68	5,324	0,1878	68,66	626,8	558,1
0,4	75,42	4,066	0,2459	75,41	629,5	554,1
0,5	80,86	3,301	0,3029	80,81	631,6	550,8
0,6	85,45	2,782	0,3595	85,47	633,5	548,0
0,7	89,45	2,408	0,4153	89,49	635,1	545,6
0,8	92,99	2,125	0,4706	93,05	636,4	543,3
0,9	96,18	1,903	0,5255	96,26	637,6	541,3
1,0	99,09	1,725	0,5797	99,19	638,8	539,6
1,5	110,79	1,181	0,8467	110,99	643,1	532,1
2,0	119,62	0,902	1,109	119,94	646,3	526,4
2,5	126,79	0,732	1,366	127,2	648,7	521,5
3,0	132,88	0,617	1,621	133,4	650,7	517,3
3,5	138,19	0,534	1,873	138,9	652,4	513,5
4,0	142,92	0,471	2,124	143,7	653,9	510,2
4,5	147,20	0,422	2,372	148,1	655,2	507,1
5,0	151,11	0,382	2,620	152,1	656,3	504,2
6,0	158,08	0,321	3,111	159,3	658,3	498,9
7,0	164,17	0,278	3,600	165,7	659,9	494,2
8,0	169,61	0,245	4,085	171,4	661,2	489,8
9,0	174,53	0,219	4,568	176,5	662,3	485,8
10,0	179,04	0,198	5,051	181,3	663,3	482,1
20,0	211,38	0,102	9,852	215,9	668,5	452,6
25,0	222,90	0,082	12,270	228,6	669,3	440,7
50,0	262,70	0,040	24,839	274,3	667,5	393,2
100,0	309,53	0,018	54,171	334,2	651,7	317,5
200,0	364,08	0,006	161,81	431,3	581,4	150,1

In das Diagramm ist noch eine weitere Linie III eingetragen. Sie stellt die Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Druck dar und verläuft nahezu senkrecht, weil sich der Schmelzpunkt mit dem Druck nur sehr wenig ändert.

Diese 3 Kurven schneiden einander im sogenannten **Tripelpunkt.** Nur in diesem Punkt können die feste, flüssige und gasförmige Phase des Wassers miteinander im Gleichgewicht stehen, d. h. auf die Dauer gemeinsam existieren. Er liegt bei 0,01 °C und

4,58 Torr. Allein bei dieser Temperatur haben Eis und Wasser den gleichen Dampfdruck. Hiernach ist auch die absolute Temperatur definiert:

Der Grad Kelvin ist der 273,16te Teil der Kelvin-Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser.

Die um 0,01 Grad darunter liegende Temperatur 0 °C entspricht demnach, wie schon erwähnt, 273,15 °K.

Beispiele: 1. Bei welcher Temperatur siedet das Wasser in 5000 m Höhe? – Nach 11.4.4. beträgt dort der Druck 405 Torr = 0,55 at, wozu nach der Dampftabelle S. 215 ein Siedepunkt von 83 °C gehört.
2. Schnee und Eis schrumpfen in der Sonne zusammen, ohne vorher zu schmelzen (Dampfdruck des Eises unterhalb des Tripelpunktes!).

15.3.3. Luftfeuchtigkeit

Den in der atmosphärischen Luft enthaltenen Wasserdampf bezeichnet man als **Luftfeuchtigkeit.** Ihre genaue Kenntnis und laufende Überwachung ist für viele Industriebetriebe, wie die Tabakindustrie, Spinnereien, Fernsprechzentralen usw., bedeutsam.

$$\textbf{Absolute Feuchtigkeit } f = \frac{\textbf{Wassermasse}}{\textbf{Luftvolumen}}$$

Der absolute Dampfgehalt der Luft läßt sich direkt bestimmen, indem man eine bestimmte Luftmenge durch einen Gaszähler und ein mit P_2O_5 oder Chlorkalzium gefülltes Trockenrohr saugt. Dieses wird vor- und nachher gewogen, wobei man den Wassergehalt direkt erhält.

Die Luft ist mit Feuchtigkeit **gesättigt,** wenn sie die bei der betrachteten Temperatur *höchstmögliche Dampfmenge* f_{max} enthält. Diese ist mit der Dampfdichte des Wassers für die betr. Temperatur identisch. Denn die Dichte des gesättigten Wasserdampfes ist nichts anderes als die in 1 m³ enthaltene Wassermasse.

Beispiel: Nach der Dampftabelle S. 215 beträgt die Dichte des Wasserdampfes bei 23,8 °C $\varrho = 0{,}0215$ kg/m³ entsprechend einem Sättigungsdruck von 0,030 at = 22,1 Torr. Diese Dampfmenge ist im Raum der atmosphärischen Luft so verteilt, als ob der Dampf dort allein vorhanden wäre (DALTONsches Gesetz S. 212). 1 m³ Luft enthält dann 21,5 g Wasserdampf. Wird dabei ein Luftdruck von beispielsweise 750 Torr gemessen, so setzt sich dieser Druck zusammen aus dem Partialdruck des Dampfes von 22,1 Torr und demjenigen der trockenen Luft im Betrag von (750 — 22,1) Torr = 727,9 Torr.

Im allgemeinen ist jedoch die Luft nur teilweise mit Feuchtigkeit gesättigt, und die absolute Feuchtigkeit f liegt mehr oder weniger unterhalb des Sättigungswertes f_{max}. Dann interessiert in der Praxis nur der *relative* Sättigungszustand, den man in Prozenten der maximalen Luftfeuchtigkeit angibt:

(170) $$\textbf{Relative Feuchtigkeit } \varphi = \frac{\textbf{absolute Feuchtigkeit}}{\textbf{Sättigungsmenge der betr. Temperatur}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{f \cdot 100\,\%}{f_{max}}} \; .$$

Maximale Luftfeuchtigkeit zwischen —10 °C und +34 °C

Temperatur t in °C	Dampfdruck p in Torr	Sättigungsmenge f_{max} in g/m³	t in °C	p in Torr	f_{max} in g/m³
—10	1,95	2,14	16	13,6	13,6
— 5	3,01	3,24	18	15,5	15,4
0	4,58	4,84	20	17,5	17,3
2	5,3	5,6	22	19,8	19,4
4	6,1	6,4	24	22,4	21,8
6	7,0	7,3	26	25,2	24,4
8	8,0	8,3	28	28,3	27,2
10	9,2	9,4	30	31,8	30,3
12	10,5	10,7	32	35,7	33,8
14	12,0	12,1	34	39,9	37,5

Stoffe, die gegen Luftfeuchtigkeit besonders empfindlich sind, nennt man **hygroskopisch:** Kochsalz wird in feuchter Luft naß (zurückzuführen auf seinen Gehalt an hygroskopischem Magnesiumchlorid), Darmsaiten verlängern sich, blaues Kobaltchlorid wird rot. Eine Luftfeuchtigkeit von 50···60 % bezeichnet man als für das menschliche Wohlbefinden **normal.**

Beim Abkühlen feuchter Luft *steigt* die relative Feuchtigkeit, weil die Sättigungsmenge bei niedriger Temperatur geringer ist. Wird dann der Sättigungsdruck überschritten, so kondensiert der überschüssige Wasserdampf, es bilden sich Nebel (in großer Höhe Wolken). Dies geschieht beim sogenannten **Taupunkt.**

> **Unter dem Taupunkt versteht man diejenige Temperatur, bei welcher sich nach Abkühlung** (infolge Überschreitens der Sättigungsmenge) **Wasser aus der Luft abzuscheiden beginnt.**

Zur Messung der Luftfeuchtigkeit dienen:

Haarhygrometer. Einige zwischen den Enden eingespannte, entfettete Frauenhaare bewegen einen Zeiger, der die relative Feuchtigkeit angibt (Bild 254).

Taupunktmesser. Ein Gefäß mit dünner Vorderwand aus Silberblech enthält Äther und ein Thermometer. Durch Einblasen von Luft tritt Abkühlung ein. Wenn der Spiegel beschlägt, ist der Taupunkt erreicht. Als Temperatur nimmt man den Mittelwert zwischen Auftreten und Wiederverschwinden des Beschlages. Ist dies z. B. bei 6 °C der Fall, so ist die absolute Feuchtigkeit laut Tabelle 7,3 g/m³.

Psychrometer. Es besteht aus zwei gleichen Thermometern, von denen das eine durch ein in Wasser tauchendes Läppchen feucht gehalten wird. Infolge der Verdunstungskälte sinkt die Temperatur (t') gegenüber der des trockenen (t). Je trockener die Luft ist, desto intensiver ist die Abkühlung, um so größer die Temperaturdifferenz. Zur Errechnung des Partialdruckes p des Wasserdampfes dient die Gleichung

$$p = p' - kp_L\,(t - t'),$$

wobei p' den Sättigungsdruck bei der Temperatur t' und p_L den Luftdruck in Torr bedeutet. Die Konstante k hat den Wert 0,00066 ^{1}/grd. Bei genaueren Messungen ist

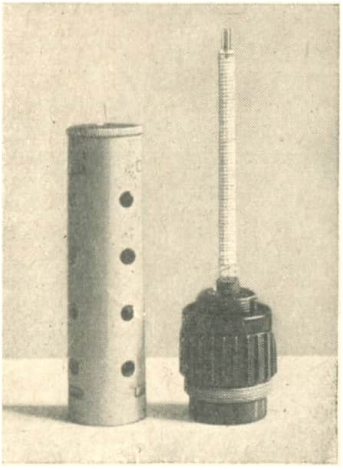


Bild 253. Fühler eines elektrischen Feuchtigkeitsmessers

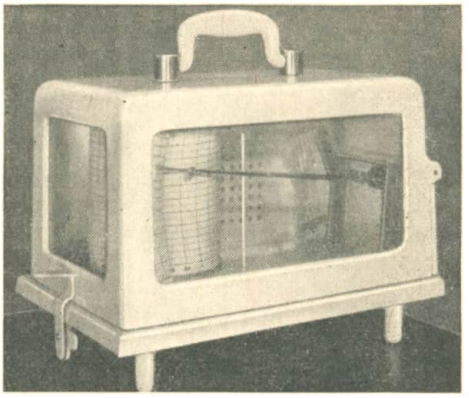


Bild 254. Haarhygrometer mit selbsttätiger Aufzeichnung

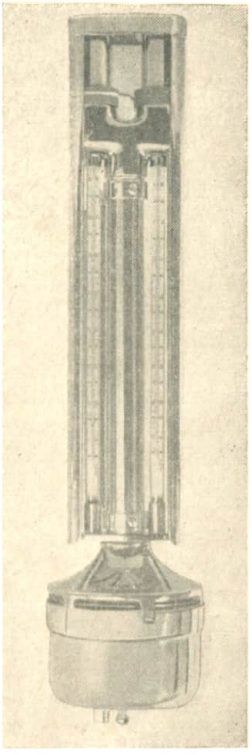


Bild 255. Aspirations-Psychrometer

die Verdunstung durch einen gleichmäßigen Luftstrom von etwa 2 m/s zu regeln. Im **Aspirationspsychrometer** ist hierfür ein kleiner Ventilator eingebaut (Bild 255). Es genügt auch schon, beide Thermometer mittels eines gemeinsamen Handgriffes langsam so lange hin- und herzuschwenken, bis die Temperatur nicht weiter sinkt.

Der auf Bild 253 gezeigte Fühler eines *elektrischen Feuchtemessers* enthält im Innern ein Platinwiderstandsthermometer. Darüber ist ein mit Lithiumchlorid getränkter Schlauch aus Glasgewebe gezogen, auf den zwei als Elektroden dienende Drähte parallel nebeneinander aufgewickelt sind. An ihnen liegt eine konstante Wechselspannung. Bei steigender Luftfeuchtigkeit verringert sich der elektrische Widerstand des stark *hygroskopischen Lithiumchlorids*. Die Stromstärke zwischen den Elektroden steigt und ruft eine Erwärmung des elektrischen Widerstandsthermometers hervor. Das Anzeigeinstrument ist so geeicht, daß es direkt die absolute Feuchtigkeit oder den Taupunkt angibt.

Wenn die Luft frei von **Kondensationskeimen** (Staubteilchen u. dgl.) ist, kann die Kondensation des Wasserdampfes auch ausbleiben. Die bekannten **Kondensstreifen** (Bild 256) hinter in großer Höhe fliegenden Flugzeugen sind ein Zeichen dafür, daß die Luft dort mitunter mit Wasserdampf **übersättigt ist.**



Bild 256. Kondensstreifen hinter Flugzeugen

Beispiele: 1. Welches ist die absolute Feuchtigkeit bei 18 °C und 65 % Sättigung? – Laut Tabelle ist $f_{max} = 15{,}4\,g/m^3$ (also 100 %), bei 65 % demnach $f = 10\,g/m^3$.

2. Welches ist der Taupunkt für diesen Fall? – In der Tabelle findet man ihn bei 11 °C (in der Mitte zwischen 9,4 und 10,7 g/m^3).

3. Man drücke mit dem Mund kräftig Atemluft durch ein Röhrchen in einen Glaskolben. Beim Freigeben der Öffnung füllt sich der Kolben im Moment der Entspannung mit Nebel, der bald wieder verschwindet: Bei der Entspannung kühlt sich die Luft unter den Taupunkt ab.

16. Zustandsänderungen der Gase

Es wurde bereits (13.5.) festgestellt, daß der Zustand eines Gases stets durch 3 Größen eindeutig festgelegt ist: Druck p, Volumen V, Temperatur T. Dieser einmal gegebene Zustand läßt sich auf die verschiedenste Art ändern. Man kann z. B. das Gas zusammenpressen, wodurch sein Volumen kleiner wird und die Temperatur ansteigt. Ebenso verschieben sich die Werte p, V und T, wenn man das Gas erwärmt usw. In welcher Weise hierbei insbesondere Druck und Volumen zusammenhängen, läßt sich mittels eines Diagramms veranschaulichen, dessen Abszisse das Volumen V und dessen Ordinate den Druck p einer bestimmten Gasmenge darstellt (sog. p,V-Diagramm, Bild 257).

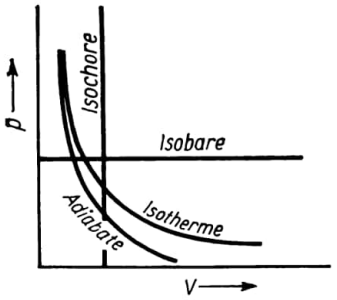


Bild 257. Die 4 Zustandsänderungen

Man unterscheidet die

isochore Zustandsänderung: Während des Vorganges bleibt das **Volumen konstant;**

isobare Zustandsänderung: Während des Vorganges bleibt der **Druck konstant;**

isotherme Zustandsänderung: Während des Vorganges bleibt die **Temperatur konstant;**

adiabatische Zustandsänderung: Vorgang **ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung.**

16.1. Erster Hauptsatz der Wärmetheorie

Selbstverständlich gilt auch in diesen Fällen wie für alle Vorgänge in der Wärmelehre das *Gesetz von der Erhaltung der Energie*. Betrachten wir das ideale Gas, dessen Zustand verschiedenen Änderungen unterworfen wird, so tritt die Energie in 3 Formen auf:

1. die dem Gas **zugeführte** $(+Q)$ oder die vom Gas **abgegebene** $(-Q)$ **Wärmemenge,**
2. die vom Gas **abgegebene** $(+W)$ oder ihm **zugeführte** $(-W)$ **mechanische Arbeit,**
3. die im Gas enthaltene **innere Energie** U, die sich z. B. durch Wärmezufuhr verändern kann.

Mit diesen 3 Größen schreibt man

(171) $$\boxed{Q = \Delta U + W}$$ **I. Hauptsatz der Wärmetheorie** (Energiesatz)

Wird einem Gas die Wärmemenge Q zugeführt, so kann es dadurch seine innere Energie U erhöhen und außerdem mechanische Arbeit W verrichten.

Die vom Gas abgegebene Arbeit kann z. B. darin bestehen, daß es sich bei konstant bleibendem Druck p ausdehnt, also sein Volumen V vergrößert. Man denke dabei an irgendeine Wärmekraftmaschine, bei der auf diese Weise ein Kolben hin- und herbewegt wird. Die Arbeit W wird dann durch das Produkt aus dem Druck p und der Volumenänderung ΔV dargestellt, was man bereits beim Einsetzen der Einheiten erkennt. Setzt man den Druck in kp/m² und das Volumen in m³ ein, so liefert das Produkt die Arbeit in kpm.

Ist der zugeführte Wärmebetrag sehr klein und beachtet man, daß die vom Gas gelieferte mechanische Arbeit $\mathrm{d}W = p \cdot \mathrm{d}V$ ist, so erhält man

(172) $$\boxed{\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}$$

16.2. Isochore Zustandsänderung

Um den Begriff der inneren Energie zu klären, denken wir zunächst an einen *isochoren Vorgang:* Dem in einem festen Behälter eingeschlossenen Gas werde die Wärmemenge $\mathrm{d}Q$ zugeführt. Dann kann das Gas keine Arbeit verrichten, da die Volumenänderung $\mathrm{d}V = 0$ ist und demzufolge auch das Glied $p \cdot \mathrm{d}V$ verschwindet.

Somit verbleibt

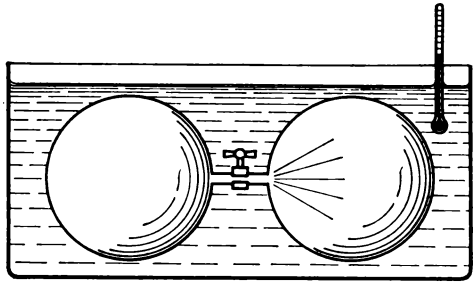
$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U.$$

Die zugeführte Wärmemenge $\mathrm{d}Q$ kann hier also *allein* dazu führen, die *Temperatur* des Gases zu *erhöhen*. Dies geht nach der Gleichung (166) vor sich, so daß

173) $$\mathrm{d}U = mc_v\,\mathrm{d}T.$$

Hierin kommt zum Ausdruck, daß die innere Energie nur von der Temperatur abhängt, da m und c_v konstante Größen sind. Außerdem läßt es sich experimentell beweisen, daß die innere Energie U vom Volumen unabhängig ist.

Bild 258. Versuch von GAY-LUSSAC



Um dies zu bestätigen, hat GAY-LUSSAC folgenden berühmt gewordenen Versuch gemacht: Ein luftgefülltes und ein luftleeres Gefäß stehen nebeneinander in einem Kalorimeter (Bild 258). Öffnet man den beide Gefäße verbindenden Hahn, so strömt die Luft in das Vakuum über. Hierbei wird ganz offenkundig keine Arbeit nach außen abgegeben. Vor allem zeigt sich, daß im Kalorimeter keine Temperaturänderung eintritt und das Gas auch keine Wärme aufnimmt oder abgibt. In Gleichung (172) nehmen also die Größen dQ und $p\,dV$ den Wert 0 an. Daher muß auch die Änderung der inneren Energie dU gleich Null sein, was wiederum besagt, daß die innere Energie U konstant geblieben ist.

Die innere Energie des idealen Gases ist vom Volumen unabhängig und wird allein von der Temperatur bestimmt.

Zur praktischen Durchführung des Versuches verwendet man zweckmäßigerweise je eine gut wärmeisolierte gefüllte und leere Druckgasflasche. Mißt man nach dem Überströmen die Temperaturen, so ist die der anfangs vollen Flasche um einige Grade gesunken und die der anfangs leeren Flasche um den gleichen Betrag gestiegen. Der gesamte Wärmeinhalt bleibt also konstant.

Wenn man schließlich den für die Änderung der inneren Energie gefundenen Ausdruck $dU = mc_v \cdot dT$ in die Gleichung (172) einsetzt, nimmt der I. Hauptsatz die etwas ausführlichere Form an:

$$\boxed{dQ = mc_v \cdot dT + p\,dV} \quad (174)$$

16.3. Isobare Zustandsänderung

Auch bei einer *isobaren* Zustandsänderung wird einem Gas Wärme zugeführt, wobei sich seine Temperatur erhöht. Jedoch muß im Gegensatz zur isochoren Änderung dafür gesorgt werden, daß sein *Druck* dabei *konstant* bleibt. Das ist wenigstens theoretisch möglich, wenn man es in einen Zylinder einschließt, in dem sich ein Kolben reibungslos auf und ab bewegen kann. Denkt man sich dabei den Kolben noch massenlos, so wird er auch der geringsten Druckänderung nachgeben, so daß der Druck im Innern des Zylinders unverändert gleich dem Außendruck (äußerer Druck, Luftdruck) bleibt.

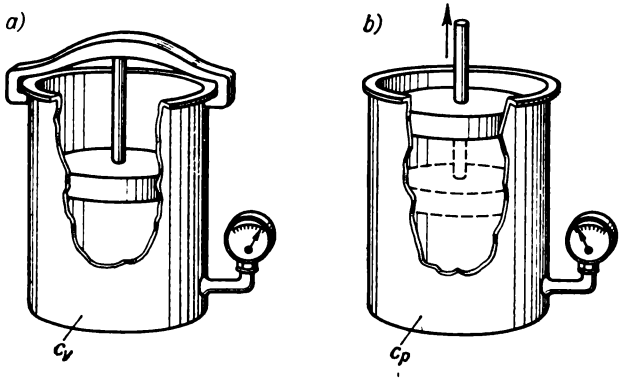


Bild 259. Spezifische Wärme eines Gases bei
a) konstantem Volumen,
b) konstantem Druck

Für diesen Fall läßt sich aber die zugeführte Wärme sofort angeben. Mit der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p wird in der zuletzt dargestellten Form (174) des I. Hauptsatzes das Glied $dQ = mc_p \cdot dT$, und man erhält

$$mc_p \cdot dT = mc_v \cdot dT + p \cdot dV \quad \text{oder auch}$$
$$m(c_p - c_v)\, dT = p \cdot dV.$$

Da alle neben den Differentialen dT und dV stehenden Faktoren konstante Größen sind, ergibt sich nach beiderseitiger Integration

$$m(c_p - c_v)\, T = pV.$$

Setzt man noch gemäß der Zustandsgleichung (162) $p = \frac{mRT}{V}$, so verbleibt nach Kürzen der entstehenden Gleichung die wichtige Beziehung

(175) $$\boxed{c_p - c_v = R}$$

Sie besagt:

Die Differenz der spezifischen Wärmen eines idealen Gases ist gleich der Gaskonstanten.

c_p muß deswegen größer sein als c_v, weil das bei konstantem Druck erwärmte Gas eine Arbeit hervorbringt (Bild 259). Die Differenz $c_p - c_v$ stellt damit eine Arbeit dar, die 1 kg eines Gases bei konstantem Druck und Erwärmung um 1 grd verrichtet.
Daher hat auch die **Gaskonstante R die Einheit einer Arbeit je M kg und grd.**
Setzt man für ein bestimmtes Gas die Werte der spezifischen Wärme ein, so erhält man beispielsweise für Wasserstoff $R = (3{,}408 - 2{,}420)$ kcal/kg grd $= 0{,}988$ kcal/kg grd gegenüber einem Tabellenwert von $R = 420{,}5$ kpm/kg grd.
Aus der Gleichung

$$\frac{0{,}988\ \text{kcal}}{\text{kg grd}} = \frac{420{,}5\ \text{kpm}}{\text{kg grd}} \quad \text{ergibt sich dann, daß die Energiemenge}$$

$$1\ \text{kcal} = \frac{420{,}5}{0{,}988}\ \text{kpm} = 426\ \text{kpm}$$

sein muß. Nach diesem Gedankengang hat ROBERT MAYER 1842 das Verhältnis zwischen Wärmeenergie und mechanischer Energie erstmalig berechnet.

16.4. Isotherme Zustandsänderung

Wir denken uns jetzt das Gas in einen Zylinder eingeschlossen, dessen Volumen sich mit Hilfe eines dicht schließenden, reibungslos beweglichen Kolbens nach Belieben vergrößern oder verkleinern läßt. Damit wird sich der Druck im Zylinder gegenläufig ändern. Es sei aber verlangt, daß der Vorgang **isotherm** verlaufen, d. h., daß sich das Gas dabei weder erwärmen noch abkühlen soll.

Das läßt sich zwar praktisch nie ganz verhindern, doch können wir uns vorstellen, daß der umhüllende Zylinder so gut wärmeleitend ist, daß die gebildete Wärme sofort abfließt. Auch das den Zylinder umgebende Wärmereservoir darf seine Temperatur dabei nicht ändern, es muß also unendlich groß gedacht werden. Schließlich müßte der Vorgang noch sehr langsam verlaufen, damit genügend Zeit für den Wärmeaustausch zur Verfügung steht. Kurzum: Während eines streng isotherm verlaufenden Prozesses muß in jedem Augenblick ein *Gleichgewichtszustand* zwischen dem Gas und seiner Umgebung bestehen. Derartige Zustandsänderungen bezeichnet man daher als **quasistatisch.**

Da nun die Temperaturänderung $\mathrm{d}T$ gleich Null sein soll, entfällt aber das in der Gleichung (174) des I. Hauptsatzes stehende Glied $mc_v \cdot \mathrm{d}T$. Es verbleibt allein die Gleichung

$$\mathrm{d}Q = p \cdot \mathrm{d}V.$$

Sie besagt, daß die beim Zusammendrücken des Gases aufgewandte Arbeit $p \cdot \mathrm{d}V$ in Form von Wärme *nach außen hin* abgegeben werden muß bzw. die zur Ausdehnung erforderliche Arbeit in Form von Wärme *von außen her* zuzuführen ist. Das Gas selbst darf jedenfalls seine Temperatur nicht ändern.

Bei konstanter Temperatur gilt jedoch das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE (11.4.3.), demzufolge das Produkt aus Druck und Volumen eines eingeschlossenen Gases bei konstanter Temperatur stets den gleichen Wert haben muß.

Trägt man die jeweils zusammengehörenden Werte von Druck und Volumen in das p,V-Diagramm ein, so liegen sie alle auf einer Kurve (Bild 260). Sie stellt geometrisch eine **Hyperbel** dar.

Diese eine Hyperbel entspricht einer bestimmten, festliegenden Temperatur T_1. Man nennt sie kurz eine **Isotherme.** Die ganze Fläche des

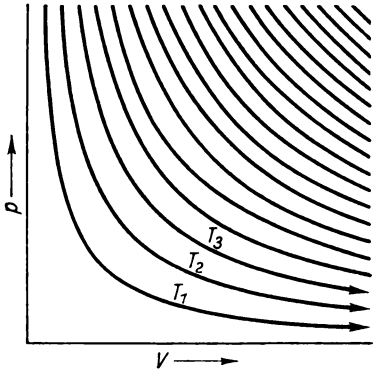


Bild 260. Isothermen des idealen Gases

Diagramms kann man mit einer Schar von Isothermen überdecken, die nach rechts oben immer höheren Temperaturen entsprechen.

(176) $\boxed{pV = \text{konst}}$ **Gleichung der Isotherme eines idealen Gases**

Das Diagramm läßt sich auch *räumlich* darstellen, indem man sich jede Isotherme in eine mit der Temperatur proportional ansteigende Höhe verlegt zu denken hat (Bild 261). Jeder horizontale Schnitt entspricht konstanter Temperatur und erzeugt eine Hyperbel als Schnittkurve.

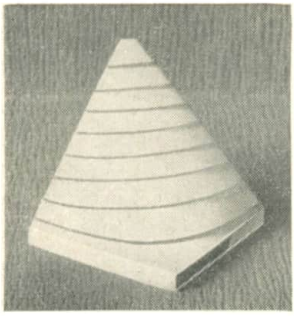


Bild 261. Isothermen bei ansteigender Temperatur

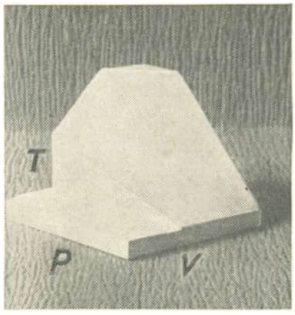


Bild 262. Isochore Zustandsänderung

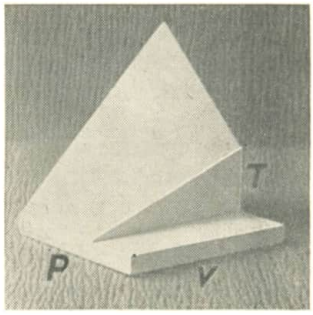


Bild 263. Isobare Zustandsänderung

Ein senkrechter Schnitt parallel zur p-Achse (Bild 262) liefert eine Gerade und veranschaulicht eine **isochore** Zustandsänderung: Bei festgehaltenem Volumen ändert sich der Druck proportional zur Temperatur (GAY-LUSSACsches Gesetz für *konstantes Volumen*).
Ein senkrechter Schnitt parallel zur V-Achse (Bild 263) entspricht einer **isobaren** Zustandsänderung: Bei konstant gehaltenem Druck ändert sich bei Wärmezufuhr das Volumen, die Temperatur steigt entsprechend dem Verlauf der Schnittlinie linear an (GAY-LUSSACsches Gesetz für *konstanten Druck*).

16.4.1. Arbeit bei isothermen Vorgängen

Die zum Zusammendrücken eines Gases erforderliche Arbeit W berechnet sich als Produkt aus der auf den Kolben wirkenden Kraft F und dem vom Kolben zurückgelegten Weg s. Hat der Kolben den Querschnitt A und das im Zylinder eingeschlossene Gas den Druck p, so ist die Kraft gleich dem Produkt $p \cdot A$ und die Arbeit $W = p \cdot A \cdot s$. Nun ist $A \cdot s$ das während der Bewegung vom Kolben verdrängte Volumen V, so daß $W = p \cdot V$ ist. Es ist jedoch zu bedenken, daß die auf den Kolben wirkende Kraft F und damit auch der Druck p beim Zurücklegen des Weges s nicht konstant bleibt.

Man muß daher zunächst von einer *äußerst kleinen* Volumenänderung $\mathrm{d}V$ ausgehen. Es ist dann (Bild 264)

$$\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V.$$

Da p von V abhängt, muß p durch V ausgedrückt werden. Dieser Zusammenhang ist nach der allgemeinen Zustandsgleichung (162) gegeben. Ihr zufolge ist

$$p = \frac{mRT}{V}.$$

Bezeichnet man mit V_1 das Anfangs- und mit V_2 das Endvolumen, so ist die gesamte aufzuwendende Arbeit gleich

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{V}\,\mathrm{d}V.$$

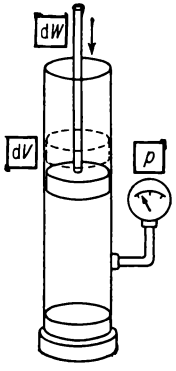


Bild 264. Arbeit bei kleiner Volumenänderung

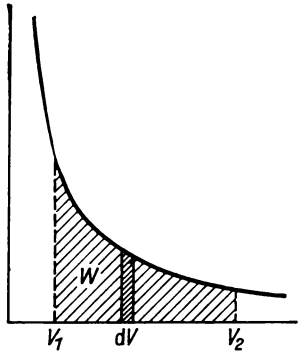


Bild 265. Isotherme Volumenarbeit

Dies ergibt integriert

(177) $$\boxed{W = mRT \ln \frac{V_2}{V_1}}$$ **isotherme Volumenarbeit W**

Im Diagramm (Bild 265) stellt $p\,\mathrm{d}V$ ein schmales Rechteck von der Breite $\mathrm{d}V$ und der Höhe p dar. Die gesamte Arbeit ist dann der zwischen den Werten V_1 und V_2 genommene Flächeninhalt unter der Isotherme, kann also auch mit Millimeterpapier oder Planimeter gemessen werden.

Ist das Anfangsvolumen V_1 größer als das Endvolumen V_2, so wird W *negativ* und stellt die bei der *Kompression aufzuwendende Arbeit* dar. Für den Fall dagegen, daß $V_2 > V_1$ ist, handelt es sich um die *Entspannung* eines komprimierten Gases. W wird dann *positiv* und gibt die vom Gas *gelieferte Arbeit* an.

Die letzte Gleichung läßt sich jedoch weitgehend vereinfachen, indem man nochmals die Zustandsgleichung (162) anwendet. Denn für den hier betrachteten Fall eines isothermen Vorganges ist das Produkt mRT konstant und gleich pV, wobei für dieses Produkt entweder der Anfangszustand p_1V_1 oder auch der Endzustand p_2V_2 eingesetzt werden darf:

(178) $$\boxed{W = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$ oder auch $$\boxed{W = p_2V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Andererseits sind nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte bei konstanter Temperatur der Druck p und das Volumen V einander umgekehrt proportional. Somit läßt sich die isotherme Volumenarbeit auch bei bekanntem Anfangsdruck p_1 und Enddruck p_2 nach den Gleichungen berechnen:

(179) $$\boxed{W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}} \quad \text{oder auch} \quad \boxed{W = p_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

Um nochmals zum I. Hauptsatz zurückzukehren, sei daran erinnert, daß in der Gleichung (172) das Glied dU gleich Null zu setzen war. Die innere Energie U muß also während des Vorganges konstant bleiben:

Die innere Energie eines Gases ändert sich bei isothermer Volumenänderung nicht.

Damit verblieb als Gleichung für den besprochenen Vorgang der isothermen Zustandsänderung lediglich $dQ = p\,dV$. Die Wärmemenge Q stellt nichts anderes als den Gegenwert der bei der Volumenänderung aufgewandten bzw. gewonnenen Arbeit W dar. Um diese Wärmemenge zu erhalten, braucht man lediglich die nach den Gleichungen (178) und (179) erhaltene Arbeit nach der gesetzlichen Definition (164) oder (165) umzurechnen.

In der technischen Praxis spielen sich isotherme Vorgänge in allen Luftkompressoren und Gasverdichtern ab. Die nach den Gleichungen (177 ··· 179) hierbei entstehende Wärme wird durch intensive Luft- oder Wasserkühlung abgeführt, so daß die Arbeitstemperatur einer solchen Maschine im zeitlichen Mittel konstant bleibt (Bild 266).

Somit stellt ein komprimiertes Gas selbst keinen Energiespeicher dar. Die beim Komprimieren aufgewandte Arbeit wird in Form von Wärme nach außen abgegeben, und die bei der isothermen Entspannung (z. B. von Druckluftwerkzeugen) gelieferte Arbeit stammt *nicht* aus dem *Gasinhalt*, sondern aus dem Wärmeinhalt der sich abkühlenden *Umgebung*.

Beispiel: Welche Arbeit ist aufzuwenden, um einen Luftreifen von 5 l Fassungsvermögen bei normalem Luftdruck auf 3 at Überdruck isotherm aufzupumpen, und welche Wärmemenge gibt die komprimierte Luft dabei nach außen ab? –

Es ist der Anfangsdruck $p_1 = 10330\ \text{kp/m}^2$, der Enddruck $p_2 = 40330\ \text{kp/m}^2$, $V_2 = 0{,}005\ \text{m}^3$. V_1 ist nicht gegeben. Nach Einsetzen dieser Werte in (179) wird

$$W = p_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{40330\ \text{kp}\ 0{,}005\ \text{m}^3}{\text{m}^2} \ln \frac{10330}{40330} = -275\ \text{kpm}$$

$$Q = \frac{275\ \text{kpm kcal}}{427\ \text{kpm}} = 0{,}643\ \text{kcal}.$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß Arbeit aufzuwenden ist.

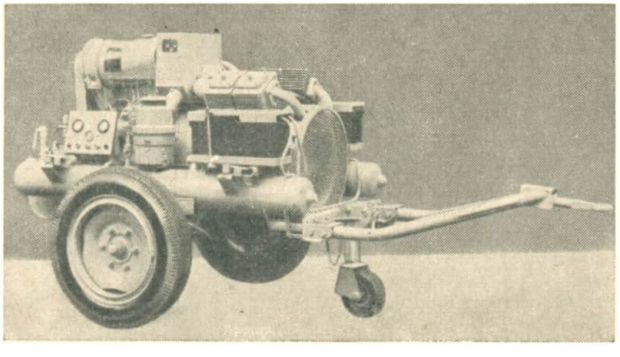


Bild 266. Fahrbarer Verdichter mit Luftkühlung. Als Druckluftbehälter dient der Rohrrahmen

16.5. Adiabatische Zustandsänderung

Sorgt man dafür, daß während der Volumenänderung des Gases *kein* Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann, so nennt man dies einen **adiabatischen Vorgang.** Wir können uns den Zylinder mit einer vollkommen *wärmedichten* Umhüllung versehen vorstellen (Bild 267). Doch die beste Isolation wird stets ein wenig Wärme durchlassen. Wenn allerdings die Verdichtung *sehr rasch* verläuft, verbleibt keine Zeit zum Wärmeaustausch, und die gesamte bei der Verdichtung entstehende Wärme bleibt im Gas enthalten. Es können sich sehr hohe Temperaturen entwickeln, die zur Entzündung brennbarer Stoffe führen (Dieselmotor). Auch bei den sehr raschen Druckschwankungen in den Schallwellen handelt es sich um rein adiabatische Vorgänge.

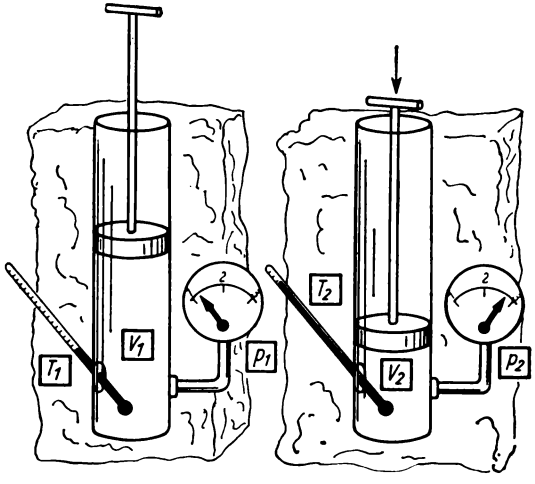


Bild 267. Bei adiabatischer Verdichtung steigen Temperatur und Druck

Um die hierfür gültigen Gesetzmäßigkeiten zu finden, gehen wir wieder von der zuletzt benutzten Form (174) des I. Hauptsatzes $\mathrm{d}Q = mc_v \cdot \mathrm{d}T + p \cdot \mathrm{d}V$ aus und führen noch den aus der allgemeinen Zustandsgleichung (162) resultierenden Faktor $p = \frac{mRT}{V}$ ein. Das ergibt den vervollständigten Ausdruck

$$\mathrm{d}Q = mc_v\,\mathrm{d}T + mRT\,\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Bei einem adiabatischen Vorgang wird aber Wärme weder zu- noch abgeführt. Infolgedessen ist $\mathrm{d}Q = 0$, und der erste Hauptsatz geht in die Gleichung über:

$$-mc_v\,\mathrm{d}T = mRT\,\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Diese Gleichung kann beiderseits integriert werden, wobei man nach (175) $R = c_p - c_v$ setzt:

$$-c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} = (c_p - c_v) \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Das ergibt dann

$$c_v \ln \frac{T_1}{T_2} = (c_p - c_v) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{c_v} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{c_p - c_v}.$$

Es ist ferner allgemein üblich, das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen mit dem Buchstaben $\varkappa$ (sprich: kappa) abzukürzen:

(180) $$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa.$$

Mit dieser Schreibweise erhält man

(181) $$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1}}$$ **Temperaturverhältnis bei gegebenem Volumenverhältnis**

Nun ist nach der Zustandsgleichung (161) $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ oder $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$.

Dies, in (181) eingesetzt, ergibt $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\varkappa-1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\varkappa-1}$ oder

(182) $$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}$$ **Temperaturverhältnis bei gegebenem Druckverhältnis**

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (181) und (182) bekommt man schließlich

(183) $$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa}}$$ **Volumen-Druck-Gesetz des adiabatischen Vorganges**

bzw.

(184) $$\boxed{pV^{\varkappa} = \text{konst}}$$ **Gleichung der Adiabate (Poissonsches Gesetz)**

Die Gleichungen (181) bis (183) werden die **Poissonschen Gleichungen** genannt. Zeichnet man eine solche Adiabate in das p,V-Diagramm ein, so sieht man, daß sie *steiler* als eine *Isotherme* verläuft (Bild 268). Dies ist deshalb leicht einzusehen, weil z. B. bei Kompression die gebildete Wärme im Gas enthalten bleibt und damit der Druck schneller ansteigen muß als bei isothermer Verdichtung.

Beispiele: 1. Das in früheren Zeiten benutzte pneumatische Feuerzeug bestand aus einem Metallzylinder, in den ein dichtschließender Kolben rasch hineingestoßen wurde. Dadurch

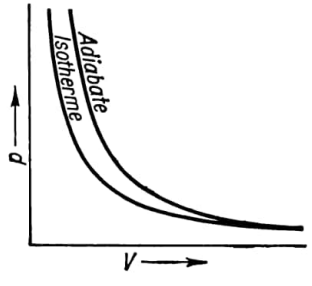


Bild 268
p,V-Diagramm

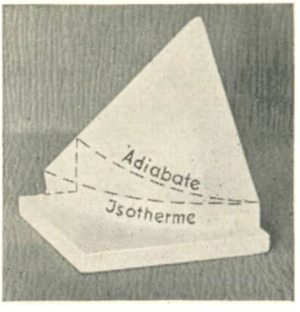


Bild 269. Isotherme und Adiabate in räumlicher Darstellung

kam ein Stückchen Feuerschwamm zum Glimmen. Die Anfangstemperatur sei 20 °C, das Volumen werde auf $^1/_{20}$ verringert. Welche Temperatur entsteht? – Nach (181) ist

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} \text{ bzw. } T_2 = 293\ °\text{K} \left(\frac{1}{\frac{1}{20}}\right)^{1{,}4-1} =$$

$$= 293\ °\text{K} \cdot 20^{0{,}4} = 971\ °\text{K};\ t_2 = 698\ °\text{C}.$$

2. Im Dieselmotor wird die hohe Zündtemperatur im Zylinder durch adiabatische Kompression der angesaugten Luft erreicht. Welche Temperatur entsteht bei einer Anfangstemperatur von 25 °C und einem Anfangsdruck von 1 at, wenn ein Enddruck von 38 at erreicht wird? – Nach (182) ist

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 298\ °\text{K} \cdot 38^{0{,}286} = 843{,}4\ °\text{K};\ t_2 = 570{,}4\ °\text{C}.$$

3. Auch beim gewöhnlichen Benzinmotor erfolgt die Kompression des Benzin-Luft-Gemisches adiabatisch. Wegen der dabei auftretenden hohen Endtemperaturen tritt mitunter vorzeitige Selbstentzündung ein, die Ursache des schädlichen „Klopfens".

16.5.1. Arbeit bei adiabatischen Vorgängen

Die zur adiabatischen Verdichtung erforderliche Arbeit kann bei Kenntnis von Anfangs- und Endtemperatur leicht angegeben werden, da die gesamte bei der Kompression aufgewandte Arbeit in Form von Wärme im Gas aufgestaut wird. Sie tritt demnach als Zunahme seiner *inneren Energie* in Erscheinung. Wegen $dQ = 0$ folgt aus der Grundgleichung des I. Hauptsatzes (171)

$$dW = -dU \quad \text{und mit (173)}$$
$$dW = -mc_v \cdot dT.$$

Die Integration zwischen den Grenzen T_1 und T_2 liefert

$$U = mc_v (T_1 - T_2).$$

Dieser Zuwachs an innerer Energie ist demnach auch gleich der aufzuwendenden Arbeit. Unter Verwendung von (180) $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$ und (175) $c_p - c_v = R$ ergibt sich daraus

(185) $$\boxed{W = \frac{mR}{(\varkappa-1)}(T_1 - T_2)}$$ **Arbeit W der adiabatischen Zustandsänderung**

Da bei der Kompression $T_2 > T_1$ ist, ergibt sich für die Arbeit W ein negativer Wert, wie es auch der in 4.4.1. getroffenen Vorzeichenvereinbarung entspricht.

16.6. Polytrope Zustandsänderung

Isotherme und adiabatische Zustandsänderung sind ideale Grenzfälle, die sich in reiner Form technisch nicht verwirklichen lassen. Weder ist es möglich, die Arbeitstemperatur eines Gases genau konstant zu halten, noch kann man den Zu- oder Abfluß von Wärme vollständig verhindern. Nun gehen die Gleichungen der isothermen

Zustandsänderung aus denen der adiabatischen hervor, wenn man an Stelle von $\varkappa$ den Wert $n = 1$ setzt. Wählt man für den Exponenten n einen Wert, der (bei Luft) zwischen 1 und 1,4 liegt – etwa 1,2 oder 1,3 –, so geben die Gleichungen (183) und (184) die wirklichen Verhältnisse einigermaßen richtig wieder. Eine Zustandsänderung, die weder isotherm noch adiabatisch verläuft, nennt man **polytrop.** Die entsprechend geänderte Gleichung (184) lautet dann

(186) $\boxed{pV^n = \text{konst}}$ **Gesetz der Polytrope**

$(1 < n < \varkappa)$

Beispiel: 1 kg Luft von 10 at und 20 °C entspannt sich auf 1 at. Welche Endtemperatur wird erreicht, und welche Arbeit wird vom Gas abgegeben bei a) adiabatischer und b) polytroper Ausdehnung ($n = 1{,}2$)? –

a) Nach (182) ist $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 293\,°\text{K} \left(\frac{1}{10}\right)^{0{,}286} = 152\,°\text{K}$; $t_2 = -121\,°\text{C}$.

Nach (185) ist $W = \frac{mR}{(\varkappa-1)}(T_2 - T_1) = \frac{29{,}25}{0{,}4}(293 - 152)\,\text{kpm} = 10318\,\text{kpm}$.

b) Hier ergibt sich mit $\frac{n-1}{n} = \frac{1{,}2-1}{1{,}2} = 0{,}167$ die Temperatur $T_2 = 200\,°\text{K} = -73\,°\text{C}$ bzw. die Arbeit $W = 13611$ kpm.

16.7. Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen

Es war bereits in 14.2.4. die Rede davon, welche Schwierigkeiten einer direkten Bestimmung der spezifischen Wärme eines Gases bei konstantem Volumen entgegenstehen. Es gibt aber Möglichkeiten, das Verhältnis $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$ zu messen und daraus c_v zu berechnen.

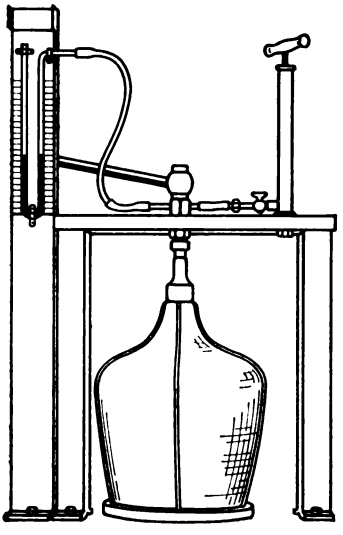


Bild 270. Anordnung zur Bestimmung von $\varkappa$

Nach dem historischen Versuch von Clément und Desormes wird ein großer Behälter mittels einer einfachen Pumpe unter geringen Überdruck gesetzt (Bild 270). Dann wird er für einen kurzen Augenblick geöffnet, so daß der Manometerstand h_1 auf 0 sinkt. Da dieser Vorgang adiabatisch vor sich geht, kühlt sich die Luft dabei ab. Nachdem der Hahn wieder geschlossen ist, steigt der Innendruck durch allmähliche Wärmeaufnahme von außen her wieder an. Der Stand des Manometers erreicht aber dabei nicht die alte Höhe h_1, sondern nur noch die bedeutend niedrigere Höhe h_2. Dem adiabatischen Vorgang entspricht also die

adiabatische Druckänderung $\mathrm{d}p \sim h_1$.

Bis zum Wiedererlangen der Anfangstemperatur hat sich der Manometerstand insgesamt aber nur um die Differenz $(h_1 - h_2)$ verringert. Dem entspricht eine

$$\textbf{isotherme Druckänderung } \mathrm{d}p \sim h_1 - h_2.$$

Das Verhältnis zwischen der adiabatischen und isothermen Druckänderung eines Gases bei konstanter Anfangstemperatur läßt sich aber auch aus bereits bekannten Beziehungen herleiten. Denn durch Differenzieren von (184) erhält man

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\varkappa \frac{\mathrm{d}V}{V} \text{ bzw. von (176) } \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}V}{V},$$

d. h., die relative adiabatische Druckänderung ist gleich dem $\varkappa$-fachen der relativen isothermen Druckänderung, so daß $h_1 = \varkappa\,(h_1 - h_2)$ ist. Das Verhältnis

$$\varkappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

kann somit aus den Manometerständen berechnet werden.

17. Kreisprozesse

Die bisher besprochenen Zustandsänderungen der Gase sind von grundlegender Bedeutung für die Wirkungsweise aller Wärmekraftmaschinen. In einem sich periodisch wiederholenden Arbeitszyklus wird dabei der Maschine Wärme (z. B. unter Verwendung von Dampf, gasförmigen oder flüssigen Brennstoffen) zugeführt und in mechanische Arbeit umgewandelt. Der Druck p, das Volumen V und die Temperatur T müssen also nach jedem Arbeitszyklus wieder ihre ursprünglichen Werte annehmen. Wenn das nicht der Fall wäre, würde mindestens eine dieser Zustandsgrößen im Laufe der Zeit immer im gleichen Sinne anwachsen oder abnehmen, was aber einen technisch durchführbaren Dauerbetrieb unmöglich machen würde. Daher nennt man den sich dabei vollziehenden Vorgang einen **Kreisprozeß.**
Würde z. B. bei einem Benzinmotor von $n = 3000$ 1/min die Temperatur am Ende eines Zyklus nur um 1 grd höher gegen vorher sein, so wäre sie bereits nach 1 min um 1500 grd gestiegen.
Demnach arbeiten alle Wärmekraftmaschinen, gleichgültig, ob es sich um eine Kolbendampfmaschine, eine Dampfturbine, einen Benzin-, Gas- oder Dieselmotor handelt, nach gemeinsamen physikalischen Prinzipien. Um vorerst das Wesen der sich dabei abspielenden Kreisprozesse deutlicher zu machen, sei dies an Hand des bekannten, in vielen Kraftfahrzeugen eingebauten Viertakt-Otto-Motors näher betrachtet.

17.1. Wirkungsweise einer Wärmekraftmaschine

Die einzelnen Arbeitstakte des Viertakt-Otto-Motors stellt man zweckmäßig in einem p,V-Diagramm dar. Das entstehende *Arbeitsdiagramm* ist in der folgenden Darstellung jedoch schematisch vereinfacht. In Wirklichkeit gehen die einzelnen Linien stetig ineinander über.

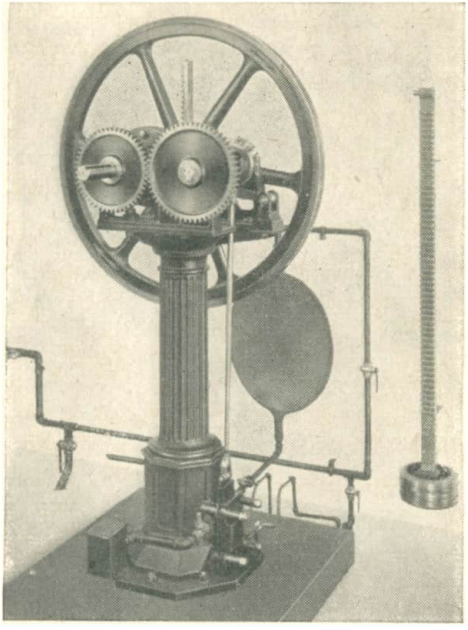


Bild 271. Gasmaschine von Otto und Langen (1867)

1. Takt: Ansaugen. Bei *offenem* Einlaßventil saugt der nach unten gehende Kolben ein Benzin-Luft-Gemisch an (Bild 272). Dieses wird im *Vergaser* hergestellt, wo der an einer Düse vorbeistreichende Luftstrom das Benzin zerstäubt. Im Arbeitsdiagramm entsteht die parallel zur V-Achse verlaufende Linie *1* (Bild 273). Es ist dies eine Isobare.

2. Takt: Verdichten. Bei geschlossenen Ventilen bewegt sich der Kolben nach oben und drückt den Zylinderinhalt im Verhältnis von etwa 6:1 bis 8:1 zusammen. Wegen der Schnelligkeit dieses Vorganges ist die im Diagramm ersichtliche Arbeitslinie *2* eine Adiabate.

3. Takt: Explosion und Entspannung. Kurz vor der höchsten Kolbenstellung wird das Brennstoffgemisch durch einen an der *Zündkerze* überspringenden elektrischen Funken gezündet. Es verpufft sehr schnell, so daß Druck und Temperatur augenblicklich ansteigen. Es entsteht die Arbeitslinie *3a* (eine Isochore). Anschließend schiebt der Druck den Kolben vorwärts, wodurch sich die Adiabate *3b* ergibt.

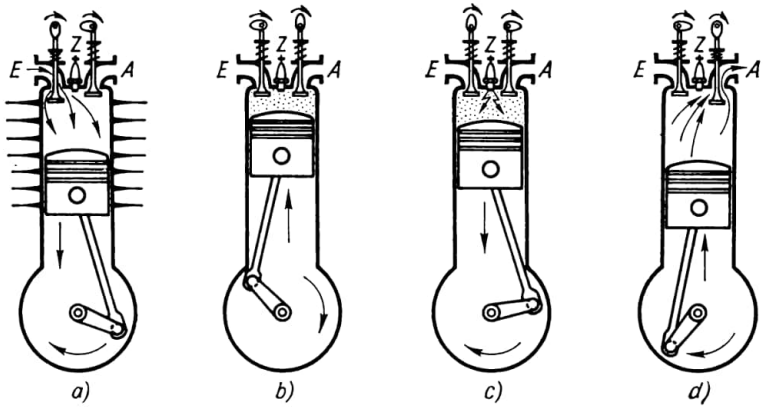


Bild 272. Arbeitsweise des Viertakt-Otto-Motors
E Einlaß, A Auslaß, Z Zündkerze
a) Ansaugen, b) Verdichten, c) Explosion und Entspannung (Arbeitstakt), d) Auspuff

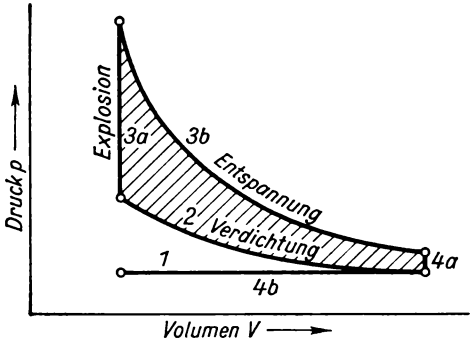


Bild 273. Arbeitsdiagramm des Viertakt-Otto-Motors (idealisiert)

4. Takt: Auspuff. Das Auslaßventil öffnet sich, der Druck fällt sofort ab und ergibt die Isochore *4a*. Der wieder zurückgehende Kolben schiebt die Verbrennungsgase hinaus (Linie *4b*).
Beim nächsten Arbeitszyklus liegen wieder genau die gleichen Verhältnisse vor. Das Arbeitsdiagramm wird in immer gleicher Weise durchlaufen, der Kurvenzug gibt mithin einen Kreisprozeß wieder.
Man kann ihn nun gedanklich in zwei Teile zerlegen, wie dies auf Bild 274 gezeigt ist. Der erste Teil (*a*) stellt denjenigen Teil des Kreisprozesses dar, im Verlaufe dessen das Volumen V zunimmt. Die unter dieser Kurve liegende Fläche ist dann die Arbeit W_1, die das Gas abgibt, wenn es sich ausdehnt. Sie kann als Integral

$$\int \mathrm{d}W = \int p \, \mathrm{d}V$$

ausgedrückt werden, und dieses nimmt einen *positiven Wert* an, weil die Volumenänderung $\mathrm{d}V$ positiv ist. Wie man aber sieht, schließt der zweite Teil (*b*) des Kurvenzuges mit der Abszisse eine viel kleinere Fläche ein, die man ebenfalls als Integral $\int p \cdot \mathrm{d}V$ auffassen kann. Dieses hat, da $\mathrm{d}V$ jetzt *abnimmt*, einen *negativen* Wert und repräsentiert die zur Verdichtung aufzuwendende Arbeit $-W_2$. Die von der Maschine gelieferte Arbeit ist aber die Differenz $W_1 - W_2$. Ihr entspricht im

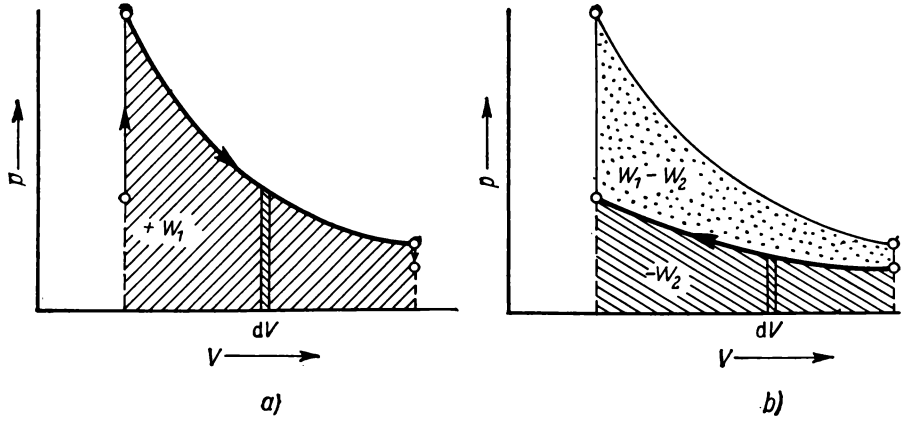


Bild 274. Die im Arbeitsdiagramm (Bild 273) enthaltenen Arbeitsbeträge:
a) abgegebene Arbeit $+W_1$, b) aufzuwendende Arbeit $-W_2$, punktiert: gewonnene Arbeit $W_1 - W_2$

p,V-Diagramm die Differenz der beiden entsprechenden Flächeninhalte und mithin der vom gesamten Kurvenzug umschlossenen Fläche:

Der von der Arbeitskurve eines Kreisprozesses umschlossene Flächeninhalt stellt die während eines Arbeitszyklus gewonnene Arbeit dar.

Auch die bei den übrigen Wärmekraftmaschinen ablaufenden Kreisprozesse lassen sich durch entsprechende Arbeitsdiagramme veranschaulichen. Je nach ihrer Arbeitsweise haben die von den einzelnen Kurven umschlossenen Flächen unterschiedliche Form. Man kann sie jedoch stets in der beschriebenen Weise als Differenz zweier Einzelflächen betrachten, deren eine mit positivem Vorzeichen größer ist als die andere mit negativem Vorzeichen.
Das Ergebnis ist aber in jedem Fall, daß die letzten Endes gewonnene Arbeit als *Differenz zweier Wärmemengen* erscheint. Die eine Wärmemenge Q_1 ist die größere von beiden und ist der Maschine zuzuführen, während die kleinere Wärmemenge Q_2 von der Maschine wieder abgegeben wird. Dabei ist auch immer die Temperatur T_1, bei der sich die Wärme Q_1 in Arbeit verwandelt, höher als die Temperatur T_2, mit der das entsprechende Arbeitsmedium (Verbrennungsgase, Abdampf) die Maschine wieder verläßt.

17.2. Kältemaschine und Wärmepumpe

Durchläuft man jedoch das Arbeitsdiagramm im *entgegengesetzten* Sinn, so müssen sich alle Verhältnisse umkehren. Dies wird technisch in der **Kältemaschine** und bei der **Wärmepumpe** verwirklicht. In diesen Anlagen laufen Kreisprozesse ab, die sich nach dem Schema von Bild 275 vollziehen. Im ersten Teil (*a*) wird ein zweckmäßig gewählter Arbeitsstoff, z. B. Ammoniakgas, unter Aufwand von mechanischer Arbeit zusammengepreßt; denn die Volumenänderung $\mathrm{d}V$ ist hierbei negativ, womit das unter diesem Kurventeil liegende Flächenstück und damit die Arbeit W_1 bzw. das Integral

$$\int \mathrm{d}W = \int p\,\mathrm{d}V$$

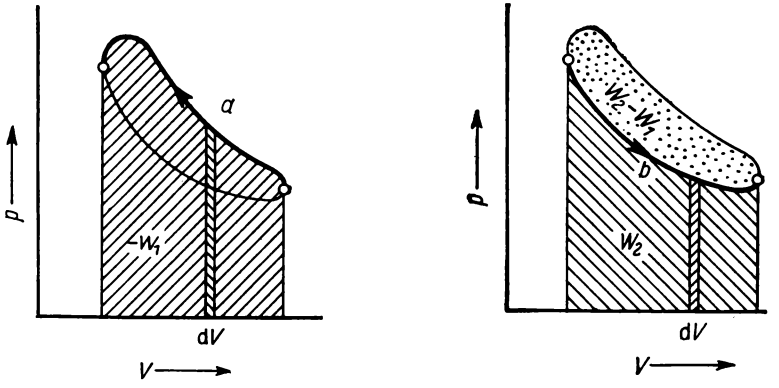


Bild 275. Umgekehrt ablaufender Kreisprozeß:
a) aufgewandte Arbeit, b) abgegebene Arbeit; punktiert: in Wärme umgewandelte Arbeit

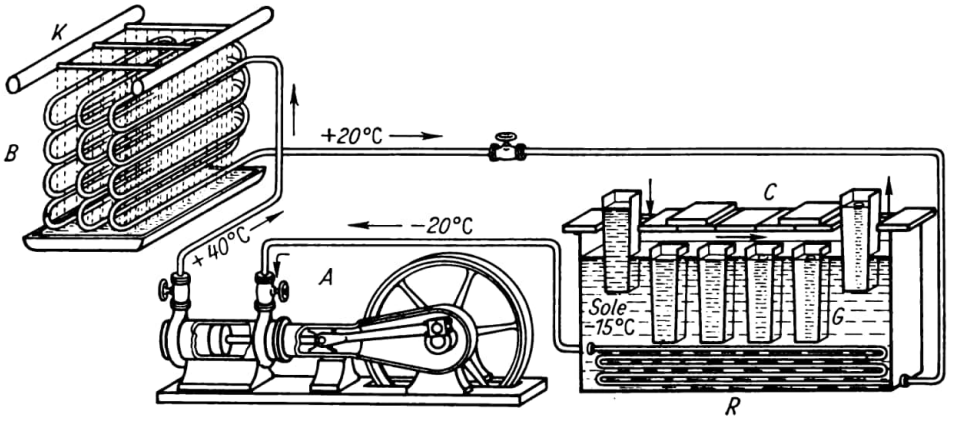


Bild 276. Schema der Ammoniak-Kältemaschine

negatives Vorzeichen erhält. Im zweiten Teil (*b*) entspannt sich der Arbeitsstoff wieder, womit die nunmehr kleinere Fläche einer Arbeit W_2 mit positivem Vorzeichen entspricht. Die Differenzfläche ist damit gleich der insgesamt aufzuwendenden Arbeit $W_2 - W_1$. Ihr entspricht eine bestimmte Wärmemenge $Q_2 - Q_1$, die als Gegenwert dieses Arbeitsaufwandes von der Maschine geliefert wird. Dabei wird die größere Wärmemenge Q_1 bei der höheren Temperatur T_1 nach außen hin abgegeben und die kleinere Wärmemenge Q_2 bei der niederen Temperatur T_2 von außen her aufgenommen. Das geschieht dadurch, daß die Wärmemenge Q_2 einem entsprechenden Arbeitsmedium entzogen wird, welches sich dabei abkühlt.

Wenn die Anlage so eingerichtet ist, daß die hierbei entstehende Abkühlung genutzt wird, so erhält man eine *Kältemaschine*. Eine **Kompressionskältemaschine** arbeitet folgendermaßen (Bild 276):

Mittels einer Pumpe wird Ammoniakdampf bei A angesaugt und im Kondensator B verdichtet (Bild 277). Die entstehende Kompressions- und Kondensationswärme Q_1 wird durch Wasserkühlung K bei der Temperatur T_1 abgeführt. Das zum Teil verflüssigte Ammoniak strömt in den Verdampfer C. Dies ist eine Rohrschlange R, die in einem großen Behälter mit Salzwasser steht. Beim nächsten Pumpenhub wird das Ammoniak hier entspannt, wobei sich seine Temperatur auf T_2 senkt und der Salzlösung die Wärme Q_2 entzogen wird. Die Sole kühlt sich dabei immer weiter ab. Man kann damit in Blechgefäße gefülltes Leitungswasser G gefrieren oder die Lauge selbst in Rohrleitungen zirkulieren lassen, um Kühlräume auf tiefer

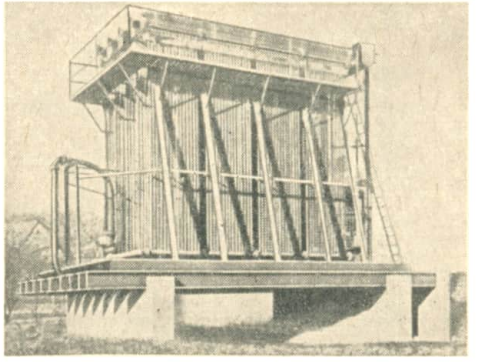


Bild 277. Berieselungsverdichter (Kondensator) einer großen Kältemaschine

Temperatur zu halten. Derselbe Grundvorgang ist aber noch in einer anderen technischen Form verwirklicht, und zwar so, daß es auf die Verwertung der bei der höheren Temperatur T_1 entstehenden Wärmemenge Q_1 ankommt. Dies geschieht in der *Wärmepumpe*.

Die Verdampfung und Entspannung des Ammoniaks geht an einem Ort vor sich, wo die entstehende Kälte nicht weiter stört, z. B. in einem nahe gelegenen Fluß oder See. Eine Pumpe komprimiert das Gas in einem Wärmespeicher, wo es seine Wärme Q_1 an Wasser *abgibt*, das, in Heizkörpern zirkulierend, zur Heizung von Räumlichkeiten dient. Die den Heizkörpern entströmende Wärme ist also zweierlei Ursprungs: einerseits *Kondensationswärme* des Ammoniaks, die als Verdampfungswärme Q_2 dem Verdampfer entnommen wird, andererseits die von der Pumpe durch den Aufwand mechanischer Arbeit W erzeugte *Verdichtungswärme*.

Wärmepumpen arbeiten bei gegebenen Voraussetzungen außerordentlich wirtschaftlich. Sie liefern an nutzbarer Wärme ein Vielfaches des zum Betrieb der Pumpe erforderlichen elektrischen Energieaufwandes.

17.3. Carnotscher Kreisprozeß

In ökonomischer Hinsicht ist der **Wirkungsgrad** der Wärmekraftmaschinen von besonderem Interesse. Er wird durch den Betrag der Arbeit W bestimmt, die sich aus der zugeführten Wärmeenergie Q_1 gewinnen läßt. Dabei treten jedoch immer unvermeidliche Wärmeverluste Q_2 auf, so daß nur die Differenz $Q_1 - Q_2$ praktisch verwertbar ist. Entsprechend der allgemeinen Definition des Wirkungsgrades ergibt sich damit

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{187}$$

thermischer Wirkungsgrad η

Die Aufgabe der Technik besteht darin, diesen Wirkungsgrad möglichst günstig zu gestalten, also die Wärmeverluste Q_2 weitgehend zu vermindern.

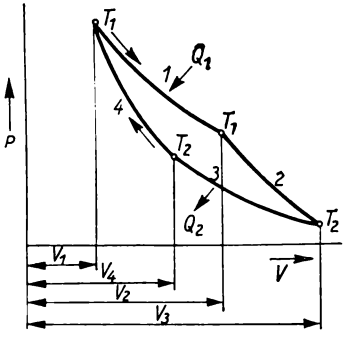


Bild 278. Diagramm des Carnotschen Kreisprozesses

Bis zu welcher unteren Grenze dies überhaupt möglich ist, zeigt der von dem Franzosen Sadi Carnot[1]) erdachte Kreisprozeß. Dieser gestattet vor allem, in leicht übersehbarer Weise die Beziehungen zwischen den ausgetauschten Wärmemengen und den dazugehörigen Temperaturen klarzustellen. Bemerkenswert ist übrigens, daß Carnot seine Theorie zu einer Zeit entwickelte, als die Entwicklung der Dampfmaschine noch in den ersten Anfängen stand.

[1]) 1796 bis 1832

Unter dem CARNOTschen Kreisprozeß können wir uns einen ohne alle mechanische Energieverluste arbeitenden Heißluftmotor vorstellen, dem die Gesetze des idealen Gases zugrunde liegen. Ein Arbeitszyklus verläuft in 4 Takten, die wir im p,V-Diagramm verfolgen wollen (Bild 278):

1. Takt: Bei der *tiefsten* Kolbenstellung wird der eingeschlossenen Luft ein bestimmtes Quantum Wärme Q_1 bei *gleichbleibender* Temperatur T_1 zugeführt. Die Luft dehnt sich aus und verrichtet Arbeit. Die verbrauchte Wärme ist nach (177)

$$Q_1 = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Dies gibt die Isotherme *1*.

2. Takt: Der Zylinder wird wärmedicht umhüllt. Das Gas dehnt sich weiter aus und kühlt sich auf T_2 ab. Es entsteht die Adiabate *2*.

3. Takt: Die im Schwungrad gespeicherte Energie treibt den Kolben zurück. Die Umhüllung des Zylinders lassen wir dabei fallen, so daß die freiwerdende Verdichtungswärme bei *konstanter* Temperatur T_2 abfließen kann: Isotherme *3*. Die *abfließende* Wärme ist

$$Q_2 = -mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = mRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

4. Takt: Schließlich wird nach abermaliger Umhüllung des Zylinders der Gasinhalt auf das Anfangsvolumen V_1 verdichtet, wobei die *Temperatur* wieder auf den anfänglichen Wert T_1 *ansteigt*: Adiabate *4*.

Nach Beendigung dieses Zyklus ist der Ausgangszustand wiederhergestellt. Das Ergebnis ist folgendes. Takt 2 liefert genausoviel Arbeit, wie Takt 4 verzehrt; denn diese hängt bei adiabatischen Vorgängen nach (185) lediglich von den Temperaturen T_1 und T_2 ab, die hier übereinstimmen. Ferner gilt für diese beiden Takte nach (181):

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\varkappa-1}, \text{ woraus sich ergibt: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

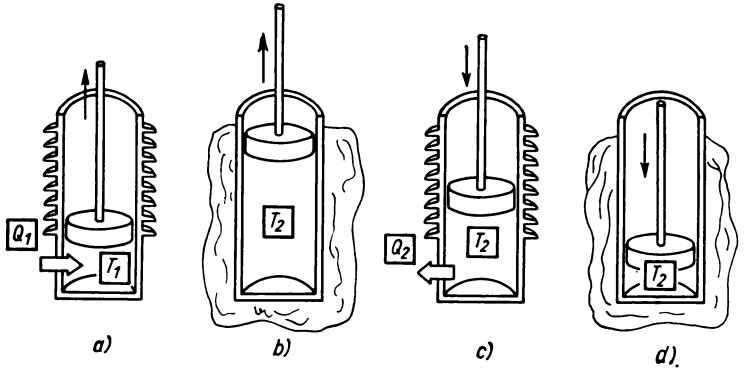


Bild 279. Verlauf des CARNOTschen Kreisprozesses
a) 1. Takt, b) 2. Takt, c) 3. Takt, d) 4. Takt

Dividiert man den Ausdruck für Q_2 durch den für Q_1, so ergibt sich wegen der eben festgestellten Gleichheit der Volumenverhältnisse die Beziehung

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \tag{188}$$

Damit wird auf Grund von (187)

$$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \tag{189}$$

thermischer Wirkungsgrad η des Carnot-Prozesses

Dieser ist demnach nur von den beiden Temperaturen abhängig, bei denen der Wärmeaustausch stattfindet. Von allen denkbaren Kreisprozessen, die zwischen den Temperaturen T_1 und T_2 arbeiten, hat der CARNOT-Prozeß den *günstigsten* Wirkungsgrad; denn die Wärmemenge Q_1 wird bei der *höchsten* im Kreisprozeß auftretenden Temperatur T_1 zugeführt, während die Wärmemenge Q_2 bei der *niedrigsten* Temperatur T_2 abgegeben wird.

Damit hat der Bruch $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$ den *größtmöglichen Wert*. Bei allen *technischen* Motoren vollzieht sich die Umwandlung der Wärme Q_1 in mechanische Energie *unterhalb* der höchsten Arbeitstemperatur T_1. Ebenso setzt die Ableitung der Wärmemenge Q_2 bereits vor dem Erreichen der tiefsten Temperatur T_2 ein, so daß der Quotient $\frac{Q_2}{Q_1}$ stets einen größeren Wert hat, als ihn Gleichung (188) angibt. Damit ist auch der nach Gleichung (187) definierte Wirkungsgrad in jedem Fall kleiner als der des CARNOT-Prozesses.

Aus (189) ist ferner zu ersehen: Ein Wirkungsgrad von 1, d. h. 100 %, kann selbst bei diesem idealen Fall *niemals* erreicht werden, da der Zähler des Bruches stets kleiner als der Nenner ist. Man kann nur versuchen, durch Vergrößerung des Temperaturbereiches $T_1 \cdots T_2$ innerhalb technisch tragbarer Grenzen den Wirkungsgrad zu verbessern. Bild 280 zeigt die Energiebilanz eines modernen OTTOmotors. Eine entscheidende Verbesserung ist kaum noch zu erwarten.

Wärme kann auf dem Wege von Kreisprozessen nur zu einem Bruchteil in mechanische Arbeit umgewandelt werden.

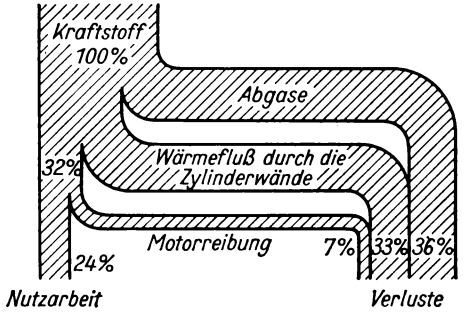


Bild 280. Energiebilanz eines OTTOmotors

Beispiele: 1. Berechne den theoretisch höchstmöglichen Wirkungsgrad einer Dampfmaschine, die Dampf von 10 at aufnimmt und diesen bei 20 °C in den Kondensator ausstößt! – Nach der Dampftabelle ergibt sich die obere Arbeitstemperatur T_1 mit der Dampftemperatur 179 °C zu (179 + + 273) °K.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(179 + 273) - 293}{452} = 0{,}35 = 35\,\%$$

Noch tiefere Temperaturen im Kondensator sind kaum zu erzielen. Bei Kolbendampfmaschinen werden höchstens 10···15 % erreicht.

2. Wieviel Wärme kann im idealen Fall mittels einer Wärmepumpe gewonnen werden, wenn zu ihrem Antrieb eine mit 100 kcal gleichwertige mechanische Arbeit aufgewandt wird ($t_1 \triangleq 50\,°C$, $t_2 = 0\,°C$)? –

Der Wirkungsgrad ist im Idealfall einerseits nach (187) $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ und andererseits nach (189) $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Nach Gleichsetzen erhält man die zu gewinnende Wärme

$$Q_1 = \frac{(Q_1 - Q_2)T_1}{T_1 - T_2} = 646\,\text{kcal},$$

wobei $(Q_1 - Q_2)$ den Energieaufwand von 100 kcal darstellt. Q_1 steht dann bei der höheren Temperatur $t_1 = 50\,°C$ zur Verfügung.

17.4. Reversible und irreversible Vorgänge

Gegenüber den in der Technik verwirklichten Wärmekraftmaschinen hat aber der CARNOT-Prozeß noch ein wesentliches Merkmal, das ihm besondere theoretische Bedeutung verleiht. Es hängt mit der Frage zusammen, inwieweit sich Vorgänge der Energieumwandlung, insbesondere die der gegenseitigen Umwandlung von mechanischer Arbeit und Wärme, **umkehren** lassen oder nicht.

Denken wir an einen völlig wärmedicht umhüllten Zylinder, in dem sich ein Kolben ohne jede Reibung auf und ab bewegen kann, so wird der Gasinhalt beim Hineingehen des Kolbens adiabatisch verdichtet. Die gesamte aufgewandte mechanische Arbeit erscheint in Form von Wärme und bleibt als zusätzliche innere Energie im Gas gespeichert. Beim Loslassen des Kolbens wird dieser wieder nach außen getrieben. Die zuvor gebildete Wärme verwandelt sich restlos wieder in mechanische Arbeit zurück. Man nennt dies einen **vollständig umkehrbaren** oder **reversiblen** Vorgang (Bild 281):

Ein Vorgang ist reversibel, wenn nach seinem Ablauf der Anfangszustand vollständig wiederhergestellt ist und auch in seiner Umgebung keine Veränderungen eingetreten sind.

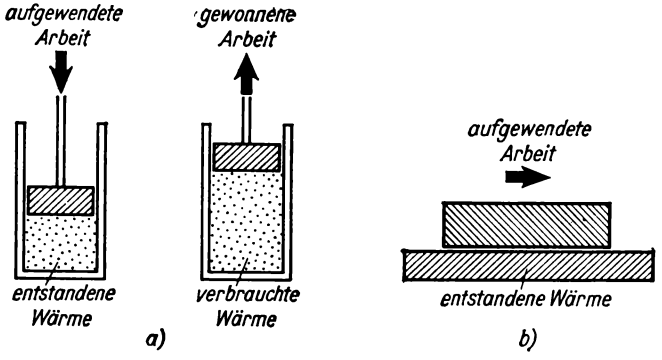


Bild 281
a) Reversibler Vorgang: adiabatische Verdichtung und Entspannung eines Gases.
b) Irreversibler Vorgang: Reibung zweier Holzklötze

Da bei einem reversiblen Vorgang keinerlei Wärmeverluste auftreten, wird hierbei auch die **maximal mögliche** Arbeit abgegeben.
Reibt man dagegen zwei Holzstücke gegeneinander, so wandelt sich ebenfalls mechanische Arbeit in Wärmeenergie um (Bild 281 b). Diese Wärme wird sich aber beim Aufhören des Reibungsvorganges auf keinen Fall wieder in mechanische Arbeit zurückverwandeln. Infolge von Wärmeleitung wird sie sich sofort zwischen den beiden Körpern verteilen, und es ist keine Vorrichtung denkbar, die eine vollständige Rückverwandlung in mechanische Arbeit ermöglichen könnte. Solche Vorgänge nennt man **nicht umkehrbar** oder **irreversibel.**
Sieht man von dieser Reibung ab, so kann man viele Vorgänge in der Mechanik, so z. B. das Schwingen eines Pendels oder die Reflexion einer Stahlkugel auf einer Spiegelglasplatte, als reversibel betrachten. Genaugenommen aber gibt es streng reversible Vorgänge in der Natur überhaupt nicht. Sie stellen nur *ideale Grenzfälle* dar.
Der CARNOT-Prozeß ist nun ein solcher Grenzfall. Seine beiden adiabatischen Arbeitstakte sind, wie soeben dargelegt, reversibel. Ebenso müssen auch die beiden isothermen Takte reversibel ablaufen, da der Wärmeaustausch bei konstanter Temperatur vor sich geht. Dies ist nur denkbar, wenn die Temperatur der hierzu notwendigen äußeren Wärmereservoire in jedem Augenblick mit der des Zylinderinhaltes übereinstimmt. Damit könnte dieser hypothetische isotherme Wärmeaustausch auch in umgekehrter Richtung vor sich gehen. Folglich ist auch der CARNOT-Prozeß im Ganzen umkehrbar.

Der Carnot-Prozeß ist vollständig umkehrbar (reversibel).

Läßt man ihn in entgegengesetzter Richtung ablaufen, so wird er als ideale Kältemaschine funktionieren. Nach je einem Vorwärts- und einem Rückwärtsgang wäre auch in der Umgebung der Ausgangszustand vollständig wieder hergestellt.

17.5. Zweiter Hauptsatz der Wärmetheorie

17.5.1. Entropie beim Carnotschen Kreisprozeß

Ob nun ein Vorgang reversibel oder irreversibel verläuft, läßt sich mit Hilfe des I. Hauptsatzes, der nur eine spezielle Fassung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie ist, nicht entscheiden. Bei beiden Arten von Vorgängen bleibt die Gesamtsumme der Energie konstant. Es fragt sich also, ob es eine physikalische Größe gibt, die als Gradmesser für die Irreversibilität irgendwelcher Naturvorgänge verwendet werden kann. Man findet sie an Hand des CARNOT-Prozesses, von dem man von vornherein weiß, daß er reversibel verläuft.

Hierbei stoßen wir auf die Beziehung (188)

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$ Durch Umformung ergibt sich hieraus

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{190}$$

Q_1 und Q_2 bedeuten die beiden auf reversiblem Weg bei den Temperaturen T_1 und T_2 ausgetauschten Wärmemengen, was durch die besondere Schreibweise Q_{rev1} und Q_{rev2} noch besonders zu betonen ist.

Dieser beim CARNOT-Prozeß (und anderen reversibel gedachten Vorgängen) auftretende Quotient $\frac{Q_{rev}}{T}$ wurde von CLAUSIUS (1854) als **Entropie** S bezeichnet. Er führte den Beweis, daß die Entropie ähnlich der Energie eine charakteristische Zustandsgröße ist, von der man jeweils sagen kann, ob sie während eines Vorganges zu- oder abnimmt oder auch unverändert bleibt.

$$\textbf{Entropieänderung} = \frac{\textbf{reversibel ausgetauschte Wärmemenge } Q_{rev}}{\textbf{Austauschtemperatur } T}$$

Dem oberen und dem unteren Arbeitspunkt des CARNOT-Prozesses entsprechen die beiden Entropieänderungen $\Delta S_1 = \frac{Q_{rev1}}{T_1}$ und $\Delta S_2 = \frac{Q_{rev2}}{T_2}$. In diesem Fall ist also die gesamte Entropieänderung wegen (190) $\Delta S = \Delta S_2 - \Delta S_1 = 0$.

Die Entropie bleibt bei jedem umkehrbaren (reversiblen) Kreisprozeß unverändert.

Vollkommen umkehrbare Vorgänge jedoch gibt es in der Natur nicht. Es läßt sich dann der Beweis erbringen, daß bei allen *irreversiblen* Vorgängen die Entropie am Ende immer größer als am Anfang ist, d. h. also stets *zunimmt*. Zwei besonders einfache Beispiele hierfür bringen die nächsten beiden Abschnitte.

17.5.2. Entropiezuwachs bei Erwärmung

Geht man von einer bestimmten Anfangstemperatur aus (meist 0 °C), so kann man den *Wärmeinhalt* eines Körpers bestimmen. Ebenso läßt sich auch (bezüglich dieser Anfangstemperatur) seine *Entropie* berechnen; denn die im Körper enthaltene Wärme muß diesem irgendwie zugeführt worden sein. Verfolgt man aber den Erwärmungsvorgang genauer, so sieht man, daß gleichlaufend mit der *Wärmezufuhr* auch die *Temperatur ansteigt* (Bild 282). Die gesamte Wärmemenge geht also *nicht* bei einer festliegenden Temperatur in den Körper, wie es beim CARNOT-Prozeß der Fall ist. Man muß sich vielmehr vorstellen, daß die

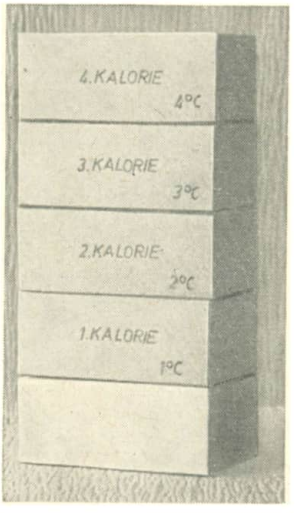


Bild 282. Gleich große Wärmemengen, die man einem Gramm Wasser zuführt, sind auf zunehmende Temperatur zu „heben"

Wärme in *kleinen* Teilbeträgen dQ und jeder Teilbetrag bei einer anderen Temperatur T in den Körper fließt. Da jeder dieser Einzelschritte beliebig klein gedacht werden kann, dürfen sie als reversibel betrachtet werden. Ein einzelner liefert mithin das **Entropie-Element** $\frac{d Q_{rev}}{T}$, und erst durch Summierung all dieser Elemente erhält man die gesamte Entropieänderung

(191) $$\boxed{\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_{rev}}{T}}$$ **Entropiezuwachs** ΔS

Das Integral ist an sich leicht berechenbar, wenn die spezifische Wärme c über den in Frage kommenden Temperaturbereich konstant ist. Wegen $dQ = cm\,dT$ erhält man dann

(192) $$\Delta S = \int_{T}^{T_2} \frac{cm\,dT}{T}.$$

17.5.3. Entropiezunahme beim Mischvorgang

Der typische Fall eines irreversiblen Vorganges ist das Vermischen von kaltem mit warmem Wasser; denn es gibt kein Mittel, diese beiden Wassermengen von verschiedener Temperatur wieder voneinander zu trennen.
Es werde beispielsweise von je 1 kg Wasser von 10 °C bzw. 100 °C ausgegangen. Beide Wassermengen werden miteinander vermischt, wonach 2 kg von der Mischtemperatur 55 °C vorliegen. Dann muß die Entropie *nach* dem Zusammengießen beider Wassermengen *größer* sein als *vorher*.
Als Bezugstemperatur werde 0 °C angenommen. Für die Entropie des kalten Wassers ergibt sich mit der spezifischen Wärme c und mit $dQ = cm\,dT$

$$S_1 = \int_{T_0}^{T_1} cm \frac{dT}{T} = \frac{1\ \text{kcal}\ 1\ \text{kg}}{\text{kg grd}} \ln \frac{283}{273} = 0{,}0359\ \text{kcal/grd}$$

und für das heiße Wasser

$$S_2 = \int_{T_0}^{T_2} cm \frac{dT}{T} = \frac{1\ \text{kcal}\ 1\ \text{kg}}{\text{kg grd}} \ln \frac{373}{273} = 0{,}3121\ \text{kcal/grd}.$$

Nach dem Mischen liegen 2 kg Wasser mit der Temperatur 55 °C vor. Die Entropie ist

$$S_3 = \int_{T_0}^{T_3} cm \frac{dT}{T} = \frac{1\ \text{kcal}\ 2\ \text{kg}}{\text{kg grd}} \ln \frac{328}{273} = 0{,}3671\ \text{kcal/grd}.$$

Die Gegenüberstellung ergibt demnach:

Entropie *vor* dem Mischen < Entropie *nach* dem Mischen
(0,0359 + 0,3121) kcal/grd = 0,3480 kcal/grd < 0,3671 kcal/grd.
Entropiezuwachs: ΔS = (0,3671 — 0,3480) kcal/grd = 0,0191 kcal/grd.

Die Entropie*zunahme* beim einfachen Mischvorgang kann man durch ein grobes Modell veranschaulichen. Die Entropie des warmen Wassers ist durch eine Säule aus Steinen dargestellt (Bild 283a). Jeder Stein ist ein Entropieelement $\frac{dQ_{rev}}{T}$, wobei dQ_{rev} gleich 1 und die Temperatur entsprechend 4 Temperatureinheiten der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4 ist. Daneben steht die Entropie einer gleich großen Wassermasse, deren Temperatur aber nur 2 Einheiten beträgt. Nach dem Mischen (Bild 283b) beträgt die Temperatur der gesamten Wassermasse das arithmetische Mittel, nämlich 3 Temperatureinheiten. Man sieht auf diese Weise, daß die Entropie der gesamten Wassermasse zugenommen hat.

Man nennt das Gesetz von der Zunahme der Entropie meist den

II. Hauptsatz der Wärmetheorie: (Entropiesatz) **Alle Naturvorgänge verlaufen so, daß die gesamte Entropie aller daran beteiligten Körper immer mehr zunimmt.**

Unter dem **I. Hauptsatz (Energiesatz)** versteht man das *Gesetz von der Erhaltung der Energie*. Beide Sätze beherrschen das gesamte Naturgeschehen.
Es wäre durchaus kein Verstoß gegen den I. Hauptsatz, wenn es irgendwie gelänge, eine Menge lauen Wassers ohne Arbeitsaufwand in eine warme und kalte Hälfte zu trennen. Eine derartige Maschine würde ein **Perpetuum mobile II. Art** darstellen. Sie verstößt aber gegen den II. Hauptsatz, weil hierbei die Entropie abnehmen würde. Gegen alle Erfahrung müßte in einem solchen Fall Wärme von niederer zu höherer Temperatur fließen. Gewiß kann man einem kalten Körper Wärme entziehen (siehe Wärmepumpe), aber *nur* unter Aufwand mechanischer Arbeit! Deshalb pflegt man den II. Hauptsatz auch so auszudrücken:

Wärme kann nur unter Arbeitsaufwand von niederer zu höherer Temperatur geleitet werden.

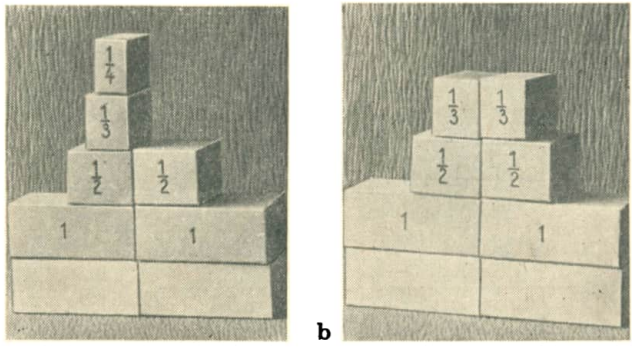


Bild 283
a) Modelldarstellung der Entropien zweier gleicher Flüssigkeitsmengen verschiedener Temperatur.
b) Die Entropie der Mischung

18. Reale Gase

18.1. Isothermen eines realen Gases

Insbesondere bei tiefen Temperaturen und hohen Drücken weicht das Verhalten der **wirklichen (realen) Gase** vom BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz ab. Bei Steigerung des Druckes vermindert sich ihr Volumen stärker, als dem Gesetz $pV = \text{konst}$ entspricht. Es macht sich bereits die gegenseitige Anziehung **(Kohäsion)** der Moleküle geltend. Infolge dieser Kohäsion entsteht, entsprechend der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit, dort, wo das Gas an die Gefäßwandung grenzt, ein zusätzlicher nach innen gerichteter Druck. Dieser ist um so stärker, je mehr Moleküle sich in der Nachbarschaft *eines* Moleküls befinden, d. h. je größer die Dichte $\varrho = \frac{m}{V}$ des Gases ist. Die Anzahl der Moleküle, von denen diese Druckverminderung ausgeht, ist der Gasdichte ebenfalls proportional. Damit ist der Druck p durch Hinzufügen eines Gliedes $a\frac{m^2}{V^2}$ zu korrigieren. Ferner dürfen die Teilchen nicht, wie man es beim idealen Gas annimmt, punktförmig betrachtet werden. Das Volumen V ist vielmehr um ein Zusatzglied mb zu vermindern, das dem eigenen Raumbedarf der Moleküle Rechnung trägt. Damit kann die Zustandsgleichung (162) wie folgt verbessert werden:

(193) $$\left(p + a\frac{m^2}{V^2}\right)(V - mb) = mRT$$

van der Waalssche Zustandsgleichung der realen Gase

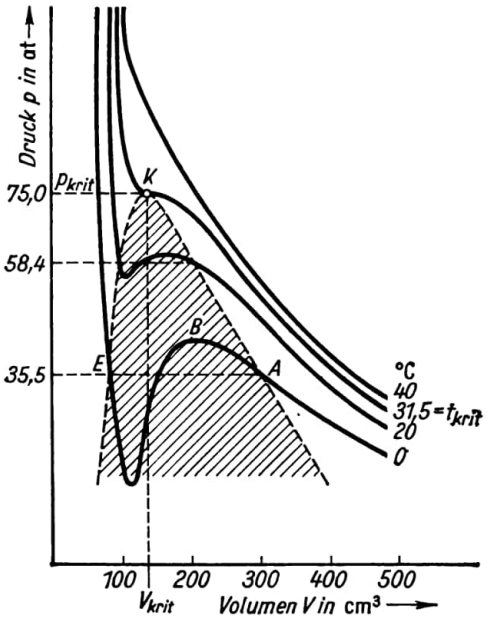


Bild 284. Isothermen von Kohlendioxid (ANDREWS-Diagramm)

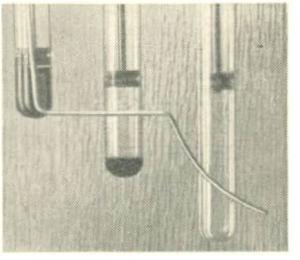


Bild 285. Verhalten eines Gases längs einer realen Isotherme

Die Isothermen sind keine Hyperbeln mehr, sondern – wie aus der Gleichung hervorgeht – Parabeln 3. Grades. Verfolgt man die Verdichtung längs einer Isotherme von rechts her, so nimmt das Volumen immer mehr ab (Bild 284). Von B ab müßte dem Kurvenverlauf zufolge trotz *abnehmenden* Volumens der Druck wieder sinken; eine etwas merkwürdige Forderung! Tatsächlich wird aber diese *nur* theoretisch existierende S-Kurve *gar nicht* durchlaufen, sondern bei A setzt die **Verflüssigung** des Gases ein. Von diesem Augenblick an bestehen längs der Geraden AE Flüssigkeit und gesättigter Dampf *nebeneinander*. Der Druck bleibt so lange *konstant*, wie noch Dampf anwesend ist. Bei E ist dann nur noch Flüssigkeit vorhanden, und der Druck steigt entsprechend der geringfügigen Kompressibilität der Flüssigkeit stark an (Bild 285).

18.2. Kritischer Zustand

Ebenso durchlaufen auch die übrigen, ähnlich gekrümmten Isothermen ein solch *horizontales Stück*, das mit *zunehmender Temperatur* immer *kürzer* wird. Handelt es sich beispielsweise um Kohlendioxid, so ist die horizontale, den Verflüssigungsvorgang darstellende Gerade bei 31,5 °C zu einem Punkt zusammengeschrumpft. Aus dem ganzen Diagramm hebt sich das schraffierte Gebiet heraus, welches kein Gas, sondern gesättigten Dampf darstellt. Mit steigender Temperatur werden die Isothermen der Hyperbelform immer ähnlicher, das Gas nähert sich dem idealen Zustand.
Den Gipfelpunkt K des schraffierten Gebietes nennt man den **kritischen Zustand** des Gases:

Oberhalb der kritischen Temperatur ist die Verflüssigung eines Gases unmöglich.

Die kritischen Daten einiger Gase sind auf der Tabelle in 13.5.2. mit vermerkt.

Beispiele: 1. Ein zugeschmolzenes Glasröhrchen enthält bei Zimmertemperatur zur Hälfte flüssiges SO_2. Bei Erwärmung siedet die Flüssigkeit unter Bildung von Dampfbläschen. Nach Erreichen des kritischen Punktes verschwindet plötzlich die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf, beide Zustände sind identisch geworden. Beim Abkühlen treten Nebel und dann „Regen"tröpfchen auf.
2. Kann eine Stahlflasche mit CO_2 bzw. Sauerstoff bei 20 °C flüssiges Gas enthalten? – Da 20 °C unter der kritischen Temperatur des Kohlendioxids liegt, tritt nach Bild 284 Verflüssigung bei 58,4 at ein. Sauerstoff kann nur unterhalb von —119 °C als Flüssigkeit existieren.

18.3. Verflüssigung der Gase

Zur Gasverflüssigung dient heute allgemein das von Hampson erfundene und von Linde 1895 verbesserte Verfahren. Es beruht auf dem

Joule-Thomson-Effekt:
Bei der gedrosselten Entspannung eines Gases tritt eine geringe Temperaturänderung ein.

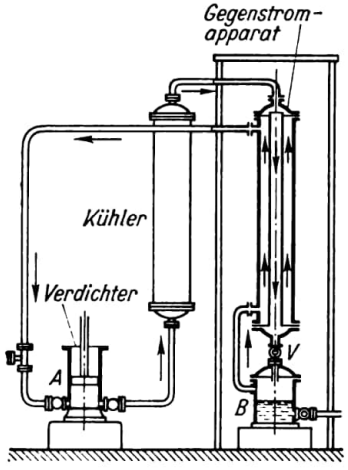


Bild 286. Schema der Luftverflüssigung

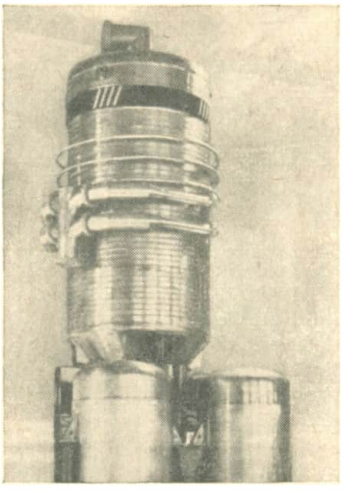


Bild 287. Rektifizierkolonne zur Trennung Stickstoff – Sauerstoff

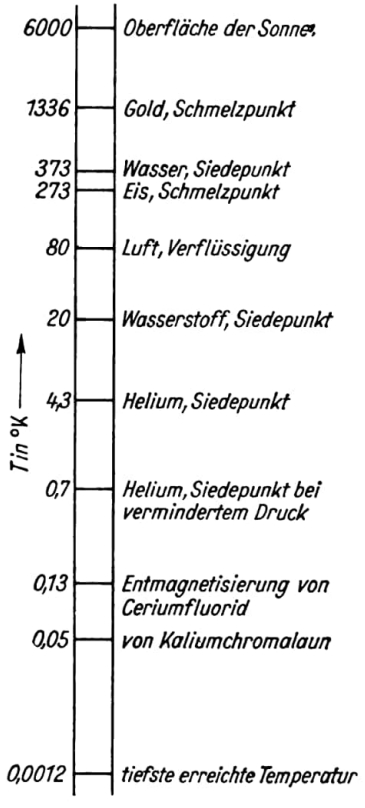


Bild 288. Einige absolute Temperaturen in logarithmischem Maßstab

Der in 16.2. beschriebene Versuch von GAY-LUSSAC war in der Tat ursprünglich *nur ungenau* angestellt worden. Der dort abgeleitete Satz trifft zwar für das ideale Gas zu, nicht aber für die wirklichen Gase. Wenn man z. B. Luft unter Druck ausströmen läßt (drosselt), findet je Atmosphäre Druckabnahme eine Abkühlung um 0,266 grd statt. Lediglich bei den Gasen Wasserstoff, Helium und Neon tritt der Effekt erst unterhalb einer für jedes Gas eigentümlichen Temperatur ein (Inversionstemperatur). Die bei A (Bild 286) angesaugte Luft wird komprimiert und strömt durch das Drosselventil V in den Raum B, wobei sie sich abkühlt. Diese Luft wird rückwärts geleitet und umspült im *Gegenstrom* die neu ankommende, wodurch diese vorgekühlt wird. Die Temperatur sinkt nach mehrmaligem Kreislauf so lange, bis sich nach Unterschreiten der kritischen Temperatur in B flüssige Luft bildet.

Die flüssige Luft bewahrt man in doppelwandigen Gefäßen auf, wo sie unter steter Verdampfung eine Temperatur von —190 °C beibehält.

Da flüssiger Sauerstoff bei einer um 13 grd höheren Temperatur als der Stickstoff siedet, ist es mit besonderen Rektifizierkolonnen möglich, beide Gase zu trennen und so reinen Sauerstoff und Stickstoff herzustellen (Bild 287).
Durch Verdampfung des bei 4,2 °K siedenden flüssigen Heliums im Vakuum kann dessen Temperatur bis auf 0,84 °K weiter gesenkt werden. Damit ist die tiefstmögliche, nach diesem Verfahren erzielbare Temperatur erreicht.

Eine noch weitergehende Temperatursenkung gelingt durch Entmagnetisierung von paramagnetischen Salzen (bestimmte Alaune) im Kältebad. Es wurde damit eine Temperatur von 0,0012 °K, d. h. fast der absolute Nullpunkt erreicht (Bild 288).

19. Kinetische Wärmetheorie

Die Einsicht in zahlreiche physikalische Erscheinungen wird wesentlich vertieft, wenn man sie vom Standpunkt der *einzelnen* Moleküle aus und in deren wechselseitigem Zusammenwirken betrachtet.

19.1. Avogadrosche Konstante

Die kleinsten Teilchen eines Gases können sowohl Atome als auch Moleküle sein. Im folgenden bezeichnen wir beide Arten schlechthin als *Moleküle*. In den meisten Fällen genügt es, sie sich als *kleine elastische Kügelchen* vorzustellen, die in den Gasen durch *weite* Zwischenräume voneinander getrennt sind.
Wieviel Moleküle die Raumeinheit eines Gases enthält, ist erstmalig von dem Österreicher LOSCHMIDT (1865) errechnet worden:

Loschmidtsche Konstante N_L: 1 cm³ eines beliebigen Gases enthält bei 0 °C und 760 Torr $27 \cdot 10^{18}$ (Trillionen) Moleküle.

Legt man aber die Masse von M kg zugrunde (M relative Molekular- bzw. Atommasse), so ist die darin enthaltene Anzahl von Teilchen stets gleich groß. Bezüglich der Gase ist dies der Inhalt des Gesetzes von AVOGADRO (13.5.1.). Unabhängig vom vorliegenden Stoff gilt aber stets

(194) $$\boxed{N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}\ 1/M\ \text{kg}}$$ **Avogadrosche Konstante N_A**

Ihr reziproker Wert stellt die Masse eines einzelnen Moleküls bzw. Atoms dar:

(195) $$\boxed{m_0 = \frac{1}{N_A}}$$ **Masse m_0 eines einzelnen Teilchens**

Beispielsweise erhält man für die Masse eines Wasserstoffatoms, dessen relative Atommasse $M = 1{,}008$ beträgt, den Wert

$$m_0 = \frac{M\ \text{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = \frac{1{,}008\ \text{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Nimmt man weiterhin an, daß die Atome kugelförmig sind und sich in einem festen Körper alle gegenseitig berühren, so erfüllt jedes einzelne einen kleinen würfelförmigen Raum. Die Kantenlänge eines solchen Würfels ist

(196) $$\boxed{d = \sqrt[3]{\frac{1}{\varrho N_A}}}$$ **Atomdurchmesser d**

Wie sich beim Einsetzen von Zahlenwerten ergibt, liegt dieser in der Größenordnung von 10^{-10} m.

Um sich die ungeheure Größe der Avogadroschen Konstanten vorzustellen, denke man sich die Moleküle eines Liters Wasser irgendwie markiert und gleichmäßig auf alle Meere der Erde verteilt. Schöpft man dann aus dem Meer wieder einen Liter heraus, so enthält dieser immer noch mehr als 12000 der markierten Moleküle.

Zur Berechnung der Avogadroschen Konstanten können die verschiedensten Methoden angewandt werden, die alle zum gleichen Ergebnis führen. Es sei hier die Methode von Perrin (1908) beschrieben.
Sie geht von der barometrischen Höhenformel (11.4.4.) aus. Da sich die Drücke eines Gases wie die in der Raumeinheit enthaltenen Anzahlen von Molekülen verhalten, setzt man

$$\frac{N_0}{N} = e^{\frac{\varrho_0 g h}{p_0}};\ \text{hieraus folgt}$$

$$\frac{\varrho_0 g h}{p_0} = \ln (N_0/N).$$

Die Zustandsgleichung (162) liefert $\varrho_0 = \frac{m}{V} = \frac{p_0}{RT}$ und damit

$$gh = \ln (N_0/N) RT.$$

Dividiert man beiderseits durch die Masse m_0 eines Moleküls, so ergibt sich nach (195) die Avogadrosche Konstante

$$\frac{1}{m_0} = N_A = \frac{\ln (N_0/N) RT}{m_0 g h}.$$

Um N_A zu berechnen, stellte Perrin eine kleine „künstliche Atmosphäre" aus einem Sol von winzigen Mastixkügelchen in Wasser her.[1]) Die Dichteverteilung dieser „Riesenmoleküle" entspricht im Gleichgewicht genau der einer idealen Atmosphäre und kann durch direktes Auszählen im Mikroskop ermittelt werden (Bild 289).

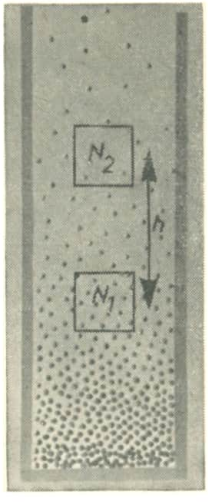


Bild 289. Abnahme der Teilchendichte mit der Höhe

[1]) Da beim Eingießen von alkoholischer Mastixlösung in Wasser Teilchen von verschiedenster Größe entstehen, mußte Perrin erst das Sol in einzelne Anteile bestimmter Teilchengrößen zerlegen

Einer seiner zahlreichen und mühevollen Versuche lieferte z. B. ein Verhältnis der Teilchenzahlen $\frac{N_1}{N_2} = \frac{100}{12}$ innerhalb eines Höhenunterschiedes von $h = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ m. Das Gewicht $G = m_0 g$ eines einzelnen Kügelchens ermittelte er zu $7{,}22 \cdot 10^{-17}$ N, so daß bei 20 °C

$$N_A = \frac{\ln(100/12) \cdot 8314 \text{ Ws } 293 \text{ grd}}{M \text{ kg grd } 7{,}22 \cdot 10^{-17} \text{ N } 1{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 6{,}5 \cdot 10^{26}\, 1/M \text{ kg}.$$

Beispiele: 1. Wieviel Moleküle enthält 1 cm³ Wasser? – Mit der Gesamtmasse m ist die Anzahl der Teilchen

$$N = \frac{m}{m} = mN_A = \frac{0{,}001 \text{ kg} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}}{18 \text{ kg}} = 3{,}3 \cdot 10^{22}.$$

(Man vergleiche mit der Loschmidtschen Konstanten N_L.)

2. Wie groß ist die absolute Masse des Kohlenstoffatoms? – Nach dem Periodensystem ist die relative Atommasse $M = 12$. Nach Gleichung (195) ergibt sich

$$m_0 = \frac{M \text{ kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = \frac{12 \text{ kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 1{,}99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

3 Wie groß ist der Durchmesser eines Kupferatoms, wenn Kupfer die Dichte $\varrho = 8{,}9 \text{ kg/dm}^3$ und die relative Atommasse $M = 63{,}54$ hat? –

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{\varrho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{63{,}54 \text{ kg m}^3}{8{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}}} = 2{,}28 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

19.2. Molekulargeschwindigkeit

Schon bei früherer Gelegenheit haben wir Erscheinungen kennengelernt, die auf die Eigenbewegung der Moleküle hindeuten: Brownsche Bewegung kleiner Teilchen in Flüssigkeiten und Diffusion. Vor allem aber lassen sich viele Gesetze der Wärmelehre besser verstehen und begründen, wenn man davon ausgeht, daß sich die Moleküle der Gase wie *vollkommen elastische*, in unaufhörlicher Bewegung befindliche Kugeln verhalten.

Infolge ihrer großen Anzahl werden sie dabei fortgesetzt und in der unregelmäßigsten Weise aneinanderprallen. Das einzelne Teilchen wird dabei seinen Impuls, seine kinetische Energie und Bewegungsrichtung dauernd ändern müssen. Insgesamt aber muß die Energiesumme aller Teilchen erhalten bleiben, wenn keine Energie nach außen hin abgegeben wird. Da vorläufig kein Anhaltspunkt gegeben ist, die dauernd wechselnde Geschwindigkeit der Teilchen rechnerisch zu erfassen, nehmen wir an, daß der Geschwindigkeits*betrag aller* Moleküle *gleich groß* sei und einem *durchschnittlichen* Betrag v entsprechen möge. Mit dieser Geschwindigkeit stoßen sie auch gegen die Gefäßwände und üben auf diese eine Kraft aus, infolge deren der meßbare Druck des Gases entsteht.

19.2.1. Mittlere energetische Geschwindigkeit

Wegen der äußerst unterschiedlichen Stoßrichtung der einzelnen Teilchen muß eine weitere grobe Schematisierung vorgenommen werden: Wir nehmen an, daß das ein-

schließende Volumen würfelförmige Gestalt habe und je $^1/_6$ aller Teilchen in *senkrechter* Richtung auf je eine Würfelfläche prallt.
In der Volumeneinheit seien N_L Moleküle enthalten. Dann stoßen in der Zeit dt so viel Moleküle gegen eine Würfelfläche A, wie in einem Zylinder der Länge $v \cdot dt$ und dem Querschnitt A enthalten sind, d. h. $\frac{N_L}{6} v \cdot dt \cdot A$. Dabei ist die Geschwindigkeit vor dem Stoß $+ v$ und nach der Reflexion $- v$. Das ergibt nach 6.1. eine Impulsänderung von $2m_0v$ je Molekül. Alle Moleküle liefern den Gesamtimpuls

$$dI = 2\frac{N_L}{6} m_0 v^2 A \, dt.$$

Die Kraft F ist die zeitliche Änderung des Impulses $\frac{dI}{dt} = \frac{N_L m_0 v^2 A}{3}$ und ihr Quotient mit der Fläche A der Druck

$$\boxed{p = \frac{m_0 N_L v^2}{3}} \quad \textbf{Gasdruck } p$$

Nun ist $m_0 N_L$ gleich der Masse m der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle, d. h. gleich der Dichte ϱ des Gases. Damit wird

$$p = \frac{\varrho v^2}{3} \text{ bzw. mit } \varrho = \frac{m}{V}$$

$$pV = m\frac{v^2}{3}.$$

Verbindet man die linke Seite dieser Gleichung mit der Zustandsgleichung (162) $pV = mRT$, so ergibt sich weiterhin

$$\frac{mv^2}{3} = mRT,$$

womit sich die Möglichkeit eröffnet, die mittlere Geschwindigkeit der unsichtbar kleinen Moleküle aus den mit einfachen Mitteln meßbaren Zustandsgrößen des Gases zu berechnen. Da die linke Seite dieser Gleichung bis auf einen Zahlenfaktor gleich der kinetischen Energie der Gasmoleküle ist, nennt man die hieraus hervorgehende Geschwindigkeit

(197) $$\boxed{v = \sqrt{3RT}}$$ **mittlere energetische Geschwindigkeit v**

Beispiel: Berechne die mittlere energetische Geschwindigkeit der Moleküle des Sauerstoffs, des Wasserstoffs und des Joddampfes ($M = 253{,}8$) bei 20 °C! – Für Sauerstoff erhält man

$$v = \sqrt{3RT} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8314 \text{ Ws } 293 \text{ grd}}{\text{grd } 32 \text{ kg}}} = 478 \text{ m/s}$$

(1 Ws = 1 kg m²/s²). Für Wasserstoff ergibt die gleiche Formel

$$v = 1912 \text{ m/s} \quad \text{bzw. für Joddampf} \quad v = 170 \text{ m/s}.$$

19.2.2. Molekularenergie und Temperatur

Die Gleichung $\frac{mv^2}{3} = mRT$ kann man auch umformen in

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} mRT. \tag{198}$$

Da m die gesamte Masse des Gases darstellt, ist $\frac{mv^2}{2}$ die Summe der kinetischen Energien aller Einzelmoleküle. Die Gleichung sagt dann aus:

Die mittlere kinetische Energie der Moleküle eines Gases hängt nur von der absoluten Temperatur ab und ist ihr proportional.

Außer dieser kinetischen Energie ist keine potentielle vorhanden, so daß dieser Ausdruck die gesamte innere Energie U eines Gases darstellt. Letztere muß auch vom Volumen unabhängig sein. Verringert man z. B. das dem Gas dargebotene Volumen, so kann sich für ein einzelnes Teilchen nur die im freien Flug zurückgelegte Wegstrecke ändern. Die Anzahl der je Zeiteinheit erfolgenden Zusammenstöße wird dadurch entsprechend größer. Da die Stöße aber vollkommen elastisch vor sich gehen, kann sich keine Energieänderung ergeben. Damit hat sich der in 16.2. ausgesprochene Satz nochmals bestätigt: Die innere Energie eines Gases ist vom Volumen unabhängig.

Nach Kürzen der letzten Gleichung entsteht nun weiterhin

$$\frac{v^2}{2} = \frac{3}{2} RT.$$

Dividiert man beiderseits durch die AVOGADROsche Konstante N_A und beachtet noch, daß der reziproke Wert von N_A die Masse m_0 des einzelnen Teilchens darstellt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Dies ist die **mittlere kinetische Energie eines einzelnen Teilchens.**

Abgesehen von der Temperatur T stehen rechts nur noch die beiden Konstanten R und N_A. Ihr Quotient ist

$$\frac{R}{N_A} = \frac{8314 \text{ Ws } M \text{ kg}}{M \text{ kg } 6{,}023 \cdot 10^{26}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/grd}.$$

Man nennt ihn

$$\boxed{k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/grd}} \quad \textbf{Boltzmannsche Konstante } k \tag{199}$$

In ihr sind keinerlei individuelle Eigenschaften eines Gases mehr enthalten. Sie ist eine **universelle Naturkonstante.**

Mit Hilfe dieser Konstanten wird

(200) $$\boxed{\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2} kT}$$ **mittlere kinetische Energie eines einzelnen Moleküls**

19.2.3. Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Die soeben aufgestellten Gleichungen gehen von der *willkürlichen* Annahme aus, daß alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit v haben. Dies ist aber in Wirklichkeit *nicht* der Fall, vielmehr nehmen die Moleküle infolge der fortgesetzten Zusammenstöße die *verschiedensten* Geschwindigkeiten an.
Es handelt sich hierbei um **schiefe Stöße** gleicher Massen, wobei die Stoßrichtung mit der Verbindungsgeraden der Kugelmitten *nicht* zusammenfällt (Bild 290). Die Impulse sind in je eine tangentiale und eine normale Komponente zu zerlegen, wobei dann die tangentialen Komponenten nach dem Stoß unverändert bleiben, während die normalen Komponenten (6.4.1.) ausgetauscht werden. Setzt man die Komponenten nach dem Stoß wieder zusammen, so sieht man, daß die Impulse sich nach Richtung und Größe verändert haben. Es können bei entsprechend günstiger Häufung vieler aufeinanderfolgender Stöße sowohl sehr große als auch sehr kleine Geschwindigkeiten entstehen. In der ungeheuren Anzahl von Molekülen wird also im Durchschnitt jede Geschwindigkeit mit einem bestimmten Prozentsatz vertreten sein.
Auf Grund wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen gelang es MAXWELL, zu berechnen, welcher Bruchteil $\mathrm{d}N/N$ aller Moleküle N in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich $\mathrm{d}w$ liegt, wenn die mittlere energetische Geschwindigkeit v gegeben ist:

(201) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{N} = \sqrt{\frac{54}{\pi}} \frac{w^2}{v^3} \mathrm{e}^{-\frac{3w^2}{2v^2}} \mathrm{d}w}$$ **Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell**

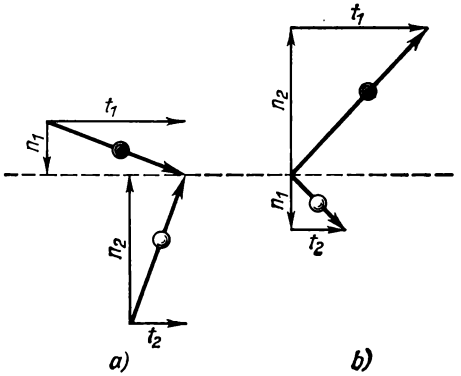


Bild 290. Schiefer Stoß zweier Moleküle
a) vor dem Stoß,
b) nach dem Stoß

Für den vorhin behandelten Fall des Sauerstoffs ergab sich bei 20 °C eine mittlere energetische Geschwindigkeit von $v = 478$ m/s. Will man nun wissen, wieviel Moleküle eine Geschwindigkeit zwischen 300 und 400 m/s haben, muß man für w den Mittelwert 350 dieses Intervalls und für dw die „Intervallbreite" (400—300) m/s = = 100 m/s setzen:

$$\frac{dN}{N} = \frac{4{,}146 \cdot 350^2}{478^3\, e^{\frac{3 \cdot 350^2}{2 \cdot 478^2}}} \cdot 100 = 0{,}2096 = 20{,}96\,\%.$$

Auf diese Weise entstehen die Zahlen der folgenden Übersicht.

Molekulargeschwindigkeiten (in m/s) in Sauerstoff bei 20 °C zwischen	$\frac{dN}{N}$ (in %)
0 und 100	0,95
100 und 200	7,48
200 und 300	15,99
300 und 400	20,96
400 und 500	20,38
500 und 600	15,68
600 und 700	9,88
700 und 800	5,19
800 und 900	2,31
900 und 1000	0,87
zusammen	99,69 %

Grafisch dargestellt, ergibt sich eine unsymmetrische Kurve (Bild 291). Man sieht aus ihr, daß geringe Geschwindigkeiten ebenso wie extrem große Einen relativ geringen Anteil ausmachen.

Die MAXWELLsche Verteilungsfunktion (201) nimmt eine etwas andere Form an, wenn man die darin enthaltene mittlere energetische Geschwindigkeit v gemäß Gleichung (197) durch $v = \sqrt{3\,RT}$ ersetzt. Sie lautet dann

$$\frac{dN}{N} = \frac{4w^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2RT}\right)^{3/2} e^{-\frac{w^2}{2RT}}\, dw. \tag{202}$$

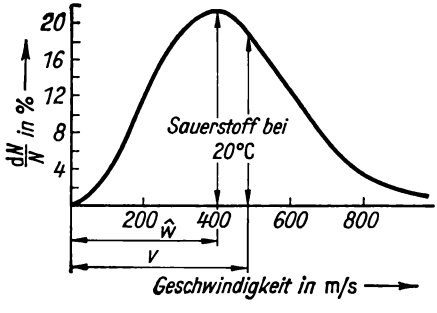


Bild 291. Geschwindigkeitsverteilung in Sauerstoff bei 20 °C

Von Interesse ist es ferner, welcher Geschwindigkeitsbetrag $\hat{w}$ mit der größten Wahrscheinlichkeit vertreten ist, d. h. am häufigsten vorkommt. Bei dem in der Tabelle genannten Beispiel liegt $\hat{w}$ zwischen 300 und 400 m/s, da diese Gruppe mit dem größten Prozentsatz vorkommt. Genauer läßt sie sich indessen ermitteln, wenn man nach den Regeln der Differentialrechnung das Maximum der Funktion (202), das auch dem Maximum der auf Bild 291 gezeichneten Kurve entspricht, feststellt. Da die Gestalt der Kurve aber von der vorgegebenen Intervallbreite dw abhängt, muß man von der Funktion $f(w) = \frac{dN/N}{dw}$ ausgehen und erhält dann durch Differenzieren

$$f'(w) = 2w\, e^{-\frac{w^2}{2RT}} - w^2 \frac{w}{RT} e^{-\frac{w^2}{2RT}} = 0$$

und hieraus den Maximalwert

$$\hat{w} \sqrt{2RT}.$$

Ein Vergleich mit der mittleren energetischen Geschwindigkeit (197) $v = \sqrt{3RT}$ zeigt also, daß die am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit etwas kleiner ist:

(203) $$\boxed{\hat{w} = v\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165\, v}$$ **wahrscheinlichste (am häufigsten vorkommende) Geschwindigkeit $\hat{w}$**

Dementsprechend folgt auch aus Gleichung (200)

(204) $$\boxed{\frac{m_0 \hat{w}^2}{2} = kT}$$ **wahrscheinlichste (am häufigsten vorkommende) Energie eines Moleküls**

Beispiel: Berechne die wahrscheinlichsten Geschwindigkeiten der Moleküle des Wasserstoffs, Sauerstoffs und Jods an Hand des Beispiels von S. 250 und Gleichung (203) bei 20 °C. – Man hat nach Gleichung (203) $\hat{w}$ (Sauerstoff) = 0,8165 · 478 m/s = 390,3 m/s. Für H_2 ergibt sich $\hat{w}$ = 1561 m/s und für J_2 ist $\hat{w}$ = 139 m/s.

19.3. Theorie der spezifischen Wärme

Die in der Gleichung (198)

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} mRT$$

stehende kinetische Energie eines Gases stellt also gleichzeitig seine innere Energie U dar, die andererseits mit Hilfe der spezifischen Wärme c_v nach (173) durch den Ausdruck

$$dU = mc_v\, dT$$

gegeben ist. Nimmt man nun an, daß die spezifische Wärme c_v im gesamten Temperaturbereich konstant ist (was allenfalls nur für das ideale Gas zutreffen kann), so erhält man

$$mc_vT = \frac{3}{2} mRT \text{ oder kürzer}$$

$$c_v = \frac{3}{2} R .$$

Da wir über die besonderen Eigenschaften, z. B. die Gestalt der einzelnen Teilchen, noch keine weitere Aussage gemacht haben, als daß sie kugelförmig sind und sich wie punktförmige Körper geradlinig bewegen, muß dieser Ausdruck auch für solche Moleküle zutreffen, für die eine solche Vorstellung am ehesten zutrifft. Das sind diejenigen der *einatomigen Gase.*

Demnach ist

(205) $\boxed{c_v = \frac{3}{2} R}$ **spezifische Wärme c_v aller 1atomigen Gase bei konstantem Volumen**

Nach Einsetzen der Zahlenwerte, z. B. für Helium mit $M = 4$, erhalten wir

$$c_v = \frac{3 \cdot 8314 \text{ Ws}}{2 \cdot 4 \text{ kg grd}} = 3117{,}75 \text{ Ws/kg grd} = 0{,}745 \text{ kcal/kg grd}$$

in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Tabellenwert (13.5.2.) von 0,75 kcal/kg grd. Nach (175) erhalten wir ferner für die spezifische Wärme bei konstantem Druck

$$c_p = c_v + R = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R \text{ sowie}$$

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} = 1{,}67 .$$

Kleine Abweichungen von den Tabellenwerten liegen z. T. daran, daß wir hier von einem molekularmechanisch idealen Gas ausgegangen sind.

Bei weiteren Schlußfolgerungen muß man aber die Gestalt der Moleküle beachten. Die Moleküle der Edelgase und Metalldämpfe sind *1atomig.* Man darf ihnen kugelförmige Gestalt zuschreiben.

Bei *2atomigen* Molekülen tritt eine neue Erscheinung auf. Sie können sich nicht nur geradeaus bewegen **(Translation),** sondern vermögen als *hantelförmige* Gebilde noch um zwei senkrecht aufeinanderstehende Achsen zu rotieren. Zwar können sie auch um ihre Längsachse rotieren, doch ist wegen der Kleinheit des Trägheitsmomentes die entsprechende kinetische Energie zu vernachlässigen. Jede Bewegungsmöglichkeit bezeichnet man als **Freiheitsgrad.** Die Translation enthält 3 Freiheitsgrade, d.h. Bewegungsmöglichkeiten nach den 3 Koordinatenachsen des Raumes. Es

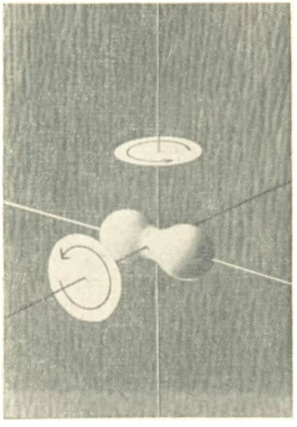


Bild 292. Die 2 Freiheitsgrade der Rotation eines hantelförmigen (zweiatomigen) Molekül

ist nun von CLAUSIUS und MAXWELL folgendes Prinzip der **Gleichverteilung der Energie** erkannt worden:

Äquipartitionsprinzip: Die einem Körper zugeführte Energie verteilt sich gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade.

Danach beträgt, ausgehend von (205), die spezifische Wärme je Freiheitsgrad $\frac{R}{2}$. Da ein 2atomiges Molekül (Bild 292) im ganzen 5 Freiheitsgrade (3 der Translation und 2 der Rotation) hat, gilt daher

(206)

$$c_v = \frac{5}{2} R$$

spezifische Wärme aller 2atomigen Gase (bei konstantem Volumen)

$$c_p = \frac{7}{2} R$$

(bei konstantem Druck)

$$\varkappa = \frac{7}{5} = 1{,}4 .$$

Der Vergleich dieser theoretischen Werte mit den experimentell gewonnenen zeigt eine so gute Übereinstimmung, daß damit die Richtigkeit aller über den Mechanismus der Molekularbewegung gemachten Annahmen bewiesen ist.
Bei *höheren* Temperaturen nimmt die *spezifische Wärme* aller 2atomigen Gase zu. Dies erklärt sich dadurch, daß noch ein weiterer Freiheitsgrad, nämlich die *gegenseitige Schwingung* der im Molekül verbundenen Atome, auftritt. Noch komplizierter werden die Verhältnisse bei mehratomigen Molekülen.
Die Atome der festen Körper führen elastische Schwingungen um die festliegenden Punkte ihres Raumgitters aus. Sie sind **lineare Oszillatoren,** die im Durchschnitt *außer der kinetischen gleich viel potentielle* Energie enthalten. Daher ergibt sich

(207)

$$c_v = 2 \cdot \frac{3}{2} R = 3R$$

spezifische Wärme c_v der festen Körper

Selbstverständlich nimmt man für praktische Berechnungen nicht die theoretischen, sondern die *experimentell* ermittelten Werte; denn die Theorie hat die höhere Aufgabe, Wege zu neuen Erkenntnissen zu erschließen. Die Abnahme der spezifischen Wärme mit sinkender Temperatur, insbesondere in der Nähe des absoluten Nullpunktes, vermag die kinetische Gastheorie indessen nicht zu klären. Hier schafft erst die **Quantentheorie** weitere Klarheit.

Beispiel: Berechne nach der letzten Gleichung die spezifische Wärme des Kupfers. – Wegen $M = 63{,}6$ ergibt sich

$$c_v = 3R = \frac{3 \cdot 8314 \text{ Ws}}{63{,}6 \text{ kg grd}} = 392{,}2 \text{ Ws/kg grd} = 0{,}094 \text{ kcal/kg grd}$$

(gemessener Wert $c_v = 0{,}092$ kcal/kg grd).

19.4. Stoßzahl und mittlere freie Weglänge

Bei seinem Weg durch das Gewimmel der Gasmoleküle muß ein einzelnes Teilchen zahlreiche Zusammenstöße erleiden. Diese **mittlere Stoßzahl je Zeiteinheit** läßt sich auf einfache Weise ermitteln. Im Augenblick des Zusammenstoßes haben die Mittelpunkte zweier Moleküle, deren Radius r sei, die Entfernung $d = 2r$ (Bild 293). Ein Zusammenstoß erfolgt, sobald der Mittelpunkt eines Moleküls A in den schraffiert gezeichneten **Wirkungsquerschnitt** des Moleküls B *eindringt*.
Wir nehmen nun an, alle Moleküle außer B seien *punktförmig* und ständen *still*. Fliegt jetzt das Molekül B durch den Raum, so überstreicht sein Wirkungsquerschnitt in der Zeit dt einen Zylinder des Inhalts $\pi d^2 v\, dt$ (Bild 294). Enthält ein Kubikzentimeter N Moleküle, dann befinden sich in diesem Zylinder $\pi d^2 v N\, dt$ Teilchen.

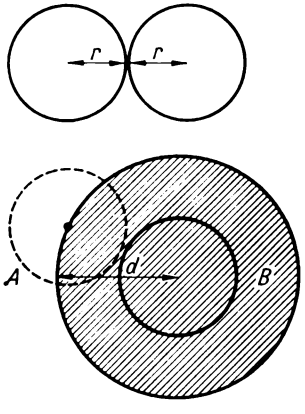


Bild 293. Wirkungsquerschnitt eines Moleküls

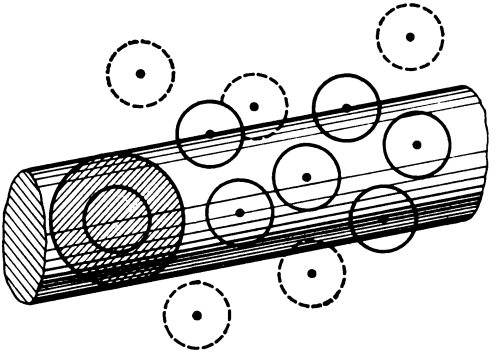


Bild 294. Der Wirkungsquerschnitt eines Moleküls trifft alle ausgezogenen Moleküle, verfehlt aber die punktiert angedeuteten

Ein Molekül erleidet daher je Zeiteinheit $\pi d^2 v N$ Zusammenstöße. Berücksichtigt man weiter, daß sich nicht nur dieses eine, sondern auch alle übrigen Moleküle gegenseitig bewegen, so ergibt eine verbesserte Rechnung

(208) $$\boxed{z = \pi \sqrt{2}\, d^2 v N}$$ **mittlere Stoßzahl z eines Moleküls je Zeiteinheit**

In dieser Zeiteinheit legt das Molekül eine Strecke zurück, deren Länge gleich dem Zahlenwert der Geschwindigkeit v ist. Dann ist die Strecke zwischen 2 Zusammenstößen im Durchschnitt gleich $\frac{v}{z}$. Diese nennt man die mittlere freie Weglänge

(209) $$\boxed{\lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, d^2 N}}$$ **mittlere freie Weglänge λ**

Bei Kenntnis des Wirkungsradius d läßt sich die mittlere freie Weglänge leicht berechnen. Als Beispiele führen wir folgende Werte an:

Stoff	O_2	N_2	H_2
Wirkungsradius d	2,98	3,18	$2{,}47 \cdot 10^{-8}$ cm

Bei $T_0 = 273\,°\mathrm{K}$ und $p_0 = 760$ Torr entspricht die Teilchenzahl N der Loschmidtschen Konstanten N_L ($27 \cdot 10^{18}$ je cm^3). Unter anderen, davon abweichenden Bedingungen muß N erst berechnet werden. Dies läßt sich leicht durchführen, wenn man von der Gleichung (161)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

ausgeht. Dividiert man beiderseits durch die Masse m, so erhält man

$$\frac{p}{\varrho T} = \frac{p_0}{\varrho_0 T_0}.$$

Die Dichte ϱ aber ist das Produkt aus der Masse m_0 eines Moleküls mit der Teilchenzahl N je Kubikzentimeter:

$$\frac{p}{m_0 N T} = \frac{p_0}{m_0 N_L T_0}.$$

Hiermit ist die gesuchte Teilchenzahl

$$N = \frac{N_L p T_0}{p_0 T}.$$

Da in Gleichung (209) N im Nenner steht, ergibt sich:

Die mittlere freie Weglänge ist bei konstanter Temperatur dem Druck umgekehrt proportional.

Beispiele: 1. Für Wasserstoff ist nach (209) die mittlere freie Weglänge bei 0 °C und 760 Torr

$$\lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, d^2 N} = \frac{1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm^3}}{\pi \sqrt{2} \cdot 2{,}47^2\ \mathrm{cm^2} \cdot 27 \cdot 10^{18}} = 1{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}\,.$$

Demnach erleidet ein Wasserstoffmolekül auf einer Strecke von 1 cm fast 100000 Zusammenstöße, womit die Bahn zu einer völlig unregelmäßigen Zickzacklinie wird.

2. Die Zahl der sekundlichen Zusammenstöße ist hier

$$z = \frac{v}{\lambda} = \frac{19{,}1 \cdot 10^4\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s}\ 1{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}} = 13{,}9 \cdot 10^9\ 1/\mathrm{s},$$

d. h. über 10 Milliarden je Sekunde!

3. Berechne die freie Weglänge in Wasserstoff bei 20 °C und einem Druck von 10^{-6} Torr. – Die Teilchenzahl N ist in diesem Fall

$$N = \frac{N_L p T_0}{p_0 T} = \frac{27 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-6} \cdot 273}{\mathrm{cm^3}\ 760 \cdot 293} = 3{,}31 \cdot 10^{10}\ \text{je cm}^3\ \text{und}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, d^2 N} = \frac{1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm\ cm^2}}{\pi \sqrt{2} \cdot 2{,}47^2\ \mathrm{cm^2} \cdot 3{,}31 \cdot 10^{10}} = 1{,}11 \cdot 10^4\ \mathrm{cm}\ \text{(d. i. rund 100 m!)}.$$

20. Ausbreitung der Wärme

Die Wärmeenergie kann sich auf folgende Weise ausbreiten:

1. Konvektion: Mitführung von Wärme durch strömende Flüssigkeiten und Gase;

2. Wärmeleitung: Ausbreitung von Wärmeenergie innerhalb eines Körpers;

3. Wärmeübergang: Übertragung von Wärmeenergie bei der Berührung von Körpern verschiedener Temperatur;

4. Wärmestrahlung: Abstrahlung von Wärmeenergie auch durch den leeren Raum.

Da für die Wärmestrahlung Gesetze gelten, denen alle elektromagnetischen Wellen gehorchen, wird diese nicht hier, sondern erst später (Strahlungsgesetze, Abschnitt 33.) behandelt.
Im Einklang mit allen Erfahrungen sowie auch als Folgerung aus dem II. Hauptsatz (17.5.3.) ist grundsätzlich festzustellen:

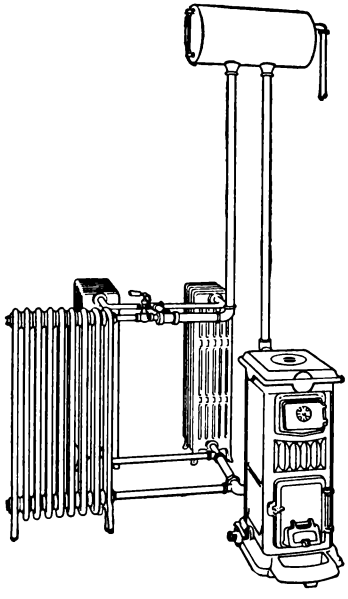
Die Wärmeenergie geht von selbst nur von Stellen höherer Temperatur zu Stellen niederer Temperatur über, niemals umgekehrt.

20.1. Konvektion

Da erwärmte Flüssigkeiten und Gase eine geringere Dichte als kalte haben, können sich durch den entstehenden Auftrieb **Strömungen** bilden. Wenn die Erwärmung von unten erfolgt, tritt in geschlossenen Räumen oder Rohrsystemen eine *Zirkulation* ein. Es strömt also nicht die Wärmeenergie selbst, sondern das *Medium*, welches die Energie mit sich führt; daher die Bezeichnung **Mitführung** oder **Konvektion.** Die Strömung selbst kann laminar oder turbulent sein.

Beispiele: 1. Die vom Ofen erhitzte Luft strömt zur Zimmerdecke, kühlt sich dort ab und senkt sich dann wieder nach unten.

2. In der Warmwasserheizung (Bild 295) strömt das heiße Wasser aus dem oberen Teil des Kessels über ein Ausgleichgefäß (Boiler) in die Heizkörper und fließt abgekühlt wieder in den Kessel zurück.



3. Im Schornstein ziehen die heißen Rauchgase nach oben.

4. Kleidungsstücke und Betten „wärmen", weil die zwischen den Maschen des Gewebes und den Federn eingeschlossene Luft (ein schlechter Wärmeleiter) am Zirkulieren gehindert wird.

Bild 295. Warmwasser-Heizanlage

20.2. Wärmeleitung

Man unterscheidet **gute und schlechte Wärmeleiter.** Am besten leiten die Metalle, schlecht leiten keramische Stoffe, am schlechtesten die Luft.
Das mehr oder weniger gute Wärmeleitvermögen eines Stoffes wird meßbar, wenn man ein beiderseits ebenes Probestück (Bild 296) daraus herstellt und die eine Fläche z. B. mittels einer elektrischen Heizplatte auf konstanter Temperatur ϑ_1 hält. Die gegenüberliegende Fläche grenzt an eine Kühlvorrichtung, in der durchfließendes Wasser die übergehende Wärme abführt. Nach einiger Zeit stellt sich ein Gleich-

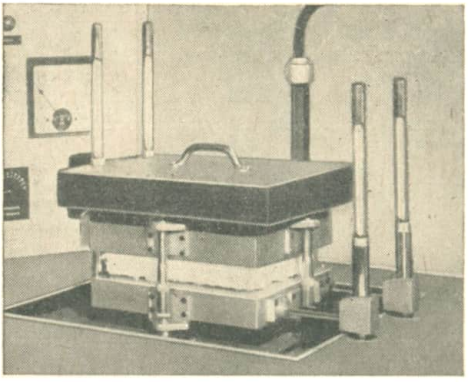


Bild 296. Messung des spezifischen Wärmeleitvermögens

gewichtszustand ein, in dem das Kühlwasser die konstant bleibende Temperatur ϑ_2 annimmt. (Damit keine Verwechslung mit der Zeit t vorkommen kann, wird in den folgenden Gleichungen die Temperatur mit dem Buchstaben ϑ bezeichnet.)
Aus der Menge des je Zeiteinheit erwärmten Wassers ergibt sich die übergehende Wärmemenge, d. h. der **Wärmefluß** $\frac{Q}{t}$. Man findet, daß er proportional zur Temperaturdifferenz $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ und zur Größe A der beiden Flächen sowie umgekehrt proportional zur Dicke l des Prüflings ist. Der Proportionalitätsfaktor hängt vom vorliegenden Material ab und wird als **spezifisches Wärmeleitvermögen** λ bezeichnet. Es ist demnach

(210) $$\boxed{\frac{Q}{t} = \lambda \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2) A}{l}}$$ **Wärmefluß $\frac{Q}{t}$ durch einen ebenflächig begrenzten Körper**

Als Zeiteinheit wählt man üblicherweise 1 Stunde, womit sich die **Einheit des spezifischen Wärmeleitvermögens** $[\lambda]$ **= 1 kcal/m h grd** ergibt. Sein Zahlenwert ist gleich derjenigen Wärmemenge, die je Stunde durch ein Wandstück von 1 m² Oberfläche und 1 m Dicke geht, wenn beiderseits ein Temperaturunterschied von 1 grd besteht.

Spezifisches Wärmeleitvermögen λ (in kcal/m h grd)

Silber	360	Blei	30	Holz	0,1 ··· 0,2
Kupfer	320	Beton	0,7 ··· 1,2	Schlacken-	
Aluminium	190	Glas	0,7 ··· 0,9	wolle	0,045 ··· 0,060
Messing	70 ··· 100	Wasser	0,50	Luft bei 0 °C	0,022
Stahl	30 ··· 45	Ziegelmauer	0,6 ··· 0,8	Wasserstoff bei 0 °C	0,160

Die Wärmeleitzahl ist keine Konstante, sondern hängt von der Temperatur ab. Man muß nun grundsätzlich 2 Fälle unterscheiden.

1. Stationäre Wärmeleitung. Hierbei müssen die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 an den beiden Endflächen, deren Abstand gleich l ist, während des ganzen Vorgangs *kon-*

stant bleiben, wie es bei dem beschriebenen Meßverfahren der Fall ist. Es herrscht also zwischen ihnen ein *konstantes Temperaturgefälle* $\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{l}$. So ist es beispielsweise, wenn ein Haus auf gleicher Innentemperatur gehalten wird und die Temperatur der Außenluft sich ebenfalls nicht ändert. Dann ist auch Gleichung (210) anwendbar.

2. Nicht stationäre Wärmeleitung. Ein isoliert gedachter Körper sei an einem Ende auf die Temperatur ϑ_2 erhitzt. Das kühlere Ende habe anfangs die Temperatur ϑ_1. Dann wird sich der Temperaturunterschied infolge der Wärmeleitung im Laufe der Zeit ausgleichen und der ganze Körper einheitliche Temperatur annehmen. Das Temperaturgefälle ist hierbei weder örtlich noch zeitlich konstant, und die Berechnung wird komplizierter. Maßgebend für die zum Temperaturausgleich benötigte Zeit ist der Ausdruck

$$\boxed{\frac{\lambda}{\varrho c_p}}$$ **Temperaturleitzahl**

Man erhält hiernach für Kupfer $\frac{320\,\text{kcal}\;\;\text{m}^3 \cdot \text{kg grd}}{\text{mh grd} \cdot 8930\,\text{kg} \cdot 0{,}092\,\text{kcal}} = 0{,}390\ \text{m}^2/\text{h}$. Wie sich leicht nachrechnen läßt, ist dann die Temperaturleitzahl für

Blei	0,086 m²/h
Luft 0 °C	0,064 m²/h
Wasserstoff	0,49 m²/h

Wie man sieht, gleichen sich Temperaturunterschiede in Gasen trotz der sehr verschiedenen Wärmeleitzahlen etwa ebenso rasch aus wie in Metallen (ungeachtet der ausgleichsfördernden Wirkung der Strömung!).

Beispiele: 1. Schutz gegen Wärmeverluste durch isolierende Umhüllungen aus Glaswolle, Asbest usw. (Bild 297).

2. Der doppelwandige Zwischenraum der **Thermosflaschen** und der zur Aufbewahrung flüssiger Luft verwendeten **Dewar-Gefäße** ist luftleer gepumpt, um die Wärmeleitung der Luft zu beseitigen.

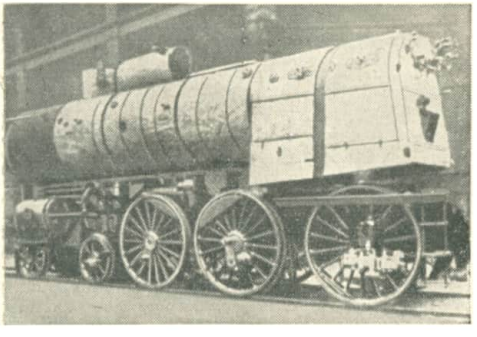


Bild 297. Wärmeisolierung einer Lokomotive mit Glaswolle

3. An der Außenfläche einer 50 cm dicken Hauswand von 8 m × 15 m werden 5 °C und an der Innenfläche 12 °C gemessen. Welche Wärmemenge geht während 12 Stunden durch die Wand verloren (Ziegelmauer $\lambda = 0{,}4$ kcal/m h grd)? –

$$Q = \frac{\lambda A t\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{l} = \frac{0{,}4\ \text{kcal}\ 120\ \text{m}^2\ 12\ \text{h}\ (12-5)\ \text{grd}}{\text{m h grd}\ 0{,}5\ \text{m}} = 8064\ \text{kcal}$$

Es muß betont werden, daß die in diesem Beispiel erwähnten Temperaturen an der Oberfläche der Wand bestehen und nicht mit der Zimmer- bzw. Außentemperatur zu verwechseln sind.

20.3. Wärmeübergang

Wasser, heiße Verbrennungsgase, Luft usw., die mit einer festen Wand in Berührung stehen, geben Wärme *an deren Oberfläche A* ab oder empfangen Wärme von ihr. Die übergehende Wärmemenge Q ist ähnlich wie beim Fall der stationären Wärmeleitung proportional dem Temperaturunterschied $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ zwischen der Wandoberfläche und dem angrenzenden Medium, der Wandfläche A und der Zeitdauer t des Vorganges. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor mit α, so ist demnach

(211) $$\boxed{Q = \alpha A t\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$ **an eine oder von einer Wand übergehende Wärme Q**

Dabei bereitet die Ermittlung der für den einzelnen Fall geltenden **Wärmeübergangszahl** α meist große Schwierigkeiten, da sie von vielen Faktoren abhängt. Gestalt, Lage und Oberflächenbeschaffenheit der Wand sowie die Art der Strömung sind von ausschlaggebendem Einfluß. Für α gibt es umfangreiche Tabellen und viele Hilfsformeln.

Beispielsweise gilt für den Wärmeübergang von

ruhendem Wasser an Wände und Rohre	$\alpha = 300 \cdots 500$ kcal/m² h grd
turbulent in Röhren strömendem Wasser	$\alpha = 2000 \cdots 4000$ kcal/m² h grd
Luft an glatte Flächen bei einer Strömungsgeschwindigkeit v bis 5 m/s	$\alpha = \left(4{,}8 + 3{,}4\, v \Big/ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\ \text{h grd}}$

20.4. Wärmedurchgang

Der stationäre (d. h. bei konstanten Temperaturen stattfindende) Übergang von Wärme zwischen 2 Medien durch eine trennende Wand vollzieht sich in 3 Schritten (Bild 298).

a) Wärmeübergang vom Medium *1* an die linke Fläche:

$$Q = \alpha_1 A t\,(\vartheta_1 - \vartheta')$$

b) Dieselbe Wärmemenge wird durch die Wand geleitet:

$$Q = \frac{\lambda}{l} A t (\vartheta' - \vartheta'').$$

c) Q geht schließlich von der rechten Fläche in das Medium 2 über:

$$Q = \alpha_2 A t (\vartheta'' - \vartheta_2).$$

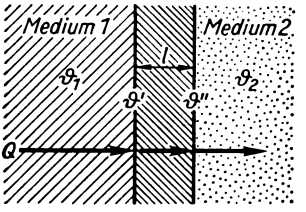


Bild 298. Wärmedurchgang

Berechnet man aus diesen 3 Gleichungen $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$ und $\frac{l}{\lambda}$ und addiert die sich ergebenden Werte, so entsteht mit der **Wärmedurchgangszahl** k

(212) $\boxed{Q = kAt(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$, wobei $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{l}{\lambda}$ ist.

Wärmedurchgangszahlen k (in kcal/m² h grd)

Ziegelsteinmauer	Dicke	12 cm	25 cm	38 cm	51 cm	64 cm
	k	2,4	1,7	1,3	1,1	0,9
Fenster		einfach		Doppelfenster		
	k	5,0		2,3		

Grundbegriffe der Wellenlehre

21. Mechanische Wellen

21.1. Wesen der Wellenbewegung

Als Schwingungen hatten wir in Abschnitt 9. solche Vorgänge erkannt, bei denen eine punktförmige Masse oder ein einzelner starrer Körper periodische Bewegungen um ihre Ruhelage ausführen. Mit dieser Ruhelage ist der schwingende Körper selbst an einer *bestimmten* Stelle des Raumes *festgelegt*, und seine Bewegung kann in einem Diagramm dargestellt werden, dessen Abszisse die verstrichene Zeit t und dessen Ordinate die im Laufe der Zeit veränderliche Auslenkung y angibt. Das Ergebnis ist eine Kurve, die in vielen Fällen sinusförmig ist.

Ist der schwingende Körper, z. B. ein Pendel, mit einem anderen in geeigneter Weise verbunden (gekoppelt), so wird dieser Körper vom ersten zu Schwingungen angeregt. Die zwischen beiden vorhandene Kopplung bewirkt eine Übertragung des Bewegungszustandes. Bilden nun viele solcher schwingungsfähiger Gebilde ein zusammenhängendes System, so breitet sich die an einer Stelle eingeleitete Schwingung im ganzen System aus. Das äußere Erscheinungsbild eines solchen Vorganges nennt man **Welle.**

Wellen können somit in allen *elastisch deformierbaren* Körpern entstehen, im Innern und an der Oberfläche von festen Körpern und Flüssigkeiten und in Gasen. Dabei werden die einzelnen Teilchen *zeitlich nacheinander* von der sich ausbreitenden Welle erfaßt. Im Gegensatz zu den Schwingungen handelt es sich also um *zeitliche und räumliche* Veränderungen innerhalb eines Körpers.

Da die Ausbreitung der Welle eine gewisse Zeit beansprucht, beginnt ein betrachtetes Teilchen immer ein wenig später zu schwingen als dasjenige, das ihm die Bewegung mitteilt. Es hat also diesem gegenüber eine kleine *Phasendifferenz*, um welche es der Schwingung des vorangehenden *nacheilt*. Gleichzeitig bezieht es die zur Ingangsetzung seiner Bewegung notwendige Energie vom unmittelbar benachbarten, das bereits in Bewegung ist. Damit findet in der Welle ein kontinuierlicher *Energietransport* statt. Vom Erregungszentrum ausgehend, wandert diese Energie in der

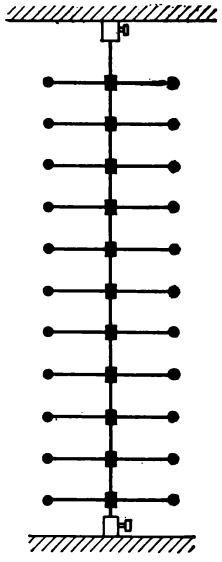


Bild 299. Wellenmaschine

Ausbreitungsrichtung mit der für das betreffende Medium charakteristischen Geschwindigkeit vorwärts.
Man führt diese Vorgänge gern mit einer *Wellenmaschine* vor. Bild 299 zeigt eine solche Vorrichtung mit einem senkrecht ausgespannten Stahldraht. Daran befestigte Querstäbe tragen an ihren Endpunkten kleine Kugeln. Wenn nur *ein* solcher Stab vorhanden ist, führt er bei einmaligem Anstoß Drehschwingungen um die vertikale Achse aus. Sind alle Stäbe angebracht, so sieht man, wie nach Anstoß des untersten Stabes alle übrigen nacheinander in Bewegung geraten. Die Schwingungsenergie wird von unten nach oben fortgeleitet. Jeder Stab schwingt schließlich mit einer bestimmten Phasendifferenz gegenüber dem jeweils darunterliegenden.
In diesem leicht übersehbaren Fall führen die durch *elastische Kräfte* aneinander gebundenen Teilchen allesamt *harmonische Schwingungen* aus. Man spricht dann von **harmonischen Wellen.** Abgesehen von dieser periodischen Bewegung um ihre Ruhelagen, nehmen sie aber am Ausbreitungsvorgang selbst *nicht* teil. Nicht die einzelnen Teilchen, sondern der zeitlich periodische Bewegungszustand pflanzt sich fort.
Man kann das auch an einem schwimmenden Kork beobachten. Wird er von der Wellenbewegung erfaßt, so tanzt er auf und ab, ohne sich von der Stelle zu bewegen.

21.2. Beschreibung der Wellenbewegung

Der Unterschied gegenüber gewöhnlichen Schwingungen besteht also darin, daß sich nicht nur der Bewegungszustand eines einzelnen Teilchens im Laufe der Zeit verändert, sondern viele Teilchen in einem größeren Raumgebiet im Laufe der Zeit von der Bewegung erfaßt werden. Eine bildliche Darstellung in der Zeichenebene ist daher nicht durch ein y,t-Diagramm möglich, sondern nur in Form eines y,x-Schaubildes (Bild 300), wobei y wieder die Auslenkung eines einzelnen Teilchens darstellt und x die Ortskoordinate in der betrachteten Ausbreitungsrichtung.
In einem bestimmten Augenblick t, gleichsam als fotografische Momentaufnahme, bietet eine harmonische Welle zwar das gleiche Bild wie die Darstellung einer harmonischen Schwingung. Hier aber bedeutet die Abszisse *nicht* die Zeit t, sondern die

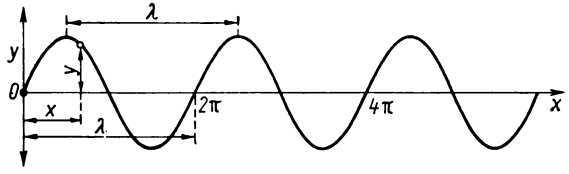
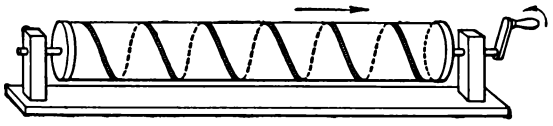


Bild 300. Augenblicksbild einer fortschreitenden harmonischen Welle

Bild 301. Veranschaulichung einer harmonischen Welle



Strecke x, längs deren die Welle fortschreitet. Die Sinuskurve auf Bild 300 wandert als *starres Gebilde* mit der Geschwindigkeit c vorwärts.

Versuch: Man umwickelt einen Glaszylinder spiralig mit einer Schnur. Bei Umdrehung des Zylinders sieht man eine Welle nach rechts wandern (Bild 301).

Die zur Beschreibung einer sinusförmigen Welle erforderlichen Begriffe sind denen für Schwingungen analog. Es sind dies:

Frequenz $f = \frac{z}{t}$: Anzahl der Schwingungen z eines Teilchens in der Zeiteinheit.

Elongation y: Auslenkung eines schwingenden Teilchens aus seiner Ruhelage zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Amplitude y_{max}: größte Auslenkung eines schwingenden Teilchens aus seiner Ruhelage.

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$: Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Punktes, der einem einzelnen Teilchen zugeordnet werden kann.

Phasenwinkel $\varphi = \omega t$: Winkel, um den sich der Schwingungszustand eines Teilchens von dem eines anderen unterscheidet.

Ausbreitungsgeschwindigkeit c: Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet; zugleich Geschwindigkeit des Energietransportes.

Wellenlänge λ: Entfernung zweier Teilchen, die sich aufeinanderfolgend im gleichen Schwingungszustand befinden.

Zwischen Frequenz, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit besteht zunächst die grundlegende Beziehung:

(213) $\boxed{c = f\lambda}$ **Ausbreitungsgeschwindigkeit = Frequenz · Wellenlänge**

Dieses Gesetz gilt für *alle Arten* von Wellen, für die des Lichtes wie überhaupt für alle elektromagnetischen Wellen, die Luftwellen des Schalls und die Wellen in flüssigen und festen Körpern.

Begründung: In der Zeit t haben am Entstehungsort z Schwingungen stattgefunden. Diese z Schwingungen haben in der gleichen Zeit t die Strecke $s = ct$ zurückgelegt. Es verteilen sich also z Schwingungen auf die Strecke s. Die von einer einzelnen Schwingung beanspruchte Teilstrecke $\frac{s}{z}$ ist die Wellenlänge λ. Es ist demnach $\lambda = \frac{ct}{z}$. Da aber $\frac{z}{t} = f$ ist, ergibt sich $\lambda = \frac{c}{f}$.

Beispiele: 1. Welche Wellenlänge strahlt ein Rundfunksender aus, dessen Frequenz 650 kHz beträgt ($c = 300000$ km/s)? –

Nach (213) ist

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{300\,000\,000\ \text{m s}}{650\,000\ \text{s}} = 461{,}5\ \text{m}.$$

2. Welcher Frequenz entsprechen 1,7 cm lange Wellen an einer Wasseroberfläche, die sich mit einer Geschwindigkeit von 23 cm/s ausbreiten? –

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{23\ \text{cm}}{\text{s} \cdot 1{,}7\ \text{cm}} = 13{,}5\ ^1/\text{s}.$$

21.3. Arten der Wellen

Wenn die einzelnen Teilchen *quer* zur Ausbreitungsrichtung schwingen, spricht man von **Transversalwellen (Querwellen).** Man fasse einen dünnen, horizontal ausgespannten Gummischlauch mit der Hand und bewege das freie Ende periodisch auf und ab. Man sieht dann eine schlängelnde Bewegung bis zum anderen Ende laufen: Eine *Seilwelle* verläuft *transversal* (Bild 302).

Bei den **Longitudinalwellen (Längswellen)** schwingen die Teilchen *längs* der Fortpflanzungsrichtung (Bild 303). Dies ist bei den Schallwellen der Fall, wo die Luft in Richtung der Ausbreitung des Schalls abwechselnd verdichtet und verdünnt wird. Beim Rangieren von Güterzügen kommt es häufig vor, daß ein einzelner Waggon gegen eine lange Wagenreihe stößt. Der Stoß pflanzt sich durch den ganzen Zug fort, indem jeder Wagen zwischen seinen Puffern hin und her pendelt: ein grobes Bild einer Longitudinalwelle.

Schallwellen in Gasen, festen Körpern und in Flüssigkeiten sind *Longitudinal*wellen. Erdbeben durchqueren das Erdinnere teils als Längs- und teils als Querwellen. Dabei vermögen die transversalen den Erdkern anscheinend nicht zu durchdringen.

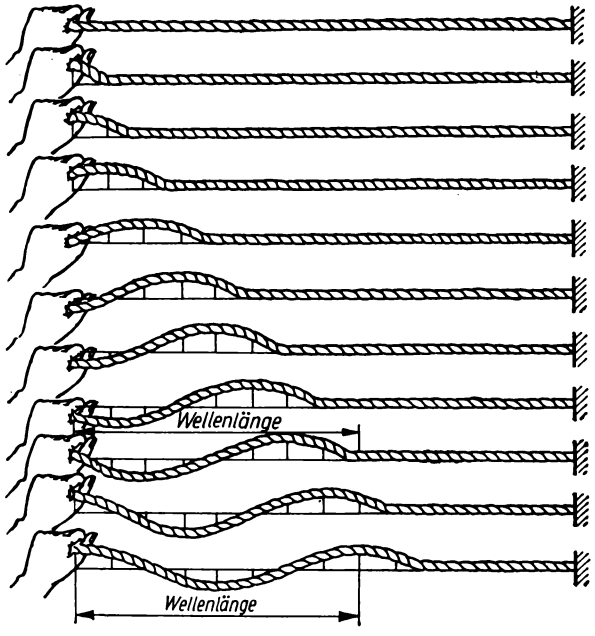


Bild 302. Entstehung einer Seilwelle

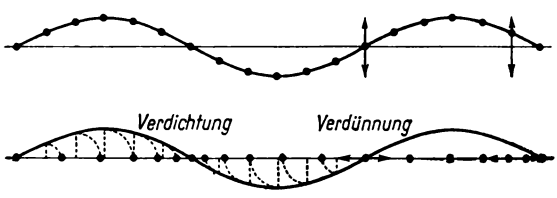


Bild 303. Transversalwelle und Konstruktion einer Longitudinalwelle

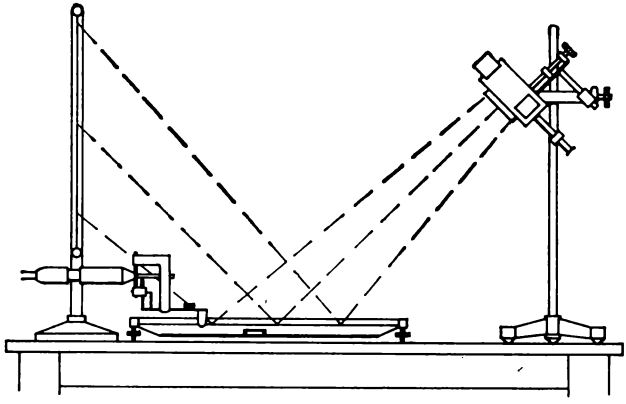


Bild 304. Wasserwellengerät

Die Oberflächenwellen des Wassers haben verhältnismäßig spitze Wellenberge und sanft gerundete Täler. Sie stellen *keine reinen* Transversalwellen dar, da die einzelnen Wasserteilchen vertikale Kreise durchlaufen.

Zur anschaulichen Vorführung eignet sich das Wasserwellengerät (Bild 304). Die Oberfläche einer mit Wasser gefüllten, flachen Wanne wird schräg beleuchtet und wirft das Licht an eine weiße Wand. Ein Motor treibt einen auf und nieder wippenden Tupfer an. Die entstehenden **Kreiswellen** wandern als dunkle Ringschatten über den Bildschirm.

Wegen der nach allen Seiten hin gleich großen Ausbreitungsgeschwindigkeit bieten die Oberflächenwellen des Wassers das Bild konzentrischer Kreise. Längs eines solchen Kreises, z. B. auf einem der ringförmigen Wellenberge, befinden sich alle schwingenden Teilchen in gleicher Phase. Diesen geometrischen *Ort aller Punkte gleicher Schwingphase* nennt man eine **Wellenfront.** Zieht man vom Wellenzentrum ausgehende Geraden, so stellen diese die **Wellenstrahlen** dar (Bild 305). Da die Radien den Umfang eines Kreises rechtwinklig durchschneiden, ergibt sich:

(214) **Die Wellenstrahlen stehen stets senkrecht auf den Wellenfronten.**

Wenn die Erzeugung im *Innern* des Mediums erfolgt und die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach allen Richtungen hin gleich groß ist (isotropes Medium), entstehen **Kugelwellen** (Bild 306). Alle Orte gleicher Phase, d. h. die *Wellenfronten*, stellen konzentrische *Kugelschalen* dar. Die Wellenstrahlen sind in diesem Fall Kugelradien und geben wie bei den Kreiswellen die Ausbreitungsrichtung der Wellen an.

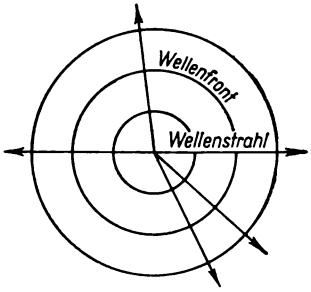


Bild 305. Wellenfronten und Wellenstrahlen einer Kreiswelle

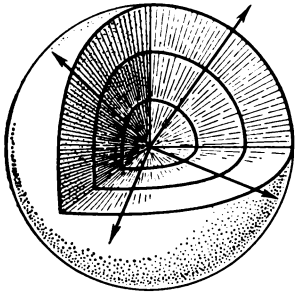


Bild 306. Wellenfronten und Strahlen einer Kugelwelle

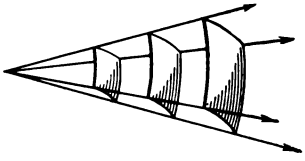


Bild 307. Sphärische Wellenfronten – auseinanderlaufende Strahlen

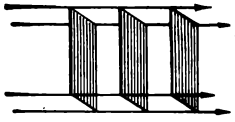


Bild 308. Ebene Wellenfronten – parallele Strahlen

Sieht man nur die *unmittelbare* Umgebung eines Strahles an, so ist die Krümmung der Wellenfronten nicht wahrnehmbar. Man kann sie als *eben* betrachten: **ebene Wellen.** *Schmale* Strahlenbündel, die aus weiter Ferne kommen, kann man aus dem gleichen Grund ohne Fehler als *ebene* Wellen ansehen. Die Strahlen eines solchen Bündels verlaufen nahezu *parallel* (Bild 308).

(215) **Parallele Strahlenbündel werden von ebenen Wellenfronten begleitet.**

Das bekannteste Beispiel sind die Strahlen des Sonnenlichtes, die aus sehr großer Entfernung kommen. Da wir nur einen äußerst schmalen Ausschnitt aus dem gesamten Strahlenbündel empfangen, verlaufen die Strahlen praktisch parallel.

Für den Fall, daß es sich um eine sinusförmige *ebene Welle* handelt, hängt die Schwingungsphase nur von der Koordinate x ab. Die Elongation y hängt außerdem noch von der Zeit ab und ist somit eine Funktion zweier Veränderlicher. Für die einfache Sinusschwingung gilt die Gleichung (S. 119) $y = y_{max} \sin \omega t$. Wir haben aber festgestellt, daß ein betrachtetes Teilchen dem vorangehenden mit einer bestimmten **Phasendifferenz** nacheilt. Gegenüber dem Ausgangspunkt der Welle ist die entsprechende Nacheilzeit t' diejenige, die verstreicht, bis die Welle den Ort x erreicht hat. Damit ist $t' = \frac{x}{c}$. Von dem Argument ωt ist daher der Winkel $\omega t' = \frac{\omega x}{c}$ zu subtrahieren, und man erhält

(216) $$\boxed{y = y_{max} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}$$ **Elongation y einer ebenen Welle am Ort x zur Zeit t**

Mit $\omega = 2\pi f$ und $c = f\lambda$ kann man dafür auch schreiben

$$y = y_{max} \sin 2\pi \left(ft \mp \frac{x}{\lambda} \right). \tag{217}$$

Dabei gilt das negative Vorzeichen im Argument für den hier angenommenen Fall, daß die Welle in der *positiven* Richtung der x-Achse vorwärtseilt.

22. Schall als Wellenerscheinung

Wenn die Frequenz der sich in einem stofflichen Medium ausbreitenden Wellen im Hörbereich des menschlichen Ohres liegt, dann spricht man gewöhnlich von **Schallwellen.** Insbesondere bezeichnet man den Frequenzbereich zwischen etwa 16 Hz bis etwa 20000 Hz als **Hörschall.**

Die **obere Hörgrenze** sinkt mit dem Lebensalter. BEETHOVEN wurde auf seine beginnende Taubheit dadurch aufmerksam, daß er eines Tages das hohe Zwitschern der Fledermäuse nicht mehr hörte.

Frequenzen *jenseits* der oberen Hörgrenze werden als **Ultraschall** bezeichnet (vgl. 23.9.) *Unterhalb* der hörbaren Frequenzen spricht man von **Infraschall** (Gebäudeschwingungen, Verkehrserschütterungen usw.).

In festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen breitet sich der Schall in Form von Longitudinal- (Längs-) wellen aus. Mit geringen Ausnahmen beim Ultraschall ist die Schallgeschwindigkeit von der Frequenz unabhängig und richtet sich allein nach den physikalischen Eigenschaften des jeweiligen Mediums.

Beweis: Wenn die Schallgeschwindigkeit von der Frequenz abhängen würde, kämen die Tonfolgen einer aus größerer Entfernung angehörten Musik völlig durcheinander beim Hörer an.

22.1. Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen in einem festen Körper zu finden, legen wir einen Stab aus elastischem Material zugrunde. Gegen das eine Ende des Stabes von der Länge l und dem Querschnitt A werde ein Schlag geführt (Bild 309). Die eintretende Verformung Δl ist proportional der Kraft F, der Stablänge l und umgekehrt proportional dem Querschnitt A. Dort, wo der Schlag erfolgt, ergibt sich demnach zunächst eine *Stauchung* um das Stück

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

(E Elastizitätsmodul).

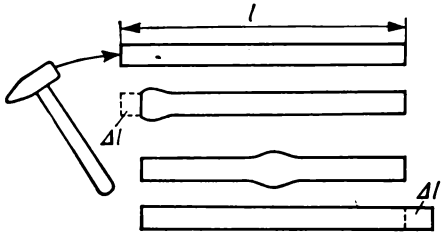


Bild 309. Verdichtungsstoß in einem Stab

Diese Verdichtung wandert nun als Stoßwelle durch den Stab und benötigt bis zu ihrer Ankunft am anderen Ende des Stabes die Zeit Δt. Ihre Geschwindigkeit beträgt

$$c = \frac{l}{\Delta t}.$$

Wenn sie am anderen Ende angekommen ist, streckt sich die Stauchung dort wieder aus, der Stab hat sich als Ganzes in der Zeit Δt um das Stück Δl verschoben. Die Geschwindigkeit dieser Verschiebung ist

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Da der Stab vorher ruhte, ist die Geschwindigkeits*zunahme*, d. h. die dem Stab mitgeteilte *Beschleunigung*,

$$a = \frac{\Delta l}{(\Delta t)^2}$$

und die hierzu erforderliche *Kraft*

$$F = ma = \frac{\varrho l A \Delta l}{(\Delta t)^2}, \text{ weil } m = \varrho l A \text{ ist.}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für F entsteht

$$\frac{\varrho l A \Delta l}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta l E A}{l}.$$

Unter Beachtung von $c = \frac{l}{\Delta t}$ folgt daraus $c^2 = \frac{E}{\varrho}$ und damit

(218) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}}$$ **Geschwindigkeit c von Längswellen in Stäben**

Schallgeschwindigkeit c (in m/s)

Stahl	5000	Glas	5500	
Granit	3950	Blei	1300	
Mauerwerk	3480	Wasser	1498	(bei 25 °C)
Holz	2500 ··· 4500	Kohlendioxid	258	(bei 0 °C)
Kork	500	Wasserstoff	1261	(bei 0 °C)
Gummi	54	Luft	331,6	(bei 0 °C)

Beispiel: In welcher Zeit durcheilt ein Geräusch eine Kupferleitung von 5 km Länge, wenn der E-Modul $1{,}2 \cdot 10^6$ kp/cm² und die Dichte 8,9 g/cm³ beträgt? –

Aus $c = \frac{l}{t}$ ergibt sich mit (218)

$$t = \frac{l}{c} = l\sqrt{\frac{\varrho}{E}};$$

$$t = 5 \cdot 10^3 \text{ m} \sqrt{\frac{8900 \text{ kg m}^3}{\text{m}^3\, 1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ N}}} = 1{,}37 \text{ s}.$$

22.2. Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Da die Ausbreitung des Schalls in Flüssigkeiten ebenfalls in Form von Longitudinalwellen vor sich geht, kann grundsätzlich von dem zuletzt entwickelten Gesetz (218) ausgegangen werden. Es ist nur zu überlegen, welche Größe an die Stelle des Elastizitätsmoduls E zu treten hat, dessen reziproker Wert die Dehnungszahl $\alpha = \frac{1}{E}$ ist.
Da Flüssigkeiten auf starken Druck elastisch reagieren, d. h. ihr Volumen ein wenig verringern, bietet sich hierfür der Kompressibilitätskoeffizient (11.4.2.)

$$\beta = \frac{\Delta V}{V}\frac{1}{\Delta p}$$

an, der ganz analog zur Dehnungszahl $\alpha = \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{A}{F}$ gebildet ist und auch die gleiche Einheit hat.
Unter Verwendung dieses Koeffizienten β anstelle von $\frac{1}{E}$ ergibt sich aus Gleichung (218)

(219) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\beta\varrho}}}$$ **Geschwindigkeit c von Längswellen in Flüssigkeiten**

Unter dem Druck von 1 kp/cm² verringert Wasser sein Volumen (bei 20 °C) um den Bruchteil 0,000048, so daß die Kompressibilität $\beta = 48 \cdot 10^{-6}$ cm²/kp $= \frac{48 \cdot 10^{-10}}{9{,}81}$ m²/N ist.
Die Ausrechnung liefert für die Geschwindigkeit des Schalls im Wasser

$$c = \sqrt{\frac{1}{\beta\varrho}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{48 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m^2/N} \cdot 1000\ \mathrm{kg\,m^3}}} = 1430\ \mathrm{m/s}\,.$$

22.3. Schallgeschwindigkeit in Gasen

Auch bei den Schallwellen in den Gasen gehen rasch verlaufende Verdichtungen und Verdünnungen vor sich. Man könnte daher geneigt sein, die das elastische Verhalten beschreibende Dehnungszahl α durch eine Größe zu ersetzen, der das Boyle-Mariottesche Gesetz zugrunde liegt. Dieses gilt jedoch nur für isotherme Vorgänge, und bereits Newton hatte in Unkenntnis der genaueren Zusammenhänge eine Formel entwickelt, die zu falschen Werten für die Schallgeschwindigkeit in der Luft führen mußte. Man muß vielmehr daran denken, daß die Druckschwankungen in den Schallwellen so rasch vor sich gehen, daß die in den Wellen gebildete Kompressionswärme, wenn sie auch von winzigem Betrag ist, nirgendwo abfließen kann. Es handelt sich also um rein adiabatische Vorgänge, die der Poissonschen *Gleichung* (184) $pV^{\varkappa} = \text{konst.}$ gehorchen. Durch Differenzieren gewinnt man hieraus

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \varkappa\frac{\mathrm{d}V}{V} \quad \text{und mit}$$

(220) $$\beta = \frac{\mathrm{d}V}{V}\frac{1}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\varkappa p}$$

wiederum eine Größe, die in ihrem Aufbau und ihrer Maßeinheit mit dem im vorigen Abschnitt definierten Kompressibilitätskoeffizienten β einer Flüssigkeit vollkommen übereinstimmt. Man darf sie also in Gleichung (219) für β einsetzen und bekommt damit

(221) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}}}$$ **Schallgeschwindigkeit c in Gasen**

Man kann diese Gleichung noch mehr verallgemeinern, so daß man auf die Kenntnis des Druckes und der Dichte verzichten kann, wenn man dafür die Temperatur einführt. Denn nach der Zustandsgleichung (162) ist

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{pV}{m} = RT\,.$$

Dies ergibt dann den praktisch bequemer verwertbaren Ausdruck

(222) $$\boxed{c = \sqrt{\varkappa R T}}\,.$$

Man ersieht hieraus, daß im **idealen** Gas die Schallgeschwindigkeit *nur* von der Temperatur abhängt.
Für $t = 0\,°C$, $p = 760$ Torr $\doteq 101\,325\ \mathrm{N/m^2}$ und $\varrho = 1{,}293\ \mathrm{kg/m^3}$ ergibt die Rechnung nach Gleichung (221) für die Schallgeschwindigkeit in Luft:

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 101\,325\ \mathrm{kgm\,m^3}}{\mathrm{s^2\,m^3\,1{,}293\,kg}}} = 331{,}2\ \mathrm{m/s}\,.$$

Gemessen wurde der Wert $c = 331{,}6$ m/s bei 0 °C.
Aus der mit der letzten Gleichung (222) gewonnenen Erkenntnis, daß die Schallgeschwindigkeit in einem Gas nur von der Temperatur T abhängt, resultiert schließlich die häufig gebrauchte Näherungsformel:

(223) $$\boxed{c\Big/\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 331{,}6 + 0{,}6\,t/°C}$$ **Schallgeschwindigkeit c in der Luft bei der Temperatur t**

Begründung: Bei 0 °C ist die Schallgeschwindigkeit

$$c_0 = \sqrt{\varkappa R T_0}$$

und bei der beliebigen Temperatur $T = T_0\,(1 + \alpha t)$

$$c = \sqrt{\varkappa R T_0\,(1 + \alpha t)}\,,$$

wobei t die Temperatur in °C und der Ausdehnungskoeffizient des idealen Gases $\alpha = 0{,}003\,67^1/\mathrm{grd}$ ist. Dividiert man beide Gleichungen miteinander, so findet man

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t}\,.$$

Wenn nun $b \ll a$ ist, gilt näherungsweise $\sqrt{a^2 + 2ab} \approx \sqrt{(a+b)^2} = (a + b)$. Im vorliegenden Fall ist $a = 1$ und $b = \frac{\alpha t}{2}$. Mit dem Zahlenwert für α und $c_0 = 331{,}6$ m/s erhält man

$$c \Big/ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 331{,}6\,(1 + 0{,}00184\,t/°\mathrm{C} = 331{,}6 + 0{,}6\,t/°\mathrm{C}.$$

22.4. Geschwindigkeit von Seilwellen

Bei der Querbewegung eines langen Gummischlauches stellten wir anhand des auf Bild 302 gezeigten Versuches Transversalwellen fest. Ebensolche Wellen bilden sich beim Anzupfen von gespannten Drähten, Seilen u. dgl. Nach entsprechenden Untersuchungen stellt sich heraus, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Größen abhängt, die analog zu denen sind, die in Gleichung (218) vorkommen; anstelle des E-Moduls tritt die **Seilspannung** $\frac{F}{A}$ als Quotient aus der Spannkraft F und dem Seilquerschnitt A. Damit ist wieder mit der Dichte ϱ des Materials

(224) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}}}$$ **Geschwindigkeit c von Querwellen in gespannten Seilen**

Beispiel: Eine 50 m lange Telefonleitung aus Kupfer ($\varrho = 8{,}9$ g/cm³) von 6 mm² Querschnitt ist mit einer Kraft von 8 kp ausgespannt. Mit welcher Geschwindigkeit pflanzt sich ein quer gegen der Draht geführter Stoß fort? – Da es sich hier nicht um eine longitudinale, sondern um eine Seilwelle handelt, ergibt Einsetzen der gegebenen Wert in (224):

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}81\ \mathrm{kg\,m\,m^3}}{\mathrm{s^2}\,6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}\,8{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}} = 38{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

Die Querwelle läuft also etwa 10mal langsamer als eine im gleichen Material laufende Längswelle. Ein Geräusch im Draht wird viel schneller fortgeleitet als eine mechanische Erschütterung.

22.5. Doppler-Effekt

Beim Herannahen einer pfeifenden Lokomotive oder eines Rennwagens macht man die Beobachtung, daß die *Tonhöhe*, d. h. die Frequenz der das Ohr erreichenden Schallwellen, im Moment des Vorüberfahrens umschlägt. Diese Erscheinung beruht auf der Relativbewegung der Schallquelle gegen den Beobachter (DOPPLER, 1842).

1. Ruhende Schallquelle und bewegter Beobachter (Bild 310 b). Die Frequenz der Schallquelle sei f_0. Bewegt sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit v dem Schall entgegen, so empfängt sein Ohr in der Zeiteinheit $f' = \frac{v}{\lambda}$ Wellen zusätzlich. Damit ist die wahrgenommene Frequenz wegen $\lambda = \frac{c}{f_0}$

$$f = f_0 + f' = f_0 + \frac{f_0 v}{c}.$$

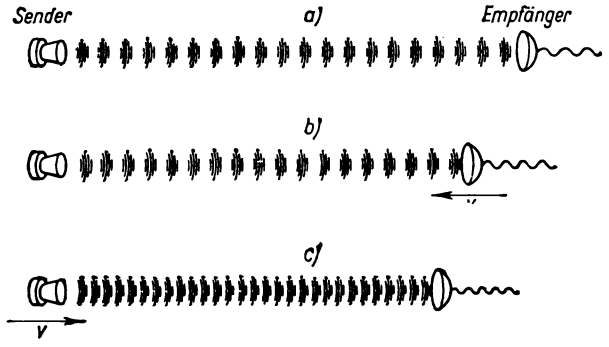


Bild 310. Der DOPPLER-Effekt
a) Sender und Empfänger in Ruhe,
b) bewegter Empfänger,
c) bewegter Sender

Der Beobachter empfängt bei Annäherung an die Schallquelle einen Ton höherer Frequenz.

(225) $$\boxed{f = f_0\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)}$$ **Frequenz f bei ruhender Quelle und bewegtem Beobachter**

Das daruntergesetzte Minuszeichen gilt für den Fall, daß sich der Beobachter von der Schallquelle entfernt.

2. Ruhender Beobachter und bewegte Schallquelle (Bild 310c). Man könnte zunächst meinen, das Ergebnis müßte dasselbe sein, da es sich um die relative Bewegung zweier gleichförmig bewegter Bezugssysteme handelt. Hinsichtlich der physikalischen Wirkung ist es in solchen Fällen prinzipiell gleichgültig, welches der beiden Systeme, nämlich Schallquelle und Beobachter, man als ruhend und welches man als bewegt betrachtet. In diesem Fall kann man jedoch nicht so einfach schlußfolgern, da als übertragendes Medium noch der Luftraum vorhanden ist, der in beiden Fällen ruht. Man muß daher folgende Überlegung anstellen: Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit v *gegen* den Beobachter, so wird der Abstand der gebildeten Wellenfronten verkürzt, da jede Wellenfront, die sich von der Schallquelle ablöst, unabhängig von der Eigengeschwindigkeit v der Schallquelle selbständig mit der Geschwindigkeit c im Medium davonläuft. Von der Schallquelle aus gemessen, legen die Schallwellen je Zeiteinheit nicht die der Schallgeschwindigkeit c entsprechende Strecke zurück, sondern eine kürzere, die dem Betrag von $(c - v)$ entspricht. Die Wellenlänge wird auf $\lambda = \frac{c - v}{f_0}$ verkürzt. Wegen $f = \frac{c}{\lambda}$ hört der Beobachter dann die Frequenz $f = \frac{cf_0}{c - v}$; also ist nach Kürzen mit c

(226) $$\boxed{f = \frac{f_0}{1 \mp v/c}}$$ **Frequenz f bei bewegter Quelle und ruhendem Beobachter**

Das Pluszeichen gilt für den Fall, daß sich die Schallquelle vom Beobachter weg bewegt. Um den Unterschied beider Fälle deutlich zu erkennen, sei erstens angenommen, der Beobachter entferne sich mit der Schallgeschwindigkeit c von der Quelle. Dann wird nach

(225) $f = f_0\left(1 - \frac{c}{c}\right) = 0$. Er läuft mit dem Schall und wird überhaupt keinen Ton wahrnehmen. Fährt er ihm mit Schallgeschwindigkeit entgegen, so entsteht für ihn wegen $f = f_0\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 2f_0$ die doppelte Frequenz.
Wenn zweitens der Fall gesetzt wird, daß sich die Quelle vom Beobachter mit Schallgeschwindigkeit entferne, wird wegen (226) $f = \frac{f_0}{1 + c/c} = \frac{f_0}{2}$. Kommt schließlich die Quelle mit gleicher Geschwindigkeit dem Beobachter entgegen, so ergibt sich $f = \frac{f_0}{1 - c/c} = \infty$, d. h. ein Ton von unendlich hoher Frequenz.

Beispiel: In welchem Frequenzverhältnis schlägt der Ton von 200 Hz eines mit 180 km/h vorüberfahrenden Rennwagens um? – Nach (226) ist beim Herannahen $f_1 = \frac{200\ ^1/_s}{1 - 50/340} =$ $= 234{,}0$ Hz und beim Davonfahren $f_2 = \frac{200^1/_s}{1 + 50/340} = 174{,}6$ Hz. Das Frequenzverhältnis ist etwa 4:3.

Berechnet man nun die durch den DOPPLER-Effekt hervorgerufene *Frequenzänderung* $\Delta f = f - f_0$, so ergibt sich für den ersten Fall aus der Gleichung (225) unmittelbar

$$\Delta f = \pm f_0 \frac{v}{c}.$$

Für den zweiten Fall erhält man aus Gleichung (226)

$$\Delta f = f_0\left(\frac{1}{1 \mp v/c} - 1\right).$$

Wenn aber die Geschwindigkeit v der Schallquelle viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit c ist, so kann für den in der Klammer stehenden Bruch näherungsweise $1 \pm v/c$ geschrieben werden, und es ergibt sich wieder derselbe Ausdruck wie im ersten Fall. Daher kommt es, daß man – allerdings mit der vorausgesetzten Einschränkung $v \ll c$ – allgemein für die Frequenzänderung

(227) $\boxed{\Delta f = \pm f_0 \frac{v}{c}}$ **Frequenzänderung Δf durch den Doppler-Effekt**

angibt.

Diese Voraussetzung $v \ll c$ trifft insbesondere bei *elektromagnetischen Wellen*, z. B. beim Licht, zu, da die Lichtgeschwindigkeit c gegenüber allen technisch erreichbaren und auch bei den meisten in der Astronomie vorkommenden Geschwindigkeiten außerordentlich groß ist. Obwohl hier (wegen der Folgerungen aus der Relativitätstheorie) für die empfangene Frequenz eine andere Formel gilt, ergibt sich für die Frequenzänderung Δf in guter Näherung wiederum die Gleichung (227).

23. Schallfeld und seine Größen

Zu den wesentlichen Eigenschaften jeder Welle gehört, daß in ihr ein kontinuierlicher *Energietransport* stattfindet und im Zusammenhang damit *Kräfte* auftreten, die auf alle Hindernisse wirken, die der sich ausbreitenden Welle im Wege stehen. Beide Arten dieser physikalischen Wirkungen können durch bestimmte meßbare Größen erfaßt werden. Die genauere Beschreibung der sich in einer Welle abspielenden Vorgänge erfordert also noch ein Eingehen auf die dynamischen und energetischen Verhältnisse in dem von den Wellen durchfluteten Medium. Man nennt es in diesem Zusammenhang auch **Wellenfeld** und im besonderen Fall der Schallwellen der Luft das **Schallfeld.**

23.1. Schallschnelle

Jedes einzelne Luftteilchen, das von einer Schallwelle erfaßt wird, führt in Richtung des Schallstrahls, also longitudinal, Schwingungen um seine Ruhelage aus. An feinen, stark beleuchteten Schwebeteilchen kann man diese Bewegung im Mikroskop sichtbar machen (Bild 311).

Schallschnelle u (oder Geschwindigkeitsamplitude):

Geschwindigkeit eines einzelnen schwingenden Teilchens beim Durchgang durch die Ruhelage.

Sie ergibt sich wie für alle harmonisch schwingenden Massenpunkte mit der Amplitude y_{max} nach Gleichung (105):

(228) $$\boxed{u = \omega y_{max} = 2\pi f y_{max}}$$ **Schallschnelle u**

Sie drückt *demnach die Maximalgeschwindigkeit* eines schwingenden Teilchens aus, hat also mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls *nichts* zu tun.



Bild 311. Bewegung von Rauchteilchen im Schallfeld

Zur Messung dient die **Rayleighsche Scheibe.** Ein leichtes, schräg zur Schallstrahlung orientiertes Scheibchen hängt an einem feinen Faden. Die Gesamtheit der schwingenden Teilchen wirkt wie eine Strömung, die unsymmetrisch gegen die schräge Fläche drückt und ein Drehmoment hervorruft, das die Fläche senkrecht gegen den Strom richtet (vgl. das Strömungsbild 196). Der Drehwinkel ist dem Quadrat der Schallschnelle proportional.

23.2. Energiedichte

Hierunter versteht man die in der Volumeneinheit des Schallfeldes vorhandene Energie. Sie ist also gegeben durch den Ausdruck

(229) $$\boxed{w = \frac{W}{V}}$$ **Energiedichte w**

Einheit der Energiedichte: $1\ \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m^3}}$.

Betrachtet man z. B. ein einzelnes, im Wellenfeld schwingendes Teilchen, so hat dieses wie eine federnd aufgehängte Masse im allgemeinen je einen Teilbetrag an kinetischer und potentieller Energie. Beim Durchgang durch die *Ruhelage* aber ist *nur kinetische* Energie vorhanden und die potentielle Energie in diesem Augenblick gleich Null. In den Umkehrpunkten seiner Bewegung hat es dagegen nur potentielle Energie. Je nachdem, welchen dieser beiden Grenzfälle man zugrunde legt, läßt sich seine Gesamtenergie demnach in zweierlei Weise ausdrücken. Das gilt nicht nur für das einzelne Teilchen, sondern auch für die gesamte schwingende Luftmasse.

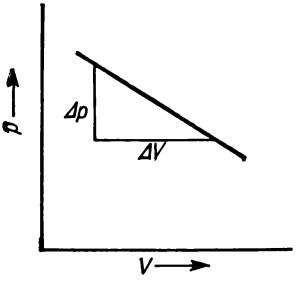


Bild 312. Näherungsweise Darstellung der Volumenänderung eines Gases

Stellt man deren Gesamtenergie in kinetischer Form dar, so muß man dann die Geschwindigkeit verwenden, die beim Passieren der Ruhelage vorhanden ist, d. h. also die Schallschnelle u. Damit ist $W = W_{\mathrm{kin}} = \frac{m u^2}{2}$. Gemäß der Definition (229) ist demnach die Energiedichte $w = \frac{m u^2}{2V}$ oder mit $\varrho = \frac{m}{V}$

(230) $$\boxed{w = \frac{\varrho u^2}{2}}$$ **Energiedichte w im Schallfeld**

Geht man von der potentiellen Energie aus, so entspricht diese der Arbeit, um das Luftvolumen V um den Betrag ΔV zusammenzudrücken. Da es sich hier nur um sehr kleine Druckschwankungen Δp handelt, kann man ausnahmsweise annehmen, daß die Volumenänderung linear verläuft. Dann ist die erforderliche Arbeit nach Bild 312 $W = W_{\mathrm{pot}} = \frac{\Delta V \cdot \Delta p}{2}$. Nach Division durch das Gesamtvolumen V entsteht als zweite Form für die Energiedichte im Schallfeld

(231) $$w = \frac{\Delta V \cdot \Delta p}{2V}.$$

23.3. Schallwechseldruck

Das von den Wellen erfaßte Medium wird im Takte der Frequenz verdichtet und entspannt. Damit entstehen in allen Punkten des Wellenfeldes periodische *Druckschwankungen* Δp, die sich wegen ihrer großen Frequenz einem Manometer natürlich nicht mitteilen können.
Häufig bezeichnet man diesen Wechseldruck als *Schalldruck* schlechthin oder als *Druckamplitude:*

Schallwechseldruck Δp (Druckamplitude):
Größte Druckschwankung innerhalb der Schallwelle

Einheit des Schallwechseldruckes: $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

Oft ist es noch üblich, den Schallwechseldruck Δp in μbar anzugeben. Man beachte dabei (Tabelle in 11.4.1.)

$$1\ \mathrm{N/m^2} = 10\ \mu\mathrm{bar} = 10\ \mathrm{dyn/cm^2}.$$

Um den Schallwechseldruck zu berechnen, geht man von der Gleichung (221) für die Schallgeschwindigkeit aus, in die man für $\frac{1}{\varkappa p}$ den nach (220) erhaltenen Kompressibilitätskoeffizienten $\beta = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p}$ einsetzt. Das liefert

$$c = \sqrt{\frac{V \cdot \Delta p}{\Delta V\, \varrho}} \quad \text{und damit das Verhältnis}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{\varrho c^2}.$$

Bedenkt man weiterhin, daß die beiden mit den Gleichungen (230) und (231) gewonnenen Ausdrücke für die Energiedichte w gleichwertig sind, so erhält man

$$\frac{\varrho u^2}{2} = \frac{\Delta V \cdot \Delta p}{2V}$$

und daraus einen zweiten Ausdruck für das Verhältnis

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\varrho u^2}{\Delta p}.$$

Setzt man dieses mit dem vorhin erhaltenen Wert gleich, so ergibt sich schließlich

$$\frac{\Delta p}{\varrho c^2} = \frac{\varrho u^2}{\Delta p}.$$

Umstellung nach Δp liefert schließlich

(232) $\boxed{\Delta p = \varrho c u}$ **Schallwechseldruck Δp**

Aus der mit der Rayleighschen Scheibe gemessenen Schallschnelle läßt sich nach (232) der Schalldruck berechnen. Dies gelingt bis herunter zu etwa 0,05 N/m². Danach können dann elektrische Instrumente (Mikrophone) geeicht werden, die für praktische Messungen besser geeignet sind.

23.4. Schallstrahlungsdruck

Der zeitliche Mittelwert des Schallwechseldruckes muß naturgemäß gleich Null sein, da positive und negative Druckschwankungen von gleicher Größe rasch aufeinanderfolgen. Dagegen wirkt die von *jeder* Strahlung – also nicht nur von der Schallstrahlung – mitgeführte Energie mit einer bestimmten Kraft auf *alle* Körper, die sich der Strahlung entgegenstellen. Dadurch entsteht

(233) $$\boxed{p = \frac{\varrho}{2} u^2}$$ **Schallstrahlungsdruck** p

(bei völliger Absorption der Schallenergie)[1])

Wie man sieht, berechnet er sich nach der gleichen Formel wie die Energiedichte (230). Man erkennt nämlich, daß die Einheit der Energiedichte $\mathrm{Ws/m^3}$ sich auch als $\mathrm{N/m^2}$, das ist die Einheit des Druckes, schreiben läßt. Eine von Schallwellen getroffene Fläche wird also nicht nur in Schwingungen versetzt, sondern – stark übertrieben ausgedrückt – vom Strahlungsdruck einseitig durchgebogen.

Hierauf beruht das Schallradiometer (Bild 313). Ein leichtes Scheibchen (A) sitzt an einem Hebel (G), der horizontal an einem feinen Faden (F) aufgehängt ist. Die Scheibe (A) weicht dem Strahlungsdruck aus und verdrillt den Faden. (Die *schräg* stehende RAYLEIGHsche Scheibe mißt nicht den Strahlungsdruck, sondern die Schallschnelle!)

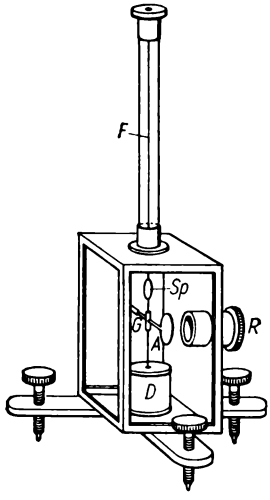


Bild 313. Schallradiometer

23.5. Schallstärke

Bis jetzt haben wir nur die in der Volumeneinheit des Wellenfeldes enthaltene Energie, d. h. die Energiedichte, betrachtet, ohne dabei zu beachten, daß diese Energie von der Welle in Richtung ihrer Ausbreitung mitgeführt wird. Denken wir uns daher eine senkrecht zur Strahlrichtung orientierte Fläche, so wird die Energie W mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c durch diese Fläche hindurchgehen.

Hierbei bezeichnet man zunächst als *Strahlungsfluß* (oder Strahlungsleistung) den Quotienten aus der jeweils neu ankommenden Energie $\mathrm{d}W$ und der dazugehörigen Zeit $\mathrm{d}t$:

(234) $$\boxed{\Phi = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$$ **Strahlungsfluß** Φ

[1]) Bei vollständiger Reflexion der Strahlung an der auffangenden Fläche ergibt sich der doppelte Wert, da dann die Energiedichte den doppelten Wert hat (ankommende + reflektierte Strahlung)

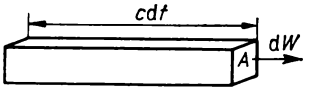


Bild 314. Zur Definition des Strahlungsflusses

Die innerhalb der Zeit dt ankommende Energie ist nun – wenn man der Einfachheit halber an eine ebene Welle denkt – vor ihrer Ankunft in einem Prisma enthalten (Bild 314), dessen Länge $c \cdot dt$ und dessen Querschnitt A ist. Mit der auf die Volumeneinheit bezogenen Energiedichte w enthält das Prisma daher die Energie

$$dW = wAc\,dt,$$

womit sich für den Strahlungsfluß auch

$$\Phi = wA\,c$$

ergibt. Bezieht man nun noch den Strahlungsfluß auf die Einheit der durchsetzten Fläche A, so fällt der Faktor A aus der letzten Gleichung heraus, und man bekommt die

(235) **Strahlungsflußdichte:** $D = \dfrac{\Phi}{A} = wc.$

Diese Zusammenhänge gelten für *alle Arten von Strahlungen*. Um sie auf die Verhältnisse im Schallfeld anzuwenden, brauchen wir in die letzte Gleichung nur die Energiedichte $w = \frac{\varrho}{2} u^2$ einzusetzen und erhalten damit

(236) $\boxed{I = \frac{\varrho}{2} u^2 c}$ **Schallstärke** I

Einheit der Schallstärke: $1\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

Man verwendet noch oft μW/cm^2. Hierbei gilt

$$1\ \mathrm{W/m^2} = 100\ \mu\mathrm{W/cm^2}.$$

Man kann die Schallstärke auch mit Hilfe des Schallwechseldruckes nach (232) ausdrücken und erhält dann

(237) $\boxed{I = \dfrac{(\Delta p)^2}{2\varrho c}}$ oder auch $\boxed{I = \dfrac{(\Delta p)\,u}{2}}$

Beispiele: 1. Normale Unterhaltungssprache erzeugt im freien Raum in 1 m Entfernung einen Schallwechseldruck Δp von etwa 0,06 μbar. Welche Schallstärke besteht an dieser Stelle bei 0 °C? – Mit 0,06 μbar = 0,006 N/m^2 und c = 331,6 m/s wird nach (237)

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\varrho c} = \frac{0{,}006^2\ \mathrm{kg^2\,m^3\,m^3\,s}}{\mathrm{s^4\,m^4}\,2 \cdot 1{,}293\ \mathrm{kg}\ 331{,}6\ \mathrm{m}} = 4{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2} = 0{,}042\ \mu\mathrm{W/m^2}.$$

2. Eine Alarmsirene erzeugt in 50 m Entfernung eine Schallstärke von 10^{-2} W/m^2. Zu berechnen sind der Schallwechseldruck, die Schallschnelle und der Schallstrahlungsdruck (Schallgeschwindigkeit c = 340 m/s, Luftdichte ϱ = 1,3 kg/m^3). –
Nach (237) ist der Schallwechseldruck

$$\Delta p = \sqrt{2\varrho c I} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}3\ \mathrm{kg}\ 340\ \mathrm{m}\ 10^{-2}\ \mathrm{W}}{\mathrm{m^3\,s\,m^2}}} = 2{,}97\ \mathrm{N/m^2};$$

nach (232) ist die Schallschnelle

$$u = \frac{\Delta p}{\varrho c} = \frac{2{,}97\ \mathrm{N\,m^3\,s}}{\mathrm{m^3\,1{,}3\,kg\,340\,m}} = 6{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s};$$

nach (233) ist der Schallstrahlungsdruck

$$p = \frac{\varrho u^2}{2} = \frac{1{,}3\ \mathrm{kg}\ 6{,}7^2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}}{\mathrm{m^3\,2\,s^2}} = 2{,}94 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$$

oder auch nach (236)

$$p = \frac{\varrho u^2}{2} = \frac{I}{c} = \frac{10^{-2}\ \mathrm{Ws}}{\mathrm{m^2\,340\,m}} = 2{,}94 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}.$$

23.6. Vergleich von Schallstärken

Da sich die Schallstärken der praktisch in Frage kommenden Schallquellen um sehr große Werte unterscheiden, wählt man zu ihrem Vergleich den 10fachen Zehnerlogarithmus des Verhältnisses der Schallstärken, genannt **Dezibel** [1 dB = $^1/_{10}$ Bel[1])]. Weshalb man gerade eine logarithmische Skale wählt, wird auf S. 285 näher erläutert.

(238) $$\boxed{D = 10 \lg \frac{I_2}{I_1}\ \mathrm{dB} = 20 \lg \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}\ \mathrm{dB}}$$ **Schallpegeldifferenz D**

Da die Schallstärke dem Quadrat des Schalldruckes proportional ist, erscheint im zweiten Ausdruck der Faktor 2.

Beispiele: 1. Die von einer Geige abgestrahlte Leistung von maximal 10^{-3} W wird mittels Lautsprechers auf 100 W verstärkt. Wieviel Dezibel beträgt die Verstärkung? –

$$D = 10 \lg \frac{10^2}{10^{-3}}\ \mathrm{dB} = 10 \cdot 5\ \mathrm{dB} = 50\ \mathrm{dB}$$

2. Ein Schallmeßgerät hat einen Meßbereich von 75 dB. Welchem Verhältnis der Schallstärken entspricht dies? –

$$D = 10 \lg \frac{I_2}{I_1}\ \mathrm{dB} = 75\ \mathrm{dB}$$

Hieraus wird $I_2 : I_1 = 10^{7{,}5} = 31{,}6$ Millionen : 1.

23.7. Empfindlichkeit des Gehörs

Alle Erscheinungen des Hörschalls wirken in zweierlei Hinsicht. Auf der einen Seite stehen die physikalischen Vorgänge: die Schallerzeuger und das Schallfeld mit seinen charakteristischen Größen. Auf der anderen Seite ist das menschliche *Gehör*, das mit bestimmten **Empfindungen** auf die physikalischen **Reize** reagiert. Dies ist strenggenommen keine physikalische Angelegenheit mehr, sondern eine physiologische. Die *unterste* Grenze der Schallstärke I_0, an der ein eben noch wahrnehmbarer Ton

[1]) Graham Bell, 1847 bis 1922, konstruierte das erste Telefon

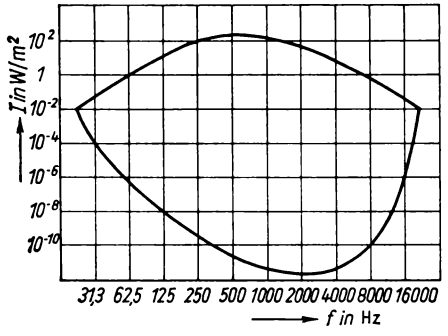


Bild 315. Hörfläche

verschwindet, nennt man die untere **Hörschwelle.** Sie ist stark von der *Frequenz* abhängig, da das Ohr für die einzelnen Frequenzen verschieden empfindlich ist. Im Gebiet der größten Empfindlichkeit (etwa 1000 Hz) liegt sie bei $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ bzw. bei einem Schallwechseldruck von $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N/m^2}$.

Die untere Kurve von Bild 315 stellt die Schwellenwerte für die einzelnen Frequenzen dar.

Extrem große Schallstärken werden als *Schmerz* empfunden. Auch diese **Schmerzgrenze** ist frequenzabhängig und wird durch die obere Kurve veranschaulicht. Beide Kurven schließen die sogenannte **Hörfläche** ein. Für 1000 Hz liegt die Schmerzgrenze bei 200 W/m². Damit ergibt sich der erstaunliche Intensitätsbereich, den das Ohr zu bewältigen vermag. Setzt man die Schallstärke an der Hörschwelle gleich 1, so entspricht die Schmerzgrenze dem $\frac{2 \cdot 10^2}{10^{-12}}$, d. h. dem 200billionenfachen Wert!

23.8. Lautstärke

Untersucht man nun, in welcher Weise das menschliche Gehör auf die Stärke des dargebotenen Schalls reagiert, so stößt man zunächst darauf, daß die wahrgenommene Empfindung der Stärke des einwirkenden Schalls bei weitem nicht proportional ist. Es gilt vielmehr ein ganz anderes Gesetz, das in ähnlicher Weise auch der Licht- und Druckempfindung zugrunde liegt. Es ist das

Weber-Fechnersche Gesetz:

Die absolute Änderung der Empfindung ist proportional der relativen Änderung des Reizes.

Um das Gesetz zu verdeutlichen, lege man ein Gewichtsstück von 100 p auf die ausgestreckte Hand. Dann muß man 5 p dazulegen, wenn die Gewichtszunahme eben noch verspürt werden soll. Bei 200 p Belastung sind 10 p nötig, um das Gefühl einer Mehrbelastung hervorzurufen, bei 1000 p erzeugen erst 50 p einen fühlbaren Unterschied. Bezeichnet man den eben noch wahrnehmbaren Unterschied

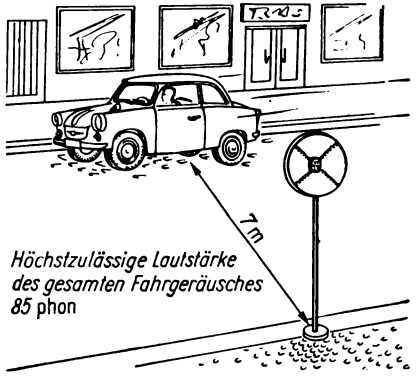


Bild 316. Lautstärkevorschrift im Straßenverkehr

der Empfindung als **Unterschiedsschwelle** ΔE, die jeweils vorhandene Belastung mit R und die entsprechende Mehrbelastung mit ΔR, so gilt demnach das WEBER-FECHNERsche Gesetz

$$\Delta E = c \frac{\Delta R}{R}.$$

In dem eben genannten Beispiel ist das Verhältnis $\frac{\Delta R}{R} = \frac{5\,\mathrm{p}}{100\,\mathrm{p}}$ und c ein Proportionalitätsfaktor.

Überträgt man diesen Zusammenhang auf die Schallempfindung, so wird diese vom Schallwechseldruck Δp hervorgerufen und erzeugt im Bewußtsein eine bestimmte **Lautstärke** Λ:

$$\mathrm{d}\Lambda = c \frac{\mathrm{d}(\Delta p)}{\Delta p}.$$

Das unbestimmte Integral hiervon lautet

$$\Lambda = c \ln \Delta p + C.$$

Die Integrationskonstante folgt aus dem Grenzfall, daß an der unteren Hörschwelle Δp_0 die Schallempfindung gerade verschwindet, d. h. $\Lambda_0 = 0$ wird. Das ergibt dann

$$\Lambda = c \ln \frac{\Delta p}{\Delta p_0}.$$

Der Proportionalitätsfaktor wurde mit $c = \frac{1}{0{,}1}$ festgesetzt. Dann nimmt die Lautstärke Λ jeweils um eine ganze Einheit zu, wenn der Schalldruck um die Unterschiedsschwelle (etwa 10%) zunimmt. Unter Abrundung und Verwendung dekadischer Logarithmen entsteht auf diese Weise die Gleichung

(239) $$\boxed{\Lambda = 20 \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0}\ \mathrm{phon}}$$ **Lautstärke** Λ

(Bezugsschalldruck $\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2} = 2 \cdot 10^{-4}\,\mu\mathrm{bar}$[1]), entsprechend dem Schwellenwert der Ohrempfindlichkeit für 1000 Hz

Die Lautstärke stellt eine dimensionslose Zahl dar und wird in **Phon** (Kurzzeichen phon) gezählt.

Lautstärkemessungen werden mit einem **Normalton von 1000 Hz** vorgenommen, der so eingestellt wird, daß er mit dem zu messenden Geräusch gleich laut erscheint. p_s ist also der Schalldruck des gleich laut empfundenen Normaltones von 1000 Hz.

Da dem Aufbau der Phonskale die Unterschiedsschwelle zugrunde liegt, hat es *keinen* Sinn, Bruchteile von Phon anzugeben. In der Skale kommt die physiologische Tatsache zum Ausdruck, daß *schwache* Geräusche *sehr gut* unterschieden werden. Bei *starken* Geräuschen machen sich dagegen nur noch *sehr große* Unterschiede bemerkbar. Lautstärken werden mit dem **Phonmesser** bestimmt. Neuere Instrumente geben die Phonzahl selbsttätig an.

[1]) Dies ist der „Effektivwert". Es ist aber zu beachten, daß in den Gleichungen (232) bis (237) der „Scheitelwert" (Druckamplitude S. 280) einzusetzen ist. Dieser ist um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Effektivwert (s. 44.1.3.)

Lautstärkenskale

Geräusch	Lautstärke in phon
Flüstern, leises Uhrticken	10
Blätterrauschen	20
Ruhige Straße	30
Leises Radio im Zimmer	40
Umgangssprache	50
Bürolärm	60
Starker Straßenlärm	85
Hochbahn, Druckluftbohrer	90
Kesselschmiede	100
Orchester, 75 Mann in 5 m Entfernung	115
Flugzeug, 6 m vom Propeller	120
Schmerzgrenze	130

Beispiele: 1. Das Geräusch einer Armbanduhr wird bei bestimmtem Abstand mit 1 phon wahrgenommen. Welche Lautstärke ergeben zwei Uhren? – Zwei Uhren ergeben die doppelte Schallstärke einer einzelnen Uhr. Aus den Gleichungen (239) und (238) $\Lambda_1 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0}$ und $\Lambda_2 = 10 \lg \frac{2I_1}{I_0}$ bildet man $\Lambda_2 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} + 10 \lg 2 \approx \Lambda_1 + 3 = 4$ phon.

2. Wieviel gleichzeitig laufende Motoren von je 80 phon ergeben zusammen die Lautstärke 100 phon? – Beim Zusammenwirken mehrerer Schallquellen sind die Schallstärken I algebraisch zu addieren, so daß nach (238) $10 \lg \frac{I_1}{I_0} = 80$ bzw. $10 \lg \frac{xI_1}{I_0} = 100$; dann ist $\frac{I_1}{I_0} = 10^8$ und $\frac{xI_1}{I_0} = 10^{10}$, wonach $x = 100$ Motoren zusammen 100 phon ergeben.

23.9. Ultraschall

Frequenzen, die oberhalb der Hörgrenze von etwa 20 kHz liegen, bezeichnet man als Ultraschall. Man kann Ultraschall mit kleinen Pfeifen und Sirenen erzeugen. Es werden jedoch magnetische und elektrische Verfahren bevorzugt. Die beiden bekanntesten sind die folgenden:

1. Das magnetostriktive Verfahren. Es wird die Eigenschaft ferromagnetischer Stoffe benutzt, bei Magnetisierung ihre Länge ein wenig zu ändern. Ein Nickelstab, den man in eine von Wechselstrom entsprechender Frequenz durchflossene Spule steckt, wird dabei in seiner longitudinalen Eigenfrequenz angeregt (Frequenzbereich 10^4 bis 10^5 Hz).

2. Das piezoelektrische Verfahren. Aus einem Quarzkristall wird nach Bild 317 eine Scheibe herausgeschnitten und mit zwei Elektroden versehen. Beim Anlegen einer elektrischen Spannung an die beiden flachen Seiten zieht sich die Platte in Richtung xx zusammen und dehnt sich in Richtung yy aus. Bei Wechselspannungen, deren Fre-

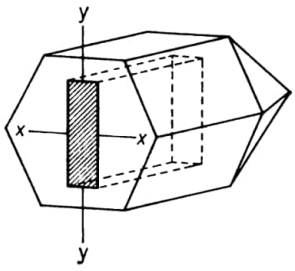


Bild 317. Orientierung einer piezoelektrischen Platte in einem Quarzkristall

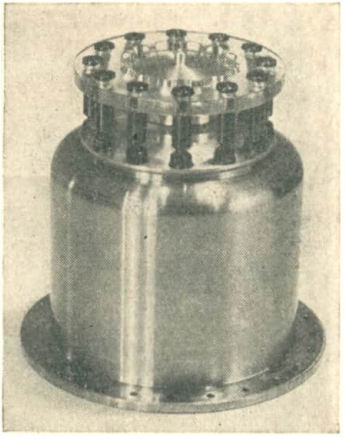


Bild 318. Schallgeber für 800 kHz und Abstrahlung in vertikaler Richtung – Schalleistung 400 W

quenz mit den Eigenschwingungen des Quarzes übereinstimmt, entstehen kräftige mechanische Schwingungen (Bild 318, Frequenzbereich $10^5 \cdots 10^7$ Hz). Wesentlich billiger ist das keramisch hergestellte Bariumtitanat $BaTiO_3$. Es erlangt die piezoelektrischen Eigenschaften erst dann, wenn es durch eine angelegte hohe Gleichspannung polarisiert wird. Weitere künstlich gezüchtete Kristalle haben nur geringe mechanische Festigkeit.

Infolge ihrer sehr kleinen Wellenlänge lassen sich Ultraschallwellen durch die von ihnen hervorgerufenen Dichteschwankungen in durchsichtigen Medien mittels optischer Beugungserscheinungen leicht sichtbar machen. Man sieht dann, daß sie als scharf begrenztes Bündel rechtwinklig zur schwingenden Oberfläche abgestrahlt werden (Bild 319). Die Schallstärke läßt sich sehr hoch, bis zu 10 W/cm², treiben. Dabei treten Schallwechseldrücke von $\pm$ 5 at auf. Zur technischen Anwendung führen insbesondere folgende Eigenschaften:

1. Unhörbarkeit und leichte Richtbarkeit wegen der kleinen Wellenlänge. Anwendung: Echolotung im Wasser, Aufsuchen von Heringsschwärmen, geheimes Verständigungsmittel unter Wasser;

2. Reflexion von Ultraschallimpulsen an Rissen und Hohlräumen im Innern von massiven Körpern (Bild 320). Anwendung: Aufsuchen von Materialfehlern in größeren Werkstücken, wenn eine Durchleuchtung mit Röntgenstrahlen nicht anwendbar ist;

3. große akustische Leistung, da nach (228) und (230) die Schallenergie mit dem Quadrat der Frequenz zunimmt. Wirkung: Erwärmung des beschallten Mediums;

4. Schüttelwirkung in Flüssigkeiten. Anwendung (Bild 321): Beseitigung von Luftblasen in zähen Flüssigkeiten, Entgasung von Schmelzen, Verhinderung der Unterkühlung beim Gefrieren, Wasserenthärtung, Herstellung kolloider Lösungen;

5. Kavitation, d. h. die Bildung von Hohlräumen in den Wellenbäuchen des schwingenden Mediums. Wirkung: starke Druckstöße, Zerreißung. Anwendung: Beeinflussung chemischer Reaktionen, Zerreißen von zu großen Molekülen.

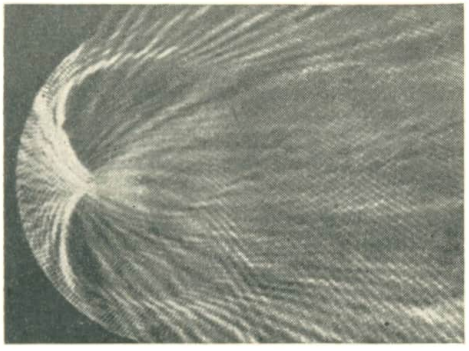


Bild 319. Sammlung von Ultraschallwellen in einem Hohlspiegel (vgl. hiermit Bild 333)

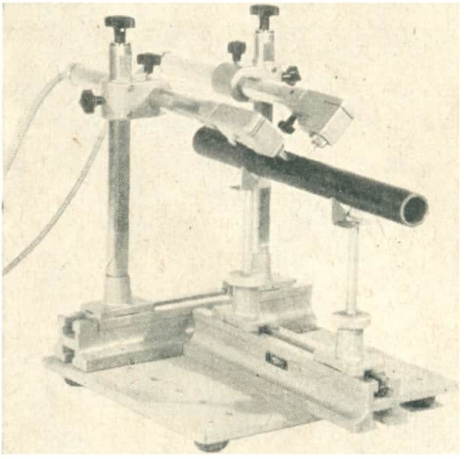


Bild 320. Materialprüfung mittels Durchschallung. Der linke Prüfkopf ist der Schallgeber, der rechte Prüfkopf ist Schallempfänger

Die mechanische Wirkung der äußerst intensiven Druckschwankungen im Innern von Flüssigkeiten bewirkt in der **Ultraschallwaschmaschine** das Herauslösen von Schmutzteilchen aus dem Gewebe. Das **Ultraschall-Lötgerät** beruht darauf, daß eine Zinnschmelze durchschallt wird. Dadurch wird die Oxidhaut an der Oberfläche eingetauchter Aluminiumteile zerstört, so daß eine haltbare Verzinnung erreicht wird. Starke Bündelung der Ultraschallenergie auf engstem Raum ermöglicht das **Bohren von feinen Löchern** (auch von viereckiger Form) in härtesten Materialien, wie in Uhrensteinen usw.

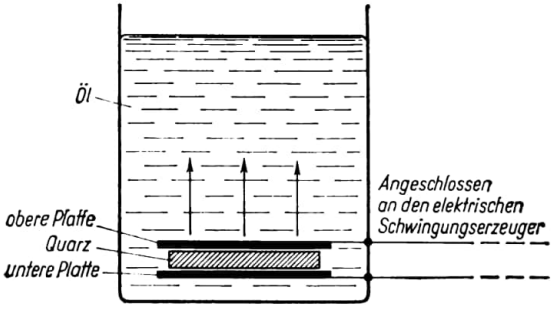


Bild 321. Beschallung einer Flüssigkeit

Geometrische Optik

24. Wesen und Ausbreitung des Lichtes

24.1. Wesen des Lichtes

Von der Erscheinung „Licht" ist ähnliches zu sagen wie von der Wärme. In unmittelbarer Weise ist das Licht eine Sinnesempfindung und damit eine physiologische Angelegenheit. Die Ursachen dieser Empfindung, d. h. die ihr entsprechenden physikalischen Vorgänge, werden zwar ebenfalls als „Licht" bezeichnet, gehören aber doch zu einer bestimmten Gruppe physikalischer Erscheinungen, die nicht unbedingt sichtbar zu sein brauchen. Es sind **elektromagnetische Wellen,** von denen das Auge nur den schmalen Bereich zwischen etwa 380···780 nm wahrnimmt. Wenn man in der Physik die Optik als Lehre vom Licht als besonderen Abschnitt hervorhebt, so geschieht das nur im Hinblick auf deren besondere Wichtigkeit für die menschliche Kultur und Technik. Dabei werden die an den sichtbaren Bereich angrenzenden Gebiete des *kurzwelligen* **ultravioletten Lichtes** und des *langwelligen* **ultraroten Lichtes** (mitunter auch **Infrarot** genannt) mit in die physikalische Optik einbezogen. Der *physikalische* Begriff „Licht" ist also *weiter* gefaßt als der *physiologische*. Die Übersicht S. 290 soll nur einer groben Orientierung dienen. Die Wellenlängen geben die ungefähren Größenordnungen an. In einigen Fällen überlappen sich die angegebenen Bereiche.

Die als Licht im Sinne der Optik zu verstehende elektromagnetische Strahlung kommt durch sprunghafte Bewegungen der Elektronen *innerhalb* der Atome zustande. Nach der (heute allerdings nur noch modellmäßig benutzten) Vorstellung von Niels Bohr (1913) laufen die Elektronen auf bestimmten Bahnen um den Atomkern. Beim Sprung des Elektrons von einer *kernferneren* auf eine *kernnähere* Bahn wird die frei werdende Energie als **Lichtquant** ausgestrahlt.

Aber auch die Atome als Ganzes können, wenn sie hocherhitzten Körpern angehören, zu so raschen Schwingungen angeregt werden, daß sie Lichtwellen hervorrufen. So sind die technisch meist verwendeten Lichtquellen **Temperaturstrahler.** Hierzu gehören alle Kerzen-, Öl- und Gasflammen, d. h. das Licht des „Feuers". Es sind dies

Wellenlänge	Art der Strahlung		Anwendung
10 km···1 km	Technische Hochfrequenz	Lange Wellen	Rundfunk und Telegrafie
1 km···100 m		Mittelwellen	
100 m···10 m		Kurzwellen	
10 m···1 m		Ultrakurzwellen	
1 m···10 cm		Mikrowellen	Fernsehen Vielfachtelefonie Radartechnik
10 cm···1 cm			
1 cm···1 mm			
1 mm···100 µm		Wärmestrahlen	Medizin Infrarotfotografie
100 µm···10 µm 10 µm···780 nm	Ultrarot		
780 nm···380 nm	Sichtbare Strahlung	Licht	Beleuchtungstechnik
380 nm···10 nm	Ultraviolett		Höhensonne
10 nm···10^{-12} m	Röntgenstrahlen	oder Elektronenstrahlen	Medizin Materialprüfung Elektronenmikroskop
10^{-12}m···10^{-14}m	Gammastrahlen		

Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen (ungefähre Bereiche)

Gebilde aus Gasen, deren Licht von *glühenden Kohlenstoffteilchen* herrührt. Feste glühende Körper finden in den Glühlampen (Wolframdraht- oder Kohlenfadenlampen) oder Bogenlampen (glühende Kohle) Verwendung. Die Sonne, deren Innentemperatur viele Millionen Grad beträgt, ist von einer Hülle glühender Gase umgeben.

Unter **Lumineszenz** versteht man die Lichtaussendung bei *niederer* Temperatur. Je nach der Art der Entstehung unterscheidet man:

Elektrolumineszenz:	Glimmlicht elektrisch angeregter Gase und fester Körper	Glimmlampe, Leuchtröhre und Leuchtkondensator
Chemilumineszenz:	durch chemische Vorgänge entstehendes Leuchten	Leuchtkäfer, faulendes Holz, kalt leuchtender Phosphor
Fluoreszenz:	Leuchten beim Auftreffen anderer Strahlung	Röntgenschirm, Leuchtstoffröhren (in Verbindung mit Elektrolumineszenz)
Phosphoreszenz:	Nachleuchten bestrahlter Stoffe	Leuchtfarben, Leuchtzifferblatt

24.2. Lichtstrahlen

Wegen der Wellennatur des Lichtes können die Gesetze, nach denen es sich im leeren Raum und in den stofflichen Medien ausbreitet, eigentlich nur vom Standpunkt der Wellenlehre aus richtig beschrieben werden. Dies trifft insbesondere für die Erscheinungen der Interferenz, Beugung und Polarisation des Lichtes zu. Sie werden daher in der **Wellenoptik** (Abschnitte 30. ff.) gesondert behandelt.
Bei der Darstellung einer anderen Gruppe optischer Gesetze, insbesondere der Reflexion, Brechung und Dispersion, kann man aber die Wellenvorstellung stark vereinfachen. Die von einem punktförmigen Erregungszentrum ausgehende, in einem Medium sich ausbreitende Welle ist zunächst ein räumliches Gebilde. Ein in dieses Wellenfeld gebrachter Gegenstand wird dann von einem Lichtkegel getroffen, dessen Spitze im Erregungszentrum liegt. Bei allen mit Licht angestellten Experimenten hat man es daher stets mit mehr oder weniger breiten *Lichtbündeln* zu tun. Einzelne Lichtstrahlen gibt es daher gar nicht, sondern allenfalls äußerst feine kegelförmige Lichtbündel. Trotzdem kann man in manchen Fällen die Breite eines solchen Bündels vernachlässigen und so tun, als ob man einzelne Strahlen vor sich hätte. Diese Strahlen sind aber keine physikalischen Gebilde mehr, sondern mathematische, senkrecht zu den Wellenfronten (s. 21.3.) verlaufende Linien, deren Verlauf sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.
Soweit dieses Verfahren durchführbar ist, spricht man von **Strahlen-** oder **geometrischer Optik.** Sie stützt sich vor allem auf die elementare Erfahrung:

In allen homogenen Medien breitet sich das Licht geradlinig aus.

Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes zeigt sich am **Schatten** hinter beleuchteten Gegenständen. Lichtquelle, Gegenstand und Schattengrenze bilden eine *gerade* Linie (Bild 322).
Eine weitere Vereinfachung trifft man ferner hinsichtlich der Lichtquellen, die man häufig als *punktförmig* annimmt. In Wahrheit gibt es jedoch nur leuchtende *Körper*, die aus zahllosen leuchtenden Atomen bestehen. Die Oberfläche ausgedehnter leuchtender Körper behandelt man dann so, als ob sie aus einzelnen leuchtenden Punkten bestünde:

Jeder Punkt eines leuchtenden Körpers sendet ein divergentes (auseinanderlaufendes) Strahlenbündel aus.

Wird beispielsweise ein Gegenstand von *zwei* punktförmigen Lichtquellen beleuchtet, so bilden sich hinter ihm ein Gebiet völliger Dunkelheit **(Kernschatten)** und zwei Teilgebiete, die von jeweils nur *einer* Lichtquelle bestrahlt werden **(Halbschatten,** Bild 323).
Bei der Beleuchtung eines Gegenstandes mit gewöhnlichen Lichtquellen (z. B. einer Kerzenflamme) wirken viele nebeneinanderliegende leuchtende Punkte gleichzeitig. Dann sind Kern- und Halbschatten nicht scharf abgegrenzt, sondern beide gehen allmählich ineinander über.
Eine interessante Anwendung der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes ist die **Lochkamera:** ein einfacher Kasten, der vorn eine kleine Öffnung und ihr gegenüber einen transparenten (durchscheinenden) Schirm aus Papier hat (Bild 324). Durch die

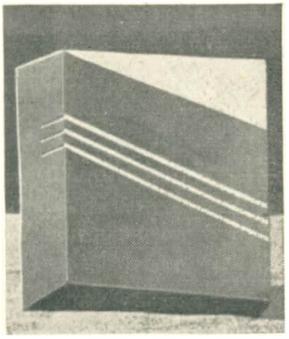


Bild 322. Geradlinige Ausbreitung des Lichtes (Sonnenstrahlen)



Bild 323. Kern- und Halbschatten

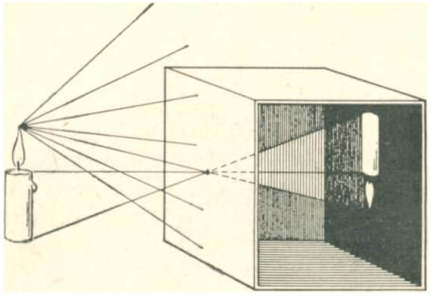


Bild 324. Lochkamera

nahezu punktförmige Öffnung kann von jedem Punkt des Gegenstandes nur ein äußerst schmales Lichtbündel gelangen. Jeder Punkt des Gegenstandes erzeugt einen Lichtpunkt auf dem Schirm. Es entsteht ein umgekehrtes Bild des Gegenstandes. Bei sehr feiner Öffnung und Verwendung eines fotografischen Films kann man leidlich gute Bilder erzielen, deren Schärfe von der Entfernung des Gegenstandes nicht abhängt.

24.3. Lichtgeschwindigkeit

(240) $\boxed{c = 299\,793\ \text{km/s}}$ $\approx 300\,000$ km/s **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum**

1. Berechnung von Olaf Römer (1670). Die Umlaufzeit des innersten Jupitermondes läßt sich im Fernrohr dadurch leicht feststellen, daß dieser bei jeder Umkreisung in dem Schatten des Planeten untertaucht und unsichtbar wird. Als die Erde in Stellung A (Bild 325, Konjunktion) dem Jupiter am nächsten stand, stellte RÖMER eine Umlaufszeit von 42,5 h fest. Nach etwa 200 Tagen, als die Erde in Stellung B (Opposition) stand, trat die Verfinsterung 1000 Sekunden später als berechnet ein.
Wenn nämlich die Erde von A aus in ihrer Bahn weiter vorrückt, entfernt sie sich um ein bestimmtes Stück vom Jupiter. Wegen dieser vom Licht zusätzlich zurückzulegenden Teilstrecke erleidet die einzelne Verfinsterung gegenüber der vorhergehenden eine gewisse Verspätung. Die Summe aller Verspätungen beträgt die genannten 1000 Sekunden und entspricht der Strecke, um die sich die Erde im ganzen

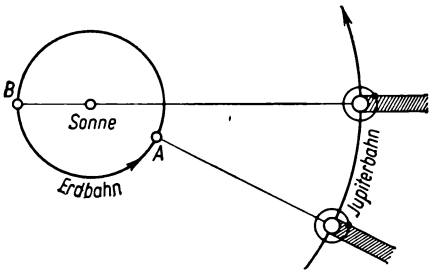


Bild 325. Zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit nach Olaf Römer

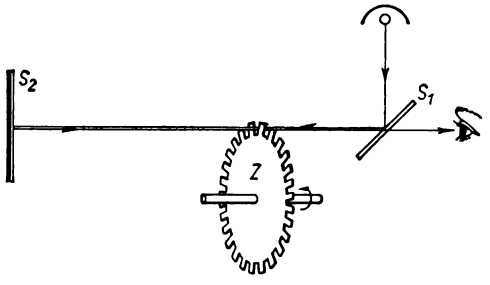


Bild 326. Zahnradversuch nach Fizeau

vom Jupiter entfernt hat. Sie ist gleich dem Durchmesser der Erdbahn. Bei der Annäherung an den Planeten wird die Verspätung wieder aufgeholt. Mit dem Durchmesser der Erdbahn $300 \cdot 10^6$ km ergibt sich

$$c = \frac{300 \cdot 10^6 \text{ km}}{1000 \text{ s}} = 300000 \text{ km/s}.$$

2. Die Methode von Fizeau (1849). Durch ein Zahnrad Z mit 720 Lücken wurde über den halbdurchlässigen Spiegel S_1 ein Lichtstrahl nach dem $8^1/_3$ km entfernten Spiegel S_2 gesandt und dort reflektiert (Bild 326). Bei stillstehendem Rad sah Fizeau das Licht durch dieselbe Lücke zurückkommen. Als das Rad aber mit einer Drehzahl von $12{,}5^1$/s rotierte, trat völlige Verdunklung ein. Der zurückkehrende Strahl fand seinen Weg durch den folgenden Zahn versperrt, d. h. nach $\frac{1}{1440}$ Radumfang bzw. $\frac{1}{1440 \cdot 12{,}5}$ s. In dieser Zeit hatte das Licht $2 \cdot 8^1/_3$ km $= 16^2/_3$ km zurückgelegt. Somit errechnet sich wiederum

$$c = 16^2/_3 \text{ km} \cdot 1440 \cdot 12{,}5^1/\text{s} = 300000 \text{ km/s}.$$

Die letzten Präzisionsmessungen, die mit anderen Methoden durchgeführt wurden, lieferten den eingangs genannten Wert mit einer geschätzten Unsicherheit von nicht mehr als $\pm$ 0,3 km/s.

25. Reflexion des Lichtes

Reflexionsgesetz: Einfallender und reflektierter Strahl bilden mit dem Einfallslot gleiche Winkel.
Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

Der Beweis kann erst in der Wellenoptik erbracht werden. Hier sei das Gesetz vorerst als Erfahrungstatsache mitgeteilt.
Ist die Oberfläche des reflektierenden Körpers rauh und körnig, so treffen die Strahlen unter den verschiedensten Winkeln auf, das Licht wird in unregelmäßiger Weise

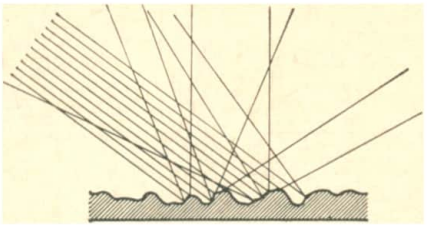


Bild 327. Diffuse Reflexion eines parallelen Strahlenbündels

(Bild 327) nach allen Richtungen hin **zerstreut.** Rauhes Zeichenpapier, der Mörtel an der Hauswand oder Stoffgewebe sind Beispiele solch **diffuser Reflexion.**

25.1. Ebener Spiegel

Vor der Spiegelscheibe S (Bild 328) befinde sich ein Gegenstand G (etwa ein Lineal). Von einem einzelnen Punkt P geht eine Vielzahl von Strahlen aus. Zwei beliebige Strahlen 1 und 2 seien herausgegriffen. Zur Konstruktion der reflektierten Strahlen 1′ und 2′ sind die Einfallslote zu zeichnen und die Winkel $\alpha = \alpha'$ sowie $\beta = \beta'$ anzutragen. Für das beobachtende Auge scheinen die Strahlen 1′ und 2′ von ihrem Schnittpunkt P' herzukommen.

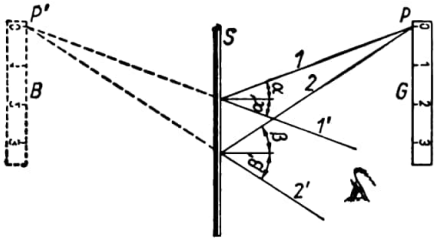


Bild 328. Spiegelung

Es bemerkt also nicht den wirklichen Punkt P, sondern sein **Spiegelbild** P'. Dieselbe Konstruktion läßt sich auch für jeden anderen Punkt des Gegenstandes durchführen. Im ganzen entsteht dadurch das Bild B, das selbst physisch nicht existiert, sondern dem Auge dort erscheint. Man nennt es daher ein **scheinbares (virtuelles) Bild.** Der linke Anfangspunkt des Lineals erscheint auf der rechten Seite, d. h. am Ende des Spiegelbildes. Die geometrischen Verhältnisse zeigen noch, daß G und B gleich groß sein müssen.

Der ebene Spiegel erzeugt ein virtuelles, gleich großes und seitenverkehrtes Bild.

Man hat also wohl zu unterscheiden:

reelle (wirkliche) Bilder:

Ihre Bildpunkte sind Schnittpunkte *wirklicher* Strahlen. Man kann sie auf einer Mattscheibe auffangen;

virtuelle (scheinbare) Bilder:

Ihre Bildpunkte sind Schnittpunkte *verlängert gedachter* Strahlen.

Bei vielen Meßinstrumenten (z. B. beim Spiegelgalvanometer) handelt es sich um die genaue Messung kleiner *Drehwinkel.* Man läßt das Licht eines kleinen Lämpchens (Bild 329) durch eine Schlitzblende B und eine Linse L auf den sich drehenden Spiegel und von da aus auf eine weiter entfernte Skale fallen. Man nennt diese Anordnung einen **Lichtzeiger.**

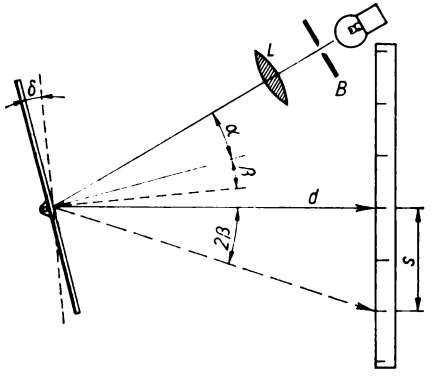


Bild 329. Lichtzeiger

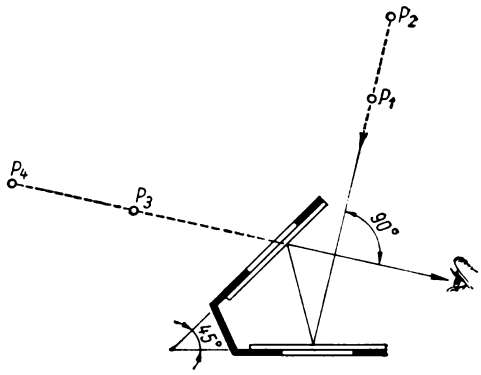


Bild 330. Winkelspiegel

Einfallender und reflektierter Strahl bilden den Winkel 2α. Nach Drehung um den kleinen Betrag δ ist der neue Einfallswinkel $(\alpha + \delta)$. Beide Strahlen bilden jetzt den Winkel $2(\alpha + \delta)$ miteinander, so daß der reflektierte Strahl um 2δ gedreht wird:

(241) **Bei Drehung des Spiegels dreht sich der reflektierte Strahl um den doppelten Winkel.**

Auf der Skale ergibt sich in der Entfernung d eine Verschiebung des Lichtzeigers um s. Es ist dann $\tan 2\delta = \frac{s}{d}$, woraus sich δ berechnen läßt.

Da das Bild des Lämpchens in Wirklichkeit einen Kreisbogen beschreibt, muß bei großen Drehwinkeln die lineare Verschiebung s auf den Kreisbogen reduziert werden.

Zum Abstecken genau rechter Winkel im Gelände dient der **Winkelspiegel.** Er besteht aus 2 um 45° gegeneinander geneigten Spiegeln, die man an einem Griff in der Hand hält (Bild 330). Man betrachtet die beiden Punkte P_1 und P_2 und dreht den Spiegel, bis sie sich decken. Über den einen Spiegel hinweg sieht man ins Gelände und kann dort 2 Fluchtstäbe P_3 und P_4 so lange hin und her rücken lassen, bis auch diese sich mit P_1 und P_2 decken. Dann bilden $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ einen rechten Winkel.

Beweis: Die beiden Spiegel sind gegeneinander um 45° verdreht, folglich muß nach dem vorigen Satz (241) der reflektierte Strahl um den doppelten Betrag, d. h. um 90°, versetzt sein.

25.2. Gekrümmte Spiegel

Spiegel, die Teile einer Kugelfläche darstellen, heißen **sphärische (Kugel-) Spiegel.** Sie können **erhaben (konvex)** oder **hohl (konkav)** sein.
Die Entfernung der Kugelfläche von ihrem Mittelpunkt nennt man den **Krümmungsradius** r. Jede durch den Mittelpunkt laufende Gerade ist eine **optische Achse** und trifft den Spiegel in dessen **Scheitel.**

25.2.1. Sphärischer Hohlspiegel

Fällt paralleles Licht (z. B. Sonnenlicht) auf den Spiegel, so werden die Strahlen nach einem *gemeinsamen* Punkt, dem **Brennpunkt F (Fokus),** reflektiert (Bild 331). Seine Entfernung vom Spiegelscheitel ist die **Brennweite f.**

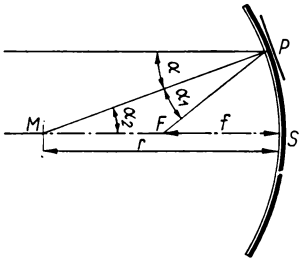


Bild 331. Brennweite f und Krümmungsradius r

(242) **Achsenparallele und achsnahe Strahlen werden im Brennpunkt gesammelt. Vom Brennpunkt ausgehende Strahlen werden achsenparallel reflektiert.**

Um das genauer zu untersuchen, werde nach Bild 331 ein achsenparalleler Strahl verfolgt, der den Spiegel im Punkt P und die Achse im Brennpunkt F trifft. Wenn M der Krümmungsmittelpunkt und $\overline{SF}$ die Brennweite f des Spiegels ist, gelten folgende Beziehungen.

$\alpha = \alpha_1$ (Reflexionsgesetz)
$\alpha = \alpha_2$ (Wechselwinkel an Parallelen)
$\overline{MF} = \overline{PF}$ (Dreieck MFP ist gleichschenklig.)

Nimmt man nun an, daß der einfallende Strahl *sehr nahe* zur optischen Achse verläuft, so ist der Winkel PFS sehr klein, und man darf setzen

$$\overline{PF} = \overline{SF}.$$

Daraus folgt, daß

$$\overline{SF} = \overline{MF}$$

und die Brennweite f gleich dem halben Krümmungsradius r ist.

(243) $\boxed{f = \frac{r}{2}}$ **Brennweite f des sphärischen Hohlspiegels** (Nur für achsnahe Strahlen gültig)

Für Strahlen, die zwar parallel, aber in einem *größeren* Abstand von der Achse einfallen, trifft diese einfache Beziehung *nicht* mehr zu (Bild 332). Ein breiteres, achsenparalleles Lichtbündel erzeugt vielmehr eine **herzförmige Brennlinie (Katakaustik).** Man sieht sie sehr schön an der Innenseite eines auf dem Tisch liegenden Fingerringes (Bild 333) oder an der Innenwand einer Kaffeetasse.
Einen mathematisch genauen Brennpunkt für alle achsenparallelen Strahlen liefert der **Parabolspiegel,** der auf einer entsprechenden geometrischen Eigenschaft der Parabel beruht. Man verwendet ihn deshalb als **Scheinwerfer.** *Alle* von seinem Brennpunkt ausgehenden Strahlen werden *achsenparallel,* d. h. nach derselben Richtung, reflektiert.

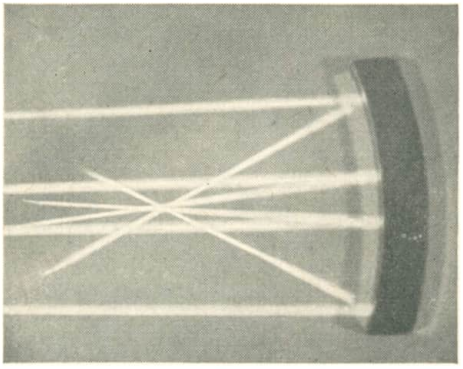


Bild 332. Reflexion am Hohlspiegel (Man sieht, daß beim sphärischen Hohlspiegel die achsferneren Strahlen eine kleinere Brennweite als die achsnahen Strahlen ergeben.)

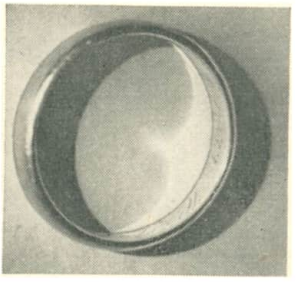


Bild 333. Katakaustik

25.2.2. Abbildung im Hohlspiegel

Ein Blick in einen Hohlspiegel zeigt, daß dieser *vergrößerte* oder *verkleinerte* Bilder liefern kann. Zur Bildkonstruktion geht man von einem *beliebigen nicht* auf der Achse liegenden Punkt des Gegenstandes aus und wählt von den zahllosen möglichen **3 ausgezeichnete Strahlen aus**, deren Verlauf sich leicht verfolgen läßt (Bild 334).

1. Der **Parallelstrahl 1** muß nach Satz (242) durch den Brennpunkt F laufen, d. h., er **wird zum Brennstrahl.**
2. Der **Hauptstrahl 2** (Mittelpunktstrahl) geht durch den Krümmungsmittelpunkt M und **wird in sich selbst reflektiert,** da er senkrecht auf den Spiegel trifft.
3. Der **Brennstrahl 3** geht durch den Brennpunkt F und wird dann nach dem vorigen Satz (242) **zu einem Parallelstrahl.**

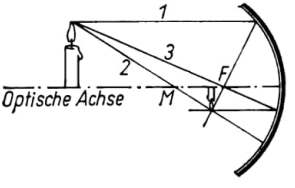


Bild 334. Bildkonstruktion mit den 3 ausgezeichneten Strahlen

Alle 3 Strahlen schneiden sich in einem Bildpunkt. Zur eindeutigen Bestimmung genügen bereits 2 von diesen Strahlen. Wiederholt man diese Konstruktion in Gedanken

Entfernung g des Gegenstandes	Art des Bildes
1. $g > r$	reell, umgekehrt, verkleinert
2. $g = r$	reell, umgekehrt, gleich groß
3. $r > g > f$	reell, umgekehrt, vergrößert
4. $g < f$	virtuell, aufrecht, vergrößert

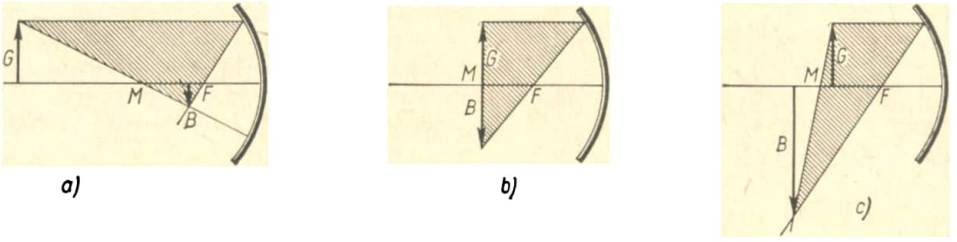


Bild 335a bis c. Abbildung bei verschiedener Entfernung des Gegenstandes G

für alle Punkte des Gegenstandes G, so bildet die Gesamtheit aller Bildpunkte ein reelles, umgekehrtes Bild B. Je nach der Entfernung g des Gegenstandes vom Spiegelmittelpunkt gibt es 4 Möglichkeiten (Bild 335).
Um den letzten Fall zu zeichnen, werde der Verlauf des Haupt- und Parallelstrahles verfolgt (Bild 336). Nach ihrer Reflexion schneiden sie sich *nicht*, sondern laufen auseinander **(divergieren).** Der Beobachter aber verlängert die Strahlen in Gedanken jenseits des Spiegels, wo sie von ihrem Schnittpunkt herzukommen scheinen und dort ein virtuelles Bild entsteht.
Um diese Beziehungen mathematisch darzustellen, versieht man alle vorkommenden Größen mit **Vorzeichen.** Man geht dabei stets davon aus, daß in der Zeichenebene das Licht von *links* her kommt. In den Spiegelscheitel legt man den Anfangspunkt eines Koordinatensystems, wobei die *nach der Lichtseite* weisenden Strecken *positives* und die *hinter dem Spiegel* liegenden Strecken *negatives* Vorzeichen erhalten. *Aufrechte* Größen bekommen (entsprechend der auch sonst üblichen positiven y-Richtung) *positives* und *umgekehrte* Größen *negatives* Vorzeichen.

Ferner bezeichnet man noch als

Gegenstandsweite g:
die Entfernung des Gegenstandes vom Spiegelscheitel,

Bildweite b:
die Entfernung des Bildes vom Spiegelscheitel.

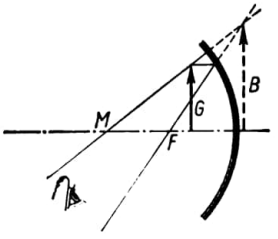


Bild 336. Virtuelles Bild im Hohlspiegel

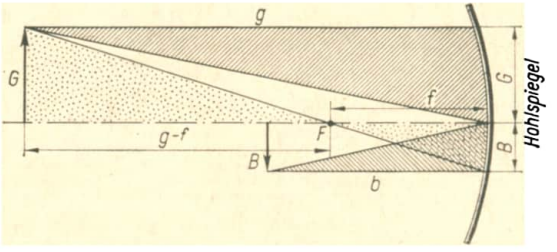


Bild 337. Zur Herleitung der Gleichungen des Hohlspiegels

Um die für achsnahe Strahlen geltenden Beziehungen anwenden zu können, werde die Krümmung des Spiegels vernachlässigt und seine Fläche als eben angenommen. Zur Konstruktion des Bildes B kann man den im Spiegelscheitel reflektierten Strahl mitverwenden, wodurch die beiden in Bild 337 schraffierten Dreiecke entstehen. Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke und unter Beachtung der Vorzeichen ergibt sich

(244) $$\boxed{\frac{B}{G} = -\frac{b}{g}}$$ **Abbildungsmaßstab**

Die Größen von Gegenstand und Bild verhalten sich wie ihre Entfernungen vom Spiegel.

Weiterhin sind auch die auf Bild 337 punktiert hervorgehobenen Dreiecke geometrisch *ähnlich*. Sie ergeben die Proportion

$$\frac{B}{G} = -\frac{f}{g-f}.$$

Durch Gleichsetzen mit der rechten Seite von (244) erhält man

$$\frac{b}{g} = \frac{f}{g-f}$$

und daraus $\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - \frac{f}{f}$.

Dividiert man alle Glieder durch g, so entsteht

(245) $$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}}$$ **Abbildungsgleichung**

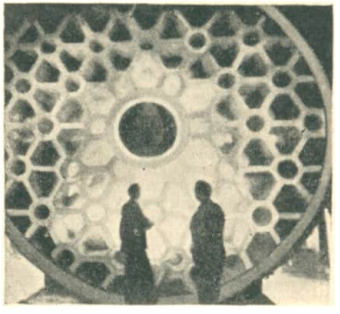


Bild 338. Größter Hohlspiegel der Welt (Durchmesser 5 m) vor der Fertigstellung. Die Rückseite ist zur Gewichtsverminderung wabenartig aufgeteilt

Die hier abgeleiteten Beziehungen gelten **nicht exakt,** sondern nur *annähernd*.
Die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit wird um so besser, je weniger die Spiegelkrümmung gegenüber dem zur Abbildung benutzten Raum ins Gewicht fällt, d. h. bei großem Krümmungsradius und kleinem Öffnungswinkel des zur Abbildung benutzten Strahlenbündels.

Die Gleichungen des Hohlspiegels gelten nur für achsnahe Strahlen.

Beispiele: 1. Das größte Spiegelfernrohr der Welt hat einen Hohlspiegel von 5 m Durchmesser und eine Brennweite von 16,70 m (Bild 338). An welcher Stelle wird der Sternenhimmel abgebildet? – Wegen der praktisch unendlichen Entfernung findet die Abbildung in der Ebene des Brennpunktes statt.

2. Vor einem Hohlspiegel mit 80 cm Krümmungsradius steht in 1 m Entfernung eine 10 cm große Glühlampe. Art, Größe und Entfernung des Bildes? – Es ist $f = \frac{r}{2} = \frac{80\text{ cm}}{2}$ = 40 cm. Da $g > r$, entsteht ein umgekehrtes, verkleinertes, reelles Bild. Nach (245) ist

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$, woraus $b = \frac{fg}{g-f} = \frac{40\text{ cm} \cdot 100\text{ cm}}{(100-40)\text{ cm}} = 66{,}7$ cm. Nach (244) ergibt sich ferner $B = -\frac{Gb}{g} = -\frac{10\text{ cm} \cdot 66{,}7\text{ cm}}{100\text{ cm}} = -6{,}67$ cm. Das positive Vorzeichen von b gibt an, daß das Bild auf der Lichtseite des Spiegels entsteht, das negative Vorzeichen von B bedeutet, daß das Bild umgekehrt ist.

3. Vor einem Hohlspiegel von 60 cm Brennweite steht ein Gegenstand in 20 cm Entfernung. Art und Entfernung des Bildes? – Nach dem letzten Beispiel ist $b = \frac{60 \cdot 20}{20-60}\text{cm} = -30$ cm. Das negative Vorzeichen gibt an, daß das Bild virtuell ist, d. h. hinter dem Spiegel liegt.

25.3. Der sphärische Wölb-(Konvex-)spiegel

Alles auf die *erhabene* (konvexe) Seite einer verspiegelten Kugelfläche fallende Licht wird **zerstreut** (Bild 339). Insbesondere gilt:

Achsenparallele Strahlen scheinen nach der Reflexion von einem hinter dem Spiegel liegenden Brennpunkt (Zerstreuungspunkt) F herzukommen.

Der geometrische Zusammenhang mit dem Krümmungsradius r ist derselbe wie beim Hohlspiegel. Dabei ist aber die Brennweite f entsprechend den vorhin genannten Vorzeichenregeln mit *negativem* Vorzeichen zu versehen:

$$f = -\frac{r}{2}.$$

Dann gilt auch die Abbildungsgleichung (245) wieder in unveränderter Form, wenn alle Vorzeichen richtig eingesetzt werden.

Bildkonstruktion (Bild 340): Vom Punkt P des Gegenstandes zieht man den Parallelstrahl 1, der nach dem letzten Satz zum Brennstrahl 1′ wird, und den durch den Krümmungsmittelpunkt M laufenden Hauptstrahl 2, welcher in sich selbst reflektiert wird. 1′ und 2′ laufen auseinander (divergieren). Für den Beobachter scheinen die Strahlen von dem Punkt P' hinter dem Spiegel herzukommen.

Der Wölbspiegel gibt in allen Fällen ein virtuelles, verkleinertes, aufrechtes Bild.

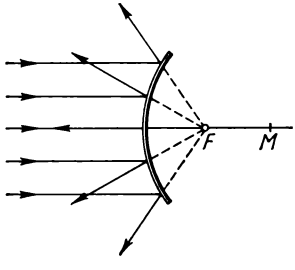


Bild 339. Wölbspiegel mit virtuellem Brennpunkt

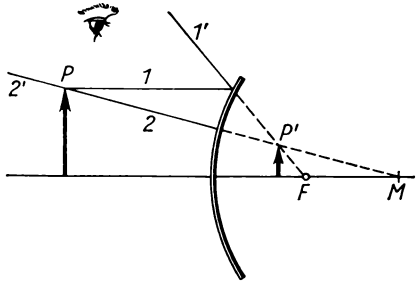


Bild 340. Virtuelles Bild im Wölbspiegel

26. Brechung (Refraktion) des Lichtes

26.1. Brechungsgesetz

In Wasser oder Glas einfallende Lichtstrahlen werden z. T. an der Oberfläche reflektiert, z. T. dringen sie ins Innere ein. Bei schräger Einfallsrichtung sieht man, daß sie dabei aus ihrer geraden Richtung abgelenkt, d. h. **gebrochen** werden. Ursache ist die verschiedene Geschwindigkeit des Lichtes in Luft und Wasser bzw. Glas. Sie hat überhaupt in jedem Medium einen anderen Wert.

Man unterscheidet

optisch dichtere Medien: Stoffe mit vergleichsweise *kleinerer* Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes,

optisch dünnere Medien: Stoffe mit vergleichsweise *größerer* Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Einfache Versuche zeigen dann (Bild 341):

Beim Übergang vom $\frac{\text{dünneren}}{\text{dichteren}}$ ins $\frac{\text{dichtere}}{\text{dünnere}}$ Medium wird der Strahl

$\frac{\text{nach dem}}{\text{vom}}$ Einfallslot $\frac{\text{hin-}}{\text{weg-}}$ gebrochen.

Die beiden vom Lot aus zu messenden Winkel nennt man **Einfalls-** bzw. **Brechungswinkel.** Eine gesetzmäßige Beziehung besteht aber nicht zwischen den Winkeln selbst, sondern zwischen ihren Sinuswerten. Nimmt man an, daß das Licht aus einem Medium 1 kommend in ein anderes Medium 2 eindringt, dann erweist sich für alle beliebigen Einfallswinkel das Verhältnis $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ als *konstant.* Handelt es sich beim Medium 1 insbesondere um das Vakuum, so hängt diese Konstante nur vom Medium 2 allein ab und wird dann als **Brechungsindex** bezeichnet:

(246) $$\boxed{\frac{\sin\alpha_v}{\sin\alpha} = n}$$ **Brechungsindex n** (gegenüber dem Vakuum)

Brechungsindizes n (Natriumlicht 589,3 nm)

Jenaer Glas		Schwefelkohlenstoff	1,63
Bor-Kron BK 1	1,51	Diamant	2,42
Flint F 3	1,61	Wasser	1,33
Schwerflint SF 4	1,74	Äthylalkohol	1,36

Beim Übergang vom Vakuum in Luft tritt ebenfalls eine geringe Brechung auf. Hierbei ist $n_{\text{Luft}} = 1{,}0002724$ für 20 °C, 760 Torr und Natriumlicht. Der jeweils genaue Wert des Brechungsindex eines Stoffes hängt somit vom Luftdruck, der Temperatur, vor allem

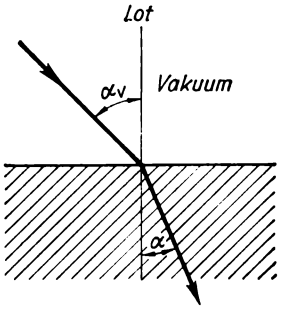


Bild 341. Lichtbrechung beim Übergang vom Vakuum in ein stoffliches Medium

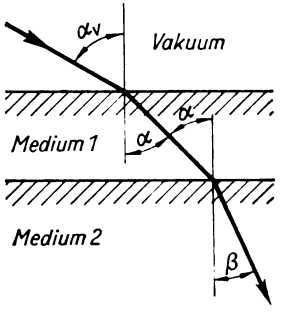


Bild 342. Brechung zwischen 2 beliebigen Medien 1 und 2

aber von der Wellenlänge des Lichtes ab. Vorerst sei dies nicht berücksichtigt (s. Dispersion des Lichtes!).

Interessiert der Brechungsindex für den Fall, daß das Licht zwischen zwei beliebigen Medien übergeht, so kann man das nach Bild 342 verfolgen. Es gilt nämlich für den Übergang

$$\text{Vakuum} - \text{Medium 1}: \quad \frac{\sin \alpha_v}{\sin \alpha} = n_1$$

$$\text{und Medium 1} - \text{Medium 2}: \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{1,2}.$$

Die Schichtdicke von Medium 1 kann man sich beliebig dünn denken. Dann ist unmittelbar

$$\frac{\sin \alpha_v}{\sin \beta} = n_2.$$

Nun aber ist

$$\frac{\sin \alpha_v}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_v}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und deshalb auch}$$

$$n_2 = n_1 n_{1,2}.$$

Daraus folgt

(247) $$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{1,2} = \frac{n_2}{n_1}}$$ **Snelliussches Brechungsgesetz** (für 2 beliebige Medien)

Häufig werden die Brechungsindizes $n_{1,2}$ von Stoffen gegenüber Luft angegeben. Um den Brechungsindex n_2 gegenüber dem Vakuum zu erhalten, ist daher der gegebene Wert $n_{1,2}$ mit dem Wert n_1 für Luft zu multiplizieren. Da dieser aber nur sehr wenig von 1 abweicht, ist die Korrektur geringfügig.

Konstruktion des gebrochenen Strahls: Um den Einfallspunkt M zeichnet man 2 Kreise, deren Radien sich wie $1 : n_{1,2}$ verhalten (Bild 343). Durch den Schnitt-

punkt P' des Strahls mit dem Einheitskreis zieht man die Parallele zum Einfallslot, die den *zweiten* Kreis in P schneidet. $\overline{MP}$ ist der gebrochene Strahl. Man sieht unmittelbar, daß $\sin\alpha = \frac{x}{1}$ und $\sin\beta = \frac{x}{n_{1,2}}$, wonach $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{1,2}$ ist.
Bei *umgekehrtem* Strahlengang, d. h., wenn der Strahl vom dichteren ins dünnere Medium läuft, bringt man den Strahl *zuerst* mit dem Kreis vom Radius $n_{1,2}$ zum Schnitt. Die Parallele zum Einfallslot schneidet den Einheitskreis in P', womit $\overline{P'M}$ die Richtung des gebrochenen Strahles angibt.

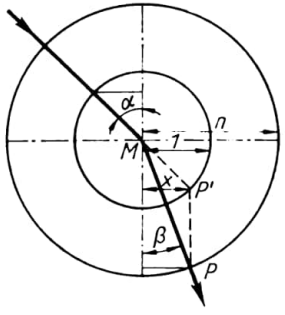


Bild 343. Konstruktion des gebrochenen Strahls

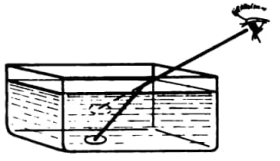


Bild 344. Scheinbare Lage eines Gegenstandes im Wasser

Beispiele: 1. Ein im Wasser liegender Gegenstand scheint höher als in Wirklichkeit zu liegen (Bild 344); denn das Auge sucht den Ursprung eines Strahls in seiner geraden Fortsetzung, also in Verlängerung des aus dem Wasser kommenden Strahls.

2. Infolge der Brechung in der Atmosphäre scheint die Sonne höher als in Wirklichkeit zu stehen.

3. Flimmern erhitzter Luft über Ofenplatten und Schornsteinen: eine Folge unterschiedlicher Brechung von kalter und erhitzter Luft.

26.2. Planparallele Platte

Ein Strahl, der schräg in eine planparallele Platte fällt, verläßt die Platte wieder unter dem Einfallswinkel. Es tritt daher keine Richtungsänderung, sondern lediglich eine **Parallelversetzung** auf.
Die Größe der Parallelverschiebung errechnet sich wie folgt (Bild 346): Ein in P befindlicher Punkt erscheint nach P' verschoben. Es ist einerseits $\frac{b}{a} = \sin(\alpha - \beta)$ und

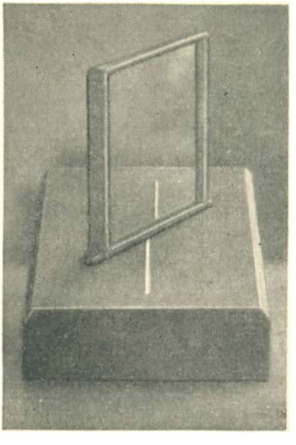


Bild 345. Hinter der Glasscheibe erscheint die helle Linie parallel verschoben, obwohl sie in Wirklichkeit geradeaus läuft

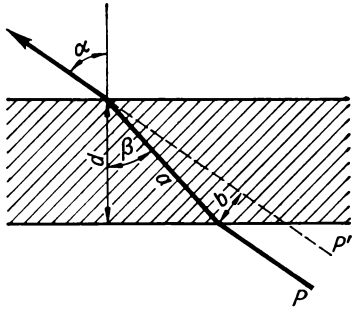


Bild 346. Parallelverschiebung durch eine planparallele Platte

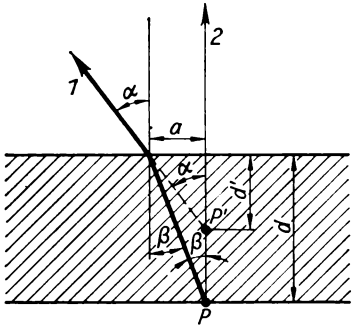


Bild 347. Scheinbare Dicke

anderseits $\frac{d}{a} = \cos\beta$, womit sich die seitliche Versetzung ergibt:

$$b = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

Außerdem scheinen planparallele Platten stets dünner zu sein, als sie es in Wirklichkeit sind. Angenommen, an der Unterseite der Platte befinde sich ein zu betrachtender Punkt P (Bild 347). Ein schräg von ihm ausgehender Strahl 1 wird beim Austritt vom Lot weggebrochen, der senkrecht austretende Strahl 2 verläuft geradeaus. Das Auge sieht den Ursprung beider Strahlen in dem höher gelegenen Schnittpunkt P'. Die Platte erscheint dünner. Es ist nun die **wahre Dicke** $d = \frac{a}{\tan\beta}$ und die **scheinbare Dicke** $d' = \frac{a}{\tan\alpha}$. Da vom Auge nur ein schmales Lichtbündel erfaßt wird, sind die Winkel α und β sehr klein, so daß $\tan\alpha \approx \sin\alpha$ und $\tan\beta \approx \sin\beta$ ist, womit $\frac{d'}{d} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ bzw. $d' = \frac{d}{n_{1,2}}$ wird.

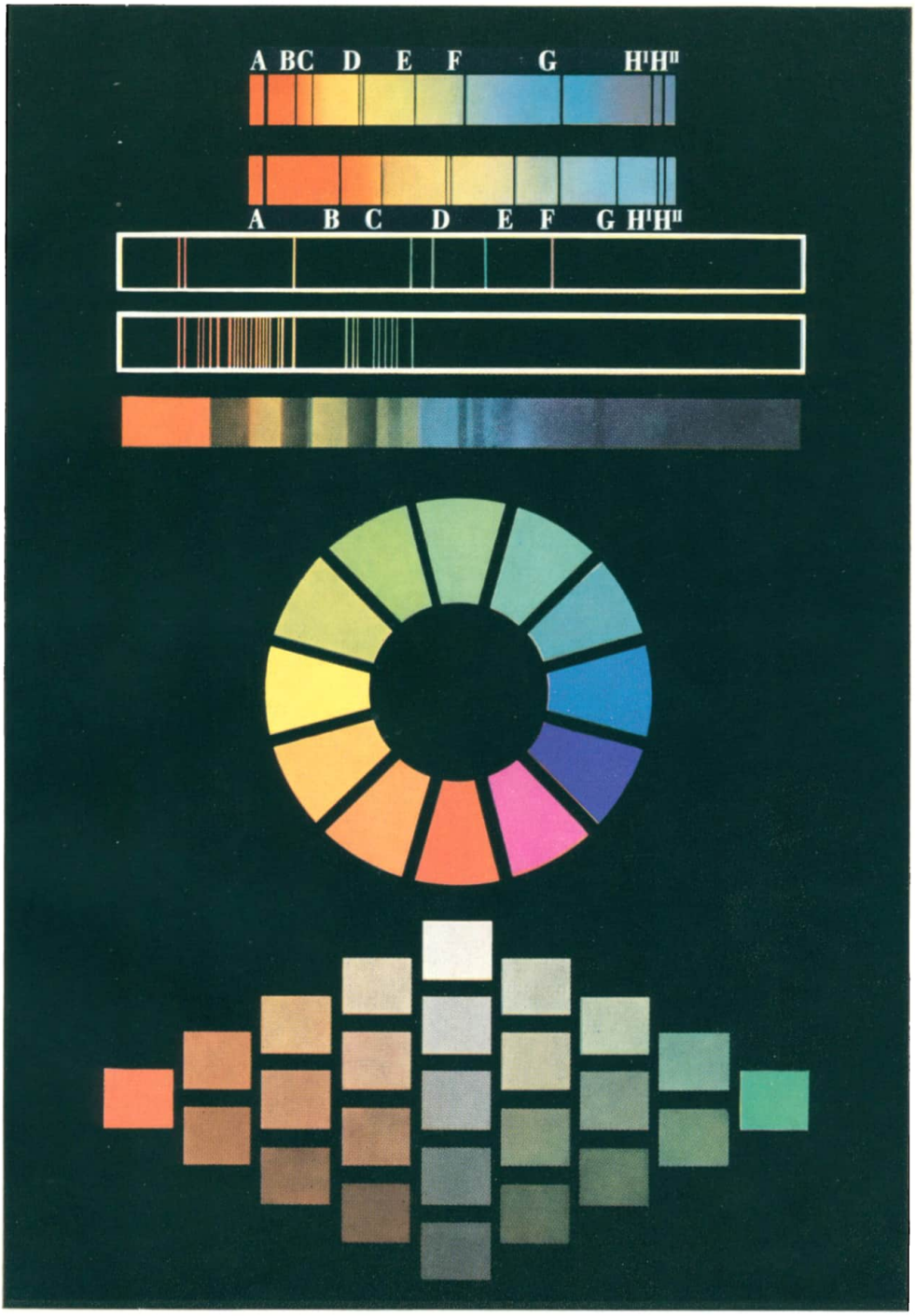
(248) $$\boxed{d' = \frac{d}{n_{1,2}}}$$ **Scheinbare Dicke d' einer planparallelen Platte**

Hiernach kann man den *Brechungsindex* einer durchsichtigen dünnen Platte bestimmen. Man stellt mit dem Mikroskop zuerst einen Punkt der Oberfläche und dann einen Punkt an der Unterseite der Platte scharf ein. Die Differenz beider Einstellungen gibt die scheinbare Dicke, während die wahre Dicke direkt gemessen werden kann.

26.3. Prisma

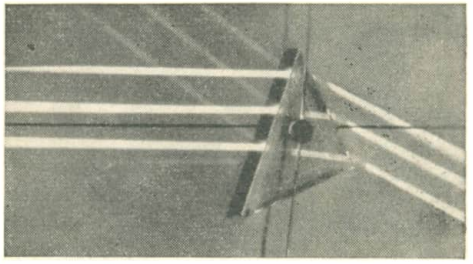
Aus dem in Bild 348 gezeigten Strahlengang ist ersichtlich:

Ein auf die Seitenfläche des Prismas fallender Strahl wird von der brechenden Kante weggebrochen.



1. Prismatisches Spektrum mit FRAUNHOFERschen Linien,
2. Beugungsspektrum (Normalspektrum),
3. Linienspektrum des Heliums,
4. Linienspektrum des Neons,
5. Absorptionsspektrum von Neodym,
6. Farbenkreis,
7. Zwei farbtongleiche Dreiecke – in senkrechter Richtung eine Grauleiter

Bild 348. Brechung im Prisma. Erkennbar ist, daß die Eintrittsebene ein wenig Licht reflektiert



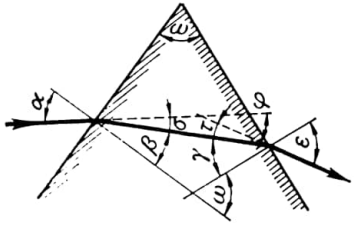


Bild 349. Gesamtablenkung φ

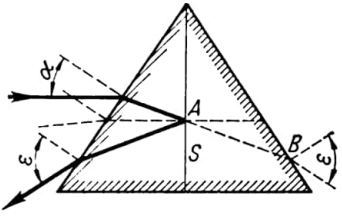


Bild 350. Zur minimalen Ablenkung

Man bezeichnet ferner (Bild 349) als

brechenden Winkel ω: den Winkel, unter dem die Seitenflächen an der brechenden Kante zusammenstoßen,

Gesamtablenkung φ: den Winkel zwischen ein- und ausfallendem Strahl.

Es ist dann

$$\varphi = \sigma + \tau \text{ (Außenwinkel und nicht anliegende Innenwinkel),}$$
$$\omega = \beta + \gamma \text{ (desgl.). Ferner ist}$$
$$\sigma = \alpha - \beta \text{ und}$$
$$\tau = \varepsilon - \gamma,$$

so daß $\varphi = \alpha - \beta + \varepsilon - \gamma$ und damit

(249) $$\boxed{\varphi = \alpha + \varepsilon - \omega}$$ **Gesamtablenkung φ**

Die Gesamtablenkung ist am kleinsten, wenn der Strahl das Prisma symmetrisch durchsetzt.

Beweis: Man denke sich die Symmetrieebene S des Prismas spiegelnd (Bild 350). Ein unter dem Winkel α eintretender Strahl wird dann bei A reflektiert und verläßt das Prisma unter dem Winkel ε. Auch ohne Spiegelung würde der Strahl das Prisma bei B unter dem Winkel ε verlassen. Die Gesamtablenkung des *gespiegelten* Strahls ist $\varphi' = 180° - (\varepsilon - \alpha)$ und dann am größten (nämlich 180°), wenn $\varepsilon = \alpha$ und somit der Strahl senkrecht auf die Spiegelebene trifft, d. h. das Prisma symmetrisch durchsetzt. Setzt man nun $\varepsilon = 180° + \alpha - \varphi'$ in (249) ein, so wird $\varphi = \alpha + 180° + \alpha - \varphi' - \omega$, womit im Fall des Größtwertes von φ' die Gesamtablenkung mit $\varphi = 2\alpha - \omega$ ihren Kleinstwert annimmt. Der Vergleich mit (249) ergibt, daß dann auch $\varepsilon = \alpha$ sein muß.

26.4. Totalreflexion

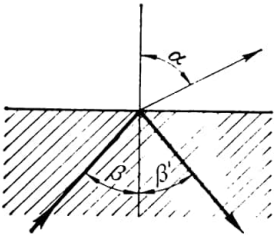


Bild 351
Zur Totalreflexion

Tritt ein Strahl aus einem *dichteren* Medium in ein *dünneres* über, so wird ein Teil des Lichtes nach innen zurückgeworfen. Man kann nun den Einfallswinkel β stetig verändern und findet, daß nach Überschreiten eines bestimmten **Grenzwinkels** β *nichts* mehr ins dünnere Medium gelangt (Bild 351). Der Strahl wird dann vollständig nach innen reflektiert. Man nennt dies **Totalreflexion.**
Beim Erreichen des Grenzwinkels hat der Austrittswinkel α seinen größtmöglichen Wert, nämlich 90°, erreicht. Der austretende Strahl müßte in diesem Fall streifend an der Grenzfläche entlanglaufen. Wegen $\sin \alpha = 1$ und $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{1,2}$ ist daher

(250) $$\boxed{\sin \beta_{gr} = \frac{1}{n_{1,2}}}$$ **Grenzwinkel β_{gr} der Totalreflexion**

Von dieser totalen Reflexion macht man bei optischen Instrumenten gern Gebrauch, weil sie vollkommener als bei metallbelegten Spiegeln ist. Häufig vorkommende Prismenformen zeigen Bilder 353 und 354 .



Bild 352. Totalreflexion in einer mit Wasser gefüllten Wanne

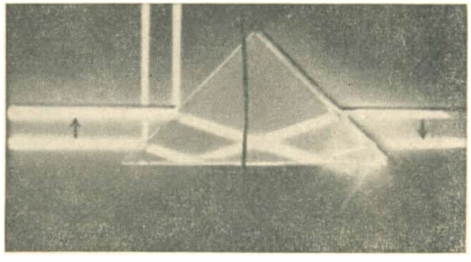


Bild 353. Wendeprisma

Zur Bestimmung des Brechungsindex bedient man sich des **Refraktometers von Abbe.** Da der Brechungsindex auf 4 Dezimalstellen genau abgelesen werden kann, eignet sich das Refraktometer vorzüglich für Materialprüfungen (Echtheit von Ölen, Konzentration von Lösungen usw.). Eine vereinfachte Ausführung ist das **Eintauchrefraktometer für Flüssigkeiten** (Bilder 355, 356). Das auf eine bestimmte Stelle der Prismenfläche P fallende Licht wird in das Prisma *hinein*gebrochen. Der streifend eintretende Strahl ergibt im Gesichtsfeld die Grenze zwischen Hell und Dunkel, deren Lage auf einer Skale des zur Beobachtung dienenden Fernrohres abgelesen wird.

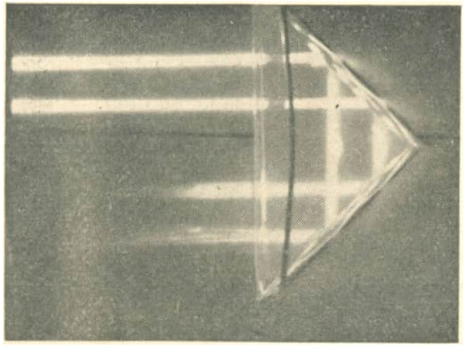


Bild 354. Umlenkprisma (Feldstecherprisma)

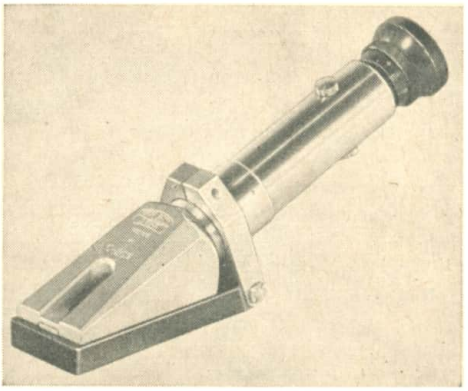


Bild 355. Handrefraktometer

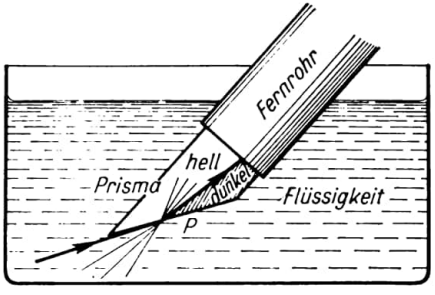


Bild 356. Prinzip des Eintauchrefraktometers

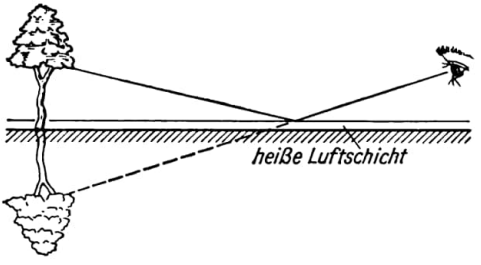


Bild 357. Luftspiegelung auf einer Landstraße

Beispiele: 1. Weshalb ist es nicht notwendig, die reflektierenden Flächen des Umlenkprismas (Bild 354) zu versilbern? – Wegen $\sin \beta = \frac{1}{1{,}5 \cdots 1{,}7}$ beträgt der Grenzwinkel der Totalreflexion bei Glas $\beta_{gr} = 36° \cdots 42°$, ist also kleiner als 45°.

2. Fährt man an heißen Sommertagen mit dem Motorrad (niedriger Blickpunkt!) auf einer langen Geraden, so sieht man in größerer Entfernung häufig „Wasserlachen", in denen sich die Chausseebäume spiegeln (Bild 357).– Totalreflexion an der auf dem Asphalt liegenden erhitzten Luftschicht (Fata morgana in der Wüste). Die Erscheinung verschwindet bei höherem Blickpunkt (Grenzwinkel!).

3. Eine unter Wasser getauchte leere Glasröhre erscheint spiegelnd.

4. Das starke Glitzern des Diamanten beruht auf dem kleinen Grenzwinkel der Totalreflexion von 24,6° $\left(\sin \beta_{gr} = \frac{1}{2{,}4}\right)$.

27. Zerlegung (Dispersion) des Lichtes

27.1. Dispersion

An geschliffenen Spiegelkanten und Edelsteinen, am Glasbehang von Kronleuchtern und an glitzernden Schneekristallen beobachtet man häufig ein prächtiges Farbenspiel. Das *weiße* Tageslicht wird in einzelne Farben zerlegt. Man nennt diesen Vorgang **Dispersion** des Lichtes.
Deutlicher wird die Erscheinung, wenn man paralleles weißes Licht durch einen Spalt (S) auf eine Prismenfläche fallen läßt (Bild 358). Beim Durchgang erweist sich – abgesehen von der bereits besprochenen Ablenkung durch Brechung – der Lichtspalt zu einem farbigen Band auseinandergezogen, das man **Spektrum** nennt. Bei einfacher Betrachtung erkennt man der Reihe nach die **Spektralfarben** (im täglichen Leben **Regenbogenfarben** genannt):

Rot — Orange — Gelb — Grün — Blau — Indigo — Violett,

wobei Rot am wenigsten, Violett am stärksten abgelenkt wird (Farbentafel 1).

Weißes Licht ist eine Mischung von Licht verschiedener Wellenlänge. Jede Wellenlänge hat einen anderen Brechungsindex.
Der Brechungsindex nimmt mit zunehmender Wellenlänge ab.

Wellenlänge und Brechungsindex sind jedoch einander *nicht* proportional!
Eine in den Strahlengang des Spektrums gesetzte Zylinderlinse sammelt den Farbenfächer wieder und stellt das weiße Licht wieder her:

Die Vereinigung der Spektralfarben ergibt weißes Licht.

Wegen der stets vorhandenen Dispersion gilt der Brechungsindex eines Stoffes nur für eine bestimmte Wellenlänge. Das Vermögen, Licht stärker oder schwächer zu zerstreuen, ist bei den einzelnen Stoffen verschieden. Man kennzeichnet es quantitativ durch Angabe der **mittleren Dispersion.** Hierunter versteht man die *Differenz* der Brechungsindizes für zwei bestimmte Wellenlängen (siehe letzte Spalte der folgenden Tabelle). Auffällig ist die starke **Dispersion** des Schwefelkohlenstoffs, den man, in ein dreikantiges Fläschchen gefüllt, gern zur Erzeugung recht breiter Spektren verwendet.

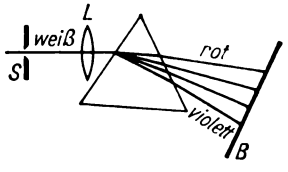


Bild 358. Dispersion
S Spalt, L Sammellinse, die ohne Prisma auf dem Bildschirm B ein scharfes Bild des Spaltes entwirft

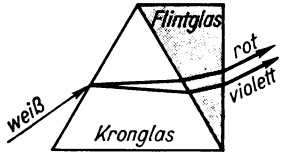


Bild 359. Achromatisches Prisma

Dispersion einiger Stoffe

Stoff	Brechungsindex und zugehörige Wellenlänge				Mittlere Dispersion $n_F - n_C$
	n_C 656,3 nm	n_D 589,3 nm	n_F 486,1 nm	n_H 396,8 nm	
Wasser 20 °C	1,331	1,333	1,337	1,343	0,006
Kronglas	1,516	1,519	1,525	1,535	0,009
Flintglas	1,614	1,619	1,631	1,653	0,017
Schwefelkohlenstoff	1,619	1,628	1,653	1,700	0,034

Dagegen soll das **achromatische Prisma** (Bild 359) einen Strahl wohl ablenken, nicht aber in Farben zerlegen. Es ist eine Kombination aus einem Kron- und einem Flintglasprisma. Ihre brechenden Winkel sind so bemessen, daß 2 Farben des Spektrums (etwa Rot und Blau) gleiche Gesamtablenkung haben, also parallel austreten. Eine strenge Korrektur für alle Farben ist nicht möglich.

27.2. Spektren

Wenn das Farbenband, wie bisher beschrieben, aus einer lückenlosen Reihe ineinander übergehender Farben besteht, nennt man es ein **kontinuierliches Spektrum.** Es wird von allen Temperaturstrahlern erzeugt, insbesondere von Sonnenlicht.

Genauere Untersuchungen nimmt man mit dem **Spektrometer** vor (Bild 360). Das zu prüfende Licht fällt durch einen feinen, in seiner Breite verstellbaren Spalt (1) in den **Kollimator** (2), der die Aufgabe hat, das einfallende Lichtbündel parallel zu richten. Mit dem Fernrohr (3) wird das Spektrum vergrößert beobachtet.

Man findet dann, daß leuchtende **Gase und Dämpfe** im Gegensatz zu den Temperaturstrahlern nur einzelne bestimmte Wellenlängen aussenden. Streut man z. B. Kochsalz (NaCl) in eine nichtleuchtende Gasflamme, so färbt sich diese intensiv gelb, zurückzuführen auf das darin enthaltene Natrium. Das Spektrum besteht nur aus einer einzigen gelben Linie ($\lambda = 589{,}3$ nm). Bei ganz feinem Spalt und gutem Auflösungsvermögen des Prismas erkennt man allerdings eine Doppellinie (D_1 mit $\lambda = 589{,}0$ nm und D_2 mit $\lambda = 589{,}6$ nm).

Das Natriumlicht ist also praktisch **monochromatisch (einfarbig).** Monochromatisches Licht *anderer* Wellenlänge kann man u. a. mit einer Quecksilberdampf-

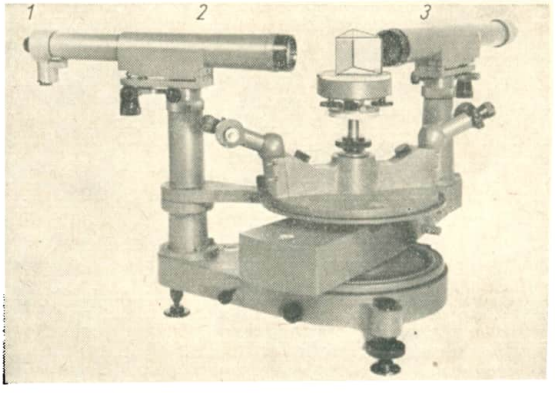


Bild 360. Spektrometer

lampe erzielen, wenn man die gewünschte Wellenlänge mit Hilfe geeigneter Lichtfilter aussondert.
Kaliumverbindungen geben blaßviolette Flammenfärbung, ihr Spektrum enthält 5 Linien, wie überhaupt jedes Metall ein charakteristisches **Linienspektrum** liefert. Verdünnte Gase geben bei Stromdurchgang ebenfalls vielfarbige Linienspektren (Farbentafel 3 und 4). An Hand der in einem Spektrum auftretenden Linien läßt sich die Anwesenheit eines chemischen Elementes eindeutig feststellen: **Spektralanalyse.**

Spektrallinien einiger chemischer Elemente

(Wellenlängen in nm in Luft von 15 °C und 760 Torr)

Silber	328,068	Wasserstoff	397,007	Barium	455,4037
	338,289		410,1736		493,410
	520,9079		434,046		553,553
	564,5487		486,132	Strontium	407,7714
Kupfer	324,754		656,2785		421,5515
	327,3965	Kalium	344,637		460,733
	521,8202		404,414	Helium	447,1480
Kalzium	315,888		404,720		471,3147
	317,934		766,491		492,1926
	393,3670		769,898		501,5678
	396,8475	Natrium	330,234		587,5623
	422,6728		330,294		667,8149
	428,301	D_1	588,9965		706,5197
	430,774	D_2	589,5932	Sauerstoff	394,733
		Thallium	377,572		628,29
			535,046		686,72
					760,82

Linienspektren werden von den chemischen Elementen erzeugt, d. h. von den einzelnen strahlenden Atomen. Chemische Verbindungen, genauer gesagt, schwingende Moleküle, ergeben **Bandenspektren.** Anstelle einzelner Linien enthalten sie breitere Bänder, die aus *zahlreichen eng* beisammen liegenden Linien bestehen.
Schickt man weißes Licht durch ein farbiges Glas, so erscheinen nach spektraler Zerlegung auf dem Schirm breite Teile des Spektrums ausgelöscht; das Glas hat einen Teil der Strahlung absorbiert. Es entsteht ein **Absorptionsspektrum.** Viele chemische Stoffe erzeugen charakteristische *Absorptionsbanden*, ein wichtiges Hilfsmittel der chemischen Analyse (Farbentafel 5). Blut erzeugt beispielsweise je einen charakteristischen Streifen im gelben und grünen Bereich des kontinuierlichen Spektrums.
Geht weißes Licht durch Metalldämpfe, so entstehen an denjenigen Stellen schwarze Linien, wo der Metalldampf eigene Spektrallinien erzeugen würde:

Glühende Gase absorbieren die Wellenlängen, die sie selbst aussenden.

FRAUNHOFER hat 1814 bei der Untersuchung des Sonnenspektrums zahlreiche derartige Linien darin entdeckt. Aus der Lage und Verteilung der **Fraunhoferschen Linien** läßt sich erkennen, welche chemischen Elemente im äußeren Teil der Sonne enthalten sind. Die kräftigsten dieser Linien tragen nach FRAUNHOFER die Bezeichnungen A···K.

Die Fraunhoferschen Linien

Farbeindruck:	Violett		Indigo	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot		
Fraunhofersche Linien:	K	H	G	F	E	D		C	B	A
Wellenlängen (nm):	393,3	396,8	430,8	486,1	527,0	589,3		656,3	686,7	759,3
Zugehörigkeit zu den chemischen Elementen:	Ca	Ca	Fe	H	Fe	Na		H	O	O

So wurde auf Grund solcher Fraunhoferscher Linien das Edelgas Helium zuerst auf der Sonne entdeckt, ehe man es auf der Erde fand.

28. Linsen

28.1. Dünne Linsen

Man unterscheidet grundsätzlich zwei Arten von Linsen:

Sammellinsen: in der Mitte **dicker** als am Rand,

Zerstreuungslinsen: in der Mitte **dünner** als am Rand.

Die Linsenflächen können **konvex (erhaben)** oder **konkav (hohl)** sein. Die möglichen Formen zeigt Bild 361. Alle praktisch verwendeten Linsen werden **sphärisch** geschliffen, ihre Oberflächen sind Teile von Kugelflächen. Diese Form ist besonders einfach und genau herzustellen. Durch Zusammenbau mehrerer solcher Linsen können alle Anforderungen hinsichtlich der Bildgüte erfüllt werden.

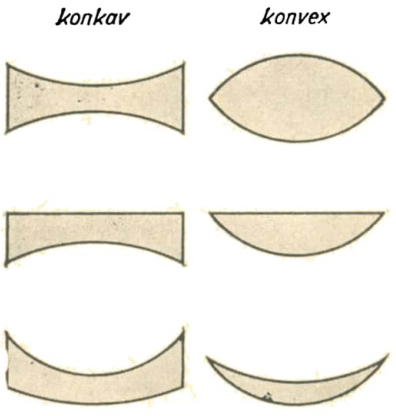


Bild 361. Linsenformen

28.1.1. Brennweite und Vorzeichenregeln

Meist besteht das beiderseits an die Linse grenzende Medium aus Luft, so daß der Brechungsindex des Linsenmaterials gegenüber Luft zur Wirkung kommt. Er ist im folgenden stets mit n bezeichnet. Andere Fälle, in

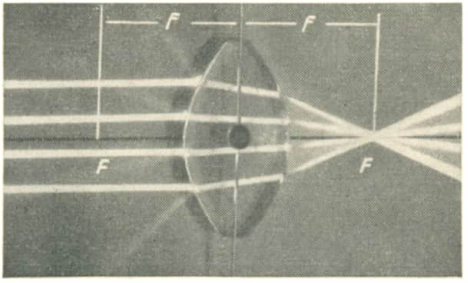


Bild 362. Sammellinse

denen z. B. die Linse auf einer oder beiden Seiten an eine Flüssigkeit grenzt, seien hier nicht behandelt.

Die Verbindungslinie der beiden Krümmungsmittelpunkte der Linsenflächen nennt man **optische Achse** und ihre Schnittpunkte mit den Linsenflächen **Scheitelpunkte.** Deren Abstand ist durch die Linsendicke gegeben. Fällt nun achsenparalleles Licht auf eine Sammellinse, so wird dieses im **Brennpunkt** F vereinigt. Auf Bild 362 sieht man, daß die Strahlen dabei zweimal gebrochen werden. Man erreicht jedoch eine wesentliche Vereinfachung aller Rechnungen, wenn man die Linse so dünn annimmt, daß ihre Dicke gegenüber dem Linsendurchmesser *vernachlässigt* werden kann. Die beiden Linsenscheitel fallen dann zusammen. In entsprechenden Zeichnungen läßt sich die Linse durch eine Ebene schematisieren.

Da das Licht von beiden Seiten her einfallen kann, ergeben sich zwei symmetrisch liegende Brennpunkte, deren Abstand vom Linsenmittelpunkt gleich der **Brennweite** f ist.

Vorzeichenregeln. Für die mathematische Behandlung werden wie beim gekrümmten Spiegel alle Größen mit entsprechenden Vorzeichen versehen. In der Zeichnung läßt man das Licht immer *von links her* auf die Linse fallen und nimmt den Linsenmittelpunkt als Anfangspunkt zweier Koordinatensysteme (Bild 363). Die Gegenstandsweite g ist auf der dem Lichteinfall zugekehrten Seite positiv zu nehmen. Die Bildweite b hat dagegen auf der Lichtseite negatives und auf der anderen Seite positives Vorzeichen. Ferner hat der Krümmungsradius r positives Vorzeichen, wenn die der Seite des einfallenden Lichtes zugewendete Fläche konvex ist. Ist diese Fläche konkav, so ist ihr zugehöriger Krümmungsradius negativ. Aufrechtstehende Gegenstände und Bilder werden schließlich mit positivem und umgekehrt stehende mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Die Brennweite f läßt sich aus der Gestalt der Linse (Krümmungsradien) und dem Brechungsindex des Glases berechnen. Nach einer etwas komplizierteren Rechnung ergibt sich:

(251) $$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$ **reziproker Wert der Brennweite f einer Linse**

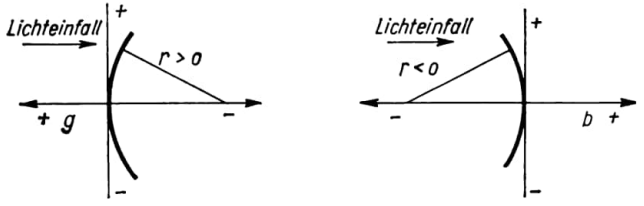


Bild 363. Vorzeichenregeln für Linsen

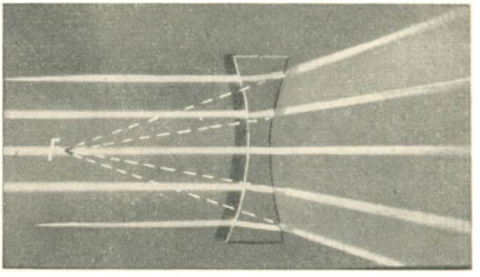


Bild 364. Virtueller Brennpunkt einer Zerstreuungslinse

Hierbei bedeutet r_1 stets den Krümmungsradius der vom Licht *zuerst* getroffenen Fläche. Unter Beachtung dieses Hinweises und durch vorzeichengerechtes Einsetzen der Krümmungsradien überzeugt man sich leicht davon, daß die **Brennweite** von **Sammellinsen positives** und die von **Zerstreuungslinsen negatives Vorzeichen** erhält. Damit kommt zugleich zum Ausdruck, daß der Brennpunkt einer Zerstreuungslinse **virtuell** ist und so wirkt, als ob das achsenparallel einfallende und dann zerstreute Licht von ihm ausginge (Bild 364).

Beispiele: 1. Wo liegt der Brennpunkt einer bikonvexen Sammellinse mit beiderseits gleicher Krümmung, wenn $n = 1{,}5$? – Aus (251) erhält man $\frac{1}{f} = 0{,}5\left(\frac{2}{r}\right) = \frac{1}{r}$. Die Brennweite f ist positiv und hat den Betrag des Krümmungsradius. Der Brennpunkt dieser vielbenutzten Linse liegt also im Krümmungsmittelpunkt.

2. Berechne die Brennweite einer Plankonvexlinse von $r = 12$ cm und $n = 1{,}5$. –

$$\frac{1}{f} = 0{,}5\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{12\text{ cm}}\right); \quad f = \frac{12\text{ cm}}{0{,}5} = 24\text{ cm}.$$

Die Brennweite dieser ebenfalls vielbenutzten Linse ist gleich dem doppelten Krümmungsradius (siehe voriges Beispiel).

28.1.2. Abbildungsgesetze

Zur Konstruktion von Strahlengängen verwendet man wieder – wie bei den sphärischen Spiegeln – **die 3 ausgezeichneten Strahlen,** von denen man weiß:

Parallelstrahlen werden zu Brennstrahlen.
Brennstrahlen werden zu Parallelstrahlen.
Der Hauptstrahl geht unabgelenkt durch die Linsenmitte.
Zur eindeutigen Konstruktion eines Bildpunktes genügen bereits 2 von diesen Strahlen.

Die kleine Parallelversetzung des Hauptstrahls kann, da es sich hier ja um *dünne* Linsen handelt, vernachlässigt werden. Auf Grund dieser Leitsätze findet man zunächst:

Unendlich ferne Punkte werden in der Brennebene abgebildet.

Beweis: Das von einem unendlich fernen Punkt ausgehende Licht ist stets parallel. Aus dem schräg zur Achse laufenden Bündel werden Haupt- und Brennstrahl herausgegriffen. Ihr Schnittpunkt liegt in der durch den Brennpunkt F gehenden Ebene, weil die beiden schraffierten Dreiecke kongruent sind (Bild 365).

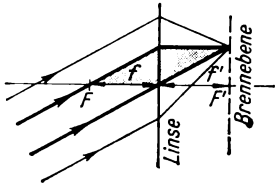


Bild 365. Schräg einfallendes paralleles Bündel

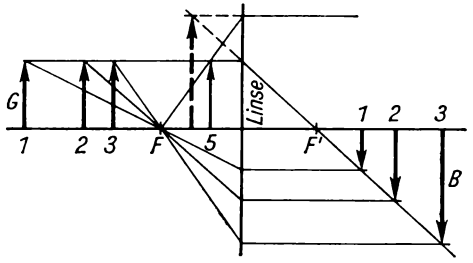


Bild 366. Bildkonstruktion mit Hilfe des Parallel- und Brennstrahles bei verschiedener Entfernung des Gegenstandes G

Den geometrischen Bildkonstruktionen liegen dieselben Gedanken wie bei der Betrachtung des Hohlspiegels zugrunde. Die in 25.2.2. gegebene Anleitung kann wortgetreu auf die Sammellinse übertragen werden.

Konstruktion eines Bildpunktes. Um das Bild der Spitze des in Bild 366 in Stellung 1 befindlichen Gegenstandes G zu finden, ziehe man bis zur Linse einen achsenparallelen Strahl und den Brennstrahl durch den auf der Seite des einfallenden Lichtes liegenden Brennpunkt F. Der erste Strahl setzt sich hinter der Linse als Brennstrahl durch F' und der zweite Strahl als Parallelstrahl fort. Wo sich diese beiden Strahlen schneiden, liegt der entsprechende Bildpunkt.

Setzt man den Gegenstand nacheinander in *verschiedene* Entfernungen von der Linse, so ergeben sich nach Bild 366 folgende Möglichkeiten:

Fall	Lage des Gegenstandes	Lage des Bildes	Art des Bildes	Anwendung
1.	$g > 2f$	$2f > b > f$	reell, umgekehrt, verkleinert	Fotoapparat
2.	$g = 2f$	$b = 2f$	reell, umgekehrt, gleich groß	Umkehrlinse im Fernrohr
3.	$2f > g > f$	$b > 2f$	reell, umgekehrt, vergrößert	Projektionsapparat
4.	$g = f$	$b = \infty$	virtuell, aufrecht, vergrößert	Scheinwerfer, Lupe
5.	$g < f$	$b < 0$	virtuell, aufrecht, vergrößert	Lupe

Versuch: Man halte eine Sammellinse gegen das Fenster und bewege probeweise parallel zur Linse in Richtung der optischen Achse ein Blatt Papier. In der richtigen Stellung leuchtet auf dem Papier ein helles, verkleinertes, umgekehrtes Bildchen auf. Es ist reell; denn auf der Papierebene schneiden sich alle von den einzelnen Punkten des Fensters kommenden Strahlen in je einem Bildpunkt.

Bei der Konstruktion des von einer **Zerstreuungslinse** entworfenen Bildes ist zu beachten, daß achsenparallele Strahlen so nach außen abgelenkt werden, als ob sie vom virtuellen Brennpunkt herkämen (Bild 367). Man findet daher die Richtung des abgelenkten Strahles, indem man den Punkt, wo der Parallelstrahl auf die Linse trifft, mit dem virtuellen Brennpunkt verbindet. Das Auge erblickt den Bildpunkt

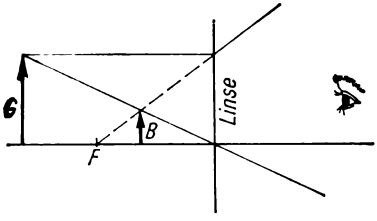


Bild 367. Virtuelles Bild einer Zerstreuungslinse

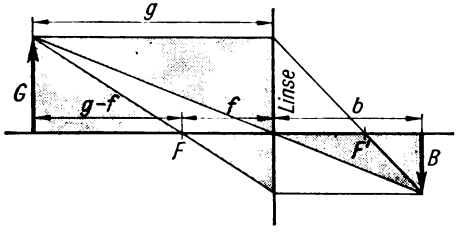


Bild 368. Zur Herleitung der Abbildungsgleichung

im Schnittpunkt der Verlängerung des nach außen abgelenkten Strahls mit dem Hauptstrahl. Das Bild ist *virtuell*, *aufrecht* und *verkleinert*.
Für das Verhältnis der Größe G des Gegenstandes zur Größe B des Bildes ergibt die Ähnlichkeit der in Bild 368 gerasterten Dreiecke $\frac{G}{g} = \frac{B}{b}$. Da nach den festgelegten Regeln alle Größen positiv sind, B jedoch negatives Vorzeichen hat, ergibt sich für das Größenverhältnis

(252) $$\boxed{\frac{G}{B} = -\frac{g}{b}}$$ **Abbildungsmaßstab**

Ferner ergibt die Ähnlichkeit der punktierten Dreiecke $\frac{G}{B} = -\frac{g-f}{f}$. Andererseits ist nach (252) $\frac{G}{B} = -\frac{g}{b}$, so daß nach Gleichsetzung der rechten Seiten $\frac{g-f}{f} = \frac{g}{b}$ wird. Hieraus folgt durch Umformen

(253) $$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}}$$ **Abbildungsgleichung**

Beispiele: 1. Ein 1,70 m großer Mann steht 5 m vor einer Linse von 15 cm Brennweite. Wie groß ist sein auf der Mattscheibe sichtbares Bild? – Um nach Gleichung (252) rechnen zu können, muß noch die Bildweite ermittelt werden. Durch Auflösen von (253) nach b erhält man $b = \frac{gf}{g-f}$. Nach Einsetzen in Gleichung (252) erhält man $B = -\frac{Gb}{g}$ $= -\frac{Ggf}{g(g-f)} = -\frac{Gf}{g-f} = -$ 5,26 cm. Das negative Vorzeichen bedeutet, daß es sich um ein umgekehrtes Bild handelt.

2. Vor einer Sammellinse der Brennweite $f = 16$ cm steht in 10 cm Entfernung ein 5 cm großer Gegenstand. Art, Größe und Entfernung des Bildes sind zu berechnen. – Mit Gleichung (253) ist die Bildweite $b = \frac{gf}{g-f} = \frac{10 \cdot 16}{10-16}$ cm $= -26{,}7$ cm; das negative Vorzeichen bedeutet virtuelles Bild. Mit Gleichung (252) wird die Bildgröße $B = -\frac{Gb}{g} =$ $= -\frac{5 \cdot (-26{,}7)}{10}$ cm $= +13{,}4$ cm; das Bild ist vergrößert und wegen des positiven Vorzeichens aufrecht. Die Linse wirkt als Lupe.

28.2. Dicke Linsen

Bei genaueren optischen Berechnungen muß die bei den bisherigen Betrachtungen vernachlässigte Dicke der Linsen berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck verwendet man die beiden **Hauptebenen** H und H' (Bild 369). Diese stellen zwei Hilfsebenen dar, die mit dem wirklichen Strahlengang an sich nichts zu tun haben. Kennt man aber ihre Lage, dann ist die Bildkonstruktion fast ebenso einfach wie bei einer dünnen Linse, die wir durch eine einzige Ebene ersetzen konnten.

Die Berechnung, auf die hier nicht eingegangen werden kann, liefert

1. für eine **symmetrische dicke Bikonvexlinse** ($n = 1{,}5$ und $r \geqq d$): Abstand der beiden Hauptebenen $= {}^1/_3$ Linsendicke,
2. für eine **dicke Plankonvexlinse** ($n = 1{,}5$ und $r \geqq d$): Abstand der einen Hauptebene vom Linsenscheitel $= {}^1/_3$ Linsendicke (Bild 370).

Die Konstruktion des Strahlenganges erfolgt nach Bild 369.

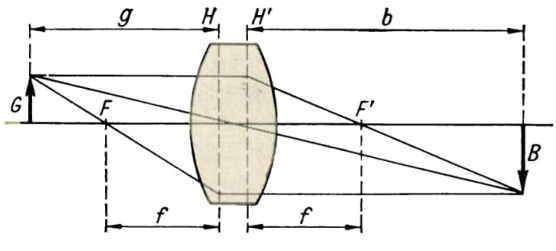


Bild 369. Bildkonstruktion mit Hilfe der Hauptebenen (H und H' Hauptebenen)

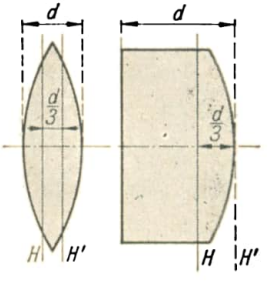


Bild 370. Lage der Hauptebenen bei dicken Linsen

Im übrigen behalten aber die Gleichungen (252) und (253) ihre uneingeschränkte Gültigkeit. Es ist lediglich zu beachten, daß die Größen g, b und f bei dicken Linsen von den Hauptebenen aus zu rechnen sind.

28.3. Linsensysteme

Ein System aus zwei dünnen Linsen L_1 und L_2, die nach Bild 371 im Abstand e voneinander angeordnet sind, läßt sich theoretisch durch eine einzige Linse der Brennweite f ersetzen. Der linke und rechte Brennpunkt des Systems sind von den beiden Einzellinsen verschieden weit entfernt.

(254) $$FL_1 = \frac{f_1(f_2 - e)}{f_1 + f_2 - e}$$ **Entfernung der linken Linse L_1 vom linken Brennpunkt F des Systems**

(255) $$\boxed{L_2F' = \frac{f_2(f_1 - e)}{f_1 + f_2 - e}}$$ **Entfernung des rechten Brennpunktes F' von der rechten Linse L_2**

Herleitung: Von links her falle ein achsenparalleles Bündel auf die Linse L_1, die für sich allein den Brennpunkt F_1 erzeugen würde. Faßt man die Wirkung der Linse L_2 so auf, daß sie den Punkt F_1 nach F' abbildet, so sind die zugehörige Brennweite f_2, die Gegenstandsweite $g_2 = -(f_1 - e)$ und die Bildweite $b_2 = \overline{L_2F'}$. Setzt man diese Werte in die Abbildungsgleichung (253) ein, so erhält man $\frac{1}{\overline{L_2F'}} - \frac{1}{f_1 - e} = \frac{1}{f_2}$, woraus (255) unmittelbar folgt. Gleichung (254) ergibt sich, wenn man ein paralleles Bündel von rechts her einfallen läßt.

Ferner entnimmt man aus Bild 371 die Proportionen

$$\frac{h_1}{f} = \frac{h_2}{\overline{L_2F'}} \text{ und } \frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_1 - e}.$$

Dividiert man die erste durch die zweite und setzt $\overline{L_2F'}$ aus (255) ein, so erhält man

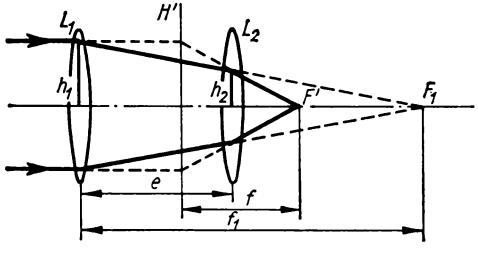


Bild 371. Rechter Brennpunkt F' und Brennweite f eines Linsensystems

(256) $$\boxed{f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}}$$

Brennweite f des Linsensystems

Die Brennweite f ist die Entfernung der beiden Brennpunkte F und F' von den zugehörigen Hauptebenen H und H' des Linsensystems.
Wenn die beiden Linsen sich unmittelbar berühren oder sehr eng beieinanderliegen, kann man $e = 0$ setzen und erhält

(257) $$\boxed{f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}}$$ **Brennweite eines Systems zusammenliegender Linsen**

oder auch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Den reziproken Wert der Brennweite bezeichnet man auch häufig als **Brechkraft** einer Linse. Es gilt daher:

Die Brechkraft einer zusammengesetzten Linse ist gleich der Summe der Brechkräfte der Einzellinsen.

Ist eine der beiden Linsen eine Zerstreuungslinse, so ist nach S. 313 der negative Wert ihrer Brennweite einzusetzen.

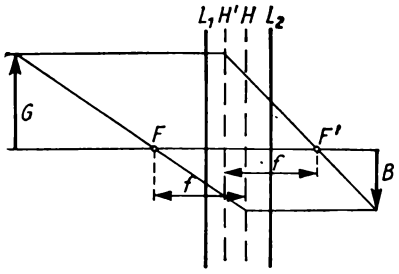


Bild 372. Strahlengang zum Beispiel 2

Beispiele: 1. Eine Sammellinse $f_1 = 5$ cm soll mit einer Zerstreuungslinse durch unmittelbares Zusammenlegen kombiniert werden, so daß die Gesamtbrennweite $f = 12$ cm beträgt. – Nach(257) ist $f_2 = \frac{f_1 f}{f_1 - f} = \frac{5 \cdot 12}{5 - 12}$ cm $= -8{,}57$ cm (Vorsatzlinse eines Fotoapparates).

2. Berechne die Brennweite f und die Lage der Hauptebenen für ein System aus den zwei Sammellinsen $f_1 = 18$ cm und $f_2 = 21$ cm im gegenseitigen Abstand $e = 9$ cm. –

Es ist nach (256) $f = \frac{18 \cdot 21}{18 + 21 - 9}$ cm $= 12{,}6$ cm.

Ferner ist $\overline{FL_1} = \frac{18\,(21-9)}{18+21-9}$ cm $= 7{,}2$ cm

und $\overline{L_2F'} = \frac{21\,(18-9)}{18+21-9}$ cm $= 6{,}3$ cm.

Die Hauptebene H' liegt 12,6 cm links von F' und H ebenso weit rechts von F. In diesem Fall sind die Hauptebenen gegenüber Bild 369 vertauscht. Die dazugehörige Bildkonstruktion ist auf Bild 372 mit angegeben.

28.4. Linsenfehler

28.4.1. Chromatischer (Farb-) Fehler

Rotes Licht wird *schwächer* gebrochen als violettes (s. Dispersion, 27.1.). Der Brennpunkt für violettes Licht liegt daher näher an der Linse als der für rotes Licht (Bild 373). Gegenstände in weißem Licht, durch eine gewöhnliche Linse betrachtet, erscheinen daher von farbigen Rändern umsäumt: die **chromatische Aberration** (Abweichung). Sie beeinträchtigt die *Bildschärfe*. Man kann den Farbfehler *grob* beseitigen, indem man an eine Konvexlinse aus Kronglas eine Konkavlinse aus Flintglas kittet (s. achromatisches Prisma, S. 309), und erhält so ein **achromatisches** System. Da es auf diese Weise nur gelingt, *zwei* ausgewählte Farben (etwa Rot und Blau) zur Deckung zu bringen, bleibt noch ein sogenanntes **sekundäres Spektrum** übrig. Durch

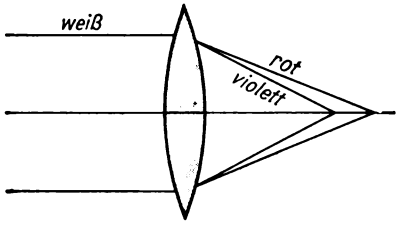


Bild 373. Chromatischer Fehler

Kombination besonderer Jenaer Gläser beseitigt man auch dieses noch und erhält die **Apochromate**[1]).

28.4.2. Sphärischer (Kugel-) Fehler

Es wurde schon gesagt, daß Linsen aus Gründen der technischen Einfachheit *sphärisch* geschliffen werden. Damit nimmt man eine Reihe von Fehlern in Kauf, die sich aber durch geeignete Mittel beseitigen lassen.
Von einem achsenparallel auftreffenden Bündel haben die randwärts gelegenen Strahlen eine *kürzere* Brennweite als die achsnahen. Die Linse ist demnach in den Randzonen zu stark gekrümmt (Bild 374). Die Differenz der Brennweiten zwischen Rand- und Zentralstrahlen nennt man die **sphärische Aberration.** Bei gut korrigierten Fernrohrobjektiven beträgt sie, von einem mittleren Brennpunkt aus gerechnet, nur noch etwa $^1/_{1000}$ Brennweite. Die einfachste Abhilfe besteht darin, eine **Lochblende** vor die Linse zu setzen, welche die Randstrahlen abdeckt. Damit geht jedoch viel Licht verloren.

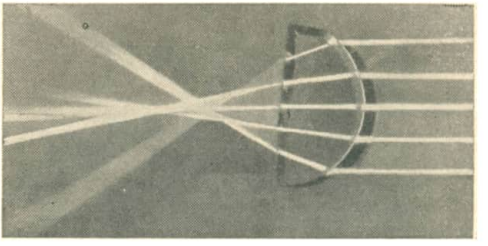


Bild 374. Sphärischer Fehler

Besser ist es daher, eine Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse von *anderem* Brechungsindex n so zu kombinieren, daß im ganzen eine sammelnde Wirkung verbleibt.
Das ist leicht zu verstehen, weil der sphärische Fehler einer Zerstreuungslinse analog dem einer Sammellinse ist; die Randstrahlen werden *stärker zerstreut* als die Zentralstrahlen. Eine vor die Sammellinse gesetzte Zerstreuungslinse kann daher die zu starke Brechung der Randstrahlen wieder *aufheben*. Solchermaßen korrigierte (und gleichzeitig achromatische) Systeme heißen **Aplanate.**
Bei einer einfachen *Plan*konvexlinse vermindert sich der Fehler, wenn die parallelen Strahlen in die *ebene Fläche zuerst* eindringen.

28.4.3. Astigmatismus und weitere Fehler

Bild 375 zeigt eine Linse, die im waagerechten Durchmesser stärker gekrümmt ist als im senkrechten. Ein in den waagerechten Durchmesser fallendes Lichtband ergibt eine kürzere Brennweite als das senkrechte Bündel. Im Brennpunkt F_1 bzw. F_2 des einen erscheint das andere Band jeweils als Strich. Man nennt diese Erscheinung, die auch als weitverbreiteter Fehler der Augenlinse bekannt ist, **Astigmatismus (mangelnde Punktförmigkeit).**
Dieser Astigmatismus tritt aber auch an *jeder* gewöhnlichen Linse (mit selbstverständlich gleichmäßiger Krümmung) auf, wenn sie von einem *schief* zur Achse

[1]) Außerdem ist hier noch der chromatische Fehler der sphärischen Aberration für zwei Farben korrigiert

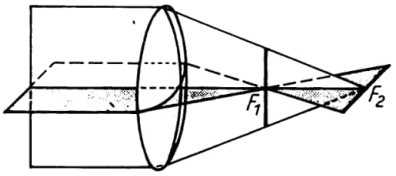


Bild 375. Astigmatismus einer Linse mit 2 verschiedenen Krümmungen

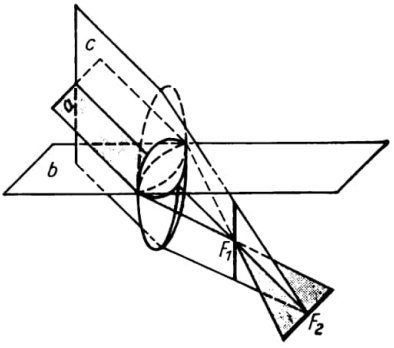


Bild 376. Astigmatismus eines schief einfallenden Lichtbündels

einfallenden Lichtbündel getroffen wird: **Astigmatismus schiefer Bündel.** Aus dem Bündel werde ein dünnes Lichtband (a) herausgegriffen. Seine Schnittfläche (Bild 376) mit der Linie hat eine stärkere Krümmung, als wenn die Linse in Richtung der Achse durchschnitten wird (b), oder, was auf dasselbe hinausläuft, von einem zu dem ersten rechtwinklig laufenden Band (c). Ein außerhalb der Achse liegender, unendlich ferner Punkt liefert daher keinen Brennpunkt, sondern zwei zueinander senkrecht stehende *Striche* in *verschiedener Entfernung*

Linsensysteme ohne diesen Fehler heißen **Anastigmate.** Ebenfalls auf die Kugelform der Linsenflächen ist die **Koma** zurückzuführen. Achsferne Punkte erscheinen in radialer Richtung verwischt. Aplanate und Anastigmate sind praktisch frei von der Koma.

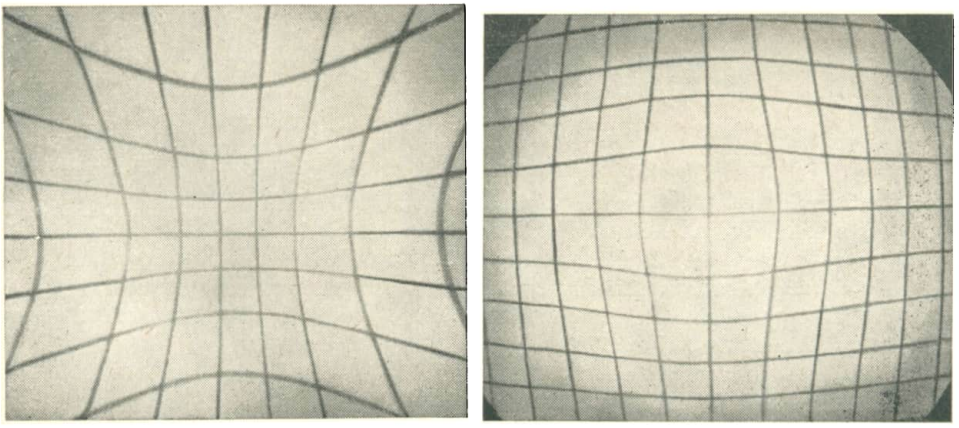


Bild 377. Kissen- und tonnenförmige Verzeichnung eines ursprünglich geradlinigen Kreuzgitters

Je nach Anordnung einer Blende vor oder hinter der Linse können auch **kissen-** oder **tonnenförmige Verzeichnungen** auftreten, die sich an der Abbildung eines *Kreuzgitters* (Bild 377) feststellen lassen.
Schließlich hängt auch die **Bildfeldwölbung** mit der sphärischen Linsenform zusammen. Hierbei werden die zentralen Teile des Bildes in größerer Entfernung von der Linse schärfer abgebildet als die randwärts liegenden Bildzonen (beim Anastigmat korrigiert).

29. Optische Instrumente

29.1. Auge

29.1.1. Sehweite und Sehwinkel

Als optisches Instrument läßt sich das Auge mit einer fotografischen Kamera vergleichen. Die Abbildung geschieht aber nicht allein durch die im Augeninnern befindliche Linse, sondern diese bildet zusammen mit den im Auge vorhandenen Flüssigkeiten ein optisches System. Dieses entwirft ein reelles, umgekehrtes und verkleinertes Bild der Umgebung auf die Netzhaut. Da die Bildweite wegen der festen Länge des Augapfels konstant ist, wird, der jeweiligen Entfernung des Gegenstandes entsprechend, die Brennweite der Linse verändert. Diesen Vorgang nennt man **Akkommodation.** Bei ruhendem Auge ist die Linse auf Unendlich eingestellt.
Die sogenannte **deutliche Sehweite** ist diejenige Entfernung, auf die das Auge ohne Ermüdung akkommodieren kann (z. B. beim Lesen). Sie ist in erster Linie eine Funktion des Lebensalters und ist in der Jugend kleiner als im Alter. Als Mittelwert wird angenommen:

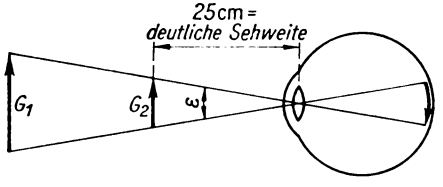


Bild 378. Sehwinkel. Die beiden Gegenstände G_2 und G_1 erscheinen gleich groß

(258) **deutliche Sehweite $s = 25$ cm.**

Die Größe eines gesehenen Gegenstandes richtet sich nach dem **Sehwinkel** ε, den die den Gegenstand G begrenzenden Strahlen zum hinteren Scheitel der Linse bilden (Bild 378). G erscheint um so größer, je größer dieser Sehwinkel ist.

29.1.2. Sehschärfe

Der kleinste Sehwinkel, den zwei getrennte Punkte mit dem Auge noch bilden müssen, um getrennt wahrgenommen zu werden, beträgt 1 Winkelminute:

(259) **kleinster auflösender Sehwinkel $\varepsilon = 1'$**

In diesem Fall ist äußerste Konzentration des Sehenden nötig. Im übrigen gilt als

kleinster wahrnehmbarer Winkelabstand zweier Punkte:

angestrengtes Sehen	1′
aufmerksames und scharfes Sehen	2′
bequemes Sehen	4′

Diese Grenze der optischen Leistungsfähigkeit des Auges ist einerseits in der Wellennatur des Lichtes begründet, stimmt aber andererseits mit dem Abstand (a) je zweier nichtbenachbarter Netzhautelemente (Stäbchen und Zäpfchen) überein (Bild 379). Liegen zwei Punkte enger beisammen, so fallen sie entweder in ein *einziges* Element (b) oder in zwei benachbarte (c). Sie erregen die Netzhaut so, als ob sie ein einziger Punkt wären. Empfindlicher ist das Auge gegenüber der Versetzung zweier paralleler Striche (d), wodurch das Auflösungsvermögen auf das 4···6fache steigt (10″···15″, wichtig für *Nonien*ablesung). Noch feiner ist die *Symmetrie*empfindlichkeit, mit der das Auge die Abweichung eines Teilstriches von der Mittelstellung zwischen zwei anderen Strichen feststellen kann (erreichbare Genauigkeit einige Winkelsekunden).

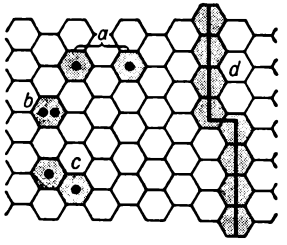


Bild 379. Auflösungsvermögen der Netzhaut (schematisch)

Beispiele: 1. Wie weit muß ein 1,70 m großer Mann vom Auge entfernt sein, wenn er genauso groß erscheinen soll wie ein in deutlicher Sehweite befindliches Zehnpfennigstück (Durchmesser 21 mm)? – Hinsichtlich des Sehwinkels gilt die Proportion $\frac{250}{21} = \frac{x}{1700}$, wonach $x = 20{,}24$ m ist (Bild 378).

2. Welchen Abstand müssen zwei Teilstriche eines Rechenstabes mindestens haben, damit sie bei aufmerksamer Betrachtung noch getrennt gesehen werden können? – Der Winkel von 2′ hat ein Bogenmaß von $\frac{2\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}000582$. Das ergibt in der deutlichen Sehweite von 25 cm einen Strichabstand von $0{,}000582 \cdot 25$ cm $= 0{,}0146$ cm $\approx 0{,}15$ mm.

29.2. Lupe

Die Lupe ist eine einfache oder zusammengesetzte Sammellinse von kurzer Brennweite, die vergrößerte virtuelle Bilder nahegelegener Gegenstände erzeugt. *Ohne* Lupe erblickt man den Gegenstand in deutlicher Sehweite 25 cm unter dem Sehwinkel ε_0. Mit Hilfe der Lupe erscheint der Gegenstand unter dem größeren Sehwinkel ε (Bild 380). Es gilt nun als

(260) **Vergrößerung** $v = \dfrac{\text{Sehwinkel } \varepsilon \text{ mit Instrument}}{\text{Sehwinkel } \varepsilon_0 \text{ ohne Instrument in 25 cm Abstand}}$

Die Vergrößerung richtet sich aber danach, wie weit Gegenstand und Auge von der Lupe entfernt sind, liegt also nicht absolut fest. Gewöhnlich gibt man die **Normalvergrößerung** an. Sie gilt für den Fall, daß man den Gegenstand G in die eine Brenn-

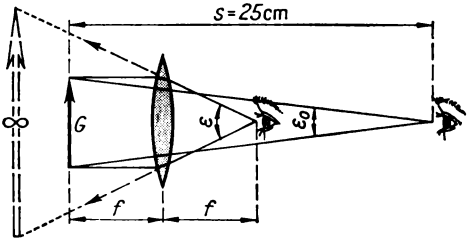


Bild 380. Sehwinkel mit (ε) und ohne Lupe (ε_0)

ebene und das Auge in den anderen Brennpunkt bringt. Setzt man demzufolge in der Abbildungsgleichung (253) $g = f$, so ergibt sich die Bildweite $b = \pm\infty$. Dies bedeutet für das Auge ein virtuelles Bild im Unendlichen. Das Auge befindet sich, wie auch sonst bei der Betrachtung weit entfernter Objekte, im entspannten Zustand.

Hierbei ergibt sich nach Bild 380 für $\tan \varepsilon_0/2 = \frac{G/2}{s}$ und für $\tan \varepsilon/2 = \frac{G/2}{f}$, wofür man (wegen der Kleinheit der Winkel) auch setzen kann $\varepsilon_0 = \frac{G}{s}$ und $\varepsilon = \frac{G}{f}$. Damit erhält man

(261) $\boxed{v = \frac{s}{f}}$ **Vergrößerung v einer Lupe** (Normalvergrößerung)

Hält man aber die Lupe so, daß der Gegenstand *innerhalb* der Brennweite und das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite $s = 25$ cm liegen, so wird $\varepsilon = \frac{B}{b}$, $\varepsilon_0 = \frac{G}{s}$ und $v = \frac{Bs}{Gb}$. Nach (252) ist $\frac{B}{g} = \frac{b}{g}$ (positiv, weil das Bild aufrecht steht). Damit wird $v = \frac{s}{g}$. Ferner ist nach (253) $\frac{1}{g} = \frac{b-f}{bf}$. Damit folgt $v = \frac{s(b-f)}{bf}$ bzw. gekürzt

$\boxed{v = \frac{s}{f} + 1}$ **Vergrößerung v einer Lupe** (Bild in deutlicher Sehweite)

29.3. Fotografische Kamera

Sie stellt eine *Vervollkommnung der Lochkamera* dar. Ihr Hauptteil ist ein fehlerfreies Linsensystem, **Objektiv** genannt (Bild 381). Es erzeugt wie beim Auge ein *umgekehrtes*, reelles Bild, das auf der **Mattscheibe** bzw. einem **lichtempfindlichen Film** erscheint. Um die Belichtungszeit für Momentaufnahmen recht kurz zu halten, muß möglichst *viel* Licht in die Kamera eindringen Das Objektiv soll also bei guter Qualität einen möglichst **großen Durchmesser haben.**

Öffnungsverhältnis:

(262) $$1 : x = \frac{\text{Linsendurchmesser } d}{\text{Brennweite } f}$$

Da die Linsenoberfläche mit dem Quadrat des Durchmessers anwächst, nimmt auch die **„Lichtstärke"** eines Objektivs mit dem Quadrat des Öffnungsverhältnisses zu.

Größere Bilder bei gleichem Bildformat (z. B. Fernaufnahmen) sind nur unter Verwendung eines **Teleobjektivs** mit entsprechend größerer Brennweite möglich. Für kleine Gegenstände in großer Nähe verwendet man **Vorsatzlinsen,** welche die Brennweite verkürzen.

Im allgemeinen kommt es darauf an, daß der wiederzugebende Gegenstand möglichst „scharf" auf der Mattscheibe bzw. dem Film erscheint. Einem jeden Punkt P auf der **Einstellebene E** im Objektraum entspricht dann bei genauer Einstellung des Apparates genau ein Punkt P' auf der **Mattscheibenebene M.** Jeder vor oder hinter der Einstellebene gelegene Punkt wird nicht als Punkt, sondern als kleiner, kreisförmiger Fleck (sog. **Zerstreuungskreis**) abgebildet. Es ist aber durchaus nicht notwendig, daß sich das Mattscheibenbild aus mathematischen Punkten zusammensetzt; denn das Auge vermag zwischen einem Punkt und einer Kreisscheibe von bestimmter winziger Größe nicht zu unterscheiden. Ebenso verhält es sich bei der **körnigen Struktur** des fotografischen Films.



Bild 381. Fotografisches Objektiv. Öffnungsverhältnis 1:2,8; Brennweite $f = 50$ mm; T-Optik; oberer Ring zum Einstellen der Irisblende

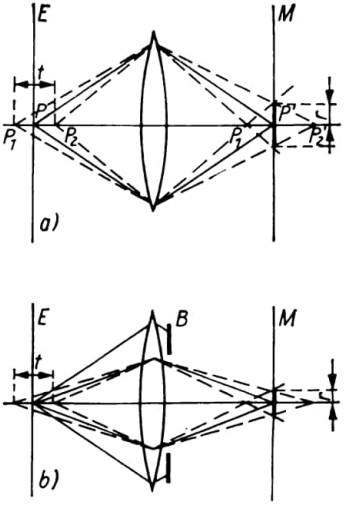


Bild 382. Schärfentiefe t und Radius r des Zerstreuungskreises

a) bei voller Linsenöffnung,
b) bei teilweiser Abblendung

E Einstellebene, M Mattscheibenebene, B Blende

Daraus ergibt sich, daß nicht nur Punkte der Einstellebene, sondern auch davor- und dahinterliegende Punkte mit praktisch ausreichender Schärfe abgebildet werden. Der damit auf der Seite des Gegenstandes gegebene Spielraum ist die **Schärfentiefe** t (Bild 382a). Bei einer guten Kamera von $f = 5$ cm rechnet man mit einem zulässigen Zerstreuungskreisdurchmesser von 0,03 mm.
Wird die wirksame Linsenöffnung durch **Abblenden** verkleinert, so wird der abbildende Strahlenkegel eingeengt und der Zerstreuungskreis kleiner (Bild 382b). Da der die Bildschärfe bedingende zulässige Radius r aber konstant bleibt, ergibt sich:

Die Schärfentiefe wird durch Abblenden vergrößert.

Beispiele: 1. Wie groß ist die wirksame Öffnung eines Objektivs von 12 cm Brennweite mit einem Öffnungsverhältnis von 1 : 4,5? – Nach (262) ist $d = \frac{12\text{ cm}}{4{,}5} = 2{,}66$ cm.

2. In welchem Verhältnis stehen die Lichtstärken bei den sehr viel verwendeten „Blenden" 2,8; 4; 5,6; 8? – Die Lichtstärken verhalten sich wie

$$\left(\frac{1}{2{,}8}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{5{,}6}\right)^2 : \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{7{,}8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{31{,}4} : \frac{1}{64} \approx 8 : 4 : 2 : 1 .$$

Die „nächstgrößere Blende" verdoppelt die Lichtstärke.

3. Auf welches Format muß das 24 mm × 36 mm große Bild einer Kamera von $f = 5$ cm vergrößert werden, wenn es in deutlicher Sehweite naturgetreu wirken soll? – Der beim Betrachten des Bildes erforderliche Sehwinkel ε_0 muß gleich demjenigen sein, unter dem der abgebildete Gegenstand vom Standpunkt der Kamera erscheint. Die begrenzenden Strahlen bilden in der Kamera den gleichen Winkel, wo man ihn durch das Verhältnis $\frac{\text{Bilddurchmesser}}{\text{Brennweite } f}$ ausdrücken kann. Es ergibt sich bei 25 cm Betrachtungsabstand die Proportion $\frac{24}{50} = \frac{x}{250\text{ mm}}$; $x = 120$ mm. Format der Vergrößerung: 12 cm × 18 cm.

29.4. Projektionsapparat

Sein **Objektiv** wirft ein reelles, *umgekehrtes* und *vergrößertes* Bild an die Wand, weshalb nach S. 314, Fall 3, der zu projizierende Gegenstand *zwischen* dessen *einfacher* und *doppelter* Brennweite stehen muß. Zur Abbildung gelangen **Diapositive** (Glasbilder) oder Filme, wie beim Kinoprojektor. Wichtig ist gute Beleuchtung, die man durch den **Kondensor** erreicht. Die starke Lichtquelle wird so gesetzt, daß der Kondensor die Lichtquelle im Mittelpunkt des Objektivs abbildet (Bild 383). Dadurch wird alles vom Kondensor ausgehende Licht zur Projektion ausgenutzt.
Mit dem **Episkop** kann man auch undurchsichtige Bilder und kleine Gegenstände, die allerdings *sehr* stark zu beleuchten sind, projizieren. Mit dem **Epidiaskop** kann man sowohl durchsichtige als auch undurchsichtige Bilder projizieren.

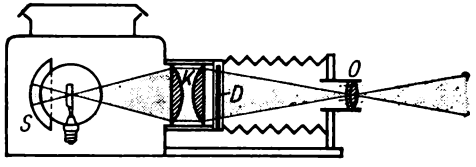


Bild 383. Projektionsapparat
S Spiegel, K Kondensor, D Diapositiv, O Objektiv

29.5. Fernrohre

29.5.1. Astronomisches Fernrohr

Das von **Kepler** (1618) erfundene astronomische Fernrohr besteht aus 2 Teilen: dem **Objektiv** und dem als Lupe wirkenden **Okular** (Schaulinse), mit welchem das Bild B betrachtet wird (Bild 384). Da der Gegenstand sehr weit entfernt ist, sind die von ihm ausgehenden Strahlen parallel und müssen sich nach 28.1.2. in der Brennebene des Objektivs vereinigen, wo ein *kleines*, umgekehrtes Bild entsteht. Dieses wird mit dem Okular betrachtet.

(263) $\boxed{v = \frac{f_1}{f_2}}$ **Vergrößerung v des astronomischen Fernrohres**

(f_1 Brennweite des Objektivs, f_2 Brennweite des Okulars)

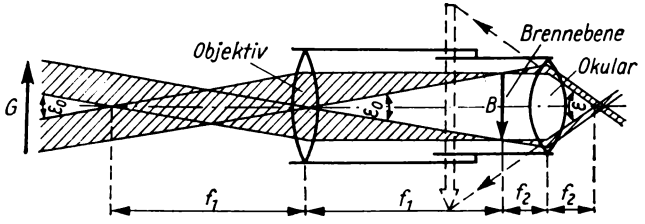


Bild 384
Astronomisches Fernrohr

Herleitung: Der sehr weit entfernte Gegenstand G erscheint ohne Instrument unter dem Winkel ε_0, wobei sich nach Bild 384 ergibt: $\tan\frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{B/2}{f_1}$. Im Okular erscheint das vom Objektiv in der Brennebene entworfene Bild unter dem Winkel $\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{B/2}{f_2}$. Wegen der Kleinheit der Winkel kann man an Stelle der Tangenswerte die Winkel selbst einsetzen. Damit ist die Vergrößerung nach (260)

$$v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{f_1}{f_2}.$$

29.5.2. Terrestrisches Fernrohr

Es hat den gleichen Aufbau wie das astronomische Fernrohr. Eine zusätzliche **Umkehrlinse** richtet aber das auf dem Kopf stehende Zwischenbild wieder auf. Da diese Bauart wegen ihrer großen Länge recht unhandlich ist, bevorzugt man heute **Prismenfernrohre.** Zwei eingebaute, total reflektierende *Umkehrprismen* machen die Umkehrlinse entbehrlich und gestalten das Fernrohr wegen des *mehrfach geknickten* Strahlengangs *kürzer* (Bild 385).

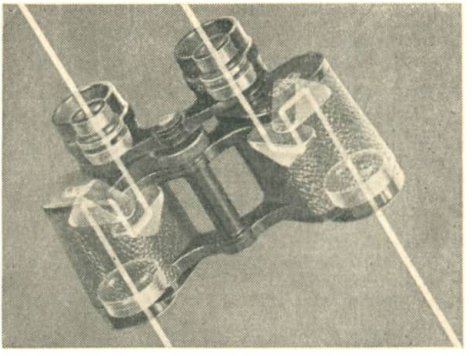


Bild 385. Strahlengang im Prismenfernrohr

29.5.3. Galileisches Fernrohr

Dieses auch **holländisches Fernrohr** genannte Instrument (vermutlich 1608 in Holland erfunden) hat als Objektiv eine Sammel- und als Okular eine Zerstreuungslinse. Das reelle Zwischenbild würde *ohne* Okular weit außerhalb des Rohres hinter letzterem liegen. Die Zerstreuungslinse bricht die vom Objektiv kommenden Strahlen so, daß sie sich *nicht* vereinigen können, sondern auseinanderlaufen und für den Beobachter ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild liefern. Es ist als **Opernglas** mit verhältnismäßig geringer Vergrößerung weit verbreitet.

Konstruktion des virtuellen Bildes (Bild 386). Wenn das Okular nicht vorhanden wäre, würde sich das reelle Bild B wie beim astronomischen Fernrohr ergeben. Die im Strahlengang stehende Zerstreuungslinse lenkt jedoch die Parallelstrahlen 1 und 2 so nach außen ab, daß sie vom virtuellen Brennpunkt F herzukommen scheinen (1′ und 2′). Zwei weitere Strahlen 3′ und 4′, die, ebenfalls vom Objektiv kommend, das Bild B mit erzeugen, sind für das Okular Mittelpunktstrahlen und damit ebenfalls festgelegt. Die gedachten Verlängerungen der Strahlenpaare 1′ 3′ und 2′ 4′ liefern ein aufrechtes virtuelles Bild.

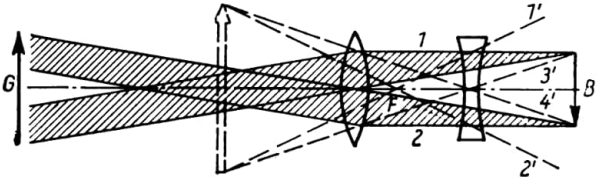


Bild 386. Holländisches Fernrohr

29.6. Mikroskop

Während die Objektive bei Fernrohren sehr lange Brennweiten haben müssen, werden diese bei den Mikroskopen sehr kurz (bis 1 mm abwärts) gehalten. Der zu vergrößernde Gegenstand liegt nahezu in Brennweite auf dem **Objekttisch** und gibt nach S. 314 (Fall 3) ein reelles, vergrößertes Zwischenbild im **Tubus.** Dieses wird mit dem Okular nochmals vergrößert. Unter der optischen Tubuslänge t versteht man den Abstand der beiden inneren Brennpunkte, normalerweise 160 mm (Bild 387).

(264) $$\boxed{v = \frac{s\,t}{f_1 f_2}}$$ **Vergrößerung des Mikroskops**

Herleitung: Für das Objektiv ist nach (253)

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_1 + t} = \frac{t}{f_1(t + f_1)}$$

und der Betrag des Abbildungsmaßstabes nach (252)

$$\frac{B}{G} = \frac{t + f_1}{g} = \frac{(t + f_1)t}{(t + f_1)f_1} = \frac{t}{f_1}.$$

Das Okular wirkt nach (261) als Lupe mit der Vergrößerung $\frac{s}{f_2}$. Das Produkt dieser beiden Verhältnisse liefert die Gesamtvergrößerung.

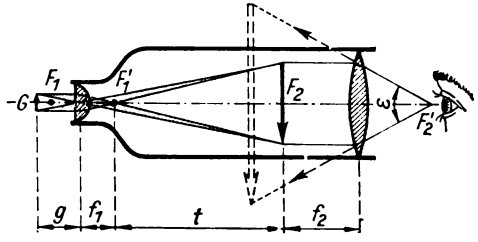


Bild 387. Schema des Mikroskops: Betrachtung des reellen Zwischenbildes unter dem Sehwinkel ε

Wellenoptik

30. Ausbreitung und Überlagerung von Wellen

30.1. Huygenssches Prinzip

Bei allen bisherigen Betrachtungen haben wir von der Wellennatur des Schalles und des Lichtes nur in beschränktem Maß Gebrauch gemacht. Als erstes wesentliches Merkmal einer Welle erkannten wir das Vorwärtsschreiten des Bewegungszustandes der einzelnen schwingenden Teilchen als Folge ihrer gegenseitigen Kopplung. Jedes Teilchen eilt dem vorangehenden mit einer gewissen Phasendifferenz nach. Als geometrische Orte aller Punkte gleicher Schwingphase ergaben sich die **Wellenfronten,** deren Abstand gleich der Wellenlänge ist. Das zweite Merkmal fanden wir im Energietransport, der sich in Richtung der Wellenausbreitung vollzieht. Diese ist durch die **Wellenstrahlen** gegeben, die jeweils *senkrecht* auf den Wellenfronten stehen.

Sowohl beim Schall als auch beim Licht gibt es aber Vorgänge, die sich mit diesen Begriffen allein noch nicht deuten lassen. Sie betreffen zunächst das Verhalten einer Welle, wenn diese auf die Grenzfläche zweier verschiedener Medien trifft. Dabei stellten wir die nach besonderen Gesetzen stattfindenden Erscheinungen der *Reflexion* und *Brechung* fest. Es entsteht daher die Frage, auf welche Weise man diese Gesetze mit Hilfe der Wellenvorstellung gewinnen kann.

Eine Antwort hierauf gibt ein Versuch mit der Wellenwanne. In das Feld der von einer schwingenden Spitze auf einer Wasseroberfläche erzeugten Kreiswellen stellt man eine Querwand, in der sich eine kleine Öffnung befindet. Dann sieht man, wie aus dieser Öffnung ein neues selbständiges System von Wellen herauskommt (Bild 388). Diese Stelle bildet den Ausgangspunkt einer neuen *Tochterwelle.* Versieht man die Wand mit mehreren

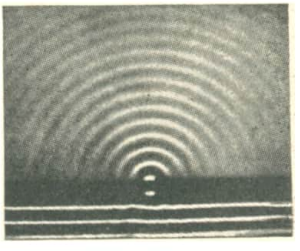


Bild 388. Entstehung einer Elementarwelle aus einem von der Welle getroffenen Punkt

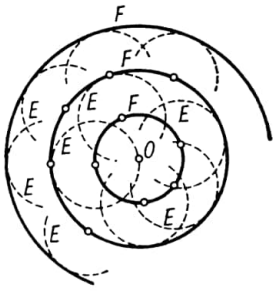


Bild 389. Das Huygenssche Prinzip
O Wellenzentrum,
E Elementarwellen,
F Wellenfronten

Öffnungen, so wirkt jede einzelne von ihnen in gleicher Weise, wobei dann schließlich die Wellenfronten aller dieser Tochterwellen zu einer neuen gemeinsamen Wellenfront verschmelzen (Bild 389). Die Wellenlänge ändert sich dabei nicht.

Den Versuch kann man an jeder beliebigen Stelle des Wellenfeldes ausführen und damit nachweisen, daß jeder beliebige, von einer Welle erreichte Punkt des Mediums daher als ein *neues, selbständiges Stör-* und damit *Wellenzentrum* betrachtet werden kann. Die von ihm ausgehende Welle nennt man eine **Elementarwelle.** Betrachtet man die von vielen benachbarten Punkten einer Wellenfront ausgehenden Elementarwellen, so haben sie nach einer bestimmten Zeit eine neue, gemeinsame Wellenfront erreicht. Man kann sich also vorstellen, daß umgekehrt jede Wellenfront als Umhüllende zahlreicher, gleichzeitig entstandener Elementarwellen zustande kommt.

Dieser von dem großen holländischen Physiker Christian Huygens (1629···1695) ausgesprochene Gedanke heißt das

(265) **Huygenssche Prinzip:**

Jeder von einer Welle getroffene Punkt ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle. Die Umhüllende (gemeinsame Tangente) aller aus einer Wellenfront gleichzeitig entstehenden Elementarwellen ist wieder eine Wellenfront der vom ursprünglichen Erregungszentrum ausgehenden Wellen.

Das Huygenssche Prinzip erweist sich vor allem bei der Deutung komplizierterer Wellenerscheinungen als außerordentlich wertvoll.

30.2. Reflexion von Wellen

Eine von zwei parallelen Strahlen 1 und 2 eingefaßte ebene Wellenfront AB fällt schräg auf eine Fläche, die von ihr *nicht* durchdrungen werden kann (Bild 390). Strahl 1 erreicht sie in Punkt A zuerst und sendet eine Elementarwelle von wachsen-

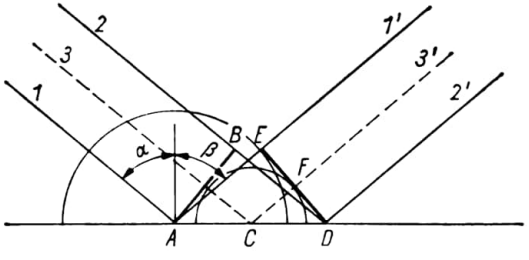


Bild 390. Reflexion paralleler Strahlen nach dem Huygensschen Prinzip

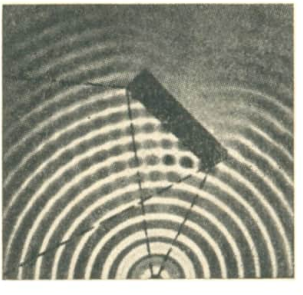


Bild 391. Reflexion von Wasserwellen

dem Radius aus. Wenn Strahl 2 die Fläche in D erreicht hat, muß infolge der *gleichen* Ausbreitungsgeschwindigkeit der Radius der Elementarwelle $\overline{AE}$ gleich $\overline{BD}$ sein. Der in der Mitte zwischen 1 und 2 laufende Strahl 3 erreicht die Fläche im Punkt C. Die hier entstehende Elementarwelle erreicht bis zum Eintreffen des Strahls 2 nur den halben Radius $\overline{CF} = \frac{\overline{AE}}{2}$.

Die neue Wellenfront ist nach Satz (265) die Tangente $\overline{DE}$.
Man sieht nun, daß die beiden Dreiecke AED und ABD rechtwinklig sind, da die Wellenfronten auf den zu ihnen gehörenden Strahlen senkrecht stehen. Außerdem haben sie die gemeinsame Basis $\overline{AD}$ und die Seiten $\overline{AE}$ bzw. $\overline{BD}$ von gleicher Länge. Folglich sind diese Dreiecke kongruent, so daß die Wellenfronten $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ mit der reflektierenden Fläche den gleichen Winkel bilden.
Die Schenkel dieser Winkel stehen aber paarweise senkrecht auf den Schenkeln von α und β, die zu beiden Seiten des in A errichteten Einfallslotes liegen. Damit ist $\alpha = \beta$, womit der Hauptinhalt des **Reflexionsgesetzes** gewonnen ist:

Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

Eine Welle wird aber nicht nur dann reflektiert, wenn sie gegen ein festes Hindernis trifft. Sie wird auch zurückgeworfen, wenn das Medium, in dem sie sich bewegt, an den freien Raum grenzt. Grundsätzlich werden Wellen an *allen Grenzflächen* reflektiert, an denen sich die Dichte sprunghaft ändert. Dabei ist zwischen zwei Fällen zu unterscheiden.
Ist die Dichte des angrenzenden Mediums *geringer*, dann läuft die Welle nach der Reflexion so zurück, wie sie auch *ungestört* weiterlaufen würde (Bild 392). Ihre Phasenlage bleibt *unverändert*

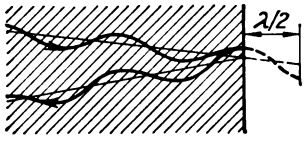


Bild 392. Reflexion ohne Phasensprung

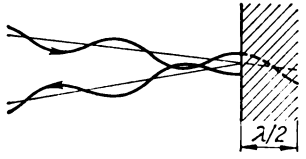


Bild 393. Reflexion mit Phasensprung

Wenn die Dichte des anderen Mediums aber *größer* ist, so erleiden die in der Welle schwingenden Teilchen an der Grenzfläche einen Impuls nach der entgegengesetzten Richtung, und es tritt ein **Phasensprung** von einer halben Wellenlänge auf. Das ist so zu verstehen: Die Wellen laufen in diesem Fall so zurück, wie sie bei ungestörter Ausbreitung erst nach Zurücklegen einer halben Wellenlänge weiterlaufen würden (Bild 393).

(266) **Bei Reflexion am dichteren Medium erfolgt ein Phasensprung von einer halben Wellenlänge.**

(267) **Bei Reflexion am dünneren Medium erfolgt kein Phasensprung.**

30.3. Brechung von Wellen

Ein paralleles Strahlenbündel (Bild 394) falle schräg auf die **Grenzfläche** g zweier Medien M_1 und M_2, in denen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 der Wellen unterschiedliche Werte haben sollen. Die Geschwindigkeit im Medium M_2 sei z. B. geringer als im Medium M_1. Wenn Strahl 1 der Wellenfront $\overline{AB}$ die Trennfläche in A erreicht, hat der andere noch die Strecke $\overline{BD} = a$ zurückzulegen. Dazu wird die Zeit $\frac{a}{c_1}$ benötigt. Währenddessen breitet sich von A eine Elementarwelle aus. Ihr Radius wächst in der Zeit $\frac{a}{c_1}$ auf die Größe $\overline{AE} = d = \frac{c_2 a}{c_1}$ an. Der in der Mitte zwischen 1 und 2 laufende Strahl erreicht die Grenzfläche im Punkt C. Die hier entstehende Elementarwelle erreicht bis zum Eintreffen des Strahls 2 nur den halben Radius $d/2$. Die neue Wellenfront im Medium M_2 ist nach (265) die Tangente an diese Halbkreise.

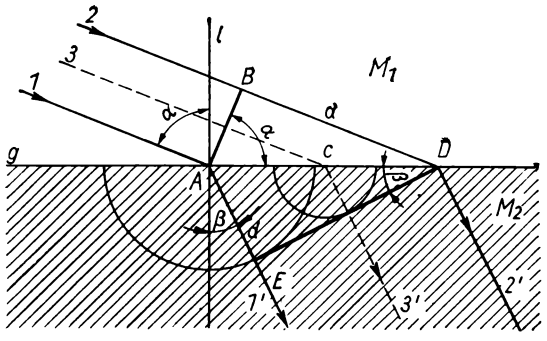


Bild 394. Brechung paralleler Strahlen nach dem HUYGENSschen Prinzip

Wegen $c_2 < c_1$ muß der Radius d der Elementarwelle aber kleiner sein als a. Das hat zur Folge, daß die im Medium M_2 entstandene Wellenfront $\overline{DE}$ nicht parallel zur ursprünglichen Wellenfront $\overline{AB}$ ist, sondern einen bestimmten Winkel mit ihr bildet. Dadurch verlaufen auch die Wellenstrahlen 1′ und 2′ im Medium M_2 nicht als geradlinige Fortsetzung der Strahlen 1 und 2, sondern erfahren in der Grenzfläche einen Knick. Sie werden nach dem in A errichteten Einfallslot hin gebrochen.

Für die auf Bild 394 angegebenen Winkel α und β ergeben sich jetzt die Beziehungen $\sin\alpha = \frac{a}{\overline{AD}}$ und $\sin\beta = \frac{d}{\overline{AD}}$. Man hat also einerseits $\frac{a}{d} = \frac{c_1}{c_2}$ und andererseits $\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Daraus folgt

(268) $$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}}$$ **Brechungsgesetz**

Die Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel verhalten sich wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den aneinandergrenzenden Medien.

In der Wellenwanne stellt man ein Gebiet geringerer Geschwindigkeit durch Einlegen eines flachen Körpers her. Über der seichteren Stelle laufen die Wellen langsamer, wodurch sich auch der Brechungsvorgang an Hand von Wasserwellen darstellen läßt (Bild 395).

Die in der Optik gebräuchliche SNELLIUSsche Fassung (247) des Brechungsgesetzes $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$ läßt sich leicht daraus herleiten. Messungen der Lichtgeschwindigkeit

haben nämlich ergeben, daß diese in stofflichen Medien stets kleiner ist als im Vakuum. Wird die Geschwindigkeit im Vakuum mit c_v bezeichnet, so gilt für ein Medium M_1 die Beziehung

$$\frac{c_v}{c_1} = n_1$$

und entsprechend für ein Medium M_2

$$\frac{c_v}{c_2} = n_2 .$$

Dann ist der Quotient dieser beiden Ausdrücke

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

womit die Übereinstimmung mit der SNELLIUSschen Form des Gesetzes bereits nachgewiesen ist.

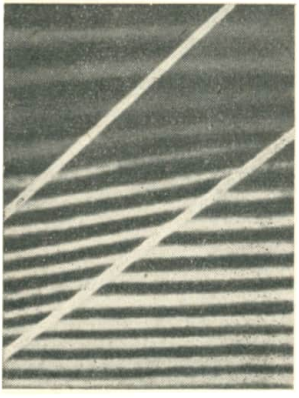


Bild 395. Brechung von Wasserwellen über einer seichten Stelle

Bei der Anwendung des Brechungsgesetzes auf Schallwellen ist es dagegen üblich, die hier abgeleitete Fassung (268) zu benutzen. Beispielsweise stellt man bei geophysikalischen Messungen die Lage unterirdischer Gesteinsschichten durch Totalreflexion von Schallwellen fest. Auf Bild 396 ist angedeutet, wie die durch Explosion einer Sprengladung erzeugten Wellen zuerst eine lockere Bodenschicht mit geringer Geschwindigkeit durchlaufen und dann auf eine Gesteinsschicht treffen, in der ihre Geschwindigkeit erheblich größer ist. Nach dem Brechungsgesetz entspricht der Weg der Schallstrahlen im allgemeinen dem links skizzierten Fall. Wegen $c_2 > c_1$ ist der Grenzwinkel der Totalreflexion mit $\sin \alpha_{gr} = \frac{c_1}{c_2}$ gegeben (Skizze b). Aus der Differenz der Laufzeiten des direkten und indirekten Schalls läßt sich die Tiefe der Schicht berechnen.

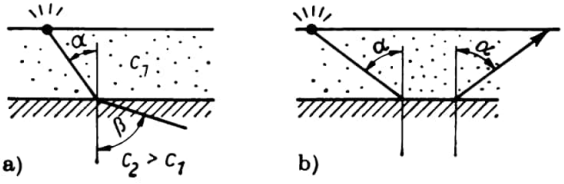


Bild 396. Brechung und Totalreflexion von Schallwellen im Erdinnern

30.4. Interferenz von Wellen

Wie man bei Versuchen mit Wasser- und Schallwellen unmittelbar sehen kann, stellt das HUYGENSsche Prinzip eine vollkommen der Wirklichkeit entsprechende Beschreibung derartiger Wellenvorgänge dar. Wenn zwar dieses Prinzip auch auf Lichtwellen anwendbar ist, so ist dies noch kein Beweis dafür, daß es sich hier ebenfalls um Wellen handeln muß. Der Beweis für die Wellennatur des Lichtes ergibt sich vielmehr erst aus Erscheinungen, die mit der **Überlagerung** von Wellen zusammenhängen. Man nennt sie **Interferenzerscheinungen.**

Der Grundvorgang, der wiederum bei allen Arten von Wellen vorkommen kann, ist der folgende:
Breiten sich von einem Erregungszentrum zwei Wellen zugleich aus, so wird ein Teilchen des Mediums von zwei Bewegungen gleichzeitig erfaßt. Die resultierende Auslenkung ist gleich der Summe der beiden einzelnen. Man nennt diesen Vorgang der *Überlagerung von Wellen* **Interferenz.**
Zeichnerisch kann man zwei sich überlagernde Wellen in der gleichen Weise zu einer resultierenden Welle zusammenfassen, wie dies bei der Überlagerung von Schwingungen beschrieben wurde.
Von den vielen möglichen Fällen sei zunächst derjenige herausgegriffen, in dem zwei ebene Wellen von gleicher Amplitude und Wellenlänge in der gleichen Strahlrichtung laufen. Sie unterscheiden sich dann lediglich um den Phasenwinkel φ, um den die eine Welle der anderen ständig voraus- oder nacheilt. Die beiden Wellen sind damit um eine konstant bleibende **Phasendifferenz** gegeneinander **verschoben.**

In der Wellengleichung (217)

$$y = y_{max} \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)$$

ist der Phasenwinkel für den Ort x_1 durch den Ausdruck

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{x_1}{\lambda}$$

gegeben.
Zur weiteren Vereinfachung betrachten wir nun lediglich die beiden Fälle, in denen diese Verschiebung gerade eine ganze bzw. eine halbe Wellenlänge beträgt. Bild 397 gibt dies in einer Zeichnung wieder, und man erkennt sofort, daß die Amplitude der resultierenden Welle im ersten Fall den doppelten Betrag einer Einzelwelle hat und im zweiten Fall gleich Null wird.

Bei der Interferenz zweier Wellenzüge gleicher Amplitude und Wellenlänge ergibt sich

(269) $$\frac{\textbf{Verstärkung}}{\textbf{Auslöschung}} \textbf{ bei einem Phasenunterschied von } \frac{0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \cdots}{\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \cdots}$$

Im ersten Fall, für den die Verschiebung gerade eine ganze Wellenlänge λ beträgt, ist der Phasenwinkel der zweiten Welle am gleichen Ort x_1

$$\varphi_2 = 2\pi \frac{x_1 + \lambda}{\lambda} = 2\pi \frac{x_1}{\lambda} + 2\pi .$$

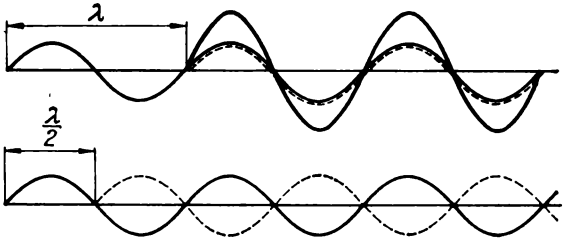


Bild 397. Oben: Verstärkung
Unten: Auslöschung durch Interferenz

Dann ist die resultierende Auslenkung zur Zeit t und am Ort x_1 nach Gleichung (217)

$$y = y_1 + y_2 = y_{max}\left[\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda} - 2\pi\right)\right].$$

Der zweite Summand in der eckigen Klammer läßt sich mittels Additionstheorems umformen in

$$\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)\cos 2\pi - \cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)\sin 2\pi .$$

Da $\cos 2\pi = 1$ und $\sin 2\pi = 0$ ist, ergibt sich die resultierende Auslenkung

$$y = 2y_{max}\left[\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)\right] \quad \text{oder kürzer}$$

$$y = 2y_1 ,$$

womit der erste Teil des vorhin aufgestellten Satzes auch mathematisch bewiesen ist. Einer der ersten, die das Gesetz der Interferenz auf die Wellentheorie des Lichtes anwandten, war der Franzose FRESNEL (1788···1827). Ihm gelang es, das HUYGENSsche Prinzip entscheidend zu begründen. Sein Gedankengang war etwa folgender: Gegeben sei nach Bild 398 ein punktförmiges Wellenzentrum A, eine von ihm erzeugte Wellenfront 1 und ein in der Richtung AE vor ihr liegender Punkt J. Da von allen Punkten der Wellenfront gleichzeitig Elementarwellen ausgehen, müßte der Punkt J von allen aus den verschiedensten Richtungen kommenden Elementarwellen erreicht werden, und es wäre nicht zu verstehen, weshalb dann der Strahl AE trotzdem geradlinig über J läuft und auch seinen weiteren Weg von hier aus geradlinig fortsetzt bzw. weshalb Punkt J einer definierten Wellenfront angehört. Wählt man nach FRESNEL aber die Abstände der Punkte $B \cdots H$ gerade so groß, daß die Wegdifferenzen $(\overline{BJ}-\overline{CJ})$, $(\overline{CJ}-\overline{DJ})$, ... eine Wellenlänge λ betragen, so kann man zu jedem der Strahlen BJ, CJ, ... einen darauffolgenden Strahl $B'J$, $C'J$, ... finden, der ihm gegenüber einen Phasenunterschied von $\lambda/2$ hat und ihn zur Auslöschung bringt. Damit hebt sich die Wirkung aller nach J gelangenden Strahlen auf. Davon ausgenommen ist allein eine kleine Zone um Punkt E, womit die Strahlrichtung AEJ und die dazugehörige Wellenfront eindeutig festgelegt sind.

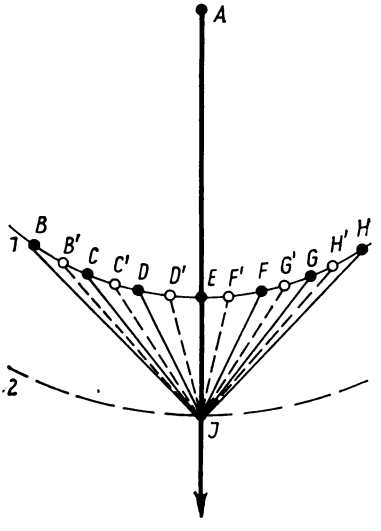


Bild 398. FRESNELsche Deutung des HUYGENSschen Prinzips

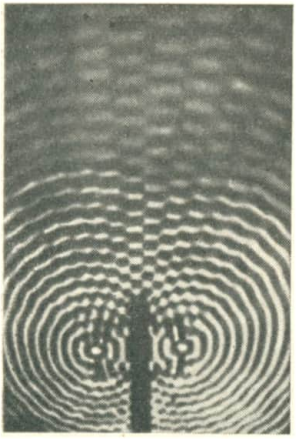


Bild 399. Interferenz zweier Systeme von Kreiswellen

Das HUYGENSsche Prinzip kann daher durch den wichtigen Zusatz ergänzt werden:

(270) **Huygens-Fresnelsches Prinzip:**
Die Ausbreitung einer Welle vollzieht sich unter gegenseitiger Interferenz der von den Wellenfronten ausgehenden Elementarwellen.

Um die Interferenz zweier nebeneinander erzeugter Kreiswellen zu zeigen, kann man wieder die Wellenwanne benutzen. Zwei punktförmige Erreger rufen 2 Kreiswellenzüge hervor (Bild 399). Beide Systeme interfericren miteinander, indem sich deutliche, schmale Streifen ausbilden, in denen das Wasser in Ruhe bleibt. Zwischen diesen Streifen, wo sich die Wellen gegenseitig auslöschen, liegen jeweils Gebiete mit verstärkter Amplitude. Die solchermaßen entstehenden **Interferenzstreifen** sind **Hyperbeln**; denn es sind die geometrischen Örter aller Punkte, deren Abstände von den beiden Zentren die gleiche Differenz $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$ usw. haben.

30.5. Stehende Wellen

Interferenz kann aber auch *längs eines einfachen Strahles* eintreten, wenn dieser nach der Reflexion auf *derselben* Bahn wieder zurückläuft. Dabei ist zu unterscheiden ob die **Dichte des Mediums** hinter der reflektierenden Grenzfläche **größer** oder **kleiner** als im Wellenfeld ist.

1. Reflexion am dünneren Medium

Bild 400 zeigt eine solche Welle in 4 verschiedenen Zeitpunkten. Nach der Reflexion läuft sie so zurück, wie sie jenseits der Grenzfläche weiterlaufen würde, d. h. *ohne* Phasenunterschied. Dies ist der Fall, wenn das angrenzende Medium *dünner* ist (s. S. 331). Hin- und zurücklaufende Welle ergeben die dick ausgezogene Resultierende Sie hat in jedem der 4 Augenblicke eine andere Phasenlage. Zeichnet man aber alle Resultierenden noch einmal zusammen (letzte Zeile), so sieht man ein *räumlich feststehendes* System von **Knoten** (Stellen der Ruhe) und **Bäuchen** (größte Auslenkung), das man eine **stehende Welle** nennt. Dies erscheint auf den ersten Blick deswegen überraschend, weil zwei rasch hin- und herlaufende Wellenzüge ein feststehendes Schwingungsbild ergeben. An der reflektierenden Grenzfläche liegt ein Schwingungsbauch. Der Abstand zweier Knoten beträgt eine halbe Wellenlänge.

2. Reflexion am dichteren Medium

Wenn das angrenzende Medium *dichter* ist, erfolgt bei der Reflexion ein Phasensprung von $\lambda/2$. In diesem Sinn läuft die reflektierte Welle zurück und bildet mit der hinlaufenden ebenfalls eine stehende Welle. An der Grenzfläche liegt dieses Mal ein Wellenknoten (Bild 401).

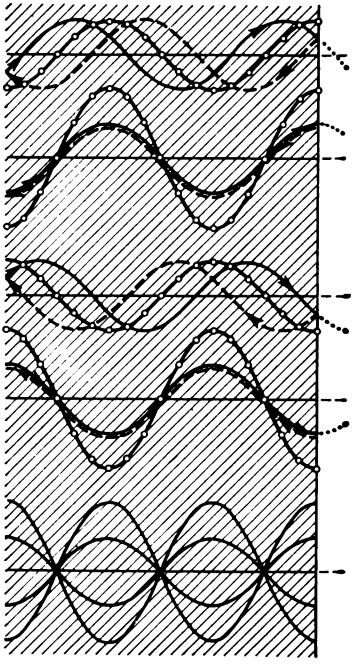


Bild 400. Entstehung einer stehenden Welle durch Reflexion am dünneren Medium. (Die reflektierte Welle kommt so zurück, wie die hinlaufende Welle im angrenzenden Medium weiterlaufen würde.)

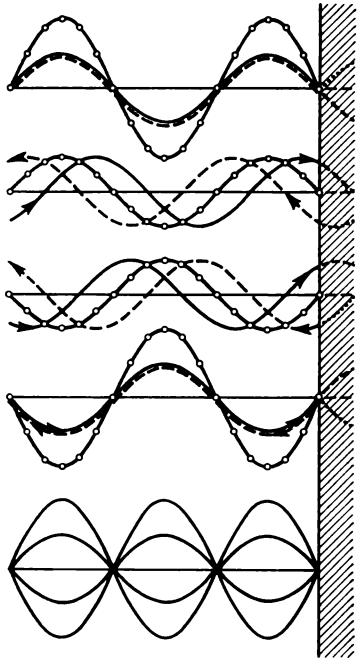
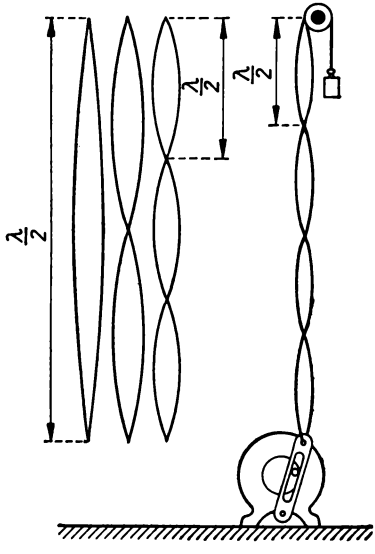


Bild 401. Entstehung einer stehenden Welle durch Reflexion am dichteren Medium. (Die reflektierte Welle läuft so zurück, wie die hinlaufende Welle nach Überspringen von $\lambda/2$ weiterlaufen würde.)



Man kann stehende Wellen sehr schön mit einem senkrecht ausgespannten Faden erzeugen, dessen unteres Ende von einem Schwinghebel rasch hin und her bewegt wird (Bild 402). Der Antrieb geschieht durch einen regelbaren kleinen Motor. Bei passender Frequenz bildet der weiße Faden vor der dunklen Wandtafel 2, 3 oder noch mehr weit ausladende Wellenbäuche.

Die Erzeugung stehender Wellen gelingt nur bei passender Frequenz. Die frei schwingende Länge des Seils kann nämlich nur **ganzzahlige Vielfache von halben Wellenlängen** aufnehmen, da am Anfang und Ende des Fadens ein Knoten liegen muß. Die Wellenlänge ist wiederum bestimmt von der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Faden (Seilwelle 22.4.) und der aufgeprägten Frequenz.

Bild 402. Stehende Seilwellen

31. Interferenz und Beugung des Lichtes

31.1. Voraussetzungen für Interferenzerscheinungen

Alle bisher behandelten Interferenzerscheinungen lassen sich auch beim Licht beobachten. Dies ist der beste Beweis dafür, daß sich das Licht wellenförmig ausbreiten muß. Das Zustandekommen von Interferenzen ist beim Licht jedoch an gewisse Voraussetzungen geknüpft, die nicht immer gegeben sind. Damit Interferenz eintritt, müssen sich nämlich zwei Wellenzüge von gleicher Frequenz so überlagern, daß ihre Schwingungsphasen stets die gleiche Differenz gegeneinander haben. Diese Voraussetzung ist z. B. bei dem auf Bild 399 dargestellten Versuch erfüllt, weil jede der beiden Wellen ein einziges, in sich zusammenhängendes System bildet. Man nennt es in diesem Fall **kohärent.**

Da das Licht eines strahlenden Körpers aber von *zahllosen* schwingenden *Atomen zugleich* erzeugt wird, kann von einer bestimmten Phasenlage innerhalb eines Strahles keine Rede sein. Die erwähnten Interferenzfälle sind daher bei der Überdeckung zweier *gewöhnlicher* Lichtbündel von vornherein unmöglich. Jeder einzelne Strahl hat gegenüber allen übrigen eine andere Phasenlage. Verstärkung und Auslöschung werden mit gleicher Häufigkeit auftreten und sich so im Gesamtdurchschnitt aufheben. Wohl ist jede dieser einzelnen Wellen in sich kohärent. Der Lichtstrahl als Ganzes aber stellt keine kohärente Welle dar, auch wenn alle Teilwellen die gleiche Frequenz haben.

Interferenzen mit gewöhnlichem Licht lassen sich aber durch einen Kunstgriff herbeiführen, wenn man den Verlauf eines einzelnen Lichtbündels z. B. durch doppelte Reflexion in *zwei Teile aufspaltet,* so daß nach der *Wiedervereinigung* beider eine *gegenseitige Phasenverschiebung* entsteht, die nun **sämtliche Teilwellen** gleicherweise betrifft. Die interferierenden Wellen sind dann *gleichen* Ursprungs und können als kohärent betrachtet werden.

> **Nur kohärente Lichtwellenzüge (Wellen, die gleichzeitig vom gleichen Punkt ausgehen) können miteinander interferieren.**

Ein historisch berühmtes Experiment dieser Art ist der **Fresnelsche Spiegelversuch** (Bild 403). Das von L kommende Licht wird von zwei Spiegeln reflektiert, die um einige Winkelminuten gegeneinander geneigt sind. Dadurch entstehen die beiden virtuellen Bilder L_1 und L_2 der Lichtquelle. Diese selbst wird dargestellt durch einen engen, von der Lampe beleuchteten Spalt S, der parallel zur Spiegelkante aufgestellt ist. In dem Raum, wo sich die beiden Strahlenbündel überdecken, kommt jede einzelne Teilwelle des im ganzen inkohärenten Lichtes zweimal, und zwar aus zwei verschiedenen Richtungen zur Wirkung und kann auf diese Weise mit ihrem anderen Spiegelbild interferieren. An allen Stellen, wo zwei Wellenberge (ausgezogene Kreisbögen) bzw. zwei Wellentäler (gestrichelte Kreisbögen) zusammentreffen, entsteht ein **Interferenzmaximum.** An der entsprechenden Stelle des Bildschirms P_1 herrscht Helligkeit. Wo aber je ein Wellenberg und ein Wellental sich durchkreuzen, entsteht ein **Minimum,** und auf dem Bildschirm herrscht dort (an den Stellen P_2 und P_3) Dunkelheit. Es entsteht ein System heller und dunkler **Interferenzstreifen.**

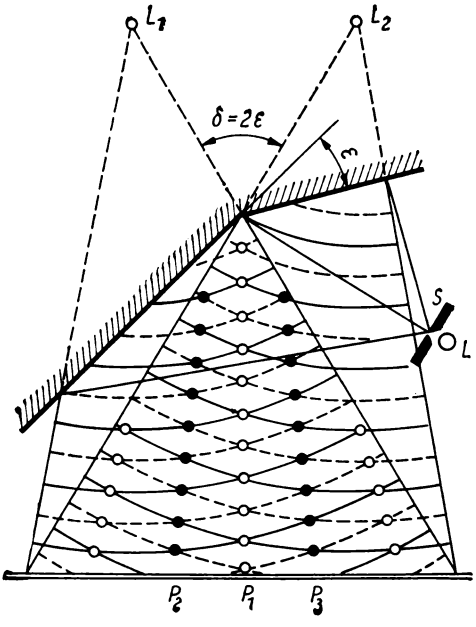


Bild 403. FRESNELscher Spiegelversuch

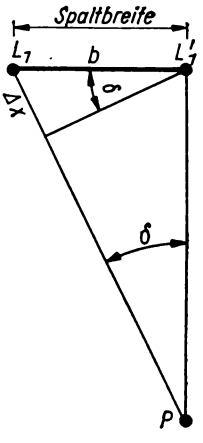


Bild 404. Zur Interferenzbedingung

Ob nun überhaupt Interferenz eintritt oder nicht, hängt aber noch von der Ausdehnung der Lichtquelle ab. Beim FRESNELschen Versuch ist sie durch die Breite des Spaltes S gegeben. Auf Bild 404 ist der Durchmesser seines Spiegelbildes durch die Strecke $L_1L_1' = b$ angedeutet. Die nach einem beliebigen Punkt P gelangenden Strahlen rühren also jetzt nicht von einem einzigen Punkt L_1 her, sondern z. B. auch von dem anderen Endpunkt L_1'.

Denkt man sich den Abstand L_1L_1' so groß, daß die Wegdifferenz $(\overline{L_1P} - \overline{L_1'P}) = \Delta x$ gerade eine halbe Wellenlänge beträgt, so löschen sich die Strahlen L_1P und $L_1'P$ aus. Zwischen Δx, den Strahlen L_1P und $L_1'P$ sowie dem eingeschlossenen Winkel besteht dann bei kleinem Abstand L_1L_1' die Beziehung

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = b \sin \delta \quad \text{oder}$$

$$2b \sin \delta = \lambda .$$

Für die zwischen L_1 und L_1' liegenden Punkte ist der Wegunterschied nach P natürlich kleiner als $\lambda/2$. Alle auf Bild 403 hervorgehobenen Punkte haben dann in bezug auf die Spiegelbilder L_1 und L_2 keine eindeutig festliegenden Phasenlagen mehr, sondern die Wegdifferenzen haben alle möglichen, zwischen 0 und $\lambda/2$ liegenden Werte. Die erwarteten Maxima und Minima werden um so verwaschener, je größer die Spaltbreite L_1L_1' bzw. der Winkel δ sind. Vielmehr darf der Winkel δ, unter dem zwei Strahlen nach P gelangen, bei weitem nicht so groß sein, daß die auf Bild 404 angegebene

Wegdifferenz Δx den Betrag von $\lambda/2$ erreichen kann. Es muß deshalb $\sin \delta < \frac{\lambda/2}{b}$ sein. Damit wird

$$2b \sin \delta < \lambda \tag{271}$$

Interferenzbedingung bei ausgedehnten Lichtquellen

Sie besagt:

Je größer der Durchmesser der Lichtquelle ist, desto kleiner muß der Winkel sein, den der Beobachtungsort mit den Spiegelbildern bildet.

Beispiel: Die beiden Spiegel beim FRESNELschen Versuch stoßen unter einem Winkel ε zusammen, der um 5′ von 180° abweicht. Dann bildet die Spiegelkante mit den beiden Spiegelbildern den Winkel $\delta = 2\varepsilon = 10'$. Diesen Wert kann man wegen der Kleinheit von δ auch für alle übrigen Punkte des Interferenzfeldes annehmen. Zufolge der Interferenzbedingung (271) ergibt sich für die Spaltbreite

$$b < \frac{\lambda}{2 \sin \delta}.$$

Bei Verwendung gelben Natriumlichtes ($\lambda \approx 600$ nm) und mit $\sin 10' = 0{,}0029$ erhält man

$$b < \frac{600 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 0{,}0029} = 0{,}1\,\mathrm{mm}.$$

Will man einen breiteren Spalt verwenden, so muß dafür der Winkel ε noch kleiner gemacht werden.

31.2. Interferenzen gleicher Neigung

Viel einfacher als mit dem FRESNELschen Spiegel lassen sich Interferenzen an dünnen Schichten beobachten. Besonders leicht ausführbar ist der folgende Versuch. Unmittelbar vor die Öffnung im Gehäuse einer Natrium- oder Quecksilberdampflampe hält man ein mehrere Zentimeter großes, etwa 0,05···0,1 mm dünnes Glimmerblättchen, so daß das reflektierte Licht auf eine Projektionswand fallen kann. Wird die Lampe nach der Wand hin abgeschirmt, so sieht man dort ein ausgedehntes System konzentrischer, heller und dunkler **Interferenzringe.**

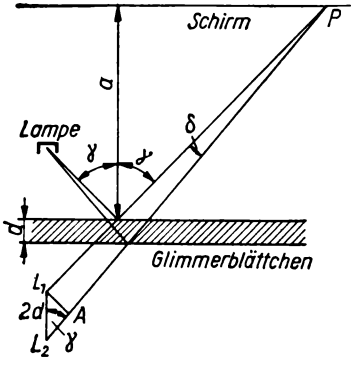


Bild 405. Interferenz durch Reflexion am Glimmerblättchen

Auf Bild 405 ist der Verlauf eines engen Strahlenbündels angegeben. Es wird sowohl an der Oberals auch an der Unterseite des Glimmerblättchens reflektiert. Da die Schicht sehr dünn ist, liegen die virtuellen Spiegelbilder L_1 und L_2 dicht beieinander, so daß die Interferenzbedingung (271) bequem erfüllbar ist. Ruft der durch die Wegdifferenz entstehende Phasenunterschied der Strahlen im Punkt P des Bildschirms eine Interferenz hervor, so muß das gleiche auch an allen Orten der Fall sein,

die von der Lichtquelle gleich weit entfernt sind. Daher entstehen Kreisringe, von denen jeder durch einen bestimmten Reflexionswinkel γ definiert ist. Man nennt diese Ringe auch **Interferenzen gleicher Neigung.**
Zur Vereinfachung der Berechnung sei auf Bild 405 die Strahlenbrechung in der Platte selbst außer acht gelassen. Ferner sei ihr Abstand von der Lichtquelle gegenüber dem Schirmabstand a vernachlässigt und wegen der Kleinheit des Winkels $\delta = \sin\delta$ gesetzt. Dann ist $\overline{L_1L_2} = 2d$ und $\overline{L_1A} = 2d\sin\gamma = \frac{a\delta}{\cos\gamma}$. Hiernach ergibt sich für den Öffnungswinkel der beiden Strahlen $\overline{L_1P}$ und $\overline{L_2P}$

$$\delta \approx \sin\delta = \frac{2d\sin\gamma\cos\gamma}{a} = \frac{d\sin 2\gamma}{a}.$$

Nimmt man beispielsweise für den Schirmabstand $a = 1$ m, den Winkel $\gamma = 30°$ und die Blättchendicke $d = 0{,}01$ mm an, so errechnet sich hiermit $\sin\delta \approx 10^{-5}$.
Für die zulässige Ausdehnung der Lichtquelle gilt aber nach (271) die Interferenzbedingung

$$2b\sin\delta < \lambda,$$

und hieraus folgt mit dem angenommenen Wert für $\sin\delta$ und einer Wellenlänge von $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm

$$b < 25 \text{ mm}.$$

Die Öffnung im Lampengehäuse kann also einige Millimeter groß sein.

31.3. Farben dünner Blättchen

Noch dünnere Schichten zeigen im reflektierten Licht oft prachtvolle Farben. Ölflecke auf Straßenpfützen, die bunten Anlaßfarben des Stahls (z. B. blau und braun angelaufene Drehspäne), buntschillernde Seifenblasen sind nur einige Beispiele.
Die Beziehung zwischen der Blättchendicke d und der durch Interferenz ausgelöschten bzw. verstärkten Wellenlänge wird auch erkennbar, wenn man sich den Verlauf der reflektierten Wellen vorstellt, wie es auf den Bildern 406 und 407 angegeben ist.

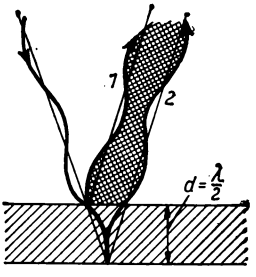


Bild 406. Auslöschung durch Interferenz am dünnen Blättchen

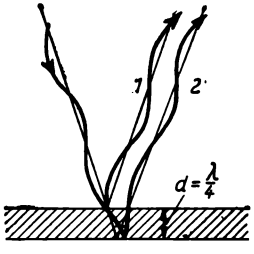


Bild 407. Verstärkung durch Interferenz am dünnen Blättchen

Teil 1 der Welle wird an der Oberseite reflektiert, während Teil 2 in die Platte eindringt, an der Unterseite reflektiert wird, um sich mit 1 wieder zu vereinigen. Teil 2 hat demnach einen Umweg von der doppelten Plattendicke d gemacht und hat bei dem Brechungsindex n einen entsprechenden **Gangunterschied** im Betrag von $\Delta s = 2nd$ gegenüber Teil 1. Nun tritt aber an der Oberseite nach (266) ein Phasensprung von $\frac{\lambda}{2}$ auf. Damit ist insgesamt

(272) $$\boxed{\Delta s = 2nd - \frac{\lambda}{2}}$$ **Gangunterschied Δs im dünnen Blättchen bei senkrechtem Einfall**

Welche Wellenlängen ausgelöscht werden, ergibt sich, wenn man Δs der Reihe nach (269) mit $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \ldots$ gleichsetzt. Man erhält dabei (Bild 406)

(273) **Auslöschung** für $\lambda = 2nd, \frac{2nd}{2}, \frac{2nd}{3}$ usw.

Die verstärkten Wellenlängen bekommt man nach (269) durch Gleichsetzen von Δs mit $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$, wonach (Bild 407)

Verstärkung für $\lambda = 4nd, \frac{4nd}{3}, \frac{4nd}{5}$ usw.

eintritt.

Aus *weißem* Licht werden also die diesen Bedingungen genügenden Wellenlängen ausgelöscht bzw. verstärkt, so daß eine **Mischfarbe** entsteht. Bei größerer Blättchendicke löschen sich *sehr viele* Wellenlängen im sichtbaren Bereich zugleich aus, so daß die Farberscheinung (als Mischung *sehr vieler* Farben) *blasser* wird und bei *großer* Plattendicke *ganz verschwindet*: daher die Bezeichnung **Farben dünner Blättchen.** Bei *sehr dünnen* Blättchen sind ebenfalls *keine* Farben zu sehen, da für *keine* sichtbare Wellenlänge ein genügender Gangunterschied herauskommt.
Die Auslöschung bestimmter Wellenlängen wird u. a. an dem technisch interessanten Beispiel der **vergüteten Linsen** (T-Optik) ausgenutzt.
An der Linsenoberfläche aller optischen Geräte entstehen erhebliche Lichtverluste dadurch, daß ein Teil des auffallenden Lichtes *nach außen* reflektiert wird und dem Gerät verlorengeht (bei guten Objektiven bis zu 8 Oberflächen!). Die Linse wird mit einem *dünnen Überzug* von kleinerem Brechungsindex als Glas (z. B. aufgedampfte Fluoride) überzogen. Wie beim dünnen Blättchen gelangt das unmittelbar reflektierte Licht mit dem aus der Schicht zurückgeworfenen zur Interferenz. Die Reflexion dieser Wellenlänge wird völlig verhindert und die der benachbarten geschwächt. In diesem Fall findet aber die Reflexion an der Grenzfläche Schicht–Glas am *dichteren* Medium statt, so daß hier derselbe Phasensprung wie an der Oberfläche eintritt. Daher ergibt sich **Auslöschung,** wenn $\Delta s = \frac{\lambda}{2} = 2nd$ ist. Die Schichtdicke muß also $^1/_4$ derjenigen Wellenlänge betragen, deren Reflexion aufgehoben werden soll.

Versuch: Dauerhafte dünne Häute mit prächtigen Interferenzfarben erhält man, wenn man Zelluloidfilm in Amylazetat auflöst und einen Tropfen auf Wasser fallen läßt. Nach

Verdunsten des Lösungsmittels kann man die feste Haut mit einem untergetauchten Drahtring herausheben und aufbewahren. Blickt man unter verschiedenem Neigungswinkel auf ein solches Zelluloidhäutchen, so verschieben sich die Farben infolge Veränderung des Gangunterschiedes.

Beispiele: 1. Was geschieht bei Interferenz an einem Glasblättchen von 125 nm Dicke ($n = 1{,}5$)? – Setzt man $\lambda = 2nd$, so ist $\lambda = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 125$ nm $= 375$ nm (Violett). Verstärkt wird wegen $\lambda = 4nd$ die Welle $\lambda = 4 \cdot 1{,}5 \cdot 125$ nm $= 750$ nm (Rot).

2. Welche sichtbaren Wellenlängen löscht ein Blättchen von 600 nm ($n = 1{,}5$) aus? – Auf Grund von (273) setzt man der Reihe nach $2nd = \lambda$, $2nd = 2\lambda$, $2nd = 3\lambda$ usw., wobei sich die Wellenlängen ergeben: 1800, 900, 600, 450, 360, 300 nm usw. Aus dem sichtbaren Teil des Spektrums werden also 600 und 450 nm ausgelöscht.

31.4. Interferenzen gleicher Dicke

Interferenzerscheinungen können nicht nur in planparallelen dünnen Schichten, sondern auch bei veränderlicher Schichtdicke entstehen. Dann hängt der Gangunterschied der interferierenden Strahlen nicht nur vom Einfallswinkel, sondern auch von der örtlich vorhandenen Dicke d ab. Man spricht dann von **Interferenzen gleicher Dicke.**

Um den Einfluß des Einfallswinkels auszuschalten, werde der auf Bild 408 im Querschnitt angedeutete Keil mittels eines halbdurchlässigen Spiegels senkrecht von oben beleuchtet. Die ins Auge dringenden Strahlen haben einen Gangunterschied von

$$\Delta s = 2nd - \frac{\lambda}{2}.$$

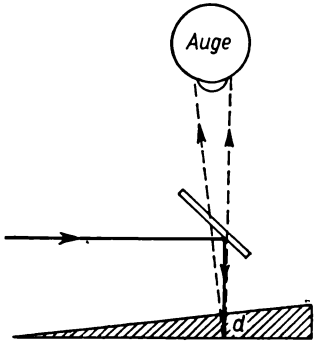


Bild 408. Interferenz am Keil

Da aber die Dicke d mit zunehmender Entfernung von der Keilkante zunimmt, sieht man bei monochromatischem Licht ein System heller und dunkler, parallel zu dieser Kante laufender Interferenzstreifen.

Anstelle eines Keils kann man auch eine Linse von sehr schwacher Krümmung verwenden, die man auf eine ebene Glasplatte legt. Die dadurch gebildete Luftschicht wirkt dann wie ein dünnes Blättchen, dessen Dicke nach außen hin zunimmt. Da an der Oberseite kein Phasensprung auftritt, wohl aber an der Unterseite, liegen im übrigen dieselben Verhältnisse vor wie beim dünnen Blättchen. Anstelle der parallelen Streifen beim Keil entsteht hier ein System heller und dunkler Ringe, die **Newtonschen Ringe** (Bild 409).

Aus dem Abstand dieser Ringe konnte erstmalig (Thomas Young, 1802) die Wellenlänge des Lichtes bestimmt werden. Auf Bild 410 ist der Linsenquerschnitt zu einem Kreis ergänzt. Die Dreiecke ABC und ABD sind einander ähnlich, so daß die Proportion gilt

$$d : a = \overline{AB} : \overline{BC}.$$

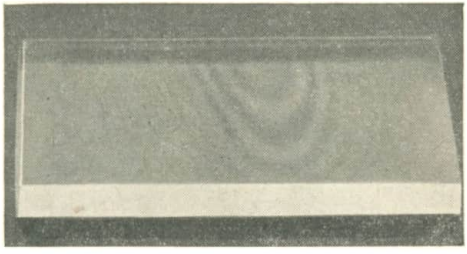


Bild 409. NEWTONsche Ringe; eine Spiegelglasplatte liegt nicht genau eben auf einer schwarzen Glasplatte

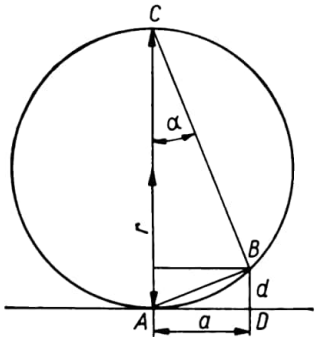


Bild 410. Zur Berechnung der Wellenlänge aus den NEWTONschen Ringen

Bei kleinem Winkel α ist $\overline{AB} \approx a$ und $\overline{BC} \approx 2r$. Die Dicke der Luftschicht ist daher

$$d = \frac{a^2}{2r}.$$

Für zwei aufeinanderfolgende Ringe, deren Radien a_1 und a_2 betragen, nimmt der Gangunterschied um eine ganze Wellenlänge zu. Dem entspricht mit $n = 1$ eine Dickenzunahme von $\lambda/2$. Aus $\frac{\lambda}{2} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{2r}$ erhält man die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{a_1^2 - a_2^2}{r}.$$

In der Feinmeßtechnik finden Interferenzmethoden breite Anwendung. Um z. B. die Planheit einer Meßfläche zu prüfen, legt man diese mit einem als eben vorausgesetzten **Probeglas** zusammen, so daß ein Luftkeil entsteht. Jede Abweichung der Interferenzstreifen von der Geradheit bedeutet eine Unebenheit der Meßfläche.
Die Grundanordnung vieler Längen- und Dickenmeßgeräte ist das **Michelson-Interferometer** (Bild 411). Das von L kommende Licht wird an der Teilungsplatte T teils nach der Fläche A_1 reflektiert, teils nach A_2 durchgelassen. Nach nochmaliger Reflexion an T vereinigen sich beide Teile oberhalb von T wieder und gelangen zur Interferenz. Wenn die beiden Wege l_1 und l_2 nicht genau gleich sind, entsteht ein Gangunterschied von $2nd$.
Ist dieser Wegunterschied $2nd = \lambda/2$, so löschen sich die Strahlen l_1 und l_2 nach Wiedervereinigung aus; im Gesichtsfeld entsteht Dunkelheit.
Im **Interferenzmikroskop** stellt man feinste Bearbeitungsfehler fest. Die dunklen, auf Bild 412 von links nach rechts verlaufenden Linien sind Interferenzstreifen, die bei vollkommener Oberfläche genau geradlinig wären. Die senkrecht dazu gerichteten zackenförmigen Auslenkungen sind Schleifspuren, deren Furchentiefe sich aus der Zackenhöhe ablesen läßt. Der Auslenkung um eine Streifenbreite entspricht eine Tiefe von $\lambda/2$ des verwendeten Lichtes.

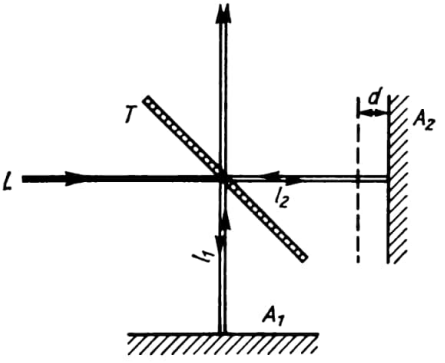


Bild 411. Prinzip des MICHELSON-Interferometers

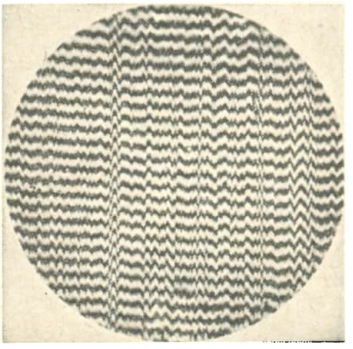


Bild 412. Schleifspuren im Interferenzmikroskop

31.5. Beugung von Wellen

Tritt ein Strahl mit ebener Wellenfront durch eine schmale Öffnung, so erwartet man im allgemeinen, daß er als entsprechend schmales paralleles Strahlenbündel weiterlaufe. Das folgt auch aus dem FRESNELschen Gedankengang, wonach alle nach dem HUYGENSschen Prinzip an sich möglichen Strahlrichtungen durch Interferenz verhindert werden und jeweils nur der Strahl übrigbleibt, der rechtwinklig zur primären Wellenfront gerichtet ist. An den *Rändern* der Öffnung aber kann diese Interferenz nur zum Teil eintreten. Es gibt dort eine schmale Zone, aus der Strahlen unter allen möglichen Richtungen austreten; denn hier können sich die nach dem HUYGENSschen Prinzip entstehenden Elementarwellen ungestört ausbreiten und eine scharfe Begrenzung des Bündels unmöglich machen. Je enger der Spalt im Vergleich zur Wellenlänge ist, desto mehr greifen die Randwellen über die Hauptrichtung hinaus. Ein Teil des Strahls wird seitlich **abgebeugt** (Bild 413). Mit zunehmendem Beugungswinkel nimmt aber die *Intensität* des auf diese Weise abgelenkten Strahlenanteils ab.

Die **Beugung** ist daher ein Effekt, der zwangsläufig mit allen Arten von Wellen verbunden ist. Nicht nur bei Wasserwellen, sondern auch beim Schall ist er deutlich nachweisbar. Beim Licht fällt er wegen dessen sehr kleiner Wellenlänge im allgemeinen weniger auf und wird nur bei besonderen Vorkehrungen beobachtbar.

Grundsätzlich wird das Licht immer gebeugt, wenn es an der Kante eines undurchsichtigen Gegenstandes vorbeiläuft. Bei Verwendung monochromatischen Lichtes entsteht kein scharfer Schatten, sondern ein verwischter Übergang, gefolgt von einer Anzahl immer schwächer werdender, feiner Streifen: ein Zeichen dafür, daß auch das Licht „um die Ecke" gehen kann.

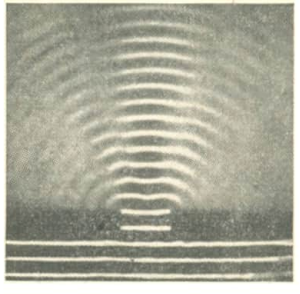


Bild 413. Beugung von Wasserwellen an einem einfachen Spalt

Versuche: 1. Man halte einen Bleistift in halber Armlänge vom Auge parallel zum eben noch sichtbaren Rand einer auf dem Tisch stehenden schmalen Kerzenflamme. Am Bleistift zeigt sich ein roter Lichtsaum. Daraus geht hervor, daß rotes Licht besonders stark gebeugt wird.

2. Man blicke durch den von zwei aneinandergelegten Bleistiften gebildeten feinen Spalt gegen eine entfernt stehende Kerzenflamme. Links und rechts von der Flamme sieht man in regelmäßigen Abständen regenbogenfarbige Lichtstreifen. Je enger man den Spalt macht, desto weiter rücken die Beugungsstreifen auseinander.

3. Dieselbe Erscheinung zeigt sich, wenn man ein straffgespanntes Haar vor das Auge hält und eine Kerzenflamme beobachtet.

31.5.1. Beugung am einfachen Spalt

Mittels einer Linse L_1 parallel gemachtes monochromatisches Licht (Bild 414) fällt durch einen Spalt der Breite d und eine zweite Linse L_2 auf einen Bildschirm S und erzeugt in der Brennebene ein helles scharfes Bild B des Spaltes. Infolge der Beugung läuft das Licht aber hinter dem Spalt seitlich nach allen möglichen Richtungen auseinander, so daß jeder Richtung ein entsprechend seitlich verschobenes Bild (B_1, B_1', B_2, B_2', ...) entspricht. Beiderseits der geraden Richtung bildet sich ein **System dunkler und heller Interferenzstreifen.**

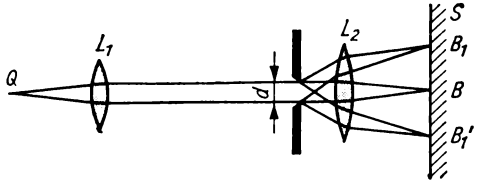


Bild 414. Anordnung zur Beugung nach FRAUNHOFER (Spaltbreite d stark übertrieben). Entfernung des Schirmes S stark verkürzt

Das in der Schirmmitte liegende direkte Bild B des Spaltes wird als **Maximum 0. Ordnung** bezeichnet. Ihm folgen beiderseits entsprechend den Spaltbildern B_1 und B_1' die **Maxima 1. Ordnung.** Weitere Maxima noch höherer Ordnung sind auf Bild 414 der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt. Die zwischen den Maxima liegenden dunklen Streifen werden **Interferenz-Minima** genannt.

Um die Lage dieser Maxima und Minima zu finden, ist in Bild 415 aus dem seitlich abgebeugten Licht ein Bündel herausgegriffen. Es ist unter dem Winkel α gegen die ursprüngliche Richtung geneigt. W ist dann eine Wellenfront dieses Bündels, und man sieht, daß z. B. der Randstrahl 1 gegenüber dem in der Bündelmitte laufenden Strahl 1' um ein Stück verschoben ist. Beträgt dieser Gangunterschied gerade eine halbe Wellenlänge, so *löschen* sich beide Strahlen nach (269) aus. Ebenso löscht sich Strahl 2 mit 2' aus. Dies in Gedanken fortgesetzt, ergibt, daß sich *alle* Strahlen der *unteren* Bündelhälfte mit denen der *oberen* auslöschen werden. Wo dieses Bündel von der abbildenden Linse auf den Schirm geworfen wird, herrscht also Dunkelheit. Aus den geometrischen Verhältnissen ersieht man:

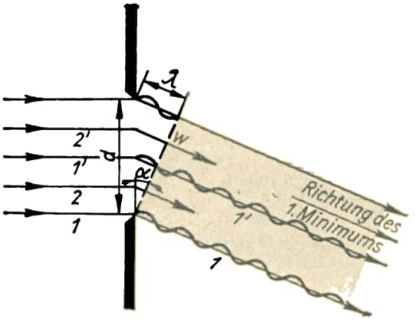


Bild 415. Beugung am einfachen Spalt: 1. Minimum

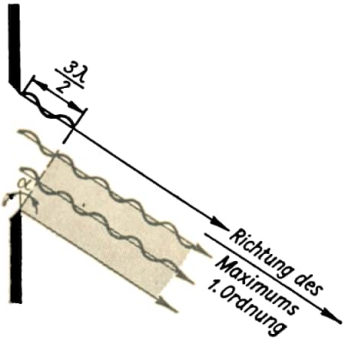


Bild 416. Beugung am einfachen Spalt: 1. Nebenmaximum

(274) $$\boxed{\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}}$$ **Bedingung des ersten Interferenzminimums beim einfachen Spalt** (FRAUNHOFERsche Beugung)

Wenn bei stärkerer Neigung des Bündels ein Gangunterschied von $\frac{3\lambda}{2}$ erreicht wird, läßt sich die vorige Betrachtung nur auf die *unteren beiden Drittel* des Bündels wieder anwenden (Bild 416). Innerhalb des oberen Drittels findet aber mangels genügender gegenseitiger Verschiebung *keine* Auslöschung statt. Es entsteht auf dem Schirm unter diesem Winkel (wenn auch *schwächer* als im Maximum 0. Ordnung) wieder Helligkeit. Für den Winkel α, unter dem das Maximum 1. Ordnung erscheint, gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{3\lambda}{2d}.$$

Mit zunehmendem Beugungswinkel tritt dann wieder Auslöschung ein, worauf abermals (und zwar noch schwächer als vorhin) das Maximum 2. Ordnung erscheint usw. Entsprechende Beugungserscheinungen treten übrigens ein, wenn man an Stelle des Spaltes einen *dünnen Draht* (oder eine Nadel) in den Gang eines parallelen Bündels hält. Statt eines einfachen dunklen Striches zeigt der Schatten ein System von Interferenzstreifen (Bild 417). Daß dabei in der Mitte des Schattens ein *Maximum* auftritt, läßt sich leicht erklären. Nach Bild 418 werden beide Ränder von Wellen erreicht, die in gleicher Phase schwingen. Dann überlagern sich die von hier ausgehenden abgebeugten Strahlen in der Schattenmitte so, daß wegen dieser Gleichphasigkeit stets ein Maximum entstehen muß. Aus dem gleichen Grunde erscheint in der Mitte einer kleinen schattenwerfenden Kreisscheibe immer ein heller Fleck.

Durchsetzt das parallele Licht eine **kreisförmige Öffnung** vom Durchmesser d, entsteht in entsprechender Weise ein System von hellen und dunklen Ringen. Für die **Mitte** des **ersten dunklen Ringes** gilt dann nach einer komplizierteren Rechnung

(275) $$\sin\alpha = \frac{1{,}22\,\lambda}{d}.$$

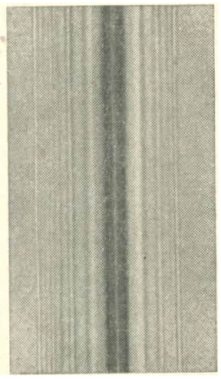


Bild 417. Interferenzstreifen am Schatten eines dünnen Drahtes

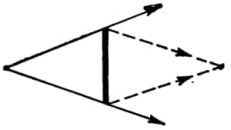


Bild 418. Interferenzmaximum in der Schattenmitte

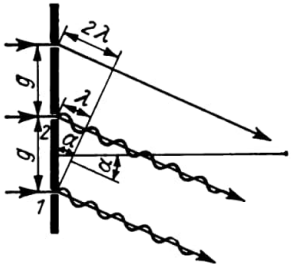


Bild 419. Beugung am doppelten Spalt: 1. Nebenmaximum

31.5.2. Beugungsgitter

Bedeutend lichtstärker werden diese Erscheinungen, wenn man *viele* im Abstand g liegende feine Spalte verwendet. Jedem Einzelstrahl des z. B. in den Spalt 1 (Bild 419) eintretenden Bündels entspricht ein entsprechend gleichliegender in einem anderen Spalt 2.
Wenn der Gangunterschied gleich einem ganzzahligen Vielfachen von λ ist, tritt Verstärkung ein, was zugleich für sämtliche paarweise zugeordneten Teilstrahlen dieser beiden Bündel zutrifft.

(276) $$\boxed{\sin\alpha = \frac{z\lambda}{g}} \quad (z = 0, 1, 2, \cdots)$$ **Bedingung der Interferenzmaxima beim Beugungsgitter**

Hiernach kann man bei *bekanntem* **Spaltabstand (Gitterkonstante)** die Wellenlänge bequem berechnen oder bei bekannter Wellenlänge die Gitterkonstante bestimmen.
Beugungsgitter werden hergestellt, indem man mit einer Teilmaschine zahlreiche *dichtfolgende* Striche in eine Glasplatte ritzt **(Norbertsches Gitter).** Die stehenbleibenden Zwischenräume wirken dann als Spalte. Der Strichabstand ist dann die **Gitterkonstante g.** Die Herstellung guter Gitter ist sehr kostspielig. Ein einmal angefertigtes Exemplar läßt sich aber für einfache Zwecke fotografisch vervielfältigen. Reflexionsgitter **(Rowland-Gitter)** bestehen aus feinen Strichen auf Metall (bis zu 1700 Striche je mm).
Aus Gleichung (276) ist weiterhin abzulesen, daß die Maxima langwelligen (z. B. roten) Lichtes weiter von der Schirmmitte entfernt liegen als diejenigen kurzwelligen (z. B. violetten) Lichtes.

Langwelliges Licht wird stärker gebeugt als kurzwelliges.

Bei Verwendung von weißem Licht (Sonnenlicht, Glühlampen) entstehen daher statt der einfachen Spaltbilder **Beugungsspektren.** Die lichtstärksten Spektren 1. Ordnung

entsprechen den beiden Maxima 1. Ordnung. Die Spektren höherer Ordnung werden jedoch zunehmend lichtschwächer, breiter und überdecken sich schließlich gegenseitig.

Das *Auflösungsvermögen*, d. h. die Fähigkeit, sehr eng beieinanderliegende Spektrallinien zu trennen, ist bei jedem Gitter wesentlich *größer* als bei Prismen. Ein Gitter von 100000 Strichen ermöglicht (im Bereich von 600 nm), noch Wellenlängenunterschiede von 0,002 nm festzustellen. Ein weiterer Vorteil der Beugungsspektren ist, daß der Abstand der einzelnen Spektrallinien *nur* vom Intervall der betreffenden Wellenlängen abhängt, *nicht* aber von der Substanz des Gitters. Sie heißen daher **Normalspektren** (s. Farbentafel, Bild 2).

Beispiel: Wieviel Maxima kann ein Gitter mit 500 Spalten je Millimeter bei der Wellenlänge 600 nm im Höchstfall erzeugen? – In der Interferenzbedingung (276) kann $\sin \alpha$ höchstens den Wert 1 annehmen. Es ist daher

$$z = \frac{g}{\lambda} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}}{500 \cdot 600 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3{,}3;$$

da z nur eine ganze Zahl sein kann, treten beiderseits der Schirmmitte nur je 3 Maxima auf.

31.5.3. Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Wir erwarten von einem guten optischen System, daß es von *jedem* Punkt des Gegenstandes *genau einen* Bildpunkt entwirft. Diese Forderung vermag aber auch das bestkorrigierte Linsensystem *nicht* zu erfüllen, weil das Licht *an jeder* Öffnung gebeugt wird. Kreisförmige Öffnungen geben ein System von Beugungsringen, deren erstes Minimum nach (275) im Winkelabstand $\sin \delta = 1{,}22 \frac{\lambda}{d}$ liegt. Je *kleiner* die Öffnung, desto *breiter* werden die Beugungsringe. Zwei benachbarte Punkte des Gegenstandes geben daher bei einer Lochkamera zwei sich teilweise überdeckende Ringsysteme.

Ist der Winkel δ zu klein, dann verschmelzen die beiden zentralen hellen Maxima zu einem einzigen Fleck und werden als nur *ein* Punkt gedeutet. Erst wenn die Scheibchen weiter auseinanderrücken und das 1. Minimum des einen in das Zentrum des anderen fällt, beginnen beiderseits zwei getrennte helle Flecke zu erscheinen (Bild 420). Das Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes ist um so besser, je

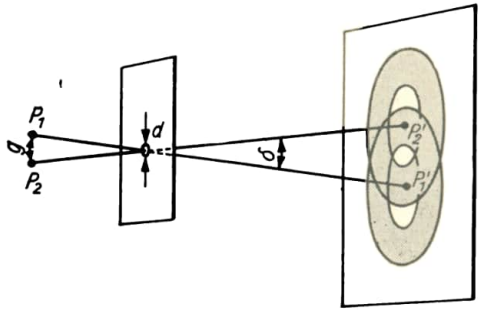


Bild 420. Beugungsscheiben zweier Bildpunkte

kleiner der Winkelabstand δ zweier Punkte ist, die gerade noch getrennt abgebildet werden. Es ist also im günstigsten Fall

(277) $$\boxed{\sin\delta = \frac{1{,}22\lambda}{d}}$$ **kleinster Winkelabstand δ zweier noch getrennt abbildbarer Punkte**

(λ Wellenlänge, d Durchmesser der wirksamen Öffnung)

Die Anwesenheit von Linsen ändert nichts daran; sie können die Beugung nicht verhindern. Diese entsteht dadurch, daß das Instrument *überhaupt* eine Öffnung hat.

Beispiele: 1. Berechne den kleinsten auflösenden Sehwinkel des Auges bei einem Durchmesser der Pupille von 3 mm und einer mittleren Wellenlänge von 600 nm. – Nach (275) ist

$$\sin\delta = \frac{1{,}22\lambda}{d} = \frac{1{,}22 \cdot 6 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}}{3\,\text{mm}} = 0{,}00024;$$

da der Winkel sehr klein ist, kann sin δ gleich dem im Bogenmaß gezählten Winkel δ gesetzt werden. Die Umrechnung in Gradmaß ergibt

$$\delta = \frac{0{,}00024 \cdot 360 \cdot 3600''}{2\pi} = 50'' \approx 1'\,(\text{s. S. 322}).$$

2. Kann man mit dem größten Fernrohr der Welt (5 m Spiegeldurchmesser) Fixsterne vergrößern (Durchmesser kleiner als 0,01″)? – Das Auflösungsvermögen berechnet sich nach dem letzten Beispiel zu

$$\sin\delta = \frac{1{,}22\lambda}{d} = \frac{1{,}22 \cdot 6 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}}{5000\,\text{mm}} = 1{,}46 \cdot 10^{-7} \text{ und } \delta = 0{,}03''.$$

Der Spiegel ist demnach noch viel zu klein, selbst ein aus wenigen Punkten bestehendes Fixsternbild zu entwerfen.

3. Welchen Abstand müssen zwei in 100 m Entfernung aufgestellte Stäbe haben, damit sie noch getrennt gesehen werden? – Da der Sinus des kleinsten Sehwinkels nach dem ersten Beispiel gleich 0,000 24 ist, ist der Abstand 100 m · 0,000 24 = 2,4 cm.

Bei der Beurteilung eines Mikroskopobjektivs interessiert vor allem zu wissen, welchen **linearen Abstand g** zwei benachbarte Punkte des betrachteten Gegenstandes *wenigstens* haben müssen, um noch getrennt gesehen zu werden. Zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 des zu vergrößernden Objektes kann man nach Abbe[1]) als die benachbarten Spalte eines Strichgitters der Konstanten g auffassen (Bild 421). Damit sie vom Objektiv noch getrennt abgebildet werden, müssen die seitlich abgebeugten Strahlenbündel 1′ 2′ bzw. 1″ 2″, die die Maxima 1. Ordnung bestimmen, noch in die Frontlinse eintreten, wobei sie mit der optischen Achse den Winkel α einschließen.

[1]) Die Theorie des Auflösungsvermögens wurde von Ernst Abbe (1840 bis 1905), dem wissenschaftlichen Mitbegründer der Jenaer Zeisswerke, aufgestellt. Er schuf zahlreiche optische Systeme und Instrumente von damals noch unerreichter Leistung

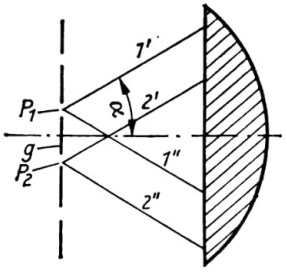


Bild 421. Zum Auflösungsvermögen des Mikroskops

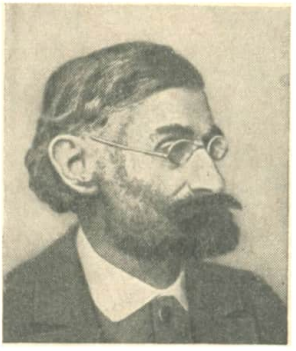


Bild 422. Ernst Abbe (1840 bis 1905)

Für diesen Winkel gilt nach (276) $\sin\alpha = \frac{\lambda}{g}$, so daß $g = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$ ist. Wenn der Winkel α zu groß bzw. die Linsenöffnung zu klein ist, wird nur das Maximum 0. Ordnung erfaßt, und im Gesichtsfeld ist keine Struktur mehr erkennbar. Bei schiefer Beleuchtung kann g noch kleiner sein, nämlich $g = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}$. Da die Wellenlänge des Lichtes im brechenden Medium der Immersionsflüssigkeit n-mal kleiner ist, ergibt sich schließlich

(278) $$\boxed{g = \frac{\lambda}{2n\sin\alpha}}$$ **kleinster, von einem Mikroskop auflösbarer Punktabstand g**

Im Nenner dieses Bruches steht die sogenannte

$$\boxed{\text{numerische Apertur des Objektivs} = n\sin\alpha}.$$

(α halber Öffnungswinkel des Objektivs)

Man ersieht hieraus folgendes:

1. Das Auflösungsvermögen wird größer, wenn die Wellenlänge des angewandten Lichtes recht kurz ist (Verwendung ultravioletten Lichtes mit Quarzoptik).

2. Der Öffnungswinkel des Objektivs und damit die numerische Apertur muß möglichst groß sein.

3. Der Brechungsindex n vergrößert ebenfalls die numerische Apertur. Daher füllt man den Raum zwischen Deckglas und Objektiv mit Zedernöl ($n = 1{,}515$) aus.

Die numerische Apertur eines Objektivs kann in Luft ($n = 1$) höchstens gleich 1 werden. Dann wäre der halbe Öffnungswinkel 90°, und das Licht müßte streifend in die Frontlinse eintreten. Praktisch erreichbar ist jedoch nur ein Winkel von etwa 72°, so daß wegen $\sin 72°$ die höchsterreichbare Apertur eines Trockensystems 0,95 beträgt.

Dem entspricht bei Ölimmersionen eine größtmögliche Apertur von $1{,}5 \cdot 0{,}95 = 1{,}40$. Bei Zugrundelegung der in Luft maximal möglichen numerischen Apertur von 1 ergibt sich (aus 278) $g = \frac{\lambda}{2}$:

Maximales Auflösungsvermögen = $^1/_2$ Wellenlänge des verwendeten Lichtes.

Kleinere Punktabstände können daher mit gewöhnlichem Licht nicht mehr getrennt werden. Stärkere Vergrößerungen als etwa 2000fach haben beim Lichtmikroskop keinen besonderen Wert, da dann keine weiteren Einzelheiten des Objektes mehr zutage treten können.

32. Polarisation des Lichtes

Die Interferenz- und Beugungserscheinungen haben darauf geführt, daß das Licht ein Wellenvorgang sein muß. Welche Schwingungs*richtungen* hierbei eine Rolle spielen, zeigen die im folgenden beschriebenen Erscheinungen der **Polarisation.** Eine elektromagnetische Welle wird gewöhnlich symbolisch als eine in der Papierebene liegende Sinuskurve dargestellt. In dieser Ebene schwingt der Vektor der **elektrischen Feldstärke** $\mathfrak{E}$ (kurz **Schwingebene** genannt.) Dazu *senkrecht* liegt die Ebene, in der die **magnetische Feldstärke** $\mathfrak{H}$ schwingt (genannt **Polarisationsebene**), die man aber bei optischen Vorgängen nicht weiter beachtet (Bild 423). Gewöhnliches Licht wird aber, wie schon bei der Betrachtung der Interferenz vorausgeschickt wurde, von zahllosen *ungeordnet* schwingenden Atomen zugleich erzeugt (Bild 424):

Natürliches Licht enthält Schwingebenen jeder nur möglichen Richtung.

Mittels geeigneter Vorrichtungen ist es jedoch möglich, Licht mit nur *einer* Schwingrichtung zu erzeugen. Diesen Vorgang nennt man **Polarisation:**

Polarisiertes Licht hat nur eine Schwingebene.

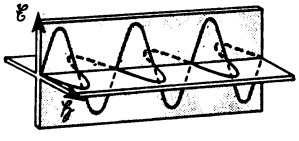


Bild 423. Modellmäßige Darstellung einer einfachen Lichtwelle

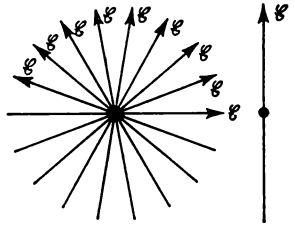


Bild 424. Gewöhnlicher, unpolarisierter Lichtstrahl, von vorn gesehen. Daneben polarisierter Lichtstrahl

32.1. Polarisation durch Reflexion und Brechung

Fällt Licht unter einem Winkel von etwa 56° auf eine schwarze Glasplatte, so findet man im reflektierten Strahl nur Licht, das senkrecht zur Einfallsebene schwingt. (Die Einfallsebene wird durch Einfallslot und Strahl bestimmt, Bild 425.) Das unter diesem **Polarisationswinkel** φ reflektierte Licht ist daher **linear polarisiert.**

Bei beliebigem Einfallswinkel wird Licht nur teilweise polarisiert.

Allgemein gilt

(279) $\boxed{\tan \varphi = n}$ **Polarisationswinkel** φ (BREWSTERsches Gesetz)

Begründung (Bild 426): Im Fall der Polarisation stehen gebrochener und reflektierter Strahl *senkrecht* aufeinander.

Daher $\sin \varphi = n \sin \beta = n \sin (90° - \varphi) = n \cos \varphi$.

Der in das Glas eintretende und dabei gebrochene Anteil bevorzugt die *Einfallsebene* als Schwingebene. Er ist stets nur teilweise polarisiert. Beim **Plattensatzpolarisator** (Bild 427) polarisiert jede folgende Platte *einen* Teil des von den vorhergehenden Platten noch nicht ausgerichteten Lichtes, bis nahezu *alles* austretende Licht in der Einfallsebene schwingt.

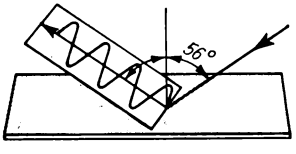


Bild 425. Polarisation durch Reflexion

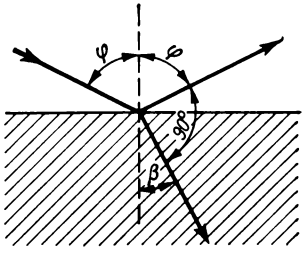


Bild 426. Reflektierter und gebrochener Strahl im Fall der Polarisation

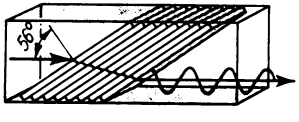


Bild 427. Plattensatzpolarisator

32.2. Polarisation durch Doppelbrechung

Die Lichtbrechung hatten wir damit begründet, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit in optisch *dichteren* Medien *kleiner* sei als im Vakuum. Als selbstverständlich setzten wir dabei voraus, daß sich das Licht im Medium nach *jeder Richtung* mit der *gleichen* Geschwindigkeit ausbreite.

Das ist aber nur in den sogenannten **optisch isotropen Medien** der Fall. Hierzu gehören die Gläser und Flüssigkeiten sowie bestimmte (die regulären) Kristalle (z. B. Steinsalz). Es gibt aber eine Gruppe von Kristallen, bei denen dies nicht zutrifft

(**anisotrope Körper,** z. B. Kalkspat). Sie haben die Eigenschaft, eintretendes Licht in *zwei* aufeinander senkrecht (linear) polarisierte Strahlen aufzuspalten, die man den **ordentlichen (o.)** und **außerordentlichen (a. o.)** Strahl nennt (Bild 428).
Der ordentliche Strahl gehorcht dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz, seine Geschwindigkeit im Kristall ist wie in einem isotropen Medium von der Richtung unabhängig. Der außerordentliche Strahl gehorcht diesem Gesetz nicht. Trotz senkrechten Einfalls wird er von der geraden Richtung abgelenkt. Seine Geschwindigkeit und damit sein Brechungsindex hängen vom Einfallswinkel ab. Nur längs der sogenannten *optischen Achse* ist die Geschwindigkeit beider Strahlen gleich groß.

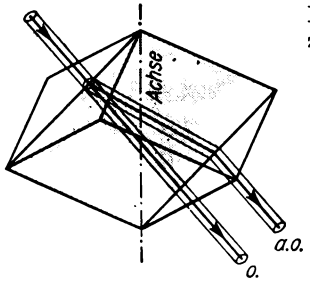


Bild 428. Kalkspat-Rhomboeder mit senkrecht zur Fläche einfallendem Strahl

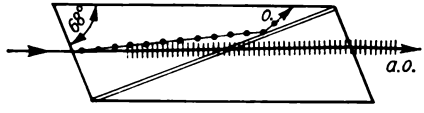


Bild 429. NICOLSches Prisma

Beim **Nicolschen Prisma** sind zwei zurechtgeschliffene *Kalkspat*stücke mit *Kanadabalsam* ($n = 1{,}54$) zusammengekittet (Bild 429). Da im Kalkspat der Brechungsindex des o. Strahls 1,66 beträgt, wird er wegen des großen Einfallswinkels von der Balsamschicht total reflektiert und aus dem Strahlengang entfernt. Der a. o. Strahl ($n = 1{,}49$) durchsetzt den Kristall ungestört und kann verwendet werden. Auch mit einer **Turmalinplatte** läßt sich polarisiertes Licht herstellen. Der o. Strahl wird beim Durchgang durch den (meist olivgrün) gefärbten Kristall absorbiert. Für technische Zwecke verwendet man heute meist **Polarisationsfilter.** Sie enthalten zwischen 2 Glasscheiben eine mit Jod präparierte, stark gestreckte Kunststoffolie (z. B. Polyvinylalkohol).
Bei der Herstellung polarisierten Lichtes mit den genannten Einrichtungen und auch mittels Polarisationsfiltern muß man jedoch *Lichtverluste* in Kauf nehmen, die (ungerechnet die sonstigen Verluste) 50 % des einfallenden Lichtes ausmachen. Denn die Polarisation beruht darauf, daß die Amplitude eines unter beliebigem Winkel schwingenden $\mathfrak{E}$-Vektors in zwei rechtwinklig zueinander liegende Komponenten zerlegt wird, von denen die eine optisch genutzt, während die andere durch Absorption oder Reflexion aus dem direkten Strahlengang entfernt wird. Der Mittelwert aller auf diese Weise erhaltenen (z. B. senkrecht gerichteten) Amplituden beträgt 50 % der ursprünglichen.
Ein **Polarisationsapparat** enthält stets zwei Teile: eine Vorrichtung (etwa ein NICOLsches Prisma) zur Erzeugung polarisierten Lichtes, den **Polarisator,** und eine zweite gleichartige, den **Analysator.** Liegt dessen Schwingebene *parallel* zu derjenigen des vom Polarisator gelieferten Lichtes, so kann dieses ungehindert passieren. Dem Licht wird aber der Weg *versperrt*, wenn die Schwingebene des Analysators um 90° gegen die des polarisierten Strahls verdreht ist. Blickt man also in den Analysator und

dreht ihn einmal um seine Längsachse, so sieht man unter allmählichem Übergang zweimal volle *Aufhellung* und zweimal völlige *Dunkelheit*.

Eine Reihe von Stoffen hat die Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen. So ist z. B. eine Lösung von Rohrzucker **optisch aktiv.** Bringt man die Lösung *zwischen* die beiden anfänglich gekreuzten Nicols (Dunkelheit!), so hellt sich das Gesichtsfeld auf. Es bedarf erst einer weiteren Drehung des Analysators, um wieder Dunkelheit zu erreichen. Der Drehwinkel ist der Konzentration der Lösung und der Länge der Flüssigkeitssäule proportional (Zuckerbestimmung im Harn!). Das verwendete Licht muß hierbei möglichst monochromatisch sein.

Ein Blick durch ein einfaches Polarisationsfilter wirkt sehr überraschend: Fast alles von *reflektierenden Flächen* herrührende Licht wird bei bestimmter Stellung des Filters ausgelöscht. Glasscheiben, Brillengläser usw. erscheinen *nicht mehr spiegelnd* (Bild 430), Ausnahme: Metallflächen. Anwendung: Filter für fotografische Aufnahmen bei zuviel störenden Reflexen. Auch der blaue Himmel wird dunkler, ein Zeichen dafür, daß blaues Himmelslicht teilweise polarisiert ist. **Innere Spannungen** rufen in optisch isotropen Körpern (in Gläsern und Kunstharzen) ebenfalls Doppelbrechung hervor, die im **optischen Spannungsprüfer** (der im Prinzip ein Polarisationsapparat ist) bequem festgestellt werden kann (Bild 431). Aus derartigen Stoffen hergestellte Modelle von Konstruktionsteilen zeigen dann im *belasteten* Zustand augenfällig die Stellen stärkster Beanspruchung (Bild 431).



Bild 430. Fotografische Aufnahme ohne und mit Polarisationsfilter

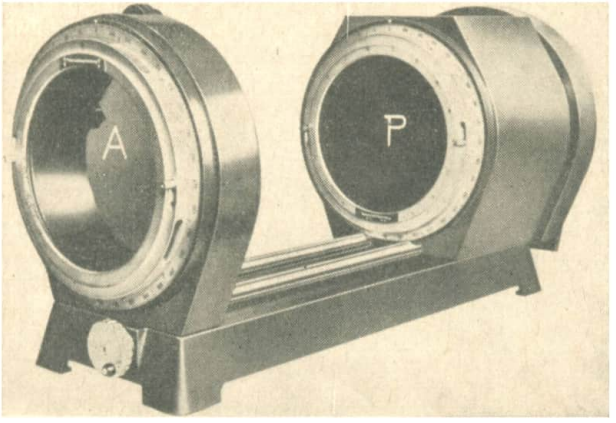


Bild 431. Optischer Spannungsprüfer (P Polarisator, A Analysator)



Bild 432. Modell eines mechanisch beanspruchten Werkstückes im Spannungsprüfer

33. Strahlungsgesetze

33.1. Größen des Strahlungsfeldes

Wie eingangs gesagt wurde, stellt das sichtbare Licht nur einen schmalen Ausschnitt aus der großen Skale der elektromagnetischen Wellen dar und bildet so den Gegenstand der eigentlichen Optik. In allgemeiner Hinsicht jedoch gelten wegen der engen Verwandtschaft aller elektromagnetischen Wellen noch umfassendere Gesetze, die vor allem die Energieverhältnisse betreffen. Ohne Rücksicht darauf, ob diese Wellen von bestimmten Sinnesorganen wahrgenommen werden können oder nicht, erfüllen sie den Raum in Form eines **Strahlungsfeldes.** Wenn auch kein übertragendes Medium, wie etwa beim Schallfeld, vorhanden ist, findet in jedem Fall ein kontinuierlicher *Energietransport* statt. Von der **Strahlungsquelle,** worunter man sich im einfachsten Fall eine Glühlampe oder die Sonne vorstellen kann, fließt die **Strahlungsenergie** W zum **Empfänger.**
Der Quotient aus der emittierten oder empfangenen Energie und der dazugehörigen Zeit ist

(280) $$\boxed{\Phi_e = \frac{dW}{dt}}$$ **Strahlungsfluß** Φ_e

Einheit des Strahlungsflusses: 1 W

Er stellt demnach eine Leistung dar und wird daher häufig auch als *Strahlungsleistung* oder *Energiestrom* bezeichnet.
Die Strahlung kann sich nun in der verschiedensten Weise im Raum verteilen. Sie kann, wie bei einem Rundfunksender, bei geringster örtlicher Intensität große Räume erfüllen oder im Brennpunkt eines Hohlspiegels auf ein sehr kleines Gebiet zusammengedrängt werden. Um solche Unterschiede zu erfassen, definiert man

(281) $$\boxed{D_e = \frac{d\Phi_e}{dA_\perp}}$$ **Strahlungsflußdichte** D_e

Die Strahlungsflußdichte ist der Quotient aus dem Strahlungsfluß und der von ihm senkrecht durchsetzten Fläche.
Einheit der Strahlungsflußdichte: 1 W/m²

Der Differentialquotient bringt zum Ausdruck, daß sich die Strahlungsflußdichte von Punkt zu Punkt ändern kann. Mit kleiner werdender Fläche wird auch der Strahlungsfluß kleiner, so daß der Quotient einen endlichen Wert behält.
Ein recht anschauliches Beispiel hierfür liefert die von der Sonne auf die Erdoberfläche fallende Strahlungsenergie. Man kann diese in angenäherter Weise mittels eines kleinen Kalorimeters messen, dessen Empfangsfläche zwecks vollständiger Absorption der Strahlung mit Ruß geschwärzt ist und senkrecht zur Strahlrichtung ge-

stellt wird (Bild 433). Bei Annahme völliger Durchlässigkeit der Erdatmosphäre für alle Wellenlängen erhält man dabei die

Solarkonstante 1,374 kW/m²

und erkennt, daß die Größe eine Strahlungsflußdichte darstellt.

Die Strahlungsflußdichte ist eine Kenngröße der Strahlung selbst. Fällt aber die Strahlung auf eine ebene Fläche, so erfährt diese eine bestimmte *Bestrahlung*. Man definiert dann

(282) $$\boxed{E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}}$$ **Bestrahlungsstärke E_e**

Die Bestrahlungsstärke ist der Quotient aus dem Strahlungsfluß und der von ihm getroffenen Fläche.

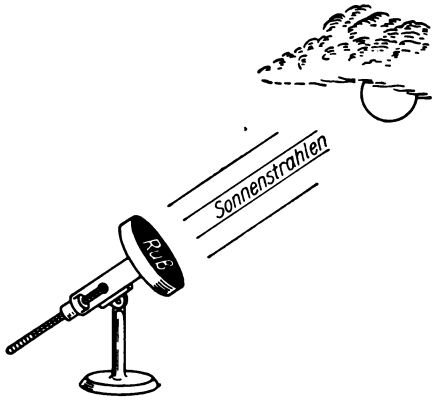


Bild 433. Messung der Solarkonstanten

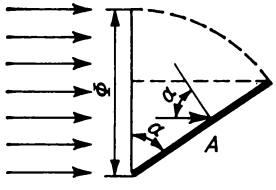


Bild 434. Bestrahlungsstärke einer geneigten Fläche

Man beachte, daß die auffangende Fläche nicht senkrecht zur Strahlrichtung zu stehen braucht, sondern einen *beliebigen Winkel* mit ihr bilden kann. Den Winkel mißt man stets von der Flächen*normalen* aus. Bild 434 zeigt eine Fläche A, deren Normale mit der Strahlrichtung den Winkel α bildet. Sie wird daher nur von jenem Teil $\Phi_e' = \Phi_e \cos\alpha$ des Strahlungsflusses getroffen, der auf die Projektion der Fläche A auf die zur Strahlrichtung senkrechte Ebene entfällt.

$$E_e = \frac{\Phi_e \cos\alpha}{A_\perp} \quad \text{oder}$$

(283) $$E_e = D_e \cos\alpha.$$

Am sinnfälligsten wird dieses Gesetz bei der im Laufe der Tageszeit veränderlichen Sonneneinstrahlung. Bei höchstem Sonnenstand, d. h. mittags, erreicht der Einfallswinkel α seinen kleinsten Wert und damit die Bestrahlungsstärke ihr Maximum.

Bezieht man die im Strahlungsfeld enthaltene Energie auf die Volumeneinheit, so erhält man die in 23.2. bereits genannte Energiedichte:

(284) $$\boxed{w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}}$$ **Energiedichte w**

Man kann sich auch vorstellen, daß die Energie $\mathrm{d}W$ innerhalb der Zeit $\mathrm{d}t$ senkrecht auf die Fläche A fällt und von ihr absorbiert wird. Da sich die Strahlung mit der Lichtgeschwindigkeit c vorwärts bewegt, muß sie vor dem Auftreffen in einem Zylinder von der Länge $c\,\mathrm{d}t$ und dem Querschnitt A enthalten sein (Bild 314, S. 282). Damit ist

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{Ac\,\mathrm{d}t}.$$

Der hier erscheinende Quotient $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ ist aber der Strahlungsfluß Φ_e und der Quotient $\frac{\Phi_\mathrm{e}}{A}$ wiederum die Strahlungsflußdichte D_e, so daß die Energiedichte

$$w = \frac{D_\mathrm{e}}{c}$$

ist. Wie sich durch Einsetzen der Einheiten leicht beweisen läßt, hat die Energiedichte w zugleich die Bedeutung eines Druckes (23.4.). Es hat sich sogar herausgestellt (erstmalig nachgewiesen von dem russischen Physiker P. N. Lebedew 1901), daß alle elektromagnetischen Strahlungen eine Druckwirkung auf die von ihnen getroffenen Flächen ausüben. Bei vollständiger Absorption ist

(285) $$\boxed{p = \frac{D_\mathrm{e}}{c}}$$ **Strahlungsdruck p**

Für den Fall der Sonnenstrahlung erhält man daher die Energiedichte aus der Solarkonstanten und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s:

$$w = \frac{D_\mathrm{e}}{c} = \frac{1374\ \mathrm{Ws}}{\mathrm{m^2}\ 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}} = 4{,}58 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Ws/m^3}$$

und damit auch den Strahlungsdruck der Sonne

$$p = \frac{D_\mathrm{e}}{c} = 4{,}58 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2} = 4{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{p/m^2}.$$



Der von den Fixsternen erzeugte Strahlungsdruck ist für viele astrophysikalische Vorgänge von großer Bedeutung; u. a. wirkt er auf alle im Weltraum vorhandenen Gas- und Staubteilchen und befördert sie auf weite Strecken.
Deshalb sind auch die Schweife der Kometen stets von der Sonne weg gerichtet (Bild 435).

Bild 435. Der Komet Halley. Der Schweif zeigt von der Sonne weg

33.2. Temperaturstrahlung

Jeder auf höherer Temperatur befindliche Körper sendet ein kontinuierliches Spektrum von Wellen aus, das weit über das langwellige Ende des sichtbaren Bereiches hinausgeht. Ein Teil dieser Strahlung wird vom Temperatursinn unserer Haut wahrgenommen. So verspürt man bereits in der Nähe eines gewöhnlichen Ofens ein starkes Wärmegefühl, das von der Strahlung herrührt, die der Ofen aussendet. Bei noch höherer Temperatur beginnt der Ofen zu glühen, also überdies noch sichtbares Licht zu emittieren. Während das sichtbare Licht vom violetten bis zum roten Ende des Spektrums (S. 290) einen Wellenlängenbereich von 380 bis 780 nm überstreicht, üben die *jenseits* des roten Lichtes (ultrarot oder infrarot) sich anschließenden Wellen von 800 nm ··· 1 mm vorzugsweise Wärmewirkung aus, die bis zu mehreren Zentimetern tief in den menschlichen Körper eindringt (**Infrarotlampen** für medizinische Zwecke, Bild 436).

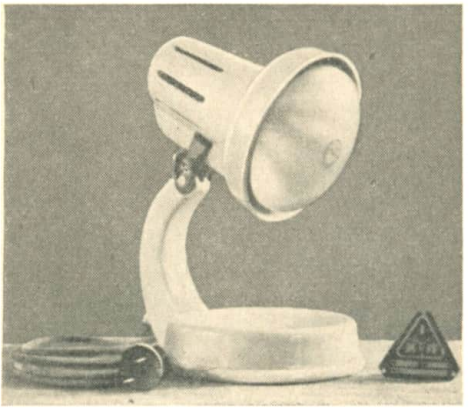


Bild 436. Infrarot-Heimstrahler

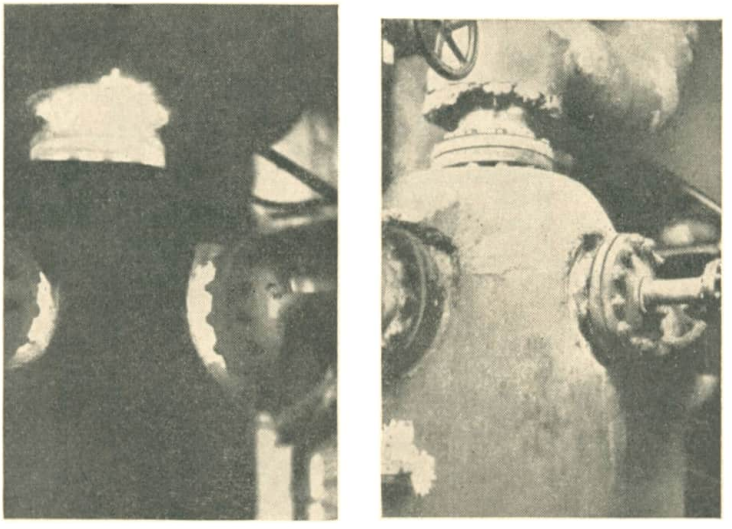


Bild 437. Strahlende Teile eines Wasserabscheiders
a) Foto mit infrarotempfindlicher Platte;
b) dieselbe Aufnahme bei Tageslicht

Der Ausdruck **Wärmestrahlung** ist also nur insofern berechtigt, als uns für den nicht mehr sichtbaren Wellenbereich nur das Wärmegefühl zur Verfügung steht. Man bezeichnet daher besser die Gesamtheit aller von einem Körper ausgehenden Strahlen als **Temperaturstrahlung.** Sie steht im Gegensatz zur Strahlung leuchtender Gase und Dämpfe, die Linienspektren einzelner genau bestimmter Wellenlängen ergeben (S. 310). Diese entstehen durch sprunghafte Energieänderungen innerhalb der Atome bzw. Moleküle. In den festen Körpern und Flüssigkeiten beeinflussen sich jedoch die Atome durch ihre enge Packung gegenseitig derart, daß sie eine lückenlose Aufeinanderfolge aller möglicher Wellenlängen emittieren. Das Spektrum ist kontinuierlich. Sein Umfang und die Intensität der Strahlung richten sich nach der Temperatur des Körpers. Da die Bewegung der Atome und Moleküle erst am absoluten Nullpunkt zum Stillstand kommt, senden auch *relativ kalte* Körper Temperaturstrahlen aus.

Jeder Körper ist vermöge seines Wärmeinhaltes ein Temperaturstrahler.

Wenn man eine fotografische Platte in geeigneter Weise „sensibilisiert", kann man die Wärmestrahlung fotografieren (Bild 437).
Infolge der Emission (Abstrahlung) verliert der gegenüber der Umgebung wärmere Körper allmählich seine Wärmeenergie. Bei Temperaturgleichheit besteht **Strahlungsgleichgewicht,** d. h., er erhält aus der Umgebung je Zeiteinheit den gleichen Betrag an Strahlungsenergie zugeführt, den er selbst aussendet.

33.2.1. Reflexion und Absorption der Temperaturstrahlung

Beim Auftreffen von Strahlung auf einen Körper kann grundsätzlich dreierlei eintreten:

1. Die Strahlung wird mehr oder weniger **durchgelassen.** Das spezifische Verhalten eines Körpers in dieser Hinsicht kennzeichnet man durch den **Transmissionsgrad** τ oder einfach als *Durchlässigkeit.* Man bildet hierbei das Verhältnis des durchgelassenen Strahlungsflusses Φ_{tr} zum auftreffenden Strahlungsfluß Φ_0.

(286) $$\tau = \frac{\Phi_{tr}}{\Phi_0}$$ **Transmissionsgrad** τ (Durchlässigkeit)

Einige grobe Anhaltspunkte gibt die folgende Tabelle:

	Durchlässigkeit für	
	Licht	Wärme
Glas	gut	schlecht
Hartgummi, Schwarzglas 640a usw.	undurchlässig	gut
Steinsalz	gut	gut

Zur genaueren Beurteilung muß die Durchlässigkeit für jeden einzelnen Wellenbereich geprüft werden (Bild 438).

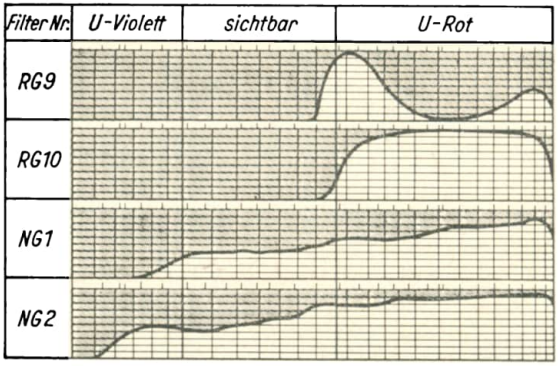


Bild 438. Spektrale Durchlässigkeit einiger Jenaer Filtergläser

2. Die Strahlung wird mehr oder weniger **reflektiert.** Bezeichnet Φ_r den reflektierten Anteil des Strahlungsflusses und Φ_0 wieder den gesamten auftreffenden Strahlungsfluß, so ist

(287) $$\boxed{\varrho = \frac{\Phi_r}{\Phi_0}}$$ **Reflexionsvermögen** ϱ

Die Wellenlängenabhängigkeit des Reflexionsvermögens einiger Metalle zeigt die folgende Tabelle:

Reflexionsvermögen ϱ einiger Metalle in %

Wellenlänge	Metall				
nm	Kupfer	Silber	Wismut	Chrom	Nickel
257	28	24,1	20,1	69,8	30,7
361	37	77,4	42,5	63,4	41,2
500	55,5	93,2	52,2	67,6	62,1
870	91,5	97,8			71,7
1250	95,8	98,2			78,0

Bemerkenswert ist, daß auch *Ruß* noch etwa 1 % der gesamten auftreffenden Strahlung reflektiert.

3. Die Strahlung wird mehr oder weniger **absorbiert,** d. h. vom Körper verschluckt, und trägt so zur Erhöhung seiner Temperatur bei. Mit dem absorbierten Anteil Φ_a des Strahlungsflusses gilt

(288) $$\boxed{\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}}$$ **Absorptionsvermögen** α

Daß dunkle Körper starke und helle Körper geringe Absorption zeigen, ist augenfällig. Schwarzes Papier absorbiert etwa 95 %, weißes rund 5 %. Luft absorbiert am

schwächsten. Ein Körper, der restlos alle einfallende Strahlung absorbiert, heißt **Schwarzer Körper:**

Das Absorptionsvermögen des Schwarzen Körpers ist gleich 1.

Da selbst eine Rußschicht noch ein wenig reflektiert, kann man einen ideal schwarzen Körper nur auf einem Umweg annähernd realisieren. Ein geschwärzter Hohlraum hat eine kleine Öffnung (Bild 439). Die einfallende Strahlung wird im Innern vielfach reflektiert, wobei nach jeder Reflexion nur ein kleiner Bruchteil der jeweils noch vorhanden gewesenen übrigbleibt. Aus der Öffnung kann dann nichts mehr austreten. Sie erscheint vollkommen schwarz.

Körper, die nicht vollkommen absorbieren, heißen **graue Körper,** sofern das Absorptionsvermögen α über den gesamten Wellenbereich *konstant* ist.
Die gesamte, auf einen Körper fallende Strahlung zerfällt also in die 3 Anteile ϱ, α und τ. Damit ergibt sich (Bild 440):

$$\varrho + \alpha + \tau = 1.$$

Bei den meisten, undurchlässigen Stoffen ist $\tau = 0$ (Bild 441). Daher kann man ihr Absorptionsvermögen α nach der Gleichung

$$\alpha = 1 - \varrho$$

aus ihrem Reflexionsvermögen ϱ berechnen.

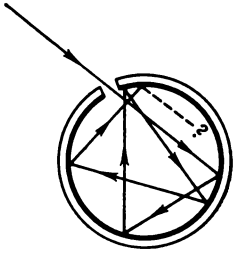


Bild 439
Schwarzer Körper

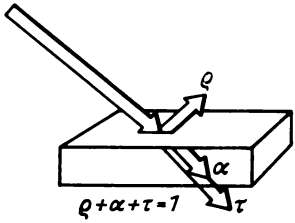


Bild 440. Bilanz der auf einen durchlässigen Körper auffallenden Strahlung

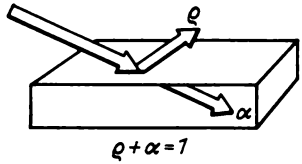


Bild 441. Bilanz der auf einen undurchlässigen Körper auffallenden Strahlung

Beispiele: 1. Die hohe Innentemperatur eines Gewächshauses entsteht dadurch, daß die Glaseindeckung fast nur Licht durchläßt, das auf dem Erdboden in Wärme umgewandelt wird. Die im Innenraum entwickelte Wärmestrahlung kann dann durch das Glas nicht mehr entweichen.

2. In großen Höhen herrscht trotz intensiver Sonnenstrahlung eisige Kälte, weil Luft nur wenig absorbiert.

3. Weiße Kleidung und Tropenhelme reflektieren sichtbares Licht sehr gut, womit keine Umwandlung in lästige Wärme stattfindet.

4. Fensteröffnungen sehen von weitem schwarz aus, da sie annähernd wie Schwarze Körper wirken.

33.2.2. Kirchhoffsches Strahlungsgesetz[1])

Im letzten Abschnitt war die Rede davon, wie sich ein Körper gegenüber einer von *außen* her auftreffenden Strahlung verhält. Davon aber ganz unabhängig, sendet der Körper *selbst* vermöge seiner Temperatur Strahlung aus. (Nicht mit der Reflexion zu verwechseln!) Es zeigt sich hierbei, daß die Oberflächenbeschaffenheit von ausschlaggebendem Einfluß ist.

Versuch: Ein mit heißem Wasser gefülltes Blechgefäß ist auf der linken Seite mit Ruß geschwärzt und auf der rechten Seite blank poliert (Bild 442). Dicht daneben hängt je ein mit Ruß geschwärztes Thermometer. Das linke nimmt schneller eine höhere Temperatur an als das rechte und beweist, daß die schwarze Fläche bedeutend besser strahlt als die blanke.

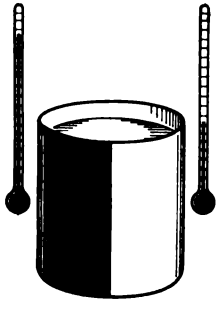


Bild 442. Oberflächenbeschaffenheit und Temperaturstrahlung

Bei gleicher Temperatur strahlen helle und blanke Flächen relativ wenig, schwarze und rauhe dagegen relativ viel Energie ab.

Dieses unterschiedliche Verhalten der einzelnen Körper kennzeichnet man durch ihr **Emissionsvermögen** ε und versteht darunter den relativen Betrag des von ihnen ausgehenden, mehr oder weniger großen Energieflusses. Zu Vergleichszwecken setzt man dabei das Emissionsvermögen des Schwarzen Körpers gleich 1.

(289) **Emissionsvermögen des Schwarzen Körpers:** $\varepsilon_s = 1$

Der Versuch ergibt demnach, daß das Emissionsvermögen einer schwarzen Fläche größer als einer anderen Fläche ist. Theoretisch folgt dies aus dem

Kirchhoffschen Strahlungsgesetz:

Das Verhältnis von Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen ist bei gegebener Temperatur für alle Körper konstant und dem Betrage nach gleich dem Emissionsvermögen des Schwarzen Körpers.

Herleitung: In einem vollkommen wärmedicht abgeschlossenen Raum stehen sich eine vollkommen schwarze Fläche S und eine graue G gegenüber (Bild 443). Die übrigen Innenwände seien verspiegelt, so daß keine Strahlungsverluste eintreten können. Beide Flächen sollen die gleiche Temperatur haben. Sie müssen dann je Zeiteinheit gleich viel Energie absorbieren wie emittieren. Wäre das nicht der Fall, so würde z. B. Fläche S mehr Wärme verlieren als zugeführt bekommen und müßte sich abkühlen. Dafür bekäme dann Fläche G mehr zugeführt, als sie abgibt, und müßte sich dadurch erwärmen. Das stünde aber im Widerspruch zur gemachten Voraussetzung. Es besteht somit Strahlungsgleichgewicht. Da bei gleicher Temperatur die emittierten Strahlungsflüsse dem

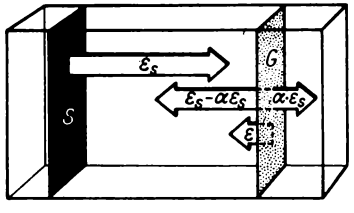


Bild 443. Zum Kirchhoffschen Strahlungsgesetz

[1]) Robert Kirchhoff (1824 bis 1887)

Emissionsvermögen proportional sind, seien die Beträge der von den beiden Flächen emittierten Strahlungen gleich ε_s bzw. ε gesetzt. Von der Strahlung der Fläche S nimmt Fläche G, da sie als grauer Körper nicht alles absorbiert, nur den Bruchteil $\alpha\varepsilon_s$ auf und reflektiert den Rest $\varepsilon_s - \alpha\varepsilon_s$ zurück nach Fläche S, wo dieser absorbiert wird. Außerdem nimmt Fläche S noch den von Fläche G selbständig emittierten Strahlungsfluß ε auf. Da im Gleichgewicht die emittierte Strahlung ε_s gleich der absorbierten sein muß, gilt:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s - \alpha\varepsilon_s + \varepsilon,$$

woraus sich das KIRCHHOFFsche Strahlungsgesetz ergibt:

(290) $$\boxed{\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon_s}$$

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Ein Körper mit großem Absorptionsvermögen α hat demnach auch ein großes Emissionsvermögen ε. Undurchlässige Körper mit gutem Reflexionsvermögen ϱ strahlen schlecht. (Spiegel reflektieren zwar gut, emittieren selbst aber kaum.)

2. Da für alle nichtschwarzen Körper $\alpha < 1$ ist, folgt aus $\varepsilon = \alpha \cdot \varepsilon_s$, daß auch das Emissionsvermögen ε aller nichtschwarzen Körper kleiner als das des Schwarzen Körpers ist.

3. Das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon_s$ ist für alle Körper konstant und demnach von ihrer stofflichen Beschaffenheit unabhängig. Die Strahlung des Schwarzen Körpers kann daher nur von seiner Temperatur und der ins Auge gefaßten emittierten Wellenlänge abhängen:

$$\varepsilon = f(\lambda, T).$$

Beispiele: 1. Die stark leuchtende Flamme einer Azetylenlampe steht vor einem Projektionsapparat. Sie wirft einen dunklen Schatten. Da sie stark emittiert, absorbiert sie auch stark. Eine nichtleuchtende Flamme gibt keinen Schatten.

2. Ein durchsichtiger Stab und ein Stab aus dunklem Glas werden auf gleiche Temperatur erhitzt. Der durchsichtige strahlt schwach, der dunkle glüht intensiv.

3. Das **Radiometer** (Bild 444). Ein leichtes Flügelrad befindet sich leicht drehbar in einem nicht völlig evakuierten Glasgefäß (10^{-1} bis 10^{-2} Torr). Die Flügel sind auf einer Seite berußt, auf der Rückseite blank. Beim Auftreffen von Licht- oder Wärmestrahlung erwärmen sich die dunklen Flächen stärker als die blanken, wodurch die in der Nähe der schwarzen Flächen befindlichen restlichen Luftmoleküle eine größere Geschwindigkeit erlangen, als diejenigen auf der Rückseite. Der Stoß der Moleküle versetzt das Rädchen in schnelle Umdrehungen.

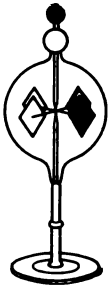


Bild 444. Radiometer

33.2.3. Stefan-Boltzmannsches Gesetz

Wenn es um die Berechnung der von einem Körper gegebener Temperatur ausgesandten Strahlung geht, wird man zunächst den Schwarzen Körper untersuchen müssen, da hierbei stoffliche Eigenschaften des Strahlers keine Rolle spielen. Offenbar muß die Ausstrahlung zunächst der abstrahlenden Fläche A proportional sein. Wie nun die beiden Physiker STEFAN (1879) und BOLTZMANN (1884) experimentell und theoretisch fanden, ist der *gesamte* d. h. alle Wellenlängen umfassende Strahlungsfluß des Schwarzen Körpers der 4. Potenz seiner absoluten Temperatur proportional, wobei sie auch den Proportionalitätsfaktor, die STEFAN-BOLTZMANN*sche Konstante* σ bestimmten. Es ist daher

(291) $$\boxed{\Phi_s = \sigma A T^4}$$ **Stefan-Boltzmannsches Gesetz des Schwarzen Körpers**

Bei praktischen Rechnungen ist jedoch auch die Temperatur der Umgebung zu berücksichtigen, die dem Körper eine entsprechende Energie zustrahlt. Man verwendet dann die Gleichung

(292) $$\Phi = \sigma A\,(T_1^4 - T_2^4).$$

Die Konstante σ hat für den Schwarzen Körper den Wert

Stefan-Boltzmannsche Konstante: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\,grd^4}$.

Nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz ist nun das Emissionsvermögen eines beliebigen Temperaturstrahlers $\varepsilon = \alpha\varepsilon_s$ und mit $\varepsilon_s = 1$ gleich seinem eigenen Absorptionsvermögen α. Um die Ausstrahlung eines beliebigen Körpers zu erhalten, läge es daher nahe, in die letzte Gleichung (292) noch den Faktor α einzufügen. Da aber die in der Technik vorkommenden Oberflächen meist keine idealen Temperaturstrahler sind, geht man von tabellenmäßig erfaßten Werten des **Emissionsvermögens** ε aus und erhält dann

(293) $$\boxed{\Phi = \varepsilon\sigma A(T_1^4 - T_2^4)}$$ **Strahlungsfluß Φ eines beliebigen Körpers**

Emissionsvermögen ε verschiedener Werkstoffe

Stoff	Temperatur in °C	ε	Stoff	Temperatur in °C	ε
Aluminium, blank	170	0,049	Silber	1500	0,04
Eisen, blank	150	0,158	Wolfram	1500	0,15
Silber, Kupfer			Lacke, Emaille	20	0,85···
poliert	20	0,02···0,03			0,95
Kupfer, oxydiert	20	0,78	Ziegelstein, Putz	20	0,93

Beispiele: 1. Wieviel Watt strahlt die Wolframwendel (strahlende Oberfläche 300 mm²) einer Glühlampe bei 2500 °K und einer Raumtemperatur von 20 °C ab ($\varepsilon = 0{,}3$)? –

$$\Phi = \varepsilon\sigma A(T_1^4 - T_2^4) = \frac{0{,}3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot 300 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}\ (2500^4 - 293^4)\ \mathrm{grd^4}}{\mathrm{m^2\ grd^4}} =$$

$$= 200\ \mathrm{W}$$

2. Welche Temperatur erreicht der nicht gewendelte Heizdraht (15 m Länge und 2,5 mm Durchmesser) eines elektrischen Gerätes von 300 W Leistung? (Außentemperatur 20 °C, $\varepsilon = 0{,}5$) –

Die Temperatur ergibt sich nach (293) zu $T_1 = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{\varepsilon\sigma A} + T_2^4}$. Mit den eingesetzten Zahlenwerten erhält man $T_1 = 548$ °K oder $t_1 = 275$ °C.

33.2.4. Spektrale Verteilung der Temperaturstrahlung

Während wir bisher lediglich den von einem Körper ausgesandten *gesamten* Strahlungsfluß betrachteten, ist es aber von Interesse zu wissen, wie sich dieser auf die *einzelnen Wellenlängen* verteilt.

Nach dem von Max Planck im Jahre 1900 aufgestellten Gesetz hängt der vom Schwarzen Körper ausgehende Strahlungsfluß allein von dessen Temperatur und der jeweils emittierten Wellenlänge ab, d. h., es ist $\Phi_s = f(\lambda, T)$, was bereits aus dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz folgte. Stellt man diese Funktion für eine bestimmte festgehaltene Temperatur T grafisch dar, so entsteht eine charakteristische Kurve, die **Strahlungskurve des Schwarzen Körpers** (Bild 445). Der Flächeninhalt unter der Kurve ergibt als Integral über alle Wellenlängen des emittierten Spektrums den gesamten Strahlungsfluß. Das Plancksche Gesetz hängt also mit dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz eng zusammen.

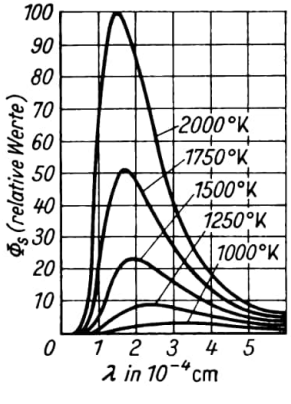


Bild 445. Strahlungskurven des Schwarzen Körpers



Bild 446. Max Planck (1858 bis 1947)

Mit steigender Temperatur ändern die Strahlungskurven ihre Form. Insbesondere zeigt jede Kurve ein ausgeprägtes Maximum. Da die Gesamtausstrahlung nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz mit der 4. Potenz der Temperatur zunimmt, müssen die unter den Kurven liegenden Flächeninhalte sehr stark anwachsen. Dabei aber *verschiebt* sich die Lage des Maximums immer mehr nach dem *kurzwelligen* Teil des Spektrums.
Die maximal ausgestrahlte Wellenlänge λ_{max} läßt sich berechnen aus dem

Wienschen Verschiebungsgesetz:

(294) $$\boxed{\lambda_{max}/_{cm} = \frac{0{,}2897}{T/°K}}$$

Mit zunehmender Temperatur wird also die am stärksten ausgestrahlte Wellenlänge immer kleiner.

Das Maximum der Strahlungskurve verschiebt sich mit steigender Temperatur in das Gebiet kürzerer Wellenlängen.

Bei *niederer* Temperatur werden daher vorzugsweise *langwellige* Wärmestrahlen ausgesandt, erst bei höheren Temperaturen auch nennenswerte Anteile sichtbaren Lichtes, dabei auch zuerst vorzugsweise längerwelliges (rote und gelbe Strahlen). Erst bei 6000 °K (Oberflächentemperatur der Sonne) liegt das Maximum im grünen Licht ($\lambda = 480$ nm).

Beispiele: 1. Welche Temperatur hat die Sonnenoberfläche? – $T = \frac{0{,}2897}{\lambda}$ °K = $= \frac{0{,}2897}{0{,}000048}$ °K = 6030 °K; $t = 5757$ °C.

2. Aus der obersten Kurve von Bild 445 geht hervor, daß bei einer Glühlampe der größte Teil der Strahlung als Wärme emittiert wird. Daher wird der optische Wirkungsgrad einer Lampe mit steigender Temperatur besser.

3. Das Tageslicht erscheint gegenüber allen künstlichen Lichtquellen von bläulicher Farbe, weil bei der niederen Temperatur des Kunstlichtes das Strahlungsmaximum stärker nach Rot verschoben ist.

33.2.5. Temperaturmessung durch Strahlung

Die bei Temperaturänderung eintretende Helligkeits- und Farbverschiebung macht es möglich, hohe Temperaturen abzuschätzen. Als Anhaltspunkt dient die

Skale der Glühfarben (in °C)

beginnende Rotglut	525	Gelbglut	1100
Dunkelrotglut	700	beginnende Weißglut	1300
Kirschrotglut	850	volle Weißglut	1500
Hellrotglut	950		

Im **Glühfadenpyrometer** wird der glühende Gegenstand durch ein Objektiv auf dem oberen Teil eines Glühlämpchens abgebildet. Durch Regeln des Stromes ändert man die Helligkeit des Lämpchens, bis der Glühfaden, den man im Gesichtsfeld des Okulars scharf ein-

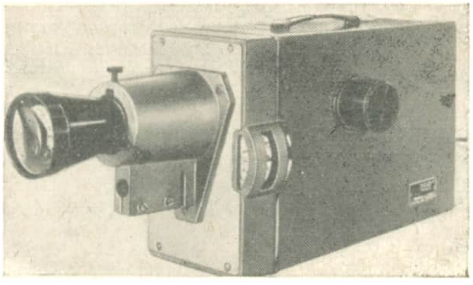


Bild 447. Fotoelektrisches Pyrometer

stellt, verschwindet. Die Temperatur wird an der Skale des Strommessers abgelesen. Die Eichung geschieht nach der Fläche des Schwarzen Körpers.

Bei dem auf Bild 447 gezeigten **fotoelektrischen Pyrometer** fallen die Strahlung des Meßobjektes und die einer eingebauten Wolframlampe im schnellen Wechsel auf eine Fotodiode. Der Abgleich erfolgt durch die automatisch stattfindende Regelung einer im Strahlengang stehenden Blende, deren Stellung ein Maß für die Temperatur ist.

Auf diese Weise wird allerdings nicht die wahre Temperatur bestimmt, sondern die stets niedrigere, sogenannte **Schwarze Temperatur.** Denn ein gewöhnlicher nichtschwarzer Körper mit $\varepsilon < 1$ muß auf höhere Temperatur erhitzt werden, wenn er die gleiche Helligkeit wie der Schwarze Körper ergeben soll. Also liegt seine wahre Temperatur höher. Da ε von der Wellenlänge abhängt, ist die Schwarze Temperatur nur für *bestimmte*, jeweils anzugebende Wellenbereiche definiert.
Wegen der mitunter erheblichen Abweichung der Schwarzen von der wahren Temperatur bestimmt man häufig die **Farbtemperatur.** Man vergleicht dabei nicht die Intensität einzelner Wellenbereiche, sondern den *Farbeindruck* der *gesamten* unzerlegten Strahlung. Die Temperatur kann bei Farbgleichheit *höher* liegen als die wahre Temperatur. Das ist z. B. der Fall, wenn der Gehalt an längerwelligen (roten) Strahlen relativ geringer ist als beim Schwarzen Körper. Man braucht in diesem Fall den zu messenden Körper nicht so hoch zu erhitzen, um den gleichen Gesamtfarbeindruck zu erzielen. Die Farbtemperatur des klaren blauen Himmels liegt bei etwa 26000 °C.

Optisch gemessene Temperaturen (in °K) von Wolfram

wahre Temperatur	1000	1500	2000	3000
Schwarze Temperatur für $\lambda = 665$ nm	964	1420	1857	2673
Farbtemperatur	1006	1517	2033	3094

34. Wellen und Teilchen

34.1. Zur Entstehung der Quantenvorstellung

Im Anschluß an die erste Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer (24.3.) entstanden zwei Theorien über das Wesen des Lichtes:

1. die **Huygenssche Wellentheorie** (1690):

Das Licht ist (ähnlich den Schallwellen der Luft) **eine Wellenbewegung des Äthers,** den man sich als einen überaus fein verteilten Stoff vorstellte;

2. die **Newtonsche Emissionstheorie** (1704):

Das Licht besteht aus winzigen Teilchen (Korpuskeln), die von der Lichtquelle ausgesandt werden und den Raum geradlinig durchqueren.

Die HUYGENSsche Wellentheorie erfuhr eine immer weitergehende Festigung:

1760 (EULER): Deutung der Spektralfarben als Schwingungen verschiedener Frequenz.

1802 (THOMAS YOUNG): Deutung der NEWTONschen Ringe (31.4.) als Interferenz von Wellen.

1808 (MALUS): Entdeckung und Deutung der Polarisation.

1816 (FRESNEL): Vereinigung der HUYGENSschen Vorstellung von den Elementarwellen mit dem YOUNGschen Interferenzprinzip. Berechnung von Beugungserscheinungen.

Die NEWTONsche Emissionstheorie vermochte diese Erscheinungen *nicht* zu erklären und schien damit *widerlegt*.

1862 (MAXWELL): Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie.

1888 (HEINRICH HERTZ): Experimenteller Nachweis, daß Reflexion, Brechung, Beugung, Interferenz und Polarisation Grundeigenschaften aller elektromagnetischen Wellen sind.

Damit war die Wellennatur des Lichtes *endgültig nachgewiesen*.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts gab es aber noch ein offenes Problem. Es gelang nämlich nicht, die spektrale Verteilung der Strahlung des Schwarzen Körpers theoretisch zu begründen. Wohl lagen die Strahlungskurven (Bild 445) als Ergebnis experimenteller Messungen vor, doch führten alle Formeln, die den Verlauf der genannten Funktion $\Phi_s = f(\lambda, T)$ auf Grund der elektromagnetischen Strahlungstheorie wiedergeben sollten, zu falschen Ergebnissen.
Im Jahre 1900 gelang es endlich MAX PLANCK, durch einen völlig neuen Gedanken die richtige Form des Strahlungsgesetzes zu finden, die mit den experimentellen Befunden genau übereinstimmte. Dieser Gedanke bestand in der

Quantenvorstellung:

Die Energie jeder Strahlung setzt sich aus winzigen, unteilbaren Teilbeträgen, den sogenannten Elementarquanten, zusammen.

(295) $\boxed{W = h\nu}$ **Energie W eines Strahlungsquantes**

(**Plancksches Wirkungsquantum** $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Joule · Sekunde oder Ws^2, ν Frequenz des Lichtes)
Demnach stellt jede Strahlung einen Strom voneinander getrennter Energieportionen dar. Die Energie eines solchen Quantes ist winzig klein und läßt sich berechnen, wenn man aus der zugehörigen Wellenlänge λ zunächst die Frequenz ν ermittelt und dann das Produkt $h\nu$ bildet.
Die PLANCKsche Theorie von den Strahlungsquanten bedeutete für die Physik einen ganz entscheidenden Fortschritt. Sie führte u. a. unmittelbar zur Entwicklung der

Atomtheorie durch NIELS BOHR (1913) und weiterhin zur modernen Quantenphysik. Insbesondere führte ALBERT EINSTEIN (1917) den Nachweis, daß die Strahlungsquanten des Lichtes einen bestimmten Impuls mc haben und sich wie bewegte Masseteilchen verhalten. Man nennt sie daher auch **Photonen.**
Inwieweit die Quantentheorie mit der Wellentheorie verträglich ist, werden wir im Zusammenhang mit der weiteren Entwicklung erörtern.

Vorläufig nehmen wir zur Kenntnis:

In seiner Wechselwirkung mit den Atomen und Molekülen wirkt das Licht in einzelnen unteilbaren Elementarquanten.

Wie der Ausdruck (295) zeigt, ist die Energie eines Strahlungsquants der Frequenz ν proportional, oder was dasselbe bedeutet, der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Daher sind die Quanten um so *energiereicher*, je *kurzwelliger* die Strahlung ist. Ihre Energie erreicht extrem hohe Werte bei der Gammastrahlung radioaktiver Stoffe.

34.2. Lichtelektrischer Effekt

Heute ist eine ganze Reihe physikalischer Erscheinungen bekannt, deren Deutung allein mit Hilfe der Quantenvorstellung, nicht aber mit der Wellentheorie gelingt. Zu ihnen gehörte der **lichtelektrische Effekt** (auch fotoelektrischer Effekt oder kurz **Fotoeffekt** genannt).
Er läßt sich mit einem sehr einfachen Grundversuch (HALLWACHS, 1888) nachweisen. Auf ein empfindliches Elektrometer setzt man eine frisch abgeschmirgelte Zinkplatte und lädt das Instrument *negativ* auf. Bei Bestrahlung mit dem Licht einer Bogenlampe (enthält Ultraviolett) *verliert* sich die Ladung in wenigen Augenblicken. Das auftreffende Licht löst also (negative) Elektronen aus den Atomen heraus. Noch kräftiger ist die Wirkung, wenn man *luftleere* Gefäße inwendig mit einem *dünnen Belag* von Kalium, Zäsium oder Kadmium versieht. Der Belag wird mit dem negativen, ein ihr gegenüber befindlicher Drahtring mit dem positiven Pol einer Batterie verbunden (Bild 448). Bei Belichtung einer solchen **Fotozelle** fließt ein Elektronenstrom von der empfindlichen Schicht zur Anode.
Wie aus entsprechenden Messungen hervorgeht, entspricht jedem aus der Fotokatode abgespaltenen Elektron genau ein absorbiertes Lichtquant. Die Energie dieser Quanten wird dazu verbraucht, um das Elektron aus einem der Atome der Katode abzulösen und außerdem diesem Elektron eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen.

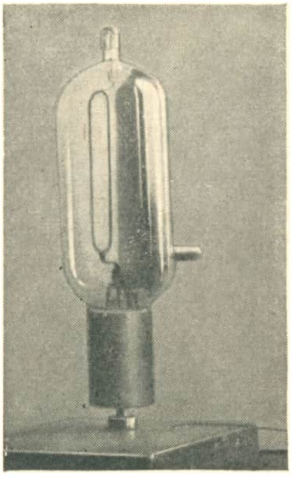


Bild 448. Große Fotozelle

Hierbei gilt stets die Energiebilanz:

$$\left.\begin{array}{l}\text{kinetische Energie des}\\ \text{zur Anode fliegenden}\\ \text{Elektrons}\end{array}\right\} + \text{Abtrennarbeit} = \left\{\begin{array}{l}\text{Energie des}\\ \text{auftreffenden}\\ \text{Lichtquants}\end{array}\right.$$

(296) $$\boxed{\frac{m}{2}v^2 + W_e = h\nu}$$ **Einsteinsche Gleichung**

(Masse des Elektrons $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg; ν Frequenz des einstrahlenden Lichtes)

Wie diese Gleichung aussagt, hängt bei gegebener Ablösearbeit W_e, die eine Materialkonstante der Katode ist, die kinetische Energie der Photoelektronen nur von der Frequenz ν des eingestrahlten Lichtes ab. Bei Vergrößerung des einfallenden Lichtstromes ändert sich die Energie der freigesetzten Elektronen *nicht*, es vergrößert sich lediglich ihre Anzahl. Man sieht ferner, daß die Energie $W = h\nu$ der Lichtquanten mindestens gleich dem Betrag der Ablösearbeit sein muß. Andernfalls bleibt der Fotoeffekt aus. Die Ablösearbeit entspricht bei Metallatomen der Ionisierungsarbeit.

Die Energie der ausgelösten Elektronen ist nur von der Wellenlänge (bzw. Frequenz) des Lichtes abhängig.

Die Stärke der Strahlung (d. h. die Anzahl der in einer bestimmten Zeit auftreffenden Lichtquanten) bestimmt die Anzahl der ausgelösten Elektronen.

In welche Widersprüche man gerät, wenn man die Wellenvorstellung des Lichtes auf den Fotoeffekt anwenden will, geht z. B. aus der folgenden Überlegung hervor.
Ein entsprechender Versuch ergibt, daß der Fotoeffekt bei einer Strahlungsflußdichte von $D = 10^{-6}$ W/m² unter Verwendung ultravioletten Lichtes von $\lambda = 400$ nm leicht beobachtbar ist und auch ohne jede zeitliche Verzögerung, d. h. vollkommen trägheitslos, einsetzt. Eben dieses trägheitslose Arbeiten macht die Fotozelle für viele Zwecke der Steuer- und Regeltechnik so gut geeignet.
Der Querschnitt eines Atoms ist aber sehr klein und kann mit etwa $A \approx 5 \cdot 10^{-20}$ m² angesetzt werden. Diese Fläche empfängt dann nach (281) den Strahlungsfluß

$$\Phi = DA = 5 \cdot 10^{-26}\ \text{W}.$$

Zur Emission des Elektrons ist dagegen nach (295) die Energie

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 5 \cdot 10^{-19}\ \text{Ws}$$

erforderlich. Dies ergibt nach (280) eine notwendige Bestrahlungszeit von

$$t = \frac{W}{\Phi} = 10^{7}\ \text{s}.$$

Nach dieser Rechnung müßte es also etwa 3000 Stunden dauern, bis das Atom genügend Energie aus der ankommenden Welle gesammelt hat, um ein Fotoelektron emittieren zu können. Das aber steht in krassem Widerspruch zur Erfahrung. Dagegen ist das sofortige Einsetzen des Fotoeffektes nach der Quantenvorstellung ohne weiteres verständlich. Danach ist die gesamte Energie von $W = 5 \cdot 10^{-19}$ Ws in jedem einzelnen Photon konzentriert, das bei einem Treffer gegen das Atom den Effekt sofort auslöst.

34.3. Masse-Energie-Beziehung

Fassen wir die bis jetzt erwähnten Eigenschaften der Strahlungsquanten zusammen, so stellen sie auf kleinstem Raum zusammengedrängte Energiemengen dar, die sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes geradlinig vorwärtsbewegen. Bei ihrem Auftreffen auf feste Körper erzeugen sie den Strahlungsdruck, dessen Größe wir (in 33.1.) allerdings ohne Zuhilfenahme der Quantenvorstellung, aus den energetischen Verhältnissen des Wellenfeldes berechneten.

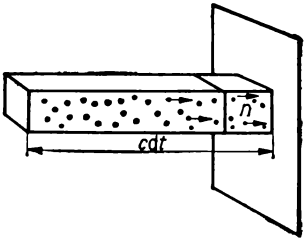


Bild 449. Strahlungsquanten als stoßende Masseteilchen

Es drängt sich daher der Gedanke auf, beide Betrachtungsweisen so zu verschmelzen, daß Wellen- und Teilcheneigenschaften in gemeinsamen Gleichungen zum Ausdruck kommen. Dann ließe sich der Strahlungsdruck leicht dadurch erklären, daß die im Wellenfeld dahinfliegenden Strahlungsquanten infolge ihrer Masse eine mechanische Stoßwirkung auf andere Körper ausüben. Andererseits müssen diese Masseteilchen wegen der in ihnen enthaltenen Energie $W = h\nu$ eine bestimmte Frequenz bzw. Wellenlänge haben. Diese Beziehung zwischen der Masse m und der Energie W ist von umfassender und für das gesamte materielle Geschehen in der Natur bestimmender Bedeutung. Sie wurde von Albert Einstein (1905) im Rahmen der **speziellen Relativitätstheorie** gefunden.

Ohne diese Theorie selbst zu benutzen, kann man die **Masse-Energie-Beziehung** auf folgende Weise herleiten. Es werde angenommen, die in einem Feld ebener Wellen vorhandenen Strahlungsquanten bewegen sich rechtwinklig gegen eine Fläche A (Bild 449). Schreibt man jedem Teilchen die Masse m zu, so hat jedes einzelne den Impuls $I = mc$. Befinden sich in der Volumeneinheit in jedem Augenblick n Teilchen, dann werden in der Zeit $\mathrm{d}t$ so viel Teilchen gegen die Fläche A treffen, wie in dem Zylinder der Länge $c\ \mathrm{d}t$ enthalten sind, d. h. $nAc\ \mathrm{d}t$ Teilchen. Der gesamte gegen die Fläche A wirkende Impuls ist

$$\mathrm{d}I = nmcAc\ \mathrm{d}t.$$

Wird der Impuls von der Fläche A restlos aufgefangen (was vollständiger Absorption der Strahlung entspricht), so ist die zeitliche Impulsänderung $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ gleich der wirkenden Kraft. Ihr Quotient mit der Fläche A ist der Strahlungsdruck $p = \frac{\mathrm{d}I}{A\mathrm{d}t}$, d. h.

$$\text{a)}\quad p = nmc^2.$$

Jedes der n Teilchen führt aber die Energie $h\nu$ bei sich, so daß die Energiedichte gleich

$$\text{b)}\quad w = nh\nu$$

ist; denn n ist die Teilchenzahl je Volumeneinheit. Wegen der Wesensgleichheit von

Energiedichte und Strahlungsdruck (S. 358) kann man $p = w$ setzen und erhält so aus den Gleichungen a) und b)

(297) $\quad h\nu = mc^2.$

Die Bedeutung der letzten Gleichung wird noch umfassender, wenn man gemäß Gleichung (295) $h\nu = W$ setzt, wonach sich $m = \frac{W}{c^2}$ und damit $W = mc^2$ ergibt. Diese Gleichung bringt die fundamentale Tatsache zum Ausdruck, daß die Masse m eines Teilchens (z. B. eines Elektrons) sich in eine entsprechende Energiemenge umrechnen läßt, indem man sie mit Faktor c^2 multipliziert.

(298) $\quad \boxed{W = mc^2}$ **Masse-Energie-Beziehung**

Ja, weiter noch: Bei atomphysikalischen Untersuchungen hat sich einwandfrei experimentell ergeben, daß diese Umwandlung unter besonderen Verhältnissen *tatsächlich* stattfinden kann! Auch der umgekehrte Vorgang, bei dem sich aus einer Strahlung elektromagnetischer Wellen Masseteilchen bilden, ist beobachtet worden.
Während man früher Masse und Energie als völlig getrennte physikalische Erscheinungen betrachtet hatte und auch in den üblichen physikalischen Gleichungen die Größen m und W grundverschiedene Bedeutung haben, so zeigt sich doch heute, daß beide Größen in einer tiefen inneren Beziehung zueinander stehen. Es gibt keine Masse, die nicht gleichzeitig eine bestimmte Energie und keine Energie, die nicht gleichzeitig eine bestimmte Masse darstellt. Klarheit über dieses wechselseitige Verhältnis bringt erst die Philosophie des dialektischen Materialismus.
Hiernach faßt man unter dem Oberbegriff der „Materie" auch die Gesamtheit aller physikalischen Objekte zusammen. Alles, was außerhalb und unabhängig vom Bewußtsein des Menschen existiert, ist Materie. Stoff und Feld, Masse und Energie, Elementarteilchen und Strahlungsquanten dagegen sind spezielle Formen oder Eigenschaften dieser Materie. Die frühere Auffassung, wonach die stoffliche Seite der physikalischen Erscheinungen materieller und die energetische Seite nichtmaterieller Art sei, ist demnach irrig. Die EINSTEINsche Formel $W = mc^2$ ist der beste physikalische Beweis für die materielle Einheit der Welt.
Möglichkeiten, derartig gewaltige Energiemengen frei zu machen, bieten die modernen Anlagen zur Gewinnung von **„Atomenergie"**.

Beispiel: Eine einfache Rechnung läßt erkennen, daß selbst in kleinen Mengen von Masse ungeheure Energiemengen konzentriert sind. Nimmt man z. B. 1 g irgendwelcher Masse an, so liefert die letzte Gleichung $W = mc^2 = 1\,\mathrm{g} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2/s^2} = 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Ws}$ oder 25 Millionen Kilowattstunden.

34.4. Relativistische Massenzunahme

Eine besonders wichtige Rolle spielt die soeben abgeleitete Masse-Energie-Beziehung bei der Dynamik bewegter Massen. Denn auch die kinetische Energie eines bewegten Körpers muß nach der Gleichung (298) einer bestimmten zusätzlichen Masse entsprechen, welche die anfänglich vorhandene **Ruhmasse** m_0 vergrößert.

Ebenso wie die Gleichung (298) $W = mc^2$ folgt auch diese Massenzunahme aus der speziellen Relativitätstheorie EINSTEINS. Hiernach hat ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegender Körper die vergrößerte Masse

(299) $$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$ **Impulsmasse** m

Herleitung: Ohne Zuhilfenahme der Relativitätstheorie läßt sich die Gleichung (299) auch auf direktem Weg gewinnen. Hierzu geht man vom dynamischen Grundgesetz (6.1.) aus, in dem NEWTON die auf einen Körper einwirkende Kraft F als die zeitliche Änderung des Impulses mv definierte:

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}.$$

Nimmt man an, daß nicht nur die Geschwindigkeit v, sondern auch die Masse m veränderlich ist, so erhält man nach der Produktregel

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

und nach Erweitern mit dem zurückgelegten Weg $\mathrm{d}s$:

$$F\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v + v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m.$$

Auf der linken Gleichungsseite steht jetzt die verrichtete Arbeit $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s$. Außerdem ist $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ und damit

$$\mathrm{d}W = mv\,\mathrm{d}v + v^2\,\mathrm{d}m.$$

Diese Arbeit $\mathrm{d}W$ ist jetzt in dem bewegten Körper als Bewegungsenergie enthalten. Nach Gleichung (298) entspricht ihr eine Zusatzmasse gemäß $\mathrm{d}W = c^2\mathrm{d}m$. Dies eingesetzt, ergibt

$$mv\,\mathrm{d}v = (c^2 - v^2)\,\mathrm{d}m.$$

Nach Umstellung läßt sich diese Gleichung beiderseits integrieren:

$$\int\frac{\mathrm{d}m}{m} = \int\frac{v\,\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}, \text{ wobei sich}$$

$$\ln m = -\frac{1}{2}\ln(c^2 - v^2) + \ln C$$

ergibt. Die Integrationskonstante $\ln C$ folgt aus der *Anfangsbedingung*, d. h., man setzt für den Ruhezustand ($v = 0$) die Masse $m = m_0$. Setzt man dieses Wertepaar ein, so ist

$$\ln C = \ln m_0 + \frac{1}{2}\ln c^2.$$

Die Gleichung lautet somit

$$\ln m = \ln m_0 + \frac{1}{2}\ln c^2 - \frac{1}{2}\ln (c^2 - v^2)$$

oder umgeformt

$$\ln \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2}\ln \frac{c^2}{c^2 - v^2}.$$

Nach Entlogarithmieren erhält man

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}}$$

und schließlich

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Bei den herkömmlichen, in der Technik vorkommenden Geschwindigkeiten ist das im Radikanden stehende Verhältnis $(v/c)^2$ eine so kleine Zahl, daß die Massenzunahme unmerklich gering ist und nie festgestellt werden kann. Erst bei Geschwindigkeiten, die der des Lichtes vergleichbar werden, wird der Massenzuwachs beachtlich. Man sieht auch leicht ein, daß kein Körper jemals die Lichtgeschwindigkeit c erreichen kann; denn in diesem Fall hätte der Nenner den Betrag Null, und die Masse m wäre unendlich groß, wozu wiederum eine unendlich große Energie aufgebracht werden müßte.

Kein Körper kann die Lichtgeschwindigkeit c erreichen.

Allein die Quanten des Lichtes und der übrigen elektromagnetischen Strahlungen bewegen sich mit der Lichtgeschwindigkeit c. Da ihre Masse natürlich nicht unendlich groß ist, muß sie im Ruhezustand den Betrag Null haben, wenn die Gleichung (299) gültig bleiben soll. Doch ist dieser Fall an sich bedeutungslos, da es Lichtquanten im Ruhezustand nicht gibt.

Die Richtigkeit der Gleichung (299) bestätigt sich vor allem bei den großen, für Forschungszwecke gebauten Beschleunigungsgeräten für Elementarteilchen. Nur wenn die relativistische Massenzunahme beim Bau derartiger Einrichtungen sorgfältig berücksichtigt wird, können sie einwandfrei arbeiten.

34.5. Dualismus Welle-Korpuskel

Alle elementaren Teilchen nennt man auch **Korpuskeln.** Besonders bekannte Beispiele sind die Elektronen, Protonen und Neutronen, die Bestandteile aller Atome. Wie wir feststellen konnten, haben aber auch die Strahlungsquanten korpuskulare Eigenschaften. Auf Grund der Gleichung (297) $h\nu = mc^2$ kann man sich nun recht gut vorstellen, daß auch umgekehrt korpuskulare Teilchen Welleneigenschaften haben

könnten, eine Vermutung, die zuerst von dem Franzosen LOUIS DE BROGLIE (1924) ausgesprochen wurde.
Ohne auf die Theorie selbst einzugehen, führen wir in die genannte Gleichung (297) anstelle der Frequenz ν die Wellenlänge λ ein und erhalten daraus $\frac{hc}{\lambda} = mc^2$ oder auch

$$\lambda = \frac{h}{mc}.$$

Das Produkt mc ist der Impuls des Strahlungsquantes. Überträgt man diese Gleichung auf ein Korpuskel, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, so ist sein Impuls gleich mv. Daraus folgt

(300) $$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$ **Wellenlänge λ eines Korpuskels**

Die von DE BROGLIE aufgestellte Beziehung konnte bald darauf durch entsprechende Experimente bestätigt werden. Schnell bewegte Elektronen zeigten beim Durchgang durch Kristalle Beugungs- und Interferenzerscheinungen, wie sie bisher nur bei den Wellen der Röntgenstrahlung bekannt waren.

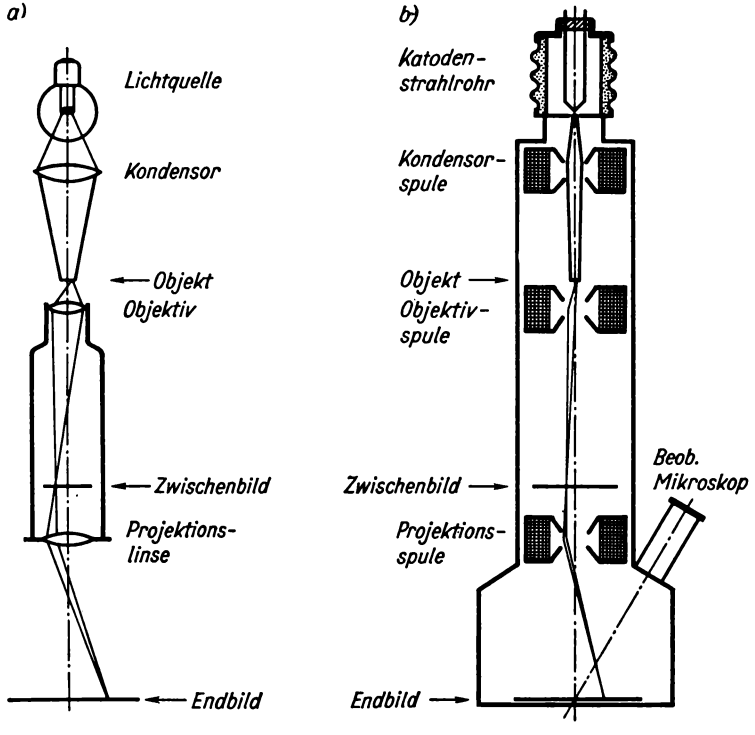


Bild 450. Strahlengang im (a) optischen und (b) magnetischen Elektronen- Mikroskop

Zusammengefaßt mit den entsprechenden Eigenschaften der Strahlungsquanten nennt man dieses eigentümliche Verhältnis den

Dualismus Welle-Korpuskel:
Jede elektromagnetische Welle stellt zugleich einen Teilchenstrom dar, und jedes Korpuskel gehört einer Welle an.

In der herkömmlichen Physik muß man Wellen und Teilchen als zwei Erscheinungen betrachten, die sich gegenseitig ausschließen. Es ist auch unmöglich, beide anschaulich miteinander zu verbinden. Man muß aber feststellen, daß im Bereich der Strahlungsquanten und elementaren Korpuskeln sowohl reine Wellen als auch reine Teilchen *nicht wirklich* existieren. Die Quanten sind weder Wellen noch Korpuskeln, sondern physikalische Objekte, die man je nach der Eigenschaft, die man hervorheben will, in grober Weise mit Wellen oder Teilchen vergleichen kann.
Eine wichtige Anwendung dieser Erkenntnis ist das **Elektronenmikroskop** (Bild 450). Schnell bewegte Elektronen werden in *elektrischen oder magnetischen Feldern* (Elektronenlinsen) so gelenkt wie die Lichtstrahlen in einem Lichtmikroskop (Bild 451).
Werden die von der Katode emittierten Elektronen beispielsweise mit der Spannung $U = 15000\ \mathrm{V}$ beschleunigt, so erhalten sie die Energie $W = eU$, wobei e die Elementarladung $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As ist. Durch Gleichsetzen mit der kinetischen Energie $\frac{mv^2}{2}$ ergibt sich die Geschwindigkeit der Elektronen (43.1.)

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

und nach Gleichung (300) ihre Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}.$$

Mit der Elektronenmasse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg errechnet man $\lambda = 0{,}01$ nm.
Da das Auflösungsvermögen eines Mikroskops (31.5.3.) mit kleiner werdender Wellenlänge zunimmt, sieht man, daß dieses beim Elektronenmikroskop erheblich größer als beim Lichtmikroskop sein muß.

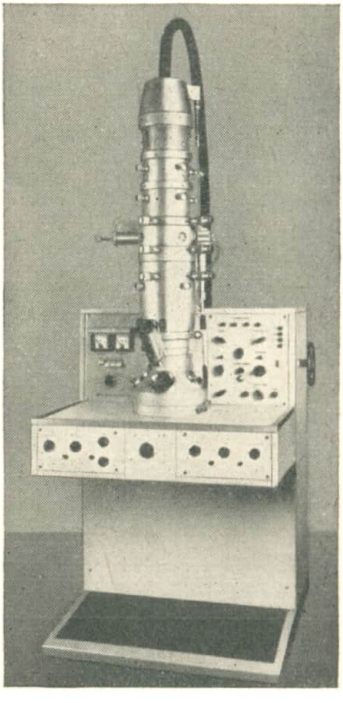


Bild 451. Elektronenmikroskop SEM 3

34.6. Heisenbergsche Unschärfebeziehung

Soeben wurde gesagt, daß jede elektromagnetische Welle einen Teilchenstrom darstelle. Lichtquanten und andere Elementarteilchen müßten sich demnach so verhalten wie winzig kleine Geschosse, von denen jedes einzelne eine exakt gerade Bahn beschreibt. Um das zu prüfen, sei ein paralleles Lichtbündel durch einen schmalen Spalt von der Breite Δx geschickt (Bild 452). Wenn es jenseits des Spaltes als paralleles Bündel weiterläuft, so gilt das aber nur bei oberflächlicher Betrachtung; denn wir wissen, daß stets eine seitliche Beugung auftritt, die sich mit keinem Mittel verhindern läßt. Für den nach dem 1. Minimum hin zielenden Winkel gilt nach 31.5.1., Gleichung (274):

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

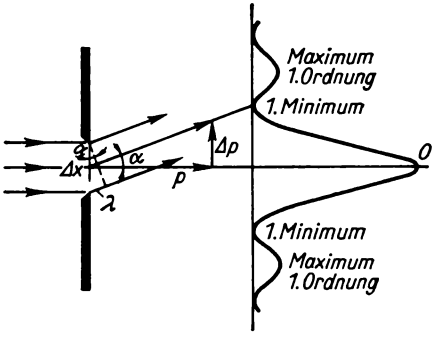


Bild 452. Beugung am einfachen Spalt. Die rechte Kurve deutet die Intensitätsverteilung auf dem Bildschirm an

Diese Beugung kann man auch in folgender Weise beschreiben. Die Teilchen erfahren eine seitliche Ablenkung von unterschiedlicher Größe. Viele von ihnen gehen ungefähr geradeaus weiter und ergeben das Maximum 0. Ordnung, ein kleinerer Prozentsatz läuft nach dem Maximum 1. Ordnung, ein noch kleinerer Teil nach dem Maximum 2. Ordnung usw.
Betrachtet man nur die in den Bereich des Maximums 0. Ordnung fallenden Teilchen und bezeichnet den Impuls der unabgelenkt durchlaufenden Teilchen mit p, so erfahren sie innerhalb dieses Spielraums eine seitliche Impulsschwankung von $\Delta p = p\tan\alpha \approx p\sin\alpha$. Durch Einsetzen von Gleichung (274) erhält man

$$\Delta x \cdot \Delta p = p\lambda.$$

Die Wellenlänge eines Teilchens hängt aber mit seinem Impuls nach der DE BROGLIEschen Beziehung (300) $\lambda = \frac{h}{p}$ zusammen. Damit entsteht

(301) $\boxed{\Delta x \cdot \Delta p = h}$ [1]) **Heisenbergsche Unschärfebeziehung**

Dieses von HEISENBERG im Jahre 1927 entdeckte Gesetz, auch häufig **Unbestimmtheitsrelation** genannt, besagt u. a., daß es prinzipiell *unmöglich* ist, den raumzeitlichen Bewegungsablauf eines Mikroteilchens (Lichtquant, Elektron) mit den herkömmlichen Begriffen der klassischen Physik *exakt* zu beschreiben; denn je genauer man

[1]) Genauere Untersuchungen ergeben $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{2\pi}$; der Unterschied ist für viele Betrachtungen belanglos

den Ort des Teilchens, etwa durch Verkleinerung der Spaltbreite Δx, festlegen will, desto größer wird die Unkenntnis Δp seines Impulses. Es kann daher niemals genau gesagt werden, welche Richtung *ein bestimmtes* Teilchen einschlagen wird, sondern nur, in welcher Weise sich *viele Teilchen* auf dem Schirm verteilen werden. Von einem einzelnen Teilchen kann nur gesagt werden, wie groß die *Wahrscheinlichkeit* dafür ist, daß es nach einer bestimmten Richtung laufen wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist erst aus dem Verhalten einer sehr großen Anzahl von Teilchen nach ihrem Eintreffen auf dem Bildschirm erkennbar. Sie verteilen sich dort so, als ob eine Wellenbewegung vorläge.

Beispiel: Ein Schrotkorn von 1 mm Durchmesser und der Masse $6 \cdot 10^{-6}$ kg fliegt durch eine Öffnung, wobei ein seitlicher Spielraum von $\Delta x = 0{,}01$ mm vorhanden sei. Daraus folgt eine Unbestimmtheit der Geschwindigkeit von

$$\Delta v = \frac{h}{m \Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2}}{6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg}\ 10^{-5}\ \mathrm{m}} \approx 10^{-23}\ \mathrm{m/s}\,.$$

Da Geschwindigkeiten niemals so genau gemessen werden können, ist die Unschärfebeziehung demnach für große Teilchen ohne praktische Bedeutung.

35. Fotometrie

Wie beim Schall muß man auch beim Licht wohl unterscheiden zwischen den physikalischen Vorgängen als Ursache und den entsprechenden Sinnesempfindungen als Wirkung. Ursache ist stets eine **Strahlung.** Erst ihre Wirkung auf das Auge erzeugt **Licht** (Lichtempfindungen können auch andere Ursachen haben, z. B. Druck auf den Augapfel, nervöse Störungen usw.). Wir haben bisher ausschließlich Gesetzmäßigkeiten der Strahlung behandelt. Es ist aber so, daß hinsichtlich der Lichtempfindung besondere Gesetze bestehen, die nicht physikalischer, sondern physiologischer Art sind.

35.1. Spektrale Empfindlichkeit des Auges

Bei gewöhnlicher Betrachtung des Spektrums fällt die Helligkeit des mittleren Teils auf, obwohl die auf die verschiedenen Spektralbereiche fallende Energie ungefähr gleich ist. Für eine bestimmte Gruppe von Wellenlängen ist daher das Auge am empfindlichsten. Sie liegt im Durchschnitt vieler Versuchspersonen bei $\lambda = 555$ nm (Bild 453). Dies betrifft allerdings nur die bei heller Beleuchtung reagierenden **Zapfen** der Netzhaut. Die im Bereich der größten Sehschärfe fehlenden **Stäbchen** treten erst bei sehr *schwacher* Netzhautbeleuchtung (in der Dämmerung) in Tätigkeit. Ihre größte Empfindlichkeit liegt bei 510 nm. Vor allem aber vermögen die *Stäbchen keine Farben* zu unterscheiden, sondern sind in weitaus höherem Maße gegen Hell und Dunkel empfindlich. Bei Nacht funktioniert also grundsätzlich ein anderer Sehapparat als bei Tage.

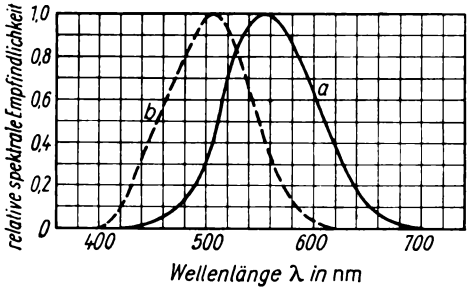


Bild 453. Spektrale Empfindlichkeit des Auges
a) bei Tageslicht und
b) in der Dämmerung

35.2. Farben

Das kontinuierliche Spektrum zeigt eine Reihe ineinander übergehender Farben. Man nennt sie **Spektralfarben,** und man kann sagen:

Jede Wellenlänge erzeugt eine bestimmte Farbe.

Es gibt aber zahllose Farben, die man im Spektrum vergeblich sucht: Rosa, Braun, Olivgrün usw. (Es gibt Kataloge mit mehreren tausend Farben!) Die Umkehrung dieses Satzes kann demnach nicht zutreffen. Vielmehr lassen sich die meisten Farben nicht einfach in Wellenlängen ausdrücken. Sie entstehen nach eigentümlichen nichtphysikalischen Gesetzen.
Verdeckt man z. B. aus einem kontinuierlichen Spektrum den gelb erscheinenden Abschnitt und zieht sodann das Spektrum mit Hilfe einer Zylinderlinse wieder zusammen, so erscheint der beiderseits stehengebliebene Rest des Spektrums nach seiner Wiedervereinigung blauviolett. Man sieht hier also *keine unbestimmte* Mischfarbe, sondern eine *reine Farbe*, die man auch im Spektrum findet. Man nennt sie die **Komplementärfarbe** zu Gelb. Beide Komplementärfarben müssen *zusammen wieder Weiß* ergeben, da nunmehr alle Wellenlängen des Spektrums beisammen sind:

Komplementärfarben ergänzen sich zu Weiß

Herausgefangener Teil des Spektrums:	Rot	Orange	Gelb	Gelbgrün	Grün
Komplementärfarbe (Mischfarbe des Restes):	Blaugrün	Blau	Blauviolett	Violett	Purpur usw.

Hierbei erscheint allerdings eine Farbe, die im Spektrum nicht enthalten ist: das Purpur. Dies ist die einzige Ausnahme.
Die reinen Farben lassen sich zu einem Kreis ordnen, dessen einzelne farbige Sektoren so liegen, daß die zusammengehörigen Komplementärfarben jeweils einander gegenüberliegen. Eine solche Zusammenstellung nennt man einen **Farbenkreis** (Bild 454 bzw. Farbentafel 6). Das im Spektrum nicht vorhandene Purpur ist das Bindeglied,

welches das beiderseits offene Spektrum zu einer stetigen, in sich geschlossenen Farbenfolge schließt.

Das farbige Aussehen von Gegenständen bezeichnet man als **Körperfarbe.** Es kommt durch Absorption bestimmter Wellenlängen zustande.

Wenn ein Körper beispielsweise viel Rot absorbiert, muß er den Rest des Spektrums reflektieren, womit er in der Komplementärfarbe erscheint, d. h. in diesem Falle blaugrün. An der Oberfläche des Körpers wird aber ein gewisser Anteil des Gesamtspektrums, d. h. reines Weiß reflektiert, außerdem wird ein gewisser Anteil des Gesamtspektrums vom Körper absorbiert (Bild 455). Das reine Blaugrün ist mithin von einem helleren oder dunkleren Grau überlagert, wodurch es trübe und stumpf erscheint. Der Farbcharakter ändert sich dadurch vollständig. Es entsteht eine **verhüllte Farbe.**

Auf diese Weise kommt die reiche Vielfalt der möglichen Farbnuancen zustande, die man im täglichen Leben beobachten kann. Zugleich ist damit das Prinzip gegeben, wie man jeden beliebigen Farbton erzeugen kann:

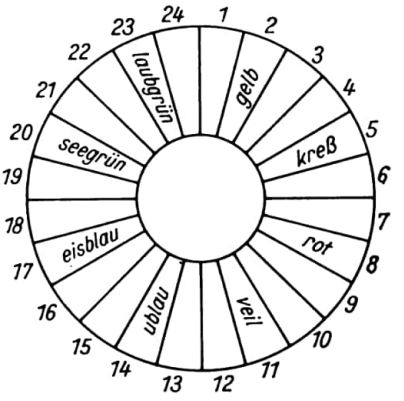


Bild 454. Farbenkreis

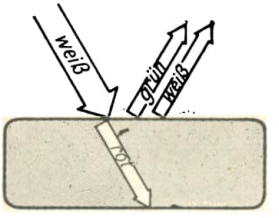


Bild 455. Entstehung einer Körperfarbe (weißverhülltes Grün)

Jede beliebige Farbe kann durch Mischen einer reinen Farbe mit Schwarz oder Weiß hergestellt werden.

Mischt man z. B. Rot mit zunehmenden Anteilen Schwarz, so tritt *nicht nur* eine Verdunklung ein, sondern gleichzeitig eine *Verfärbung* nach dunkelbraunen Tönen. Mischen mit Weiß ergibt rosa Töne. Alle Abstufungen dieses einen Rots ordnen sich zu einem **farbtongleichen Dreieck (Verhüllungsdreieck,** Farbentafel, Bild **7).**

Die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Farben in ein geschlossenes System zu bringen ist Gegenstand der **Farbmetrik.** Sie beruht darauf, daß sich jede vom Auge erkannte **Farbvalenz** durch additive Farbmischung aus **3 Primärvalenzen** herstellen läßt und entsprechend deren relativen Anteilen mittels dreier **Farbmaßzahlen** in Form einer vektoriellen Gleichung ausgedrückt werden kann. Als Primärvalenzen gelten nach internationaler Vereinbarung

rot: $\lambda = 700{,}0$ nm
grün: $\lambda = 546{,}1$ nm
blau: $\lambda = 435{,}8$ nm

35.3. Fotometrische Grundgrößen

Eigenschaften und Wirkungen von Strahlungsquellen kann man nach zweierlei Gesichtspunkten bestimmen:

1. physikalisch, d. h. auf Grund der Anzeige von Meßgeräten (Kalorimeter, Thermoelemente, Fotozellen u. ä.), in denen die Strahlungsenergie objektiv gemessen wird. Sie registrieren die Größen des Strahlungsfeldes in Watt, Watt/Quadratmeter usw. ohne Rücksicht darauf, ob das Auge davon etwas wahrnimmt oder nicht;

2. physiologisch, d. h. auf Grund des Eindrucks, den das Licht auf das menschliche Auge macht. Die praktische **Fotometrie** (Lichtmessung) interessiert sich *allein* für diese Wirkung auf den *Lichtsinn*. Diese ist aber der physikalischen Strahlungsenergie keineswegs proportional; denn das Auge ist nur für einen bestimmten Spektral*bereich* empfänglich und auch innerhalb dieses Bereiches *verschieden* empfindlich. Damit werden besondere Maßeinheiten notwendig.

35.3.1. Lichtstärke

Die in der Photometrie verwendete Grundgröße ist die **Lichtstärke** J.

Einheit der Lichtstärke J: 1 Candela = 1 cd

Man versteht darunter den 60. Teil derjenigen Lichtstärke, mit der 1 cm² des Schwarzen Körpers (33.2.2.) beim Erstarrungspunkt des Platins (2042,2 °K) senkrecht zu seiner Oberfläche strahlt. Damit hat man sich von allen Zufälligkeiten einer bestimmten Lichtquelle unabhängig gemacht. Nach dem Schwarzen Körper werden **Sekundärnormale** geeicht (sorgfältig hergestellte, gealterte Glühlampen).
Vor der 1948 erfolgten Einführung der Candela war die **Hefner-Kerze** (HK) in Gebrauch. Diese ist ein Brenner, der eine Flamme von 40 mm Höhe und 8 mm Dochtdurchmesser mit Amylazetat speist. Es gilt die Lichtstärke in horizontaler Richtung. Die Flamme hat den Nachteil, daß ihre Lichtstärke vom CO_2-Gehalt, dem Druck und der Feuchtigkeit der Luft abhängt. Für die Umrechnung der Candela in HEFNER-Kerzen gilt bei einer Farbtemperatur von 2042 °K die Beziehung: 1 cd = 1,107 HK.

Die Lichtstärke der gebräuchlichen Lichtquellen ist infolge der besonderen Gestalt des Leuchtkörpers (z. B. zickzack- oder ringförmiger Leuchtdraht, Form des Reflektors usw.) nach *jeder* Richtung des Raumes verschieden. Genaue Auskunft über die Lichtstärke gibt dann die **Lichtverteilungskurve** (Bild 456). Für andere Lampen gleichen Typs müssen die Werte entsprechend umgerechnet werden.
Wenn die Lichtquelle die Gestalt einer ebenen, vollkommen diffus strahlenden Fläche hat, ist deren Lichtstärke proportional dem Cosinus des Winkels zwischen der Flächennormalen und der Beobachtungsrichtung. Hat sie in Richtung der Flächennormalen den Wert J, dann ist sie in der um den Winkel α davon abweichenden Richtung gleich $J \cos \alpha$ (Bild 457). Die Lichtverteilungskurve muß daher ein Kreis sein.

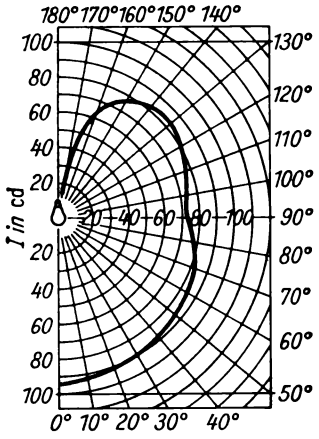


Bild 456. Lichtverteilungskurve einer elektrischen Glühlampe in der Ebene der Lampenlängsachse, bezogen auf einen Lichtstrom von 1000 lm

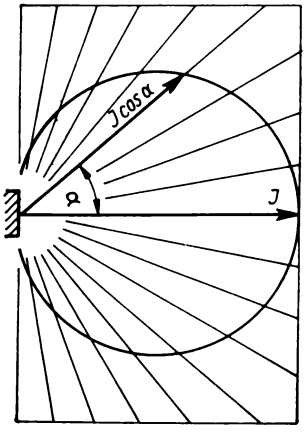


Bild 457. Lichtverteilung eines LAMBERT-Strahlers

Lambertsches Gesetz (1760):
Die Lichtstärke einer strahlenden Fläche ist dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels proportional.

Einen Strahler, für den dieses Gesetz zutrifft, nennt man einen **Cosinus-** oder **Lambertstrahler.** Näherungsweise kann man einen LAMBERT-Strahler durch eine mattweiß angestrichene, vom parallelen Sonnenlicht beschienene Papptafel darstellen.

35.3.2. Lichtstrom

Als Strahlungsfluß Φ_e wurde – s. Gleichung (280) – der Quotient aus der von einer Strahlungsquelle emittierten oder einem Empfänger aufgefangenen Energie und der dazugehörigen Zeit definiert. Ihm entspricht in der Fotometrie der **Lichtstrom** Φ.

Einheit des Lichtstromes Φ: 1 Lumen = 1 lm

Der Lichtstrom stellt also ebenfalls eine je Zeiteinheit in den Raum strömende Energiemenge dar. Diese wird allerdings nicht in physikalischen Energieeinheiten gemessen, und zwar aus folgendem Grund:
Da das Auge in jedem Wellenbereich eine andere Empfindlichkeit hat (Bild 453), kann eine direkte Beziehung zwischen der Einheit des Strahlungsflusses (Watt) und der Einheit des Lichtstromes (Lumen) *nur* für eine *bestimmte* Wellenlänge bestehen. Für das Maximum der Augenempfindlichkeit ($\lambda = 555$ nm) ergibt sich folgende Beziehung:

(302) $\boxed{K_{max} = 680\,\mathrm{lm/W}}$ **fotometrisches Strahlungsäquivalent K_{max}**

Eine monochromatische *Strahlungs*quelle dieser Wellenlänge, die den physikalisch gemessenen Strahlungsfluß 1 W erzeugt, stellt für das Auge eine *Licht*quelle von 680 lm dar. Ein Strahler dagegen, der rotes Licht von $\lambda = 640$ nm emittiert, ergibt je Watt nur $0{,}2 \cdot 680$ lm $= 136$ lm; denn für diese Wellenlänge ist nach Bild 453 die relative spektrale Empfindlichkeit des Auges nur 0,2.

Ist die Lichtquelle punktförmig, dann verteilt sich ihr Lichtstrom in den gesamten, die Quelle umgebenden Raum. Irgendeine in den Lichtstrom gestellte Empfängerfläche wird aber nur einen Teil davon erhalten, der durch den Lichtkegel bestimmt ist, in dessen Spitze die Lichtquelle liegt. Zur rechnerischen Erfassung dieses Anteils benutzt man den **Raumwinkel** ω.

Das Bogenmaß eines ebenen Winkels erhält man bekanntlich als Quotient der Bogenlänge eines Kreises und dessen Radius, d. h. $\alpha = \frac{b}{r}$. Analog hierzu definiert man den **Raumwinkel** ω als Quotient aus dem gegebenen Teil einer Kugeloberfläche (Bild 458) und dem Quadrat des Radius:

(303) $$\boxed{\omega = \frac{A}{r^2}}$$ **Raumwinkel** ω

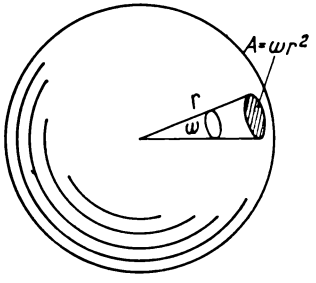


Bild 458. Zur Definition des Raumwinkels

Für den *vollen* Raumwinkel muß man von der *ganzen* Kugelfläche $4\pi r^2$ ausgehen und erhält dann $\omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$.

Der Halbraum umfaßt den Raumwinkel $\omega = 2\pi$. Dem Raumwinkel 1 entspricht ein vom Kugelmittelpunkt ausgehender Kreiskegel, der aus der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 m die Fläche 1 m² ausschneidet.

Damit ergibt sich auch der Zusammenhang des Lichtstromes mit der Lichtstärke. Die Lichtstärke ist definiert als der Quotient aus dem Lichtstrom und dem von ihm erfüllten Raumwinkel. Weil sich der Lichtstrom in durchaus unregelmäßiger Weise (Lichtverteilungskurve, Bild 456) im Raum verteilen kann, benutzt man den Differentialquotienten:

(304) $$\boxed{J = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}}$$ **Lichtstärke** J

Hieraus erhält man durch Integration über den jeweiligen Bereich des Raumwinkels den Lichtstrom

(305) $$\Phi = \int J \, \mathrm{d}\omega.$$

Strahlt z. B. eine ideal punktförmige Lichtquelle nach allen Richtungen mit gleicher Lichtstärke, dann ist J eine Konstante, und der in den gesamten Raumwinkel 4π abgegebene Lichtstrom ist

$$\Phi = 4\pi J.$$

Hieraus folgt:

1 Lumen (lm) ist der Lichtstrom, den eine Lichtquelle von der richtungsunabhängigen Lichtstärke 1 cd in den Raumwinkel 1 ausstrahlt.

Man kann das auch so ausdrücken (Bild 459):

Eine punktförmige Lichtquelle von 1 cd strahlt auf eine in 1 m Abstand befindliche Kugelfläche von 1 m² den Lichtstrom 1 lm.

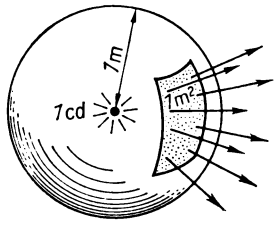


Bild 459. Einheit des Lichtstromes

Da die Lichtstärke künstlicher Lichtquellen von der jeweiligen Beobachtungs*richtung abhängt*, ist die Angabe von „Kerzenstärken" außer Gebrauch gekommen. Man gibt dafür ihren gesamten Lichtstrom in Lumen an. Die Wirtschaftlichkeit ergibt sich dann aus dem je Watt erzielten Lichtstrom.

Lichtstrom einiger elektrischer Glühlampen

(Einfachwendel-Allgebrauchslampen 220 V)

Nennleistung in W	Lichtstrom in lm	Lichtausbeute in lm/W
15 (Vakuumlampe)	122	8,1
25 (Vakuumlampe)	230	9,2
40 (Einfachwendel)	340	8,5
60 (Einfachwendel)	600	10,0
100 (Einfachwendel)	1220	12,2
200 (Einfachwendel)	3020	15,1
100 (Natriumdampflampe)	5500	55,0
200 (Quecksilber-Höchstdrucklampe)	8500	42,5

Beispiel: Eine Punktlichtlampe erzeugt einen Lichtstrom von 80 lm. Welches ist ihre Lichtstärke, wenn angenommen wird, daß der Lichtstrom allseitig gleich ist? – Nach (305) ist

$$J = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{80}{12{,}56}\,\text{cd} = 6{,}4\,\text{cd}.$$

35.3.3. Beleuchtungsstärke

Der Bestrahlungsstärke E_e entspricht in der Fotometrie der **Beleuchtungsstärke** E. Beide Größen sind auch in gleicher Weise definiert; man hat in der Gleichung (281) nur die Einheit Watt gegen die Einheit Lumen auszutauschen und den für die allgemeinen Strahlungsgrößen üblichen Index e wegzulassen:

(306) $$E = \frac{\Phi}{A}$$

Einheit der Beleuchtungsstärke E: 1 Lux = 1 lx = 1 lm/m²

Der Lichtstrom 1 lm erzeugt auf einer Fläche von 1 m² die Beleuchtungsstärke 1 lx.

Nimmt man eine Lichtquelle an, die innerhalb des betrachteten Bereiches mit konstanter Lichtstärke J strahlt, so ist der Lichtstrom nach (305) $\Phi = J\omega$. Der Raum-

winkel ω aber ist gemäß seiner Definition (303) $\omega = \frac{A}{r^2}$, wobei A einen Ausschnitt der Kugelfläche darstellt, der an allen Stellen senkrecht zum Radius r steht. Es ist daher bei senkrechtem Strahleneinfall

$$E = \frac{J\omega}{A} = \frac{JA}{Ar^2} = \frac{J}{r^2}.$$

Bei beliebigem Einfallswinkel des Lichtes ist wieder das Gesetz (283) anzuwenden, wonach die Bestrahlungsstärke vom Cosinus des Einfallswinkels α abhängt:

(307) $$\boxed{E = \frac{J}{r^2}\cos\alpha}$$ **Beleuchtungsstärke E bei schrägem Lichteinfall**

Als Einfallswinkel gilt auch hier der Winkel zwischen der Flächennormalen und der Strahlrichtung.

Hieraus geht vor allem hervor:

Die Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.

Dies ist auch leicht verständlich, weil sich der von der Lichtquelle ausgesandte Lichtstrom mit zunehmender Entfernung auf eine immer größer werdende Fläche verteilt (Bild 460).

In der doppelten Entfernung verteilt sich derselbe Lichtstrom auf die 4fache, in der 3fachen Entfernung auf die 9fache Fläche usw., womit die Beleuchtungsstärke der Fläche immer geringer wird.

Erforderliche Beleuchtungsstärken

Straßen und Plätze	2···10 lx
Grobe Arbeiten	60 lx
Mittelfeine Arbeiten	120 lx
Lesen und Schreiben	250 lx
Technisches Zeichnen	250···600 lx
Sonnenlicht im Sommer	etwa 100000 lx
Nachts bei Vollmond	etwa 0,2 lx
Mondlose klare Nacht	etwa 0,0003 lx

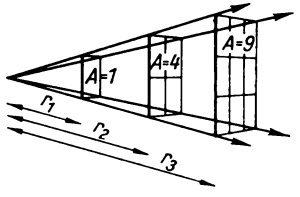


Bild 460. Abnahme der Beleuchtungsstärke mit der Entfernung

Beispiel: Eine ohne Reflektor brennende Glühlampe hat in horizontaler Richtung eine Lichtstärke von 150 cd. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke bei senkrechtem Lichteinfall in 50 m Abstand? Nach (307) ist –

$$E = \frac{150\,\text{cd}}{50^2\,\text{m}^2} = 0{,}06\,\text{lx}.$$

35.3.4. Leuchtdichte

Bei den bisher betrachteten fotometrischen Größen spielten die Abmessungen der leuchtenden Körper keine Rolle. Ein und derselbe Lichtstrom 1 lm könnte von einem kleinen Glühlämpchen, ebenso aber auch von einer großen, mondbeschienenen Wand herrühren. Auch könnte die Lichtstärke 1 cd von einer brennenden Kerze erzeugt

werden oder auch von einer Glimmlampe. Alle diese Körper haben eine recht unterschiedliche abstrahlende Oberfläche. Um diese qualitativen Unterschiede der Lichtquellen zu erfassen, benutzt man den Begriff der **Leuchtdichte** L:

Die Leuchtdichte ist der Quotient aus der Lichtstärke und der scheinbaren Oberfläche der Lichtquelle.

$$L = \frac{J}{A \cos \alpha}. \tag{308}$$

Nach dem LAMBERTschen Gesetz (35.3.1.) hängt nämlich die Lichtstärke einer flächenhaften Lichtquelle vom Beobachtungswinkel α ab. Auf Bild 461 ist angegeben, daß die Flächennormale mit der Beobachtungsrichtung den Winkel α bildet. In dieser Richtung werde die Lichtstärke J gemessen. [Im Gegensatz hierzu wurde in der Fassung des LAMBERTschen Gesetzes (35.3.1) die Lichtstärke in der *Flächennormalen* mit J bezeichnet!] Von dieser Richtung her gesehen erscheint nicht die wahre Größe der Fläche A im Gesichtsfeld, sondern deren Projektion $A \cos \alpha$ auf die senkrecht zur Strahlrichtung stehende Ebene. Diese Projektion ist die **scheinbare Fläche** der Lichtquelle.

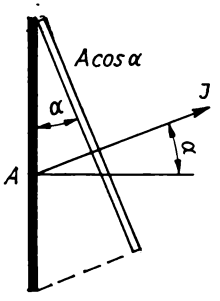


Bild 461. Wahre und scheinbare Oberfläche

Meistens bezieht man die Einheit der Leuchtdichte nicht auf 1 m², sondern auf 1 cm²:

Einheit der Leuchtdichte L: 1 Stilb = 1 sb = 1 cd/cm².

Leuchtdichten verschiedener Lichtquellen (in sb)

Nachthimmel	10^{-7}	Krater der Kohlebogenlampe	18000
Neonlampe	0,1	Sonne	100000 ··· 150000
Leuchtdraht einer Wolframglühlampe	500 ··· 3500	Quecksilber-Höchstdrucklampe (handelsüblich) bis	50000

Bei zu großer Leuchtdichte wird das Auge von der Lichtquelle **geblendet.** Deswegen werden Glühlampen mattiert, wodurch die strahlende Oberfläche bei gleicher Lichtstärke vergrößert und die Leuchtdichte erträglicher wird.
Beim Anblick der Sonne oder des Mondes mag es auffallen, daß diese kugelförmigen Lichtquellen keineswegs den Eindruck körperlicher Gebilde machen, sondern als leuchtende Scheiben gleichmäßiger Leuchtdichte erscheinen:

Die Leuchtdichte eines allseitig gleichmäßig strahlenden Körpers ist innerhalb der scheinbaren Oberfläche konstant.

Dies hängt mit dem LAMBERTschen Gesetz zusammen. Zerlegt man die Oberfläche einer strahlenden Kugel (Bild 462) in gleich große Teilflächen ΔA und liefert die Fläche ΔA in Richtung ihrer Normalen den Anteil ΔJ zur gesamten Lichtstärke der Kugel, so ist die Leuchtdichte $L = \frac{\Delta J}{\Delta A}$. Eine andere, um den Winkel α gegen die Blickrichtung geneigte Teilfläche ergibt zwar die Lichtstärke $J \cos \alpha$, hat

aber nur die scheinbare Fläche $\Delta A \cos\alpha$. Ihre Leuchtdichte ist daher ebenfalls $L = \frac{\Delta J \cos\alpha}{\Delta A \cos\alpha} = \frac{\Delta J}{\Delta A}$

Oftmals interessiert auch die Leuchtdichte von Flächen, die von einer anderen Lichtquelle angestrahlt werden. Hat diese die Stärke J, den Abstand r von der beleuchteten Fläche und reflektiert diese das Licht ohne jeden Verlust und vollkommen diffus, so ist

(309) $\boxed{L = \frac{J}{\pi r^2}}$ **Leuchtdichte L einer angestrahlten weißen Fläche**

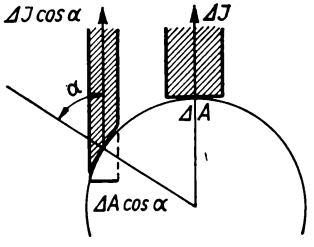


Bild 462. Leuchtdichte einer Kugel

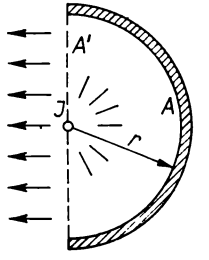


Bild 463. Diffus reflektierende Halbkugel

Herleitung: Eine punktförmige Lichtquelle der Stärke J befinde sich nach Bild 463 im Mittelpunkt einer vollkommenen und diffus reflektierenden Halbkugel vom Radius r. Dann wirkt die kreisförmige Öffnung der Halbkugel für den Betrachter wie eine Lichtquelle der Stärke J und der homogen leuchtenden scheinbaren Fläche $A' = \pi r^2$, womit sich aus (308) der Ausdruck (309) ergibt.

Beispiel: Eine vollkommen weiße Fläche wird im Abstand $r = 2$ m mit einer Lampe, deren Lichtstärke in der betrachteten Richtung 60 cd beträgt, angestrahlt. Die Leuchtdichte ist dann nach (309) $L = \frac{60\,\text{cd}}{200^2\,\text{cm}^2\,\pi} = 0{,}00048$ sb.

Geht man hingegen vom Lichtstrom Φ aus, der auf eine nicht selbstleuchtende Fläche A fällt, so ist

(310) $\boxed{L = \frac{\Phi}{\pi A}}$ **Leuchtdichte L einer vom Lichtstrom Φ getroffenen weißen Fläche**

Herleitung: Auf die Innenfläche der Halbkugel $A = 2\pi r^2$ (Bild 463) fällt nach (305) der Lichtstrom $\Phi = 2\pi J$. Die scheinbare Oberfläche ist $A' = \pi r^2 = \frac{A}{2}$. Setzt man diese Größen in (308) ein, so wird mit $J = \frac{\Phi}{2\pi}$ die Leuchtdichte $L = \frac{2\Phi}{2\pi A} = \frac{\Phi}{\pi A}$, wobei A die wahre Oberfläche ist.

35.4. Fotometrische Meßgeräte

Ein auf weißes Papier gesetzter Fleck aus geschmolzenem Stearin **(Fettfleck)** erscheint *dunkel* auf hellem Grunde, wenn man ihn gegen einen dunklen Hintergrund hält (Bild 464). Das Papier wird auf der Fensterseite heller beleuchtet als auf der dem dunklen Zimmer zugewandten. Hält man ihn gegen das Fenster, so erscheint er

hell auf dunklem Grund. Der Fleck wird *unsichtbar*, wenn das Papier auf beiden Seiten gleich stark beleuchtet wird. Die von beiden Lichtquellen erzeugten Beleuchtungsstärken sind nach (307): für $\alpha = 0°$

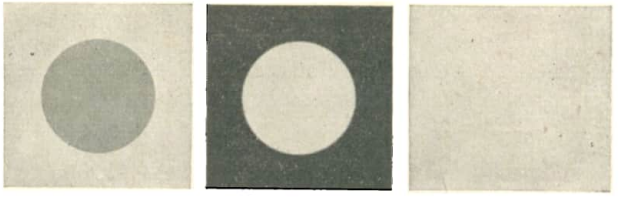


Bild 464. Fettfleck bei verschiedener Beleuchtung von Vorder- und Rückseite

$$E_1 = \frac{J_1}{r_1^2} \text{ und } E_2 = \frac{J_2}{r_2^2}.$$

Unter der Bedingung $E_1 = E_2$ ist dann

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Die Lichtstärken zweier Lichtquellen verhalten sich bei gleicher Beleuchtungsstärke wie die Quadrate ihrer Abstände von der beleuchteten Fläche.

Um die Stärke einer beliebigen Lichtquelle zu messen, setzt man sie zusammen mit einer geeigneten Glühlampe auf eine **optische Bank** und zwischen beide das **Fettfleckfotometer** (Bunsen). Mittels zweier Spiegel kann man den Fettfleck von beiden Seiten *zugleich* beobachten. Wenn der Fettfleck nach entsprechender Verschiebung des Fotometers verschwindet, ist die eben abgeleitete Gleichung erfüllt. J_2 kann dann aus der bekannten Lichtstärke J_1 errechnet werden:

$$J_2 = J_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Man bemerkt hierbei eine gewisse Schwierigkeit in der genauen Einstellung, wenn die *Farbe* der Lichtquellen *verschieden* ist. Anstatt zu verschwinden, zeigt der Fleck beiderseits eine verschiedene Färbung. Ein anderer Nachteil dieses Fotometers ist die *ungleiche Absorption* von Papier und Fettfleck.

Letzterer Nachteil wird beim **Fotometerwürfel** von Lummer und Brodhun vermieden. Zwei Glasprismen sind genau eben geschliffen und aufeinandergepreßt, die Kanten des einen jedoch kreisförmig abgerundet (Bild 465). Das von der Quelle L_1 eintretende Licht wird von dem freien Teil der Hypotenusenfläche des einen Prismas *total reflektiert*, während das von L_2 kommende Licht die Berührungsfläche beider Prismen *ungehindert* durchsetzt und hier einen „idealen Fettfleck" vorfindet. Das Licht tritt dabei nicht unmittelbar durch den Würfel, sondern über zwei Spiegel von einem beiderseits beleuchteten Gipsschirm.

Den Farbunterschied zweier Lichtquellen kann man durch vorgesetzte *Filter* ausgleichen.

Den gesamten Lichtstrom einer Lampe erfaßt man mit der **Ulbrichtschen Kugel** (Bild 466). Das Licht fällt auf die mattweiß gestrichene Innenfläche der bis zu 3 m

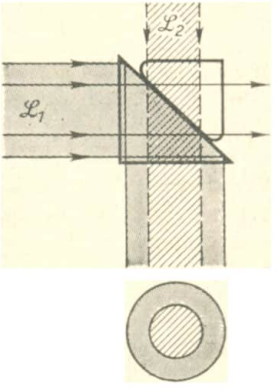


Bild 465. Fotometerwürfel von Lummer und Brodhun

großen Kugel und beleuchtet diese infolge vielfacher Reflexion gleichmäßig. In der Öffnung O sitzt eine Mattglasscheibe, deren Leuchtdichte mit einem Fotometer gemessen wird. Die Kugel wird mit einer Normallampe geeicht.
Zur unmittelbaren Messung der Beleuchtungsstärke verwendet man das **Luxmeter** (Bild 467). Es besteht aus einem Fotoelement, dessen Strom einem in Lux geeichten Mikroamperemeter zugeführt wird.

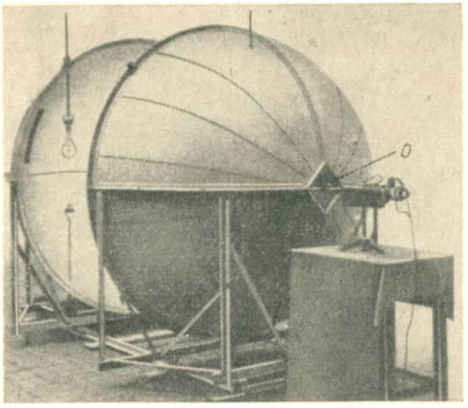


Bild 466. Ulbrichtsche Kugel

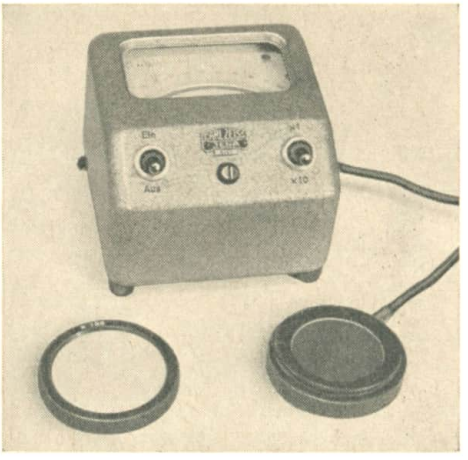


Bild 467. Tragbarer Beleuchtungsmesser (Luxmeter)

35.5. Strahlungsgrößen und fotometrische Größen

Die Größen des Strahlungsfeldes und die entsprechenden fotometrischen Größen sind einander analog aufgebaut. So stellt z. B. der Strahlungsfluß gemäß seiner Definition (280) eine Leistung dar, die man in Watt messen kann. Auch den Lichtstrom kann man als eine Leistung auffassen, wenngleich die Beziehung zwischen den Einheiten Watt und Lumen nicht durch eine einfache Umrechnung herzustellen ist. Der Strahlungsenergie als Produkt (Leistung · Zeit) läßt sich nun ebenfalls eine lichttechnische Größe gegenüberstellen, die nicht in Wattsekunden, sondern in Lumensekunden zu messen ist. Man bezeichnet sie als **Lichtmenge** Q. Sie spielt u. a. in der Fotografie eine wichtige Rolle, wobei die Schwärzung eines Films von der darauffallenden Lichtmenge abhängt.
In der folgenden Übersicht sind die einander entsprechenden physikalischen und fotometrischen Größen noch einmal zusammengestellt.

Physikalische Strahlungsgröße	Fotometrische Größe
Strahlungsmenge Q_e	Lichtmenge Q
Strahlungsfluß Φ_e	Lichtstrom Φ
Strahlstärke J_e	Lichtstärke J
Bestrahlungsstärke E_e	Beleuchtungsstärke E
Strahldichte L_e	Leuchtdichte L

Elektrizitätslehre

36. Elektrische Grundgrößen

36.1. Elektrischer Strom

Der **elektrische Strom** besteht in einem sehr langsamen Dahinströmen zahlreicher Elektronen, die sich zwischen den Atomen der Leitungsdrähte fortbewegen. Er ist als alltägliche Erscheinung in zahlreichen Geräten des Haushalts und der Technik bekannt.

Je nach ihrer Fähigkeit, den elektrischen Strom zu leiten, unterscheidet man

1. Nichtleiter (Isolatoren) (Harze, Gläser, keramische Stoffe, Schwefel, Paraffin usw.),

2. Leiter (Metalle, Kohle sowie die als **Elektrolyte** bezeichneten wäßrigen Lösungen und Schmelzen von Salzen, Säuren und Basen),

3. Halbleiter, das sind Stoffe, die ihr charakteristisches Leitvermögen erst nach besonderer Behandlung erlangen (z. B. Germanium, Silizium, metallische Sulfide und Oxide).

Zur Feststellung der Stromstärke dienen **Strommesser** (Amperemeter) (über deren Bau S. 462). Ein solches Instrument muß so angeschlossen werden, daß es vom Strom *durchflossen* wird (Bilder 468, 469).

Einheit der Stromstärke *I*: 1 A (Ampere)

Die Definition lautet (etwas vereinfacht):

> **Das Ampere ist die Stärke eines Stromes durch zwei parallele Leiter, die einen Abstand von 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom hervorgerufene Anziehungskraft je 1 m Leitungslänge $2 \cdot 10^{-7}$ Newton beträgt** (Bild 470)[1]).

(Näheres hierüber s. S. 465)

[1]) Die auf das Gesetz vom 1. 6. 1898 zurückgehende Definition des früheren internationalen Ampere (1 A scheidet in 1 s aus einer Silbernitratlösung 1,118 mg Silber ab) ist damit ungültig geworden

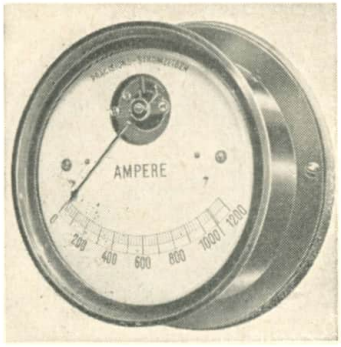


Bild 468
Strommesser

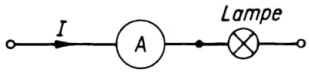


Bild 469. Anschluß eines Strommessers

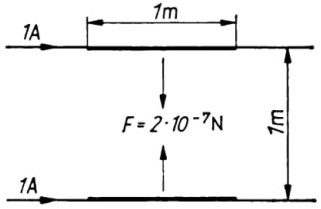


Bild 470
Definition
des Ampere

Anhaltspunkte: Durch eine Haussicherung können maximal 6 bzw. 10 A fließen, durch eine gewöhnliche Glühlampe 0,1 bis 0,5 A, durch einen Lautsprecher etwa 0,02 A.

In jeder Sekunde fließt demnach eine bestimmte *Menge von Elektronen*, kurz eine bestimmte **Elektrizitätsmenge** Q, durch den Draht, entsprechend einer gewissen *Wassermenge*, die je Zeiteinheit den Rohrquerschnitt passiert. Als Einheit der Elektrizitätsmenge wählt man diejenige, die bei einer Stromstärke von 1 Ampere *innerhalb einer Sekunde* durch den Draht fließt.

Bei *konstanter Stromstärke* I ist daher

(311) $\boxed{Q = It}$ **Elektrizitätsmenge** Q

Einheit der Elektrizitätsmenge: 1 As (Amperesekunde) = 1 C (Coulomb)

Größere Elektrizitätsmengen mißt man in **Amperestunden (Ah).**

1 Ah = 3600 As

Beispielsweise vermag eine gute Taschenlampenbatterie etwa 1,25 Ah zu liefern. Dies sind 1,25 A · 3600 s = 4500 As.

Die *kleinste* in der Natur vorkommende Elektrizitätsmenge tragen das Elektron und das Proton, und zwar

(312) $\boxed{e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}}$ **elektrische Elementarladung** e

Bruchteile dieser Elementarladung sind noch nicht beobachtet worden, nur *ganzzahlige Vielfache* davon. Bei einer Stromstärke von 1 A fließen demnach $\frac{I}{e} = \frac{1\,\mathrm{A}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}} =$ = 6,2 Trillionen Elektronen innerhalb einer Sekunde durch den Drahtquerschnitt.

Bei dieser Betrachtungsweise ist die Elektrizitätsmenge Q und nicht der Strom I die eigentliche, von der Natur vorgegebene Grundgröße. Wenn man bei der Festlegung der Einheiten der Stromstärke I den Vorzug gab, so nur deshalb, weil man es in der

Praxis meist mit Strömen zu tun hat und diese auch besonders bequem meßbar sind. Seinem Wesen nach aber ist der Strom eine abgeleitete Größe:

Der Strom ist der Quotient aus der Elektrizitätsmenge und der Zeit, in der diese durch den Querschnitt eines Leiters fließt.

Der Strom braucht jedoch nicht immer von konstanter Stärke zu sein, sondern kann (wie z. B. beim Wechselstrom) mehr oder weniger schnellen zeitlichen Schwankungen unterliegen. Dann betrachtet man ein Zeitintervall Δt, in dem die Menge ΔQ durch den Leiterquerschnitt strömt:

(313) $$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}}$$ **Stromstärke** I

Für die mathematische Berechnung zeitlich veränderlicher Ströme ist es zweckmäßig, sich das Zeitintervall Δt unendlich klein zu denken. Führt man diesen Grenzübergang durch, so entsteht der Ausdruck

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} .$$

36.2. Elektrische Spannung

Ein elektrischer Strom fließt nur so lange, wie eine bestimmte *Ursache* vorhanden ist, welche die Elektronen in Gang bringt und ihre Bewegung aufrechterhält. Ohne zunächst auf die physikalische Eigenart der sich hierbei abspielenden Vorgänge einzugehen, bezeichnet man diese Ursache allgemein als die elektrische **Urspannung** E.

Die Urspannung E ist die Ursache des Stromes.

Vorrichtungen, die in der Lage sind, eine Urspannung zu erzeugen, nennt man **Spannungsquellen.** Die Technik verwendet hierzu galvanische Elemente, Akkumulatoren, Dynamomaschinen usw. Für den Hausgebrauch ist die Steckdose eine Spannungsquelle.

Bildlich gesprochen kann man jede *Spannungsquelle* als eine *Pumpe* betrachten, die den elektrischen Strom der Leitungsdrähte in Bewegung setzt und erhält. Die hierzu nötigen Elektronen sind in den stromdurchflossenen Leitungen von vornherein schon enthalten. Die Spannungsquelle fügt *keine* Elektronen hinzu; sie sorgt nur für die Bewegung der Ladungsträger. Hierzu muß aber Energie aufgewandt werden. Das geht in allen Spannungsquellen so vor sich, daß bestimmte Kräfte auf die ursprünglich vereinigten positiven und negativen Ladungen einwirken. Sie wirken deren gegenseitiger Anziehungskraft entgegen und führen eine *räumliche Trennung* der Ladungen $+Q$ und $-Q$ herbei. Diese reichern sich an den beiden Stellen A und B (Bild 471)

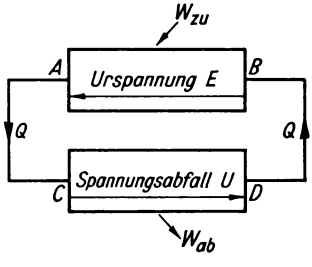


Bild 471. Zur Definition von Urspannung und Spannungsabfall

der Spannungsquelle an, und zwar so lange, bis die Spannung zwischen diesen Stellen einen bestimmten maximalen Wert erreicht hat. Dies ist die Urspannung, die auch häufig als *elektromotorische Kraft E* (abgekürzt EMK) bezeichnet wird. Die zur Ladungstrennung erforderliche Arbeit kann z. B. aus chemischer Energie (galvanische Elemente), auf mechanischem Weg (Dynamomaschine) oder durch andere Vorgänge geliefert werden.
Man kann also die Urspannung E als Quotienten aus der zur Ladungstrennung zuzuführenden Energie W_{zu} und der Menge dieser Ladung Q definieren:

(314) $$\boxed{E = \frac{W_{zu}}{Q}}$$

Ist nun die Spannungsquelle Bestandteil eines Stromkreises, so strömt die Ladung Q durch die einzelnen Teile dieses Kreises (z. B. Leitungen, Lampen, Motoren) und gibt die Energie W_{ab} dort wieder ab. Zwischen zwei beliebigen Punkten C und D dieses Kreises mißt man dann ebenfalls eine Spannung, die im Gegensatz zur Urspannung E als **Spannungsabfall** U bezeichnet wird.

Der Spannungsabfall U ist die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten eines stromdurchflossenen Leiters.

Er ist gegeben als Quotient aus der hier abgegebenen Energie und der Elektrizitätsmenge Q, die den Energietransport vermittelt:

(315) $$\boxed{U = \frac{W_{ab}}{Q}}$$

Schreibt man hier anstelle der Ladung Q nach Gleichung (311) das Produkt It, so wird daraus

$$U = \frac{W_{ab}}{It},$$

wo wiederum der Quotient $\frac{W_{ab}}{t}$ die zwischen den Punkten C und D des Leiters abgegebene *Leistung* P_{ab} darstellt:

(316) $$\boxed{U = \frac{P_{ab}}{I}}$$

Diesem Grundvorgang entspricht die Definition der elektrischen Spannungseinheit:

Einheit der elektrischen Spannung U: 1 V (Volt)
Das Volt ist die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters, in dem bei einem Strom von 1 A zwischen den beiden Punkten die Leistung 1 W umgesetzt wird (Bild 472).

Anhaltspunkte: Hausleitungen liefern eine Spannung von 125 oder 220 V, Taschenlampenbatterien 4,5 V, Hochspannungsleitungen bis 380000 V.

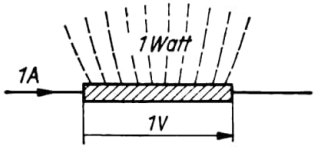


Bild 472. Zur Definition des Volt

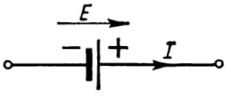


Bild 473. Schaltzeichen einer Spannungsquelle und technische Stromrichtung

Die beiden Stellen, zwischen denen die Urspannung E besteht, nennt man die beiden **Pole** der Spannungsquelle und gibt ihnen die Vorzeichen + und — (Bild 473). Für den praktischen Gebrauch gilt die **technische Stromrichtung:**

Der Strom fließt stets vom Pluspol der Spannungsquelle durch den äußeren Teil des Stromkreises nach dem Minuspol.

Im *Innern* der *Spannungsquelle* läuft der Strom in der gleichen Richtung weiter, also hier *von Minus nach Plus*. Die *Elektronen* selbst laufen dieser technischen Stromrichtung *entgegen*, was mitunter zu beachten ist.

Die gebräuchlichen **Spannungsmesser** (Voltmeter) zeigen nur an, wenn sie von einem schwachen Strom durchflossen werden. Sie sind in Wirklichkeit in Volt geeichte Strommesser mit *hohem Innenwiderstand* (Bild 474). Zu Eichzwecken dienen **Normalelemente** (S. 485). Zur Aufbewahrung der Spannungseinheit bei den Staatsinstituten dient das *Weston-Normalelement*, das bei 20 °C eine Spannung von 1,01865 V hat.

In Verbindung mit dem Begriff der Spannung wird auch häufig der des **Potentials** gebraucht.

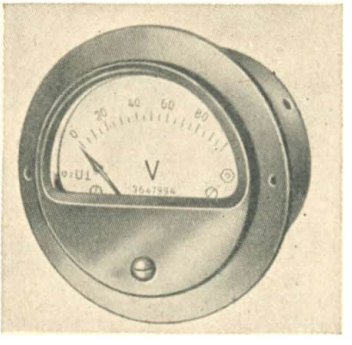


Bild 474. Spannungsmesser

Potential = Spannung gegenüber einem bestimmten, willkürlich gewählten Bezugspunkt.

Ist beispielsweise auf Bild 471 der Punkt A der positive Pol der Spannungsquelle und wählt man diesen als Bezugspunkt, so liegt Punkt C auf dem gleichen Potential 0, da die widerstandslos gedachte Verbindung AC keinen Spannungsabfall aufweist. Punkt D dagegen hat gegenüber A negatives Potential, da er unmittelbar mit Punkt B in Verbindung steht. So kann man auch in komplizierteren Stromkreisen jedem beliebigen Punkt ein solches Potential φ zuordnen, wenn der Bezugspunkt, für den $\varphi = 0$ sein soll, ausdrücklich genannt ist. Zwischen zwei Punkten mit unterschiedlichen Potentialen φ_1 und φ_2 besteht dann ein Spannungsabfall U:

Spannungsabfall = Potentialdifferenz

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{317}$$

36.3. Elektrischer Widerstand

Die im Leitungsdraht befindlichen Elektronen werden durch fortgesetzte Zusammenstöße untereinander und mit den Atomen des Metalls in ihrer freien Bewegung stark behindert. Dies verursacht den **elektrischen Widerstand** R.

Einheit des elektrischen Widerstandes R: 1 Ω (Ohm)

Die Definition lautet (etwas vereinfacht):

Das Ohm ist der elektrische Widerstand zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters, durch den bei der Spannung 1 V zwischen den beiden Punkten ein Strom von 1 A fließt.

Anhaltspunkte: Gewöhnliche Glühlampen haben einen Widerstand von etwa 200 bis 1200 Ω, ein elektrisches Bügeleisen etwa 65 Ω.

Bequem verstellbar sind **Schiebe-** und **Kurbelwiderstände** (Bild 476). Für Meßzwecke dienen geeichte **Normalwiderstände.** Bild 477 zeigt einen Normalwiderstand, der die extreme Genauigkeit von ± 0,01 % verbürgt.
Das Widerstandsmaterial besteht aus Manganindraht.
Oft ist es einfacher, mit dem reziproken Wert des Widerstandes, dem **elektrischen Leitwert** G, zu rechnen.

$$G = \frac{1}{R}$$ **Leitwert**

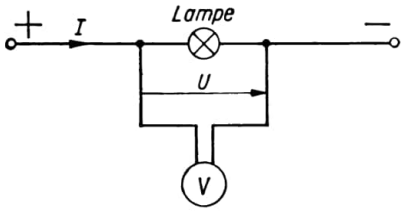


Bild 475. Anschluß eines Spannungsmessers

Einheit des elektrischen Leitwertes G: 1 Siemens (1 S); 1 S = $\frac{1}{\Omega}$

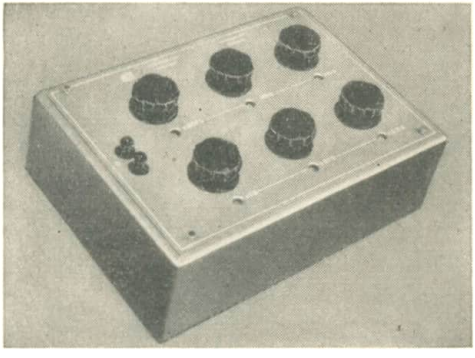


Bild 476. Kurbeldekadenwiderstand, verstellbar von 0,01 bis 10000 Ω

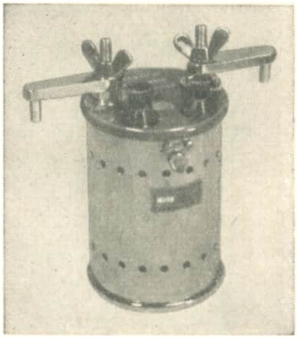


Bild 477. Normalwiderstand

36.3.1. Spezifischer Widerstand

Wie sich mit einfachen Versuchen zeigen läßt, ist der Widerstand bei gleichem Leitermaterial der Länge l des Leiters direkt und dem Querschnitt A umgekehrt proportional, d. h. $R \approx \frac{l}{A}$. Der für das jeweilige Material charakteristische Proportionalitätsfaktor ist der **spezifische Widerstand** ϱ. Damit ergibt sich

(318) $$\boxed{R = \frac{\varrho l}{A}}$$ **Widerstand eines Leiters**

Bei *Drähten* ist es allgemein üblich, die Länge l in m und den Querschnitt A in mm² zu messen.
Für den spezifischen Widerstand findet sich nach Umstellen von Gleichung (318) die Einheitengleichung

$$[\varrho] = \frac{[R]\,[A]}{[l]} = \frac{\Omega\,\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}.$$

Der Zahlenwert von ϱ entspricht also dem Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt.
Bei *Flüssigkeiten* und *Isolierstoffen* pflegt man dagegen die Länge l in cm undden Querschnitt A in cm² einzusetzen, weshalb dann der spezifische Widerstand ϱ die Einheit Ω cm erhält. Sein Zahlenwert entspricht dem Widerstand eines Würfels von 1 cm Kantenlänge, wenn der Strom von einer Würfelfläche zur gegenüberliegenden fließt.

Widerstandswerte einiger Metalle bei 20 °C

	Spezifischer Widerstand bei 20 °C in Ω mm²/m	Leitfähigkeit $\varkappa$ in Sm/mm²	Temperaturkoeffizient α in 1/grd	$\beta \cdot 10^6$ in 1/grd²
Silber	0,016	61,0	0,0038	0,7
Reinkupfer	0,0172	58,1	0,0039	0,6
Leitungskupfer	0,0178	56	0,0039	0,6
Leitungsaluminium	0,0286	35	0,0037	1,3
Wolfram	0,055	18	0,0041	1,0
Zink	0,059	16	0,0037	2,0
Nickel	0,070	14	0,006	9,0
Eisen	0,098	10	0,056	6,0
Platin	0,105	9,5	0,003	0,6
Nickelin (54 Cu, 26 Ni, 20 Zn)	0,43	2,3	$0{,}11 \cdot 10^{-3}$	—
Konstantan (54 Cu, 45 Ni, 1 Mn)	0,50	2,0	$0{,}0035 \cdot 10^{-3}$	—
Chromnickel (79 Ni, 20 Cr)	1,1	0,91	$0{,}2 \cdot 10^{-3}$	—
Quecksilber	0,96	1,04	$0{,}92 \cdot 10^{-3}$	1,2

Isolatoren

	Spezifischer Widerstand ϱ in Ω cm	Dielektrizitätskonstante ε	Verlustfaktor $\tan\delta \cdot 10^3$ bei 600 kHz
Bernstein	10^{19}	2,8	5
Quarz	10^{19}	3,8 ··· 5,0	0,1
Paraffin	10^{16}	2,1 ··· 2,2	
Hartgummi	$10^{12} \cdots 10^{18}$	2,8	6,5
Glimmer	$10^{14} \cdots 10^{17}$	7,1 ··· 7,7	0,2
Reinstes Wasser	$2{,}26 \cdot 10^7$	81,57	
Gut destilliertes Wasser	$5 \cdot 10^5$	81,57	

Mitunter rechnet man auch mit dem *reziproken Wert* des spezifischen Widerstandes, d. h. mit

(319) $\boxed{\varkappa = \frac{1}{\varrho}}$ **Leitfähigkeit** $\varkappa$

Wie die Zahlenwerte umstehender Tabelle zeigen, hat das Kupfer nächst dem Silber den *geringsten* spezifischen Widerstand und wird daher in der Technik vor allen anderen Materialien bei weitem bevorzugt.

Beispiele: 1. Welchen Widerstand hat eine Kochplatte, die 10 m Chromnickeldraht von 0,45 mm Durchmesser enthält? – Nach (318) ist

$$R = \frac{\varrho l}{A} = \frac{\varrho l \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{1{,}1\,\Omega\,\mathrm{mm^2} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 4}{\mathrm{m}\,\pi\,0{,}45^2\,\mathrm{mm^2}} = 69{,}2\ \Omega.$$

2. Zwischen 2 Metallplatten liegt eine 10 cm × 10 cm große, 4 mm dicke Paraffinschicht. Wie groß ist ihr Widerstand? – Nach (318) ist $R = \frac{\varrho l}{A} = \frac{10^{16}\,\Omega\,\mathrm{cm}\,0{,}4\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{cm^2}} = 4 \cdot 10^{13}\ \Omega.$

36.3.2. Widerstand und Temperatur

Der spezifische Widerstand der meisten Stoffe ist stark von der *Temperatur t abhängig* und nimmt im allgemeinen mit *steigender* Temperatur *zu*. Daher gelten die oben angegebenen Werte genau nur für die Bezugstemperatur von $t_{20} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Bis zu 200 °C genügt die Annahme, daß der Widerstand *proportional* mit der Temperatur zunimmt. Dann versteht man unter dem

Temperaturkoeffizienten α:
relative Änderung des Widerstandes je Grad der Temperaturänderung Δt.

$$\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta t \cdot R_{20}}$$

Man erhält demnach den Widerstand R für eine beliebige Temperatur t, indem man zu dem bei $t_{20} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ geltenden Wert R_{20} noch den Betrag $\Delta R = \alpha R_{20} \Delta t$ hinzufügt, d. h. $R = R_{20} + \Delta R$. Damit ist

(320) $\boxed{R = R_{20}(1 + \alpha \Delta t) = R_{20}[1 + \alpha (t - t_{20})]}$ **Widerstand R bei der Temperatur t**

Diese lineare Beziehung gilt aber nur näherungsweise, und es lassen sich Überlegungen in genau der gleichen Art anstellen, wie das auf S. 186 für den Ausdehnungskoeffizienten getan wurde. Besonders bei *höheren* Temperaturen verwendet man daher besser noch einen *zweiten* Koeffizienten und die Gleichung:

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t + \beta \Delta t^2).$$

Zu beachten ist schließlich, daß einige Stoffe einen **negativen Temperaturkoeffizienten** haben, d. h., ihr Widerstand nimmt mit *steigender* Temperatur ab (z. B. Kohle, Elektrolyte, bestimmte Arten keramischer Halbleiter). Der Temperaturkoeffizient des Eisens ist in besonderem Maße von der Temperatur selbst abhängig erreicht bei etwa 850 °C den Wert 0,018 1/grd und nimmt dann wieder ab.
Wenn die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes sich störend bemerkbar macht (z. B. bei Widerständen für Meßzwecke), verwendet man daher besondere Legierungen mit recht kleinem Temperaturkoeffizienten, z. B. Konstantan.

Beispiele: 1. Die Kupferwicklung eines Elektromotors hat bei 20 °C einen Widerstand von 500 Ω. Welchen Widerstand hat sie im Betrieb bei 62 °C? – $R = 500\ (1 + 0{,}0039 \cdot 42)\ \Omega = 582\ \Omega$.

2. Beim Einschalten von Glühlampen entsteht im ersten Augenblick ein Stromstoß von größerer Stärke, da der Widerstand des *noch kalten* Wolframdrahtes *kleiner* als im Betrieb ist.

37. Gleichstromkreis

37.1. Ohmsches Gesetz

Wenn die Spannung die treibende Ursache des Stromes ist, so liegt die Frage nahe, nach welchem Gesetz beide Größen miteinander zusammenhängen. Sie wurde zunächst von GEORG SIMON OHM beantwortet.

Das Ohmsche Gesetz:
Die Stromstärke I ist direkt proportional der Spannung U. Der Proportionalitätsfaktor G ist der Leitwert des Stromkreises.

(321) $\boxed{I = GU}$

Da der Leitwert G dem Widerstand R reziprok ist, ergibt sich

(322) $\boxed{I = \frac{U}{R}}$ **Stromstärke I**

Das OHMsche Gesetz wird bei *konstanter Temperatur* von den *Metallen* und *Elektrolyten* streng erfüllt. Stellt man die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung



Bild 478
Georg Simon Ohm
(1789 bis 1854)

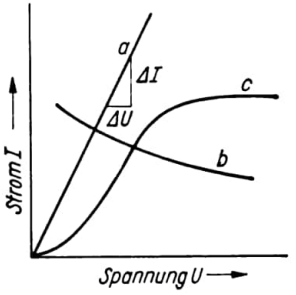


Bild 479. Strom-Spannungs-Kennlinien
a) ohmscher Widerstand, b) fallende Kennlinie, c) Sättigungslinie

grafisch dar, so ergibt sich als **Charakteristik** (Strom-Spannungs-Kennlinie) eine ansteigende Gerade (Bild 479a). Man sieht, daß der Differenzenquotient $\frac{\Delta U}{\Delta I} = R$ an allen Stellen der Kennlinie konstant ist.
Man nennt derartige Widerstände deshalb auch **lineare Widerstände.**
Dagegen zeigen z. B. Gasentladungsstrecken eine **fallende Kennlinie** (Bild 479b), indem mit zunehmender Stromstärke I der Spannungsabfall U abnimmt. Ein dritter Fall ist die **Sättigungskennlinie** (Bild 479c), die z. B. für Elektronenröhren typisch ist. Hier erreicht die Stromstärke von einem bestimmten Spannungswert an einen konstant bleibenden Sättigungswert. Das Ohmsche Gesetz ist also für *nichtlineare* Widerstände, wie z. B. in den Fällen b und c, *nicht* gültig.

Beispiele: 1. Welcher Strom fließt durch ein Bügeleisen von 80 Ω bei einer Spannung von 220 V? – Nach (322) ergibt sich $I = \frac{U}{R} = \frac{220\,\text{V}}{80\,\Omega} = 2{,}75\,\text{A}$.

2. Der Zeiger eines Spannungsmessers gibt 300 V an, wobei das Instrument von 0,1 A durchflossen wird. Welchen Widerstand hat das Voltmeter? –
Nach (322) ist $R = \frac{U}{I} = \frac{300\,\text{V}}{0{,}1\,\text{A}} = 3000\,\Omega$.

3. Der Heizdraht einer Radioröhre hat einen Widerstand von 63 Ω und wird von 100 mA durchflossen. Wie groß ist die Heizspannung? – $U = IR = 0{,}1\,\text{A}\ 63\,\text{V/A} = 6{,}3\,\text{V}$.

37.2. Verzweigter Stromkreis

Jeder elektrische Stromkreis besteht aus der Spannungsquelle und irgendeiner Leiteranordnung, durch welche der von der Urspannung angetriebene Strom fließt. Die von der Spannung bewegten Elektronen sind *von vornherein* im *Leiter* enthalten, so daß sich ein *reiner Kreislauf* vollzieht. Wird er irgendwo unterbrochen, so kommt der Strom sofort zum Stillstand.

Strom fließt nur im geschlossenen Kreislauf.

Da weder die Spannungsquelle noch irgendein Teil des Leiters Elektronen neu erzeugen oder verschwinden lassen kann, bleibt die *Gesamtzahl* der strömenden Elek-

tronen stets konstant. Dieselbe Elektronenmenge, die am einen Ende des Leiters zuströmt, muß am anderen Ende abfließen.

Die Stromstärke ist in allen Teilen eines einfachen Stromkreises konstant.

Es ist im allgemeinen üblich, *Stromkreise schematisch zu zeichnen*, wobei es sich empfiehlt, die standardisierten *Schaltzeichen* zu verwenden. So zeigt Bild 480 einen einfachen Stromkreis mit einer Gleichspannungsquelle; der Widerstand des gesamten Kreises ist mit R angedeutet, wobei man sich die übrigen Linien *widerstandslos* zu denken hat.

Man kann nun zwei verschiedene Widerstände (etwa eine Lampe und ein Bügeleisen) so miteinander verbinden, wie es Bild 481 zeigt. Man nennt dies eine **Parallelschaltung.** Der aus der Spannungsquelle kommende Strom verzweigt sich im Punkt A in die beiden Teilströme I_1 und I_2, die sich bei Punkt B wieder vereinigen. Da in den Widerständen Ladungsträger weder verschwinden noch neu entstehen, muß die Gleichung gelten

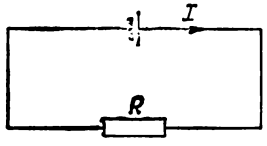


Bild 480. Schematische Darstellung eines unverzweigten Gleichstromkreises

(323) $$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

1. Kirchhoffsche Regel:

Die Summe der Zweigströme ist gleich dem Gesamtstrom.

In etwas allgemeinerer Ausdrucksweise bezeichnet man die Stellen der Stromverzweigung als **Knotenpunkte** (Bild 482). Die 1. Kirchhoffsche Regel spricht man dann als **Knotenpunktsatz** aus:

$$\boxed{\sum I_{\text{zufl}} = \sum I_{\text{abfl}}}$$

Die Summe der einem Knotenpunkt zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme.

Die beiden auf Bild 481 angegebenen Widerstände liegen ersichtlich an der gleichen Spannung U. Damit ist einerseits $U = I_1 R_1$ und andererseits $U = I_2 R_2$. Es ist daher $I_1 R_1 = I_2 R_2$ oder, anders geschrieben,

(324) $$\boxed{I_1 : I_2 = R_2 : R_1}$$

Die Teilströme verhalten sich zueinander umgekehrt wie die zugehörigen Widerstände.

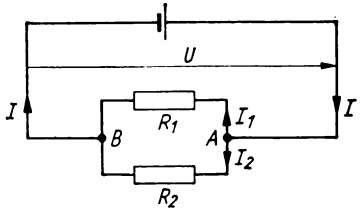


Bild 481. Verzweigter Stromkreis mit 2 parallelgeschalteten Widerständen

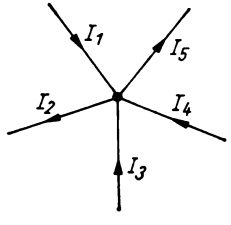


Bild 482. Knotenpunkt in allgemeiner Darstellung: $I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$

Durch den *größeren* Widerstand fließt also stets der *kleinere* Strom und umgekehrt. Schließlich kann man Gleichung (323) noch durch die *gemeinsame Spannung* U dividieren und erhält dabei $\frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U}$ oder ausgerechnet

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,. \tag{325}$$

Dieses Gesetz gilt in entsprechender Weise auch dann, wenn mehr als 2 Widerstände parallel liegen. Beispielsweise erhält man für n Widerstände

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Aus (325) findet man durch Ausrechnen

$$\boxed{R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \tag{326}$$

Gesamtwiderstand zweier paralleler Widerstände

Beispiele: 1. An einer Spannung von 110 V liegen, parallelgeschaltet, zwei Lampen von 303 Ω bzw. 151 Ω. Berechne a) die beiden Teilströme, b) den Gesamtstrom und c) den Gesamtwiderstand. –

a) $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{110\,\mathrm{V}}{303\,\Omega} = \underline{0{,}364\,\mathrm{A}}$; $\quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{110\,\mathrm{V}}{151\,\Omega} = \underline{0{,}728\,\mathrm{A}}$;

b) $I = I_1 + I_2 = 0{,}364\,\mathrm{A} + 0{,}728\,\mathrm{A} = 1{,}092\,\mathrm{A}$;

c) $R = \frac{303 \cdot 151}{303 + 151}\,\Omega = \underline{100{,}6\,\Omega}$; $\quad$ Probe: $R = \frac{U}{I} = \frac{110\,\mathrm{V}}{1{,}092\,\mathrm{A}} = 100{,}6\,\Omega$.

2. 4 Widerstände von je 15 Ω sind parallelgeschaltet und liegen an einer Spannung von 4 V. Berechne a) den Gesamtwiderstand, b) den Gesamtstrom und c) die Teilströme.

a) Wegen $\frac{1}{R} = \frac{4}{R_1}$ ist $R = \frac{R_1}{4} = 3{,}75\,\Omega$;

b) $I = \frac{U}{R} = \frac{4\,\mathrm{V}}{3{,}75\,\Omega} = 1{,}07\,\mathrm{A}$;

c) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{U}{R_1} = \frac{4\,\mathrm{V}}{15\,\Omega} = 0{,}27\,\mathrm{A}$.

37.2.1. Nebenwiderstände für Strommesser

Eine wichtige Anwendung der 1. Kirchhoffschen Regel stellen die vielbenutzten **Nebenwiderstände (Shunts)** für Strommesser dar, mit denen man den *Meßbereich* nach Belieben *vergrößern* kann, ohne im Meßwerk selbst etwas zu ändern (Bilder 483, 484).
Hierbei legt man *parallel* zum Meßwerk, dessen Innenwiderstand mit R_i bezeichnet sei, einen Widerstand R_n von geeigneter Größe.

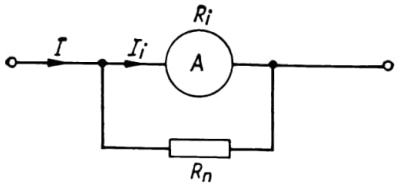


Bild 483. Schaltung eines Nebenwiderstandes

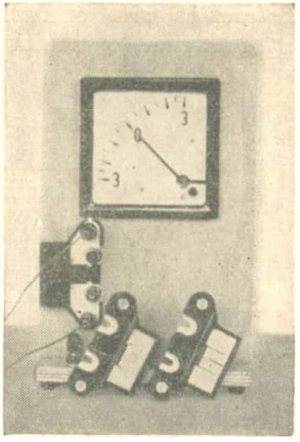


Bild 484. Strommesser mit Nebenwiderständen

Dies hat zur Folge, daß durch das Meßwerk selbst nur ein bestimmter *kleiner Bruchteil*, durch den Nebenwiderstand aber der *Hauptteil* des Stromes fließt.

Beispiele: 1. Wie groß muß der Nebenwiderstand R_n sein, wenn der Meßbereich auf den n-fachen Betrag vergrößert werden soll? – Gegeben sei der Innenwiderstand R_i des Instrumentes. Durch das Meßwerk selbst darf nur $1/n$ des zu messenden Stromes fließen. Durch den Nebenwiderstand sind dann $\frac{n-1}{n}$ des Stromes zu leiten. Dann besteht nach Gleichung (324) die Proportion

$$R_n : R_i = \frac{1}{n} : \frac{n-1}{n}.$$

Hieraus folgt $R_n = \frac{R_i}{n-1}$.

2. Ein Strommesser hat den Innenwiderstand $R_i = 5\ \Omega$; sein Zeiger schlägt bei einem Strom von 3 mA voll aus. Wenn man einen Strom von 300 mA damit messen will, ist $n = 100$, und der Nebenwiderstand muß nach Beispiel 1 den Wert

$$R_n = \frac{R_i}{n-1} = \frac{5\ \Omega}{99} = 0{,}0505\ \Omega \text{ haben}.$$

37.3. Unverzweigter Stromkreis

Die in einem Stromkreis befindlichen Widerstände können auch so miteinander verbunden sein, daß sie nacheinander vom *gleichen Strom* durchflossen werden. Man nennt dies eine **Reihenschaltung** (Bild 485).

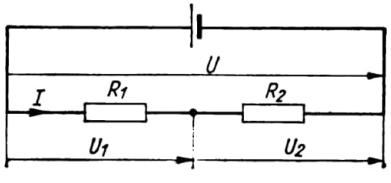


Bild 485. Reihenschaltung von Widerständen

Betrachtet man einstweilen nur 2 Widerstände R_1 und R_2, so wird die in der Spannungsquelle verbrauchte Energie W_{zu} in zwei Teilbeträgen W_{ab1} und W_{ab2} wieder abgegeben. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ist somit

$$W_{zu} = W_{ab1} + W_{ab2}.$$

Nun kann man diese Gleichung durch die während einer bestimmten Zeit im Stromkreis transportierte Ladung Q dividieren

$$\frac{W_{zu}}{Q} = \frac{W_{ab1}}{Q} + \frac{W_{ab2}}{Q}$$

und erhält dann nach den Gleichungen (314) und (315)

(327) $$\boxed{E = U_1 + U_2}$$

Dies ist der Inhalt der

2. Kirchhoffschen Regel:

Die Urspannung einer Spannungsquelle ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle des Stromkreises.

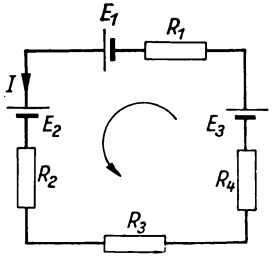


Bild 486. Masche mit mehreren Spannungsquellen

Es läßt sich ohne weiteres vorstellen, daß in einem solchen Stromkreis mehrere Spannungsquellen enthalten sind (Bild 486). Dann bezeichnet man ihn in etwas allgemeiner gehaltener Ausdrucksweise als eine **Masche,** und es gilt der **Maschensatz:**

(328) $$\boxed{\Sigma E = \Sigma U}$$

Bei der Anwendung des Maschensatzes muß man allerdings darauf achten, daß die Summierung der Urspannungen vorzeichengerecht erfolgt.
Ihre Beträge $E_1, E_2, \ldots$ sind zu *addieren,* wenn die Spannungsquellen *gleichsinnig* zusammengeschaltet sind und ihre Pole in der Reihenfolge +—, +—, ... aufeinanderfolgen. Bei *Gegenreihenschaltung* +—, —+, ... ist die jeweilige Differenz $E_1 - E_2 \ldots$ zu bilden. Um das richtige Vorzeichen der Summe zu erhalten, muß man die Masche in einem bestimmten *einheitlichen* Richtungssinn durchlaufen.
Aus Gleichung (327) folgt übrigens noch, daß sich die einzelnen Spannungsabfälle zum gesamten Spannungsabfall

(329) $$\boxed{U = U_1 + U_2}$$

des Stromkreises addieren. Die Vorzeichen von $U_1, U_2, \ldots$ sind also stets positiv, wenn man die Masche im Sinne der einheitlichen Stromrichtung umläuft.
Wenn man die Gleichung $U = U_1 + U_2$ durch den gemeinsamen Strom I dividiert, erhält man $\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I}$ oder ausgerechnet

(330) $$\boxed{R = R_1 + R_2}$$

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung ist gleich der Summe der Einzelwiderstände.

Beispiele: 1. Die zu einer Lampe von 85 Ω führende Kupferleitung ist an eine Spannungsquelle von 220 V angeschlossen und hat eine Gesamtlänge von 120 m sowie einen Durchmesser von 1,5 mm. Berechne a) den gesamten Widerstand, b) den Strom und c) die unmittelbar an der Lampe liegende Spannung. –

a) Der Widerstand der Leitung beträgt $R_1 = \frac{\varrho l}{A} = \frac{0{,}0178\,\Omega\,\mathrm{mm^2} \cdot 120\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}\,1{,}77\,\mathrm{mm^2}} = 1{,}21\,\Omega$, so daß $R = R_1 + R_2 = 1{,}21\,\Omega + 85\,\Omega = 86{,}21\,\Omega$. b) Nach (322) ist $I = \frac{U}{R} = \frac{220\,\mathrm{V}}{86{,}21\,\Omega} = 2{,}55\,\mathrm{A}$.

c) Nach (322) ist $U_2 = IR_2 = 2{,}55\,\mathrm{A}\ 85\,\Omega = 216{,}8\,\mathrm{V}$. An der Lampe ist nur ein Teil der Spannung wirksam.

2. Die auf Bild 486 angegebenen Urspannungen $E_1 \cdots E_3$ seien alle gleich 4 V und die Widerstände $R_1 \cdots R_4$ alle gleich 5 Ω. Wie groß ist die Stromstärke? –

Durchläuft man die Masche in der Stromrichtung, d. h. im Sinne des eingetragenen Richtungspfeiles, so ist zu erkennen, daß z. B. die Spannungsquellen E_2 und E_3 *gegeneinander* geschaltet sind, so daß $E_2 - E_3 = 0$ ist. Es verbleibt allein

$$E_1 = I\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\,.$$

Damit ist der Strom $I = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 0{,}2\,\mathrm{A}$.

37.3.1. Vorschaltwiderstand und Spannungsteiler

Die Gesetze der Reihenschaltung muß man u. a. bei der Berechnung von **Vorschaltwiderständen** anwenden. Ihre Aufgabe ist, die zur Verfügung stehende *Spannung* auf einen *kleineren Wert zu reduzieren*. Gleichzeitig damit wird wegen der Erhöhung des Gesamtwiderstandes die zu erwartende Stromstärke geringer.

Berechnung eines Vorschaltwiderstandes. Die für 6 V gebaute Lampe eines Projektionsapparates, deren Widerstand 1,2 Ω beträgt, soll an eine Spannung von 220 V angeschlossen werden. Der Vorschaltwiderstand muß also einen Teil der Spannung, d. h. (220 — 6) V = = 214 V, „vernichten".

Der vorschriftsmäßige Strom durch die Lampe beträgt wegen (322) $I = \frac{6\,\mathrm{V}}{1{,}2\,\Omega} = 5\,\mathrm{A}$. Aus dem Spannungsabfall des Vorschaltwiderstandes von 214 V ergibt sich wegen (322) $R = \frac{214\,\mathrm{V}}{5\,\mathrm{A}} = 42{,}8\,\Omega$. Beim praktischen Gebrauch ist vorher zu prüfen, ob der Widerstand die angegebene Stromstärke auch verträgt, ohne sich zu stark zu erhitzen oder gar durchzuschmelzen.

Statt eines Vorschaltwiderstandes verwendet man bei *geringen* Stromstärken auch den sogenannten **Spannungsteiler** (Bild 487). Dieser besteht in der Regel aus einer Wicklung von Widerstandsdraht, auf der ein verschiebbarer Kontakt gleitet. Die beiden *Teilwiderstände* sind den *Drahtlängen proportional:*

$$l_1 : l_2 = R_1 : R_2$$

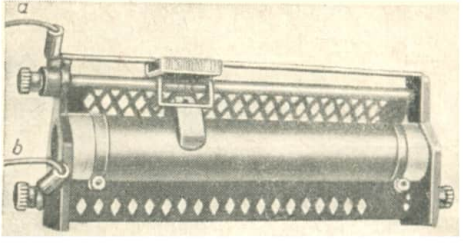


Bild 487. Spannungsteiler. Anschlüsse bei *a*, *b* und *c*

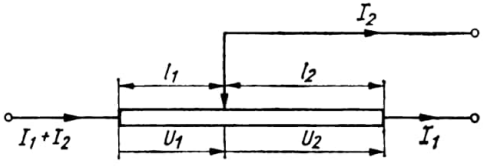


Bild 488. Schema eines Spannungsteilers

Wird dem Spannungsteiler der Strom I_2 entnommen (Bild 488), so liegt an der Stelle des Abgriffes eine Stromverzweigung vor. Im Teilabschnitt l_1 fließt der Gesamtstrom $I_1 + I_2$, im Teilabschnitt l_2 dagegen nur der Strom I_2. Die Spannungsabfälle verhalten sich daher wie

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{(I_1 + I_2)\, l_1}{I_1 l_2} .$$

In vielen Fällen benutzt man den Spannungsteiler so, daß der entnommene Strom I_2 äußerst klein ist. Dann darf man das zweite Glied in der Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigen, und man kann sagen:

Die Teilspannungen im wenig belasteten Spannungsteiler verhalten sich annähernd zueinander wie die zugehörigen Widerstände.

(331) $\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{l_1}{l_2}}$ oder auch $\boxed{\frac{U_1}{U} = \frac{l_1}{l}}$

37.3.2. Vorschaltwiderstände für Spannungsmesser

Mittels eines passenden Vorschaltwiderstandes R_v läßt sich der *Meßbereich* eines Spannungsmessers beliebig *erhöhen* (Bilder 489, 490). Dann liegt am Meßwerk selbst nur noch ein bestimmter Bruchteil der zu messenden Spannung, dessen Größe durch den festliegenden Betrag von R_v gegeben ist.

Beispiele: 1. Wie groß muß der Vorschaltwiderstand R_v bei gegebenem Innenwiderstand R_i des Instrumentes sein, wenn der Meßbereich auf das n-fache vergrößert werden soll? – Soll der Meßbereich auf das n-fache vergrößert werden, so heißt das, daß *trotz* der n-fachen

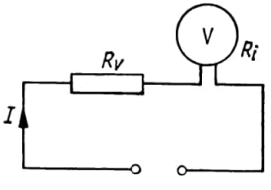


Bild 489. Vorschaltwiderstand eines Spannungsmessers

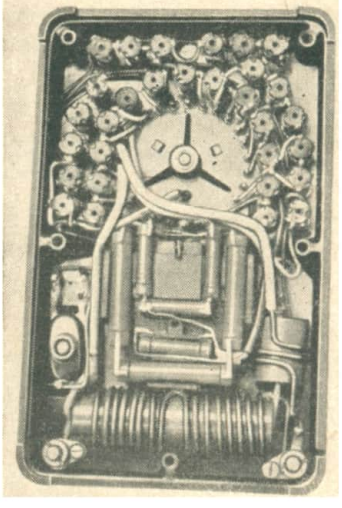


Bild 490. Inneres eines Vielfachmeßgerätes mit zahlreichen Vor- und Nebenwiderständen

Spannung *der gleiche* Strom fließen muß. Denn der Zeiger soll nach Vorschalten von R_v bei der Spannung nU auf derselben Stelle stehen wie bei der Spannung U ohne R_v. Gleiche Zeigerstellung bedeutet aber gleichen Strom, womit

$$I = \frac{nU}{R_i + R_v} = \frac{U}{R_i}.$$

Hieraus erhält man

$$R_v = (n - 1)\, R_i\,.$$

2. Der Meßbereich eines Voltmeters von 1500 Ω soll auf 1,5 V auf 30 V vergrößert werden. – Bei $n = 20$ ist nach Beispiel 1 der erforderliche Vorschaltwiderstand $R_v = 19 \cdot 1500\ \Omega = 28\,500\ \Omega$. Der Meßstrom ist bei vollem Zeigerausschlag zuerst $I = \frac{U}{R_i} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{1500\,\Omega} = 1\ \mathrm{mA}$ und dann ebenfalls $I = \frac{n\,U}{R_i + R_v} = \frac{30\,\mathrm{V}}{1500\,\Omega + 28500\,\Omega} = 1\ \mathrm{mA}$.

37.4. Klemmenspannung und innerer Widerstand

Wir haben unser Augenmerk bisher nur auf die äußerlich sichtbaren Teile des Stromkreises gerichtet. Dazu muß man aber auch die Spannungsquelle selbst mitzählen, die ebenso vom Strom durchflossen wird, wie alle anderen Teile des Stromkreises. Wie jeder andere Leiter hat sie auch einen Widerstand, der z. B. bei galvanischen Elementen von der elektrolytischen Flüssigkeit oder bei Dynamomaschinen von den darin untergebrachten Drahtwicklungen herrührt. Im Gegensatz zum leicht erkennbaren **äußeren Widerstand** R_a des Stromkreises bezeichnet man ihn als **inneren Widerstand** R_i. Da beide Widerstände in Reihe geschaltet sind, folgt der

Gesamtwiderstand eines Stromkreises: $R = R_i + R_a$

Der innere Widerstand hat zur Folge, daß die an den Anschlußklemmen der Spannungsquelle zur Verfügung stehende Spannung um den Betrag $U_i = IR_i$ *kleiner* ist als die Urspannung E. Man mißt hier nicht den vollen Betrag E, sondern die **Klemmenspannung**

(332) $$U_k = E - IR_i\,.$$

Das Produkt $U_i = IR_i$ nennt man den **inneren Spannungsabfall.**

Die Klemmenspannung muß aber andererseits gleich dem **äußeren Spannungsabfall** $U_a = IR_a$ sein, der ja zwischen denselben Punkten gemessen wird (Bild 491):

$$U_k = U_a = IR_a.$$

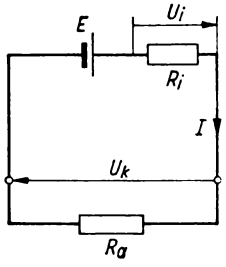


Bild 491. Innerer und äußerer Spannungsabfall (Der innere Widerstand R_i der Spannungsquelle ist von dieser getrennt gezeichnet.)

Die beiden Spannungsabfälle müssen nach der 2. KIRCHHOFFschen Regel gleich der Urspannung sein:

$$E = U_i + U_a = U_i + U_k$$

Urspannung = innerer Spannungsabfall + Klemmenspannung

Bringt man diese Gleichung schließlich in die Form

$$E = I\,(R_i + R_a),$$

so erhält man die von einer Spannungsquelle gelieferte Stromstärke

$$I = \frac{E}{R_i + R_a} \tag{333}$$

Bestimmung des inneren Widerstandes. Um den inneren Widerstand einer Spannungsquelle zu messen, kann man u. a. folgenden Weg gehen. Da in vielen praktischen Fällen der Widerstand des Spannungsmessers *sehr groß* gegenüber dem inneren Widerstand R_i der Spannungsquelle ist, erhält man zunächst durch unmittelbaren Anschluß des Instrumentes die Urspannung E; denn in diesem Fall ist der Meßstrom I so klein, daß das in Gleichung (332) stehende Glied IR_i vernachlässigt werden kann. Sodann schaltet man parallel zum Spannungsmesser einen kleineren Widerstand R_a und mißt die jetzt *kleiner* gewordene Klemmspannung U_k, die gleich IR_a ist. Aus Gleichung (333) ergibt sich

$$R_i = \frac{E}{I} - R_a.$$

Setzt man $I = \frac{U_k}{R_a}$, so erhält man den **inneren Widerstand der Spannungsquelle**

$$R_i = R_a\left(\frac{E}{U_k} - 1\right)$$

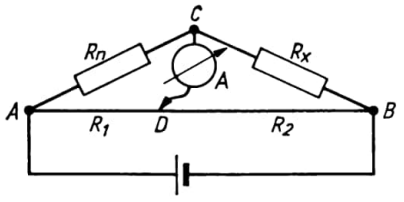
Beispiele: 1. Der innere Widerstand eines Gleichstromgenerators beträgt 3,5 Ω und seine Urspannung 125 V. Welcher Strom fließt, und welche Klemmenspannung wird gemessen, wenn der Widerstand des äußeren Stromkreises 65 Ω beträgt? – Nach (333) ist $I = \frac{E}{R_i + R_a} = \frac{125\,\mathrm{V}}{(3{,}5 + 65)\,\Omega} = \underline{1{,}82\,\mathrm{A}}$. $U_k = IR_a = 1{,}82\,\mathrm{A}\ 65\,\Omega = \underline{118\,\mathrm{V}}$.

2. Die Anodenbatterie eines Radioempfängers hat eine Urspannung von 120 V. Wenn ein Strom von 80 mA entnommen wird, beträgt die Klemmenspannung 110 V. Welchen inneren Widerstand hat die Batterie? – Es ist $R_i = \frac{E - U_k}{I} = \frac{(120 - 110)\,\mathrm{V}}{0{,}08\,\mathrm{A}} = 125\,\Omega$.

37.5. Wheatstonesche Brücke

Zur genauen Messung von Widerständen dient die WHEATSTONEsche Brückenschaltung. Die Anordnung besteht aus einem *Meßdraht AB* (Bild 492), auf dem ein verschiebbarer Kontakt gleitet, so daß der Draht in 2 Abschnitte mit den Widerständen R_1 und R_2 geteilt wird. R_n ist ein *Vergleichswiderstand* von genau *bekanntem Wert* und

Bild 492. WHEATSTONEsche Brücke



R_x der Widerstand, dessen Wert gemessen werden soll. Die „*Brücke*" bildet ein empfindlicher Strommesser, der nur zur Kontrolle dafür dient, ob in dem Zweig CD ein Strom fließt. Der Nullpunkt steht auf der Mitte der Skale, so daß der Zeiger nach links oder rechts ausschlagen kann. Zur Bestimmung von R_x wird der Kontakt auf dem Meßdraht AB so lange verschoben, bis das „*Nullinstrument*" stromlos ist. In diesem abgeglichenen Gleichgewicht ist die Spannung $U_{AC} = U_{AD}$ sowie $U_{CB} = U_{DB}$. Man könnte den Zweig CD kurzschließen, ohne daß sich irgend etwas ändert.

Dann gelten nach (324) die Beziehungen $\frac{R_n}{R_1} = \frac{I_u}{I_o}$ und $\frac{R_x}{R_2} = \frac{I_u}{I_o}$ (I_u und I_o seien die Ströme im unteren bzw. oberen Stromzweig). Beide Gleichungen ergeben für das

Brückengleichgewicht:

(334) $$\boxed{R_x : R_2 = R_n : R_1}$$

Hieraus erhält man in einfacher Weise

$$R_x = \frac{R_n R_2}{R_1}.$$

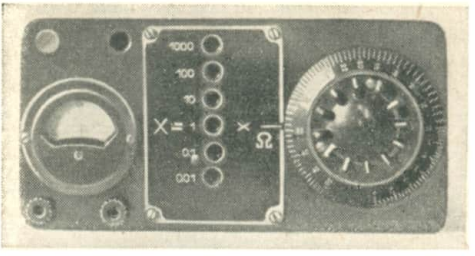


Bild 493. WHEATSTONEsche Brücke in handlicher Form

Da es nur auf das Verhältnis $R_1 : R_2$ ankommt und dieses gleich dem *Längenverhältnis* der beiden Abschnitte des Meßdrahtes ist, hat dieser eine Längeneinteilung. Bild 493 zeigt eine handliche Ausführung, die sämtliche Teile sowie eine Trockenbatterie in einem Gehäuse enthält. Hier liest man R_x an der Skale des Drehknopfes ab.

37.6. Leistung und Arbeit des elektrischen Stromes

37.6.1. Berechnung der Leistung

Die in jedem stromdurchflossenen Leiter *entstehende Wärme* ist ein Zeichen dafür, daß sich hier eine *Energieumwandlung* vollzieht. Wie bereits in 36.2. festgestellt wurde, dient diese, vom Strom I in einem Leiter umgesetzte Leistung P zur Definition der Spannungseinheit nach der Gleichung (316)

$$U = \frac{P}{I}.$$

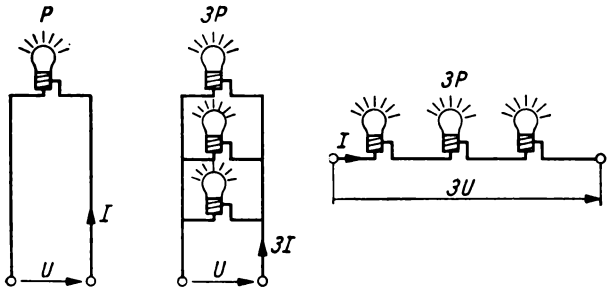


Bild 494. Zur Berechnung der Leistung des elektrischen Stromes

Durch einfaches Umstellen erhält man den Ausdruck

(335) $\boxed{P = UI}$ **Leistung P des elektrischen Stromes**

die demnach aus dem Spannungsabfall U und dem Strom I ohne weiteres berechnet werden kann.

Um sich den Inhalt dieser Gleichung anschaulich zu machen, denke man sich den folgenden einfachen Versuch (Bild 494). Eine Taschenlampenbirne für 4,5 V strahlt beim Anschluß an die Batterie je Zeiteinheit eine ganz bestimmte Energiemenge W aus. Schaltet man noch 2 gleiche Lämpchen dazu *parallel*, so wird die 3fache Energiemenge abgestrahlt, und man kann sagen: Bei *gleicher* Spannung ist die gebildete Wärme der *Stromstärke proportional*. Nunmehr schaltet man die 3 Lampen *hintereinander*, wozu die 3fache Spannung nötig ist, wenn sie ebenso hell wie vorher leuchten sollen. In diesem Fall hat der Strom dieselbe Stärke wie bei einem einzelnen Lämpchen, und man kann sagen: Bei *gleicher* Stromstärke ist die gebildete Wärmemenge der *Spannung proportional*.

Man kann in (335) an Stelle von U nach dem Ohmschen Gesetz auch das Produkt IR einsetzen oder auch für I den Quotienten $\frac{U}{R}$ und erhält die für das praktische Rechnen nützlichen Gleichungen

(336) $\boxed{P = I^2R}$

und

(337) $\boxed{P = \frac{U^2}{R}}$

Beispiele: 1. Welche Leistung setzt eine Glühlampe um, durch die bei einer Spannung von 125 V ein Strom von 0,48 A fließt? – Nach (335) ist $P = 0{,}48\ \text{A} \cdot 125\ \text{V} = \underline{60\ \text{W}}$.

2. Welche Leistung muß zum Transport eines Stromes von 20 A durch eine Kupferleitung von 8 km Länge und 2,5 mm² Querschnitt aufgewandt werden? – Gleichung (336) in Verbindung mit (318) ergibt $P = \frac{I^2\varrho l}{A} = \frac{20^2\,\text{A}^2 \cdot 0{,}0178\,\Omega\text{mm}^2 \cdot 8 \cdot 10^3\,\text{m}}{\text{m} \cdot 2{,}5\,\text{mm}^2} = \underline{22{,}8\,\text{kW}}$. Man sieht, daß zur *bloßen Fortleitung* des Stromes mitunter recht *beträchtliche Leistungen* erforderlich sind und in Form von Wärme verlorengehen.

3. Um wieviel % geht die Leistung eines Heizgerätes zurück, wenn die Netzspannung infolge einer Störung um 10 % sinkt? – Da die Spannung nur noch 0,9 U beträgt, ergibt sich die Leistung zu $P = \frac{0{,}9^2\,U^2}{R} = \frac{0{,}81\,U^2}{R}$ gegenüber $\frac{U^2}{R}$. Die Abnahme beträgt 19 %.

37.6.2. Berechnung der Arbeit

Die innerhalb der Zeit t verrichtete Arbeit W ist das *Produkt aus Leistung und Zeit*, d. h. $W = Pt$. Folglich ist auch die vom Strom I innerhalb der Zeit t verrichtete Arbeit

(338) $\boxed{W = UIt}$ **Arbeit W des elektrischen Stromes**

Nun stellt aber das Produkt It nach (311) die in der Zeit t fließende Elektrizitätsmenge Q dar, und man erhält in Übereinstimmung mit Gleichung (315) den Ausdruck

(339) $\boxed{W = UQ}$

Beispiele: 1. Durch einen Heißwasserspeicher fließt 25 min lang ein Strom von 5,6 A bei einer Spannung von 220 V. – Dies entspricht einer Arbeit von

$$W = UIt = \frac{220\ \text{V}\ 5{,}6\ \text{A}\ 25\ \text{h}}{60} = \underline{513\ \text{Wh}}\ \text{(Wattstunden)}.$$

2. Welche durchschnittliche Stromstärke herrscht in einer Hausleitung, wenn der Zähler bei einer Netzspannung von 220 V in 30 min eine Arbeit von 0,8 kWh mißt? – Aus (338) erhält man

$$I = \frac{W}{Ut} = \frac{800\ \text{VAh}\ 60}{220\ \text{V}\ 30\ \text{h}} = \underline{7{,}27\ \text{A}}.$$

38. Elektrisches Feld

38.1. Grunderscheinungen ruhender Ladungen

Zu einem tieferen Verständnis der elektrischen Erscheinungen gelangt man bei der Betrachtung der Eigenschaften **ruhender Ladungen.** Man nennt dieses Erscheinungsgebiet die **Elektrostatik.**

Von hier aus begann auch die Entdeckungsgeschichte der Elektrizität; denn schon im Altertum war bekannt, daß *ein geriebenes Stück Bernstein*[1]) eine lebhafte *Anziehungskraft* auf Wollfasern, Staubteilchen und andere leichte Körper ausübt.

Aber auch viele andere Nichtleiter lassen sich „elektrisch laden", z. B. *Glas- und Porzellan* durch Reiben mit *trockenem Papier; Schwefel, Hartgummi, Kunstharze* durch Reiben mit einem Wollappen.

[1]) Vom griechischen Wort für Bernstein „elektron" stammt die Bezeichnung **„Elektrizität"** Das Wort **„elektrisch"** wurde von WILLIAM GILBERT 1600 eingeführt

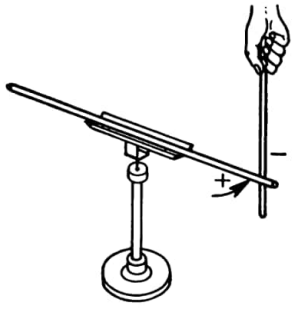


Bild 495. Ein positiv und negativ geladener Stab ziehen sich gegenseitig an

Wenn man einen in solcher Weise elektrisch geladenen Stab auf eine kleine Pfanne legt, die sich in der horizontalen Ebene leicht drehen kann (Bild 495), und einen zweiten geriebenen Stab in seine Nähe bringt, findet man:
2 geriebene Hartgummi- oder Glasstäbe stoßen einander ab,
je ein geriebener Hartgummi- und Glasstab ziehen einander an.
Hieraus ist zu erkennen, daß es *zweierlei Arten* der elektrischen Ladung geben muß, die man als **positiv** (z. B. Glas) und **negativ** (z. B. Kunstharz) bezeichnet.
Bei einem *negativ* geladenen Körper sind zahlreiche Elektronen auf der *Oberfläche angereichert*. Entzieht man dagegen einem Körper Elektronen, so bleibt er *positiv* geladen zurück.

Positive Ladung eines Körpers = Elektronenmangel.
Negative Ladung eines Körpers = Elektronenüberschuß.

Stärkere elektrische Ladungen erhält man mit dem **Bandgenerator** (Bild 496). In der für Schulversuche gebräuchlichen Ausführung besteht er aus einem endlosen Kunst-

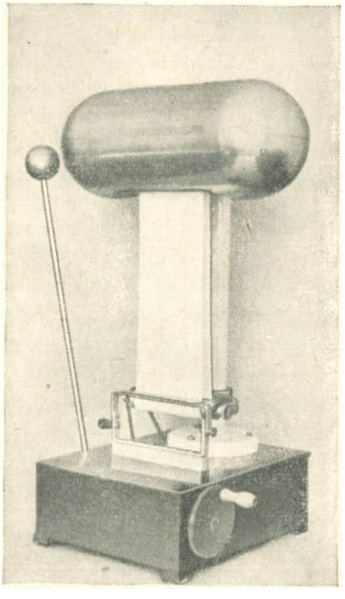


Bild 496. Bandgenerator

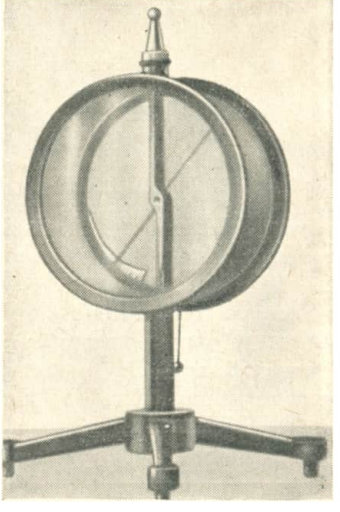


Bild 497. Braunsches Elektrometer

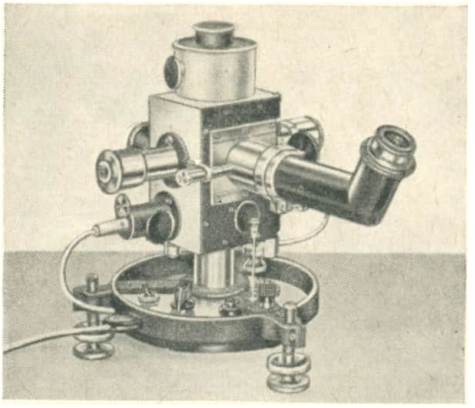


Bild 498. Modernes Fadenelektrometer mit Ablesemikroskop

stoffband, das wie ein Treibriemen über zwei Walzen läuft, von denen die untere mit einer Handkurbel gedreht wird. Gegen den unteren Teil des Bandes schmiegt sich eine Drahtbürste, die das Band reibend positiv auflädt. Die auf dem Band haftende Ladung wird im oberen Teil von einer zweiten Bürste abgesaugt (S. 427) und auf die Oberfläche eines glatt polierten Metallkörpers geleitet. Bereits nach wenigen Umdrehungen lädt sich der Metallkörper sehr stark auf. Die reibende Bürste ist mit einer Metallkugel verbunden, die sich negativ auflädt. Zwischen Metallkörper und Kugel erreicht man leicht Spannungen in der Größenordnung von 50000 Volt. Auch hier sieht man, daß elektrische Ladung und Spannung eng miteinander zusammenhängen.
Zum Nachweis elektrischer Ladungen genügt in den einfachsten Fällen das **Blättchenelektroskop,** das zwei schmale Streifchen aus Aluminiumfolie enthält.
Die Zuleitung ist gegenüber dem Gehäuse mit Paraffin oder einem anderen Nichtleiter gut isoliert. Beim Berühren der Zuleitung mit einem geladenen Körper spreizen sie sich infolge ihrer gleichartigen Ladung auseinander.
Das **Braunsche Elektrometer** (Bild 497) enthält einen leicht beweglichen Zeiger, der sich in geladenem Zustand von der *gleichartig geladenen* Haltevorrichtung abstößt.
Von den zahlreichen weiteren Konstruktionen sei noch das äußerst empfindliche **Wulfsche Fadenelektrometer** erwähnt. Zwischen zwei von einer Hilfsspannungsquelle aufgeladenen festen Platten ist ein feiner Platinfaden gespannt, dessen Ablenkung mit einem Mikroskop beobachtet wird (Bild 498).

38.2. Elektrisches Feld im Vakuum

38.2.1. Elektrische Feldlinien

Kugel und Hauptkörper des Bandgenerators, auf denen sich die entgegengesetzten Ladungen ansammeln, bilden zusammen einen **Kondensator** (*Verdichter*). Geometrisch einfacher und übersichtlicher ist der **Zweiplattenkondensator** (Bild 499). Er besteht aus zwei gleich großen, isoliert und parallel zueinander aufgestellten Metallplatten. Durch kurzzeitiges Verbinden mit den beiden Polen einer Gleichspannungsquelle kann er elektrisch geladen werden.
Zwei auf eine isolierende Platte geklebte Stanniolstreifen stellen das flächenhafte Modell eines Plattenkondensators dar. Sie werden mit den beiden Polen des Bandgenerators verbunden. Streut man jetzt von oben auf die Platte pulverisierte Glaswolle, so ordnet sich der Staub zu zarten, aber *eindeutig verlaufenden Linien*

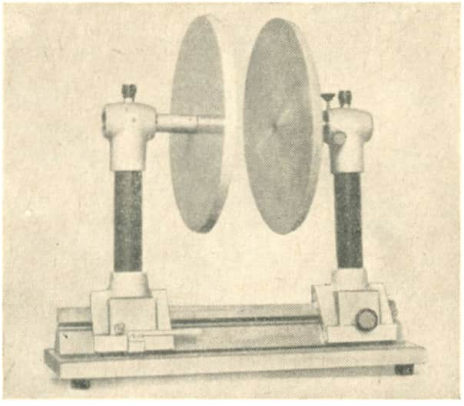


Bild 499. Zweiplattenkondensator

an. Sie beweisen, daß in jedem Punkt des zwischen den Metallstreifen befindlichen Raumes Kräfte wirken, die durch Betrag und Richtung ausgezeichnet sind. Man nennt ihn ein **elektrisches Feld.**

Das elektrische Feld ist ein Raum, in dem jedem Punkt eine nach Betrag und Richtung bestimmte Kraft zugeordnet werden kann. Diese entsteht durch die an den Feldgrenzen sitzenden elektrischen Ladungen.

Die von dem Faserstaub gebildeten Linien laufen zwischen den Metallstreifen *quer und parallel zueinander*, weichen aber oben und unten *bogenförmig* in den freien Raum aus (Bild 500). Man nennt sie **elektrische Kraft- oder Feldlinien.**
Die Feldlinien stellen aber nur die Anordnung des Faserstaubes dar und sind gut geeignet, die Richtung der Kräfte sichtbar zu machen. In Wirklichkeit, d. h. ohne Faserstaub, sind diese Linien jedoch nicht vorhanden. Trotzdem aber erweisen sich die Feldlinien als eine bei vielen Gelegenheiten recht nützliche *Hilfsvorstellung*.[1])

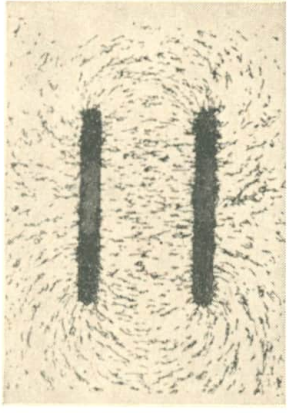


Bild 500. Feldlinien eines geladenen Plattenkondensators



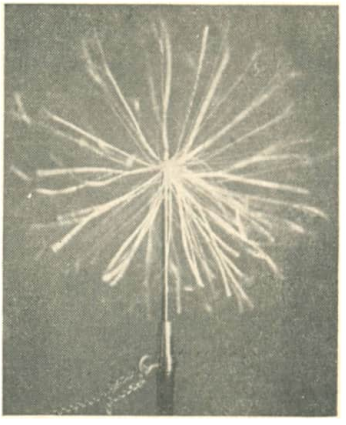


Bild 501. Elektrisch geladenes Fadenbüschel zeigt die Richtung der Feldlinien an

[1]) Die Feldlinienvorstellung wurde von Michael Faraday (1791 bis 1867) geschaffen

Man kann ihnen folgende Eigenschaften zuschreiben:

1. Die Feldlinien *beginnen* auf der *positiven* und *enden* auf der *negativen Ladung*. (Dieser Richtungssinn ist *willkürlich* festgesetzt worden.) Sie haben also Anfang und Ende.

2. Sie sind wie *elastische Fäden* zwischen den Ladungen ausgespannt, deren Abstand sie zu *verkürzen* bestrebt sind (Anziehung der mit ihnen verbundenen Ladungen).

3. Sie *stoßen* sich gegenseitig *quer* zu ihrer eigenen Richtung ab (Verdrängung in den freien Raum) (Bild 501).

4. *Positiv* geladene Körper bewegen sich in *Richtung* der Feldlinien auf die *negative* Platte zu. Negativ geladene bewegen sich den Feldlinien entgegen (Bild 502).

5. Die Feldlinien *enden stets senkrecht* auf der Leiteroberfläche.

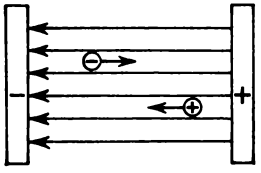


Bild 502. Bewegung elektrisch geladener Körper im Feld

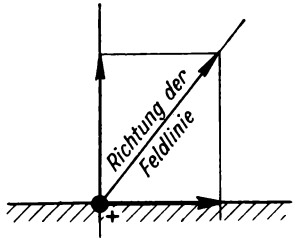


Bild 503. Kraft auf eine an der Leiteroberfläche sitzende Ladung

Begründung des letzten Satzes: Würde eine Feldlinie schräg auf der Leiteroberfläche enden, so könnte man die wirkende Kraft in je eine normale und tangentiale Komponente zerlegen (Bild 503). Da die Elektronen auf einem Leiter leicht verschiebbar sind, müssen sie, der *tangentialen* Komponente folgend, sich so lange verschieben, bis der *Gleichgewichts*zustand und damit das Senkrechtstehen der Feldlinien erreicht ist.

Aus dem gleichen Grund befinden sich elektrische Überschußladungen *niemals im Innern* massiver oder hohler Metallkörper. Solche Ladungen folgen vielmehr dem Zug der Feldlinien, die von den außerhalb des Körpers befindlichen Ladungen des anderen Vorzeichens ausgehen, bis zur Oberfläche.

38.2.2. Influenz

Ein metallener Gegenstand enthält unter gewöhnlichen Verhältnissen gleich viele Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens. Infolge ihrer gegenseitigen Anziehung sind sie innig miteinander vermengt, so daß der Körper nach außen hin elektrisch neutral erscheint. Bringt man ihn aber in die Nachbarschaft eines elektrisch geladenen Körpers, z. B. der geladenen Kugel des Bandgenerators, so wird die auf dem Metallgegenstand befindliche entgegengesetzte Ladung in die Nähe der geladenen Kugel gezogen und dort festgehalten (Bild 504). Man nennt diese Erscheinung **Influenz.** Die vom geladenen Körper ausgehenden Feldlinien enden jetzt zum großen Teil auf dem Metallgegenstand und halten eine entsprechende Ladungsmenge auf seiner Oberfläche gebunden **(gebundene Ladung).** Entfernt man den Gegenstand wieder aus dem Bereich

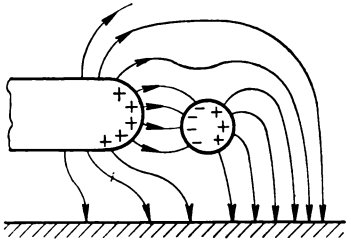


Bild 504. Influenz

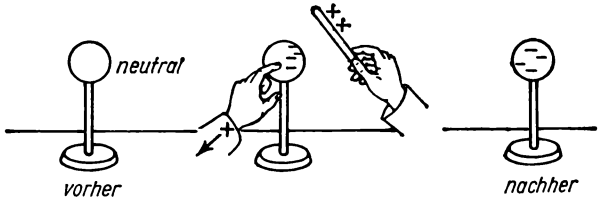


Bild 505. Aufladung eines isolierten Metallkörpers durch Influenz

des Feldes, so verschwindet auch sein Einfluß und die Ladungen verteilen sich wieder in der ursprünglichen Weise. Die Influenzwirkung ist daher nur von vorübergehender Art.

Sie läßt sich jedoch leicht nachweisen. Hierzu stellt man einen Metallgegenstand, z. B. eine Blechkugel, isoliert auf (Bild 505) und hält einen geriebenen Glasstab in seine Nähe. Dann berührt man die Kugel kurz mit dem Finger und entfernt den Stab wieder. Der Metallgegenstand erweist sich jetzt bei einer Prüfung als *negativ geladen, ohne* daß eine *Berührung* mit dem Glasstab stattgefunden hat. Die **freie Ladung** ist zur Erde abgeflossen und die zeitweilig vom influenzierenden Feld des Glasstabes **gebundene** Ladung auf dem Metallgegenstand verblieben.[1])

Beispiele: 1. Ein Elektrometer schlägt bereits aus, wenn man einen geriebenen Glasstab *annähert*, ohne das Elektrometer damit zu berühren. Nach kurzem Berühren des Elektrometerknopfes mit dem Finger erweist sich dieses wesentlich stärker geladen als bei direkter Berührung. Grund: Bei unmittelbarer Berührung kann nur wenig Ladung vom Stab übergehen, da dieser ein Isolator ist. Beim Influenzvorgang wirkt jedoch das *ganze Feld* in der Umgebung des Stabes ladungsverschiebend.

2. Vorüberziehende Gewitterwolken können auf Hochspannungsleitungen gefährliche *Ladungswellen* erzeugen, wenn die influenzierte Ladung nach Entladung der Wolke nach beiden Seiten abfließt.

38.3. Elektrische Feldgrößen

38.3.1. Elektrische Feldstärke

Um ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes zu finden, kann man zunächst von der Kraftwirkung ausgehen, die das elektrische Feld auf einen darin befindlichen geladenen und leicht beweglichen Körper ausübt. Sie ist schön zu sehen, wenn man zwischen die beiden Platten eines Kondensators eine flache, mit Wasser gefüllte Schale stellt. Auf dem Wasser schwimmt eine auf einem isolierenden Stiel befestigte,

[1]) Da sich in Wirklichkeit *nur negative* Ladungen (Elektronen) *bewegen* können, müßte man eigentlich sagen, dem Körper fließt zum Ausgleich der freien positiven Ladung eine entsprechende Menge von Elektronen zu. Diese ist nach Entfernen des positiv geladenen Stabes dann im Überschuß auf dem Körper vorhanden

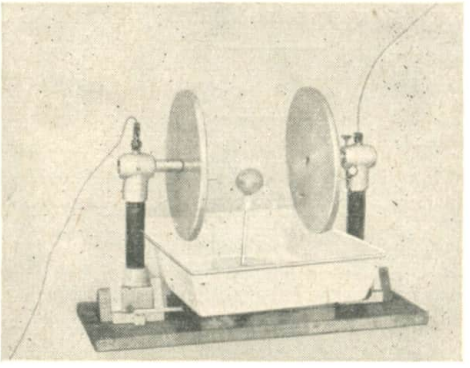


Bild 506. Bewegung einer geladenen Kugel im elektrischen Feld

mit Stanniol beklebte Christbaumkugel (Bild 506) und berührt anfänglich eine der beiden Platten. Verbindet man die Platten mit den Polen des Bandgenerators, so wird die auf dem Schwimmer stehende Kugel aufgeladen und treibt schnell auf die andere Platte zu, wo sie ihre Ladung wechselt, wieder zurückkehrt usw.

Es ist demnach deutlich zu sehen, daß die auf der Kugel sitzende Ladung Q einer *Kraft* F unterliegt und dadurch den *Weg* d zwischen den beiden Platten zurücklegt. Die dabei verrichtete *Arbeit* ist

(340) $$W = Fd.$$

Nun wissen wir aber noch aus 36.2., daß jede unter dem Einfluß einer Spannung U bewegte Ladung Q Arbeit verrichtet. Im geschlossenen Stromkreis wird sie in Form von Wärme frei, in diesem neuen Beispiel in Form von mechanischer Arbeit. Grundsätzlich ist es aber der gleiche Vorgang. Es gilt demnach auch hier die Gleichung (339)

(341) $$W = QU,$$

wobei jetzt U die zwischen den Platten des Kondensators liegende Spannung darstellt. Durch Gleichsetzen von (340) und (341) erhält man

$$Fd = QU.$$

Hieraus ergibt sich die vom Feld auf die Ladung Q ausgeübte *Kraft*

$$F = Q\frac{U}{d},$$

wobei der Quotient $\frac{U}{d}$ diejenige Größe ist, die vom Feld her gegeben ist. Man bezeichnet sie mit

(342) $$\boxed{E = \frac{U}{d}}$$ **elektrische Feldstärke E im Plattenkondensator**

Einheit der elektrischen Feldstärke E: 1 V/m

Damit wird schließlich die auf die Ladung Q wirkende Kraft

(343) $$F = QE$$

und die allgemeine Definition für die Feldstärke lautet:

(344) $\boxed{E = \frac{F}{Q}}$ **elektrische Feldstärke** E

Die elektrische Feldstärke ist das Verhältnis der auf eine Ladung wirkenden Kraft zum Betrag dieser Ladung.

Dabei muß aber der Betrag der Ladung Q so klein gedacht werden, daß sie das ursprünglich gegebene Feld durch ihre Influenzwirkung nicht verändert.
Zur praktischen Berechnung der Feldstärke würde sich Gleichung (344) allerdings nur für den Sonderfall des Plattenkondensators eignen, wenn der Plattenabstand relativ klein ist. Dann ist die Feldstärke in allen Raumpunkten gleich groß, und man spricht von einem **homogenen Feld.** In entsprechenden Zeichnungen verlaufen die Feldlinien in *gleich großen Abständen.*
In der Nähe der Plattenränder, wo die Linien stark auseinanderweichen, ist das Feld dagegen **inhomogen.** Noch auffälliger ist das in der Umgebung einer geladenen Kugel. Hier streben die Feldlinien radialsymmetrisch immer weiter *auseinander*, die Kraftwirkung wird mit zunehmender Entfernung immer geringer. Die Feldstärke muß dann aus den geometrischen Verhältnissen gesondert berechnet werden. Sie ist daher eine Größe, die im allgemeinen in jedem Feldpunkt einen anderen Betrag annehmen kann. Außerdem hat sie stets eine bestimmte *Richtung.* Diese ist durch die Tangente gegeben, die man an die durch den betrachteten Feldpunkt laufende Feldlinie legen kann. Somit ist die elektrische Feldstärke wie die Kraft eine *vektorielle Größe.*



Bild 507. Elektrischer Durchschlagkanal durch ein dickwandiges Porzellanrohr (Teil einer Durchführung)

Um sie als solche zu kennzeichnen, verwendet man den Buchstaben $\mathfrak{E}$. Wenn es, wie es im folgenden meist der Fall ist, nur auf den Betrag von $\mathfrak{E}$ ankommt, schreibt man ein lateinisches E.
Technisch besonders wichtig ist jener Betrag der Feldstärke, bei dessen *Überschreitung* der zwischen den Feldgrenzen befindliche Luftzwischenraum unter Funkenbildung *durchschlagen* wird. Diese **Durchschlagfestigkeit** trockener *Luft* beträgt etwa $2 \cdot 10^6$ V/m = 20000 V/cm (Bild 507).

38.3.2. Flächendichte

Zur Beschreibung des elektrischen Feldes bietet sich jedoch noch ein zweiter Weg, wenn man an die eigentliche Entstehung des Feldes denkt; denn dieses wird von einer ganz bestimmten Ladungsmenge Q verursacht, die auf der Plattenoberfläche sitzt. Bezieht man diese auf die Einheit der Oberfläche A, so erhält man

345) $\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$ **Flächendichte σ der Ladung auf einem Leiter**

Da die Oberfläche einer frei stehenden Kugel gleich $4\pi r^2$ und die Ladung auf ihr gleichmäßig verteilt ist, gilt für die *Flächendichte auf einer Kugel:* $\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$.
Durch Umstellung dieser Gleichung erhält man

(346) $\boxed{Q = 4\pi\sigma r^2}$ **Ladung Q einer Kugeloberfläche**

38.3.3. Verschiebungsdichte

Die Flächendichte kann man nun mit der Feldstärke gedanklich in Verbindung bringen, wenn man sich vorstellt, daß die auf den Kondensatorplatten befindliche Ladung gleichsam an den Enden der Feldlinien haftet und vom Feld gebunden wird. Je größer die Feldstärke ist, desto größer muß auch die von ihr „*verschobene*" *Ladungsmenge je Flächeneinheit* sein. Man kann also das Feld mit der gleichen Berechtigung durch die zu seiner Hervorrufung erforderliche *Flächendichte* beschreiben, wenn man die Flächendichte noch mit der *Richtung der Feldlinien* verknüpft.
In diesem Fall erhält die das Feld beschreibende Größe den Namen **Verschiebungsdichte** $\mathfrak{D}$, die in As/m^2 gemessen wird. Die Einheiten und Zahlenwerte von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ sind natürlich völlig *verschieden* voneinander. (Vergleich: Den Wert des Geldes kann man sowohl nach der zu seinem Erwerb notwendigen *Arbeit* als auch nach der *Warenmenge* bemessen, die man dafür kaufen kann.) Beiden Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ gibt man die Richtung der elektrischen Feldlinien. Wenn es, wie in vielen praktisch vorkommenden Fällen, nur auf den Betrag der Verschiebungsdichte ankommt, bezeichnet man diese mit dem lateinischen Buchstaben D. Feldstärke E und Verschiebungsdichte D lassen sich ineinander umrechnen nach der Beziehung

(347) $\boxed{D = \varepsilon_0 E}$ **Verschiebungsdichte D**

Einheit der Verschiebungsdichte D: 1 As/m^2

Der hier vorkommende Proportionalitätsfaktor ist

(348) $\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ As/Vm}$ **elektrische Feldkonstante (oder Influenzkonstante)**

Ihre Einheit folgt aus der Gleichung

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{As\,m}{m^2\,V} = \frac{As}{Vm}.$$

Die elektrische Feldkonstante ε_0 gibt an, welche Ladungsmenge je m^2 von der Feldstärke 1 V/m gebunden wird.

$\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ beschreiben, um es nochmals zu wiederholen, dasselbe Feld. Der Übergang von der einen zur anderen Bezeichnungsweise bedeutet nur eine Veränderung des Standpunktes insofern, als man $\mathfrak{E}$ gleichsam als „*Ursache*" und $\mathfrak{D}$ als „*Wirkung*" des Feldes bezeichnen kann. (Mit gleichem Recht könnte man auch $\mathfrak{D}$ als Ursache und $\mathfrak{E}$ als Wirkung betrachten.)

Da der Betrag der Verschiebungsdichte D gleich der Flächendichte σ ist, kann anstelle von Gleichung (347) auch geschrieben werden

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Hieraus folgt sofort

(349) $\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ **Feldstärke E an der Oberfläche eines geladenen Körpers**

Mit der Flächendichte einer geladenen Kugel (346) $\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$ ist dann

(350) $\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$ **Feldstärke E an der Oberfläche einer Kugel**

Die auf den gesamten Feldquerschnitt A entfallende Verschiebung bezeichnet man schließlich als

(351) $\boxed{Q = \sigma A}$ **Verschiebungsfluß Q** [1])

Einheit des Verschiebungsflusses Q: 1 As

Er gibt also an, welche Elektrizitätsmenge von einem bestimmten Feldquerschnitt auf den Kondensatorplatten gebunden wird.

Beispiele: 1. Wie groß ist die Feldstärke in einem homogenen Feld, wenn zwischen zwei auf einer Feldlinie liegenden, 5 cm entfernten Punkten eine Spannung von 0,3 V gemessen wurde? –

$$E = \frac{U}{d} = \frac{0{,}3\,\mathrm{V}}{0{,}05\,\mathrm{m}} = \underline{6\,\mathrm{V/m}}$$

2. Auf welche *Spannung* dürfen zwei Platten *höchstens* geladen werden, wenn der 4 cm breite Luftzwischenraum eben nicht durchschlagen werden soll? – Da die Durchschlagfestigkeit der Luft etwa 20000 V/cm beträgt, ist $U = Ed = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} = \underline{80000\,\mathrm{V}}$.

38.4. Kraftwirkungen und Arbeit im elektrischen Feld

38.4.1. Kraft zwischen zwei Punktladungen

Die ersten Messungen der elektrischen Anziehungskraft wurden 1785 von **Coulomb** mittels der von ihm erfundenen Drehwaage [2]) ausgeführt. Er fand dabei das

Coulombsche Gesetz der elektrischen Anziehung oder Abstoßung:
Die anziehende oder abstoßende Kraft zweier elektrisch geladener kleiner Kugeln ist proportional dem Produkt der beiden Ladungen und nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.

(352) $\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}}$

[1]) Die Bezeichnung ist insofern unglücklich, als hier nichts „fließt“

[2]) Diese ist im Prinzip die auf S. 112 abgebildete Drehwaage. Statt der dort angebrachten Körper verwendete Coulomb elektrisch geladene Metallkugeln

Herleitung: An der Oberfläche einer mit der Elektrizitätsmenge Q_1 geladenen Kugel besteht nach (350) die Feldstärke $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$. Diese Gleichung gilt in entsprechender Weise auch für einen *beliebigen Abstand* r vom Kugelmittelpunkt. Am Ort der zweiten Ladung Q_2 ist (Bild 508) $E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$ und die dort auf die Ladung Q_2 wirkende Kraft nach Gleichung (344) $F = Q_2 E_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

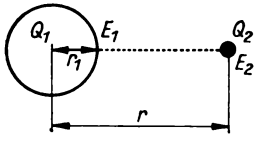


Bild 508. Zum Coulombschen Gesetz

Dabei muß man sich aber die Ladung Q_2 äußerst klein denken. Ist sie nämlich von nennenswerter Größe, so wirkt sie ihrerseits durch Influenz (38.2.2.) auf die Kugel zurück und ändert dort die Verteilung der Ladung Q_1. Damit ändert sich wiederum die ursprüngliche Feldstärke E_2. Das Coulombsche Gesetz gilt daher genau nur für punktförmige Ladungen oder weit entfernte geladene Kugeln, wobei r der Mittelpunktsabstand der Kugeln ist.

Beispiel: Zwei kleine Kugeln in 1 cm Abstand ihrer Mittelpunkte tragen eine Ladung gleichen Vorzeichens von je 10^{-8} As. – Dann ergibt sich die Abstoßungskraft aus Gleichung (352)

$$F = \frac{10^{-16}\,(\mathrm{As})^2\,\mathrm{Vm}}{4\pi\,8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\,(0{,}01)^2\,\mathrm{m}^2} = 0{,}009\,\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}}.$$

Nun ist aber (nach 5.1.) 1 Ws = 1 Nm, so daß die Kraft $F = 0{,}009$ N oder rund 1 p beträgt.

38.4.2. Kraft zwischen zwei geladenen Platten

Handelt es sich um die anziehende Kraft zwischen zwei geladenen *Platten*, die mit einem *kleinen Abstand* einander gegenüberstehen, so kann die eben erwähnte influenzierende Wirkung *nicht* vernachlässigt werden. Das Coulombsche Gesetz ist daher auch nicht anwendbar. Statt dessen muß man einen anderen Gedankengang einschlagen. Das Feld in einem Plattenkondensator wird nämlich erst von den beiden Ladungen $+Q$ und $-Q$ erzeugt. Dann befindet sich $+Q$ in dem von $-Q$ erzeugten Feld E_1 und $-Q$ in dem von $+Q$ erzeugten Feld E_2. *Beide Felder zusammen* ergeben das *tatsächlich vorhandene Feld* E, so daß $E = E_1 + E_2$ ist. Wegen $E_1 = E_2$ ist dann $E_1 = E/2$. Auf die Ladung $+Q$ wirkt demnach die Feldstärke $E/2$, so daß $F = \frac{QE}{2}$ die Kraft ist, mit der die eine Platte angezogen wird, wenn man die andere festhält. Weiterhin ist nach (351) $Q = \sigma A$ und nach (349) $\sigma = \varepsilon_0 E$, so daß $Q = \varepsilon_0 E A$ und $F = \frac{\varepsilon_0 E^2 A}{2}$ wird. Wegen $E = \frac{U}{d}$ ist dann

(353) $$\boxed{F = \frac{\varepsilon_0 U^2 A}{2d^2}}$$ **Anziehungskraft F zweier geladener Platten**

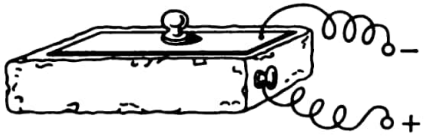


Bild 509. Anhaften eines schweren Steins durch elektrostatische Anziehung

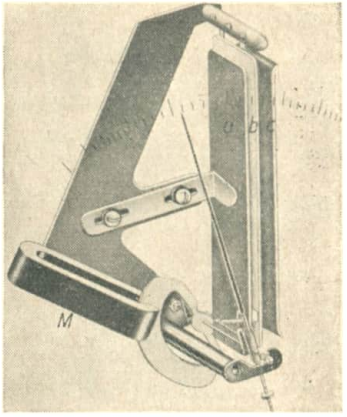


Bild 510. Elektrostatisches Meßwerk für hohe Gleich- und Wechselspannungen. Anschluß der Spannung einerseits an a, b und andererseits an c. M Dämpfungsmagnet

Beispiele: 1. Auf einem schweren Lithographenstein (Bild 509) liegt eine genau eben geschliffene Platte. Beim Anschluß an eine Gleichspannung von etwa 200 V haftet der Stein so fest, daß man ihn an der Platte hochheben kann. Der Zwischenraum d ist hier mikroskopisch klein, so daß die Kraftwirkung beträchtlich ist.

2. Für den letzten Fall mögen folgende Werte gegeben sein: Abstand $d = 0{,}01$ mm, Spannung $U = 220$ V, berührende Oberfläche $A = 600$ cm². Dann ist die Kraft nach Gl. (353)

$$F = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\;220^2\,\mathrm{V}^2\;6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vm}\;2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2} = 129\,\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}} = \underline{129\,\mathrm{N}}$$

(1 Ws = 1 Nm) oder 13,1 kp.

3. Zur Messung hoher Gleich- und Wechselspannungen verwendet man u. a. das in Bild 510 angegebene **elektrostatische Meßwerk,** das auf der Anziehung paralleler geladener Platten beruht.

38.4.3. Potential

Wie in 36.2. erklärt wurde, versteht man unter dem elektrischen Potential die Spannung gegenüber einem festgelegten Bezugspunkt. Auch jedem einzelnen Punkt eines elektrischen Feldes kommt ein solches **Potential** φ zu. Geht man z. B. von der negativ geladenen Platte eines Kondensators aus, so haben alle Punkte der anderen Platte ein bestimmtes, in Volt angebbares Potential. Sie liegen auf einer **Äquipotential-** oder **Niveaufläche.**

Um das Potential eines im freien Raum innerhalb des Feldes liegenden Punktes zu finden, stellt man sich vor, daß eine gedachte Probeladung von einem Bezugspunkt aus, dem man meist das Potential 0 zuordnet (vielfach wählt man hierfür die Erde), an diesen Ort gebracht wird. Es ist also gar nicht erforderlich, daß sich hier ein materieller Körper befindet. Dann ist das Potential gleich der dabei aufzuwendenden Arbeit. Denn nach der Definition (315) $U = \frac{W}{Q}$ ist die Spannung und damit auch das

Potential φ gleich der zum Transport der Ladungseinheit erforderlichen Arbeit. Es ergibt sich nach Gleichung (315) aus der zu überwindenden Kraft F und dem Weg r

$$\varphi = \frac{W}{Q} = \frac{Fr}{Q}.$$

Da aber die Kraft nach Gleichung (343) $F = QE$ ist, wird das Potential

$$\varphi = Er.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch nur für den Fall verwendbar, daß die Feldstärke E längs des Weges r konstant ist, d. h. also nur im homogenen Feld. In beliebigen Feldern muß der Weg in einzelne Wegelemente $\mathrm{d}r$ zerlegt und der entstehende Ausdruck zwischen Anfangspunkt $r_1(\varphi = 0)$ und Endpunkt r_2 integriert werden:

(354) $$\boxed{\varphi = \int_{r_1}^{r_2} E \,\mathrm{d}r}$$ **Potential φ eines Feldpunktes**

Das Potential eines Feldpunktes ist gleich der zum Transport der Ladungseinheit vom Bezugspunkt zum Feldpunkt aufzuwendenden Arbeit.

Potential an der Oberfläche einer positiv geladenen Kugel. In diesem Fall ist das Feld radialsymmetrisch, also nicht homogen. Die positiv zu denkende Probeladung sei mit Q_2 und der Kugelradius mit r_1 bezeichnet. Das Potential 0 besteht im Unendlichen, wo auch die Feldstärke E gleich 0 ist. Da gegen die Abstoßung Arbeit *aufzuwenden* ist, gilt zunächst mit (344)

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_1} \frac{F \,\mathrm{d}r}{Q_2}.$$

Mit dem Coulombschen Gesetz erhält man dann

$$\varphi = -\frac{1}{Q_2} \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,\mathrm{d}r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Wie zu sehen ist, hängt das Potential allein von der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt ab. Die Äquipotentialflächen sind daher wiederum konzentrische Kugelflächen im freien Außenraum.

38.5. Kapazität

Wendet man die grundlegende Beziehung (347) $D = \varepsilon_0 E$ auf den Zweiplattenkondensator an, so kann man für die Verschiebungsdichte nach Gleichung (345) $D = \frac{Q}{A}$ und für die Feldstärke nach (342) $E = \frac{U}{d}$ einsetzen. Das ergibt die Gleichung

$$Q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} U$$

Die Ladung Q eines Kondensators ist der Spannung U proportional.

Der Proportionalitätsfaktor ist hier durch den Ausdruck $\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ gegeben. Er enthält diejenigen Größen, die für die äußeren Abmessungen des Kondensators bestimmend sind, und wird die **Kapazität** C des Kondensators genannt. Die Kapazität bestimmt daher, welche Ladungsmenge Q der Kondensator bei gegebener Spannung U aufnimmt. Es folgt somit das Gesetz

(355) $$\boxed{Q = CU}$$

und zugleich auch

(356) $$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$ **Kapazität C des Zweiplattenkondensators** (im Vakuum)

Nach Umstellen der Gleichung (355)

$$C = \frac{Q}{U}$$

ergibt sich auch sofort die

Einheit der Kapazität C: 1 F (Farad) $= 1\frac{\text{As}}{\text{V}}$

Ein Kondensator hat die Kapazität 1 F, wenn er bei Anlegen der Spannung 1 V die Ladung 1 As aufnimmt.

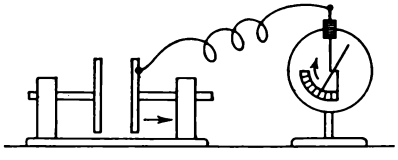


Bild 511. Bei Vergrößerung des Plattenabstandes steigt die Spannung

Diese Zusammenhänge lassen sich mit einem einfachen Versuch bestätigen. Ein Plattenkondensator wird mit einem Elektrometer verbunden und aufgeladen (Bild 511). *Zieht* man dann die Platten weiter *auseinander*, so zeigt das Elektrometer eine *stärker werdende Spannung* an. Bei *Verringerung* des Plattenabstandes sinkt die Spannung, obwohl die *Ladungsmenge unverändert* bleibt.

38.5.1. Zusammenschaltung von Kondensatoren

Verbindet man mehrere Kondensatoren miteinander, so entsteht ein neuer Kondensator. Seine Kapazität richtet sich danach, in welcher Weise die Verbindung erfolgt.

1. Parallelschaltung (Bild 512). Hinsichtlich der Ladungsmengen gilt $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ Alle Kondensatoren liegen an *derselben Spannung* U. Daher ist mit $Q = CU$

$$CU = C_1 U + C_2 U + \cdots$$

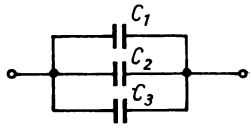


Bild 512. Parallelgeschaltete Kondensatoren

und nach Kürzen mit U

(357) $$\boxed{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$ **Gesamtkapazität C bei Parallelschaltung**

2. Reihenschaltung (Bild 513). Jeder Kondensator trägt dieselbe Ladungsmenge Q, da *jede Platte* auf der ihr gegenüberliegenden (ohne Rücksicht auf ihre Größe) die *gleiche Elektrizitätsmenge* bindet. Da sich die Spannungen bei der Reihenschaltung addieren, gilt: $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$. Demzufolge ist nach Kürzen mit Q

(358) $$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$ **Gesamtkapazität C bei Reihenschaltung**

Insbesondere gilt dann für 2 Kondensatoren:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

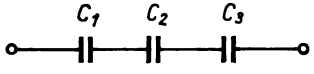


Bild 513. In Reihe geschaltete Kondensatoren

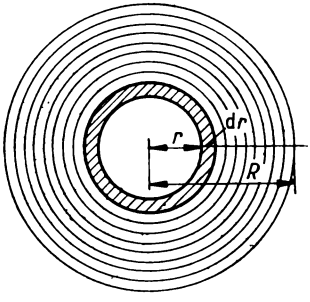


Bild 514. Zur Kapazität des Kugelkondensators

3. Kapazität des Kugelkondensators (Bild 514). Um die Kapazität eines aus zwei konzentrischen Kugelschalen bestehenden Kondensators zu berechnen, muß man sich deren Abstand dr zunächst sehr klein denken. Dann kann Gleichung (356) angewandt werden. Mit der Oberfläche $A = 4\pi r^2$ erhält man

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2}{\mathrm{d}r}.$$

Ist aber der Unterschied zwischen den Radien r und R *groß*, so kann man den Hohlraum mit vielen Einzelschalen von der Dicke dr ausfüllen. Sie stellen eine Reihenschaltung aus lauter Einzelkondensatoren dar. Die reziproke Gesamtkapazität ist nach Gleichung (358)

$$\frac{1}{C} = \frac{\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} + \frac{\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2} + \cdots$$

Dann ist das bestimmte Integral zwischen den Grenzen r und R zu bilden:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^R \frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Man erhält

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Alle zwischen der äußersten und innersten Schale liegenden Kugelflächen können nun in Gedanken weggelassen werden, ohne daß sich die Gesamtkapazität ändert. Alle Zwischenschalen tragen nämlich an ihren Innen- und Außenseiten die gleichen Ladungsmengen $+Q$ und $-Q$, die sich insgesamt aufheben und so zusammenwirken, als ob sie gar nicht da wären. Wenn schließlich noch der Radius R der äußeren Kugel sehr groß gegenüber dem der inneren Kugel gedacht wird, verschwindet das zweite Glied in der Klammer, und man erhält

(359) $\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 r}$ **Kapazität C einer frei stehenden Kugel**

Beispiele: 1. Welche Elektrizitätsmenge sitzt auf einer Kugel von 4 cm Durchmesser, deren Spannung gegen Erde 50 V beträgt? – Mit $Q = CU$ und (359) folgt

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r U = \frac{4\pi\ 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\ 0{,}02\,\mathrm{m}\ 50\,\mathrm{V}}{\mathrm{Vm}} = \underline{11{,}1 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{As}}.$$

2. Welche Kapazität hat die Erdkugel ($r = 6378$ km)? – Nach (359) folgt

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r = \frac{4\pi\ 8{,}854\ \ 10^{-12}\,\mathrm{As}\ 6{,}378 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}}{\mathrm{Vm}} = \underline{710\,\mu\mathrm{F}}.$$

4. Krümmungsradius und Feldstärke. Aus der letzten Gleichung (359) erhält man nun in Verbindung mit (355) die Spannung

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

einer geladenen frei stehenden Kugel gegenüber der Erde in Übereinstimmung mit dem in 38.4.3. für das Potential erhaltenen Ergebnis. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für die Feldstärke (350) an der Kugeloberfläche

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

so findet man

(360) $\boxed{E = \frac{U}{r}}$ **Feldstärke E an der Oberfläche einer geladenen Kugel**

Wenn man aber 2 verschieden große Kugeln durch einen Draht miteinander verbindet und dann auflädt (Bild 515), müssen beide die gleiche Spannung U gegen Erde haben. Es ist demnach

$$U = E_1 r_1 = E_2 r_2.$$

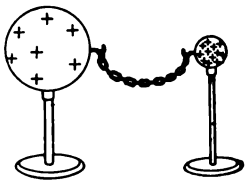


Bild 515. Verschiedene Flächendichte bei gleicher Spannung

Diese Feldstärken sind wiederum nach Gleichung (349) den Flächendichten proportional:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Die Flächendichte ist auf der *kleinen* Kugel demnach *größer* als auf der großen Kugel. Betrachtet man einen Körper von unregelmäßiger Gestalt, so sieht man, daß er an jeder Stelle einen anderen Krümmungsradius aufweist. Folglich ist die Ladungsverteilung und damit auch die Feldstärke an der Oberfläche entsprechend *unterschiedlich*.

Die Flächendichte und damit die Feldstärke eines geladenen Körpers ist dem Krümmungsradius der betreffenden Stelle umgekehrt proportional.

Dies macht sich bei geladenen Körpern als sogenannte **Spitzenwirkung** (Bild 516) bemerkbar. Infolge der hohen Feldstärke tritt eine *starke Ionenbildung* (42.1.) ein. Die vom Feld *weggetriebenen Ionen* führen zu starken Ladungsverlusten.

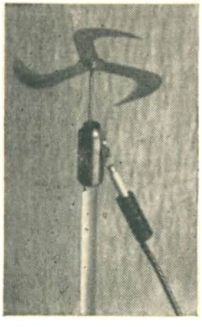


Bild 516. Spitzenwirkung versetzt ein Rädchen in Umdrehung

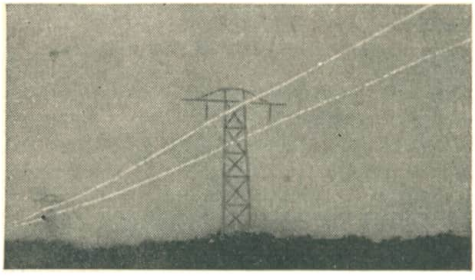


Bild 517. Sprühentladungen einer Hochspannungsleitung

Beispiele: 1. Alle Teile von Hochspannungsanlagen sind *sorgfältig abgerundet*, um Sprüherscheinungen zu vermeiden. Bei Hochspannungsleitungen von zu kleinem Durchmesser können dadurch größere Verluste eintreten (Bild 517).

2. Zur Wiedergewinnung wertvollen Staubes werden **elektrische Gasreiniger** *(Elektrofilter)* benutzt. In der Achse eines Rohres ist ein blanker Draht gespannt und gegenüber der Rohrwandung auf hohe Spannung geladen, so daß eine „stille" Entladung eintritt. Beim Hindurchströmen von Luft werden die Staubteilchen elektrisch geladen, wandern zur Rohrwand und sammeln sich hier an.

3. Eine Kugel von 3 cm Radius ist auf 5000 V geladen und hat an einer Stelle eine Spitze von 0,1 mm Krümmungsradius. Welche Feldstärke herrscht an der Spitze und an der übrigen Oberfläche? –

Nach (360) ist an der Spitze $E = \frac{U}{r_1} = \frac{5000\ \text{V}}{0{,}01\ \text{cm}} = 500\,000\ \text{V/cm}$ und an der übrigen Oberfläche $E = \frac{U}{r_2} = \frac{5000\ \text{V}}{3\ \text{cm}} = 1667\ \text{V/cm}$.

38.6. Energie des elektrischen Feldes

Wenn einem anfänglich noch ungeladenen Kondensator elektrische Ladung zugeführt wird, *steigt* seine *Spannung allmählich* an, und zwar wegen (355) $U = \frac{Q}{C}$ *proportional* der zugeführten Elektrizitäts*menge*. Es kommt also das in Bild 518 gezeichnete Diagramm zustande. Sobald aber eine kleine Ladung ΔQ *gegen ein Feld* bewegt wird, ist eine *Arbeit* ΔW aufzuwenden, die bei *konstanter* Spannung nach (341) gleich dem Produkt $U \cdot \Delta Q$ ist. Die gesamte Arbeit W ist dann gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve, d. h.

$$W = \frac{U}{2} Q \text{ oder mit } Q = UC\text{:}$$

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

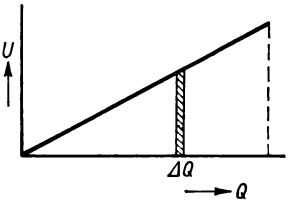


Bild 518. Ladung und Spannung eines Kondensators

Diese aufgewendete Arbeit W ist im elektrischen Feld des Kondensators enthalten.

(361) $\boxed{W = \frac{CU^2}{2}}$ **Energie W eines geladenen Kondensators**

Setzt man für C die Kapazität des Plattenkondensators ein, so erhält man

(362) $\boxed{W = \frac{U^2 \varepsilon_0 A}{2d}}$ **Energie W eines geladenen Plattenkondensators** (im Vakuum)

Mit der Feldstärke $U = Ed$ wird hieraus

(363) $\boxed{W = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 dA}$ **Energie W eines homogenen elektrischen Feldes** (im Vakuum)

woraus man unmittelbar sieht, daß die Energie dem *Quadrat* der Feldstärke und dem Volumen $V = dA$ des Plattenzwischenraumes proportional ist.
Jedes elektrische Feld ist daher ein Energieträger. In ihm ist die zur Trennung der ursprünglich vereinigt gewesenen Ladungen erforderliche Energie aufbewahrt. In **36.2.** stellten wir fest, daß jede Spannungsquelle auf einem solchen Vorgang der Ladungstrennung beruht. Ergänzend können wir jetzt sagen, daß die hierzu aufgewandte Energie bis zur Wiedervereinigung der Ladungen in einem dazugehörigen elektrischen Feld gespeichert ist.

Beispiel: Zur Speisung eines Elektronenblitzgerätes mit Hilfe eines Kondensators werden 100 Ws bei einer Spannung von 800 V benötigt. Welche Kapazität muß der Kondensator mindestens haben? – Durch Auflösung von (361) erhält man $C = \frac{2W}{U^2} = \frac{2 \cdot 100\,\text{VAs}}{800^2\,\text{V}^2} = 312\,\mu\text{F}$.

38.7. Elektrisches Feld und Stoff

38.7.1. Dielektrizitätszahl

In den Luftzwischenraum des nach Bild 511 mit einem Elektrometer verbundenen und geladenen Plattenkondensators schiebt man eine isolierende Scheibe aus Pertinax, Paraffin o. ä. Im gleichen Augenblick geht der Zeiger des Elektrometers zurück und zeigt an, daß die Spannung U entsprechend abgenommen hat. Beim Entfernen der Scheibe nimmt die Spannung ihren alten Wert sofort wieder an. Das Einbringen der Scheibe hat nur vorübergehende Wirkung. Das elektrische Feld wird daher durch den Versuch nicht zerstört, auch dann nicht, wenn man den Zwischenraum vollständig mit dem Isolierstoff ausfüllt. Da die elektrische Wirkung gleichsam durch den Isolator hindurchgreift, nennt man ihn in diesem Fall ein **Dielektrikum.**
Je dicker man das Dielektrikum wählt, desto größer wird der Spannungsrückgang, und beim Ausprobieren verschiedener Dielektrika gleicher Dicke stellt man fest, daß die Wirkung je nach Art des Materials verschieden ist. Immer aber wirkt sich die Anwesenheit des Dielektrikums so aus, als ob es den Plattenabstand verringere. Dies bedeutet:

Beim Einbringen eines Dielektrikums erhöht sich die Kapazität eines Kondensators.

Füllt man den Zwischenraum des Kondensators mit dem Dielektrikum vollständig aus, dann ist die Vervielfachung der Kapazität für jeden Füllstoff eine charakteristische Konstante. Man bezeichnet sie mit

(364) $$\boxed{\varepsilon_r = \frac{C}{C_{vak}}}$$ **Dielektrizitätszahl** $\varepsilon_r = \dfrac{\text{Kapazität mit Füllstoff}}{\text{Kapazität im Vakuum}}$

Die Dielektrizitätszahl der *Luft* ist nahezu gleich 1 ($\varepsilon_r = 1{,}000594$), weshalb viele elektrostatische Vorgänge sich in der Luft praktisch wie im *Vakuum* abspielen. Weitere Werte für ε_r sind in der Tabelle S. 398 angegeben. Besonders große Werte der Dielektrizitätszahl erzielt man bei keramischen Sondermassen. Größtwerte mit $\varepsilon_r \approx 10000$ weisen Kristalle aus Bariumtitanat auf.
Hiermit entsteht aus Gleichung (356)

(365) $$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}}$$ **Kapazität C eines Zweiplattenkondensators** (mit Dielektrikum)

Auch alle übrigen Gleichungen, in denen direkt oder indirekt die Kapazität enthalten ist, sind sinngemäß um den Faktor ε_r zu erweitern. Anstelle der elektrischen Feldkonstanten ε_0 ist dann stets das Produkt $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ einzusetzen, welches man auch als (absolute) **Dielektrizitätskonstante** $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ bezeichnet [1]).
Die Eigenschaften der technisch verwendeten Kondensatoren hängen in entscheidender Weise von der Art des Dielektrikums ab. Bei der veralteten **Leidener Flasche** ist es ein einfaches Glasgefäß, das innen und außen mit Stanniol beklebt ist.

[1]) Im Gegensatz hierzu wurde die Dielektrizitätszahl ε_r bisher auch als „relative Dielektrizitätskonstante" bezeichnet. Die hier benutzten Bezeichnungen entsprechen den in Standards bzw. DIN-Normen übernommenen internationalen Empfehlungen

Der **Minos-Flaschenverdichter** ist eine hochwertige moderne Form der Leidener Flasche (Durchschlagfestigkeit 2500 kV/cm, Kapazität bis 4000 pF) (Bild 519). **Blockkondensatoren** sind aus Metallfolien und Glimmer- oder Glasplatten geschichtet. **Wickelkondensatoren** werden aus einem langen Streifen zusammengerollt, der aus 2 paraffinierten Papierschichten und 2 Metallfolien besteht (Bild 520). Die in Rund-

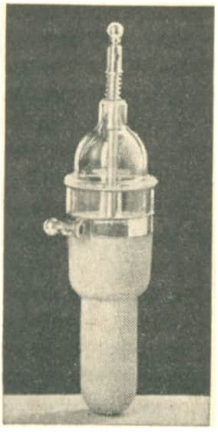


Bild 519
Moderne Leidener Flasche

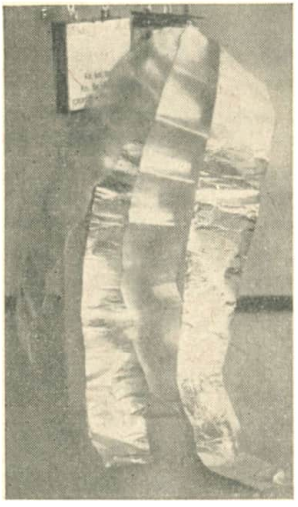


Bild 520
Geöffneter Wickelkondensator



Bild 521
Röhrchenkondensator

funkempfängern viel verwendeten **Röhrchenkondensatoren** (Bild 521) bestehen aus zwei ineinandergeschobenen Metallhülsen mit einer Zwischenschicht von besonders großer Dielektrizitätszahl.

Die **Elektrolytkondensatoren** enthalten 2 Aluminiumfolien in einer wäßrigen Lösung von Borax und Borsäure, von denen die *positive* sich beim Anlegen einer Spannung mit einer etwa 100 nm *dünnen Schicht* von $Al(OH)_3$ überzieht, die das *Dielektrikum* darstellt. Die Kapazität ist infolge der geringen Dicke des Dielektrikums *sehr groß*.

Beispiel: Welche Kapazität hat ein Plattenkondensator von 250 cm² Oberfläche bei Verwendung von Hartgummi als Dielektrikum ($\varepsilon_r = 2{,}8$), wenn die Randstreuung vernachlässigt wird, bei a) 1 mm und b) 3 cm Plattenabstand? –

$$\text{a)}\ C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As}}{\text{Vm}} \frac{2{,}8 \cdot 0{,}025\ \text{m}^2}{0{,}001\ \text{m}} = \underline{6{,}2\ \text{nF}} \qquad \text{b)}\ C = \underline{207\ \text{pF}}$$

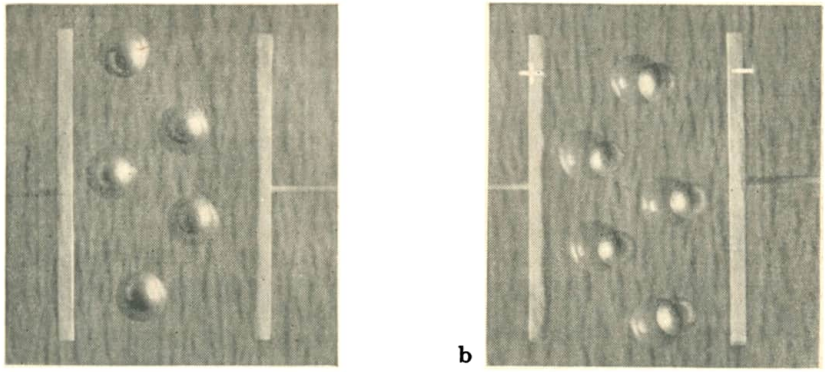
38.7.2. Vorgänge im Dielektrikum

Wie der auf S. 429 geschilderte Versuch gezeigt hat, nimmt die *Spannung* an den Kondensatorplatten beim *Einbringen* eines *Dielektrikums* ab. Da mit abnehmender Spannung *auch die Feldstärke sinkt*, ergibt sich:

Im Dielektrikum beträgt die Feldstärke bei konstanter Ladung gegenüber der des Vakuums nur den ε_r-ten Teil.

Die *Ladung* auf den Platten hat sich bei dem Versuch *nicht geändert*. Die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ wird daher vom Dielektrikum *nicht* beeinflußt. Es muß daher gelten

(366) $$\boxed{D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E}$$



a b

Bild 522. Verschiebungspolarisation (modellmäßig)

a) Positive und negative Ladungen sind im Molekül symmetrisch verteilt,
b) im elektrischen Feld verschiebt sich die negative Ladung nach der positiven und die positive Ladungen nach der negativen Seite des Feldes

Die Ursache dieses Vorganges ist aber nicht auf den Oberflächen, sondern im *Innern* des Dielektrikums, d. h. im Verhalten seiner Moleküle und Atome, zu suchen. Unter dem Einfluß des Feldes tritt *innerhalb der Moleküle* eine *Verschiebung* der Ladungen ein, die im neutralen Zustand symmetrisch zueinander verteilt sind. Die den Kondensatorplatten zugewandten Seiten werden positiv bzw. negativ **elektrisch polarisiert,** jedes einzelne Atom wird zu einem **Dipol** (Bild 522). Diese Erscheinung tritt in jedem Stoff auf, da der positive Kern und die negative Hülle eines Atoms nicht starr verbunden sind.

Diese Ladungsverschiebung hat dann zur Folge, daß an den Oberflächen des Dielektrikums, die den Kondensatorplatten zugekehrt sind, **scheinbare Ladungen** auftreten, welche die **wahren Ladungen** der Platten zum Teil kompensieren. Die verbleibende **freie Ladung** bestimmt schließlich die Feldstärke.

Im Gegensatz zur Influenzwirkung eines Feldes auf metallische Leiter bleibt die Polarisation im Dielektrikum auch nach Wegfall des erregenden Feldes noch einige

Zeit bestehen. Wenn man z. B. einen geladenen Kondensator durch kurzzeitiges Verbinden der beiden Pole entlädt und ihn eine Weile stehenläßt, findet man ihn hernach erneut aufgeladen *(elektrischer Rückstand)*.
Der polarisierte Zustand eines flüssigen Dielektrikums läßt sich auf längere Zeit gleichsam „einfrieren". Eine stabförmige Gußform wird mit einer flüssigen Mischung von Harz und Wachs gefüllt und mittels beiderseits eingeführter Elektroden einem starken Feld ausgesetzt. Nach dem Erstarren erweisen sich die beiden Enden als dauernd positiv bzw. negativ elektrisch. Ein solcher **Elektret** ist in einer Blechhülle jahrelang haltbar.

38.7.3. Piezoelektrischer Effekt

In ähnlicher Weise kommt auch der in 23.9. bereits erwähnte piezoelektrische Effekt zustande. Es handelt sich dabei z. B. um eine aus einem Quarzkristall geschnittene Platte (Bild 317). Drückt man sie in Richtung x — x zusammen, so zeigen sich auf diesen Flächen elektrische Ladungen.

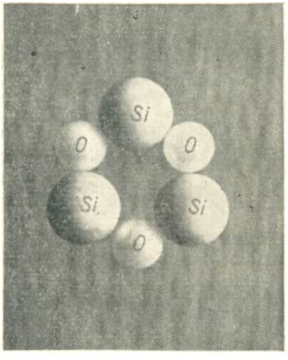


Bild 523. Strukturzelle des Quarzes

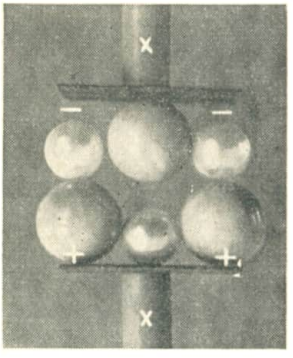


Bild 524. Modell des piezoelektrischen Effektes

Zur Erklärung muß man an den Aufbau des Quarzkristalls (SiO_2) aus Silizium- und Sauerstoffatomen denken, die in streng geometrischer Ordnung das Kristallgitter aufbauen. Das kleinste Bauelement, eine sog. Strukturzelle, besteht aus 3 positiv 4wertigen Silizium- und 6 negativ 2wertigen Sauerstoffatomen. Sie ist in Bild 523 vereinfacht dargestellt, und zwar so, daß hier je 2 Sauerstoffatome zu einem *einzigen* Atom zusammengefaßt erscheinen. Im *unverzerrten* Zustand ist die Zelle demnach elektrisch *neutral*.
Bei *Druck* auf die **polare** (x — x) Achse verschiebt sich die Zelle nach Bild 524 so, daß sich die *negative* Ladung des Sauerstoffs der *Oberseite* und die *positive* Ladung des Siliziums der *Unterseite* nähert.
Wenn nun der Kristall in ein elektrisches Feld gebracht wird, so erfährt er in umgekehrter Weise eine *Dehnung* oder *Verkürzung*. Dies nennt man den **reziproken Piezoeffekt** oder auch Elektrostriktion.
Die piezoelektrischen Erscheinungen können nur an Kristallen auftreten, die wie der Quarz eine *polare Achse* haben, z. B. das in elektroakustischen Geräten viel verwendete *Seignettesalz*.

38.7.4. Bildung elektrischer Doppelschichten

Ein empfindliches Elektrometer trägt einen mit Wasser gefüllten Metallbecher (Bild 525). Wenn man eine *isoliert* befestigte *Paraffinkugel eintaucht*, geschieht zu nächst noch nichts. Beim *Herausziehen* der Kugel schlägt das Elektrometer aus, da Wasser zeigt sich positiv geladen, während die Paraffinkugel *negativ* geworden ist.
Diese Erscheinung zeigt, daß sich zwischen Wasser und dem nicht benetzbaren Körper eine **elektrische Doppelschicht** ausbildet. Beim Herausnehmen des Paraffins bleibt die *positive Hülle* dieser Schicht im Wasser *zurück*. Derartige Doppelschichten bilden sich stets an der *Berührungsfläche* zweier *verschiedener* Stoffe. Hierfür gilt die

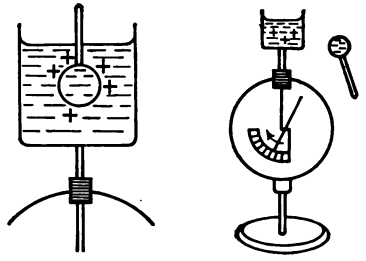


Bild 525. Nachweis der elektrischen Doppelschicht

Coehnsche Regel:

Bei Berührung lädt sich der Stoff mit der größeren Dielektrizitätszahl positiv auf.

Man kann sich das damit erklären, daß sich im Stoff mit dem *größeren* ε_r auch die *Ladungen stärker verschieben*, wobei die Elektronen leichter an das angrenzende Medium abgegeben werden als umgekehrt.
Auf diese Weise kommt auch die **„Reibungselektrizität"** zustande (38.1.), die auf der *innigen Berührung* zweier Stoffe und ihrer anschließenden *Trennung* beruht. Bedenkt man noch, daß die Länge der Feldlinien anfänglich etwa 10^{-6} cm betragen mag, dann aber millionenfach *vergrößert* wird, so erklären sich (S. 424) leicht die dabei auftretenden hohen Spannungen.
Auch beim *Zersplittern* und *Zerstäuben* einheitlicher fester Stoffe und Flüssigkeiten treten häufig beträchtliche Ladungsmengen und *hohe Spannungen* auf (im Dunkeln sichtbare Funkenbildung beim Zerbrechen von Würfelzucker, Staubexplosionen). Werden von Wassertropfen kleine Teile abgerissen, so sind diese Stäubchen *negativ* geladen, womit es sich erklärt, daß die einen Wasserfall umgebende Luft stets negativ geladen ist. Auf die elektrische Ladung fein zerstäubter Wassertröpfchen ist wahrscheinlich auch die Gewitterbildung zurückzuführen.

38.7.5. Thermoelektrische Erscheinungen

Werden die beiden Enden eines Metallstabes auf unterschiedliche Temperatur gebracht, so tritt innerhalb des Metalles eine Verschiebung der Elektronendichte ein Zwischen den Stabenden entsteht eine elektrische Spannung. Um diesen **thermoelektrischen (Seebeck-) Effekt** nachzuweisen, bedient man sich eines *Thermoelementes*, das wie folgt zusammengesetzt ist (Bild 526). Zwei *verschiedene* Metallstäbe oder -drähte (etwa Kupfer und Antimon) sind an beiden Enden miteinander fest *verbunden* (gelötet, geschweißt oder zusammengepreßt). Wird die eine **Lötstelle** erhitzt, so fließt ein Strom. Die entstehende Spannung ist jedoch recht klein. Die Strom-

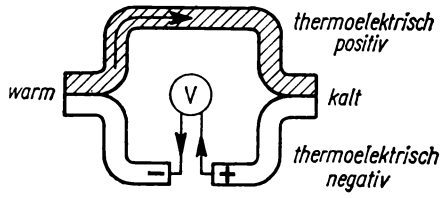


Bild 526. Technische Stromrichtung im Thermoelement

stärke hängt vom Widerstand der Anordnung ab. Die Größe und Richtung der *Thermo*-Urspannung für 1 Grad Temperaturunterschied der beiden Lötstellen ersieht man aus der

Thermoelektrischen Spannungsreihe (bei 0 °C)

Sb	Fe	Zn	Cu	Pb	Al	Pt	Ni	Bi
+35	+16	+3	+2,8	0	−0,5	−3,1	−19	$-70 \cdot 10^{-6}$ V/grd.

An der *kälteren* Lötstelle ist jedes in dieser Reihe *links* stehende Metall gegenüber einem rechts davon stehenden thermoelektrisch *positiv*.

Thermoelemente werden vor allem zu *Temperaturmessungen* verwendet, besonders die Kombinationen *Eisen–Konstantan* oder *Kupfer–Konstantan* oder *Platin–Platinrhodium* (mit 10 % Rh). Zu beachten ist, daß die Urspannung im allgemeinen nicht von der Temperaturdifferenz, sondern auch von der Temperatur selbst abhängt.

Thermospannung (mV) und Temperatur (°C)

Temperatur der Lötstellen in °C	0 bzw. 100	0 bzw. 200	0 bzw. 300	0 bzw. 400
Konstantan–Eisen	5,40	10,99	15,56	22,07
Platin–Platinrhodium	0,64	1,42	2,29	3,21

Wie man sieht, ist die Urspannung der Temperatur nicht genau proportional. Zur Messung von Wechselströmen beliebiger Frequenz dienen **Thermoumformer.** Der Wechselstrom erwärmt einen dünnen Heizdraht, mit dem die Lötstelle des aus 2 feinen Drähten bestehenden Thermoelementes in mittelbarer oder unmittelbarer (*Thermokreuz*) Berührung steht.

Die *Umkehrung* dieser thermoelektrischen Erscheinungen ist der **Peltier-Effekt** (1834). Ein durch die Lötstelle gesandter *Strom kühlt* diese ab oder *erwärmt* sie. Der durch Erwärmung einer Lötstelle entstehende Strom ist so gerichtet, daß ein Strom von gleicher Richtung Abkühlung hervorruft (Bild 527). Unter Verwendung bestimmter Halbleiter ist der Wirkungsgrad von Thermoelementen bedeutend verbessert worden und auch der PELTIER-Effekt technisch verwertbar (Bild 528).

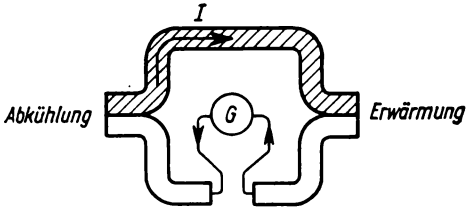


Bild 527. PELTIER-Effekt bei gleicher Anordnung wie in Bild 526

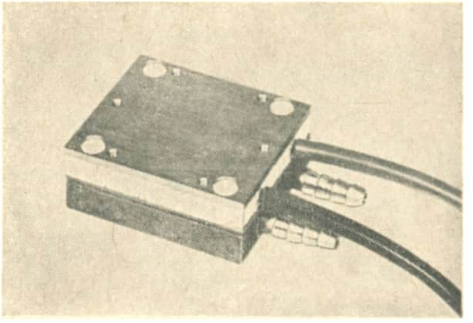


Bild 528. PELTIER-Kühlbatterie zum Kühlen kleiner Objekte

Beispiele: 1. Die Lötstellen eines Thermoelementes Antimon-Wismut tauchen in siedendes Wasser bzw. schmelzendes Eis. Welche Urspannung entsteht? – Nach der Spannungsreihe ergibt sich

$$E = [35 - (-70)] \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V/grd} \cdot 100\ \mathrm{grd} = \underline{0{,}0105\ \mathrm{V}}.$$

2. Welcher Strom fließt durch einen Thermokreis, der aus 2 Eisen- und Konstantanstäben von je 8 cm Länge und 2 cm² Querschnitt besteht? Die Temperaturdifferenz der Lötstellen betrage 50 grd. –
Die Urspannung beträgt nach der gegebenen Tabelle $E = 2{,}7$ mV. Die spezifischen Widerstände sind nach S. 397 für Eisen $\varrho_1 = 0{,}1\ \Omega\,\mathrm{mm^2/m}$ und für Konstantan $\varrho_2 = 0{,}5\ \Omega\,\mathrm{mm^2/m}$. Dann ist die Stromstärke

$$I = \frac{E}{R} = \frac{EA}{\varrho l} = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}\ 200\ \mathrm{mm^2\,m}}{(0{,}1 + 0{,}5)\ \Omega\,\mathrm{mm^2}\ 0{,}08\ \mathrm{m}} = \underline{11\ \mathrm{A}}.$$

39. Magnetisches Feld

39.1. Grunderscheinungen des Magnetismus

Jedermann kennt heute die aus hartem Stahl bestehenden stab-, nadel- oder hufeisenförmigen **Dauermagnete (permanente Magnete)** mit ihrer Eigenschaft, nicht nur Eisen, sondern auch *Nickel* und *Kobalt* anzuziehen.
Ein frei in der Mitte aufgehängter Magnet dreht sich stets mit dem einen Ende nach *Norden*. Man nennt dieses den **Nordpol** des Magneten, das andere Ende den **Südpol.**

Der $\frac{\text{Nord}}{\text{Süd}}$pol des Magneten weist nach $\frac{\text{Norden}}{\text{Süden}}$.

Die Ursache dieses Verhaltens ist das natürliche Magnetfeld der Erde. Es ist verhältnismäßig schwach und bewirkt die Ausrichtung der *Kompaßnadel*. Die beiden Pole des Erdfeldes fallen aber nicht mit den geographischen Polen zusammen.
Bringt man einen zweiten, etwa gleich starken Magneten in die Nähe des beweglichen, so findet man:

Gleichartige Pole stoßen sich ab, ungleichartige Pole ziehen sich an.

Ein Magnet werde mit Papier bedeckt und dieses mit Eisenfeilspänen bestreut (Bild 529). Die Feilspäne ordnen sich zu charakteristischen Linien, den **magnetischen**

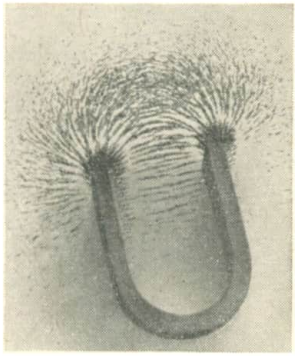


Bild 529. Feldlinien eines Hufeisenmagneten

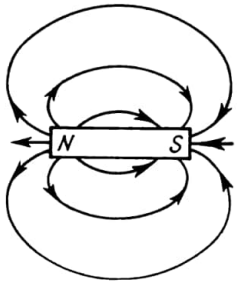


Bild 530. Pole und Richtung der Feldlinien

Feld- (oder Kraft-) Linien, an, die äußerlich große Ähnlichkeit mit den elektrischen Feldlinien haben. Hinsichtlich ihrer Richtung hat man willkürlich festgesetzt:

Die magnetischen Feldlinien laufen außerhalb eines Magneten vom Nord- zum Südpol.

Sie treten aus dem *Nordpol aus* und gehen in weitem Bogen wieder in den *Südpol hinein* (Bild 530).

Hinsichtlich ihrer realen Existenz gilt dasselbe, was auch in 38.2.1. über die elektrischen Feldlinien gesagt wurde. Doch ist die Feldlinienvorstellung ein recht nützliches Hilfsmittel, um magnetische Kraftwirkungen anschaulich darzustellen.

Ein kleiner in das Feld gebrachter Magnet stellt sich stets in Richtung der Feldlinien ein.

Man kann daher mit einem kleinen Probemagneten stets die Feldrichtung feststellen.

Der Nordpol weist in Richtung der Feldlinien.

39.2. Strom und Magnetfeld

Früher glaubte man, daß der Magnetismus eine selbständige physikalische Erscheinung darstelle. Wir werden aber sehen, daß die magnetischen Vorgänge mit elektrischen Vorgängen zusammenhängen, daß *jeder elektrische Vorgang* zugleich ein *magnetischer* ist und umgekehrt.

Dies zeigt auch der folgende, leicht anzustellende Versuch.

Durch die Mitte einer waagerechten Pappscheibe geht senkrecht ein Draht, durch den ein Strom von einigen Ampere fließt. Streut man jetzt Eisenfeilspäne darauf, so ordnen sich diese zu *konzentrischen Kreisen* an (Bild 531). Eine kleine, um den Draht geführte Magnetnadel stellt sich *tangential* zu diesen Kreisen (Bild 532) und ergibt die

(367) **Schraubenregel (für Stromrichtung und Feldumlauf):**
Eine rechtsgängige Schraube schreitet in Richtung des Stromes vorwärts, wenn man sie im Sinne des den Strom umlaufenden Magnetfeldes dreht (Bild 533).

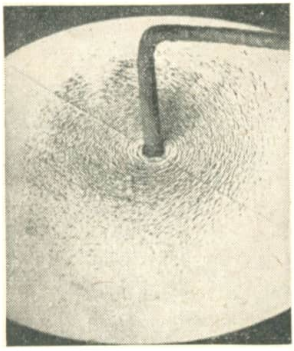


Bild 531. Magnetfeld eines geraden Stromleiters

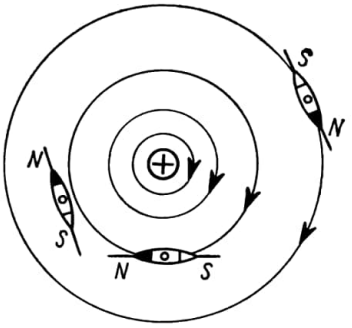


Bild 532. Einstellung eines kleinen Probemagneten im magnetischen Feld. Der Strom fließt von oben durch die Zeichenebene nach unten

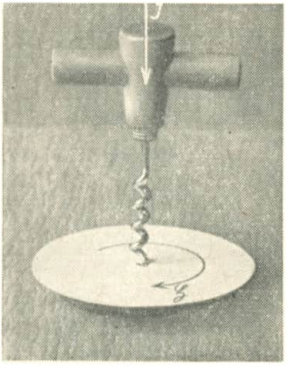


Bild 533. Schraubenregel für Stromrichtung und Magnetfeld

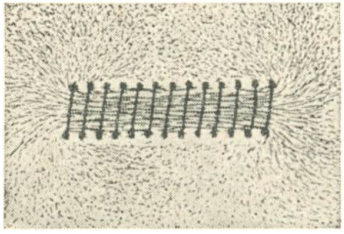


Bild 534. Magnetische Feldlinien einer Zylinderspule

Formt man den Draht zu einer Spule, so kann man durch Feilspäne feststellen, daß ihr Inneres von **parallelen Feldlinien** durchzogen ist (Bild 534). An den *Enden* der Spule quellen die Feldlinien *bogenförmig* heraus, laufen außerhalb der Spule zurück, um am anderen Ende wieder einzutreten.

Das Magnetfeld im Innern einer langen Zylinderspule ist praktisch homogen.

Als Merkregel gilt hier ebenfalls die

(368) **Schraubenregel (für Feldrichtung und Stromumlauf)** (Bild 535)**:**

Dreht man eine rechtsgängige Schraube im Sinne der Stromrichtung, so schreitet sie in Richtung des magnetischen Feldes vorwärts.

Wenn man eine lange Zylinderspule zu einem Ring zusammenbiegt, entsteht eine **Ringspule.** Die aus einer beiderseits offenen Spule austretenden Feldlinien sind hier ringförmig in sich geschlossen (Bild 536). Nirgendwo treten Kraftlinien aus.

Der Außenraum einer Ringspule ist feldfrei.

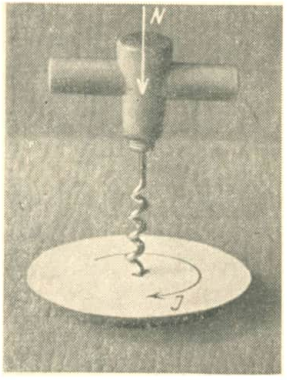


Bild 535. Schraubenregel für Feld- und Stromrichtung in den Windungen einer Spule

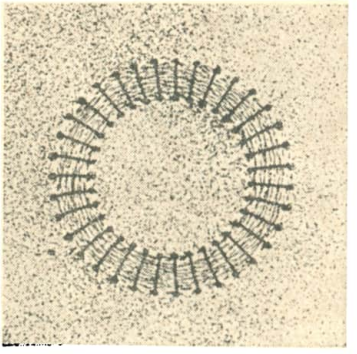


Bild 536. Magnetische Feldlinien einer Ringspule

39.3. Magnetische Feldgrößen

39.3.1. Magnetische Feldstärke

Um ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes zu finden, gingen wir von der Kraft aus, mit der eine Probeladung im Feld bewegt wird. In entsprechender Weise läßt sich die Stärke eines *magnetischen Feldes* mit Hilfe einer kleinen drehbaren Magnetnadel bestimmen, die man im Innern einer stromdurchflossenen Zylinderspule anbringt (Bild 537). Ihre Achse ist an einer kleinen Spiralfeder befestigt. Steht sie anfänglich quer zu den Feldlinien, so dreht sie sich beim Einschalten des Stromes um einen bestimmten Winkel in die Richtung der Feldlinien. Diese Drehung kann man aber wieder rückgängig machen und das hierzu erforderliche *Drehmoment* messen. Eine derartige Anordnung, mit der man die **magnetische Feldstärke** messen kann, nennt man ein *Magnetometer*.

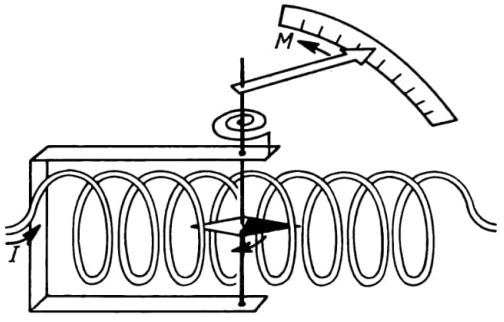


Bild 537. Prinzip des Magnetometers. Um die Magnetnadel quer zu den Feldlinien zu stellen, bedarf es eines Drehmomentes

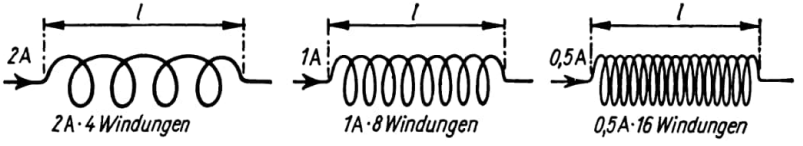


Bild 538. Gleiche Feldstärke bei gleicher Spulenlänge und gleicher Amperewindungszahl

Wie sich mit einfachen Versuchen zeigen läßt, ist das Drehmoment der Stärke des Stromes I proportional. Man kann das Feld aber auch dadurch kräftiger machen, daß man bei gleicher Stromstärke und Spulenlänge eine *größere* Zahl von Windungen aufwickelt (Bild 538).

Eine Vervielfachung der Stromstärke verstärkt das Feld bei konstanter Spulenlänge ebenso wie eine gleiche Vervielfachung der Windungszahl bei konstanter Stromstärke.

Es kommt also auf das Produkt aus der Stromstärke I und der Windungszahl N an. Man nennt es die **Amperewindungszahl** IN. Dagegen zeigt sich ein umgekehrter Einfluß der Spulenlänge l. Bei gleichbleibender Amperewindungszahl wird das Drehmoment um so kleiner, je länger die Spule ist.
Die drehbare Magnetnadel ist somit ein geeignetes Hilfsmittel, die Stärke des Magnetfeldes zu erfassen. Im Falle der Zylinderspule ist die Feldstärke eine einfache Funktion der 3 charakteristischen Größen: Stromstärke, Windungszahl und Spulenlänge. Damit definiert man als **magnetische Feldstärke im Innern einer Ringspule oder langen Zylinderspule:**

(369) $$\boxed{H = \frac{IN}{l}}$$ (N Windungszahl, l Länge der Spule) [1])

Aus Gleichung (369) folgt die

Einheit der magnetischen Feldstärke: 1 A/m [2])

Die Einheit A/m wird ganz allgemein für *magnetische Felder aller Art* verwendet, also nicht nur für Zylinder- oder Ringspulen, für die sie zunächst am geeignetsten erscheint.
Im inhomogenen Feld hat die Feldstärke in jedem Punkt einen anderen Wert, nicht nur dem Betrage, sondern auch der *Richtung* nach. Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist ebenso wie die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ eine vektorielle Größe, die zugleich die Richtung der durch den betreffenden Feldpunkt laufenden Feldlinie angibt.
In den meisten Fällen wird es im folgenden nur auf deren Betrag ankommen, wofür man dann den lateinischen Buchstaben H verwendet.

39.3.2. Durchflutungssatz

Die soeben aufgestellte Definition $H = \frac{IN}{l}$ gilt *genau nur* für eine *Ringspule*, da aus ihr keine Feldlinien austreten und ihr Feld vollständig homogen ist, sowie für eine unendlich lange Zylinderspule.

An den *Enden* einer Zylinderspule jedoch treten die Feldlinien auseinander, so daß das Feld hier schwächer wird. Im Außenraum vollends verteilen sich die Feldlinien auf ein sehr großes Gebiet, wo die Feldstärke entsprechend gering ist.

---

[1]) Genauere Berechnungen ergeben für den Mittelpunkt einer Zylinderspule $H = \frac{IN}{\sqrt{d^2 + l^2}}$.
Ist der Durchmesser $d \ll l$, so folgt daraus Gl. (369)

[2]) Veraltet und nicht mehr zulässig ist die Einheit „Oersted" 1 Oe $= \frac{100}{4\pi}$ A/m

Bringt man die Gleichung in die Form

$$\boxed{Hl = IN}$$

so läßt sich ihre Bedeutung auch auf *Magnetfelder beliebiger Art* ausdehnen, wenn man unter l die *gesamte* Länge einer in sich geschlossenen Feldlinie versteht. Wenn es sich dabei um ein *inhomogenes* Feld handelt, hat die Feldstärke H längs des Weges l allerdings in jedem Punkt einen anderen Wert. Anstelle des einfachen Produktes Hl ist dann die Summe (Bild 539)

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \cdots = IN$$

zu bilden.

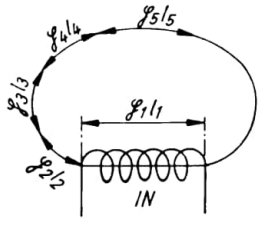


Bild 539. Feldstärke im nicht homogenen Feld

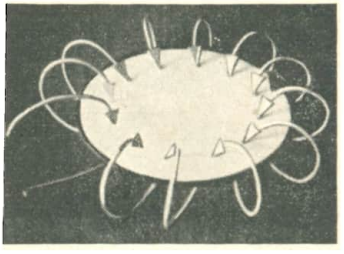


Bild 540. Modell der Durchflutung einer Ringspule mit umrandender Feldlinie

Werden die Teillängen mit Δl bezeichnet und so klein gedacht, daß die zugehörigen Feldstärken innerhalb eines jeden Bereiches als konstant betrachtet werden können, dann lautet die Gleichung

(370) $$\Sigma H \cdot \Delta l = I\,N\,.$$

Bei noch feinerer Unterteilung der Feldlinie schreibt man die Liniensumme in der Form des Integrals $\oint H\,\mathrm{d}l$ und nennt sie die **magnetische Umlaufspannung.** Ferner wird die Summe aller Ströme, die in das *Innere* der von dieser Feldlinie umrandeten *Fläche eintreten*, als **Durchflutung** bezeichnet (Bild 540):

$$\oint H\,\mathrm{d}l = \sum_{n=1}^{n=N} I_n\,.$$

Durchflutungssatz:

Die magnetische Umlaufspannung ist gleich der Durchflutung der von der betrachteten Feldlinie umrandeten Fläche.

Bei der Anwendung der Gleichung (370) auf die Zylinderspule scheint ein Widerspruch zu entstehen. Unter l ist nach Gleichung (369) allein die Länge des Spulenkörpers zu verstehen, während jetzt über die Gesamtlänge der Feldlinien zu summieren ist. Es zeigt sich aber, daß die Teilsumme $\Sigma\, H_a l_a$ *außerhalb* der Spule infolge der außerordentlich geringen Feldstärke im Außenraum gegenüber der Teilsumme $\Sigma\, H_i l_i$ im Spulen*innern* um so mehr verschwindet, je länger die Spule ist.

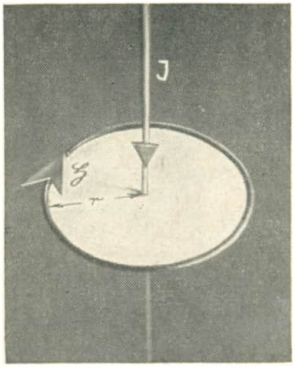


Bild 541. Herausgegriffene Feldlinie eines geraden Stromleiters

Ein anderer Sonderfall liegt beim magnetischen Feld eines **geradlinigen Stromleiters** vor. Dieser ist (Bilder 531 und 541) von konzentrischen kreisförmigen Feldlinien umgeben. Da die Länge einer solchen Linie $l = 2\pi r$ und H längs dieser Linie konstant ist, gilt $2\pi r H = IN$. Da nur eine einzige stromdurchflossene Windung vorliegt, ist $N = 1$; denn das betrachtete gerade Leiterstück ist ein Teil einer Stromschleife, deren sonstige Teile in diesem Zusammenhang nicht weiter beachtet werden. Damit wird daher aus Gleichung (370)

$$H 2\pi r = I$$

und damit

(371) $$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}}$$ **magnetische Feldstärke H außerhalb eines geraden Leiters**

Hieraus ist ersichtlich:

Die magnetische Feldstärke ist dem Abstand vom Leiter umgekehrt proportional.

Beispiel: Welche Feldstärke besteht in 5 cm Entfernung von einem Draht, durch den ein Strom von 6 A fließt? –

$$H = \frac{6\,\text{A}}{2\pi\ 0{,}05\,\text{m}} = \underline{19\ \text{A/m}}$$

39.3.3. Induktion

Zur Beschreibung des elektrischen Feldes bieten sich zwei Möglichkeiten, je nachdem, ob man seine *Ursache* (Ladung der Platten) oder seine *Wirkung* (Kraft auf die Probeladung) ins Auge faßt. Im ersten Fall wird man auf die Verschiebungsdichte D geführt, im zweiten Fall auf die elektrische Feldstärke E. Auch beim magnetischen Feld lassen sich zwei prinzipiell verschiedene Grundvorgänge heranziehen, um dieses Feld quantitativ zu erfassen. Die *Ursache* des Magnetfeldes wird zweifellos durch die soeben besprochene magnetische Feldstärke beschrieben. Es entsteht, wenn ein Strom durch eine Spule fließt, die je Längeneinheit eine bestimmte Zahl von Windungen trägt.
Dieses Feld übt aber auf eine andere, in der Nähe befindliche Spule eine Wirkung aus, die bei folgendem Grundversuch in Erscheinung tritt. Im Innern einer Zylinderspule **(Feldspule)** befinde sich eine zweite, kleinere Drahtschleife, deren Enden mit einem empfindlichen Galvanometer von langsamer Schwingdauer (S. 462) verbunden sind (Bild 542). Solange in der Feldspule ein konstanter Strom fließt, geschieht nichts. Wenn man aber den Strom der Feldspule *abschaltet*, zeigt das Galvanometer einen

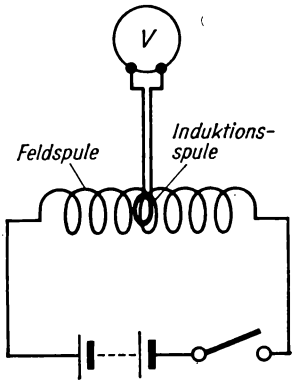


Bild 542. Induktionsversuch

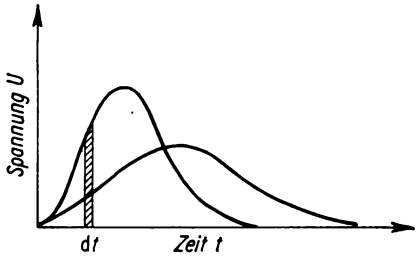


Bild 543. Zwei Spannungsstöße gleicher Größe, aber unterschiedlicher Zeitdauer (gleiche Flächeninhalte)

kurzdauernden **Spannungsstoß.** Beim Wiederein*schalten* tritt ein zweiter Spannungsstoß von *entgegengesetzter* Richtung auf. Man nennt diesen Vorgang **Induktion** und die zweite Spule die **Induktionsspule.**
Wir werden uns mit dieser Erscheinung noch ausführlicher beschäftigen. Vorläufig sei nur folgendes festgestellt:

Während des Entstehens und Vergehens eines magnetischen Feldes wird in einer benachbarten Spule eine Spannung induziert.

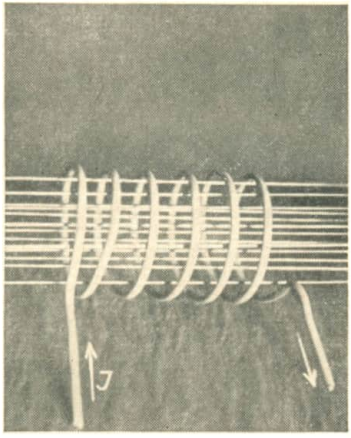
Die Spannung ist, wie sich mit weiteren Versuchen bestätigen läßt, der von der Induktionsschleife umfaßten Fläche proportional, also z. B. größer, wenn man sie auf dem äußeren Umfang der Feldspule aufbringt.
Ein solcher Spannungsstoß sieht etwa so aus, wie Bild 543 zeigt. Läßt man den Strom der Feldspule nur *langsam* zu- oder abnehmen, so findet man, daß die Spannung zwar *nicht* so *hoch* ansteigt, dafür aber *länger* anhält. Der *Flächeninhalt* unter der Kurve (die zeitliche Summe aller Augenblicksspannungen) aber *bleibt der gleiche.*

Die Größe des induzierten Spannungsstoßes (des Zeitintegrals der Spannung) ist unabhängig von der Art des Ein- oder Ausschaltens des magnetischen Feldes.

Mathematisch läßt sich der Spannungsstoß darstellen, wenn man sich den gesamten Zeitraum t, innerhalb dessen sich der Induktionsvorgang abspielt, in äußerst kleine Zeitintervalle $\mathrm{d}t$ zerlegt denkt. Dann ist das Produkt $U\,\mathrm{d}t$ ein schmaler Flächenstreifen im Diagramm und der ganze Spannungsstoß gleich der Summe aller elementaren Rechtecke, die man durch das Integral

$$\int U\,\mathrm{d}t$$

ausdrückt. Vorläufig kommt es aber noch nicht darauf an, in welcher Weise man diese Zeitsumme berechnen oder messen kann. Wesentlich ist vielmehr, daß sich dabei die Einheit **1 Voltsekunde** ergeben muß. Da aber der Spannungsstoß noch von der *Größe* der *Induktionsschleife* abhängt, bezieht man ihn für diesen Zweck auf 1 m² – man denke sich demnach eine Drahtschleife von 1 m² Flächeninhalt, die so in die



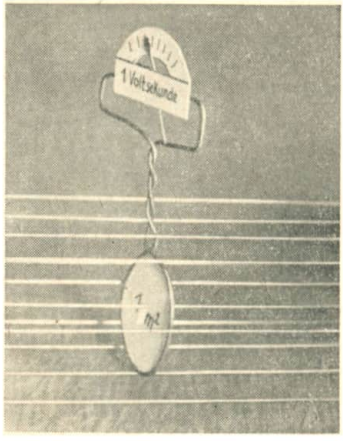


Bild 544. Die beiden Einheiten des magnetischen Feldes (modellmäßig)
a) Feldstärke in A/m, b) magnetische Induktion in Vs/m²

Feldspule gebracht wird, daß sie senkrecht von den Feldlinien durchsetzt wird – und erhält so die

Einheit der magnetischen Induktion B: $1\ \mathrm{Vs/m^2} = 1\ \mathrm{T}$ (Tesla).

Um es nochmals zu betonen: Feldstärke H und magnetische Induktion B kennzeichnen ein und dasselbe Feld und unterscheiden sich nur durch die unterschiedliche Art der Meßmethode. Im Vakuum kann man die Feldlinien sowohl als H-Linien als auch als B-Linien auffassen (Bild 544). Ihr Verlauf bringt zum Ausdruck, daß im allgemeinen in jedem Feldpunkt die Feldstärke H und auch die magnetische Induktion B sowohl einen bestimmten *Betrag* als auch eine bestimmte *Richtung* haben. Beide sind demnach *vektorielle Größen*, was man im Bedarfsfall durch die besondere Schreibweise $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ zum Ausdruck bringt. Die üblichen lateinischen Buchstaben H und B verwendet man nur, wenn es lediglich auf die Beträge ankommt.
Ebenso wie die elektrischen Feldgrößen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ sind auch die magnetischen Feldgrößen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ *im Vakuum* einander proportional. Ihre Beträge lassen sich ineinander umrechnen nach der Beziehung:

(372) $$\boxed{B = \mu_0 H}$$

Für den Proportionalitätsfaktor μ_0 ergibt sich die Einheitengleichung

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{\mathrm{Vs\,m}}{\mathrm{m^2\,A}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

(373) $$\boxed{\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs/Am}}$$ **magnetische Feldkonstante** [1] (oder Induktionskonstante)

[1]) Genauere Begründung des Zahlenwertes S. 465

Bei technischen Berechnungen wird für die magnetische Induktion noch vielfach die Einheit „Gauß" (G) benutzt, die aber gesetzlich nicht mehr zulässig ist.

$$1\ \mathrm{Vs/m^2} = 1000\ \mathrm{G}$$

39.3.4. Magnetischer Fluß

In einem *homogenen* Feld (z. B. im Innern einer Ringspule) hat die magnetische Induktion an *allen* Feldpunkten denselben Wert. Denkt man sich irgendeinen Teil des Feldquerschnittes herausgeschnitten oder auch den ganzen *Feldquerschnitt* A, so kann man sich leicht vorstellen, wie er von den Feldlinien senkrecht durchsetzt wird. Das Produkt aus der magnetischen Induktion B und der von ihr rechtwinklig durchsetzten Fläche nennt man

(374) $\boxed{\Phi = BA}$ **magnetischer Fluß Φ** (oder kurz: **Kraftfluß**)

Mit Verwendung von Gleichung (372) $B = \mu_0 H$ erhält man für das *Vakuum*

(375) $$\Phi = \mu_0 H A\ .$$

Wie aus der Gleichung (374) sofort abgelesen werden kann, ist die

Einheit des magnetischen Flusses Φ: 1 Vs (Voltsekunde) = 1 Wb (Weber).

Von ihm ausgehend, bezeichnet man deshalb die magnetische Induktion häufig auch als **Flußdichte** und meint damit eben den auf die Flächeneinheit entfallenden Anteil des Gesamtflusses Φ.
In der Technik wird noch häufig die (nicht mehr zulässige) CGS-Einheit des magnetischen Flusses, das „Maxwell" (M), gebraucht:

$$1\ \mathrm{M} = 10^{-8}\ \mathrm{Vs\ (Wb)}$$

Zusammenfassend seien die einander entsprechenden elektrischen und magnetischen Feldgrößen gegenübergestellt:

Elektrisches Feld	Einheit	Magnetisches Feld	Einheit
Feldstärke $\mathfrak{E}$	V/m	Feldstärke $\mathfrak{H}$	A/m
Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$	As/m²	magnetische Induktion $\mathfrak{B}$	Vs/m²
Verschiebungsfluß Q	As	magnetischer Fluß Φ	Vs
elektrische Feldkonstante ε_0	As/Vm	magn. Feldkonstante μ_0	Vs/Am
Dielektrizitätszahl ε_r	—	Permeabilitätszahl μ_r	—

Ein Vergleich zeigt, daß jede *magnetische* Größe aus der ihr entsprechenden *elektrischen* durch *Vertauschung* von *Volt* mit *Ampere* entsteht. Dies zeigt eindringlich die enge gegenseitige Bezogenheit des elektrischen und magnetischen Feldes.

39.4. Magnetisches Feld und Stoff

39.4.1. Permeabilitätszahl

Bei allen bisherigen Betrachtungen über das magnetische Feld nahmen wir noch keine Rücksicht darauf, daß der von ihm durchzogene Raum im allgemeinen immer von irgendeinem Medium erfüllt ist. Das war insofern auch berechtigt, als sich z. B. die Luft bei allen erwähnten Versuchen und Gesetzmäßigkeiten praktisch nicht bemerkbar macht. Die Verhältnisse ändern sich jedoch grundlegend, wenn sich in dem vom magnetischen Feld erfüllten Raum z. B. *Eisen* befindet.
Das zeigt sich schon, wenn man eine Zylinderspule mit einem Eisenkern versieht. Beim Einschalten des Stromes ist die in der Induktionsschleife auftretende Wirkung (Spannungsstoß) um ein Vielfaches *größer* als bei leerer Feldspule.
Diese Wirkung ist nicht nur beim Eisen so auffällig. Stoffe, die in dieser Hinsicht dem Eisen ähneln, bezeichnet man als

ferromagnetisch = eisenähnlich.

Ferromagnetisch sind Eisen, Nickel, Kobalt, Gadolinium und einige besondere Legierungen. Auch alle übrigen Stoffe beeinflussen die Induktionswirkung, allerdings meist nur in verschwindend geringem Maße. Als Maßzahl dieses Verhaltens dient die

$$\textbf{Permeabilitätszahl}^{1)}\ \mu_r = \frac{\textbf{Induktion der gefüllten Feldspule}}{\textbf{Induktion der leeren Feldspule}}$$

(genau nur für die Ringspule gültig).
Damit wird in allgemeiner Hinsicht

(376) $$\boxed{B = \mu_0 \mu_r H}$$

Der obenerwähnte Ausdruck (372) $B = \mu_0 H$ gilt daher strenggenommen nur für das *Vakuum*. Bei den nichtferromagnetischen Stoffen unterscheidet sich jedoch die Permeabilitätszahl μ_r kaum von 1 (Luft z. B. $\mu_r = 1{,}0000004$):

Für Luft und die übrigen nichtferromagnetischen Stoffe ist μ_r praktisch gleich 1.

Für eine lufterfüllte Zylinderspule ist es typisch, daß die Feldlinien an den beiden Enden weit in den Raum hinausgreifen, so daß das Feld im Außenraum außerordentlich schwach ist. Bietet man den Feldlinien jedoch einen Weg, in dem sie vollständig im Eisen laufen können, so fällt diese starke Streuung weg. Der gesamte magnetische Fluß verteilt sich eng gebündelt *allein auf den Eisenquerschnitt* (Bild 545). Es ist so, als sei das Eisen für magne-

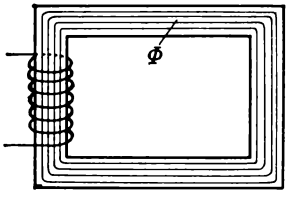


Bild 545. Magnetischer Fluß in einem geschlossenen Eisenrahmen

[1]) Als Permeabilität wird das Produkt $\mu = \mu_0 \mu_r$ bezeichnet, während die Permeabilitätszahl μ_r bisher meist „relative Permeabilität" genannt wurde. Die hier benutzten Bezeichnungen entsprechen den in Standards bzw. DIN-Normen übernommenen internationalen Empfehlungen

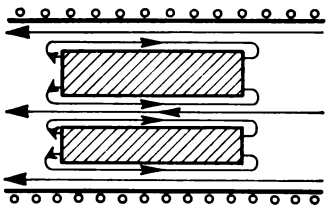


Bild 546. Entmagnetisierung eines in einer Zylinderspule liegenden Eisenstückes

tische Feldlinien besonders *durchlässig* und biete ihnen gegenüber anderen Stoffen einen weit geringeren Widerstand. Daher rührt auch die Bezeichnung *Permeabilität* (permeabel = durchlässig). Wegen der außerordentlich großen Werte der Permeabilitätszahl μ_r der ferromagnetischen Stoffe werden die magnetischen Wirkungen der Ströme um mehrere Größenordnungen verstärkt. Das erklärt auch die weitverbreitete Verwendung des Eisens in der Elektrotechnik. Hat aber das im Feld liegende Eisenstück zwei freie Enden, so wird das Eisenstück selbst zu einem Magneten, aus dessen Nordpol Feldlinien austreten und dem äußeren Feld entgegen wieder zum Südpol zurücklaufen müssen. Dies findet nicht nur außerhalb des Körpers statt, sondern auch im Innern. Man kann sich hierbei einen *dünnen*, zwischen den Eisenatomen *verlaufenden Kanal* vorstellen. In seiner Längsrichtung verlaufen dann das erregende Feld und das vom Eisen sekundär erzeugte einander entgegengesetzt (Bild 546). Damit wird die zur Magnetisierung des Eisens verfügbare Feldstärke zum Teil aufgehoben.

Man nennt diesen Vorgang **Entmagnetisierung.** Bei Messung der magnetischen Eigenschaften des Eisens muß dann ihr Einfluß rechnerisch beseitigt werden. Hierbei kommt es sehr auf die Gestalt des Stückes an.

Bei einer eisengefüllten Ringspule tritt die Entmagnetisierung nicht in Erscheinung, da hier sämtliche Feldlinien in sich geschlossen sind und rückläufige Feldlinien nicht vorkommen können.

Daher kommt es, daß in allen Eisenkernen mit *freien Enden* bei weitem nicht die vollen Werte der Permeabilität erreicht werden und zur Erzeugung einer bestimmten Induktion viel *höhere* Feldstärken erforderlich sind als bei ringförmigen Kernen.

39.4.2. Magnetisierungskurve und Hysteresis

Die Permeabilitätszahl μ_r spielt im magnetischen Feld rechnerisch eine ähnliche Rolle wie die Dielektrizitätszahl ε_r im elektrischen Feld. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin:

Die Permeabilitätszahl ferromagnetischer Stoffe hat keinen konstanten Wert, sondern ist eine Funktion der magnetischen Feldstärke.

Beispiel: Bei einem Induktionsversuch mit einer eisengefüllten Spule ergibt sich bei einer Feldstärke von 1000 A/m eine Induktion von 1,3 Vs/m². Bei Verdoppelung des Feldstromes hat die Induktion *nicht* etwa den doppelten Wert, sondern nur 1,43 Vs/m². (Derartige Zahlen hängen stark von der jeweiligen Eisensorte ab!) Im ersten Fall erhält man nach (376)

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1{,}3\ \mathrm{Vs\,Am\,m}}{1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs\,m^2\,1000\,A}} = 1035,$$

im zweiten in entsprechender Weise jedoch nur $\mu_r = 570$.

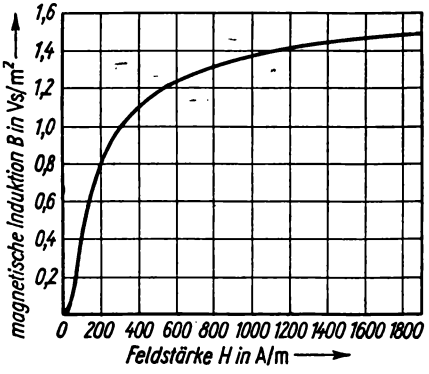


Bild 547. Magnetisierungskurve von Dynamoblech

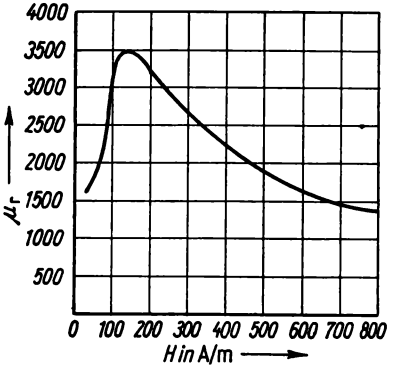


Bild 548. Permeabilitätszahl von Dynamoblech

Stellt man den Zusammenhang von Feldstärke H und magnetischer Induktion B grafisch dar, so erhält man eine für jede Eisensorte charakteristische **Magnetisierungskurve** (Bild 547).

Berechnet man für jeden Kurvenpunkt nach dem vorstehenden Beispiel die Permeabilitätszahl μ_r, so erreicht diese *vor* dem „*Knie*" der Magnetisierungskurve einen *Höchst*wert und nimmt dann wieder ab (Bild 548).

Mit zunehmender Feldstärke nimmt die magnetische Induktion jedoch immer langsamer zu. Der obere Kurventeil verläuft in einer sanft ansteigenden Geraden. In diesem Gebiet ist das Eisen **magnetisch gesättigt.** Im Sättigungsgebiet hat die Anwesenheit des Eisens auf die Zunahme der magnetischen Induktion ΔB keinen Einfluß mehr. Der weitere Kurvenanstieg erfolgt lediglich proportional zur Zunahme der Feldstärke ΔH:

$$\Delta B = \mu_0 \cdot \Delta H \,.$$

Oberhalb einer bestimmten Temperatur **(Curie-Temperatur)** *verlieren* ferromagnetische Stoffe ihre charakteristischen Eigenschaften. Ihre Permeabilitätszahl μ_r wird dann gleich 1. Dies deutet darauf hin, daß die Eigenschaften des Ferromagnetismus in bestimmter Weise mit dem kristallinen Feinbau der Metalle zusammenhängen.

Curie-Punkte

Eisen	769 °C
Kobalt	1075 °C
Nickel	360 °C

Es sei jetzt angenommen, die magnetische Induktion B einer Eisenprobe werde bei schrittweiser Erhöhung der Feldstärke H gemessen. War die Probe vorher unmagnetisch, so entsteht dabei die in Bild 549 angegebene Kurve AB. Man nennt sie die jungfräuliche oder **Neukurve.**

Nach Erreichen der magnetischen Sättigung werde die Feldstärke schrittweise wieder *herabgesetzt.* Man könnte erwarten, daß jetzt die alte Kurve einfach rückwärts durch-

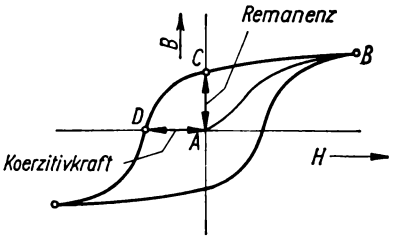


Bild 549. Hysteresisschleife einer harten Stahlsorte

laufen werde. Statt dessen aber entsteht die Kurve BC, die *oberhalb* von AB liegt. Wenn die Feldstärke den Wert 0 erreicht hat, ist noch eine ganz beträchtliche Induktion AC vorhanden. Diesen B-Wert nennt man die **Remanenz** (*zurückbleibender Magnetismus*). Erst bei neuerlicher, entgegengesetzter Magnetisierung gelingt es, die Eiseninduktion wieder auf den Wert 0 zu bringen und damit das Eisen wieder unmagnetisch zu machen. Der hierzu erforderliche H-Wert AD heißt **Koerzitivkraft.** In dieser Weise fortfahrend, erhält man die S-förmig gekrümmte **Hysteresisschleife.** Bei harten Stahlsorten umschließt sie eine breite Fläche, bei Weicheisen und hochwertigen Dynamoblechen ist sie recht schmal. Die üblichen Magnetisierungskurven (z. B. Bild 547) stellen den mittleren Verlauf beider Kurvenäste dar (mithin nicht etwa die Neukurve).

Bei Fortfall des erregenden Stromes, d. h. bei der Feldstärke $H = 0$, bleibt somit eine remanente Induktion B_{rem} von beträchtlichem Betrag bestehen. Wenn man also ein Stück Eisen in eine stromdurchflossene Spule steckt und den Strom hernach abschaltet, ist das Eisen zu einem **Dauermagneten** geworden. Seine Stärke hängt von der Gestalt der *Hysteresisschleife* ab, d. h. von der Länge der auf Bild 549 angegebenen Strecke AC. Damit dieser remanente Magnetismus durch fremde Felder nicht beeinträchtigt werden kann, muß auch die *Koerzitivkraft* AD möglichst groß sein.

Beispiele: 1. In einem Kern aus Dynamoblech von 4 cm² Querschnitt besteht eine Feldstärke von $H = 1400$ A/m. Wie groß sind die magnetische Induktion B, der magnetische Fluß und die Permeabilitätszahl? – Aus der Kurve (Bild 547) liest man ab $B = 1{,}43$ Vs/m². Hiernach ergibt sich der magnetische Fluß zu $\Phi = 57{,}2 \cdot 10^{-5}$ Vs und die Permeabilitätszahl

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1{,}43 \text{ Vs Am m}}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ Vs } 1400 \text{ A}} = 810.$$

2. In einem rechteckigen, geschlossenen Kern aus Dynamoblech (mittlere Länge der Feldlinien $l = 20$ cm) nach Bild 545 soll eine Induktion von 0,8 Vs/m² bestehen. Wieviel Amperewindungen sind hierzu erforderlich? – Aus der Magnetisierungskurve (Bild 547) liest man die zu $B = 0{,}8$ Vs/m² gehörige Feldstärke von $H = 200$ A/m ab. Demnach ist $IN = Hl = 200 \text{ A/m} \cdot 0{,}2 \text{ m} = 40$ A.

39.4.3. Para- und diamagnetische Stoffe

Außer den ferromagnetischen Stoffen zeigen auch alle übrigen Substanzen magnetische Eigenschaften, allerdings mit äußerst schwachen Wirkungen.

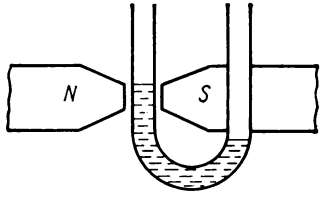


Bild 550. Verhalten einer paramagnetischen Flüssigkeit im Magnetfeld

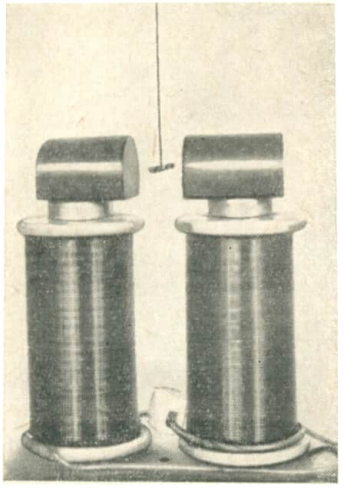


Bild 551. Wismutstäbchen im Magnetfeld

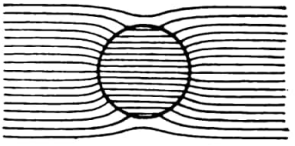


Bild 552. Paramagnetischer Stoff im homogenen Magnetfeld

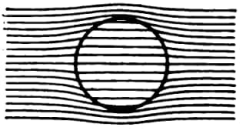


Bild 553. Diamagnetischer Stoff im homogenen Magnetfeld

1. Paramagnetische Stoffe. Diese (z. B. Aluminium) verhalten sich – wenn auch in ungleich schwächerem Maße – ähnlich wie die ferromagnetischen.

Versuch: Ein kleines U-Rohr mit einer Lösung von $FeCl_3$ wird zwischen die Pole eines starken Elektromagneten gebracht (Bild 550). Beim Einschalten des Feldstromes steigt die Flüssigkeit in das Feld hinein.

2. Diamagnetische Stoffe. Zu ihnen gehören z. B. Kupfer und Wismut.

Versuch: Ein kleines, an einem Faden hängendes Wismutstäbchen stellt sich zwischen den Polen eines Magneten quer zu den Feldlinien (Bild 551). Ein kleines Wismutkügelchen wird aus dem Feld herausgestoßen.

Paramagnetische Stoffe werden in ein Magnetfeld hineingezogen, diamagnetische von ihm abgestoßen (Bild 552, 553).

Quantitativ zeigt sich der Unterschied in der Größe der Permeabilitätszahl:

diamagnetische Stoffe: $\mu_r < 1$

paramagnetische Stoffe: $\mu_r > 1$

ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \gg 1$

Die Permeabilitätszahl para- und diamagnetischer Stoffe weicht im allgemeinen nur geringfügig von 1 ab. So ist z. B. für Luft $\mu_r = 1{,}0000004$ (paramagnetisch), Aluminium $\mu_r = 1{,}000021$ (paramagnetisch), Kupfer $\mu_r = 0{,}999993$ (diamagnetisch).

39.5. Induktionsvorgänge

39.5.1. Induktionsgesetz

Es ist nicht besonders glücklich, daß man das Wort „Induktion" in zweierlei Weise benutzt. Zum einen verwendet man es zur Bezeichnung der Größe B, d. h. zur Messung des magnetischen Feldes, zum anderen aber bezeichnet es den Vorgang selbst, bei dem Spannungen auf elektromagnetischem Wege entstehen. Welche Gesetzmäßigkeiten bei diesem Vorgang auftreten, sei nunmehr näher untersucht.
Hierbei gibt es verschiedene experimentelle Anordnungen. Man unterscheidet dabei die das magnetische Feld erzeugende Spule, die *Feldspule*, von der zweiten, in der die Spannung induziert wird und die man die *Induktionsspule* nennt. Folgende Anordnungen sind möglich:

bei ruhender Induktionsspule:

1. *Ein- und Ausschalten des Stromes* der Feldspule;
2. *Bewegung* eines *Dauermagneten* gegenüber der *ruhenden* Induktionsspule (Bild 554);
3. *Änderung* des *Flächeninhalts* der *Induktionsschleife* im Magnetfeld;

bei bewegter Induktionsspule:

4. Bewegung der Induktionsspule gegen einen ruhenden Magneten;
5. *Bewegung* einer *stromdurchflossenen Feldspule* gegenüber einer *ruhenden* Induktionsspule oder umgekehrt (Bild 555);
6. *Drehung* einer Induktionsspule im *ruhenden* Magnetfeld.

Wie verschieden diese Versuche äußerlich auch aussehen mögen, so liegt ihnen doch ein einziges Prinzip zugrunde: in allen Fällen ändert sich der die Induktionsschleife bzw. -spule durchsetzende magnetische Fluß Φ.

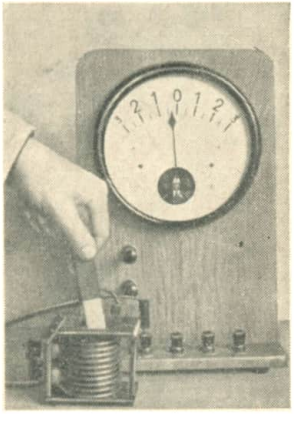


Bild 554. Induktion durch Bewegung eines Stabmagneten in einer Spule

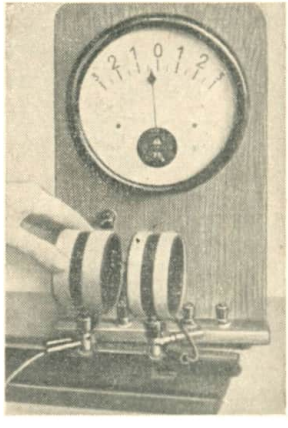


Bild 555. Induktion durch Annähern oder Entfernung einer stromdurchflossenen Spule

Während jeder Änderung des eine geschlossene Leiterschleife durchsetzenden magnetischen Flusses wird in dieser eine Urspannung und damit ein Strom induziert.

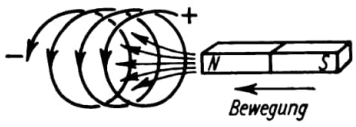


Bild 556. Induktionsregel

In allen Fällen gilt die

(377) **Induktionsregel** (Bild 556):

Blickt man in Richtung des Magnetfeldes gegen die Leiterschleife, so bewirkt eine $\frac{\text{Zunahme}}{\text{Abnahme}}$ des Flusses Φ einen Strom im $\frac{\text{Gegenzeiger}}{\text{Zeiger}}$-Sinn.

Weiterhin findet man die Wirkung bedeutend verstärkt, wenn man statt einer einzigen Windung eine aus *vielen Windungen* bestehende Induktionsspule verwendet. Außerdem erhält man um so höhere Spannungen, je *rascher* die Feld*änderung* vor sich geht. Bewegt man den in Bild 556 dargestellten Magneten sehr langsam, so ist die Urspannung nur mit besonders empfindlichen Instrumenten nachweisbar.



Bild 557. Michael Faraday (1791 bis 1867)

Die Höhe der induzierten Urspannung ist der Windungszahl N und der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses proportional.

Hat der Fluß im Zeitpunkt t_1 den Wert Φ_1 und zur Zeit t_2 den Wert Φ_2, so erfolgt die Flußänderung $\Phi_2 - \Phi_1$ mit der Geschwindigkeit

$$\boxed{\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}} \text{ bzw. } \boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$ **Änderungsgeschwindigkeit des Flusses**

Damit erhält man das von **Faraday** entdeckte Gesetz:

(378) $$\boxed{E_{\text{ind}} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$ **Induktionsgesetz** (Augenblickswert der induzierten Urspannung)

Da der funktionale Zusammenhang zwischen der Flußänderung und der Zeit recht verschieden sein kann, ist es für Zwecke der mathematischen Berechnung oftmals vorteilhafter, mit dem Differentialquotienten

$$E_{\text{ind}} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

zu rechnen.

Das negative Vorzeichen gibt an, daß bei positiver Flußänderung (Flußzunahme) der Strom *entgegengesetzt* zur sonst gültigen Schraubenregel (368) fließt (vgl. 39.2.).

Beispiel: Eine eisenfreie Zylinderspule von 40 cm Länge und 5 cm Durchmesser trägt als Primärwicklung 800 Windungen und eine Sekundärwicklung von 2000 Windungen. Den Primärstrom läßt man innerhalb von 3 s gleichförmig von 0,1 A auf 5 A anwachsen. Welche Urspannung wird während dieser Zeit induziert? – Die Windungszahl der Primärspule sei mit N_1 und ihre Länge mit l bezeichnet. Der von der Primärspule erzeugte Fluß wächst von $\Phi_1 = \mu_0\mu_r A H_1$ auf $\Phi_2 = \mu_0\mu_r A H_2$ an. Die Flußänderung ist daher $\Delta\Phi = \mu_0\mu_r A\,(H_2 - H_1) = \dfrac{\mu_0\mu_r A N_1}{l}\,(I_2 - I_1)$ und die induzierte Urspannung mit $\mu_r = 1$

$$E_{\text{ind}} = \frac{\mu_0\mu_r A N_1 N_2\,(I_2 - I_1)}{l \cdot \Delta t} =$$

$$= \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \text{Vs}\ 19{,}64 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\ 800 \cdot 2000\,(5 - 0{,}1)\ \text{A}}{\text{A m}\ 0{,}4\ \text{m}\ 3\ \text{s}} = \underline{16{,}1\ \text{mV}}.$$

39.5.2. Induktion in bewegten Leiterteilen

Bild 558 zeigt einen geraden Draht, der sich pendelnd *quer* durch ein Magnetfeld bewegen kann. Sobald man den Draht hin- und herbewegt, zeigt das Meßinstrument einen Strom von gleichfalls wechselnder Richtung an.

In jedem quer durch ein Magnetfeld bewegten Leiterstück wird eine Urspannung induziert.

Ihre Richtung ergibt sich nach der

Rechten-Hand-Regel (für den durch Bewegung induzierten Strom) (Bild 559): **Hält man die rechte Hand so, daß die Feldlinien in die Handfläche eintreten und der Daumen die Bewegungsrichtung des Leiters angibt, so zeigen die ausgestreckten Finger die Stromrichtung an.**

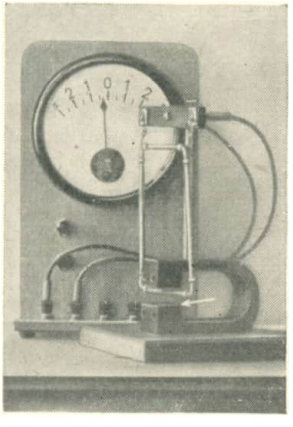


Bild 558. Induktion durch einen Leiter, der quer zu einem Magnetfeld bewegt wird

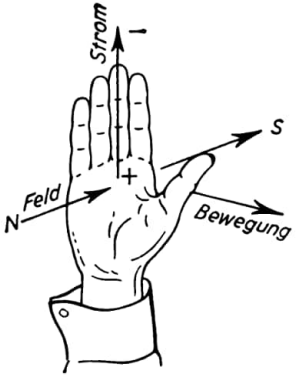


Bild 559. Rechte-Hand-Regel

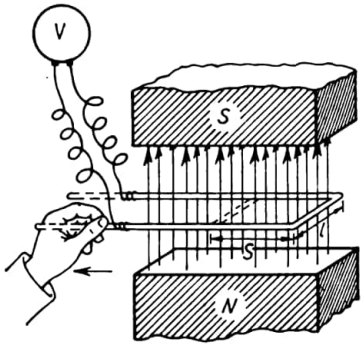


Bild 560. Zur Berechnung der induzierten Urspannung

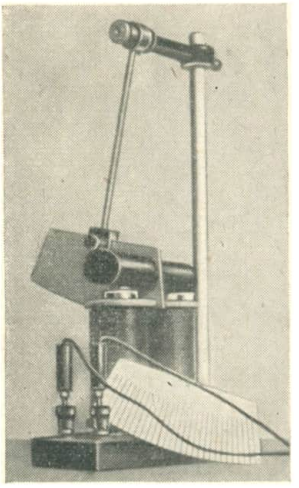


Bild 561. Bremsung einer schwingenden Metallscheibe durch Wirbelströme

Auch diesem Vorgang liegt das allgemeine Induktionsgesetz (378) zugrunde. Bild 560 zeigt mit einem Blick auf den Pol die Feldlinien. Ein Teil des magnetischen Flusses tritt durch die Stromschleife. Wird das Leiterstück l mit der *gleichförmigen* Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nach links bewegt, so legt es in der Zeit Δt die Strecke Δs zurück und überstreicht dabei die Fläche $\Delta A = \Delta s\, l$.
Der hindurchtretende Fluß *nimmt* ab um $\Delta\Phi = B \cdot \Delta A = B \cdot \Delta s\, l$. Damit ergibt sich unter Anwendung von (378) das Induktionsgesetz in der Form

$$E_{\mathrm{ind}} = \frac{B \cdot \Delta s\, l}{\Delta t} \text{ oder}$$

(379) $\boxed{E_{\mathrm{ind}} = B l v}$ **induzierte Urspannung E_{ind} in einem bewegten Leiterstück**

Derartige Urspannungen können auch in *massiven Metallkörpern* und *Blechen* entstehen, wenn sie sich in Magnetfeldern bewegen. Hierbei entstehen sogenannte **Wirbelströme,** da die Richtung der induzierten Urspannung zwar durch die Rechte-Hand-Regel vorgeschrieben ist, nicht aber der Verlauf der Strombahn, die in sich kurzgeschlossen ist. Wegen dieses inneren Kurzschlusses können die Wirbelströme sehr stark werden und beträchtliche Wärme erzeugen.

Zur Vorführung verwendet man einen Elektromagneten, zwischen dessen Polen eine Kupfer- oder Aluminiumscheibe pendelt (Bild 561). Nach Einschalten des Feldstromes bleibt sie wie in einer zähen Flüssigkeit stecken. Die zur Erzeugung der Wirbelströme und der mit ihnen verbundenen Stromwärme notwendige Energie wird dem Energievorrat des schwingenden Pendels entzogen. Wenn die Scheibe geschlitzt ist, sind die Bahnen der Wirbelströme unterbrochen, die Scheibe pendelt ungestört.
Anwendungen: Bei der **Wirbelstromdämpfung** schwingender elektrischer Instrumente (z. B. Bild 510) bewegt sich eine Metallscheibe zwischen den Polen eines Bremsmagneten. Im **Wechselstromzähler** dreht sich eine Aluminiumscheibe zwischen den Polen eines

Dauermagneten. Die in der Scheibe induzierten Wirbelströme bremsen die Rotation und machen sie gleichförmig. Die **Eisenkerne** elektrischer *Maschinen* und *Transformatoren* sind aus einzelnen Blechen geschichtet, womit *quer* durch das Paket gerichtete Induktionsströme verhindert werden.

39.5.3. Gleichstromgenerator (Dynamomaschine)

Prinzipielle Wirkungsweise (Bild 562). Eine rechteckige Leiterschleife wird im Feld eines starken Magneten gedreht. Nach der Rechten-Hand-Regel ergeben sich die im Bild gezeichneten Stromrichtungen. Der Strom wird zwei halbkreisförmigen, auf der Antriebswelle sitzenden Blechlamellen **(Kollektor)** zugeführt, gegen die sich federnd die beiden **Bürsten** (meistens kleine Kohleklötze) anlegen, an denen die erzeugte Spannung abgenommen wird. Wenn nach einer halben Umdrehung Draht 1 vor dem Nordpol liegt, hat sich auch der Kollektor mitgedreht, so daß die Klemmenspannung stets dieselbe Richtung beibehält. Dreht sich die auf Bild 562 gezeichnete Leiterschleife noch um ein kleines Stück weiter, so steht sie dann waagerecht, und der sie durchsetzende magnetische Fluß wird gleich Null. Die *Änderungsgeschwindigkeit des Flusses* ist hierbei relativ groß und zugleich damit auch die induzierte Urspannung. Beim Durchgang durch die senkrechte Stellung ändert sich dagegen der Fluß bei gleichem Drehwinkel nur geringfügig. Die induzierte Spannung ist hier nur von sehr kleinem Betrag. Der Strom verläuft deshalb nicht gleichförmig, sondern „pulsiert", d. h. schwankt periodisch zwischen Null und einem Höchstwert (Bild 563)

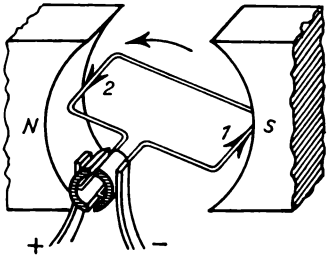


Bild 562. Prinzip des Gleichstromgenerators

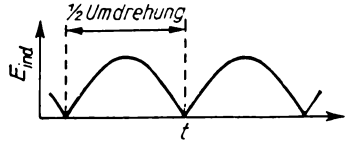


Bild 563. Verlauf der Urspannung während einer ganzen Umdrehung

(Genaueres über die Kurvenform S. 501). Um das Magnetfeld besser auszunutzen, verwendet man statt einer einzigen Windung eine *Spule*, die auf einem *Eisenkern* gewickelt ist. In diesem einfachen Fall entsteht so der **Doppel-T-Anker** (Bild 564).

Der Trommelanker. Der heute fast ausschließlich verwendete Trommelanker enthält viele parallele Drähte in den Nuten eines Eisenzylinders. Das lästige Pulsieren wird dabei weitgehend gemildert, wenn auch nicht ganz beseitigt. Es gibt mehrere Wicklungssysteme. Das Prinzip der **Schleifenwicklung** zeigt Bild 565. Die von vorn nach hinten laufenden Ankerdrähte sind so verbunden, daß die rechte Lamelle des Kollektors stets den Minus-, die andere stets den Pluspol ergibt.

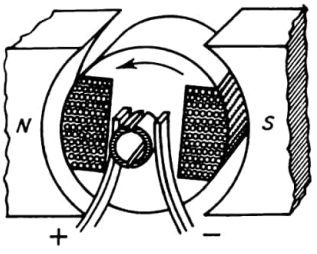


Bild 564. Doppel-T-Anker

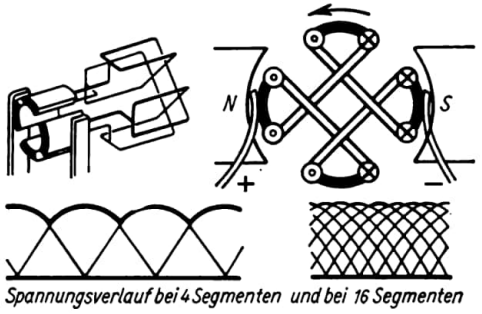
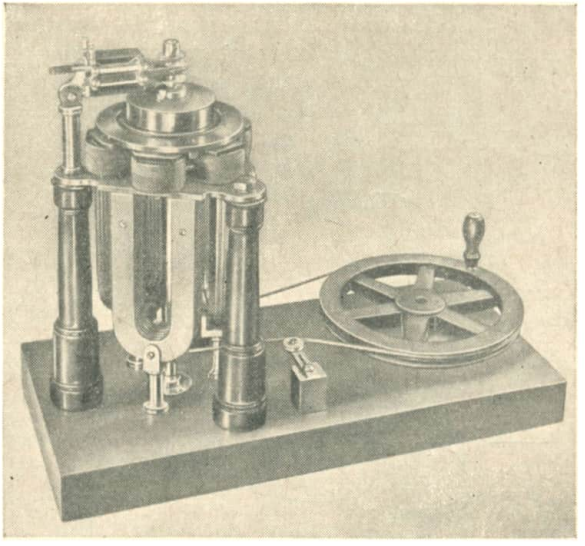


Bild 565. Schema eines Trommelankers mit Schleifenwicklung

Bild 566. Dynamomaschine mit permanenten Feldmagneten aus dem Jahre 1843 (Deutsches Museum)



Aber auch im *Eisenkern* des Ankers würden Ströme von derselben Richtung induziert werden. Um diese Wirbelströme zu unterbinden (sie würden den Anker in unangenehmer Weise erhitzen), ist dieser aus *einzelnen lackierten Blechen* geschichtet.

Erregung des Feldmagneten. Nach der Erfindung von **Werner von Siemens** (1866) wird der im Anker induzierte Strom zur Erregung des Feldmagneten verwendet. Dabei unterscheidet man zwei grundsätzliche Möglichkeiten: die **Hauptschluß-** (oder **Reihenschluß-**) **Maschine** (Feld- und Ankerwicklung *in Reihe*, Bild 567) und die **Nebenschlußmaschine** (Feld- und Ankerwicklung *parallel* geschaltet, Bild 568).

Beispiel: Der Trommelanker eines Gleichstromgenerators ist 12 cm lang und hat einen Durchmesser von 8 cm. Jeweils 60 Drähte liegen im Feld von 0,8 Vs/m². Welchen Höchstwert hat die Urspannung bei einer Drehzahl von 2000 1/min? – Nach (379) ist $E_{\mathrm{ind}} = Blv$, wobei v die Umfangsgeschwindigkeit des Ankers ist. Demnach ist

$$E = \frac{60 \cdot 0{,}8\ \mathrm{Vs}\ 0{,}12\ \mathrm{m} \cdot 0{,}08\ \mathrm{m}\ \pi\ 2000}{\mathrm{m^2}\ 60\ \mathrm{s}} = \underline{48\ \mathrm{V}}.$$

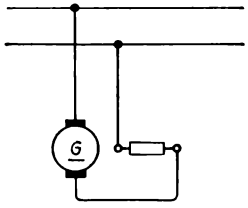


Bild 567. Schaltung der Hauptschlußmaschine

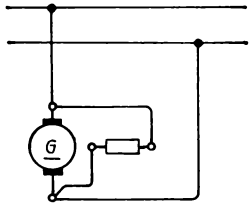


Bild 568. Schaltung der Nebenschlußmaschine

39.5.4. Selbstinduktion

Bei den bisher betrachteten Induktionsvorgängen waren Feld- und Induktionsspule immer räumlich voneinander getrennt. Das braucht jedoch nicht notwendig der Fall zu sein. Ändert sich der in einer Spule vorhandene magnetische Fluß, indem man z. B. den Strom ein- oder ausschaltet, so muß in *denselben Windungen dieser Spule* auch eine entsprechende Induktionswirkung auftreten.

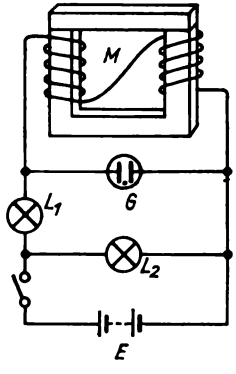


Bild 569. Versuch zur Selbstinduktion

Sie läßt sich mit der auf Bild 569 skizzierten Anordnung leicht nachweisen.

Eine Spannungsquelle E liegt mit dem Schalter, dem Lämpchen L_1 und mit einer Spule M mit Eisenkern in Reihe. Parallel zur Spannungsquelle liegt ein zweites Lämpchen L_2 und parallel zum Elektromagneten eine kleine Glimmlampe G. Man beobachtet zweierlei. Beim Einschalten leuchtet das Lämpchen L_1 erheblich später auf als L_2. Beim Ausschalten verlöschen diese beiden Lämpchen, aber die Glimmlampe G, deren Zündspannung etwa 80 ··· 100 V beträgt, leuchtet kurz auf.

Die Erklärung lautet folgendermaßen: Beim Schließen des Stromkreises tritt offenbar eine *entgegengerichtete* Urspannung auf, die das Aufleuchten der Lampe L_1 *verzögert*. Beim Öffnen muß ebenfalls eine recht hohe Spannung auftreten, welche zur Zündung der Glimmlampe ausreicht. Die Erscheinung nennt man **Selbstinduktion.** Ihre Ursache ist der vom Spulenstrom erzeugte *magnetische Fluß*, der beim Einschalten *zunimmt*. Diese Flußänderung muß in den Windungen eine Urspannung induzieren, deren Richtung nach dem Induktionsgesetz (378) beim Einschalten der angelegten Spannung *entgegengerichtet* sein muß (Flußzunahme, d.h. positive Flußänderung $\frac{\Delta\Phi}{\Delta I}$). Sie verhindert das sofortige Zustandekommen des Einschaltstromes, der – wie es der Versuch zeigt – auch nur langsam zunimmt. Bei sehr großen Elektromagneten kann das mehrere Minuten dauern! Beim Ausschalten (Fluß*abnahme*, d. h. *negative* Flußänderung) hat die Urspannung die *gleiche* Richtung wie die *angelegte* Spannung.

Die Urspannung der Selbstinduktion ist beim $\frac{\text{Schließen}}{\text{Öffnen}}$ des Stromkreises der angelegten Spannung $\frac{\text{entgegen}}{\text{gleich}}$ gerichtet.

Um diese Urspannung zu berechnen, erweitert man das Induktionsgesetz mit ΔI und erhält

$$E_{\text{ind}} = -N \frac{\Delta \Phi \, \Delta I}{\Delta I \, \Delta t}.$$

Nun ist aber der magnetische Fluß (wenn die Permeabilität μ konstant ist) jederzeit der Feldstärke H und damit auch der Stromstärke I proportional. Dann kann an Stelle des Bruches $\frac{\Delta \Phi}{\Delta I}$ das einfache Verhältnis $\frac{\Phi}{I}$ gesetzt werden:

$$E_{\text{ind}} = -\frac{N \Phi \, \Delta I}{I \, \Delta t}.$$

Den in dieser Gleichung enthaltenen Faktor $\frac{N\Phi}{I}$ bezeichnet man mit

(380) $\boxed{L = \frac{N\Phi}{I}}$ **Koeffizient der Selbstinduktion oder Induktivität L**

Die Einheit der Induktivität L folgt aus der Gleichung

$$[L] = \frac{[N][\Phi]}{[I]} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}.$$

Einheit der Induktivität L: 1 H (Henry) $= 1 \, \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

Die physikalische Bedeutung des Koeffizienten L läßt sich an Hand ihrer Einheit auch in Worten ausdrücken:

Eine Spule hat die Induktivität 1 H, wenn bei einer innerhalb von 1 s stattfindenden Änderung der Stromstärke um 1 A in ihren eigenen Windungen die Urspannung 1 V induziert wird.

Damit berechnet sich

(381) $\boxed{E_{\text{ind}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}}$ **Urspannung E_{ind} der Selbstinduktion**

Die Induktivität L spielt besonders bei Wechselstromvorgängen eine große Rolle, wo sie die Größe des „induktiven Widerstandes" bestimmt (S. 506). Die Berechnung der Induktivität L ist jedoch nur in besonders einfachen Fällen exakt möglich, da sie von der geometrischen Form und Wicklungsart der Spule abhängt. Aber auch jede beliebige andere Leiteranordnung hat stets eine bestimmte Induktivität, wie z. B. Telefon- und andere Stromleitungen, Antennen, Kabel usw. Hier bilden Hin- und Rückleitung gleichsam eine Spule mit einer einzigen Windung. Es gibt zwar zur

Berechnung von L eine Reihe, für die jeweiligen Einzelfälle gültiger Näherungsformeln; doch ist es stets besser, die Induktivität mit Hilfe von Wechselstrom zu messen. Für den Fall einer langgestreckten Zylinderspule mit relativ kleinem Durchmesser $\left(\frac{l}{d} \geqq 10\right)$ oder die Ringspule ergibt sich nach (374) zunächst der magnetische Fluß

$$\Phi = BA$$

oder wegen (376) $B = \mu_0 \mu_r H$ und (369) $H = \frac{IN}{l}$:

$$\Phi = \frac{A \mu_0 \mu_r IN}{l}.$$

Dann wird die Induktivität

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{NA\mu_0\mu_r IN}{lI} \quad \text{bzw. nach Kürzen mit } I$$

(382) $$\boxed{L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l}}$$ **Induktivität L einer langen Zylinderspule oder Ringspule**

Beispiel: Welche Induktivität hat eine eisenfreie Spule von 25 cm Länge, 3 cm Durchmesser und 1500 Windungen? – Es ist nach Gleichung (382) mit $\mu_r = 1$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l} = \frac{1500^2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs}\; 7{,}07 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{\mathrm{A\,m}\; 0{,}25\,\mathrm{m}} = 7{,}99\,\mathrm{mH}.$$

39.5.5. Lenzsche Regel

Wie alle Naturvorgänge, so sind auch die Induktionserscheinungen dem *Gesetz von der Erhaltung der Energie* unterworfen. Der elektrische Generator liefert zwar elektrische Energie in den äußeren Stromkreis. Er kann dies aber nur tun, wenn ein entsprechender Gegenwert an mechanischer Arbeit verbraucht wird. In allgemeingültiger Weise wurde das von dem russischen Physiker Emil Lenz[1]) so ausgedrückt:

Lenzsche Regel:

Jeder Induktionsstrom hat eine solche Richtung, daß er seiner eigenen Entstehungsursache entgegenwirkt.

Würde es sich nämlich umgekehrt verhalten, so würde der in der Maschine induzierte Strom die Bewegung des Ankers nicht *hemmen*, sondern *unterstützen*, so daß der Generator sich von selbst weiterdrehen müßte (Perpetuum mobile!). Auch das Stehenbleiben der Pendelscheibe auf Bild 561 ist nach der Lenzschen Regel sofort verständlich. Bei der Erscheinung der Selbstinduktion kommt der Batteriestrom als Ursache in Betracht. Nach der Lenzschen Regel muß dieser beim *Einschalten geschwächt* werden, woraus die entgegengesetzte Richtung des Induktionsstromes folgt.

[1]) 1804 bis 1865

39.6. Kraftwirkungen im Magnetfeld

39.6.1. Kraftwirkung auf einen geraden Stromleiter

Bereits aus der LENZschen Regel – einer unmittelbaren Folge des Energiesatzes – geht hervor, daß der Induktionsstrom eine Kraftwirkung ausübt, die der ursprünglichen Bewegung entgegengerichtet ist. Derartige Kraftwirkungen treten auch in jedem anderen Fall auf, wenn ein Stromleiter quer zu einem Magnetfeld verläuft. So läßt sich z. B. der auf Bild 558 gezeigte Versuch ohne weiteres umkehren. Sobald man durch den quer im Magnetfeld liegenden Draht *einen Strom leitet, bewegt* sich der Draht zur Seite (Bild 570). Für die Richtungen gilt jetzt die

Linke-Hand-Regel (für die Bewegung eines Stromleiters im Magnetfeld (Bild 571):

Hält man die linke Hand so, daß die Feldlinien in die Handfläche eintreten und die ausgestreckten Finger die Stromrichtung angeben, so zeigt der abgespreizte Daumen die Bewegungsrichtung des Leiters an.

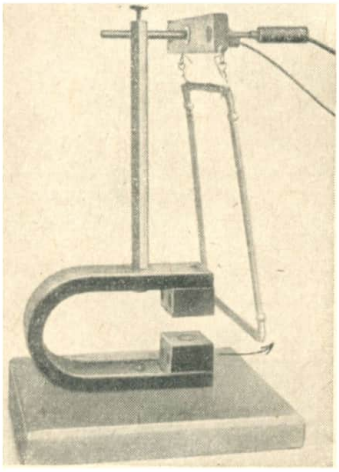


Bild 570. Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld

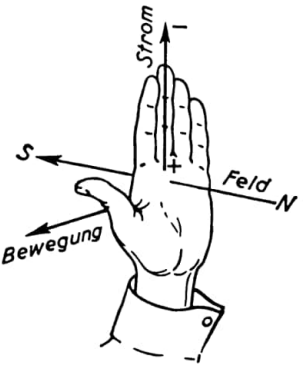


Bild 571. Linke-Hand-Regel

Die Erscheinung läßt sich qualitativ an Hand des Feldlinienbildes deuten; denn hier überlagert sich das aus konzentrischen Ringen bestehende Magnetfeld des geraden Leiters mit den geraden Linien zwischen den beiden Magnetpolen. Um ein ungefähr richtiges Bild zu erhalten, muß man den Abstand der konzentrischen Feldlinien umgekehrt proportional zur Feldstärke wählen. Die entstehenden kleinen Vierecke kann man nun als Parallelogramme der Feldvektoren auffassen, in denen die Diagonale $\underline{\mathfrak{H}}$ jeweils die Resultierende aus den beiden Einzelvektoren $\underline{\mathfrak{H}}_1$ und $\underline{\mathfrak{H}}_2$ (Bild 572) darstellt. Das aus der Überlagerung resultierende Feld entsteht dann, wenn man die von Eckpunkt zu Eckpunkt in diagonaler Richtung verlaufenden Linien zieht. Auf diese Weise ist auch Bild 573 gezeichnet worden. Man sieht hier, wie sich die resultierenden Feldlinien *links* vom Leiter *zusammendrängen* und demzufolge einen nach *rechts* gerichteten Druck ausüben.

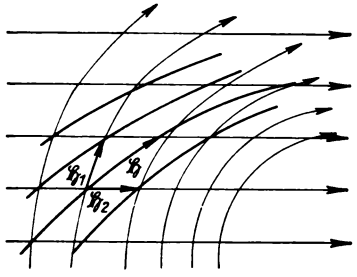


Bild 572. Konstruktion des resultierenden Feldes aus zwei einander überlagernden Feldern

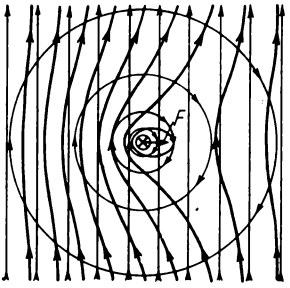


Bild 573. Resultierendes Feld

Der *Betrag der Kraft* ergibt sich an Hand des Induktionsgesetzes. Während der Bewegung wird in dem Draht eine Urspannung induziert, deren Größe sich nach (379) zu $E_{\mathrm{ind}} = -Blv$ berechnet. An den Drahtenden muß daher eine Spannung $U = -E_{\mathrm{ind}}$ liegen, welche E_{ind} gerade aufhebt:

$$U = Blv.$$

Diese, mit dem Strom I multipliziert, ergibt die aufzuwendende Leistung

$$UI = BlvI.$$

Die Leistung UI läßt sich wiederum als Produkt aus Kraft mal Geschwindigkeit Fv (vgl. 5.4.) ausdrücken, so daß

$$Fv = BlvI$$

ist. Nach Kürzen mit der Geschwindigkeit v erhält man

(383) $\boxed{F = BlI}$ **Kraft F auf einen Stromleiter im Magnetfeld**

Die zugehörige Einheitengleichung

$$[F] = [B][l][I] = \frac{\mathrm{Vs\,m\,A}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{m}} = \mathrm{N}$$

ergibt die Kraft in Newton.

39.6.2. Anwendungen der Kraftwirkung auf Stromleiter

1. Der Gleichstrom-Hauptschlußmotor. Die in den Bildern 562 ··· 565 angegebenen Schemata von Gleichstromgeneratoren stellen gleichzeitig auch **Gleichstrommotoren** dar, nur mit dem Unterschied, daß den beiden Bürsten Strom *zugeführt* werden muß und der Anker dadurch in *entgegengesetztem Drehsinn* umläuft. Die für die Dynamomaschine geltende Rechte-Hand-Regel ist jetzt durch die *Linke-Hand-Regel* zu ersetzen.

Führt man einer Gleichstrom-Dynamomaschine Strom zu, so arbeitet sie als Elektromotor.

Beim Hauptschlußmotor sind Anker und Feldmagnet in Reihe geschaltet (Bild 574). Beim Einschalten – wenn also der Anker noch stillsteht – ist der Ankerstrom recht groß und ergibt ein *großes Drehmoment* (wichtig für elektrische Bahnen, Walzwerke usw.). Mit steigender Drehzahl wird jedoch eine zunehmende Urspannung $-E_{\mathrm{ind}}$ im Anker induziert, so daß der vom Anker aufgenommene Strom von selbst zurückgeht. Damit hat der Gleichstrommotor den großen Vorzug, daß sich der Ankerstrom von selbst der verlangten Leistung anpaßt. Um den Einschaltstrom auf ein tragbares Höchstmaß zu begrenzen, schaltet man vor den Motor einen **Anlasser,** d. i. ein regelbarer Widerstand, den man mit steigender Drehzahl stufenweise abschaltet. Bei sehr kleiner Belastung schwächt die infolge zunehmender Drehzahl wachsende Urspannung $-E_{\mathrm{ind}}$ wegen der Reihenschaltung auch das Erregerfeld, so daß der Anker immer schneller laufen muß, damit die angelegte Spannung U und die induzierte Gegenspannung $-E_{\mathrm{ind}}$ gleich groß bleiben. Der Motor kann daher im Leerlauf leicht „durchgehen" und darf deshalb nicht ohne weiteres von der angetriebenen Maschine abgekuppelt werden. In diesem Sinne wirkt auch der auf Bild 574 angegebene *Feldregler*, indem die Schwächung des Feldes die Drehzahl *steigert* und umgekehrt eine Feldverstärkung die Drehzahl *verringert.*

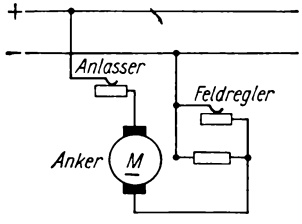


Bild 574. Schaltung eines Hauptschlußmotors

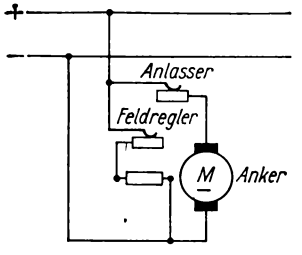


Bild 575. Schaltung des Nebenschlußmotors

2. Der Gleichstrom-Nebenschlußmotor. Wenn die Erregerwicklung nach Bild 575 parallel zum Anker geschaltet ist, muß sie aus vielen Windungen dünnen Drahtes bestehen, damit der Erregerstrom nicht zu stark wird. Erregerfeld und Drehzahl bleiben im Gegensatz zum Hauptschlußmotor bei unterschiedlicher Belastung nahezu *konstant.* Würde z. B. bei Leerlauf die Drehzahl ansteigen, so hätte das eine Zunahme der induzierten Gegenspannung $-E_{\mathrm{ind}}$ zur Folge, wodurch aber der Ankerstrom und die Drehzahl entsprechend wieder abnehmen müßten. Aus diesem Grunde wird der Nebenschlußmotor weitaus am meisten verwendet.

Die *Drehrichtung* aller Gleichstrommotoren bleibt auch beim Umpolen immer dieselbe, da sich dabei die Stromrichtung in Feld und Anker gleichzeitig ändert. Zur Änderung der Drehrichtung muß also Feld oder Anker einzeln umgepolt werden.

Beispiel: Welche Kraft entsteht am Umfang des Trommelankers eines Gleichstrommotors, der von 8 A durchflossen wird, wenn sich jeweils 150 Drähte von 18 cm Länge im Feld von 0,75 Vs/m² befinden? –

$$F = NBlI = \frac{150 \cdot 0{,}75\,\text{Vs}\;0{,}18\,\text{m}\;8\,\text{A}}{\text{m}^2} = 162\,\text{N} = 16{,}5\,\text{kp}\,.$$

3. Das Drehspulinstrument. Eine kleine rechteckige Spule befindet sich im ringförmigen Luftspalt eines Dauermagneten (Bild 576). Sie ist an einer Spiralfeder befestigt, deren Drehmoment dem Drehwinkel proportional ist. Ihm entgegen wirkt das vom Strom hervorgerufene und dem Strom proportionale Drehmoment, so daß der Zeigerausschlag ebenfalls dem Strom proportional ist.

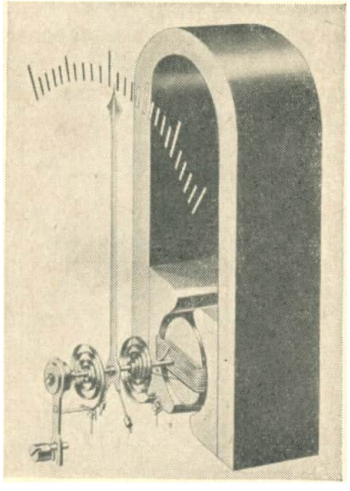


Bild 576. Drehspulmeßwerk

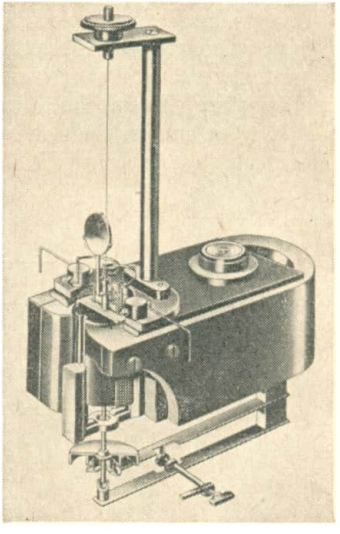


Bild 577. Spiegelgalvanometer

4. Das ballistische Galvanometer. Dieses ist im Prinzip ein Drehspulinstrument mit Fadenaufhängung (Bild 577), das nach einmaligem Anstoß sehr langsame, schwach gedämpfte Schwingungen von mehreren Sekunden Dauer ausführt. Das Meßsystem trägt einen leichten Spiegel, auf den ein Lichtstrahl fällt. Kleine Drehwinkel des Spiegels lassen den Lichtzeiger weit ausschlagen. Wenn der zugeführte Spannungs- bzw. Stromimpuls kurz gegenüber der Schwingdauer des Systems ist, ergibt sich ein Ausschlag, der dem Spannungsstoß $\int U\,dt$ proportional ist. Damit zeigt das Instrument unmittelbar das fertige Integral $\int U\,dt$, d. h. die Zeitsumme der angelegten Spannung an. Damit ist die Möglichkeit gegeben, z. B. den magnetischen Fluß einer stromdurchflossenen Spule zu messen.

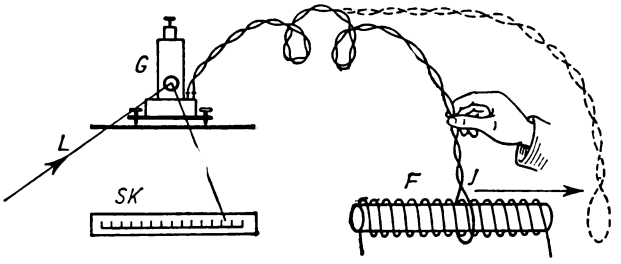


Bild 578. Messung der Induktion einer stromdurchflossenen Feldspule mit einem ballistischen Galvanometer
G Galvanometer, L Lichtstrahl, F Feldspule, J Induktionsspule, SK Skale.
Die Schleife wird von der Feldspule heruntergezogen

Schreibt man nämlich das Induktionsgesetz (378) in der Form $U\mathrm{d}t = -N\mathrm{d}\Phi$, so entsteht nach beiderseitiger Integration

(384) $$\boxed{\int U\,\mathrm{d}t = N(\Phi_2 - \Phi_1)}$$ **induzierter Spannungsstoß**

Wie die Gleichung zeigt, ist der Stoßausschlag allein vom Anfangs- und Endwert des Flusses abhängig. Man kann also mit dem einmal geeichten Instrument den magnetischen Fluß Φ einfach dadurch bestimmen, daß man eine Probespule aus dem zu messenden Feld herauszieht (Bild 578) oder bei feststehender Probespule das Feld ein- oder ausschaltet.

Den von der induzierten Urspannung verursachten *Strom* erhält man nach dem Induktionsgesetz:

$$I = \frac{N\,\mathrm{d}\Phi}{R\,\mathrm{d}t}.$$

Ferner ist nach (313) $I\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q$. Das ergibt

(385) $$\boxed{\int I\,\mathrm{d}t = Q = \frac{N}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)}$$ **induzierter Stromstoß**

R ist hierbei der Widerstand des Galvanometer-Stromkreises. Dem Spannungsstoß entspricht daher eine ganz bestimmte, durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge, weshalb man mit einem *ballistischen* Galvanometer auch *Ladungsmengen* messen kann. Lädt man beispielsweise einen Kondensator auf eine bestimmte Spannung U auf und entlädt ihn dann über das ballistische Galvanometer, so liefert der Stoßausschlag sofort die Ladung Q. Aus $C = \frac{Q}{U}$ [Gleichung (355)] errechnet sich dann die Kapazität des Kondensators. Hinsichtlich der zu messenden Elektrizitätsmenge Q läßt sich das ballistische Galvanometer mit Hilfe eines bekannten Stromes und einer als Zeitschalter verwendeten Stoppuhr eichen.

39.6.3. Kraftwirkung zwischen Stromleitern

Auch zwischen zwei Stromleitern muß eine Kraftwirkung bestehen, da der eine von ihnen das Magnetfeld erzeugt, das dann auf den zweiten einwirkt.

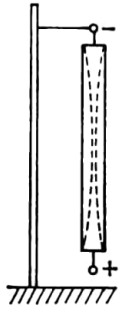


Bild 579. Anziehung zweier Leiter bei gleicher Stromrichtung

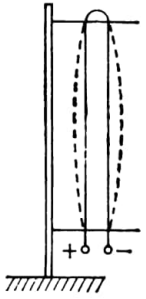


Bild 580. Abstoßung bei entgegengesetzter Stromrichtung

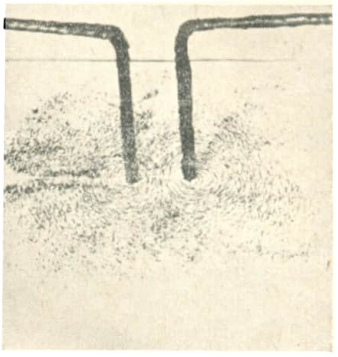


Bild 581. Magnetfeld zweier paralleler Leiter bei entgegengesetzter Stromrichtung

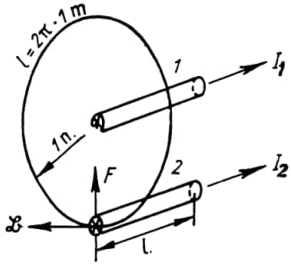


Bild 582. Zur Definition der Einheit der Stromstärke

Um das zu zeigen, hängt man zwei leichte Bänder aus Metallgewebe parallel nebeneinander und läßt einen kräftigen Strom hindurchfließen (Bild 579). Die Bänder ziehen sich an. Schaltet man die Bänder in Reihe, so daß die Stromrichtungen entgegengesetzt sind (Bild 580), so stoßen sie sich ab.

Parallele Leiter mit $\frac{\text{gleicher}}{\text{entgegengesetzter}}$ **Stromrichtung** $\frac{\text{ziehen sich an}}{\text{stoßen sich ab}}$.

Auch dies läßt sich mit Hilfe des Feldlinienbildes erklären. Durch Überlagerung der beiden Felder entsteht im ersten Fall *beiderseits* der beiden Leiter, im zweiten Fall *zwischen* den Leitern eine Verdichtung der Feldlinien (Bild 581). Die Anziehungskraft ergibt sich folgendermaßen (Bild 582): Dort, wo sich der vom Strom I_2 durchflossene zweite Leiter von der Länge l befindet, beträgt die Feldstärke des vom Strom I_1 durchflossenen ersten Leiters nach Gleichung (371)

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}$$

und damit die Induktion

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1}{2\pi r}.$$

Damit wirkt auf den zweiten Leiter nach Gleichung (383) die Kraft

(386) $$\boxed{F = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi r}}$$ **Kraft F zwischen 2 parallelen Stromleitern**

39.6.4. Definition der Stromstärke

Die heute gültigen elektrischen Einheiten bauen sich auf der gesetzlichen Definition des Ampere auf (s. 36.1.). Entsprechend der gegebenen Erklärung betrachte man zwei Stromleiter, die im Abstand von 1 m parallel zueinander verlaufen. Sie haben die Länge von je 1 m und werden in gleicher Richtung von je 1 A durchflossen. Dann ergibt sich nach Gl. (386) für die Anziehungskraft mit $\mu_r = 1$

$$F = \frac{\mu_0 \mu_r I^2 l}{2\pi r} = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs\ 1\ A^2\ 1\ m}}{\mathrm{Am\ 2\ \pi\ 1\ m}} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Ws/m} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}.$$

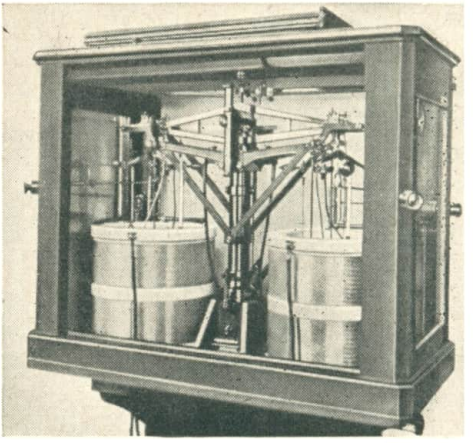


Bild 583. Elektromagnetische Waage zur Bestimmung der Stromstärke

Meßtechnisch läßt sich die Einheit der Stromstärke mit Hilfe der **Stromwaage** (Bild 583) überprüfen. Man arbeitet hierbei aber nicht mit geradlinigen Leiterstücken, sondern mit Paaren von Stromspulen, deren Anziehungskraft sich in ähnlicher Weise berechnen läßt.

Aus der letzten Rechnung kann man auch den genauen Wert der **magnetischen Feldkonstanten** μ_0 entnehmen. Geht man nämlich davon aus, daß die Kraft F definitionsgemäß genau $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}}\right)$ sein muß, so erhält man aus (386) und mit $\mu_r = 1$ die magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = \frac{2\pi r F}{I_1 I_2 l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs/Am} = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/Am}.$$

39.6.5. Energie des magnetischen Feldes

Ähnlich wie im elektrischen Feld eines Kondensators ist auch im magnetischen Feld einer Spule *Energie* enthalten. Um dieses Feld zu *erzeugen*, muß *Arbeit* aufgewandt werden.

Sie besteht darin, daß während des Stromanstieges nach dem Einschalten die auf dem Wege der Selbstinduktion entstehende Gegenspannung $U = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ zu überwinden ist. Hierfür ist während der Zeit Δt die Arbeit

$$\Delta W = U I \Delta t = I N \Delta\Phi$$

erforderlich, die eben dazu dient, das magnetische Feld aufzubauen.

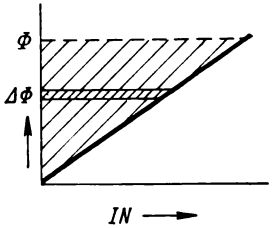


Bild 584. Zur Berechnung der magnetischen Feldenergie

Wenn der Einfachheit halber die Permeabilität μ als konstant angenommen wird, wächst hierbei der Fluß Φ proportional zur Stromstärke an. Nach Bild 584 gibt das hinsichtlich des Zusammenhangs von IN und Φ eine ansteigende Gerade. Der im Zeitraum Δt aufzuwendenden Arbeit entspricht der Flächeninhalt des schmalen, unter der Kurve liegenden Rechtecks $IN \cdot \Delta\Phi$.
Die gesamte zum Aufbau des Magnetfeldes notwendige Arbeit wird dann durch den Flächeninhalt des unter der Kurve liegenden Dreiecks dargestellt, der durch den schließlich erreichten Endwert Φ gegeben ist. Damit ist die gesamte Arbeit

$$W = \frac{IN}{2}\Phi.$$

Der Fluß Φ aber hängt mit der Induktivität L nach der Beziehung (380) $L = N\frac{\Phi}{I}$ zusammen. Setzt man

$$\Phi = \frac{IL}{N}$$

in das Produkt ein, so erhält man

$$W = \frac{IN}{2}\frac{IL}{N} \text{ oder nach Kürzen mit } N$$

(387) $$\boxed{W = \frac{LI^2}{2}}$$ **Energie W des Magnetfeldes einer Spule** (bei konstanter Permeabilität)

Bedenkt man, daß nach (382) und (369)

$$L = \frac{N^2\mu_0\mu_r A}{l} \text{ und } I = \frac{Hl}{N}$$

ist, so erhält man die etwas allgemeinere Fassung

(388) $$\boxed{W = \frac{1}{2}H^2\mu_0\mu_r lA}$$ **Energie W eines homogenen Magnetfeldes**

Diese magnetische Energie ist in dem Volumen $V = lA$ enthalten.
Hier war allerdings vorausgesetzt worden, daß während des Aufbaus des Magnetfeldes die Permeabilität einen konstanten Wert habe. Denkt man aber an den Verlauf der Magnetisierungskurve, so darf kein lineares Verhältnis zwischen Φ und IN angenommen werden (Bild 585). Um die Feldenergie finden zu können, muß dann der Wert des Integrals

$$W = \int IN \, \mathrm{d}\Phi$$

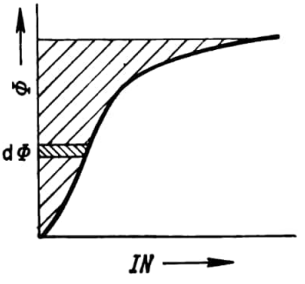


Bild 585. Zur Berechnung der magnetischen Feldenergie aus der Magnetisierungskurve

ermittelt werden. Das ist jedoch nur auf grafischem Wege möglich, da der Verlauf der Magnetisierungskurve keine analytisch darstellbare Funktion ist. Am einfachsten geschieht dies durch Ausmessen des Flächeninhaltes unter der Kurve mit einem Planimeter.

39.6.6. Zugkraft eines Magneten

Von einer weiteren Beschreibung der für die Zwecke der Technik entwickelten elektromagnetisch wirkenden Anordnungen und deren rechnerischen Behandlungsweise muß hier abgesehen werden. Wegen der besonderen Wichtigkeit sei hier nur noch die *Zugkraft eines* **Elektromagneten** betrachtet.

Vor den Polen eines Elektromagneten (Bild 586), dessen *gesamte* Polfläche mit A bezeichnet sei, befinde sich ein eiserner Anker, der mit der Kraft F angezogen wird. Der sehr eng zu denkende Luftzwischenraum $V = lA$ ist ein Teil des ganzen magnetischen Feldes und enthält nach (388) mit $\mu_r = 1$ die *magnetische Energie*

$$W = \frac{H^2 \mu_0 l A}{2}$$

(im Luftraum ist $\mu = 1$) oder wegen $\mu_0 H = B$

$$W = \frac{B^2 l A}{2\mu_0}.$$

Nach dem Anlegen des Ankers ist *dieser Teil* des Feldes und damit sein Energieanteil *nicht* mehr vorhanden. Dafür wird eine äquivalente mechanische *Arbeit*

$$W = Fl$$

verrichtet.

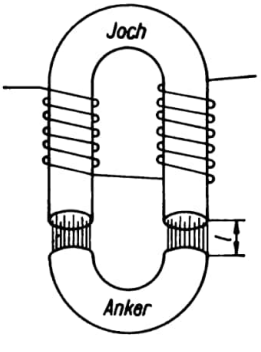


Bild 586. Magnetfeld zwischen Polen und Anker eines Magneten

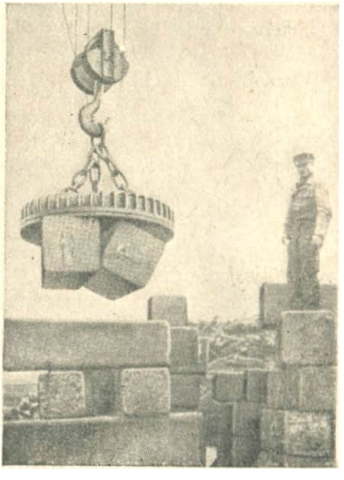


Bild 587. Hebemagnet mit einer Last von 5000 kp

Dann kürzt sich l aus der letzten Gleichung, und man erhält

(389) $$\boxed{F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}}$$ **Zugkraft F eines Magneten**

Beispiel: Ein U-förmiger Elektromagnet aus Stahlguß hat zwei Polflächen von je 2 cm² und wird von 300 Amperewindungen erregt. Der Gesamtweg der Feldlinien beträgt 25 cm. Der Eisenquerschnitt und damit die magnetische Induktion B sei (wie auf Bild 586) überall gleich groß. Welche Tragkraft entwickelt der Magnet? – Die Feldstärke beträgt $H = \frac{IN}{l} = \frac{300\ \text{A}}{0{,}25\ \text{m}} = 1200\ \text{A/m}$. Nach der Magnetisierungskurve (39.4.2.) ergibt sich daraus eine Induktion von 1,42 Vs/m². Da zwei Polflächen vorhanden sind, ist $A = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$. Nach Gleichung (389) bekommt man

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{1{,}42^2\ \text{V}^2\,\text{s}^2\,4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\,\text{A m}}{\text{m}^4\,2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \text{Vs}} = 321\ \text{N} = \underline{32{,}7\ \text{kp}}.$$

39.6.7. Gegenüberstellung elektrischer und magnetischer Größen

Überblickt man noch einmal zusammenfassend die im *magnetischen Feld* gültigen Beziehungen, so findet man eine weitgehende Analogie mit entsprechenden Beziehungen im *elektrischen Feld*. Das kam bereits in der auf S. 444 gebrachten Übersicht der Feldgrößen und ihrer Einheiten zum Ausdruck. Da eine solche Gegenüberstellung recht geeignet ist, Vorstellung und Gedächtnis zu unterstützen, sei sie in der folgenden Tabelle weitergeführt.

Elektrisches Feld		Magnetisches Feld	
Größe	Gleichung	Größe	Gleichung
Feldstärke	$E = \frac{U}{d}$	Feldstärke	$H = \frac{NI}{l}$
Verschiebungsdichte	$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{Q}{A}$	magn. Induktion	$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\Phi}{A}$
Strom	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	Spannung	$U_{\text{ind}} = -\frac{N \Delta \Phi}{\Delta t}$
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	Induktivität	$L = \frac{N\Phi}{I}$
Plattenkondensator	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$	Ringspule	$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l}$
Feldenergie des Kondensators	$W = \frac{CU^2}{2}$	Feldenergie der Spule	$W = \frac{LI^2}{2}$
Feldenergie allgemein	$W = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r\, dA$	Feldenergie allgemein	$W = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \mu_r l A$

40. Stromleitung in festen Körpern

Gemäß der in 36.1. genannten Definition (313)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

kommt jeder elektrische Strom dadurch zustande, daß sich innerhalb der Zeit Δt die Ladungsmenge ΔQ durch das elektrische Feld des Leiters bewegt. Es kommt dabei zunächst noch gar nicht darauf an, woher diese Ladung ΔQ stammt und wodurch ihre Bewegung verursacht wird. Um das zu zeigen, verbinde man einen Plattenkondensator mit einem Elektrometer, lade ihn auf und berühre beide Platten abwechselnd mit einem kleinen Metallscheibchen, das an einem isolierenden Stiel befestigt ist (Bild 588). Jedesmal wird dabei die Ladung ΔQ von einer Platte auf die andere übertragen, und der Ausschlag des Elektrometers geht fortlaufend zurück. Der Plattenzwischenraum ist jetzt kein Isolator mehr, sondern ist durch den hin- und herbewegten Ladungsträger zu einem Leiter geworden. Der Vorgang kann als elektrischer Strom betrachtet werden. Wird die Strecke d zwischen den Platten in der Zeit Δt zurückgelegt, so bewegt sich die Ladung ΔQ mit der Geschwindigkeit $v = \frac{d}{\Delta t}$, so daß $\Delta t = \frac{d}{v}$ ist. Mit der obigen Gleichung ergibt das den Strom

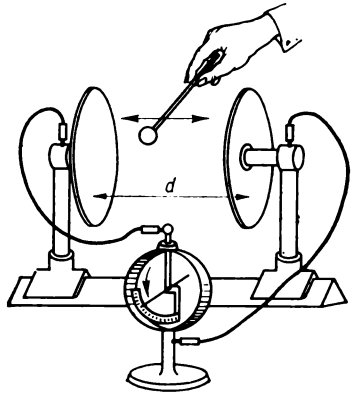


Bild 588. Strom durch mechanischen Ladungstransport

$$I = \frac{\Delta Q v}{d}. \tag{390}$$

Die Vorgänge in den wirklichen Stromleitern unterscheiden sich von diesem Experiment nur in Einzelheiten. So sind die Elektrizitätsträger meist schon von vornherein im Leiter enthalten, so daß man nur noch für das elektrische Feld zu sorgen braucht, indem man eine entsprechende Spannung an den Leiter legt. Dann bewegen sich die Ladungsträger in diesem Feld von selbst. Es gibt aber auch viele Leiter, in denen sich sowohl positive als auch negative Teilchen mit den *unterschiedlichen Geschwindigkeiten* v_+ und v_- gleichzeitig bewegen. Dann sind eigentlich zwei Ströme vorhanden, die sich zum Gesamtstrom addieren. Der Strom ist in diesem Falle

$$I = \frac{\Delta Q(v_+ + v_-)}{d}.$$

Weiterhin setzt sich die Ladung ΔQ aus einer großen Zahl einzelner Ladungsträger zusammen, die sich zu gleicher Zeit bewegen. Sind es N Teilchen, von denen jedes die

Elementarladung e trägt und befinden sich N_V solcher Teilchen in der Einheit des Leitervolumens vom Querschnitt A und der Länge d, so ist

$$\Delta Q = N_V e A d \quad \text{und damit der Strom nach Gleichung (390)}$$

$$I = N_V e A (v_+ + v_-). \tag{391}$$

40.1. Metallische Leiter

In einem Metall liegen nun insbesondere folgende Verhältnisse vor. Die Atome bilden in bestimmter geometrischer Anordnung ein festgefügtes **Atomgitter.** Jedoch sind die jeweils *äußersten* Elektronen der Atome abgetrennt. Es handelt sich dabei um jene Elektronen, welche bei chemischen Verbindungen die Wertigkeit bestimmen. Sie heißen daher auch **Valenzelektronen.** Wie die Teilchen eines Gases bewegen sie sich frei zwischen den positiv geladenen Atomrümpfen in völlig ungeordneter Weise umher. Das Metall als Ganzes ist daher elektrisch neutral.
Wenn jetzt eine elektrische Spannung am Metall liegt, erhält die Bewegung dieser freien Elektronen eine Vorzugsrichtung nach dem positiven Pol. Sie betätigen sich nunmehr als **Leitungselektronen.**
Die Geschwindigkeit, mit der sie dabei im Leiter fortschreiten, läßt sich nach Gleichung (391) leicht berechnen. Diese vereinfacht sich dadurch, daß die positiven Ladungsträger festliegen und deren Geschwindigkeit $v_+ = 0$ ist.

Zur Abschätzung der Geschwindigkeit darf man annehmen, daß zu jedem Metallatom ein Leitungselektron gehört. Die Anzahl N_V der in der Volumeneinheit enthaltenen Atome ergibt sich aus der AVOGADROschen Konstanten N_A (19.1.)

$$N_A = \frac{6{,}023 \cdot 10^{26}}{M \text{ kg}}.$$

Sie gibt an, wieviel Moleküle bzw. Atome in M kg eines bestimmten Stoffes enthalten sind, wobei M die relative Molekular- bzw. Atommasse bedeutet. Denkt man sich den Zahlenwert von M (dieser beträgt z. B. bei Kupfer 63,54) eingesetzt, so würde man die Anzahl der Atome in 1 kg des betreffenden Materials erhalten. Um die Anzahl der Atome je Volumeneinheit zu bekommen, muß daher noch mit der Masse multipliziert werden, die diese Volumeneinheit enthält, d. h. mit der Dichte ϱ. Es ist daher

$$N_V = \varrho N_A$$

und somit die Geschwindigkeit der Elektronen nach Gleichung (391)

$$v_- = \frac{I}{\varrho N_A e A}. \tag{392}$$

Legt man z. B. einen Kupferdraht von 1 mm² Querschnitt zugrunde, der vom Strom 1 A durchflossen wird, so ergibt sich mit der Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As und der Dichte des Kupfers $\varrho = 8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³

$$v_- = \frac{1 \text{ A m}^3 \, 63{,}54 \text{ kg}}{8{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg} \, 6 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \, 10^{-6} \text{ m}^2} = 7{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \approx 0{,}1 \text{ mm/s}.$$

Bei diesen Überlegungen wurde stillschweigend angenommen, daß die Elektronen im Feld sich mit *gleichförmiger* Geschwindigkeit v_- bewegen. Das ist aber nur deswegen der Fall, weil die Atomrümpfe je nach der Temperatur mehr oder weniger heftige Schwingungen um ihre Gleichgewichtslagen ausführen, wodurch die Elektronen mit den Atomen fortgesetzt zusammenprallen. Die übertragene Bewegungsenergie erwärmt den Leiter, und die Geschwindigkeit der Elektronen wird im Mittel gleichförmig. Hört die Eigenbewegung der Atomrümpfe bei sehr niederen Temperaturen dagegen auf, so nimmt auch der Widerstand entsprechend ab.
In der Nähe des absoluten Nullpunktes verschwindet der elektrische Widerstand einiger Metalle sogar *vollständig*. Diese **Supraleitung** wurde 1911 beim Quecksilber entdeckt. Die Temperatur, bei der dies eintritt, heißt **Sprungtemperatur** und beträgt z. B. bei

Pb	Hg	U	Zn	Cd
7,26	4,17	1,25	0,79	0,54 °K.

Die *höchste* Sprungtemperatur hat *Niobiumnitrid* (NbN), bei dem der Übergang Supraleitung – Normalleitung bei 23 °K liegt. Da im supraleitenden Zustand der ohmsche Widerstand völlig verschwindet, kreist ein einmal induzierter Strom *ununterbrochen* weiter: **Dauerstrom.** In einem mit flüssigem Helium gekühlten Bleiring konnte nach Jahren noch keine Abnahme des Stromes festgestellt werden. Auf diese Weise erhält man einen idealen Akkumulator, der bei Verwendung von NbN bereits in flüssigem Wasserstoff aufbewahrt werden kann.

40.1.1. Hall-Effekt

Die im metallischen Leiter langsam dahinströmenden Elektronen sind auch die Ursache des **Hall-Effektes.** Eine vom Strom durchflossene Platte (Bild 589) werde von einem Magnetfeld durchsetzt. Zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten A und B ist ohne Magnetfeld natürlich keine Spannung feststellbar, wohl aber nach Einschalten des Feldes. Ein empfindliches Galvanometer zeigt dann die sogenannte **Hall-Spannung** U_H an. Hierbei kann man die Gesamtheit der Elektronen so betrachten, als ob sich die ganze Plattte von der Breite $AB = b$ mit der Elektronengeschwindigkeit v_- in Richtung von — nach + verschiebe. Dann muß nach dem Induktionsgesetz (378) eine Urspannung vom Betrag

$$U_H = Bbv_-$$

entstehen.

Setzt man nach Gl. (392) die Elektronengeschwindigkeit v ein, so erhält man hieraus die Gleichung

(393) $$U_H = R_H BbS,$$

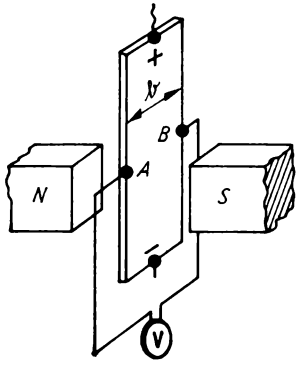


Bild 589. HALL-Effekt

wobei S die Stromdichte, d. h. der Quotient aus der Stromstärke I und dem Leiterquerschnitt A ist. Die HALL-Konstante $R_H = \frac{1}{eN_V}$ ist gleich dem reziproken Wert der Ladung je Volumeneinheit.

Vorzeichen und Größe der HALL-Konstanten ist bei der Untersuchung von Halbleitern von größter Bedeutung, da man aus ihr Vorzeichen, Geschwindigkeit und Konzentration der Ladungsträger bestimmen kann.

Praktische Anwendungen hat der HALL-Effekt mit der Entwicklung von Halbleitern hoher Elektronenbeweglichkeit ermöglicht. Mit Hilfe kleiner dünner Blättchen aus Indium-Antimonid oder Indium-Arsenid läßt sich die Stärke von Magnetfeldern bequem messen. Derartige **Hall-Generatoren** eignen sich z. B. gut zur Ausmessung von Magnetfeldern in elektrischen Maschinen.

40.2. Vorgänge in Halbleitern

Der Widerstand der Metalle liegt etwa zwischen 10^{-4} und 10^{-7} Ω cm, während man bei Werten von über 10^{10} Ω cm von Isolatoren spricht. Dazwischen liegt das Gebiet der **Halbleiter,** zu denen eine Reihe von chemischen Elementen, aber auch viele Salze und Metalloxide gehören. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Metallen und Flüssigkeiten besteht jedoch nicht in der Größe ihres elektrischen Widerstandes, sondern beruht auf besonderen Eigenheiten des Leitungsmechanismus, der je nach Art des Halbleiters verschieden sein kann. Die folgenden Darstellungen beziehen sich insbesondere auf die Vorgänge in den *elektronischen* Halbleitern **Germanium** und **Silizium,** die in den letzten Jahren große technische Bedeutung erlangt haben.

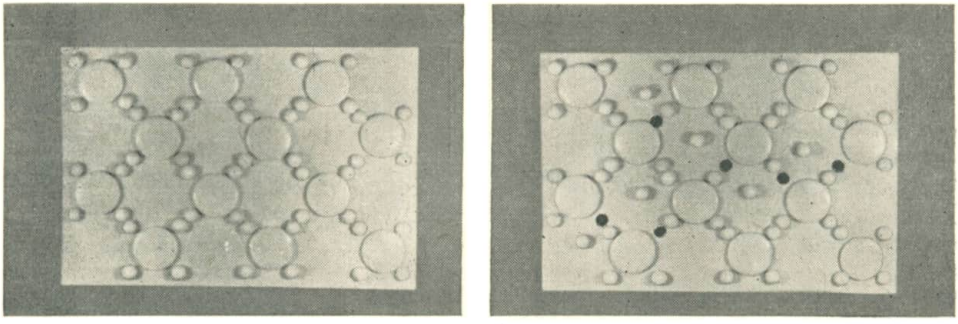
40.2.1. Eigenleitung

Ist ein Halbleiter chemisch absolut rein, so verhält er sich bei tiefsten Temperaturen wie ein Isolator; alle den Atomrumpf umgebenden Elektronen werden durch die Kräfte der chemischen Bindung festgehalten (Bild 590a). Mit zunehmender Temperatur werden aber immer mehr Elektronen durch Aufnahme thermischer Energie aus ihrer Bindung befreit und können nunmehr den Stromtransport übernehmen. Demzufolge nimmt der spezifische Widerstand im Gegensatz zu den Metallen mit steigender Temperatur ab. Anwendungen: *Widerstandsthermometer, Eisenoxid-* oder *Titanoxidwiderstände als Strombegrenzer beim Einschalten.*

In gleicher Weise setzt auch die Bestrahlung mit Licht den Widerstand von Halbleitern herab, wodurch es möglich ist, elektrische Ströme mit Hilfe von Licht zu steuern. Anwendungen: *Widerstandsfotozellen, Selenzellen.*

Diese **Eigenleitung** ergibt z. B. bei reinstem Germanium einen spezifischen Widerstand von etwa 60 Ω cm bei Zimmertemperatur. Die Eigenleitung beruht aber nicht nur auf der Wanderung von Elektronen. Vielmehr hinterläßt jedes beweglich gewordene Elektron im Kristallgitter eine positiv geladene Lücke (Bild 590b). Man spricht hierbei von positiven **Defektelektronen** oder kurz **Löchern.** Dies ist der Vorgang der **Paarbildung:**

Die Ursache der Eigenleitung ist die Entstehung von freien Elektronen und Löchern im ungestörten Gitter durch Temperatur-Anregung.



a b

Bild 590a. Halbleiter bei tiefer Temperatur: Jeder Atomrumpf des 4wertigen Germaniums ist von 8 Elektronen umgeben (flächenhaft schematisch)

Bild 590b. Halbleiter bei Zimmertemperatur: Durch Aufnahme thermischer Energie entstehen freie Elektronen und Defektelektronen (Löcher)

Sobald eine elektrische Spannung an den Halbleiter gelegt wird, wandern die Elektronen von der Katode zur Anode. Aber auch die Löcher beteiligen sich am Stromtransport. Dabei rückt ein ursprünglich noch gebundenes Elektron in die nächstgelegene positive Lücke ein, wodurch es ein neues Loch hinterläßt, das wiederum ausgefüllt wird usw. Es ist demnach so, als ob ein Strom positiver Ladungsträger dem Elektronenstrom entgegen von der Anode zur Katode wandert. Da der Kristall als Ganzes neutral bleibt, ist die Zahl der Löcher genau gleich der Zahl der freien Elektronen. Um dies quantitativ auszudrücken, bezeichnet man die je Volumeneinheit enthaltene Anzahl von Elektronen als deren *Konzentration* n und diejenige der Löcher als deren Konzentration p. In absolut reinem Germanium ist bei Zimmertemperatur

$$n = p \approx 2{,}5 \cdot 10^{13}\ 1/\mathrm{cm}^3.$$

Die Anzahl der *Paarerzeugungsakte* je Volumen- und Zeiteinheit bezeichnet man dagegen mit g. Sie ist nur von der Temperatur abhängig.
Zu diesem Prozeß gibt es auch einen entsprechenden Gegenprozeß. Er besteht darin, daß ein im Gitter umherlaufendes Elektron auf ein Loch trifft und diese Lücke wieder ausfüllt. Damit verschwindet ein Ladungsträgerpaar. Man nennt diesen Vorgang **Rekombination.**
Die Gesamtzahl der Rekombinationen muß proportional zur Konzentration n der freien Elektronen, aber auch proportional zur Konzentration p der Defektelektronen sein. Der Proportionalitätsfaktor ist der *Wiedervereinigungskoeffizient* r. Dann ist die Anzahl der Rekombinationen je Volumen- und Zeiteinheit

$$w = rnp.$$

Paarerzeugung und Rekombination finden aber fortlaufend und gleichzeitig statt. Das führt zu einem Gleichgewicht zwischen beiden Vorgängen, indem je Volumen- und Zeiteinheit ebensoviel Paare neu entstehen wie verschwinden:

$$w = g = rnp.$$

Die Größen g und r sind von der Konzentration der Ladungsträger n und p selbst unabhängig, können also bei festliegender Temperatur als konstant betrachtet werden. Dann ist das Produkt

$$np = \frac{g}{r}$$

ebenfalls konstant. In Anlehnung an entsprechende Vorgänge in der Chemie nennt man dies das

Massenwirkungsgesetz:

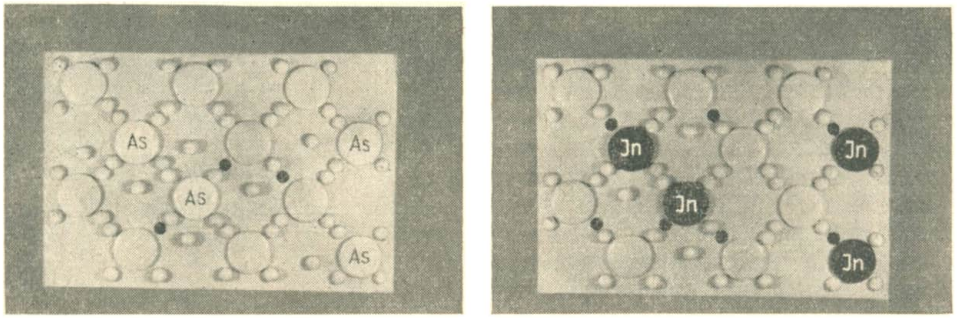
Das Produkt der Konzentration der Elektronen und Löcher ist bei gleichbleibender Temperatur konstant.

40.2.2. n-Leitung

Da die Elemente Germanium und Silizium chemisch 4wertig sind, gehören zu jedem Atomrumpf 4 Elektronen. Fügt man dem ursprünglich reinen Germanium geringe Spuren eines 5wertigen Elementes (z. B. Arsen oder Antimon) bei (Dotierung mit Fremdatomen), so ordnen sich diese Atome an entsprechenden Stellen des Gitters ein. Da sie aber gegenüber dem Germanium ein Elektron zuviel haben, ist an diesen sogenannten **Störstellen** ein Elektron im Überschuß, das dann als zusätzliches Leitungselektron in Tätigkeit tritt (Bild 591a).
Während im Zustand der Eigenleitung $n = p$ ist, treten jetzt zusätzliche Elektronen in das Gitter ein, und es wird

$$n > p.$$

Da aber das Produkt np nach dem Massenwirkungsgesetz konstant bleiben muß, wird die Konzentration der Defektelektronen p abnehmen, indem sie mit einer entsprechenden Anzahl von Elektronen rekombinieren.



a b

Bild 591a. n-Leiter: 5wertige Störatome (As) haben je ein Elektron zu viel. Die Anzahl der Defektelektronen ist verringert

Bild 591b. p-Leiter: 3wertige Störatome (In) haben je ein Elektron zu wenig. Die Anzahl der freien Elektronen ist verringert

Beispiel: Im Zustand der Eigenleitung sei etwa $n = p = 10^{13}\ 1/\mathrm{cm}^3$, womit das Produkt $np = 10^{26}\ (1/\mathrm{cm}^3)^2$ wird. Sind nach der Dotierung z. B. $n' = 10^{16}\ 1/\mathrm{cm}^3$ Elektronen vorhanden, so wird die Anzahl der Defektelektronen wegen (Massenwirkungsgesetz!)

$$n'p' = np$$

$$p' = \frac{np}{n'}$$

betragen, d. h., sie sinkt auf

$$p' = \frac{10^{26}\ \mathrm{cm}^3}{10^{16}\ \mathrm{cm}^6} = 10^{10}\,1/\mathrm{cm}^3$$

ab. Es wird demnach zweierlei erreicht. Die Gesamtzahl der Ladungsträger nimmt von ursprünglich $2 \cdot 10^{13}\ 1/\mathrm{cm}^3$ auf $(10^{16} + 10^{10})\,1/\mathrm{cm}^3$ zu, und die Anzahl der Defektelektronen wird auf einen ganz unbedeutenden Bruchteil reduziert.

Gegenüber den **Majoritätsträgern**, das sind in diesem Fall die Elektronen, spielen die **Minoritätsträger**, das sind hier die Defektelektronen, nur noch eine untergeordnete Rolle. Auf diese Weise wird das Germanium zu einem **Überschußhalbleiter** oder **n-Leiter**, bei dem der Stromtransport überwiegend durch freie Elektronen besorgt wird.

40.2.3. p-Leitung

Fügt man dem Germanium dagegen Spuren eines 3wertigen Elementes (z. B. Indium oder Gallium) zu, so bilden sich ebenfalls Störstellen, an denen aber jeweils ein Elektron zu wenig vorhanden ist. Dadurch entstehen zusätzliche Defektelektronen (Bild 591 b). Nach dem Massenwirkungsgesetz wird damit die Konzentration der Elektronen stark herabgesetzt, und der Stromtransport erfolgt vorwiegend durch Defektelektronen. Man spricht hierbei von einem **Mangelhalbleiter** oder **p-Leiter.**

40.2.4. n-p-Gleichrichtung

Setzt man nun je einen p- und n-Halbleiter zusammen, so diffundieren (analog zur Diffusion zweier verschiedener Gase) an der Berührungsstelle Elektronen in den p-Leiter und Löcher in den n-Leiter hinein. Dadurch bildet sich im p-Leiter eine dünne Zone mit negativer und im n-Leiter eine Zone mit positiver Raumladung. Die Diffusion hört auf, wenn das dadurch entstehende *innere elektrische Feld* eine bestimmte Stärke erreicht hat. In der Mitte der Übergangszone selbst sind nunmehr Elektronen und Löcher zu gleichen Teilen vermischt. Da das Produkt der Konzentrationen nach den im vorigen Beispiel angenommenen Zahlen aber mit 10^{26} je cm^3 konstant bleiben muß, sind hier nur noch $2 \cdot 10^{13}$ Ladungsträger vorhanden. Der spezifische Widerstand in der Übergangszone ist somit beträchtlich erhöht. Zwischen dem n- und p-Gebiet bildet sich eine **Sperrschicht** (Bild 592 a).

Durchlaßrichtung. Legt man jetzt eine Spannung an diese n-p-Kombination, und zwar den Pluspol an die p-Seite (Bild 592 b, links) und den Minuspol an die n-Seite (Bild 592 b, rechts), so wirkt die von außen angelegte Spannung dem inneren elek-

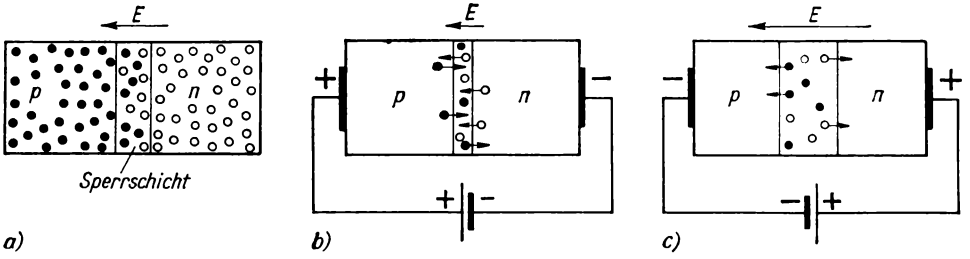


Bild 592. Symmetrischer p-n-Übergang.

a) Ausbildung einer Sperrschicht, b) Polung in Flußrichtung verkleinert die Sperrschicht, c) Polung in Sperrichtung vergrößert die Sperrschicht

trischen Feld entgegen, wodurch die zum Stillstand gekommene Diffusion ungehindert weitergehen kann. Man kann es auch so auffassen, daß die Löcher vom Minuspol und die Elektronen vom Pluspol angezogen werden, wodurch die Sperrschicht schmaler wird. Es kommt ein kräftiger **Flußstrom** zustande.

Sperrichtung. Liegt umgekehrt der Minuspol an der p-Seite und der Pluspol an der n-Seite (Bild 592c), so hat die äußere Spannung die gleiche Richtung wie das innere Feld E, womit dieses verstärkt wird. Bei dieser Polung werden Ladungsträger nach beiden Seiten hin aus der Sperrschicht abgesaugt. Sie wird dadurch noch breiter, als sie zuvor schon war, so daß kein Strom zustande kommen kann.

Lediglich für die auf beiden Seiten vorhandenen Minoritätsträger (das sind z. B. die im p-Gebiet enthaltenen Elektronen) ist diese Polung günstig. Wegen ihrer geringen Konzentration rufen sie aber nur einen äußerst schwachen **Sperrstrom** hervor. Er ist 1000···10000mal kleiner als der Flußstrom der Majoritätsträger.

Legt man nun eine Wechselspannung an diese Anordnung, so kann der Strom nur in *einer Richtung* fließen, während er in der anderen Richtung gesperrt wird. Die in der letzten Zeit entwickelten **Germanium-Gleichrichter** sperren Spannungen von 100 bis 400 V und können mit Stromdichten bis zu 75 A/cm² belastet werden. In der Schwachstromtechnik sind die sehr kleinen **Germaniumdioden** bereits weit verbreitet.

Früher waren meist **Selen-** und **Kupferoxydul-Gleichrichter** in Gebrauch. Der Aufbau eines einzelnen Gleichrichterelementes ist aus Bild 593 erkennbar. Auch hier bildet sich bei der Herstellung an der oberen Grenze des Selens eine Sperrschicht, die im Prinzip wie die besprochene n-p-Kombination wirkt.

Die Sperrspannung beträgt beim Selenelement etwa 25 V, beim Cu_2O-Gleichrichter etwa 5 V. Beim Überschreiten dieser Werte wird die Sperrschicht zerstört. Man muß daher bei höheren Spannungen mehrere Elemente in Reihe schalten (Bild 594).

Läßt man in die Oberfläche eines n-Halbleiters (z. B. n-Silizium) Fremdatome (z. B. Boratome) eindiffundieren, so entsteht eine *lichtdurchlässige* p-Schicht. Einfallendes Licht ändert dann die Konzentrationsverhältnisse der Ladungsträger in dieser

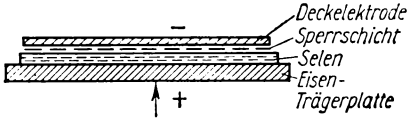


Bild 593. Selengleichrichter. ↑ Durchlaßrichtung für den Strom

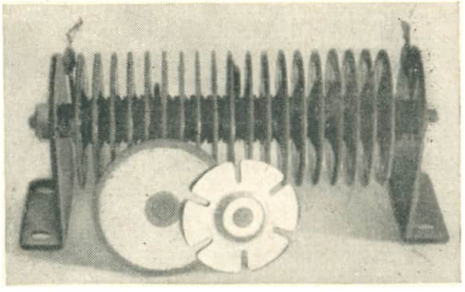


Bild 594. Selengleichrichter für höhere Spannungen

n-p-Kombination derart, daß zwischen der n- und p-Schicht eine meßbare Urspannung entsteht. Damit entsteht ein **Halbleiter-Fotoelement.**

Anwendungen: *Selenfotoelemente* als fotografische Belichtungsmesser. *Solarbatterien* in künstlichen Erdtrabanten, mit denen eine Nutzleistung von 6 ··· 11 mW/cm² erzielt werden kann.

40.2.5. Prinzip des Transistors

Durch Kombination zweier hochdotierter p-Gebiete mit einem dazwischenliegenden niedrigdotierten n-Gebiet entsteht der p-n-p-**Transistor.** Er ermöglicht es, mit kleinen Spannungsschwankungen in einem primären Stromkreis große Spannungen in einem sekundären Stromkreis zu steuern. Damit wird eine ähnliche Wirkung wie bei einer Elektronenröhre (43.5.) erzielt.

Äußere Form, Anordnung und Schaltung dieser 3 Gebiete können bei den einzelnen Typen des Transistors verschiedenartig sein. Bild 595 zeigt einen *Flächentransistor.* In das kleine Germaniumblättchen B (Basis) sind Emitter E und Kollektor K beiderseits in Form von Indiumpillen einlegiert. Die grundsätzliche Wirkungsweise sei an Hand von Bild 596 verfolgt. Im Eingangskreis liegt das p-Gebiet des **Emitters.** Es erhält gegenüber der n-leitenden **Basis** eine niedrige positive Vorspannung U_e. Emitter und Basis sind in *Flußrichtung* gepolt, so daß die Übergangszone einen nur geringen Widerstand hat. Im Ausgangskreis folgt auf die Basis das p-leitende Gebiet des **Kollektors.** Basis und Kollektor sind in **Sperrichtung** gepolt. Die dazwischenliegende Sperrschicht hat daher einen relativ sehr großen Widerstand. Da der Kollektor negative Vorspannung hat, werden die meisten vom Emitter in die Basis gelangenden Löcher vom Kollektor angezogen und erzeugen im Kollektorkreis einen Strom I_c von fast gleicher Größe wie im Emitterkreis. Die Basiszone muß daher außerordentlich dünn sein.

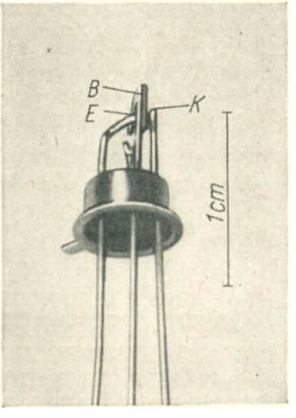


Bild 595. Aufbau eines 25-mW-Legierungstransistors. E Emitter, B Basis (dünnes Blättchen aus Germanium), K Kollektor, darunter Halterung und Zuleitungsdrähte

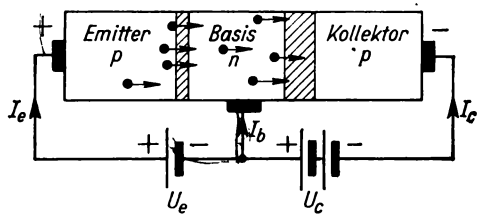


Bild 596. Schema des p-n-p Transistors in Basisschaltung

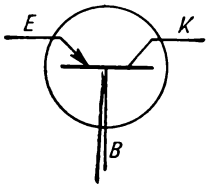


Bild 597. Symbol eines Transistors in Basisschaltung

Mißt man den Strom I_c im Kollektorkreis bei konstant gehaltenem Strom I_e im Emitterkreis und ändert dabei die Spannung U_c, so bleibt der Kollektorstrom I_c praktisch unabhängig von der Spannung U_c. Das liegt daran, daß U_c in Sperrichtung gepolt ist und die Basis keine zusätzlichen Ladungsträger liefern kann. Der Strom wird nur von den Löchern getragen, die der Emitter in die Basiszone „injiziert". Damit gehört zu jeder Änderung des Emitterstromes ΔI_e eine fast proportionale Änderung des Kollektorstromes ΔI_c. Man nennt das entsprechende Verhältnis

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_e}} \quad \textbf{Stromverstärkungsfaktor } \alpha$$

Bei der Bild 596 zugrunde liegenden **Basisschaltung** ist $\alpha \approx 0{,}98$. Während der in Durchlaßrichtung gepolte Eingangskreis nur die kleine Eingangsspannung U_e benötigt, kann im Gegensatz hierzu die Sperrspannung U_e im Ausgangskreis sehr groß gemacht werden. Daher ergibt der Transistor eine beträchtliche *Verstärkung der Leistung*

$$\Delta I_c \, U_c \gg \Delta I_e \, U_e .$$

Bei guter Anpassung des Widerstandes im Ausgangskreis erzielt man eine Leistungsverstärkung bis 1:10000.

41. Stromleitung in Elektrolyten

41.1. Ionenleitung und Ionenbeweglichkeit

Während der Leitungsmechanismus in den Metallen und elektronischen Halbleitern im wesentlichen auf der Bewegung von Elektronen beruht, wird der Strom in den Flüssigkeiten (wäßrige Lösungen von Salzen, Basen und Säuren) und auch in manchen Festkörpern von **Ionen** getragen, die aus dem Zerfall von Molekülen hervorgehen. Hierbei unterscheidet man (Bild 598)

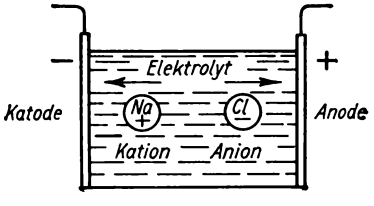


Bild 598. Kationen und Anionen

Kationen: positive Ionen, die zur negativen Elektrode, der Katode, wandern und Anionen: negative Ionen, die zur positiven Elektrode, der Anode, wandern.

Die *Ionen* sind bereits im kristallischen, also im festen Zustand dieser Stoffe, räumlich getrennt, im sogenannten Kristallgitter enthalten. Die gegenseitige Bindung ist elektrostatischer Art.

Beim Auflösen in Wasser wird diese Bindung weitgehend aufgehoben, was mit der *großen Dielektrizitätszahl* des Wassers ($\varepsilon_r = 81{,}57$) zusammenhängt. Denn für die Kraft, mit der sich zwei Ionen gegenseitig anziehen und dabei wieder ein neutrales Molekül bilden, gilt in einem Dielektrikum das COULOMBsche Gesetz (352) $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$. Sie ist demnach im Wasser gegenüber anderen Flüssigkeiten relativ *gering*, so daß die Dissoziation in Wasser gelöster Stoffe sehr begünstigt wird.

Der Strom im Elektrolyten wird von Ionen *beiderlei* Vorzeichens getragen, die sich mit den Geschwindigkeiten v_+ bzw. v_- im elektrischen Feld zwischen den Elektroden bewegen (Bild 599). Betrachtet man das Feld als homogen, so ist die Feldstärke zwischen den im Abstand l stehenden plattenförmigen Elektroden $E = \frac{U}{l}$. Die Stärke des Stromes hängt nun unmittelbar von der je Zeiteinheit an den Elektroden ankommenden Anzahl von Ionen, d. h. von deren Geschwindigkeit ab und muß wegen des Kraftgesetzes ($F = QE$) wiederum der Feldstärke E proportional sein. Es gilt daher für die

Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen:

$v_+ = u_+E$ bzw. $v_- = u_-E$.

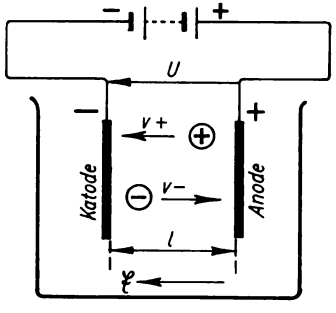


Bild 599. Zur Ionenbeweglichkeit

Der Proportionalitätsfaktor ist

(394) $\boxed{u_+ = \frac{v_+}{E}}$ bzw. $\boxed{u_- = \frac{v_-}{E}}$ **Ionenbeweglichkeit u**

Sie hat die Einheit $\left(\frac{\text{m/s}}{\text{V/m}}\right)$ und ist je nach Art der Ionen verschieden groß.

Ionenbeweglichkeiten in stark verdünnten wäßrigen Lösungen bei 18 °C

Kationen	$u_+ \cdot 10^8$ in $\frac{\text{m/s}}{\text{V/m}}$	Anionen	$u_- \cdot 10^8$ in $\frac{\text{m/s}}{\text{V/m}}$
H^+	32	OH^-	17,4
Na^+	4,4	Cl^-	6,6
K^+	6,5	MnO_4^-	5,3
Zn^{++}	4,5	NO_3^-	6,2

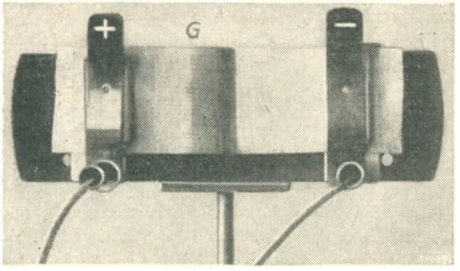


Bild 600. Sichtbare Wanderung von Ionen
G Grenze der nach der Anode vorrückenden Ionen

Die recht geringen Werte der Ionenbeweglichkeit rühren daher, daß die Bewegung der Ionen von der *inneren Reibung* der Flüssigkeit stark gehemmt wird. Da die innere Reibung mit zunehmender Temperatur abnimmt, sinkt dann der spezifische Widerstand. Daher haben Elektrolyte einen *negativen Temperaturkoeffizienten.*

Die geringe *Wanderungsgeschwindigkeit* der Ionen zeigt der folgende einfache Versuch. Ein breiter Streifen Fließpapier wird mit einer stark verdünnten Lösung von Kaliumpermanganat ($K^+MnO_4^-$) getränkt und zwischen 2 Metallkontakte eingeklemmt (Bild 600). Quer in die Strombahn legt man ein schmales Streifchen auf, das mit *starker* (violetter) Lösung desselben Salzes getränkt ist. Nach Anlegen der Spannung von etwa 200 V zieht sich eine scharf abgegrenzte Wolke, welche die violetten MnO_4^--Ionen enthält, langsam nach der Anode. Wenn man die Spannung umpolt, wandert die Wolke nach der entgegengesetzten Seite zurück. (Der Versuch zeigt zugleich die *Langsamkeit* der Ionenwanderung, die je nach Spannung einige mm je min beträgt.)

Bei der Spannung 200 V und einem Elektrodenabstand von 10 cm ist die Feldstärke $E = \frac{200\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 2000\,\mathrm{V/m}$. Das ergibt mit der aus der Tabelle (S. 479) für MnO_4^--Ionen ersichtlichen Ionenbeweglichkeit $u_+ = 5{,}3 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{V/m}}$ die Geschwindigkeit

$$v_+ = u_+ E = \frac{5{,}3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/s} \cdot 2000\,\mathrm{V/m}}{\mathrm{V/m}} = 1{,}06 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s} = 6\,\mathrm{mm/min}.$$

Setzt man die Ionenbeweglichkeit in die auf S. 470 gefundene Gleichung (391) ein, so erhält man mit $v = u\,E$ und der Feldstärke $E = \frac{U}{l}$ und unter Berücksichtigung der chemischen Wertigkeit z der Ionen die Stromstärke

$$I = \frac{N_V z e A\,(u_+ + u_-)\,U}{l} \quad \text{oder anders geschrieben}$$

$$\frac{I}{U} = N_V z e\,(u_+ + u_-)\,\frac{A}{l}.$$

Auf der rechten Gleichungsseite stehen jetzt lauter konstante Größen, wobei lediglich die Beweglichkeiten u_+ und u_- von der Temperatur abhängen. Somit hat sich ergeben, daß die Elektrolyte das Ohmsche *Gesetz* befolgen. Setzt man die rechte Seite gleich dem reziproken Wert des Widerstandes R, so läßt sich die **spezifische Leitfähigkeit** $\varkappa$ gemäß der Gleichung (318)

$$\frac{I}{U} = \frac{\varkappa A}{l}$$



Bild 601. Bleibaum. Ausscheidung von Blei aus einer Lösung von essigsaurem Blei

mit dem Ausdruck

$$\varkappa = N_V z e \, (u_+ + u_-)$$

theoretisch berechnen.

41.2. Faradaysche Gesetze

Legt man eine Spannung an die in eine leitende Flüssigkeit gesenkten Elektroden, so nehmen die Kationen an der Anode die ihnen *fehlenden Elektronen* auf und werden dadurch zu *neutralen* Atomen. Ebenso wandern die *negativen* Anionen nach der Anode und *geben* dort ihre überschüssige Ladung ab. Bild 601 zeigt beispielsweise, wie sich aus einer Lösung von essigsaurem Blei metallisches Blei in Kristallform abgeschieden hat. Beim Abwägen der ausgeschiedenen Stoffmengen findet man hierbei das

1. Faradaysche Gesetz:

Die abgeschiedene Stoffmenge ist der Stromstärke I und der Zeit t proportional.

(395) $\boxed{m = cIt}$ **Abgeschiedene Menge m**

Die hierin enthaltene Konstante c ist das **elektrochemische Äquivalent.** Es gibt an, wie groß die Masse ist, die von der Einheit der geflossenen Ladungsmenge $Q = It$ abgeschieden wurde. Es ergeben sich u. a. die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte.

Elektrochemische Äquivalente in mg/As

Silber$^+$	1,11796	Aluminium^{+++}	0,0935
Kupfer^{++}	0,3295	Nickel^{++}	0,3039
Natrium$^+$	0,2387	Knallgas	0,174 cm^3 (bei 0 °C und 760 Torr)

Würde nun wirklich jedes an den Elektroden ausgetauschte Elektron genau ein Ion neutralisieren, dann müßten sich die elektrochemischen Äquivalente wie die *relativen Atommassen* A zueinander verhalten. Die Ergebnisse zeigen jedoch, daß in vielen Fällen nur ganzzahlige Bruchteile davon abgeschieden werden, die durch die chemische **Wertigkeit** z des betreffenden Elementes gegeben sind. Man benutzt daher vorteilhafterweise den Ausdruck

$$\text{Äquivalentmasse:} \quad \frac{A}{z}.$$

Denkt man sich von einem chemischen Element so viel Gramm, wie die Äquivalentmasse angibt, so erhält man

$$\textbf{1 val (Grammäquivalent):}\ \frac{A}{z}\ \text{g}.$$

Beispielsweise ist 1 val des einwertigen Silbers $\frac{107{,}87\,\text{g}}{1} = 107{,}87\,\text{g}$ und des zweiwertigen Kupfers $\frac{63{,}54\,\text{g}}{2} = 31{,}77\,\text{g}$. Somit bestätigt die Tabelle der elektrochemischen Äquivalente das

2. Faradaysche Gesetz:

Die von einer bestimmten Elektrizitätsmenge abgeschiedenen Mengen verschiedener Stoffe verhalten sich wie deren Äquivalentmassen.

Um demnach 1 val abzuscheiden, benötigt man für alle Stoffe ein und dieselbe Elektrizitätsmenge

$$Q = \frac{A\,g}{z\,c}.$$

Sie berechnet sich z. B. aus den Werten des Silbers zu

$$Q = \frac{107{,}87\ \text{g}}{1{,}11796 \cdot 10^{-3}\ \text{g/As}} = 96489\ \text{As}.$$

Wegen ihrer universellen Bedeutung für alle elektrochemischen Umsetzungen nennt man sie

(396) $\boxed{F = 96489\ \text{As/val}}$ **Faradaysche Konstante** F

Nun ist die Anzahl der in einem Grammäquivalent (1 val) eines einwertigen Elementes enthaltenen Atome gleich der Avogadroschen Konstanten (S. 247)

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\,1/\text{val}.$$

Da jedes Elektron ein einwertiges Atom in Freiheit setzt, erhält man somit die Ladung eines einzelnen Elektrons

$$e = \frac{F}{N_A}$$

$$e = \frac{96489\ \text{As/val}}{6{,}023 \cdot 10^{23}\ 1/\text{val}} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As},$$ wie auf S. 392 angegeben wurde.

Beispiele: 1. Wieviel Nickel scheidet ein Strom von 45 A in 4 Stunden ab? – Nach (395) ist $m = 0{,}3039 \cdot 10^{-3}\ \text{g/As} \cdot 45\ \text{A} \cdot 4 \cdot 3600\ \text{s} = \underline{197\ \text{g}}$.

2. Wieviel Wasser wird von 1 Ah zersetzt? – Zur Bildung von 1 g-Äquivalent H_2 (d. h. 1,008 g) werden $Q = 96489$ As benötigt. Dabei entsteht gleichzeitig 1 g-Äquivalent Sauerstoff (d. h. $\frac{16}{2}\ \text{g} = 8\ \text{g}$), so daß 96489 As die Menge von 9,008 g Wasser zersetzen. 3600 As zerlegen demnach $\underline{0{,}336\ \text{g}}$ Wasser.

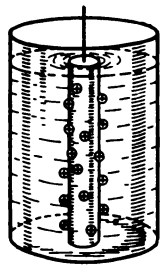


Bild 602. Ionenhülle um einen eingetauchten Metallstab

41.3. Galvanische Elemente

Nicht nur die Salze, sondern auch reine Metalle geben Ionen ab, wenn sie in einen Elektrolyten getaucht werden. Dabei umgeben sie sich mit einer äußerst dünnen Hülle positiver Ionen (Bild 602) und laden sich gegenüber der Flüssigkeit negativ auf.
Es ist aber mit einfachen Mitteln nicht möglich, das Potential des Metalls gegenüber dem Elektrolyten direkt zu messen. Hierzu müßte man, um einen geschlossenen Stromkreis zu erhalten, eine zweite Elektrode in die Lösung tauchen, die aber *ihrerseits ein Potential* gegenüber der Lösung hat. Man geht daher von einer **Normal-Wasserstoffelektrode** aus, die mit Platinschwarz überzogen ist, von reinem Wasserstoff umspült wird und in eine Säure taucht, die 1 g Wasserstoffionen je Liter enthält. Man setzt das Potential dieser Elektrode *willkürlich* gleich Null und erhält so die

elektrochemische Spannungsreihe der Metalle

Metall	Li^+	K^+	Na^+	Zn^{++}	Fe^{++}	Ni^{++}	H^+	Cu^{++}	Ag^+	Hg^+	Au^+
Spannung in Volt	−3,02	−2,92	−2,71	−0,76	−0,44	−0,25	0	0,34	0,81	0,86	1,5

In dieser Reihe ist das jeweils *links* stehende Metall gegenüber jedem rechts davon stehenden *negativ*.

Die angegebenen Zahlenwerte gelten nur dann genau, wenn das betreffende Metall in eine Lösung taucht, die 1 g-Ion des Metalls je Liter enthält. Da z. B. Kupfersulfat ($CuSO_4$) je Mol 1 g-Ion (d. i. 64 g Kupfer) bildet und die relative Molekularmasse dieses Salzes $64 + 32 + 4 \times 16 = 160$ beträgt, muß dann 1 Liter 160 g wasserfreies Salz enthalten. Bei abweichender Konzentration der Lösung ändert sich auch die Spannung.

Taucht man nun 2 verschiedene Metalle nebeneinander ein, so hat ein jedes gegenüber dem Elektrolyten ein anderes Potential. Zwischen beiden entsteht eine Potentialdifferenz, d. h. eine elektrische Spannung. Jede derartige Zusammenstellung nennt man ein **galvanisches Element.**

Die Urspannung eines galvanischen Elementes ist gleich der Differenz der Einzelpotentiale der Elektroden gegenüber der Lösung. Die Urspannung hängt nur von der stofflichen Beschaffenheit, nicht aber von der Größe des Elementes ab.

Die historisch erste Spannungsquelle dieser Art ist das **Volta-Element.** In ein Becherglas mit *verdünnter Schwefelsäure* taucht man je einen Streifen *Zink-* und *Kupferblech* und verbindet diese mit einem Spannungsmesser (Bild 603). Sodann besteht zwischen den beiden Metallen eine Spannung von etwa 1 V, wobei das Kupfer den positiven und das Zink den negativen Pol bildet. An Hand der Spannungsreihe läßt sich das leicht nachrechnen.

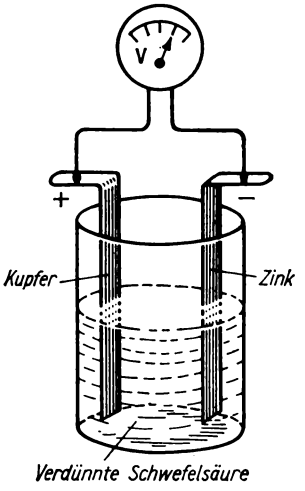


Bild 603. VOLTA-Element

41.3.1. Polarisation und Depolarisation

Wie bei den meisten elektrolytischen Vorgängen treten auch in den galvanischen Elementen noch zusätzliche chemische Reaktionen auf. Sie führen dann zu einer Veränderung der Elektroden selbst und damit auch zu einer anderen Spannung, als sie deren ursprünglicher Beschaffenheit nach entstehen müßte. Man nennt diesen Vorgang

elektrolytische Polarisation:

Veränderung der Elektroden unter Bildung eines neuen (sekundären) galvanischen Elementes.

Da die Polarisation die Wirkungsweise galvanischer Elemente stark beeinträchtigen kann, muß sie durch besondere Hilfsmittel verhindert werden. Hierzu geeignete Stoffe nennt man **Depolarisatoren.**

Beispielsweise geht die anfänglich etwa 1 Volt betragende Spannung des soeben genannten VOLTA-Elementes schon nach kurzer Zeit erheblich zurück. Nimmt man jetzt die Kupferplatte heraus und spült sie gut ab, so hat die Spannung wieder ihren ursprünglichen Wert, geht aber sogleich wieder zurück. Durch Einstreuen von Kaliumbichromat läßt sich das Absinken der Spannung gleichfalls verhindern.
Ursache ist hier der an der Zinkelektrode freiwerdende Wasserstoff. Der gemäß der Gleichung $Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + 2H^+$ entwickelte *Wasserstoff* wandert nach dem *Kupferpol*, weil im Innern des Elementes der Strom vom Zink zum Kupfer fließt und das Kupfer hier Katode ist. Infolge der Bedeckung der Kupferoberfläche mit Wasserstoffgas wird diese zunehmend unwirksamer. Außerdem steht H in der Spannungsreihe weiter links, so daß auch das *sekundäre Element* Zn-H schwächer ist. Das Kaliumbichromat aber ist ein kräftiges Oxydationsmittel, das den *Wasserstoff bindet* und so **als Depolarisator** wirkt.

Galvanische Elemente, die von vornherein so aufgebaut sind, daß keine Polarisation stattfinden kann, nennt man **konstante Elemente.** Am verbreitetsten ist das **Leclanché-Element** (Zink–Salmiaklösung–Kohle) für Taschenlampen-, Anodenbatterien usw. Seine Urspannung beträgt 1,5 V. Der Elektrolyt ist bei den Trockenbatterien mit Mehl eingedickt. Der Kohlestab ist meist von einem *braunstein*gefüllten Beutel umgeben, der zur Depolarisation dient. Der Braunstein ist beim **Luftsauerstoffelement** (ebenfalls von LECLANCHÉ erfunden) *entbehrlich*, weil der in die Kohle diffundierende Sauerstoff die Depolarisation bewirkt.

Eine gute Taschenlampenbatterie liefert etwa 1,25 Ah, verwertet aber nur etwa $^1/_{15}$ der chemischen Energie des Zinks.

Für genaue Meßzwecke dient das **Kadmium-** (WESTON-) **Normalelement,** dessen Urspannung bei 20 °C gleich 1,01865 V ist. Die Einzelheiten dieser Zelle gehen aus

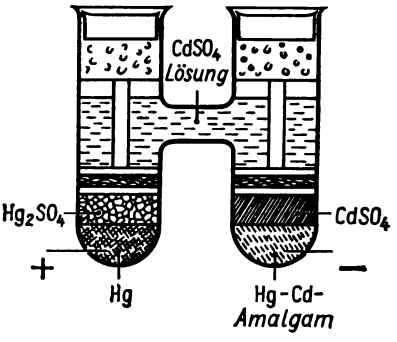


Bild 604 WESTON-Normalelement

Bild 605. Brennstoff-Element

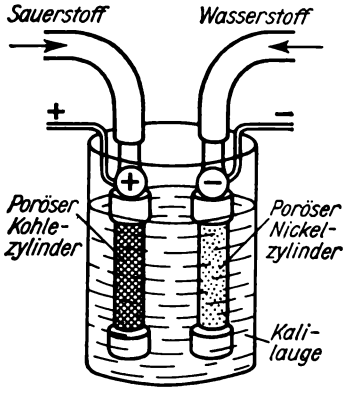


Bild 604 hervor. Es ist meist mit einem elektrischen *Thermostaten*, der für genau konstante Temperatur sorgt, in einem Kasten zusammengebaut.

Die bei der Oxydation von Wasserstoff und anderen Brennstoffen freiwerdende Energie direkt in elektrische Energie umzuwandeln gelingt in den **Brennstoffelementen.** Als Beispiel zeigt Bild 605 ein Niederdruck-Knallgas-Element. Das zugeführte H_2-Gas tritt in einen aus gesintertem Material bestehenden Nickelzylinder und wird dort in den Poren katalytisch gespalten, ionisiert und locker gebunden. In der positiven Elektrode wird O_2-Gas durch einen Silber-Katalysator ionisiert. Es bilden sich OH^--Ionen, die in der als Elektrolyt dienenden Kalilauge zur Gegenelektrode wandern und sich mit dem Wasserstoff zu Wasser verbinden. Der Wirkungsgrad erreicht 90 %, die Leerlaufspannung einer Zelle 1,12 V und die Belastbarkeit der H-Elektrode 0,7 A/cm². Die Entwicklung geht dahin, anstelle von Wasserstoff brennbare Öle zu verwenden.

41.3.2. Akkumulatoren

Die Polarisation nützt man bei den **Akkumulatoren (Sammlern) aus,** um *elektrische Energie auf chemischem Wege zu speichern.*

Besondere Bedeutung hat der **Blei- (Planté)- Akkumulator.**

Man stelle 2 gewöhnliche Stücke Bleiblech in etwa 10 %ige Schwefelsäure und lege eine Spannung von etwa 3 V an. Nach einigen Minuten hat sich auf der Anode eine schokoladenbraune Schicht von Bleisuperoxid (PbO_2) gebildet, während die Katode metallisch blank wird. Schaltet man jetzt die Spannungsquelle ab und dafür ein kleines Lämpchen in den Stromkreis, so leuchtet dieses kräftig auf. Ein Voltmeter zeigt eine Spannung von etwa 2 V an. Bei *mehrfacher Wiederholung* des Versuches wird das Speichervermögen der Bleizelle immer besser.

Beim Eintauchen des stets mit einer Oxidschicht bedeckten Bleies bildet sich an der Oberfläche $PbSO_4$ *(Bleisulfat)*, das sich beim Stromdurchgang wie folgt zersetzt:

$$\textit{Laden:}\ 2\,PbSO_4 + 2\,H_2O \rightarrow PbO_2 + Pb + 2\,H_2SO_4$$

Verbrauch von Wasser — braun, positive Platte — grau, negative Platte — Bildung von Säure

Derselbe Vorgang verläuft in umgekehrter Richtung beim

$$\textit{Entladen:}\quad PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \rightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$$

Verbrauch von Säure — Bildung von Wasser

Hieraus geht hervor, daß beim Laden die *Säuredichte zunehmen*, dagegen während des *Entladens* die Säure *schwächer* werden muß.

Bei der Herstellung des meistverwendeten Typs wird in die gitterartigen Bleiplatten ein Brei aus Schwefelsäure und Bleipulver bzw. Bleioxid eingepreßt. Das Laden ist *beendet*, wenn die Spannung 2,6 V erreicht ist, was auch an der kräftigen Gasbildung (Vorsicht, Knallgas!) erkennbar wird. Während des *Entladens* soll die Spannung *nicht unter* 1,8 V *sinken*. Die Kapazität soll etwa 5···10 Ah je dm² Plattenoberfläche betragen; etwa 80 % der Ladeenergie wird zurückgewonnen; 1 kg Zellengewicht vermag etwa 32 Wh zu speichern. Bei längerem unbenutztem Stehen bildet sich *hartes Bleisulfat*, das den Sammler *unbrauchbar* macht.

Weniger empfindlich ist der alkalische **Eisen-Nickel-** (oder auch Kadmium-Nickel-) **Sammler.**

$$\textit{Laden:}\quad Fe(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 \rightarrow Fe + 2Ni(OH)_3$$
$$\textit{Entladen:}\quad Fe + 2Ni(OH)_3 \rightarrow Fe(OH)_2 + 2Ni(OH)_2$$

Als Elektrolyt dient 20 %ige Kalilauge. Die Energieausbeute beträgt nur 75 %, das Speichervermögen je kg ist etwa dasselbe wie beim Bleisammler.

42. Stromleitung in Gasen

42.1. Unselbständige und selbständige Gasentladung

Bei gewöhnlichen Versuchen mit weniger empfindlichen Apparaten erscheinen die *Gase*, insbesondere die Luft, als *Isolatoren*. Sie sind es grundsätzlich auch. Wenn dennoch Fälle einer gewissen Leitfähigkeit auftreten, muß das Gas **Ladungsträger** enthalten, die dann, im Feld wandernd, das Gas zu einem Leiter machen. Hierfür kommen in Frage Elektronen, Ionen und durch Ionenanlagerung geladene Moleküle und auch gröbere Teilchen. Sie sind in geringer Anzahl von Natur aus immer in der Luft enthalten (z. B. infolge der steten Anwesenheit kleinster Spuren radioaktiver Stoffe in der Atmosphäre).

Die Konzentration der Ladungsträger läßt sich aber auch künstlich erhöhen, indem man z. B. den Zwischenraum zwischen zwei Kondensatorplatten mit einer Röntgenröhre bestrahlt. Legt man dann nach Bild 606 eine regelbare Spannung an die Platten, so fließt ein schwacher Strom. Er wird von den Ionen getragen, die von der Röntgenstrahlung in der Luft erzeugt werden. Diese Entladung ist **unselbständig,** da die Ladungsträger erst *von außen her* in das elektrische Feld gebracht werden müssen. Steigert man jetzt die Spannung allmählich, so wird auch der Strom stärker. Anfangs

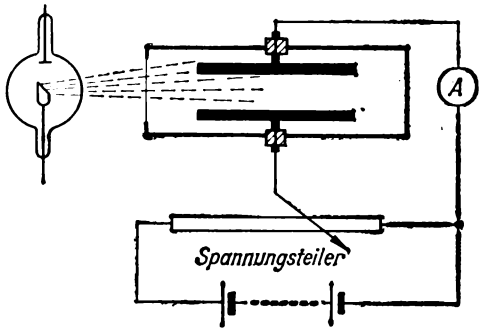


Bild 606. Anordnung zur Aufnahme der Spannungs-Strom-Kennlinie einer Gasentladung

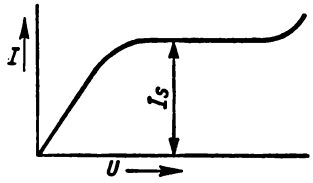


Bild 607. Spannungs-Strom-Kennlinie einer Gasentladung

wächst er noch proportional zur Spannung an. Es liegen also ähnliche Verhältnisse vor wie bei einem Elektrolyten. In diesem linear aufsteigenden Teil der U, I-Kennlinie (Bild 607) kommt wieder das Ohmsche Gesetz zum Ausdruck. Bei noch weiter zunehmender Feldstärke nimmt aber der Strom immer langsamer zu und erreicht schließlich einen konstant bleibenden **Sättigungswert.** Die Anzahl der je Zeiteinheit zu den Elektroden wandernden Ionen kann nämlich nicht größer werden als diejenige, die im gleichen Zeitraum von der Röntgenstrahlung gebildet wird. Der Sättigungsstrom kann daher als Maß für die Intensität radioaktiver Strahlung oder der Röntgenstrahlung dienen (47.6.1.).

Stellt man nunmehr, ohne an den bestehenden Verhältnissen etwas zu ändern, die Spannung an den Elektroden auf noch höhere Werte ein, so beginnt die Stromstärke von einem bestimmten Punkt an wieder anzusteigen. Die Kennlinie biegt steil nach oben hin aus. Das im Sättigungsgebiet der Kennlinie zum Ausdruck kommende Gleichgewicht zwischen Trägererzeugung und Trägerabwanderung ist gestört. Neue Ladungsträger müssen hinzugekommen sein, die von der Bestrahlung nicht herrühren können. Man muß jetzt vielmehr daran denken, daß die ursprünglichen Ladungsträger wegen der sehr großen Feldstärke mit entsprechend großen Geschwindigkeiten auf die Elektroden auftreffen.

Angenommen, ein Ion pralle auf die Katode, wo es ein *Elektron herausschlägt* (Bild 608). Dieses wird nach der Anode hin *beschleunigt* und stößt mit einem *Gasmolekül* zusammen. Dadurch bildet sich ein *neues Elektron* und ein *positives Ion*. Die beiden weiterfliegenden Elektronen erzeugen bei weiterem Zusammenprall 2 weitere Ionen und Elektronen, so daß jetzt

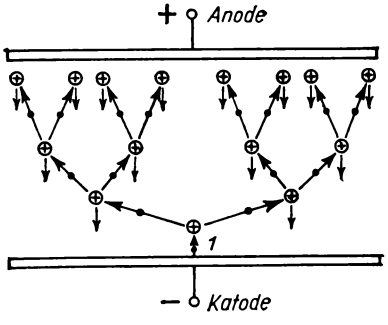


Bild 608. Entstehung einer Lawine positiver Ionen und Elektronen durch ein von der Katode abgelöstes Elektron

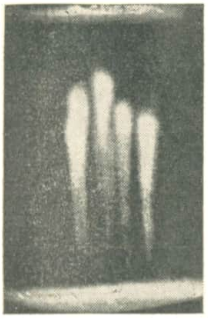


Bild 609. Nebelkammeraufnahme einer Ionenlawine

4 Elektronen weiterfliegen und in dieser Weise eine rasch anwachsende **Ionenlawine** verursachen (Bild 609).

Damit ist die anfänglich unselbständige Entladung zu einer **selbständigen Entladung** geworden. Ihr Kennzeichen ist, daß die zum Stromtransport benötigten elektrischen Teilchen durch Stoßprozesse im Gasraum fortlaufend neu erzeugt werden. Dementsprechend sind auch die dabei erzielbaren Stromstärken um Größenordnungen höher.

42.2. Glimmentladung in verdünnten Gasen

42.2.1. Teile der Glimmentladung

Die Einzelheiten einer selbständigen Gasentladung sieht man am besten an einer langgestreckten Röhre mit ungeheizter Katode, d. h. einer **Kaltkatodenröhre**, an deren Elektroden eine Gleichspannung von einigen tausend Volt gelegt wird.
Man setzt die etwa 50 cm lange Glasröhre auf eine Vakuumpumpe und schließt die beiden scheibenförmigen Elektroden an einen mit *Gleichstrom* betriebenen Funkeninduktor an. Während des Auspumpens erscheinen bald violett *leuchtende Büschel*, die sich bei etwa 0,1 ··· 2 Torr zum charakteristischen Bild einer **Glimmentladung** verbreitern. Die Leuchterscheinung bildet, von der Katode ausgehend, folgende Teile (Bild 610):

1. **Astonscher Dunkelraum:** eine kaum erkennbare, nichtleuchtende Schicht zwischen Katode und dem
2. **Katodenlicht:** eine dünne violett leuchtende Schicht;
3. **Hittorfscher Dunkelraum:** sehr schwach violett leuchtender Zwischenraum;
4. **negatives Glimmlicht:** kräftig leuchtende Zone, beginnend mit dem Glimmsaum;
5. **Faradayscher Dunkelraum:** sehr schwach leuchtend;
6. **positive Säule** *(Plasma)*: häufig regelmäßig geschichtet, kräftig rosa leuchtend, erfüllt den größten Teil der Röhre bis zur Anode.
   Nur bei einigen elektronegativen Gasen (z. B. Joddampf) bildet sich das
7. **anodische Glimmlicht.**

Die hier angegebenen *Farben* treten nur in Luft auf, sie sind *bei jedem Gas anders*. Das Plasma des *Neons* leuchtet *rot*, das des *Quecksilbers grünlich*, des *Heliums violett* usw.

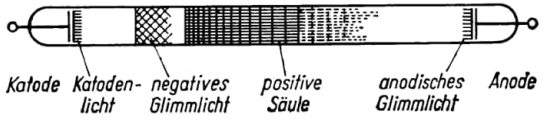


Bild 610. Teile einer Glimmentladung

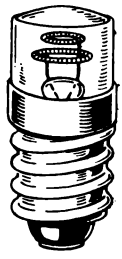


Bild 611. Kleinglimmlampe. Der Schutzwiderstand ist im Sockel eingebaut

Die Glimmentladung ist eine **selbständige Entladung.** Damit man sie überhaupt einsetzen kann, ist die *anfängliche Gegenwart* von einigen *Ladungsträgern* notwendig, was gewöhnlich immer der Fall ist. Im Feld werden sie nach *beiden Elektroden hin beschleunigt.*
Nach einer gewissen Anlaufstrecke ist die Geschwindigkeit der von der Katode ausgehenden Elektronen so groß geworden, daß sie ein Gebiet starker Ionisation erzeugen. Die wegen ihrer Größe langsamen positiven Ionen bleiben in dieser Zone zurück, während die Elektronen von der Anode abgesaugt werden. So entsteht das negative Glimmlicht, das demnach eine positive **Raumladungswolke** darstellt. Zwischen ihr und der Katode liegt fast der gesamte Spannungsabfall der Röhre, der sogenannte **Katodenfall.** In dieser Wolke findet auch eine starke Wiedervereinigung zu neutralen Teilchen statt, welche das *Leuchten* hervorruft.
Im Gegensatz hierzu besteht die *positive Säule* aus *gleich viel positiven* wie *negativen* Trägern. Ein solches, im ganzen *quasineutrales* Gas nennt man allgemein **Plasma.** Im Plasma ist die Feldstärke nur noch klein.
Gasentladungen werden in den verschiedensten Typen von Lampen technisch genutzt: Leuchtröhren für Reklamezwecke, Leuchtstoffröhren zur Allgemeinbeleuchtung, Natrium- und Quecksilberdampflampen für Sonderzwecke, Blitzlampen für fotografische Aufnahmen. In der Glimmlampe liegen die Elektroden so dicht beieinander, daß die positive Säule verschwindet und nur noch das negative *Glimmlicht* übrigbleibt, das in *dünner Schicht* die Katode überzieht (Bild 611).
Zu beachten ist beim praktischen Betrieb, daß alle Gasentladungen bei größerer Stromstärke eine *negative Charakteristik* aufweisen; d. h., bei *zunehmendem* Strom *sinkt* die Spannung! Um eine Zerstörung der Lampen zu verhindern, müssen sie daher mit einem Schutzwiderstand oder bei Betrieb mit Wechselstrom mit einer Vorschaltdrossel in Reihe geschaltet werden.
Auch die **Bogenentladung** ist nur eine besondere Form der Glimmentladung, die sich durch besonders hohe Temperatur und Stromdichte auszeichnet. Sie wird beim Lichtbogenschweißen, in den Bogenlampen und Quecksilberdampfgleichrichtern praktisch verwertet.

43. Elektrischer Strom im Vakuum

Pumpt man das vorhin betrachtete Entladungsrohr noch weiter aus, so *vergrößern* sich die Dunkelräume, und die Lichterscheinungen verschwinden zusehends. Dafür beginnt die *Glaswand* in grünem Licht zu *fluoreszieren.* Dies wird von der sogenannten **Katodenstrahlung** verursacht.
Wie sich leicht beweisen läßt, besteht diese *Strahlung* aus frei von der Katode wegfliegenden *Elektronen.* Ein einzelnes stärkeres Bündel bezeichnet man als **Elektronenstrahl.**

Bei kalter Katode ist jedoch die Entladung immer nur bei Gegenwart erheblicher Gasreste möglich, weil die hierzu benötigten Elektronen durch *Aufprall von Ionen* aus der Katode herausgelöst werden. Nahezu ionenfreie Elektronenströme erreicht man daher erst, wenn man das *Gas* möglichst vollkommen *entfernt* und im Vakuum von mindestens 10^{-6} (oft bis $10^{-10}...10^{-16}$) Torr arbeitet. Damit müssen aber besondere Vorkehrungen getroffen werden, um die Elektronen aus der Katode zu befreien.

43.1. Geschwindigkeit und Energie freier Elektronen

Da im Vakuum jegliche Reibung wegfällt, bewegen sich die Elektronen nicht mehr mit gleichbleibender Geschwindigkeit, wie dies in metallischen oder flüssigen Leitern der Fall ist. Demzufolge ist auch Gleichung (391), S. 470, hier ungültig. Vielmehr wirkt jetzt auf das Elektron bei Annahme konstanter Feldstärke E nach (343), S. 417, eine fortwährende Kraft $F = eE$, die nach dem Grundgesetz der Dynamik ($F = ma$) seine Masse m_e bei konstanter Feldstärke gleichmäßig beschleunigt.

Im Vakuum bewegen sich die Elektronen bei konstanter elektrischer Feldstärke gleichmäßig beschleunigt.

Die zur Bewegung der Ladung Q gegen eine Spannung U erforderliche Arbeit berechnet sich nach (341) als $W = UQ$. Setzt man hier für U die Spannung 1 V und für Q die Ladung eines Elektrons $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As, so ergibt sich die Energie

(397) $$\boxed{1 \text{ Elektronenvolt} = 1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}}$$

Es bedeutet also

1 Elektronenvolt:
die Energie eines Elektrons, das die Spannung 1 V ungehindert durchlaufen hat.

Dabei nimmt ein Elektron vermöge seiner Masse m_e die kinetische Energie

$$\frac{m_e}{2} v^2$$

an. Beide Energien sind einander gleich, so daß

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU.$$

Hieraus erhält man durch Auflösen

(398 a) $$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Um die Geschwindigkeit des Elektrons auszurechnen, muß also davon ausgegangen werden, daß jede Energiezufuhr einen Massenzuwachs Δm zur Folge hat:

$$e\,U = \Delta m\, c^2 = m\, c^2 - m_0 c^2.$$

Nach Einsetzen von m nach Gleichung (299) und Auflösen nach v erhält man anstelle von (398 a)

(398 b) $$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{e\,U}{m_0 c^2}\right)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 1{,}959 \cdot 10^{-6}\, U/\text{V})^2}}$$

Hiernach ergibt sich z. B. bereits bei $U = 10^4$ V der merklich geringere Betrag $v = 5{,}85 \cdot 10$ m/s gegenüber $v = 5{,}93 \cdot 10^7$ m/s nach Gl. (398 a).

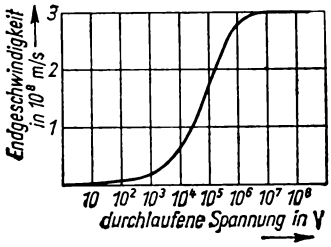


Bild 612. Elektronengeschwindigkeit bei Berücksichtigung der relativistischen Massenzunahme

Bei *sehr großen* Spannungen zeigt sich, daß die Elektronengeschwindigkeit *langsamer* zunimmt, als es dieser Gleichung entspricht. Das ist eine Folge des auf S. 374 berechneten **relativistischen Massenzuwachses;** denn schon bei Beschleunigungsspannungen von etwa 100 kV liegt die Elektronengeschwindigkeit in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit. Bei etwa 10^7 V ist die Lichtgeschwindigkeit praktisch erreicht (Bild 612). Bei weiterer Erhöhung der Spannung äußert sich die Energiezunahme allein im Massenzuwachs.

Durchlaufene Spannung	Elektronengeschwindigkeit in m/s	Elektronenmasse m in kg	relative Masse $\frac{m}{m_0}$
10 V	$18{,}8 \cdot 10^5$	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$	1,000
1000 V	$18{,}8 \cdot 10^6$	$9{,}12 \cdot 10^{-31}$	1,002
100000 V	$16{,}5 \cdot 10^7$	$10{,}9 \cdot 10^{-31}$	1,20
10^6 V	$28{,}3 \cdot 10^7$	$28{,}8 \cdot 10^{-31}$	2,96
10^7 V	$29{,}9 \cdot 10^7$ (fast Lichtgeschwindigkeit)	$187{,}3 \cdot 10^{-31}$	20,58

43.2. Elektronenbefreiung aus Metallen

Wie bereits erwähnt (S. 470), befinden sich die Elektronen, ähnlich den Teilchen eines Gases, frei beweglich zwischen den positiven Atomrümpfen des Metallgitters. Die von diesen ausgehenden elektrostatischen Kräfte hindern sie jedoch daran, aus diesem Gitter zu entweichen. Die Mindestenergie, die ein Elektron haben muß, um aus dem Metall auszutreten, ist gleich der **Abtrennarbeit.** Wie aus der folgenden Tabelle zu entnehmen ist, hat sie für die einzelnen Stoffe unterschiedliche Werte. Sie liegen in der Größenordnung von einigen Elektronenvolt.

Abtrennarbeit einiger Metalle in eV

Metall	W	Mo	Cu	Th	Bariumoxid-Paste	Cs auf W
Abtrennarbeit	4,53	4,43	4,39	3,3	0,99	1,36

Stellt man die zur Abtrennung eines Elektrons erforderliche Energie als Funktion des Abstandes von der Metalloberfläche dar, so ergibt sich eine Kurve nach Bild 613. Die Ordinate ist die in eV ausgedrückte potentielle Energie $W_{pot} = eU$, die das Elektron hat, wenn es sich in den angegebenen Abständen von der Oberfläche befindet. Hierbei ist U das Potential des Elektrons in bezug auf die Metalloberfläche.
Man kann sich hiervon ein mechanisches Modell denken, bei dem die Elektronen wie kleine Kügelchen am Grunde eines Topfes liegen (Bild 614). Um sie über den oberen Rand des Potentialtopfes hinweg ins Freie zu befördern, muß man ihnen potentielle Energie zuführen. Infolge ihrer eigenen Wärmebewegung haben sie bereits eine gewisse kinetische Energie, infolge deren sie aber nur bis zur Höhe h_1 gelangen können. Der noch fehlende Höhenunterschied h_2 entspricht der in der Tabelle aufgeführten Abtrennarbeit.

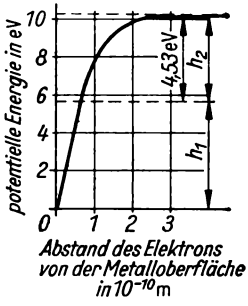


Bild 613. Abtrennarbeit des Elektrons bei Wolfram

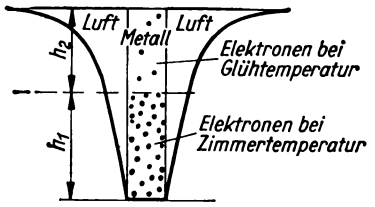


Bild 614. Potentialtopf-Modell des Elektronengases

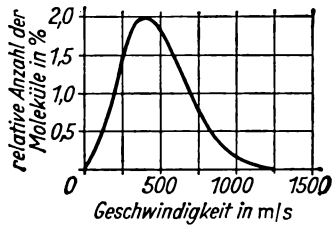


Bild 615. MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung in Stickstoff bei 20 °C

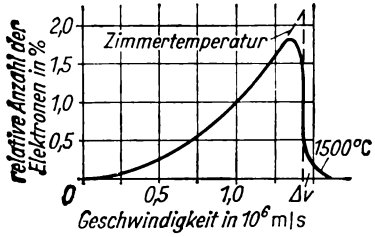


Bild 616. FERMIsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Metallgitter bei niederer und höherer Temperatur

Wie bei einem gewöhnlichen Gas sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen nicht einheitlich. Infolge der zahlreichen Zusammenstöße untereinander verteilen sich die Geschwindigkeiten in einer charakteristischen Weise, die sich nach den Gesetzen der Statistik berechnen läßt. Sie sieht bei einem gewöhnlichen Gas aus, wie es Bild 615 zeigt. Es ist die uns bereits bekannte **Maxwell-Verteilung** (S. 253). Charakteristisch ist, daß sie im Gebiet hoher Teilchengeschwindigkeiten relativ sanft ausläuft.

Es zeigt sich jedoch, daß das MAXWELLsche Verteilungsgesetz für das Elektronengas *nicht gilt*. An seine Stelle tritt das **Fermische Verteilungsgesetz.** Man sieht aus Bild 616, daß die gestrichelte Kurve (gültig bei Zimmertemperatur) bei $1{,}4 \cdot 10^6$ m/s entsprechend einer Elektronenenergie von etwa 6 eV scharf abbricht. Somit kommen Elektronen oberhalb dieser Energie im Innern des Metalls gar nicht vor. Ihre Energie reicht nur aus, um im Modell des Potentialtopfes den Höhenunterschied h_1 zu überwinden. Um den Elektronen die zu ihrer Abtrennung zusätzliche notwendige Energie zuzuführen, bieten sich folgende Möglichkeiten.

43.2.1. Glühemission

Hierbei handelt es sich darum, das Katodenmaterial so hoch zu erhitzen, daß die eigene thermische Geschwindigkeit der Elektronen ausreicht, um die Resthöhe des Potentialwalles zu überschreiten. Aus Bild 616 ist beispielsweise zu erkennen, daß bei einer Temperatur von 1500 °C die Kurve der FERMI-Verteilung ihre Gestalt ein wenig ändert. Ein kleiner Prozentsatz der Elektronen hat dann ausreichend große Energiewerte. Die hier angegebene Geschwindigkeitsdifferenz Δv ist groß genug, um den noch fehlenden Höhenunterschied h_2 zu überwinden. Praktisch macht man außerdem noch davon Gebrauch, daß Barium eine relativ niedrige Abtrennarbeit aufweist. Hierzu überzieht man den aus Wolfram bestehenden Glühdraht der Katode mit einem dünnen Röhrchen aus Bariumoxid.

43.2.2. Feldemission

Ein zweiter Weg, um das Elektron aus dem Anziehungsbereich des Metalls zu entfernen, besteht in der Anwendung großer Feldstärken. Die zwischen Anode und Katode liegende Spannung reicht hierzu nicht aus. Es genügt aber, wenn die Feldstärke wenigstens auf dem kleinen Weg innerhalb der unmittelbaren Umgebung der Katode groß genug ist.

Veranschlagt man diesen zu $3 \cdot 10^{-8}$ cm, so ist längs dieses Weges bei Wolfram die Spannung 4,53 V zu überwinden, was eine Feldstärke von $\frac{4{,}53\ \mathrm{V}}{3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}} = 1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{V/cm}$ erfordert. Diese ist nur herzustellen, wenn das Metall in einer scharfen Spitze endigt oder als sehr feiner Draht vorliegt. Nur bei äußerst kleinem Krümmungsradius kann die Feldstärke derart hohe Beträge erreichen (s. S. 427).

43.2.3. Fotoemission

Sie stellt die Anwendung des in 34.2. besprochenen äußeren fotoelektrischen Effektes dar.

Hierzu versieht man die Rückwand eines evakuierten Glaskolbens mit einer besonders präparierten Metallschicht, der *Fotokatode*. Ihr gegenüber befindet sich die aus Draht geformte Anode. Der Elektronenstrom setzt sofort nach der Belichtung und trägheitslos ein. Gasgefüllte Zellen ergeben stärkere Ströme, da die im Gasraum gebildeten Ionen zur Stromleitung mit beitragen.

43.2.4. Sekundäremission

Treffen anstelle von Lichtquanten schnell bewegte Elektronen oder Ionen gegen die Metalloberfläche, so kann deren kinetische Energie ebenfalls dazu ausreichen, im Metallgitter sitzende Elektronen herauszuschlagen. In dieser Weise emittieren die Kaltkatoden der besprochenen Glimmentladungsröhren.

43.3. Ablenkung von Elektronenstrahlen in Feldern

Die zwischen der Katode und Anode einer evakuierten Röhre frei fliegenden Elektronen lassen sich in verschiedener Weise steuern und aus ihrer ursprünglichen Richtung ablenken. Letzteres kann mit Hilfe elektrischer oder magnetischer Felder geschehen.

43.3.1. Ablenkung von Elektronen im elektrischen Feld

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn das Elektron parallel zu den Platten in das homogene Feld eines Kondensators eintritt. Es wird von der negativen Platte abgestoßen und von der positiven angezogen. Wird die Geschwindigkeit des Elektrons gleichförmig angenommen, so liegen die gleichen Verhältnisse vor wie bei einem horizontal abgeworfenen Körper; denn auch hier wirkt eine konstante, nach „unten" gerichtete Kraft auf das Elektron. Es muß eine Wurfparabel entstehen.

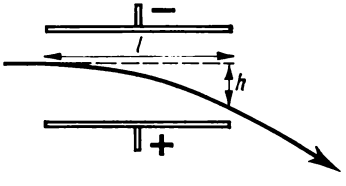


Bild 617. Ablenkung eines Elektrons im elektrischen Feld

Die Größe der quer zur Strahlrichtung erfolgenden Ablenkung h (Bild 617) errechnet sich folgendermaßen. Durcheilt das Elektron die Strecke l mit der Geschwindigkeit v, so benötigt es hierfür die Zeit

$$t = \frac{l}{v}.$$

In dieser Zeit fällt es um die Strecke

$$h = \frac{a}{2} t^2,$$

wobei a die quer gerichtete Beschleunigung ist, die das Feld dem Elektron erteilt. Sie ergibt sich nach dem Grundgesetz der Dynamik aus der Kraft $F = m_e a$, und diese ist andererseits nach Gleichung (343) $F = eE$. Somit ist

$$m_e a = eE \text{ und daher}$$

$$a = \frac{eE}{m_e}.$$

Auf diese Weise erhält man

(399) $$\boxed{h = \frac{eEl^2}{2m_e v^2}}$$ **Ablenkung h eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld**

Beispiel: Um welche Strecke wird ein Elektron nach Durchlaufen der Spannung 1000 V abgelenkt, wenn es in einem elektrischen Feld der Stärke 100 V/cm die Strecke 10 cm zurücklegt? – Nach der Tabelle in 43.1. ist $v = 1{,}88 \cdot 10^7$ m/s. Mit $E = 10^4$ V/m, der Elektronenmasse $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg und der Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As wird zufolge Gleichung (399)

$$h = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\; 10^4\,\text{V}\; 10^{-2}\,\text{m}^2\,\text{s}^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}\,\text{kgm}\; 1{,}88^2 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3} = 0{,}025\,\text{m} = 2{,}5\,\text{cm}.$$

43.3.2. Ablenkung von Elektronen im magnetischen Feld

Sucht man nach einer unmittelbaren Erklärung für die Kraft, mit der ein Stromleiter im *Magnetfeld* bewegt wird, so kann die Ursache nur in den Elektronen liegen. Jedes einzelne, quer zum Feld laufende Elektron muß daher quer zu seiner ursprünglichen Richtung bewegt werden. Die Gesamtheit aller am Strom beteiligten Elektronen, die ja den geraden Leiter nicht verlassen kann, drückt den Leitungsdraht zur Seite.
Man denke also an ein einzelnes Elektron von der Ladung e, das sich frei im Vakuum mit der Geschwindigkeit v rechtwinklig zu den Feldlinien eines homogenen Feldes der Stärke B bewegt. In jedem Augenblick muß dann eine Kraft F wirken, die es ebenfalls rechtwinklig zur momentanen Bewegungsrichtung ablenkt, die sogenannte **Lorentzkraft.** Da der Betrag der Geschwindigkeit v konstant bleibt, ist auch die LORENTZ-Kraft konstant und zwingt dem Elektron eine Kreisbewegung auf (Bild 618). Die Größe der Kraft ergibt sich, wenn man bedenkt, daß die mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung $\Delta Q = e$ einen Strom darstellt. Dieser ist nach Gleichung (313) definiert durch $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Erweitert man diese Gleichung mit dem Weg Δs, den das Elektron im Zeitraum Δt zurücklegt, so erhält man

$$I \cdot \Delta s = \Delta Q \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

oder wegen $\Delta Q = e$ und $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$

$$I \cdot \Delta s = ev.$$

Man kann daher das in Gleichung (382), $F = BIl$, enthaltene Produkt Il durch $I \cdot \Delta s = ev$ ersetzen und bekommt so

(400) $\boxed{F = evB}$ **Lorentz-Kraft F für ein freies Elektron**

Wie aus Bild 618 ersichtlich ist, stehen die Geschwindigkeit v des Elektrons, die Induktion B und die LORENTZ-Kraft F rechtwinklig aufeinander. Bei der Anwendung der Linken-Hand-Regel ist aber zu beachten, daß das Elektron der konventionellen Stromrichtung *entgegenläuft!*

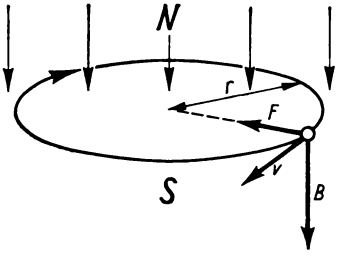


Bild 618. Kreisbewegung eines freien Elektrons im Magnetfeld

Den Radius der so zustande kommenden Kreisbahn findet man durch Gleichsetzen der LORENTZ-Kraft mit der Fliehkraft (7.6.1.):

$$evB = \frac{m_e v^2}{r}.$$

Das ergibt

(401) $$\boxed{r = \frac{m_e v}{eB}}$$ **Bahnradius r eines im Magnetfeld umlaufenden Elektrons**

Beispiel: Ein Elektron von der Energie 1 MeV gerät in ein homogenes Magnetfeld der Induktion 10^{-2} Vs/m². Wie groß ist der Radius der entstehenden Kreisbahn? – Mit der S. 43.1. genannten Geschwindigkeit $v = 2{,}83 \cdot 10^8$ m/s liefert Gleichung (401)

$$r = \frac{9 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}\; 2{,}83 \cdot 10^8\,\text{m m}^2}{\text{s}\; 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\; 10^{-2}\,\text{Vs}} = 15{,}9 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 15{,}9\,\text{cm}.$$

43.4. Diode (Zweielektrodenröhre)

Vakuumröhren, in denen ein *Elektronenstrom von der Katode zur Anode* fließt, nennt man allgemein **Elektronenröhren.** Wenn nur diese beiden Elektroden vorhanden sind, spricht man von einer **Diode** (Bild 619). Zwischen Katode und Anode liegt die von der **Anodenbatterie** gelieferte **Anodenspannung** U_a. Den in der Röhre von der Anode zur Katode fließenden Strom (technische Stromrichtung) nennt man den **Anodenstrom** I_a. Die meisten modernen Elektronenröhren haben eine **Glühkatode,** d. h. einen kurzen Draht, der von einem besonderen **Heizstrom** zum Glühen gebracht wird. Bei der heute vielfach angewandten indirekten Heizung ist der eigentliche Heizdraht von einem dünnen Metallröhrchen umgeben, das mit einer bariumoxidhaltigen Paste bedeckt ist, (s. Glühemission, 43.2.1.). Bei einer bestimmten Temperatur vermag die Katode nur eine bestimmte Höchstmenge an Elektronen abzugeben. Der *Anodenstrom* hat also einen *Höchstwert,* den **Sättigungsstrom** I_{as}.

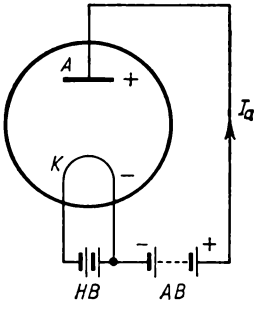


Bild 619. Schaltung einer Diode
K Katode, A Anode, HB Heizbatterie, AB Anodenbatterie, I_a Anodenstrom

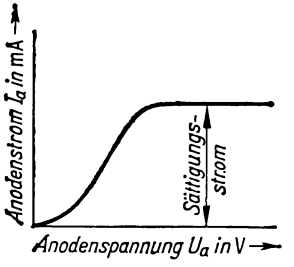
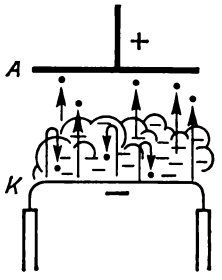


Bild 620. U_a, I_a-Kennlinie einer Elektronenröhre

Bild 621. Wirkung der negativen Raumladungswolke zwischen Katode und Anode



Versuch: Man schalte den Heizstrom einer Gleichrichterröhre ein, lege ein Milliamperemeter in den Anodenstromkreis und messe den Anodenstrom bei schrittweise zunehmender Anodenspannung. Man findet, daß der Anodenstrom ebenfalls zunimmt und bei bestimmter Spannung einen Höchstwert erreicht. Grafisch dargestellt, ergibt sich die in Bild 620 gezeigte Kurve.

Es entsteht nunmehr die Frage, weshalb der Anodenstrom mit steigender Spannung überhaupt zunimmt. Die bei konstanter Heiztemperatur emittierte Elektronenmenge müßte auch von einer *kleinen* Anodenspannung *vollständig* „abgesaugt" werden. Der Grund für die Abhängigkeit des Anodenstroms von der Anodenspannung liegt darin, daß die den Heizdraht umgebenden Elektronen den Draht *positiv* geladen zurücklassen. Es bildet sich zwischen Katode und Anode eine **negative Raumladung** aus (Bild 621). Gegenüber dieser Raumladungswolke ist der Heizdraht positiv geladen; es geht von ihm ein elektrisches **Gegenfeld** aus, in welchem langsame Elektronen sogar wieder zur Katode zurückwandern und das nur von genügend schnellen Elektronen durchstoßen wird. Die von der Anode ausgehenden Feldlinien enden also zum Teil nicht auf der Oberfläche der Katode, sondern in dieser Raumladungswolke. Erst wenn der Sättigungsstrom erreicht ist, wenn also sämtliche von der Katode emittierten Elektronen abgesaugt werden, reicht das Hauptfeld bis an den Heizdraht.
Einfache Dioden werden als **Gleichrichterröhren** geringer Leistung verwendet. Da der Strom nur von der Anode zur Katode fließen kann, wird aus der Wechselspannung eine *pulsierende Gleichspannung*, die im Takte der Wechselspannung schwankt. Man kann den entstehenden Strom als einen reinen Gleichstrom und eine ihm überlagerte Wechselkomponente betrachten.
Für größere Leistungen verwendet man **gasgefüllte Dioden.** Die zur Katode wandernden positiven Ionen neutralisieren die von den Elektronen gebildete Raumladung, wodurch der Anodenstrom wesentlich kräftiger wird.

43.5. Triode (Dreielektrodenröhre)

Die Triode ist eine Röhre, die außer der Katode und Anode noch eine *dritte* Elektrode, das **Gitter,** enthält. Dieses umgibt den Heizdraht in einigem Abstand in Form einer Wendel, während in weiterem Abstand die zylindrische Anode folgt (Bild 622).

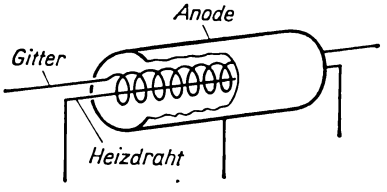


Bild 622. Die 3 Elektroden einer Triode

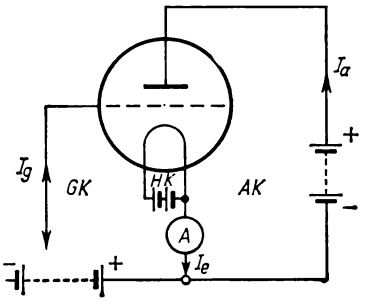


Bild 623. Messung der Gesamtemission I_e bei veränderlicher Gitterspannung
HK Heizkreis, GK Gitterkreis, AK Anodenkreis, I_g Gitterstrom, I_e Gesamtemission, I_a Anodenstrom (technische Stromrichtung)

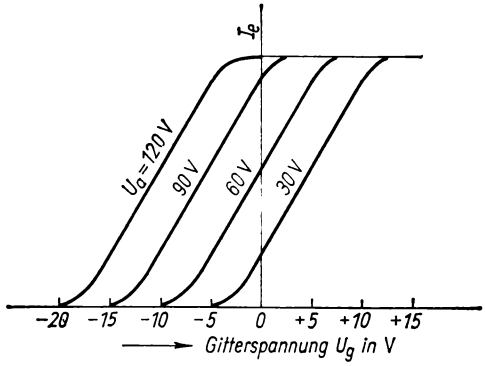


Bild 624. U_g, I_e-Kennlinien bei unterschiedlicher Anodenspannung

Wird das Gitter von *außen* her *negativ* aufgeladen, so stößt es die ankommenden Elektronen ab und vermag den Anodenstrom völlig zu sperren, wenn die negative Gitterspannung groß genug ist. Bei positiver Ladung unterstützt es die Wirkung der Anode, der Anodenstrom wird verstärkt. Man kann also mit Hilfe des Gitters den Anodenstrom weitgehend **steuern** (daher **Steuergitter**), ohne hierfür eine zusätzliche Leistung aufwenden zu müssen. Daher rührt die Verwendung der Triode als **Verstärkerröhre.**

Um den von der Katode emittierten Strom I_e in Abhängigkeit von der am Gitter liegenden Spannung U_g zu messen, wird nach Bild 623 ein Strommesser eingeschaltet. Zwischen Katode und Gitter liegt eine Batterie, so daß sich die Spannung des Gitters gegenüber der Katode in einem Bereich von −10 bis +10 V einstellen läßt. Bei *festliegender* Anodenspannung stellt man nun verschiedene Gitterspannungen U_g ein. Die Meßergebnisse liefern die sogenannte **U_g, I_e-Kennlinie** der Röhre (Bild 624). Das Meßinstrument erfaßt hierbei zwei Teilströme. Der erste Anteil ist der Gitterstrom I_g, der vom Gitter zur Katode fließt. Der zweite Anteil ist der Anodenstrom I_a.

Es gilt demnach:

Gesamter Emissionsstrom I_e = Gitterstrom I_g + Anodenstrom I_a.

43.5.1. Verstärkerwirkung einer Triode

An das Gitter einer Triode werde nun eine kleine *Wechsel*spannung gelegt. Im gleichen Takt muß dann auch der Anodenstrom schwanken. Aus dem Bild 625 der Kennlinie ersieht man, daß die Amplitude des Anodenstroms um so größer wird, je steiler die Kennlinie verläuft.

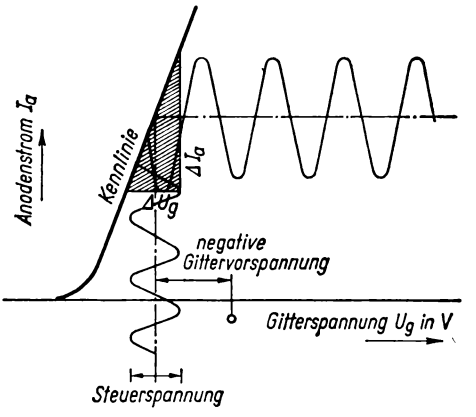


Bild 625. Steuerwirkung einer Verstärkerröhre

Die Verstärkung hängt von der Steilheit der Kennlinie ab.

Die Steilheit der Kennlinie ist gleich dem *Tangens* ihres Steigungswinkels, d. h. gleich dem Verhältnis einer *kleinen Änderung* ΔI_a des Anodenstroms zu einer entsprechenden Änderung ΔU_g der Gitterspannung.

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g}$$

Steilheit (bei konstanter Anodenspannung)

Durch entsprechende Wahl der Gittervorspannung muß man übrigens dafür sorgen, daß sich der Vorgang auf dem *geraden* Teil der Kennlinie abspielt. Andernfalls wird die dem Gitter zugeführte Spannung nicht formgetreu, sondern *verzerrt* übertragen. Liegt im Anodenstromkreis ein äußerer Widerstand R_a, so entsteht in diesem der Spannungsabfall $U_a = I_a R_a$. Hiernach richtet sich die Verstärkung

$$v = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}$$

Spannungsverstärkung v

Hieraus ist zu ersehen, daß der äußere Widerstand R_a möglichst *groß* sein muß.

43.6. Katodenstrahl-Oszillograf

Eine kolbenförmig erweiterte Glasröhre (Bild 626), deren Boden mit einer fluoreszierenden Schicht bedeckt ist, enthält eine Glühkatode und eine durchlochte Anode. Die zur Anode hin beschleunigten Elektronen fliegen *geradlinig* durch das Loch weiter und erzeugen auf dem Boden der Röhre einen hell leuchtenden Fleck. Der Strahl wird nun zwischen zwei kleinen Kondensatorplatten hindurchgeleitet. Legt man an diese eine Wechselspannung, so wird der Strahl je nach der Frequenz langsamer oder

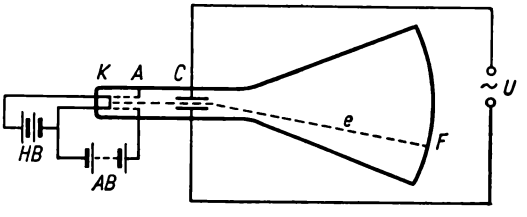


Bild 626. Schema einer BRAUNschen Röhre
K Katode, A Anode mit Öffnung, C Ablenkplatten, F Leuchtfleck, e Elektronenstrahl, U zu untersuchende Wechselspannung, HB Heizbatterie, AB Anodenbatterie

schneller hin- und herbewegt, wodurch sich der Lichtfleck zu einem Strich auseinanderzieht (BRAUNsche Röhre).
Beim **Katodenstrahl-Oszillograph** ist ein zweites, rechtwinklig zum ersten orientiertes Plattenpaar angebracht. Mit Hilfe einer eingelegten Kippspannung wandert dann der Strahl in rasch fortlaufender Wiederholung mit gleichförmiger Geschwindigkeit von links nach rechts über den Schirm. Die zu untersuchende Wechselspannung läßt den Strahl quer zu dieser Richtung schwingen, so daß er auf dem Bildschirm eine genaue Kurve des Vorganges aufzeichnet.
Anstatt der *elektrostatischen* Ablenkung durch Kondensatoren kann man auch die *elektromagnetische* Ablenkung verwenden. Die hierzu notwendigen beiden Spulenpaare werden von außen an den Hals der Röhre gelegt.

44. Wechselstrom

Zur Versorgung der Wirtschaft mit elektrischer Energie wird heute fast ausschließlich **Wechselstrom** verwendet. Der Hauptgrund hierfür ist, daß sich mit Hilfe von Transformatoren die *Spannung* nach Wunsch bequem *verändern* läßt. Je höher die Spannung aber ist, desto geringer werden die Stromwärmeverluste bei der Energieübertragung auf große Entfernungen, da bei gleicher Leistung die Stromstärke entsprechend kleiner ist. Dies ist deswegen wichtig, weil Erzeuger und Verbraucher elektrischer Energie in der modernen Volkswirtschaft weit auseinanderliegen.

Beispiel: Am 10 km entfernten Verbrauchsort soll einer Kupferleitung von 20 mm² Querschnitt eine Leistung von 11 kW bei einer Spannung von 110 V entnommen werden. – Dann muß (335) der Strom $I = \frac{P}{U} = \frac{11000}{110}\,\mathrm{A} = 100\,\mathrm{A}$ fließen. Der Widerstand der Leitung ergibt sich zu $R = \frac{\varrho l}{A} = \frac{0{,}0175 \cdot 20000}{20}\,\Omega = 17{,}5\,\Omega$. Hervorgerufen durch die Wärmeentwicklung in der Leitung, entsteht (336) ein Leitungsverlust von $P_V = I^2R = 100^2 \cdot 17{,}5\,\mathrm{W} = 175\,\mathrm{kW}$. Der Verlust ist somit um ein Vielfaches größer als die Nutzleistung.
Wählt man aber eine Spannung von 5000 V, so beträgt die Stromstärke bei gleicher Nutzleistung nur noch $I = \frac{P}{U} = \frac{11000}{5000}\,\mathrm{A} = 2{,}2\,\mathrm{A}$, und der Leistungsverlust in der Leitung sinkt auf $P_V = I^2R = 2{,}2^2 \cdot 17{,}5\,\mathrm{W} = 85\,\mathrm{W}$. Der Verlust fällt kaum noch ins Gewicht!

44.1. Grundeigenschaften des Wechselstroms

44.1.1. Entstehung einer sinusförmigen Wechselspannung

Eine einfache rechteckige Drahtschleife drehe sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld (Bild 627). Im Gegensatz zum Gleichstromgenerator (Bild 562) sind die beiden Enden der Schleife an zwei *getrennte*, voneinander isolierte **Schleifringe** geführt. An jeden Schleifring legt sich eine Bürste, die den induzierten Strom abnimmt und weiterleitet.
Steht die Leiterschleife anfangs senkrecht zu den Feldlinien, so wird sie vom magnetischen Fluß Φ_{max} durchsetzt. Nach Ablauf der Zeit t soll sie sich nach Bild 628 um

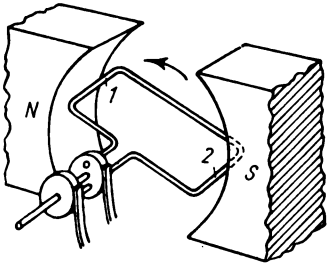


Bild 627. Prinzip des Wechselstromgenerators

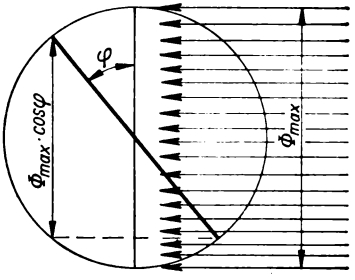


Bild 628. Flußänderung bei Drehung der Leiterschleife

den Winkel φ gedreht haben. Dann ist der durch die Schleife tretende Fluß kleiner geworden und beträgt nur noch

$$\Phi = \Phi_{max} \cos \varphi.$$

Drückt man den Drehwinkel φ als Funktion der Zeit t aus, so ist mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{t}$ (S. 40)

$$\Phi = \Phi_{max} \cos \omega t.$$

Dabei wird nach dem Induktionsgesetz (378) in der Schleife (N = 1) eine Urspannung induziert:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\Phi_{max} \cos \omega t)}{dt}.$$

Die Differentiation ergibt

$$U_{ind} = \omega \Phi_{max} \sin \omega t,$$

d. h., die Spannung U_{ind} schwankt periodisch und sinusförmig zwischen einem Maximalwert U_{max} und dem Wert 0 hin und her (Bild 629).

In einer gleichförmig rotierenden Schleife wird im homogenen Feld eine sinusförmige Spannung induziert.

Der Maximalwert entsteht, wenn auch die Sinusfunktion ihren Größtwert annimmt, d. h., wenn sin $\omega t = 1$ ist. Somit ist

$$U_{max} = \omega \Phi_{max}.$$

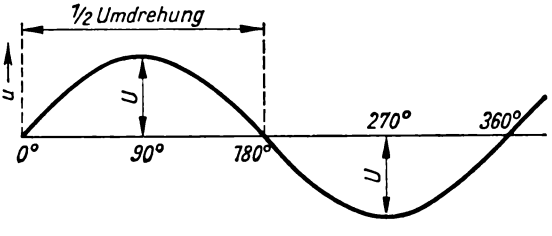


Bild 629. Verlauf der induzierten Spannung während einer Umdrehung der Leiterschleife (1 volle Periode)

Es ist in der Elektrotechnik üblich, *zeitlich veränderliche Größen*, wie in diesem Fall die induzierte Spannung U_{ind}, mit *kleinen Buchstaben* zu bezeichnen. Den Maximalwert U_{max} nennt man den **Scheitelwert** der Spannung. In dieser Schreibweise ist

(402) $\boxed{u = U_{max} \sin \omega t}$ **Momentanwert u der induzierten Wechselspannung**

Die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Schleife bezeichnet man in der Wechselstromtechnik als

(403) $\boxed{\omega = 2\pi f}$ **Kreisfrequenz ω**

f bedeutet hier die *Drehzahl* der Stromschleife. Da der dabei erzeugte Wechselstrom ebenfalls f volle Perioden ausführt, bedeutet f zugleich die **Frequenz der Wechselspannung.**

Die elektrischen Maschinen werden so konstruiert, daß die Wechselspannung stets genau sinusförmig ist. In den gebräuchlichen Netzen wechselt die Spannung in einer Sekunde 100mal ihre Richtung:

Der technische Wechselstrom ist sinusförmig und hat eine Frequenz von meist 50 Hz (50 Perioden je Sekunde).

44.1.2. Wechselstromgenerator

Eine einzelne Leiterschleife erzeugt nur eine geringe Spannung. Um sie zu erhöhen, hat der Anker der technischen Wechselstromerzeuger (Generatoren) Spulen aus vielen Windungen. Da es ferner nur auf die Relativbewegung zwischen Feld und Anker ankommt und die Abnahme starker Ströme von den Schleifringen des Ankers unbequem ist, läßt man bei größeren Maschinen (von etwa 200 kVA an) den *Feld*magneten *rotieren* **(Läufer, Rotor)** und verbindet die Ankerwicklung fest mit dem ringförmigen Gehäuse **(Ständer, Stator)**; daher die Bezeichnung **Innenpolmaschine.** Den **Erregerstrom** für den rotierenden Feldmagneten liefert häufig eine besondere kleine Maschine, die seitlich auf derselben Welle sitzt (Bild 630). Um die für 50 Hz erforderliche hohe Drehzahl ($f = 3000\ ^1/\text{min}$) herabzusetzen, verwendet man statt eines Pol- bzw. Spulenpaares deren mehrere. Bild 632 zeigt eine 4polige (2 Polpaare) Maschine. An jeder der *feststehenden Ankerspulen* wandert abwechselnd ein Nord- und Südpol vorüber, so daß Wechselstrom induziert wird. Je 2 aufeinanderfolgende Spulen haben entgegengesetzten Wicklungssinn, weil sich über der einen ein Nord- und über der anderen zugleich ein Südpol befindet.

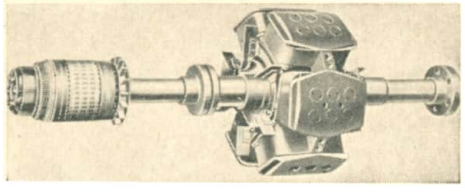


Bild 630. Polrad eines großen Generators von 700 kVA

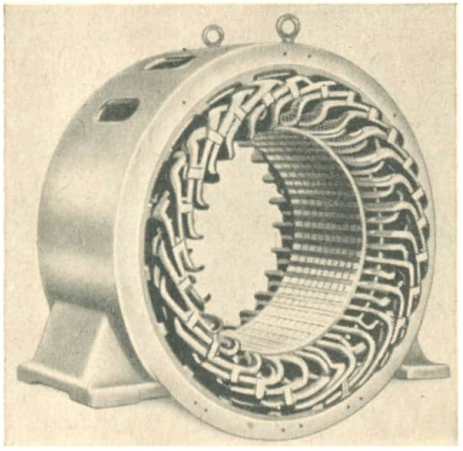


Bild 631. Ständer eines großen Generators von 700 kVA und $n = 1000^1/\text{min}$

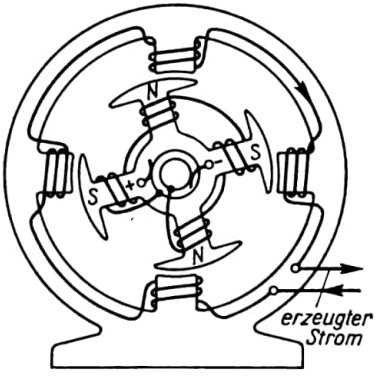


Bild 632. Wechselstrommaschine mit Innenpolen

44.1.3. Mittelwerte von Wechselspannungen und -strömen

Wenn Wechselstrom mit einem Gleichstrominstrument gemessen werden soll, vermag das Meßwerk wegen seiner Trägheit den schnellen Richtungsänderungen nicht zu folgen. Der Zeiger bleibt daher auf dem *Nullstrich* stehen. Da positive und negative Werte jeweils gleich groß sind, ergibt sich:

Der zeitliche Mittelwert über eine volle Periode ist gleich 0.

Man kann aber mittels eines *Gleichrichters* die eine Halbwelle umkehren, so daß die Spannung so verläuft, wie Bild 633 zeigt. Dann wird – abermals wegen der Trägheit des Meßwerkes – der Zeiger eine *mittlere Lage* einnehmen und das **arithmetische Mittel** aller Momentanwerte anzeigen.[1])

Zu seiner Berechnung genügt wegen der Symmetrie der Sinuskurve eine Viertelperiode. *Näherungsweise* erhält man diesen Wert, wenn man die 10 Sinuswerte für 0°, 5°, 15°, 25°, ... 85° addiert und die Summe durch 10 dividiert. Das so erhaltene arithmetische Mittel der Sinuswerte ergibt sich hierbei zu 0,637.

$$U_m = 0{,}637\, U_{max}$$

Arithmetischer Mittelwert über eine halbe Periode

Exakt erhält man das Ergebnis nach folgender Überlegung: Stellt man sich die einzelnen Momentanwerte der Spannung als unendlich schmale Streifchen von der

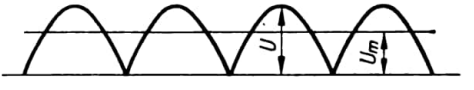
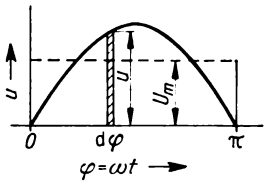


Bild 633. Gleichgerichtete Wechselspannung und ihr arithmetischer Mittelwert

[1]) Die Skalen sind jedoch stets in Effektivwerte umgeeicht

Bild 634. Zur Errechnung des arithmetischen Mittelwertes



Breite $d\varphi$ vor (Bild 634), so ist der Flächeninhalt unter einer Halbwelle der Sinuskurve

$$A_1 = \int_0^{\pi} u \, d\varphi ,$$

d. h. gleich der Summe aller dieser Momentanwerte. Wären nun alle Momentanwerte von gleicher Größe U_m, so würde diese Summe ein Rechteck ausfüllen, dessen Flächeninhalt

$$A_2 = U_m \pi$$

ist. Wenn U_m der arithmetische Mittelwert ist, müssen die Flächeninhalte A_1 und A_2 gleich groß sein. Mit $u = U_{max} \sin \varphi$ folgt dann der Ansatz

$$U_m = U_{max} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi .$$

Die Integration liefert

$$U_m = -\frac{U_{max}}{\pi} \left[\cos \varphi\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} U_{max} .$$

Der arithmetische Mittelwert muß verwendet werden, wenn es sich um die Feststellung von Elektrizitätsmengen oder elektrolytische Messungen handelt (daher auch **elektrolytischer Mittelwert**).

Meistens gibt man aber bei Wechselspannungen und -strömen den *Effektivwert* an:

> **Der Effektivwert eines Wechselstromes entspricht demjenigen Gleichstrom, der die gleiche Leistung (z. B. Wärmewirkung) hervorruft.**

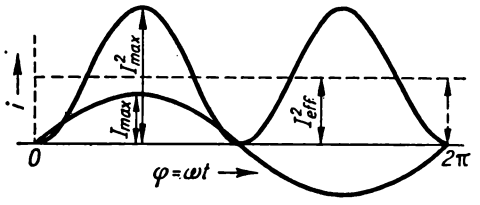
Beispielsweise hängt die Zeigerstellung eines Hitzdrahtinstrumentes von der je Zeiteinheit im Draht entwickelten Wärmemenge ab. Wie die Stromleistung (336) $P = I^2 R$ bzw. (337) $P = \frac{U^2}{R}$ ist auch die je Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge dem jeweiligen Quadrat der Stromstärke bzw. der Spannung proportional.

Wenn aber die Größen I bzw. U schnelle Schwankungen ausführen, kann man nach denjenigen *konstant* zu denkenden Werten I_{eff} bzw. U_{eff} fragen, deren Quadrate I_{eff}^2 bzw. U_{eff}^2 bei gleichem Widerstand R im *zeitlichen Mittel dieselbe Leistung* ergeben. Es kommt daher jetzt darauf an, das arithmetische Mittel aus den *Quadraten* der Momentanwerte zu bilden.

Hierzu faßt man die Quadrate der einzelnen Momentanwerte wieder als schmale Rechteckstreifchen vom Flächeninhalt $I_{max}^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi$ auf und bildet deren Summe unter der nunmehr *quadrierten* Sinuskurve (Bild 635). Die zwischen den Abszissen 0 und 2π unter dieser Kurve liegende Fläche muß also ebenso groß sein wie das entsprechende Rechteck $I_{eff}^2 \cdot 2\pi$. Das führt zu der Gleichung

$$I_{eff}^2 = \frac{I_{max}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

Bild 635. Quadrierte Sinuskurve



und dem Ergebnis

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_{\mathrm{max}}}{\sqrt{2}}.$$

Anstatt diese Rechnung auszuführen, kann man sich auch durch eine einfache geometrische Überlegung helfen. Zunächst denkt man sich die einzelnen Momentanwerte quadriert und bekommt die Kurve (Bild 635)

$$i^2 = I^2_{\mathrm{max}} \sin^2 \varphi .$$

Sie liefert auch für die negative Halbwelle *nur positive Werte* und stellt wieder eine Sinuskurve, jedoch von doppelter Frequenz dar. Den Beweis führt man mit der bekannten Beziehung $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$. Das zeitliche Mittel der quadrierten Sinuskurve entspricht der im Abstand von $\frac{I^2_{\mathrm{max}}}{2}$ zur Zeitachse gezogenen Parallelen; denn ober- und unterhalb dieser Linie liegen gleich große Halbwellen. Man findet also $I^2_{\mathrm{eff}} = \frac{I^2_{\mathrm{max}}}{2}$ und hieraus wiederum

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_{\mathrm{max}}}{\sqrt{2}}$$

oder ausgerechnet

(404) $\boxed{I_{\mathrm{eff}} = 0{,}707\, I_{\mathrm{max}}}$ **Effektivwert I_{eff} des Wechselstromes**

Meist ist der Effektivwert bekannt und nach dem Scheitelwert gefragt.

(405) $\boxed{I_{\mathrm{max}} = I_{\mathrm{eff}}\sqrt{2}}$ **Scheitelwert I_{max} des Wechselstromes**

Selbstverständlich gilt derselbe Faktor auch für eine Wechsel*spannung*. Wenn nicht besonders hervorgehoben, bedeuten die Bezeichnungen I und U im folgenden stets die meist praktisch verwendeten *Effektivwerte*.

Beispiele: 1. Berechne den Scheitelwert der mit 220 V angegebenen Spannung des Wechselstromnetzes. – Es ist $U_{\mathrm{max}} = U_{\mathrm{eff}}\sqrt{2} = \underline{311\ \mathrm{V}}$.

2. Ein Kondensator trägt den Vermerk „Prüfspannung 500 V". Welche Wechselspannung darf höchstens angelegt werden? – Da die Prüfung mit Gleichspannung erfolgt, ist die Spannung von 500 V der Scheitelwert der Wechselspannung und ihr Effektivbetrag

$$U_{\mathrm{eff}} = 500\ \mathrm{V} \cdot 0{,}707 = \underline{353{,}5\ \mathrm{V}}.$$

44.2. Widerstände im Wechselstromkreis

44.2.1. Rein ohmscher Widerstand

Da es hinsichtlich des Energieumsatzes (Wärmewirkung) auf die Stromrichtung nicht ankommt, ist die Wirkung wie bei reinem Gleichstrom. Elektrische Glühlampen und Heizöfen funktionieren mit *beiden Stromarten* in genau *gleicher* Weise.

Im ohmschen Widerstand verhält sich Wechselstrom wie Gleichstrom.

Aus diesem Grunde berechnet sich auch der Widerstand wie beim Gleichstrom.

(406) $\boxed{R = \frac{U}{I}}$ **Ohmscher Widerstand *R***
(Wirkwiderstand)

Wenn die Spannung sinusförmig schwankt, ändert sich auch der Strom im *gleichen Takt* mit:

(407) **Strom und Spannung liegen beim ohmschen Widerstand in gleicher Phase.**

Zeichnet man die Strom- und Spannungskurve, so liegen daher die *Maxima* beider Kurven stets an derselben Stelle (Bild 636).

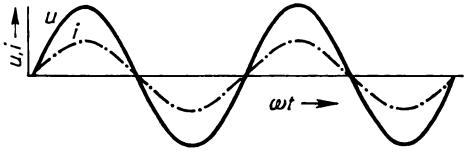


Bild 636. Spannung und Strom im rein ohmschen Widerstand

44.2.2. Induktiver Widerstand

Eine Wechselspannung u liege an einer *Spule*, deren ohmscher Widerstand so klein sei, daß er vernachlässigt werden kann. Bei *Gleichspannung* würde das einen überaus starken Strom ergeben, die Spule würde den Stromkreis *praktisch kurzschließen*. Für die Wechselspannung entsteht aber ein beträchtlicher Widerstand. Wegen der Selbstinduktion und der raschen Stromänderungen wird nämlich ständig eine Urspannung induziert, die von der Klemmenspannung u *überwunden* werden muß. Es ist also $u = -E_{\mathrm{ind}}$.

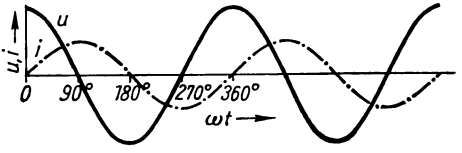
Diese in den Windungen der Spule induzierte Urspannung berechnet sich nach dem Induktionsgesetz (378) zu

$$E_{\mathrm{ind}} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

In Verbindung mit dem Selbstinduktions-Koeffizienten (380) $L = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i}$ ergibt das

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Bild 637. Spannung und Strom im rein induktiven Widerstand



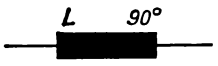


Bild 638. Schaltzeichen für rein induktiven Widerstand

Dabei ist der Differentialquotient

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(I_{\max} \sin \omega t)}{\mathrm{d}t} = I_{\max}\omega \cos \omega t = I_{\max}\omega \sin (\omega t + 90°),$$

und schließlich der **Momentanwert der Spannung** u

$$u = I_{\max}\omega L \sin (\omega t + 90°).$$

Dieser Ausdruck läßt erkennen, daß die an die Spule gelegte *Spannung u dem Strom i* um 90°, d. h. um eine Viertelperiode, **vorauseilt.** Wenn die Spannung ihren positiven Scheitelwert hat, ist der Strom gleich Null (Bild 637).

(408) **Im rein induktiven Widerstand eilt $\frac{\text{die Spannung dem Strom}}{\text{der Strom der Spannung}}$ um eine Viertelperiode $\frac{\text{voraus}}{\text{nach}}$.**

Oder kürzer ausgedrückt:

Zwischen Strom und Spannung besteht eine Phasenverschiebung von 90°.

Zur Zeit $t = 0$ erhält man $\sin (\omega \cdot 0 + 90°) = 1$ und damit

(409) $\boxed{U_{\max} = I_{\max}\omega L}$ **Scheitelwert $U_{\max}$ der Spannung**

Vergleicht man dies mit dem OHMschen Gesetz $U = IR$, so findet man als Widerstandsgröße

(410) $\boxed{X_L = \omega L}$ **induktiver Widerstand X_L**

(induktiver Blindwiderstand),

mit dessen Hilfe sich der Strom

$$I = \frac{U}{\omega L}$$

berechnen läßt. Da sich Scheitel- und Effektivwert nur um den festen Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden, gelten diese Ausdrücke ebenso für die Effektivwerte.
Man ersieht aus $X_L = \omega L$, daß bei *großer* Frequenz und Induktivität auch der *Widerstand* entsprechend *zunimmt.* Bei sehr hoher Frequenz kann eine Spule den

Strom praktisch vollkommen abriegeln. Der Vorteil einer solche **Drosselspule** ist, daß sie im Gegensatz zu einem gewöhnlichen ohmschen Widerstand keine nennenswerte Energie in Wärme umsetzt und daher keinen Leistungsverlust hervorruft.

Beispiel: An einer Spule der Induktivität $L = 0{,}05$ H liegt eine Wechselspannung mit dem Effektivwert von 15 V und 50 Hz. Wie groß sind der induktive Widerstand und der fließende Strom? ($f = 50$ Hz) –

Der induktive Widerstand ist nach (410) $X_L = \omega L = 314^1/\text{s} \cdot 0{,}05\ \text{Vs/A} = \underline{15{,}7\ \Omega}$.

Nach (409) ist $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{\omega L} = \dfrac{15\ \text{Vs A}}{314 \cdot 0{,}05\ \text{Vs}} = \underline{0{,}96\ \text{A}}$.

44.2.3. Kapazitiver Widerstand

Eine Wechselspannung u liege an einem *Kondensator*. Einem Gleichstrom würde er den Weg völlig versperren, da das Dielektrikum ein Isolator ist. Bei *Wechsel*strom ist dies aber *nicht* der Fall. Der Kondensator wird beim Anwachsen der Spannung jedesmal geladen und während des Abklingens der Spannung wieder entladen. So fließt dem Kondensator während des Ladevorganges nach (355) in jedem Augenblick die Elektrizitätsmenge

$$\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}u$$

zu. Das ergibt einen momentanen Strom von

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Ist die angelegte Spannung sinusförmig, d. h. $u = U_{\max} \sin \omega t$, so ergibt die Differentiation wie vorhin in gleicher Weise

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U_{\max}\omega \cos \omega t = U_{\max}\omega \sin(\omega t + 90°).$$

Somit ist der **Momentanwert des Stromes:**

$$i = U_{\max}\omega C \sin(\omega t + 90°)$$

Man ersieht hieraus:

(411) **Im rein kapazitiven Widerstand eilt** $\dfrac{\text{der Strom der Spannung}}{\text{die Spannung dem Strom}}$ **um eine Viertelperiode** $\dfrac{\text{voraus}}{\text{nach}}$ (Bild 639).

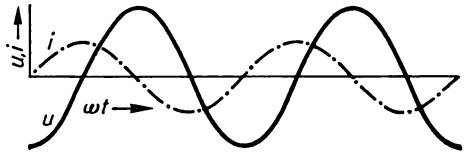


Bild 639. Spannung und Strom im rein kapazitiven Widerstand

Dies steht ganz im Einklang damit, daß der Höchstwert der Spannung in einem Kondensator erst dann erreicht wird, wenn der Ladevorgang beendet ist, d. h. der Strom zu fließen aufgehört hat.

Für $t = 0$ ergibt sich

(412) $\boxed{I_{max} = U_{max}\omega C}$ **Scheitelwert des Stromes I_{max}**

(413) $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$ **kapazitiver Widerstand X_C (kapazitiver Blindwiderstand)**

Für *hohe* Frequenzen und *große* Kapazitäten wird dieser Widerstand sehr *klein*. Ein Kondensator stellt für den Wechselstrom ein u. U. nur geringfügiges Hindernis dar. Auch dieser Widerstand verzehrt keine Energie.

Beispiele: Welchen Widerstand hat ein Kondensator von 2 μF für eine Frequenz von 50 Hz, und welcher Strom fließt bei einer Spannung von 220V? – $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6 sV}{314 \cdot 2\,As} =$ $= \underline{1592\ \Omega}$; $I = \frac{U}{X_C} = \frac{220\,V}{1592\,\Omega} = \underline{0{,}138\,A}$.

2. Legt man parallel zu einem hochohmigen Lautsprecher einen Kondensator von einigen tausend Picofarad (1 pF = 10^{-12} F), so wird die Klangfarbe merklich dunkler. Der Kondensator hat für hohe Frequenzen einen nur kleinen Widerstand und wirkt für diese wie ein Kurzschluß.

44.2.4. Addition phasenverschobener Spannungen und Ströme

Ein *ohmscher* und ein *induktiver* Widerstand seien *parallelgeschaltet*. Beide Teilströme vereinigen sich dann in den Verzweigungspunkten wieder und ergeben den im Hauptstromkreis fließenden Gesamtstrom. Bei *Gleichstrom* wäre er gleich der *algebraischen* Summe der beiden Zweigströme. Nunmehr sind aber die beiden Zweigströme nach (408) phasenverschoben. Es fragt sich, wie in diesem Fall die Addition zu geschehen hat und welche Phasenverschiebung im Hauptstromkreis zu erwarten ist.

Dem Knotenpunkt fließen auf jeden Fall zwei Ströme mit verschiedener Phasenlage zu, die dann zusammen als *ein einziger* Strom abfließen müssen; denn in einem Leiter können nicht gleichzeitig zwei verschiedene Ströme vorhanden sein. Dieselbe Frage taucht auf, wenn in einer Reihenschaltung verschiedene phasenverschobene Teilspannungen auftreten, die zusammen eine einzige Gesamtspannung ergeben müssen.

Die Lösung findet sich, wenn man diese Wechselgrößen als Schwingungen auffaßt. Dann werden sich beim Zusammentreffen diese Teilschwingungen überlagern. Wie das im einzelnen geschieht, wurde bereits (9.3.1.) behandelt: Der jeweils *resultierende Momentanwert* muß gleich der Summe der einzelnen Momentanwerte sein.
Grafisch zeigt dies das **Liniendiagramm.** Die resultierende Kurve (Bild 640) erhält man, indem man die Ordinaten *Punkt für Punkt addiert* und alle Endpunkte miteinander verbindet. Der tatsächliche Verlauf des Gesamtstromes stellt offenbar wieder eine Sinuskurve dar.

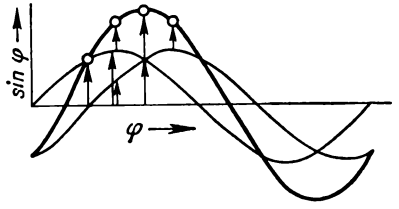


Bild 640. Punktweise Addition zweier Sinuskurven

Ein anderer Weg ergibt sich, wenn man daran denkt, daß die einzelnen Ordinaten einer Sinuskurve durch *Projektion* eines *gleichförmig rotierenden Zeigers* auf die senkrechte Achse entstehen. Rotieren 2 Zeiger, die einen Winkel φ miteinander bilden, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so erzeugen sie 2 phasenverschobene Sinuskurven. Das Augenblicksbild solch rotierender Zeiger nennt man ein **Zeigerdiagramm** (Bild 641).
Bildet man aus den beiden Zeigern das Parallelogramm, so stellt dessen Diagonale wiederum einen Zeiger dar. Dieser erzeugt, fest mit den beiden ersten Zeigern verbunden, rotierend die resultierende Kurve des Liniendiagramms.

Der punktweisen Addition im Liniendiagramm entspricht die Konstruktion des diagonalen Zeigers im Zeigerdiagramm.

Da die Diagonale bei ihrer Rotation wiederum eine Sinuskurve erzeugt, gilt:

Die Addition zweier sinusförmiger Wechselgrößen gleicher Frequenz ergibt wiederum eine Sinuskurve.

Ebenso ist unmittelbar zu erkennen:

Die Phasenverschiebung φ der resultierenden Kurve ist gleich dem Winkel, den die Diagonale im Zeigerdiagramm mit der einen Komponente bildet.

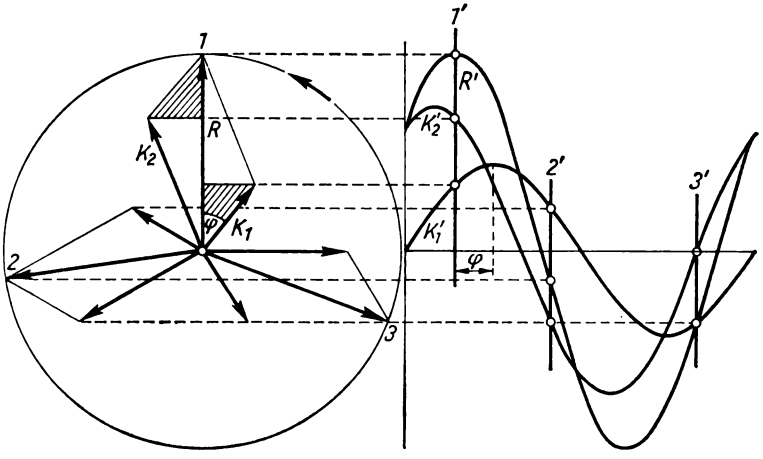


Bild 641. Addition von Zeigern. Die Zeiger K_1 und K_2 erzeugen beim Rotieren die entsprechenden Sinuskurven K_1' und K_2'. Der resultierende Zeiger ergibt die Sinuskurve R. Jedem Schnitt $1' \cdots 3'$ durch das Liniendiagramm entspricht eine bestimmte Stellung $1 \cdots 3$ des im ganzen rotierenden Zeigerdiagramms

Weil man aus dem Zeigerdiagramm die meist allein interessierenden Scheitelwerte und die Phasenverschiebung sofort ablesen kann, gibt man dieser Versinnbildlichung bei weitem den Vorzug. Dabei kann man sogar die Vorstellung, daß das Zeigerdiagramm in Wirklichkeit rotiert, beiseite lassen. Ebenso kann man ohne weiteres *Effektiv*werte eintragen, obwohl die Zeiger in Verbindung mit dem Liniendiagramm eigentlich nur Scheitelwerte bedeuten sollten. Üblicherweise zeichnet man das Parallelogramm (meist genügt bereits ein Teildreieck) so, daß *eine der beiden Komponenten senkrecht oder waagerecht* liegt.

Zusammenfassend gilt demnach als wichtigste Regel:

Wechselspannungen und -ströme werden im Zeigerdiagramm nicht algebraisch, sondern geometrisch addiert.

Beispiel: Zwei Spannungen gleicher Frequenz von den Effektivwerten 75 bzw. 110 V sind um 60° gegeneinander verschoben. Ermittle den Effektivwert der Gesamtspannung und die Phasenwinkel gegenüber den beiden Komponenten auf zeichnerischem Wege. – Das gezeichnete Parallelogramm nebst den maßstäblich ablesbaren Werten zeigt Bild 642.

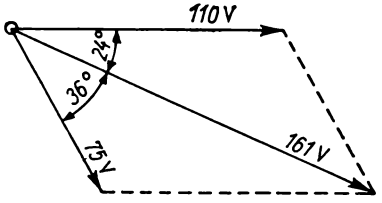


Bild 642. Addition zweier phasenverschobener Spannungen

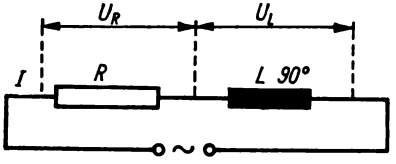


Bild 643. Ohmscher und induktiver Widerstand, in Reihe geschaltet

44.2.5. Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen

1. Ohmscher Widerstand und Induktivität in Reihe (Bild 643). Im ohmschen Widerstand sind Spannung und Strom in gleicher Phase, während in der Induktivität die *Spannung* dem *Strom* um 90° *vorauseilt*. Durch beide Widerstände fließt aber offenbar derselbe Strom I, der in jedem Einzelwiderstand einen Spannungsabfall hervorruft. Wenn es sich um *Gleich*strom handeln würde, wäre die gesamte an der Schaltung liegende Spannung gleich der algebraischen Summe der Teilspannungen. Hier muß aber bei der Addition der Teilspannungen berücksichtigt werden, daß zwischen den beiden Spannungswellen eine *Phasenverschiebung* von 90° vorliegt.
Es handelt sich demnach um die Addition zweier gegeneinander verschobener Sinusschwingungen U_R und U_L. Man erledigt daher die Summation am bequemsten nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode, d. h. durch Zeichnen des *Zeigerdiagramms*.
Hierbei braucht man nicht mehr daran zu denken, daß das Zeigerdiagramm eigentlich rotiert, da es darauf ankommt festzustellen, welchen Wert die *resultierende Spannung* hat und welchen Phasenwinkel diese Gesamtspannung mit dem Strom bildet. Man zeichnet daher 2 rechtwinklig zueinander stehende Zeiger mit den Beträgen U_R und

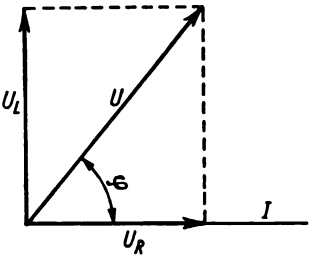


Bild 644. Teilspannungen und Gesamtspannung als Zeigerdiagramm zur Schaltung in Bild 643

U_L (Bild 644). Als *gemeinsame Bezugsrichtung* dieses **Spannungsdiagramms** nimmt man den Strom I und zeichnet U_R in die gleiche Richtung wie die von I. Hiermit kommt zum Ausdruck, daß U_R und I in gleicher Phase liegen. Das entstehende Parallelogramm (hier ein Rechteck) liefert dann die

gesamte Klemmenspannung:

(414) $$\boxed{U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$ (bei Reihenschaltung von R und L).

Die Gesamtspannung einer Reihenschaltung ist gleich der geometrischen Summe der Teilspannungen.

Die letzte Quadratwurzel mit den beiden Widerstandsgrößen wird als *Scheinwiderstand* bezeichnet:

(415) $$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$ **Scheinwiderstand Z** (Impedanz)

Auch hier sieht man, daß die Widerstände nicht algebraisch, sondern geometrisch addiert werden.
Um den **Phasenwinkel** zu finden, mit dem die Gesamtspannung dem durch die Anordnung fließenden Strom voraneilt, betrachte man die geometrische Lage des Zeigers U gegenüber der Richtung von I.

(416) $$\boxed{\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}}$$ **Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom**

Dieser Fall liegt praktisch bei jeder von Wechselstrom durchflossenen **Spule** vor. Die so in 44.2.2. gemachte Annahme einer reinen Induktivität trifft in Wirklichkeit niemals zu. Stets haben die Drahtwindungen einen ohmschen Widerstand. Man kann sich leicht vorstellen, daß in einer solchen Spule ohmscher und induktiver Widerstand gewissermaßen in Reihe liegen. Genaugenommen handelt es sich hier um eine gedachte **Ersatzschaltung,** da sich ohmscher und induktiver Widerstand nicht räumlich auseinanderhalten lassen.

Beispiele: 1. Man lege eine Spule mit Eisenkern und einen induktionsfreien Widerstand in Reihe an eine Wechselspannung. Mißt man die beiden Teilspannungen einzeln, so ist deren algebraische Summe *größer* als die gesamte Klemmenspannung.
2. Legt man an eine Spule die Wechselspannung von 110 V (50 Hz), so fließt ein Strom von 0,4 A; bei einer gleich großen Gleichspannung beträgt der Strom dagegen 3 A. Welchen ohmschen Widerstand und welche Induktivität hat die Spule? – Der ohmsche Widerstand ergibt sich aus dem Gleichstromversuch mit $R = \frac{U}{I} = \frac{110\,\text{V}}{3\,\text{A}} = 36{,}67\ \Omega$. Der Schein-

widerstand beträgt beim Wechselstromversuch $Z = \frac{U}{I} = \frac{110\,\text{V}}{0{,}4\,\text{V}} = 275\ \Omega$. Nach (415) erhält man

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{275^2 - 36{,}67^2}}{314}\,\text{H} = \underline{0{,}868\,\text{H}}.$$

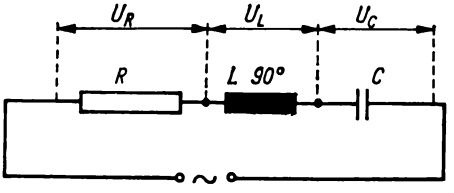


Bild 645. Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand in Reihe geschaltet

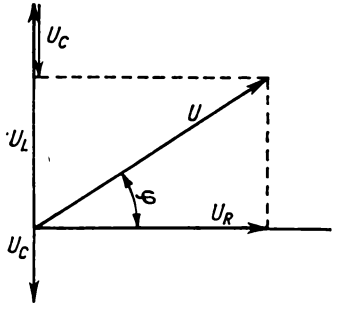


Bild 646. Teilspannungen und Gesamtspannung zur Schaltung in Bild 645

2. Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand in Reihe (Bild 645). In diesem Fall sind 3 Teilspannungen zu addieren. Es ist dabei zu bedenken, daß die kapazitive Teilspannung $\frac{I}{\omega C}$ nach (412) dem Strom um 90° nacheilt und von der genau entgegengerichteten Spannung $I\omega L$ zu subtrahieren ist. Wie das grafisch im Zeigerdiagramm geschieht, zeigt Bild 646. Es ist dann

(417) $$\boxed{U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ **gesamte Klemmenspannung U** (bei Reihenschaltung von R, L und C)

Die Quadratwurzel ist der *Scheinwiderstand* der ganzen Anordnung. Natürlich kann es auch vorkommen, daß $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ oder $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ ist.

44.2.6. Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen

Vom Gleichstrom weiß man, daß bei parallel liegenden Widerständen sich die Ströme addieren. Hier ist jedoch wiederum zu beachten, daß bei vorhandener Phasenverschiebung nur *geometrisch addiert* werden darf.

1. Ohmscher Widerstand und Kapazität parallel (Bild 647). An beiden Schaltgliedern liegt offenbar dieselbe Spannung U. Mit ihr liegt der Strom I_R in gleicher Phase,

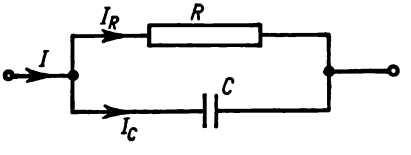


Bild 647. Ohmscher und kapazitiver Widerstand parallelgeschaltet

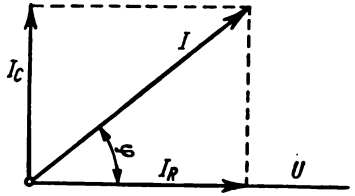


Bild 648. Teilströme und Gesamtstrom zur Schaltung in Bild 647

weshalb dessen Richtung im Zeigerdiagramm (Bild 648) mit der Bezugsrichtung U zusammenfällt. Da aber der durch den Kondensator fließende Strom I_C der Spannung U um 90° vorauseilt (411), weist sein Zeiger senkrecht nach oben. Aus dem so gezeichneten **Stromdiagramm** liest man unmittelbar ab:

(418) $$\boxed{I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}}$$ **Gesamtstrom I**

(bei Parallelschaltung von R und C)

(419) $$\boxed{\tan\varphi = \omega RC}$$ **Phasenwinkel φ zwischen Gesamtstrom und Spannung**

Begründung: Der Tangens von φ ist gegeben durch $\frac{I_C}{I_R} = \frac{U\omega C}{U/R}$.

Jeder Kondensator mit festem Dielektrikum läßt sich als eine Kapazität mit parallel liegendem Widerstand R auffassen. Bei den hochwertigen Isolierstoffen spielt jedoch der Isolationswiderstand nur eine untergeordnete Rolle. Vielmehr fallen die **dielektrischen Verluste** ins Gewicht. Sie werden durch die in den Molekülen des Dielektrikums sehr rasch vor sich gehenden *Ladungsverschiebungen* (Verschiebungspolarisation, S. 431) verursacht. Diese wirken sich letzten Endes so aus, als sei ein energieverzehrender ohmscher Widerstand vorhanden.
Da trotz allem der Phasenwinkel nur wenig von 90° abweicht und der zu großen Tangenswerten gehörige Winkel in den Tafeln nur ungenau ablesbar ist, verwendet man den reziproken Wert

(420) $$\boxed{\tan\delta = \frac{1}{\omega RC}}$$ **Verlustwinkel δ (oder Verlustfaktor)**

Hierunter versteht man den *Komplementwinkel* δ zum Phasenwinkel φ.
Er ist von der Frequenz abhängig und stellt ein wichtiges Gütemerkmal von Isolierstoffen dar (s. Tabelle S. 398).

2. Induktiver und kapazitiver Widerstand parallel (Bild 649). Die beiden zu addierenden Ströme haben *entgegengesetzte* Phasenlage, da der eine um 90° nacheilt und der andere um 90° voreilt. Sie können daher einfach voneinander *subtrahiert* werden. Das Zeigerdiagramm nach Bild 650 ergibt

(421) $$\boxed{I = I_L - I_C}$$ **Gesamtstrom I** (bei Parallelschaltung von L und C)

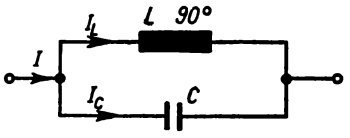


Bild 649. Induktiver und kapazitiver Widerstand parallelgeschaltet

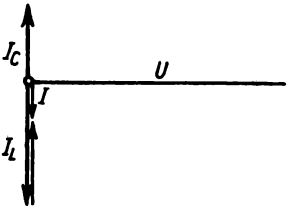


Bild 650. Teilströme zur Schaltung in Bild 649

Setzt man $I_L = \frac{U}{\omega L}$ und $I_C = U\omega C$, so ergibt sich

$$I = U\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \tag{422}$$

44.2.7. Resonanz im Wechselstromkreis

1. Reihen- (oder Spannungs-) resonanz. Es sei nochmals die Reihenschaltung von Widerständen nach (417) betrachtet. Die Quadratwurzel in dem Ausdruck

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

ist der Scheinwiderstand Z. Wenn hierin der Klammerausdruck $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ gleich 0 wird, hat Z seinen *kleinst*möglichen Wert. Wenn also $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist, verbleibt allein der ohmsche Widerstand der Anordnung, und der Strom I steigt auf ein *Maximum*. Diesen Fall der Gleichheit der beiden Blindwiderstände nennt man **Resonanz.** Da dann der gesamte Blindwiderstand gleich Null ist, hängt die Stromstärke nur noch vom Wirkwiderstand R ab. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist aufgehoben.

Reihenresonanz:
Strommaximum durch Kompensation der Blindwiderstände.

Versuch: Eine Spule von 250 Windungen auf U-förmigem Kern mit verschiebbarem Anker liegt in Reihe mit einem Kondensator von 10 µF und einem Strommesser (Bild 651). Bei einer Wechselspannung von etwa 20···30 V (50 Hz) fließt ein bestimmter Strom. Durch Hin- und Herschieben des aufliegenden Ankers verändert man die Induktivität der Spule und findet bald eine Stelle, wo der Strommesser ein Maximum anzeigt. In diesem Fall liegt Resonanz vor.

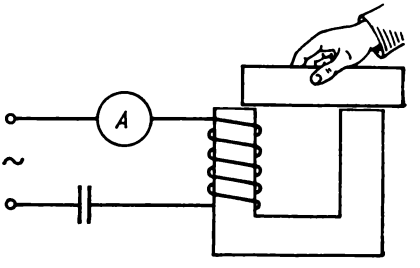


Bild 651. Versuch zur Reihenresonanz

Besonders wichtig ist zu wissen, bei welcher *Frequenz* Resonanz eintritt, wenn die beiden Schaltglieder L und C *fest vorgegeben* sind. Aus der bereits angeführten Gleichung

(423) $$\boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C}}$$ **Resonanzbedingung**

ergibt sich

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und wegen $\omega = 2\pi f$

(424) $$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$ **Resonanzfrequenz f_r**

Anstatt *Reihenresonanz* wird auch häufig der Ausdruck *Spannungsresonanz* verwendet, weil in diesem Fall an der Induktivität und Kapazität *sehr hohe Spannungen* entstehen, die sich wegen ihrer entgegengesetzten Phasenlage zwar gegenseitig aufheben, aber Spule und Kondensator einzeln hoch belasten.

Beispiel: Ein Kondensator von 1 μF und eine Spule von 2 H und 50 Ω liegen in Reihe an einer Spannung von 100 V. Berechnet man nach der eingangs erwähnten Formel die Stromstärke für zunehmende Frequenzen von 100 ··· 120 Hz und stellt die Stromstärke in Abhängigkeit von der Frequenz grafisch dar, so entsteht die in Bild 652 angegebene Kurve (Resonanzkurve). Die Resonanzfrequenz ergibt sich nach (424) zu $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\cdot 10^{-6}}}$ Hz = = 112 Hz in Übereinstimmung mit dem Kurvenbild. Der Resonanzstrom beträgt $I_r = \frac{100\text{ V}}{50\ \Omega} = 2$ A. Am Kondensator liegt die Spannung $U_r = \frac{I}{\omega C} = \frac{2\cdot 10^6}{2\pi\,112\cdot 1}\text{V} = \underline{2842\text{V}}$.

Aus diesem Beispiel ersieht man, daß im Resonanzfall an den einzelnen Schaltgliedern gefährlich hohe, die Klemmenspannung weit übersteigende Spannungen auftreten können. Zerstörungen von Kabeln und Maschinen sind die häufige Folge.

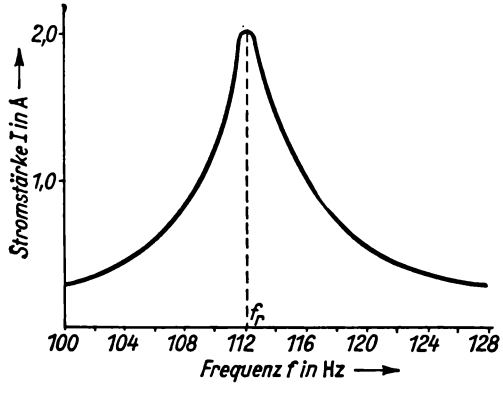


Bild 652. Spannungsresonanz. Verlauf des Stromes bei zunehmender Frequenz

2. Parallel- (oder Strom-) resonanz. Ein ganz ähnlicher Resonanzfall kann auch eintreten, wenn Induktivität und Kapazität *parallelgeschaltet* sind. Nach (422) ergab sich dafür die Stromstärke

$$I = U\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

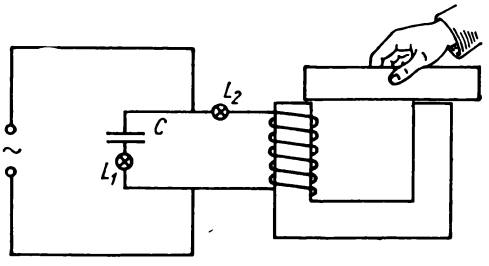


Bild 653. Versuch zur Parallelresonanz

Aufhebung der Phasenverschiebung bedeutet auch hier wieder, daß die Widerstände ωL und $\frac{1}{\omega C}$ gleich groß sein müssen. Wenn dies der Fall ist, verschwindet der Klammerausdruck, und der Strom I wird gleich Null.
In Wirklichkeit kann dies kaum vorkommen, da infolge des stets vorhandenen ohmschen Widerstandes auch im Resonanzfall noch ein Reststrom fließt:

Parallelresonanz: Stromminimum durch Kompensation der Blindwiderstände.

Versuch: Mit einer ähnlichen wie vorhin beschriebenen Anordnung kann man auch die Stromresonanz sinnfällig vorführen (Bild 653). Man verwendet hierbei eine Spule von 1000 Windungen und einen dazu parallelgeschalteten Kondensator von 5 µF (Wechselspannung etwa 80 V). In den Resonanzkreis sind noch 2 Lämpchen eingeschaltet. Bei aufgelegtem Anker leuchtet zunächst nur Lämpchen L_1, und ein in den Hauptstromkreis geschaltetes Amperemeter zeigt einen Strom an. Wenn man den Anker verschiebt, geht der Ausschlag des Strommessers bei günstigster Stellung fast bis auf 0 zurück, während das Lämpchen L_2 ebenfalls aufleuchtet. Am Stromminimum in der Zuleitung erkennt man den Resonanzfall.

Im Gegensatz zur Reihenresonanz hat hier der *Strom* in der äußeren Zuleitung ein *Minimum*, da der Widerstand des Resonanzkreises dabei einen Höchstwert hat. Wegen derselben Resonanzbedingung (423) ergibt sich auch dieselbe Resonanzfrequenz (424).

Es ergibt sich demnach die Gegenüberstellung:

Reihenresonanz	*Parallelresonanz*
(Spannungsresonanz)	(Stromresonanz)
Die Teil*spannungen* an den Blindwiderständen sind *überhöht* (gegenüber der angelegten *Spannung*).	Die Teil*ströme* in den Blindwiderständen sind *überhöht* (gegenüber dem einfließenden *Strom*).
Der *Strom* durchläuft die bekannte Resonanzkurve (bei konstanter Eingangs*spannung*).	Die *Spannung* durchläuft die bekannte Resonanzkurve (bei konstantem Eingangs*strom*).

44.3. Leistung im Wechselstromkreis

44.3.1. Wirkleistung

Wenn zur Aufrechterhaltung eines elektrischen Stromes überhaupt eine Leistung erforderlich ist, so liegt das nur an der dabei erzeugten *Stromwärme* oder anderen frei werdenden Energiearten (mechanische Energie, Licht, Schall usw.).

Die Leistung berechnet sich wie beim Gleichstrom als Produkt aus Spannung U und Strom I. Dabei sind für U und I die von den üblichen Meßinstrumenten angezeigten Effektivwerte einzusetzen; denn nach 44.1.3. ist ja der Effektivwert des Wechselstromes derjenige, der die gleiche Leistung wie ein gleich starker Gleichstrom hervorbringt.
Im rein ohmschen Widerstand wird daher eine „wirkliche" Leistung verbraucht und in Form von Wärme nach außen abgegeben. Man berechnet sie nach Gleichung (335) als

(425) $\boxed{P_w = UI}$ **Wirkleistung P_w eines ohmschen Widerstandes**

Hervorgehoben sei nochmals die physikalische Bedeutung des Ausdruckes:

Die Wirkleistung ist die in nichtelektrische Energieformen umgewandelte elektrische Leistung.

44.3.2. Blindleistung

Ganz anders liegt der Fall aber bei einer Spule oder einem Kondensator. Denkt man sich die Spule im idealen Fall aus widerstandslosem Draht gewickelt, so ist zwar der Widerstand für Gleichstrom gleich Null, nicht aber für Wechselstrom. An den Spulenenden liegt eine Spannung, die dem Strom um 90° vorauseilt und die mit einem passenden Instrument jederzeit gemessen werden kann. Multipliziert man diese Spannung mit dem Strom, so stellt das Produkt UI formal zwar auch eine Leistung dar; man sucht aber vergeblich nach der ihr entsprechenden, äquivalenten anderen Energiemenge; denn diese aus widerstandslosem Draht bestehende Spule erzeugt keinerlei Wärme.
Ähnlich verhält sich ein idealer, d. h. verlustloser Kondensator, der keinen Gleichstrom passieren läßt, wohl aber Wechselstrom. Auch hier kann man das Produkt UI bilden, obwohl der Kondensator keinerlei Leistung in Form von Wärme nach außen abgibt.
Wie das zustande kommt, zeigt Bild 654, das die um 90° gegenüber der Spannung versetzte Stromwelle zeigt. Für jeden Punkt des Liniendiagramms ist das Produkt der Momentanwerte ui gebildet. Je eine Halbwelle der neu entstehenden Sinuswelle (sie ist ein Bild des Leistungsverlaufes) liegt im positiven und negativen Bereich des Diagramms. Im ersten Fall nimmt der Kondensator *Energie* zum Aufbau seines elektrischen Feldes auf, im zweiten gibt der Kondensator die gleiche Energiemenge wieder ab.
Zwischen Kondensator und Spannungsquelle bzw. einer Spule und dem übrigen Stromkreis *pendelt die Energie hin und her*, ohne selbst verbraucht zu werden.

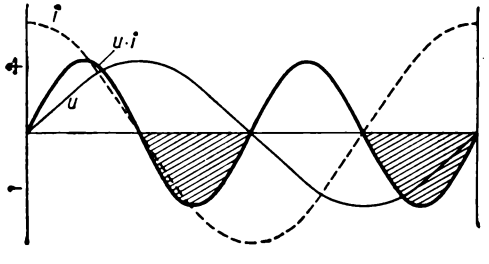


Bild 654. Verlauf der Blindleistung im Kondensator

In diesen beiden Fällen reiner Kapazität bzw. Induktivität nennt man das Produkt UI daher die *Blindleistung:*

$$\boxed{P_b = UI}$$ **Blindleistung P_b eines kapazitiven oder induktiven Widerstandes**

Um Verwechslungen mit der Wirkleistung (Watt) zu vermeiden, wird die Blindleistung in **var**[1]) angegeben.
Spule und Kondensator verbrauchen also im idealen Fall keine Wirkleistung. Die Blindleistung tritt nach außen hin überhaupt nicht in Erscheinung, zu ihrer Erzeugung ist im zeitlichen Mittel kein Energieaufwand nötig.

44.3.3. Wechselstromleistung im allgemeinen Fall

Geht man von der Spannung U aus, so kann der Strom I im allgemeinen um einen bestimmten Winkel φ gegenüber U verschoben sein. Im rein ohmschen Widerstand ist die Verschiebung des Stromes $\varphi = 0$. Man spricht dann von reinem **Wirkstrom** I_w. Wenn im Fall der idealen Spule oder des verlustlosen Kondensators der Strom um den Winkel $\varphi = 90°$ gegenüber U verschoben ist, spricht man von reinem **Blindstrom** I_b, der natürlich genauso meßbar ist wie der Wirkstrom. Die entsprechenden Widerstände nennt man **Wirk-** bzw. **Blindwiderstand.**
Nun sind aber die in einem Wechselstromkreis liegenden Widerstände oder Widerstandskombinationen häufig gemischter Art, d. h., sie haben gleichzeitig ohmschen sowie induktiven bzw. kapazitiven Widerstand; denn jede gewöhnliche Spule hat nach 44.2.5. sowohl Wirk- als auch einen gewissen Blindwiderstand. Die Verschiebung des Stromes I ist daher weder $\varphi = 0°$ noch $\varphi = 90°$, sondern hat irgendeinen dazwischenliegenden Wert. Man kann dann den Strom I gedanklich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine, der Wirkstrom I_w, mit der Spannung U in gleicher Phase ($\varphi = 0°$) liegt und die andere, der Blindstrom I_b, um 90° dagegen verschoben ist. Beide addieren sich geometrisch zum Gesamtstrom I.

Aus dem Diagramm (Bild 655) liest man ab:

(426) $$\boxed{I_w = I \cos \varphi}$$ **Wirkstrom**

(427) $$\boxed{I_b = I \sin \varphi}$$ **Blindstrom**

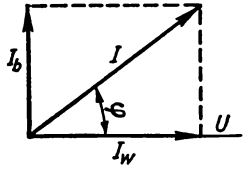


Bild 655. Zerlegung des Stromes I in Wirk- und Blindstrom

Da die Wirkstromkomponente mit der Spannung in gleicher Phase liegt, ergibt sich

(428) $$\boxed{P_w = UI \cos \varphi}$$ **Wirkleistung P_w eines beliebigen Widerstandes**

Den hier auftretenden Faktor nennt man den **Leistungsfaktor** $\cos \varphi$.

[1]) Das Kurzzeichen var (Voltampere réactif) ist die neuere Bezeichnung für das früher verwendete BW (Blindwatt)

Im Fall der idealen Spule ist $\cos \varphi = \cos 90° = 0$. Wie nicht anders zu erwarten, ist ihre Wirkleistung $P_w = UI \cdot 0 = 0$.Für den rein ohmschen Widerstand ist dagegen $\cos \varphi = \cos 0° = 1$ und $P_w = UI$.

Die in den Haushaltungen verwendeten Wechselstromzähler sind so eingerichtet, daß sie nur die reine *Wirkarbeit* anzeigen. Sie reagieren nicht auf den Blindanteil.
Dennoch ist die Ermittlung der Blindleistung P_b mitunter von großer Wichtigkeit. Sie ergibt sich als

(429) $\boxed{P_b = UI \sin \varphi}$ **Blindleistung P_b**

Ein in den Stromkreis geschaltetes Amperemeter zeigt allerdings weder den Wirkstrom I_w noch den Blindstrom I_b an, sondern den Strom I, der sich geometrisch aus beiden Komponenten zusammensetzt. Wenn man demnach Klemmenspannung und Strom eines Elektromotors mißt und miteinander multipliziert, so erhält man nicht die tatsächliche umgesetzte (Wirk-) Leistung, sondern

(430) $\boxed{P_s = UI}$ **Scheinleistung P_s eines beliebigen Widerstandes**

Um Verwechslungen mit der Wirkleistung (Watt) zu vermeiden, wird die Scheinleistung in **VA** (Voltampere) angegeben.
Erst nach weiterer Multiplikation mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi$ und der Zeit entsteht die vom Zähler registrierte und vom Konsumenten zu bezahlende *Wirkarbeit*. Dividiert man die Gleichung $UI \cos \varphi = P_w$ durch $UI = P_s$, so erhält man

(431) $\boxed{\cos \varphi = \frac{P_w}{P_s}}$ **Leistungsfaktor $\cos \varphi$**

Schließlich kann man auch die Ströme in dem auf Bild 655 dargestellten Diagramm mit der gemeinsamen Spannung U multiplizieren und erhält dabei ein entsprechendes, geometrisch ähnliches **Leistungsdiagramm** (Bild 656). Hieraus läßt sich ohne weiteres die Beziehung ablesen:

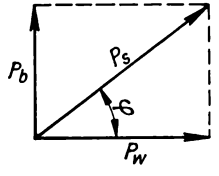


Bild 656. Leistungsdiagramm

(432) $\boxed{P_s = \sqrt{P_w^2 + P_b^2}}$

Beispiele: 1. Auf dem Typenschild eines Motors ist der Leistungsfaktor $\cos \varphi = 0{,}7$ angegeben, seine Leistung beträgt 25 kW, die Klemmenspannung 220 V. Berechne die Stromstärke I, Wirk- und Blindstrom sowie Schein- und Blindleistung. – Die Scheinleistung ist $P_s = \frac{P_w}{\cos \varphi} = \frac{25\,\text{kW}}{0{,}7} = 35{,}7\,\text{kVA}$. Stromstärke $I = \frac{P_s}{U} = \frac{35700\,\text{VA}}{220\,\text{V}} = 162\,\text{A}$. Wirkstrom $I_w = I \cos \varphi = 162\,\text{A} \cdot 0{,}7 = 113{,}4\,\text{A}$. Blindstrom $I_b = I \sin \varphi = 162\,\text{A} \cdot 0{,}714 = 115{,}7\,\text{A}$. Blindleistung $P_b = P_s \sin \varphi = 35{,}7\,\text{kVA} \cdot 0{,}714 = 25{,}5\,\text{kvar}$ oder $UI = 220\,\text{V} \cdot 115{,}7\,\text{A} = 25{,}5\,\text{kvar}$.
2. Durch einen Motor fließt ein Strom von 6,5 A bei einer Klemmenspannung von 220 V. Der Zähler zeigt 580 W an. Berechne die Scheinleistung, den Leistungsfaktor und den

Phasenwinkel.- $P_s = UI = 220\,\text{V} \cdot 6{,}5\,\text{A} = \underline{1430\,\text{VA}}$; $\cos\varphi = \frac{P_w}{P_s} = \underline{0{,}406}$; $\varphi = \underline{66°}$ (Cosinustabelle).

44.4. Bedeutung des Blindstroms und seine Kompensation

Auch der in den öffentlichen Leitungsnetzen fließende Strom ist durch induktive Belastung mit Motoren und dgl. kein reiner Wirkstrom, sondern läßt sich nach Bild 655 in Wirk- und Blindanteil zerlegen. Auf jeden Fall ist der tatsächlich fließende Strom I größer als der Wirkstrom I_w, der zur Umformung in nutzbare Arbeit erforderlich ist. Damit wird das Leitungsnetz bedeutend stärker belastet, als es dem eigentlichen Bedarf entspricht. Dieser Nachteil ist um so schwerwiegender, als der in den Kabeln und Leitungen entstehende Verlust durch Stromwärme mit dem Quadrat der Stromstärke I anwächst.
Es muß daher das Bestreben aller Energieverbraucher sein, den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ nach Möglichkeit zu verbessern, d. h., dem Wert 1 möglichst nahezubringen. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Die eine besteht im Betrieb besonderer, übererregter Synchronmotoren (sog. Phasenschieber, 44.7.1 Einfacher und bequemer sind jedoch große Kondensatoren, die dem jeweiligen Verbraucher parallelzuschalten sind. Die Kapazität C muß so bemessen sein, daß bei der betreffenden Klemmenspannung ein kapazitiver Blindstrom I_b durch den Kondensator fließt, der von gleicher Größe ist wie der induktive Blindstrom der jeweiligen Verbraucher. Beide Ströme müssen einander dann **kompensieren,** d. h. sich gegenseitig aufheben.
Die Blindleistung des Kondensators ist

$$P_b = UI_b,$$

dabei ist nach (412) $I_b = U\omega C$, so daß

$$P_b = U^2\omega C \quad \text{wird.}$$

Hieraus erhält man

(433) $$\boxed{C = \frac{P_b}{U^2\omega}}$$ **Kapazität C eines Kondensators zur Kompensation der Blindleistung P_b**

Beispiel: Ein Motor für 220 V (50 Hz) hat den Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}65$ und verbraucht 18 kW. Wie groß ist die Blindleistung und die Kapazität des zur vollständigen Kompensation parallelzuschaltenden Kondensators? – Nach Gleichung (432) ist die Blindleistung $P_b = \sqrt{P_S^2 - P_w^2}$ und nach (431) die Scheinleistung $P_S = \frac{P_w}{\cos\varphi}$. Durch Einsetzen erhält man $P_b = \sqrt{\left(\frac{P_w}{\cos\varphi}\right)^2 - P_w^2} = P_w\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = 18 \cdot 1{,}169\,\text{kvar} = 21{,}04\,\text{kVA}$ und damit $C = \frac{21040\,\text{VAs}}{220^2\,\text{V}^2 \cdot 314} = \underline{1384\,\mu\text{F}}$.

44.5. Transformator

Wechselstrom läßt sich mittels eines **Transformators (Umspanners)** bequem so umwandeln, daß nahezu ohne Leistungsverlust aus einer niederen Spannung eine hohe Spannung entsteht oder umgekehrt. Der umzuspannende Strom wird der **Primärwicklung** zugeführt, der gewünschte Strom der **Sekundärwicklung** entnommen (Bild 657). Beide Spulen liegen getrennt oder auch übereinander gewickelt auf einem gemeinsamen geschlossenen Eisenrahmen. Das Verhältnis der beiden Windungszahlen nennt man das **Übersetzungsverhältnis.**

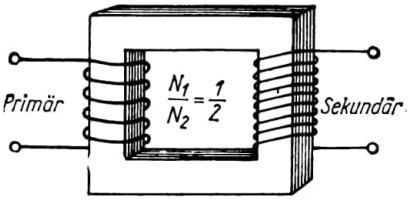


Bild 657. Schema eines eisengeschlossenen Transformators

Der sich sinusförmig ändernde Primärstrom erzeugt im Eisenkern einen ebenfalls sinusförmigen magnetischen Fluß Φ. Dieser induziert in den beiden Spulen nach dem Induktionsgesetz (378) die beiden Urspannungen

$$E_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ und } E_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Hierbei ist E_1 von der angelegten Primärspannung u_1 zu überwinden, so daß $u_1 = -E_1$, während E_2 auf der Sekundärseite als Urspannung zur Verfügung steht, d. h., $u_2 = E_2$. Somit sind die beiden Spannungen gegeneinander um 180° phasenverschoben.

Man erkennt hieraus das zahlenmäßige Verhältnis der beiden Spannungen:

$$\frac{\text{Primärspannung } U_1}{\text{Sekundärspannung } U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Gute Transformatoren haben einen Wirkungsgrad von 96 ··· 98%, d. h., die Energieverluste sind so gering, daß man Ein- und Ausgangsleistung praktisch gleichsetzen kann. Daher muß für den idealen Transformator gelten: $U_1 I_1 = U_2 I_2$ bzw. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$ oder

$$\frac{\text{Primärstrom } I_1}{\text{Sekundärstrom } I_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

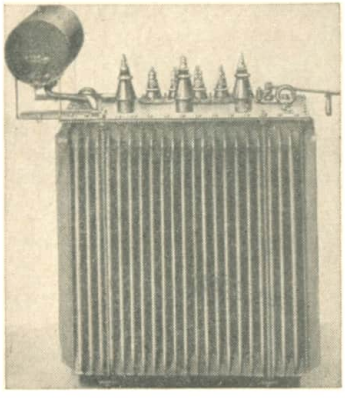


Bild 658. Großer Transformator mit Ölfüllung und Kühlrippen

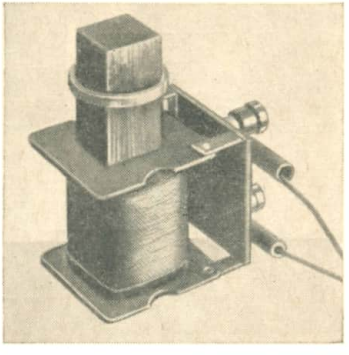


Bild 659. Beim Einschalten des Spulenstromes wird der Aluminiumring weggeschleudert

Versuch: Auf einem Eisenkern liegt außer der festen Primärwicklung (Spule mit 500 Windungen) ein lose aufgelegter, als Sekundärwicklung mit *einer einzigen* Windung zu betrachtender Aluminiumring (Bild 659). Beim Anlegen einer Wechselspannung von 220 V wird der Ring *weggeschleudert* und beweist, daß Primär- und Sekundärstrom von entgegengesetzter Richtung sein müssen.

44.6. Dreiphasenstrom

44.6.1. Entstehung eines Dreiphasenstroms

Große elektrische Leistungen auf große Entfernungen werden meist mit Hilfe des **Dreiphasenstroms (Drehstroms)** übertragen. Er besteht aus einer zweckmäßigen Verkettung von **3 Einphasen-Wechselströmen.** (Bisher war hier nur vom Einphasenstrom die Rede.)

In seiner Grundform befinden sich im Ständer des Drehstromgenerators 3 um je 120° gegenseitig versetzte Spulenpaare, zwischen denen der Feldmagnet rotiert (Bild 660). Die Ableitungen jeder Spule seien zunächst getrennt herausgeführt, so daß bei deren Rotation 3 selbständige, getrennte Wechselströme entstehen. Da die Pole zeitlich nacheinander an den Spulen vorbeiwandern, sind die 3 Ströme um je 120° gegeneinander phasenverschoben (Bild 661). Damit ergeben sich zunächst $3 \cdot 2 = 6$ Spulenenden.

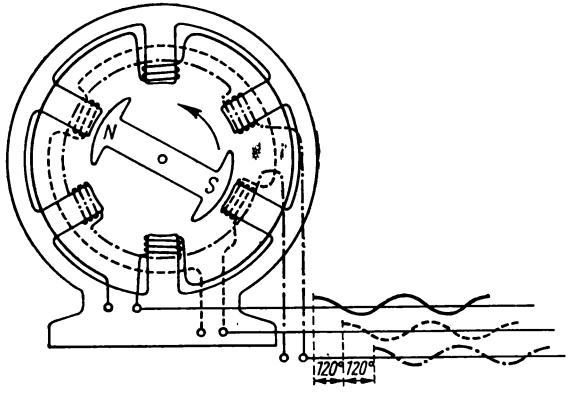


Bild 660. Prinzip eines Drehstromgenerators mit feststehenden Spulen und rotierendem Feldmagnet

Die Summe der drei um je 120° phasenverschobenen Ströme bzw. Spannungen ist in jedem Augenblick gleich 0.

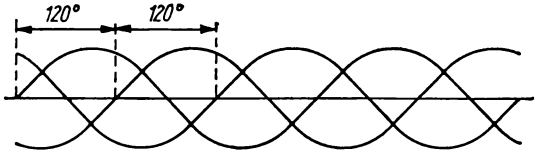


Bild 661. Liniendiagramm des Dreiphasenstromes

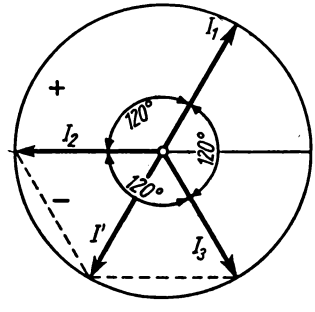


Bild 662. Zur Stromsumme beim Dreiphasenstrom

Beweis: Das Zeigerdiagramm (Bild 662) enthält die 3 Ströme I_1, I_2 und I_3. Faßt man z. B. die beiden Zeiger I_2 und I_3 zu ihrem resultierenden Zeiger zusammen, so ergibt sich der Zeiger I'. Wie man sieht, ist I' entgegengesetzt gleich mit I_1. Die Ströme heben sich damit in jedem Augenblick gegenseitig auf.

44.6.2. Dreieckschaltung

Von den ursprünglich 6 Zuleitungen zu den Spulen kann man jedoch 3 einsparen. Eine Möglichkeit besteht darin, das *Ende* des *einen* Stranges mit dem *Anfang des nächsten* zu verbinden, so daß ein in sich geschlossener Stromkreis entsteht, die sogenannte **Dreieckschaltung** (Bild 663). Innerhalb dieses Dreiecks heben sich die Ströme nach dem soeben abgeleiteten Satz gegenseitig auf, so daß kein Stromfluß

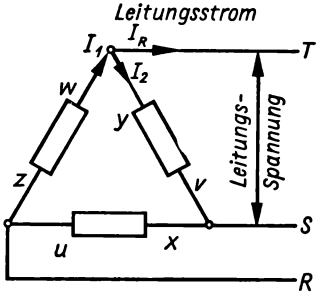


Bild 663. Dreieckschaltung

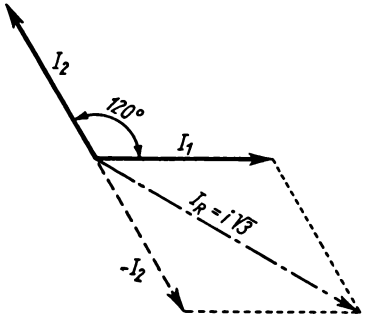


Bild 664. Zeigerdiagramm der Ströme in der Dreieckschaltung

zustande kommen kann. Zwischen je 2 Eckpunkten liegt die Spannung je einer Spule, die sogenannte **Strangspannung.** In jedem Eckpunkt selbst verzweigen sich 3 Ströme: Ein Spulenstrom fließt dem Eckpunkt zu, ein zweiter fließt von ihm weg, während die *Differenz* beider in die Leitung fließt: $i_R = i_1 - i_2$. Diese Differenz muß wiederum *geometrisch* gefunden werden. Bild 664 zeigt die Zeiger der Ströme I_1 und I_2 um 120° gegeneinander versetzt. Subtraktion von I_2 bedeutet Umwendung des Zeigers I_2 und geometrische Addition. Dabei ergibt sich I_R als Diagonale von der Länge $I_1\sqrt{3}$ (das Parallelogramm ist ein doppeltes gleichseitiges Dreieck!). Zusammenfassend gilt für die

(434) **Dreieckschaltung:** **Leitungsspannung = Strangspannung**
Leitungsstrom = $\sqrt{3}$ · Strangstrom

44.6.3. Sternschaltung

Die *Anfänge* aller 3 Stränge sind miteinander verbunden (Bild 665). Aus den Endpunkten des entstehenden Sterns fließt je ein Leitungsstrom ab, so daß Leitungsstrom = Strangstrom. Die Spannung U_{RS} zwischen den Punkten 1 und 2 ist gleich der

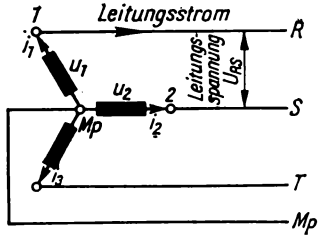


Bild 665
Sternschaltung

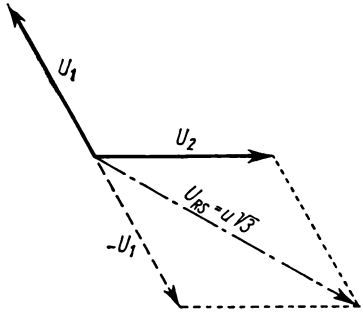


Bild 666. Zeigerdiagramm der Spannungen in der Sternschaltung

Differenz der beiden Strangspannungen U_1 und U_2; dies deshalb, weil vom Mittelpunkt aus die Spannungen einander entgegengerichtet sind. Wie bei der Dreieckschaltung die Teilströme, sind jetzt die beiden Teilspannungen geometrisch zu subtrahieren (Bild 666). Man findet

$$U_{RS} = U_1 \sqrt{3}\,.$$

(435) **Sternschaltung:** **Leitungsspannung $= \sqrt{3} \cdot$ Strangspannung**
Leitungsstrom = Strangstrom

Diese Beziehungen gelten nur dann, wenn alle 3 Stränge durch die äußeren Teile des Stromkreises *gleichmäßig* belastet sind. Häufig wird auch der Mittelpunkt Mp des Sterns als besondere Leitung herausgeführt (Sternpunktleiter, Nulleiter). Die Spannung eines Hauptleiters R, S oder T gegenüber dem Sternpunktleiter ist dann gleich der Strangspannung.

Beispiel: Zwischen den Hauptleitern R und S werden 220 V gemessen. Welche Spannung besteht zwischen R bzw. S und dem Sternpunktleiter? – Nach den Gesetzen der Sternschaltung ist die Strangspannung

$$U_{MpR} = \frac{U_{RS}}{\sqrt{3}} = \frac{220\,\text{V}}{\sqrt{3}} = 127\,\text{V}.$$

44.7. Wechselstrommotoren

44.7.1. Synchronmotor

Für den Betrieb mit ein- und dreiphasigem Wechselstrom gibt es die verschiedensten Typen von Motoren, von denen hier nur vier erwähnt werden mögen.
Der **Synchronmotor** hat prinzipiell den gleichen Aufbau wie der in Bild 660 angegebene Generator. Dem Ständer wird Wechselstrom zugeführt, so daß dessen Innenpole abwechselnd zu Nord- und Südpolen werden. Der Läufer wird wie beim Generator mit *Gleichstrom* erregt. Seine *Pole wechseln* daher *nicht*. Bild 667a zeigt, wie in einem bestimmten Augenblick ein Südpol des Läufers von einem Nordpol des

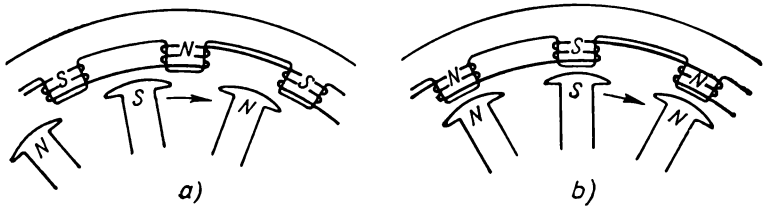


Bild 667. Synchronmotor

Ständers angezogen wird. Nach Erreichen dieses Pols ist inzwischen der nächste Pol zum Nordpol geworden (Bild 667b) und zieht den Südpol des Läufers um ein weiteres Stück nach rechts usw. Dieses Spiel setzt voraus, daß die Drehgeschwindigkeit des Läufers genau zum Polwechsel des Ständers paßt; daher die Bezeichnung *Synchron- (gleichlaufender)* Motor und seine Verwendung überall dort, wo es auf genau gleichbleibende Drehzahlen ankommt. Der Motor läuft nicht von selbst an, sondern muß angeworfen werden.

Ein besonderer energiewirtschaftlicher Vorteil liegt darin, daß der Synchronmotor bei *Übererregung* des Läufers in den Spulen des Stators eine *Gegenspannung* induziert. Die Klemmenspannung des Ständers steht sonst im Gleichgewicht mit der vom magnetischen Fluß Φ induzierten Gegenspannung (siehe Transformator). Bei Übererregung wird diese Gegenspannung vergrößert, wodurch dem Netz ein Gegenstrom entnommen wird, der den Fluß wieder auf den Wert Φ herabsetzt. Daher ist dieser Gegenstrom ein um 90° *voreilender*, der das Netz wie eine Kapazität belastet. Damit steht ein wertvolles Hilfsmittel zur Verfügung, den im Netz durch induktive Verbraucher stets vorhandenen Blindstrom zu kompensieren und den *Leistungsfaktor* zu *verbessern*.

44.7.2. Asynchronmotoren

1. Der Einphasen-Kollektormotor

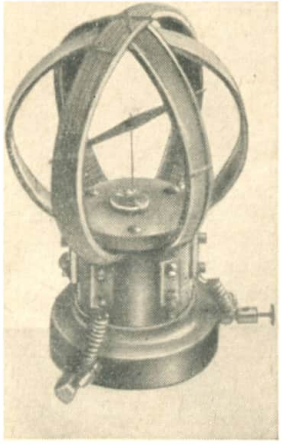
Da die Stromrichtung auf den Drehsinn eines Gleichstrommotors keinen Einfluß hat, können Gleichstrommotoren prinzipiell auch mit Wechselstrom betrieben werden, Wechselstrom induziert aber in den massiven Eisenteilen starke Wirbelströme, die den Wirkungsgrad sehr beeinträchtigen würden. Anker und Feldmagnet müssen daher aus dünnen, durch Papier voneinander isolierten Blechen geschichtet werden. Die Stromzufuhr geschieht dann wie beim Gleichstrommotor über einen auf der Ankerwelle sitzenden Kollektor. Die Drehzahl solcher *Universalmotoren*, die meist nur für kleinere Leistungen, z. B. zum Betrieb von Haushaltgeräten, gebaut werden, ist von der Frequenz unabhängig. Sie sind daher **Asynchronmotoren** (nicht gleichlaufende Motoren).

2. Der Kurzschlußläufermotor

Der Ständer eines nach Bild 660 gebauten Motors wird mit Drehstrom gespeist. Das Strommaximum entsteht in den Ständerspulen entsprechend der zeitlichen Verschiebung der Stromphasen nacheinander. Das sich zwischen je zwei gegenüber-

liegenden Ständerspulen ausspannende Magnetfeld wandert daher im Kreise. Man nennt es ein **Drehfeld** (Bild 668). Der einfachste und zuverlässigste Drehstrommotor hat einen sogenannten **Käfiganker** (Kurzschlußläufer, Bild 669). Er besteht aus achsenparallelen Kupferstäben, die beiderseits durch je einen Kupferring verbunden sind. Die Kraftlinien des umlaufenden Feldes schneiden die Stäbe und induzieren in ihnen Ströme. Diese sind so gerichtet, daß sie ihrer Bewegungsursache entgegenwirken, d. h., die anfangs große *Relativgeschwindigkeit* zwischen Feld und Läufer wird immer kleiner, der Motor läuft immer schneller. Er kann jedoch die Geschwindigkeit des Feldes nie ganz einholen, da sonst keine Kraftlinien mehr geschnitten würden und der Antrieb wegfiele.

Bild 668. Kompaßnadel rotiert im Drehfeld dreier Spulen



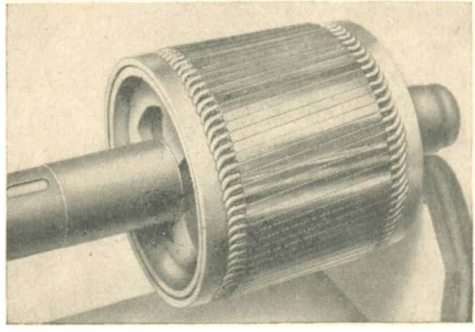


Bild 669. Käfiganker

Man versteht ferner unter dem

$$\textbf{Schlupf:}\quad \frac{\textbf{Differenz der Drehzahlen von Feld und Läufer}}{\textbf{Drehzahl des Feldes}}.$$

Wegen des geringen Widerstandes des Käfigs wird schon bei sehr kleinem Schlupf ein starker Strom induziert, weshalb die Drehzahl auch bei veränderlicher Belastung fast konstant bleibt. Daher ist auch das Anzugsmoment groß.
Dem Vorteil des starken Anzugsmomentes steht jedoch ein Nachteil gegenüber. Beim Einschalten entsteht ein starker Stromstoß, der das 6- bis 8fache des Betriebsstromes betragen kann. Um diesen hohen Einschaltstrom herabzusetzen, kann man der Ständerwicklung z. B. einen Anlaßwiderstand oder einen regelbaren Transformator vorschalten. Eine einfachere Möglichkeit besteht indes darin, die normalerweise im Dreieck geschaltete Ständerwicklung vor dem Anlegen der Netzspannung in einen Stern umzuschalten. Zu diesem Zweck führen dann die 6 Wicklungsenden U···Z nach dem auf Bild 670 angegebenen Schema zu einem **Stern-Dreieck-Umschalter.** Ist also der Motor für eine Betriebsspannung von 380 V gebaut, so liegen nach

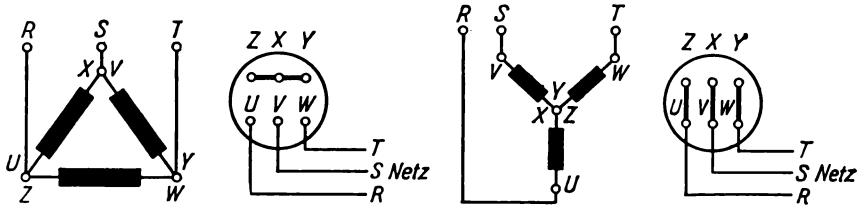


Bild 670. Schema der Stern-Dreieck-Umschaltung

der Umschaltung in einen Stern je zwei Phasenwicklungen in Reihe, wodurch an jeder Wicklung nur noch $\frac{380}{\sqrt{3}}$ V = 220 V liegen. Erst nach Erreichen einer höheren Drehzahl wird dann auf ein Dreieck zurückgeschaltet.

3. Der Schleifringläufermotor

An Stelle der kurzgeschlossenen Stäbe trägt der Läufer dieses Motors eine dreiphasige Wicklung, deren Enden zu drei auf der Welle sitzenden Schleifringen führen (Bild 671). Drei Bürsten nehmen den im Läufer induzierten Strom ab und führen ihn zu einem regelbaren Widerstand. Damit wird der hohe Anlaufstrom herabgesetzt. Erst bei zunehmender Drehzahl wird der Widerstand allmählich kleiner gemacht. Zuletzt können die drei Schleifringe kurzgeschlossen und die Bürsten abgehoben werden, worauf dann der Läufer als Kurzschlußläufer weiterarbeitet.

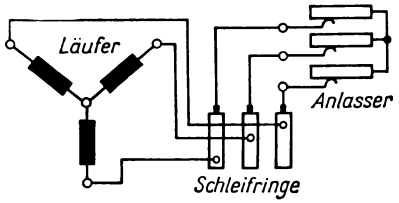


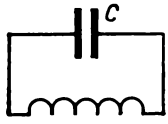
Bild 671. Schleifringläufermotor

45. Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

45.1. Einfacher Schwingkreis

Viele der bisher betrachteten elektrodynamischen Grunderscheinungen zeigten bereits die engen Wechselbeziehungen, die zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld bestehen. Noch deutlicher werden die Zusammenhänge, wenn man Vorrichtungen zusammenstellt, die elektrische und magnetische Felder in rascher Aufeinanderfolge erzeugen. Es entstehen dann **elektromagnetische Schwingungen.**
Das Grundgebilde ist der **geschlossene Schwingkreis.** Man erhält ihn, wenn man die beiden Belegungen eines Kondensators mit den Enden einer Spule verbindet (Bild 672). Durch kurzdauerndes Verbinden mit einer Spannungsquelle werde der Kondensator

Bild 672. Geschlossener Schwingkreis



(C) aufgeladen. Man könnte dann annehmen, daß nach Lösen der Verbindung sich die auf den Platten befindliche Ladung über die leitende Verbindung der Spule (L) sofort ausgleichen müßte. Statt dessen aber *pulsiert* der Strom in *raschem Wechsel* von der einen Belegung des Kondensators über die Spule zur anderen Belegung *hin und her*.
Erst nachdem die elektrische Energie durch Wärmeentwicklung und andere Verluste aufgezehrt ist, kommen diese elektrischen **Schwingungen** zum Stillstand. Je geringer diese Verluste sind, desto länger halten die Schwingungen an. Man spricht dann von größerer oder kleinerer **Dämpfung** des Schwingkreises.
Der Vorgang sei an Hand von Bild 673 näher verfolgt.

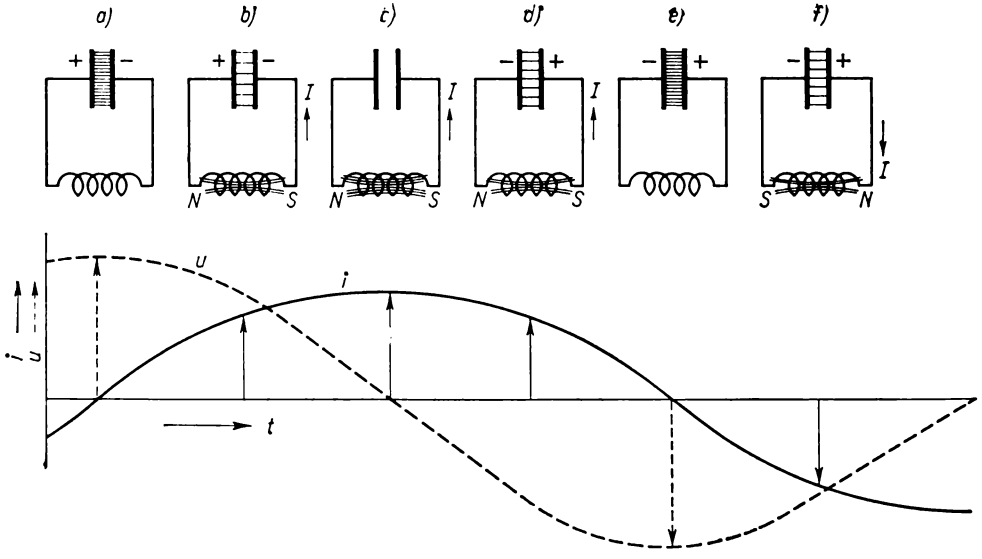


Bild 673. Vorgänge im geschlossenen Schwingkreis. Darunter Verlauf von Strom i und Spannung u

Zu Anfang (a) haben Spannung und Feldstärke des Kondensators einen bestimmten Höchstwert. Bei (b) beginnt die positive Ladung über die Spule nach der anderen Platte des Kondensators abzufließen. Es entsteht der Strom I und mit ihm der Aufbau des Magnetfeldes in der Spule. Dies kann aber nur verhältnismäßig langsam geschehen, da die Induktivität der Spule ein nur allmähliches Anwachsen des Stromes zuläßt. Bei (c) hat das Magnetfeld seinen Höchstwert erreicht, das elektrische Feld im Kondensator ist verschwunden. Das in der Spule wieder abklingende Magnetfeld induziert jetzt eine Spannung, die mit dem Strom gleich gerichtet ist und den Kondensator mit umgekehrtem Vorzeichen wieder auflädt. Bei (e) ist das Magnetfeld verschwunden und der Anfangszustand im Kondensator, aber mit entgegengesetztem

Ladungssinn, wieder hergestellt. Das Spiel wiederholt sich in umgekehrter Richtung. Man sieht, daß hierbei ein *Wechselstrom* zustande kommt, den die darunter gezeichnete Kurve wiedergibt. Wie sich noch ergeben wird, verläuft er exakt *sinus*förmig. Unmittelbar ist erkennbar:

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung beträgt 90°.

Ferner ist ersichtlich, daß die gesamte *elektrische* Feldenergie, die der Kondensator bei a) enthält, bei c) in der Spule als *magnetische* Feldenergie aufgespeichert ist.

Während der Schwingungen findet eine periodische gegenseitige Umwandlung elektrischer und magnetischer Feldenergie statt.

Der Einfachheit halber sei angenommen, daß der ohmsche Widerstand des Schwingkreises gleich 0 sei. Da sonst keine andere Energieform auftritt, gilt nach Gl. (361) und (387):

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} L I^2 .$$

Der durch die Spule fließende Strom I wird dabei vom Kondensator als Spannungsquelle geliefert. Es ist dann nach Gl. (409) $I = \frac{U}{\omega L}$. Dies in die Energiegleichung eingesetzt, ergibt

$$C U^2 = \frac{L U^2}{(\omega L)^2} ,$$

woraus sich

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

ergibt und damit

(436) $$\boxed{f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$ **Frequenz f der ungedämpften Schwingung** (Thomsonsche Schwingungsgleichung)

Daß es sich tatsächlich um sinusförmige Schwingungen handelt, ergibt die folgende Überlegung. Als einzige im Schwingkreis vorhandene Urspannung wirkt diejenige, die auf dem Weg der Selbstinduktion in der Spule entsteht. Sie ist nach (381)

(a) $$E_{\mathrm{ind}} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

bzw. mit (313) $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

(b) $$E_{\mathrm{ind}} = -L \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} .$$

Sie ist in jedem Augenblick gleich der am Kondensator liegenden Spannung (355)

$$U_C = \frac{Q}{C} .$$

Damit wird wegen $U_C = E_{\mathrm{ind}}$ aus (b)

(c) $$\frac{Q}{C} + L \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich dadurch lösen, daß man einen geeigneten Ansatz macht und dann nachprüft, ob er die Gleichung befriedigt. Das ist bei der Funktion

$$Q = Q_{\max} \sin \omega t$$

der Fall. Denn sie liefert zunächst

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \omega Q_{\max} \cos \omega t$$

und hernach

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 Q_{\max} \sin \omega t .$$

Da nun $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ist, erhält man durch Einsetzen in die Differentialgleichung (c)

$$\frac{Q_{\max}}{C} \sin \omega t - \frac{L}{LC} Q_{\max} \sin \omega t = 0$$

und damit die Probe auf die Richtigkeit des gemachten Ansatzes (a). Die Ladung Q des Kondensators und seine Spannung U schwanken demnach *sinusförmig*. Der Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ verläuft dagegen nach der entsprechenden *Cosinusfunktion*.

Beispiel: Welche Frequenz hat ein Schwingkreis, der aus einem Kondensator von 500 pF und einer Spule von 45 μH besteht? – Nach Gl. (436) ist

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^6 \,\mathrm{A}\, 10^{12} \,\mathrm{V}}{45 \,\mathrm{Vs}\, 500 \,\mathrm{As}}} = 1{,}06 \cdot 10^6 \,1/\mathrm{s} = \underline{1060 \,\mathrm{kHz}} .$$

Wie aus diesem Beispiel hervorgeht, wird bei *kleiner* Kapazität und Induktivität die Frequenz der Schwingungen außerordentlich *groß*. Derartige Frequenzen von über 100000 Hz = 100 kHz bezeichnet man als **Hochfrequenz.**

Hochfrequente Schwingungen wurden erstmalig bei **Funkenentladungen** von FEDDERSEN (1862) festgestellt, als er einen zwischen zwei Kugeln überspringenden Funken mit einem Drehspiegel auseinanderzog und fotografierte (Bild 674). Wichtig ist hierbei aber, daß an die Funkenstrecke nach Bild 675 ein Schwingkreis angeschlossen ist. Der erste Funke macht die Luft durch Ionisation genügend leitend, so daß sich der Entladungsvorgang pendelnd fortsetzen kann, bis seine Energie verbraucht ist. Schließlich leitet der nächste Hauptfunke eine neue Serie von Schwingungen ein.

Derartige Schwingungen klingen deshalb nach der einleitenden Erregung schnell ab, sie verlaufen stark *gedämpft*. Längere Zeit waren durch Funken angeregte Schwingkreise der Hauptbestandteil drahtloser Sendeanlagen.



Bild 674. Schwingende Funkenentladung

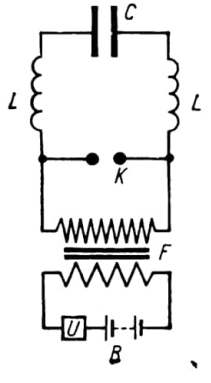


Bild 675. Erzeugung elektrischer Schwingungen
C Kondensator, *L* Spulen, K Kugelfunkenstrecke, F Funkeninduktor, U Unterbrecher, B Batterie

45.2. Triode als Schwingungserzeuger

Zur Herstellung hochfrequenter sinusförmiger Schwingungen wird heute überwiegend die **Triode** (*Drei*elektrodenröhre und ihre Abarten) verwendet (Bild 676). In den Anodenkreis einer Triode werde ein Schwingkreis geschaltet. Beim Anschluß der Anodenspannung setzt der Anodenstrom stoßartig ein, wodurch im Anodenkreis $L_2 - C_2$ rasch abklingende Schwingungen entstehen. Um sie zu *entdämpfen*, d. h. beliebig lange aufrechtzuerhalten, erfand MEISSNER (1913) das Prinzip der **Rückkopplung.**

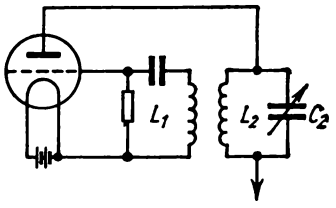


Bild 676. Schwingungserzeugung durch Rückkopplung

Die im Anodenkreis eingeleiteten Schwingungen induzieren in der Spule (L_1) des Gitterkreises im gleichen Takt verlaufende Spannungsschwankungen. Diese steuern wiederum den Anodenstrom, so daß die Schwingungen nicht nur aufrechterhalten, sondern außerdem noch *verstärkt* werden. Durch Regelung des Abstandes von (L_1) und (L_2) läßt sich der Grad dieser *induktiven Rückkopplung* verändern.

Mechanische Vergleiche: 1. Das Schwungrad einer Dampfmaschine würde schnell zum Stillstand kommen, wenn es nicht mit der Schiebersteuerung in Verbindung stünde. Diese steuert die Dampfzufuhr zum Zylinder im Takt der Umdrehungen des Schwungrades.
2. Die Schwingungen einer Schaukel hören infolge der Reibungsdämpfung bald auf. Durch periodisches Anstoßen der Schaukel wird die verlorengehende Energie immer wieder ersetzt, so daß die Schwingungen beliebig lange anhalten.

45.3. Dipol als Schwingkreis

Als die beiden Bestandteile eines elektromagnetischen Schwingkreises hatten wir Kapazität und Induktivität erkannt. Es ist nun im Prinzip belanglos, welche technische Form diese beiden Schaltglieder haben. Jeder einfache, gerade Draht hat sowohl eine bestimmte Kapazität als auch Induktivität, wenngleich beide Werte auch sehr klein sein mögen.

So stellt der kreisförmige *Drahtbügel* mit zwei Endplatten auf Bild 677 einen recht *einfachen* **geschlossenen Schwingkreis** dar. Läßt man die beiden Platten verkümmern und biegt den Bügel auseinander, so wirken die beiden Drahthälften wie die zwei Platten eines Kondensators und sind abwechselnd positiv und negativ geladen. Man nennt diesen **offenen Schwingkreis** einen **elektrischen Dipol.** Der Leitungsstrom pendelt zwischen den beiden Enden hin und her, wenn der Dipol zu Schwingungen angeregt wird.

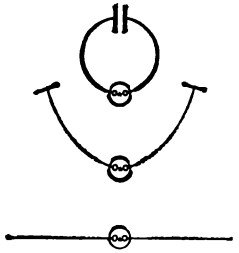


Bild 677. Übergang vom geschlossenen zum offenen Schwingkreis

Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß in die Mitte des Dipols eine kleine Funkenstrecke eingefügt wird. Mit dieser Anordnung, Oszillator (Schwinger) genannt, entdeckte **Heinrich Hertz** 1888 die elektromagnetischen Wellen, deren Existenz von **Maxwell** bereits 1865 theoretisch vorausgesagt worden war.

45.4. Freie elektromagnetische Wellen

Der Oszillator werde jetzt mit einem Funkeninduktor verbunden. Der zwischen den beiden Polen hin- und herpendelnde Strom ist von *ring*förmigen *magnetischen* Feldlinien (Schraubenregel) umgeben. Im Augenblick der Stromumkehrung verschwindet das Feld, und die dem Oszillator *zunächst* gelegenen Feldlinien sinken in die Strombahn zurück. Die *weiter entfernten* jedoch fliegen vermöge einer ihnen innewohnenden *Trägheit* weiter nach außen, wobei sie ihren Umlaufsinn beibehalten. So befindet sich dieser Anteil des Feldes schon in größerer Entfernung vom Dipol, wenn sich nach der Stromumkehr ein neues Feld bildet. Nach der Schraubenregel hat dieses aber entgegengesetzten Umlaufsinn. So setzt sich das Spiel weiter fort.
Gleichzeitig aber bildet sich ein System von *elektrischen* Feldlinien; denn wenn der Strom gleich Null ist, trägt die Kapazität des Dipols ihre maximale Ladung. Die Feldlinien greifen dabei seitlich in den Raum. Mit dem Anwachsen des Stromes wird dieses Feld wieder schwächer, ein Teil des Feldes sinkt in den Dipol zurück. Die weiter außen gelegenen Feldlinien schnüren sich ab, schließen sich zu nierenförmigen Ringen und wandern davon (Bild 679).

In der unmittelbaren Umgebung eines schwingenden Dipols schwingen, um 90° gegenseitig versetzt, ein magnetisches und elektrisches Feld.

Dieses in den Raum hinauseilende Kraftfeld bezeichnet man als **elektromagnetische Wellen.** Theorie und Erfahrung ergeben ferner, daß mit der Abschnürung vom Dipol die Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld verschwindet (Bild 680).

In freien elektromagnetischen Wellen schwingen elektrische und magnetische Feldstärke in gleicher Phase. Elektromagnetische Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.



Bild 678. Heinrich Hertz (1857 bis 1894)

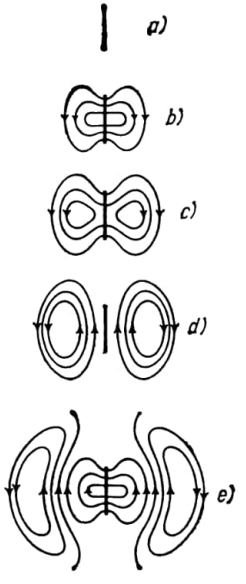


Bild 679. Abschnürung und Ablösung elektrischer Feldlinien von einem schwingenden Dipol

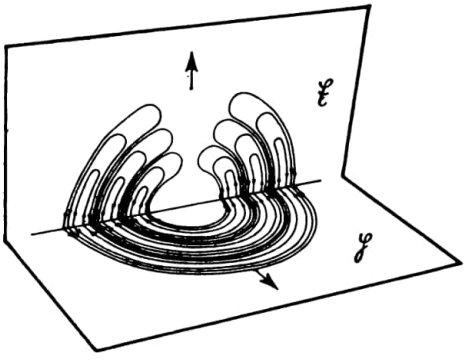


Bild 680. Vertikaler und horizontaler Schnitt durch ein Strahlungsfeld

Aus der Entstehung der Wellen geht anschaulich unmittelbar hervor:

Elektrischer und magnetischer Feldvektor stehen rechtwinklig aufeinander und quer zur Ausbreitungsrichtung.

Die elektromagnetischen Wellen sind also **Transversalwellen.** Aus dem, was bereits über Wellen im allgemeinen gesagt wurde (21.2.), folgt die

Wellenlänge: Abstand zweier gleich gerichteter Maxima der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke.

(437) $\boxed{f\lambda = c}$

Heinrich Hertz stellte bei seinen Versuchen ferner fest: Elektromagnetische Wellen werden von metallenen Flächen **reflektiert** und wie Licht im metallenen *Hohlspiegel* gesammelt (Bild 681). Ein solcher „Spiegel" kann aus Drahtnetz bestehen. Sie werden von großen *Prismen* (Hertz verwendete z. B. Pech) **gebrochen.** Sie gehen durch ein *Gitter* aus parallelen Drähten, wenn diese quer zum elektrischen Feldvektor stehen, nicht aber, wenn die Drähte diesem parallel liegen. Aus alledem ergibt sich:

Elektromagnetische Wellen haben alle Eigenschaften polarisierten Lichtes und unterscheiden sich vom sichtbaren Licht nur durch ihre Wellenlänge.

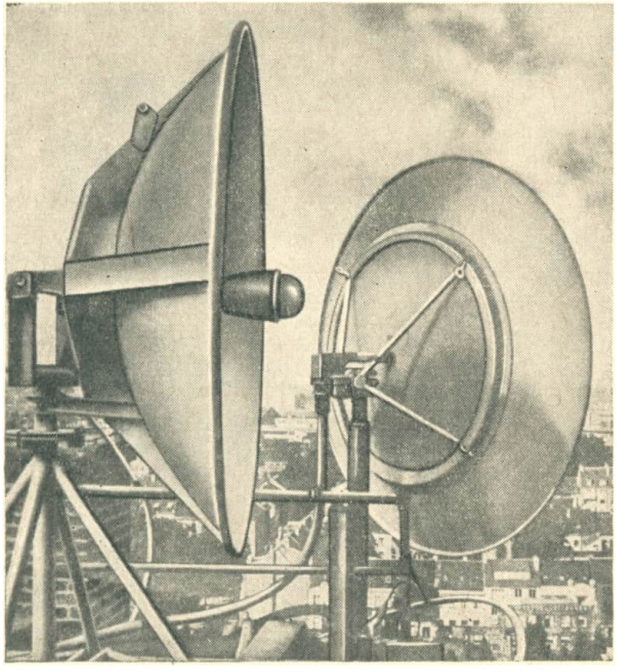


Bild 681. Parabolische Richtstrahler für Dezimeterwellen

Atomphysik

46. Atomhülle

46.1. Bestandteile der Atome

Wegen ihrer außerordentlichen Kleinheit entziehen sich die Atome der unmittelbaren Anschauung. Dennoch lassen sich wesentliche Merkmale, ihre Masse und ihr Durchmesser, bereits mit den Methoden der kinetischen Gastheorie (19.1.) erschließen. Weitere ins einzelne gehende Kenntnisse vom Bau der Atome fußen insbesondere auf den Ergebnissen der Spektroskopie und der Entdeckung der Radioaktivität. Von hier aus und auf Grund weiterer Erfahrungen wurde der englische Physiker **Rutherford** (1911) zum ersten brauchbaren Entwurf eines **Atommodells** geführt. Er stellte fest:

> **Jedes Atom besteht aus einem elektrisch positiven Kern und einer Anzahl ihn umkreisender negativer Elektronen.**

Man muß demnach unterscheiden zwischen dem **Atomkern** und der **Atomhülle.** Es stellte sich jedoch später heraus, daß in den Atomkernen zwei verschiedene Arten von Teilchen vorkommen, und zwar **Protonen** und **Neutronen.** Beide faßt man unter der Bezeichnung **Nukleonen** zusammen. Sowohl diese beiden als auch die Elektronen stellen **Elementarteilchen** dar. (Weitere Elementarteilchen s. 47.10.)
Ihre *relative Masse* drückt man in Einheiten der **relativen Atommassen**[1]) aus. Diese sind im Periodensystem der Elemente (S. 538) verzeichnet und werden heute auf das Kohlenstoffisotop ^{12}C bezogen, dessen relative Atommasse mit genau 12 festgelegt wurde. Im Bereich der Atomphysik bezeichnet man die relative Atommasse kurz als den **Massenwert** M.

---

[1]) Der früher üblich gewesene Ausdruck „Atomgewicht" sollte nicht mehr verwendet werden

1. Proton: elektrisch positiv geladenes Masseteilchen

Seine elektrische Ladung ist gleich der eines Elektrons $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As, jedoch *positiv*. Die Ruhmasse ist nahezu gleich der eines Wasserstoffatoms. Der **Massenwert** des Protons ist $M_p = 1{,}007527$.

2. Neutron: elektrisch neutrales Masseteilchen

Es trägt *keine elektrische* Ladung. Sein Massenwert ist mit $M_n = 1{,}00865$ ebenfalls nahezu gleich dem des Wasserstoffatoms.

3. Elektron: elektrisch negatives Elektrizitätsteilchen

Seine elektrische Ladung ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As, sein Massenwert beträgt $M_e = 0{,}000549$ und damit nur den 1836. Teil von dem des Protons. Die Masse der Elektronen trägt somit zur Gesamtmasse des Atoms kaum etwas bei. Seine absolute Masse beträgt $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. **Die Hauptmasse des Atoms ruht im Atomkern.**

Der Radius eines einzelnen freien Elektrons läßt sich nur berechnen, wenn man gewisse willkürliche Annahmen macht, von denen man heute noch nicht sagen kann, ob sie wirklich berechtigt sind. Hiernach erhält man

(438) $\boxed{r_e = 1{,}4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}$ **klassischer Elektronenradius** r_e

Hierbei geht man von der Vorstellung aus, daß die Ladung des kugelförmig gedachten Elektrons auf seiner Oberfläche sitzt. Dann hat das im gesamten Außenraum befindliche Feld einen bestimmten Energieinhalt (Bild 682). Man stellt sich ferner vor, daß das Elektron selbst keine Masse hat, sondern diese lediglich in Form von Energie im elektrischen Feld enthalten ist, denn die Feldenergie stellt gemäß der Beziehung (34.3.) $W = mc^2$ auch eine Masse dar. Nach (363) ist die Feldenergie

$$W = \frac{1}{2}\int E^2 \varepsilon_0 \,\mathrm{d}V,$$

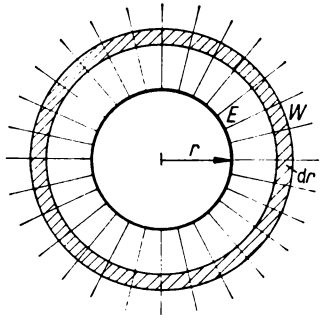


Bild 682. Zur Berechnung des klassischen Elektronenradius

wobei $\mathrm{d}V$ das Volumen einer beliebig herausgegriffenen dünnen Kugelschale ist und hernach über das gesamte im Außenraum liegende Volumen zu integrieren ist. Die Feldstärke an der Oberfläche einer geladenen Kugel beträgt nach (350) $E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$; hierbei ist Q die Ladung e des Elektrons. Das Volumen der Kugelschale ist $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. Es ist also

$$W = \frac{1}{2}\int_{r_e}^{\infty} \frac{e^2 \varepsilon_0 4\pi r^2}{16\pi^2 r^4 \varepsilon_0^2}\,\mathrm{d}r = \frac{e^2}{8\pi r_e \varepsilon_0}.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich mc^2, so wird

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi mc^2 \varepsilon_0}$$

oder

$$r_e = \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{A^2\,s^2\,s^2\,Vm}}{8\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\;9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2}\;8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}} = 1{,}4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}.$$

Sobald Elementarteilchen in der Nähe eines Atomkerns vorbeikommen, werden sie mehr oder weniger stark aus ihrer Richtung abgelenkt. Aus den dabei gemessenen Streuwinkeln wird der Radius eines Atom*kerns* ebenfalls in der Größenordnung von 10^{-15} m geschätzt. Die Atomkerne sind trotz ihrer viel größeren Masse demnach kaum größer als die Elektronen.

Für den Radius eines Atomkerns hat man den Ausdruck ermittelt:

(439) $\boxed{r = r_0 \sqrt[3]{M}}$ **Radius r eines Atomkerns**

($r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ m)

Zieht man einen Vergleich zwischen den Radien von Elektron und Atomkern einerseits und dem Durchmesser des ganzen Atoms andererseits, so fallen die gewaltigen Unterschiede auf. In dem sonst leeren Raum des Atoms nehmen die Elementarteilchen selbst nur einen verschwindend geringen Raum ein. Der Abstand des Elektrons vom Kern ist 100 000mal größer als das Elektron selbst.

46.2. Ordnungszahl und Massenzahl

Wie **Mendelejew** und **Meyer 1869** unabhängig voneinander fanden, lassen sich alle chemischen Elemente nach ihrer relativen Atommasse und ihren *chemischen Eigenschaften* in ein übersichtliches System bringen, das **Periodensystem der Elemente** (s. die folgende Tafel).

Der Reihe nach tragen die Elemente Nummern, die sogenannte **Ordnungszahl Z (Kernladungszahl).** Bis auf wenige Ausnahmen nimmt die Atommasse mit steigender Ordnungszahl Z zu.

Wie schon gesagt, setzen sich die Atomkerne aller Elemente lediglich aus *Nukleonen*, d. h. also aus *Protonen* und *Neutronen* zusammen. Die Anzahl der Nukleonen eines Kerns bezeichnet man als

Massenzahl A: Anzahl der Protonen + Anzahl der Neutronen.

$$\boxed{A = Z + N}$$

In vielen Fällen entspricht sie der auf einen ganzzahligen Wert gerundeten relativen Atommasse.

An Hand des Periodensystems läßt sich daher die Zusammensetzung eines Kerns in einigen Fällen sofort angeben. Am einfachsten ist der Kern des Wasserstoffatoms. Er besteht aus einem einfachen Proton. Die Ordnungszahl ist $Z = 1$, die Atommasse ebenfalls gleich 1. Hierauf folgt das Helium. Der Kern besteht aus 2 Protonen und 2 Neutronen, so daß $Z = 2$ und $A = 4$. Dann kommt das Lithium mit $Z = 3$ und $A = 7$. Also muß sein Kern 3 Protonen und 4 Neutronen enthalten.

Da der Kern so viel Protonen enthält, wie seine Ordnungszahl Z angibt, das Atom *als Ganzes* aber elektrisch *neutral* ist, muß die Atomhülle die gleiche Zahl von Elektronen enthalten:

Ordnungszahl Z: Anzahl der in der Hülle enthaltenen Elektronen.

Das Periodensystem der Elemente (relative Atommassen 1961)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1	1 H 1.00797								2 He 4.0026
2	3 Li 6.939	4 Be 9.0122	5 B 10.811	6 C 12.011 15	7 N 14.0067	8 O 15.9994	9 F 18.9984		10 Ne 20.183
3	11 Na 22.9898	12 Mg 24.312	13 Al 26.9815	14 Si 28.086	15 P 30.9738	16 S 32.064	17 Cl 35.453		18 Ar 39.948
4	19 K 39.102	20 Ca 40.08	21 Sc 44.956	22 Ti 47.90	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.9381	26 Fe 27 Co 28 Ni 55.847 58.9332 58.71	
4	29 Cu 63.54	30 Zn 65.37	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.909		36 Kr 83.80
5	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.905	40 Zr 91.22	41 Nb 92.906	42 Mo 95.94	43 Tc	44 Ru 45 Rh 46 Pd 101.07 102.905 106.4	
5	47 Ag 107.870	48 Cd 112.40	49 In 114.82	50 Sn 118.69	51 Sb 121.75	52 Te 127.60	53 J 126.9044		54 Xe 131.30
6	55 Cs 132.905	56 Ba 137.34	57 La 138.91 58–71	72 Hf 178.49	73 Ta 180.948	74 W 183.85	75 Re 186.2	67 Os 77 Ir 78 Pt 190.2 192.2 195.09	
6	79 Au 196.967	80 Hg 200.59	81 Tl 204.37	82 Pb 207.19	83 Bi 208.980	84 Po	85 At		86 Rn
7	87 Fr	88 Ra 226.05	89 Ac 90–103						

6	58 Ce 140.12	59 Pr 140.907	60 Nd 144.24	61 Pm	62 Sm 150.35	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.924	66 Dy 162.50	67 Ho 164.930	68 Er 167.26	69 Tm 168.934	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97
7	90 Th 232.038	91 Pa	92 U 238.03	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw

46.3. Bau des Wasserstoffatoms

Da der Wasserstoff durch seine geringe Dichte auffällt und auch die *kleinste Atommasse* besitzt, hat man schon vor langer Zeit vermutet, daß der Wasserstoff als Grundbestandteil aller übrigen Elemente in Frage käme. Es hat sich später auch tatsächlich herausgestellt, daß das Wasserstoffatom gegenüber allen anderen Atomen den einfachsten Aufbau hat.
Sein Kern besteht aus *einem Proton*, dessen elektrisch positive Ladung durch ein *einzelnes Hüllenelektron* ausgeglichen wird. Betrachtet man dieses nach RUTHERFORD als ein kleines Körperchen (Korpuskel), so muß es auf einer – wie man zunächst annehmen kann – *kreisförmigen Bahn* um den Kern laufen. Die Kreisbahn wird erzwungen durch die Kraft der elektrostatischen Anziehung. Sie spielt die Rolle der Zentripetalkraft bei mechanischen Drehvorgängen. Ihre radial nach außen wirkende Gegenkraft ist die Fliehkraft. Bei fehlender Rotation müßte das Elektron, der elektrischen Kraft folgend, in den Kern hineinfallen und diesen neutralisieren.

46.3.1. Bohrsche Postulate

Diese zunächst nur rohe Vorstellung RUTHERFORDS konnte aber einen überaus wichtigen Vorgang noch nicht erklären: die *Emission und Absorption des Lichtes*. Zerlegt man nämlich das von einem bestimmten chemischen Element unter bestimmten Bedingungen (z. B. in der Glimmentladung, S. 42.2.1.) ausgesandte Licht mit dem Spektralapparat, so finden sich bei jeder Atomart charakteristische Serien von Wellenlängen. Diese Linienspektren müssen mit den Gesetzen zusammenhängen, nach denen sich die Elektronen um den Kern bewegen. Aus diesem Gedanken heraus gelang es dem dänischen Physiker NIELS BOHR 1913, ein Atommodell zu entwerfen, aus dem sich u. a. die Spektrallinien des Wasserstoffs genau berechnen lassen.

Dabei stellte er zunächst **3 Postulate** auf:

1. Das Atom hat gewisse strahlungslose Zustände, in denen das Elektron auf Kreisbahnen von ganz bestimmten Radien umläuft. In jedem dieser Zustände hat es eine entsprechende Energie W_n.

Auf dieser Kreisbahn laufend, müßte aber das Elektron fortwährend Energie ausstrahlen, da es eine schwingende elektrische Ladung darstellt. BOHR nahm daher im bewußten Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik an, daß gewisse **strahlungsfreie Bahnen** existieren, auf denen das Elektron umläuft (Bild 683).

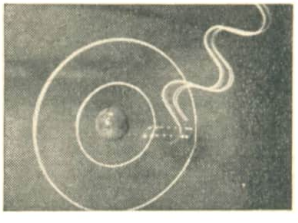


Bild 683. Emission eines Lichtquantes beim Übergang des Elektrons auf eine dem Kern nähere Bahn (schematisch)

2. Bei einem Übergang von einem Zustand W_m zu einem anderen W_n, der stets sprunghaft erfolgt, wird genau ein Lichtquant emittiert oder absorbiert.

Das steht im Einklang mit der PLANCKschen Strahlungstheorie, wonach die Energie einer elektromagnetischen Strahlung nur in ganzzahligen Vielfachen des Produktes $h\nu$ existiert. Dabei ist h das **Wirkungsquantum** (PLANCKsche Konstante, S. 369) und ν die Frequenz der Strahlung. Die kleinstmögliche Strahlungsenergie ist diejenige eines einzelnen Lichtquants

$$W = h\nu.$$

Das 2. Postulat liefert demnach die **Frequenzbedingung:**

(440) $$W_m - W_n = h\nu.$$

BOHR hat also die RUTHERFORDsche Vorstellung vom kreisenden Elektron mit der quantenmäßigen Struktur des Lichtes verbunden. Da aber das Atom nicht beliebige, sondern nur ganz bestimmte Frequenzen aussendet, mußte noch eine dritte Annahme gemacht werden. Sie ergibt sich aus dem Gedanken, dem Wirkungsquantum h eine atomare Größe zuzuordnen, die erstens die gleiche Dimension wie das Wirkungsquantum hat und der man zweitens die Eigenschaft zuschreibt, nur in ganzzahligen Vielfachen zu existieren. Diese ist der *Drehimpuls* des als Massenpunkt betrachteten Elektrons. Er ist das Produkt aus seinem Massenträgheitsmoment $J = m_e r^2$ und der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der es auf der Kreisbahn umläuft. Dabei ergab sich die Notwendigkeit, noch den Faktor 2π einzuführen:

3. Das 2π-fache des Bahndrehimpulses des umlaufenden Elektrons beträgt nur ganzzahlige Vielfache des Wirkungsquantums h.

(441) **Quantenbedingung:** $m_e r^2 \omega 2\pi = nh$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Rein formal erhält man den Faktor 2π, wenn man den Drehimpuls als Produkt aus dem Impuls $m_e v = m_e r\omega$ und der umlaufenen Kreisbahn $2\pi r$ auffaßt: $m_e v\, 2\pi r = m_e r^2 \omega\, 2\pi$.

46.3.2. Spektrallinien des Wasserstoffs

Mit den 3 BOHRschen Postulaten verläuft die Rechnung folgendermaßen. Da Proton und Elektron als punktförmige Ladungen betrachtet werden können, gilt das COULOMBsche Gesetz (352). Fliehkraft (S. 107) und elektrostatische Anziehung ergeben die Gleichung

(442) $$m_e r\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}.$$

(e Elementarladung, m_e Masse des Elektrons). Setzt man hier die aus der Quantenbedingung (441) folgende Winkelgeschwindigkeit ω ein, so erhält man

(443) $$\boxed{r = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi e^2 m_e}}$$ **Bahnradien des Elektrons im Wasserstoffatom**

Für n kann man beliebige ganze Zahlen einsetzen. Es sind also grundsätzlich alle möglichen Radien denkbar. Der kleinste Bahnradius folgt mit $n = 1$. Das ergibt mit $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws^2}$ (S. 369)

$$r = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\;1^2\,(6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws^2})^2}{\mathrm{Vm}\,(1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As})^2\,\pi\,9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

Wenn sich das Elektron auf dieser soeben berechneten Bahn bewegt, befindet sich das Atom im **Grundzustand.** Der berechnete Atomradius stimmt in seiner Größenordnung übrigens sehr gut mit dem Wert überein, der sich auf S. 248 ergeben hat.

Unter bestimmten Umständen kann sich das Elektron auch auf den *höheren Bahnen* bewegen, die sich ergeben, wenn man n der Reihe nach gleich 2, 3, 4, ... setzt (Bild 684). Dann ergibt die letzte Gleichung:

Die Bahnradien des Wasserstoffatoms verhalten sich wie die Quadrate ganzer Zahlen zueinander.

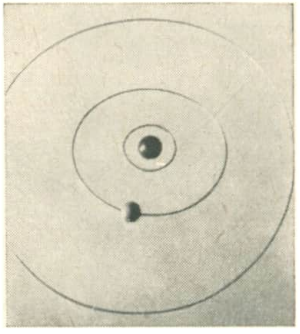


Bild 684. Wasserstoffatom mit den Kreisbahnen der Hauptquantenzahlen $n = 1$, 2 und 3 (vergrößertes Bohrsches Modell)

Solange das Elektron auf einer der erwähnten Bahnen umläuft, geschieht noch nichts weiter. Wenn es aber von einer höheren Bahn auf eine andere, kernnähere Bahn *überwechselt*, wird sein Energiegehalt geringer. Die *Differenz* dieser Energien wird dann als **Lichtquant** von der Größe $h\nu$ **emittiert.** Umgekehrt vollzieht sich die *Absorption* eines Lichtquants dadurch, daß das Elektron auf eine *kernfernere* Bahn *gehoben* wird.

Wenn das Elektron durch Aufnahme eines Lichtquants auf eine *kernfernere Bahn gehoben* ist, sagt man, das Atom sei **angeregt.** Dies kann z. B. auch durch Erhitzen eines Gases vor sich gehen. Dadurch erleiden die Atome infolge ihrer sich steigernden Bewegung zahlreiche Zusammenstöße, wodurch die am weitesten außen liegenden Elektronen angeregt werden und bei Rückkehr in den **Grundzustand** Licht ausstrahlen. Die **Verweilzeit** im angeregten Zustand ist außerordentlich kurz und beträgt etwa 10^{-8} s.

Damit wird auch das Leuchten verdünnter Gase in der Glimmentladung (42.2.1.) verständlich. Die Anregung geschieht hierbei durch Elektronen, die mit großer Geschwindigkeit gegen die Atomhülle prallen.

Die Frequenzen des ausgestrahlten Lichtes ergeben sich nach dem 2. Bohrschen Postulat aus den hierbei auftretenden Energiedifferenzen. Das Elektron hat gegenüber dem Kern eine gewisse potentielle Energie W_{pot} und vermöge seiner Eigenbewegung außerdem noch kinetische Energie W_{kin}.

Um die *potentielle Energie* zu berechnen, geht man davon aus, daß sich das Elektron ursprünglich im Abstand $r = \infty$ vom Kern befindet. Wenn es von hier auf den Abstand r gelangt, wird eine Arbeit frei, die sich als Produkt aus Kraft · Weg ergibt. Da aber die Coulombsche Anziehungskraft F eine Funktion des Weges ist, gilt

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}} = F\,\mathrm{d}r\,.$$

Mit der Kernladung $+e$, der Elektronenladung $-e$ und dem Ausdruck (352) für F ist dann die potentielle Energie des Elektrons

$$W_{\text{pot}} = \int_{\infty}^{r} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = -\left|\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{444}$$

Die *kinetische Energie* des kreisenden Elektrons ist ferner

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e r^2 \omega^2}{2}.$$

Mit Hilfe von Gleichung (442) kann man sie auch in der Form schreiben

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_e r^2 \omega^2}{2} = \frac{e_e}{2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Man sieht beim Vergleich mit (444), daß die kinetische Energie den halben Betrag der potentiellen Energie hat. Die Gesamtenergie des Elektrons ist dann

$$W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck den Atomradius (443) ein, so ergibt sich für die **Energie W_n des Elektrons auf der n-ten Bahn**

$$W_n = -\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}.$$

Wie schon gesagt, geschieht die Emission eines Lichtquants dadurch, daß das Elektron von der m-ten Bahn (mit größerer Energie) auf die n-te Bahn (mit kleinerer Energie) überwechselt. Die dabei frei werdende Energie ist nach (440) gleich der Differenz

$$W_{mn} = W_m - W_n = h\nu.$$

Damit werden die **Frequenzen des ausgestrahlten Lichtes**

$$\nu = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{445}$$

(Man beachte beim Nachrechnen die *Vorzeichen!*)
Der vor der Klammer stehende Ausdruck heißt **Rydberg-Frequenz R** und hat für das Wasserstoffatom den Wert

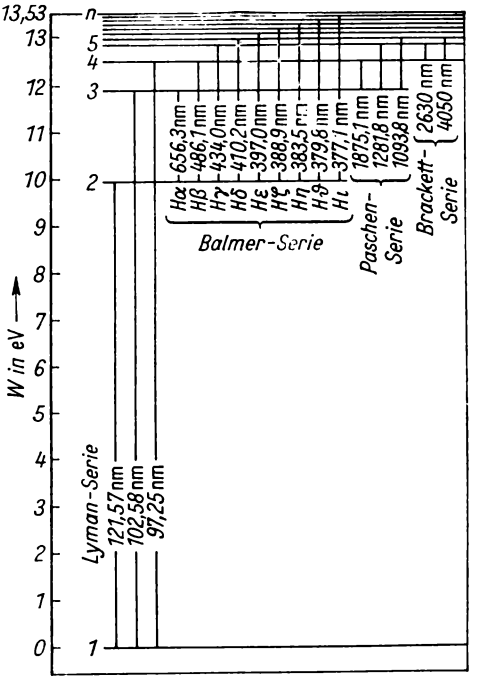
$$R_{\text{H}} = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^3} = \frac{1{,}602^4 \cdot 10^{-76}\,(\text{As})^4\, 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{8 \cdot 8{,}854^2 \cdot 10^{-24}\,(\text{As/Vm})^2\, 6{,}62^3 \cdot 10^{-102}\,\text{W}^3\,\text{s}^6} = 3{,}29 \cdot 10^{15}\,1/\text{s}. \tag{446}$$

Damit erhält man den kürzeren Ausdruck

$$\boxed{\nu = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)} \tag{447}$$

Mit dieser Formel lassen sich die hauptsächlichsten, von leuchtendem Wasserstoff ausgesandten Wellenlängen ermitteln, wobei die Ergebnisse sehr gut mit den optisch gemessenen Werten übereinstimmen.

Bild 685. Termschema des Wasserstoffs



Dabei besteht für das Elektron eine ganze Reihe von Sprungmöglichkeiten (Bild 685). Es kann übergehen

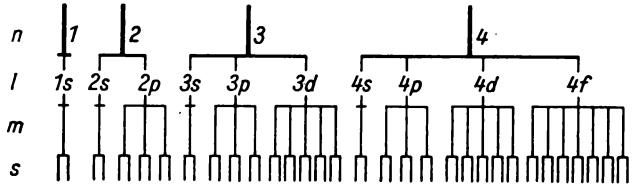
1. von der $n.$, ..., 5., 4., 3., 2. auf die 1. Bahn (LYMAN-Serie im Ultraviolett);
2. von der $n.$, ..., 5., 4., 3. auf die 2. Bahn (BALMER-Serie im Sichtbaren);
3. von der $n.$, ..., 5., 4., auf die 3. Bahn (PASCHEN-Serie im Ultrarot);
4. von der $n.$, ..., 5. auf die 4. Bahn (BRACKETT-Serie im Ultrarot).

Wie sich leicht nachrechnen läßt, gehören die 5 auf S. 310 aufgeführten Spektrallinien des Wasserstoffs (656,3, 486,1, 434,0 nm usw.) der zuerst von **Balmer 1885** ohne Kenntnis des Atombaues berechneten Serie an.

46.3.3. Quantenzahlen

Für die Energiezustände des im Wasserstoffatom befindlichen Elektrons ist das Auftreten einer Folge ganzer Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ charakteristisch, welche zugleich auch die Bahnradien bestimmen. Man bezeichnet sie als **Hauptquantenzahlen** n.
Wie die von SOMMERFELD (1915) verbesserte Theorie ergab, kann das Elektron aber auch Ellipsenbahnen beschreiben, wie die Planeten bei ihrem Lauf um die Sonne. Dementsprechend zerfällt jede durch eine Hauptquantenzahl bezeichnete Energiestufe in so viel Einzelniveaus, wie der Zahlenwert der Hauptquantenzahl n beträgt. Sie werden durch die **Nebenquantenzahl** $l = 0, 1, 2, \ldots$ erfaßt, die Energieniveaus selbst aber mit den Buchstaben s, p, d, f bezeichnet. Zur Hauptquantenzahl $n = 3$ gehören z. B. entsprechend den Nebenquantenzahlen 0, 1 und 2 die 3 Energieniveaus $3s$, $3p$ und $3d$. Zur Hauptquantenzahl $n = 2$ gehören lediglich die beiden Niveaus $2s$

Bild 686. Die Aufspaltung der den Hauptquantenzahlen $n = 1$ bis 4 entsprechenden Energiestufen (nicht maßstäblich)



und $2p$, sowie zur Hauptquantenzahl $n = 1$ nur das einzige Niveau $1s$ (Bild 686). Wie weitere Untersuchungen ergaben, können die Elektronen auch durch Magnetfelder von außen her beeinflußt werden, was wiederum mit kleinen sprunghaften Energieänderungen verbunden ist. Jeder dieser Zustände wird mit der **magnetischen Quantenzahl** m bezeichnet. Jedes der mit der Nebenquantenzahl l bezeichneten Einzelniveaus zerfällt in $(2l + 1)$ eng beieinanderliegende Energiezustände. Alle den Index d ($3d$, $4d$ usw.) tragenden Niveaus können hierbei in 5 unterschiedliche Zustände[1]) aufgespalten werden; die den Index p ($2p$, $3p$ usw.) tragenden Niveaus zerfallen in 3 diskrete Stufen. Die Zustände mit dem Index s ($1s$, $2s$ usw.) existieren jedoch nur einfach.
Schließlich wird der Energiezustand des Elektrons noch dadurch bestimmt, daß es um seine eigene Achse rotiert. Man nennt diese Rotation den **Elektronenspin** und ordnet dem Elektron daher noch eine **Spinquantenzahl** s zu. Sie nimmt die beiden Werte $+1/2$ oder $-1/2$ an, je nachdem, ob die Rotation links- oder rechtsherum erfolgt.

46.3.4. Wellenmechanisches Atommodell

Trotz der anfänglichen großen Erfolge erwies sich die BOHR-SOMMERFELDsche Theorie im weiteren Verlauf der Entwicklung als unzulänglich. Ohne den dualen Charakter des Elektrons (S. 376) zu berücksichtigen, behandelte sie das Elektron nach den Gesetzen der klassischen Mechanik als ein auf Kreis- und Ellipsenbahnen von unterschiedlicher räumlicher Orientierung umlaufendes Masseteilchen. Die Unhaltbarkeit dieser Betrachtungsweise geht aber schon aus der physikalischen Unmöglichkeit des 1. BOHRschen Postulates hervor.

Ein weiteres Dilemma folgt aus der HEISENBERGschen Unschärfebeziehung (34.6.). Wie sich mit den Gleichungen (442, 443) leicht errechnen läßt, hat das im Wasserstoffatom kreisende Elektron eine Bahngeschwindigkeit von $2{,}2 \cdot 10^6$ m/s, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß das Elektron sich wenigstens *innerhalb* des Atoms befindet. Der Aufenthaltsort des Elektrons muß daher mit einer Genauigkeit von wenigstens $\Delta x = 10^{-10}$ m (Atomdurchmesser) bekannt sein. Die HEISENBERGsche Gleichung (301) fordert dann eine Ungenauigkeit der Geschwindigkeit von

$$\Delta v = \frac{h}{m \cdot \Delta x} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\ 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 7{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}\,.$$

Das ist das 3fache der Geschwindigkeit selbst! Es ist aber sinnwidrig zu sagen, das Elektron habe die Geschwindigkeit $2{,}2 \cdot 10^6$ m/s, wenn dieser Betrag mit einer Ungenauigkeit vom 3fachen Betrag behaftet ist. Die Annahme, das Elektron bewege sich auf einer exakten Kreisbahn, ist daher *nicht mehr berechtigt.*

Diese und noch weitere Schwierigkeiten sind inzwischen durch die von dem österreichischen Physiker SCHRÖDINGER (1926) entwickelte **Wellenmechanik** behoben worden. Hierzu stellte er die Differentialgleichung für eine dreidimensionale, um den Atomkern schwingende stehende Welle auf. Sie stellt ein kugelsymmetrisches Gebilde mit nach außen hin rasch abklingender Ladungsdichte dar. Das ist nicht etwa so zu ver-

[1]) Da der Buchstabe d für die Nebenquantenzahl $l = 2$ steht, ergibt sich für die Anzahl der Zustände $m = (2 \cdot 2 + 1) = 5$

stehen, daß die Ladung des Elektrons gleichsam pulverisiert und auf ein großes Raumgebiet verteilt wäre. Es ist vielmehr mit den Interferenzstreifen zu vergleichen, die bei der Beugung am Spalt auf dem Bildschirm entstehen. Deren Helligkeit ist nach S. 378 ein Maß für die *Wahrscheinlichkeit*, daß irgendein Teilchen an eine ins Auge gefaßte Stelle des Schirms hingelangen kann. In entsprechender Weise ist die Dichte der um den Kern gebreiteten Welle ein Maß für die *Wahrscheinlichkeit*, das Elektron an der betreffenden Stelle vorzufinden.

Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung führt ebenfalls auf die genannten Quantenzahlen und Energiezustände des Elektrons. Das Ordnungsschema und die Bezeichnungen der ursprünglichen BOHR-SOMMERFELDschen Theorie konnten deshalb fast unverändert übernommen werden. An die Stelle der bisherigen „Bahnen" treten nunmehr *räumliche Gebiete*, deren Form vom Energiezustand des Elektrons abhängt. Diese *Aufenthaltsräume* nennt man auch **Orbitale.**

Im Grundzustand $1s$ erfüllt das Orbital einen kugelförmigen Raum mit nach außen hin rasch abnehmender Ladungsdichte (Bild 687a). In Kernnähe ist die Dichte besonders groß, und zwar in einem Gebiet, dessen Radius dem der ersten BOHRschen Kreisbahn entspricht.

Im Zustand $2s$ zerfällt das Orbital in einen kugelförmigen Innenraum und eine weiter außen liegende Kugelschale, wo die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons besonders groß ist (Bild 687b). Ihr Radius entspricht etwa dem der zweiten BOHRschen Kreisbahn.

Im Zustand $2p$ nimmt das Orbital hantelförmige Gestalt an, d. h. die Form zweier seitlich zusammengedrückter Kugeln beiderseits das Atomkerns (Bild 687c). Das Elektron kann sich also mit gleicher Wahrscheinlichkeit in der einen *oder* anderen Hälfte des Orbitals $2p$ befinden. Entsprechend den 3 Achsenrichtungen des Koordinatensystems kann dieses Orbital noch 3 verschiedene *energetisch gleichwertige* räumliche Lagen einnehmen, womit die in der Übersicht S. 546 genannten 3 Einzelzustände $2p_x$, $2p_y$ und $2p_z$ entstehen.

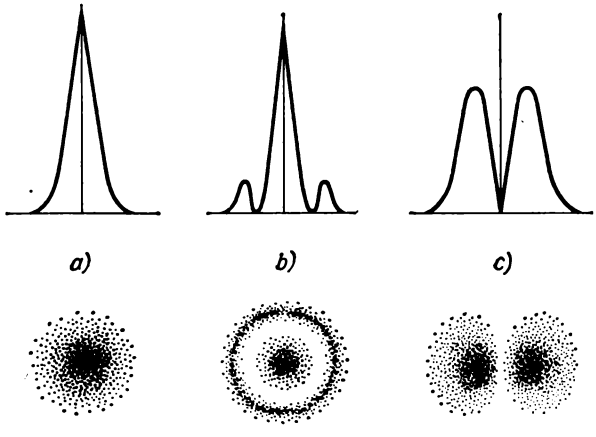


Bild 687. Ladungsdichte und Aufenthaltsräume (Orbitale) der Elektronen $1s$, $2s$ und $2p$

46.4. Atomhüllen der Elemente

Die 4 Quantenzahlen n, l, m und s geben zunächst darüber Auskunft, welche Energiestufen ein einzelnes in der Atomhülle befindliches Elektron einnehmen kann. Das auf Bild 686 wiedergegebene Schema gilt aber auch für alle übrigen Elektronen eines Atoms. Hierbei gilt das

Pauli-Prinzip:

Zwei Elektronen eines Atoms dürfen niemals in allen 4 Quantenzahlen übereinstimmen.

Hieraus folgt unmittelbar, daß jedes der auf Bild 686 angegebenen Energieniveaus mit *höchstens 2 Elektronen* von *entgegengesetzter* Spinrichtung besetzt werden kann.
Um die Einordnung der Elektronen in die Atomhülle besser übersehen zu können, faßt man ferner alle zu einer Hauptquantenzahl n gehörenden Elektronen zu einer **Hauptschale** zusammen und bezeichnet diese mit den Buchstaben K, L, M, N und O. Entsprechend der Nebenquantenzahl zerfallen die Hauptschalen in **Unterschalen.** Diese spalten sich wiederum gemäß der magnetischen Quantenzahl m in einzelne **Zellen** auf. Jede dieser Zellen kann, wie soeben festgestellt wurde, von 2 Elektronen entgegengesetzter Spinrichtung besetzt werden und besteht dann aus 2 kongruenten, einander vollständig durchdringenden Orbitalen.
Aus der folgenden Übersicht ist (ebenso wie auch aus Bild 686) zu entnehmen, daß die L-Schale höchstens 8 oder die M-Schale nicht mehr als 18 Elektronen aufnehmen kann.

Besetzungsmöglichkeiten der ersten 3 Hauptschalen

Hauptquantenzahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ Hauptschalen	Nebenquantenzahl $l = 0, 1, 2, \ldots$ Unterschalen	magnet. Quantenzahl $m = -l, \ldots, 0, \ldots, +l$ Anzahl der Zellen	maximale Anzahl der Elektronen	
			Unterschale	Hauptschale
K	$1s$	1	2	2
L	$2s$	1	2	
	$2p$	3 ($2p_x$, $2p_y$, $2p_z$)	6	8
M	$3s$	1	2	
	$3p$	3 ($3p_x$, $3p_y$, $3p_z$)	6	
	$3d$	5	10	18

Die Anzahl der in die Atomhülle einzubauenden Elektronen richtet sich nach der *Ordnungszahl* im Periodensystem der Elemente (S. 538); denn diese ist mit der jeweiligen Elektronenzahl identisch. Dabei gelten folgende Regeln:

1. Die energetisch am *tiefsten* liegenden Schalen bzw. Zellen werden von den Hüllenelektronen stets *zuerst* besetzt.

2. Jede Zelle der zu besetzenden Unterschale erhält zunächst nur je 1 Elektron von *gleicher* Spinrichtung (HUNDsche Regel).

3. Erst wenn alle Zellen einer Unterschale je ein Elektron enthalten, werden sie durch ein zweites Elektron mit *entgegengesetztem* Spin *ergänzt.*

Auf das bereits besprochene Wasserstoffatom folgen daher der Reihe nach folgende Atome:

Helium (2 Elektronen wegen $Z = 2$): Die Zelle $1s$ nimmt noch ein zweites Elektron mit entgegengesetztem Spin auf (Regel 3). Es sind damit 2 Orbitale $1s$ vorhanden, die sich gegenseitig vollständig durchdringen.

Lithium (3 Elektronen): Das neu hinzutretende Elektron wird in die Unterschale $2s$ eingebaut (Regel 1) und befindet sich vorwiegend im äußeren Teil des Orbitals $2s$.

Beryllium (4 Elektronen): Die zuletzt genannte Unterschale $2s$ nimmt noch ein zweites Elektron auf (Regel 3).

Bohr (5 Elektronen): Das 5. Elektron besetzt eine der 3 Zellen $2p_x$, $2p_y$ oder $2p_z$ der Unterschale $2p$.

Kohlenstoff (6 Elektronen): Nach Regel 2 wird eine weitere Zelle mit einem Elektron gleicher Spinrichtung belegt. Es sind damit 2 rechtwinklig zueinander angeordnete Orbitale $2p_x$ und $2p_y$ vorhanden.

Stickstoff (7 Elektronen): Das nächste Elektron belegt die wiederum rechtwinklig zu den bereits vorhandenen orientierte Orbitale $2p_z$ (Bild 688).

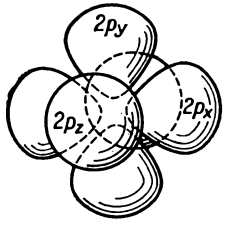


Bild 688. Räumliche Anordnung der Orbitale $2p_x$, $2p_y$ und $2p_z$ im Stickstoffatom

Sauerstoff bis Neon: Die 3 genannten Zellen $2p_x$, $2p_y$ und $2p_z$ werden mit je 1 Elektron ergänzt.

Natrium (11 Elektronen): Das 11. Elektron des Natrium belegt die Zelle $3s$. Das entsprechende Orbitale besteht aus 3 konzentrischen Teilen, von denen das Elektron den am weitesten außen liegenden Aufenthaltsraum bevorzugt. Alle übrigen weiter innen liegenden Orbitale durchdringen sich gegenseitig vollständig.

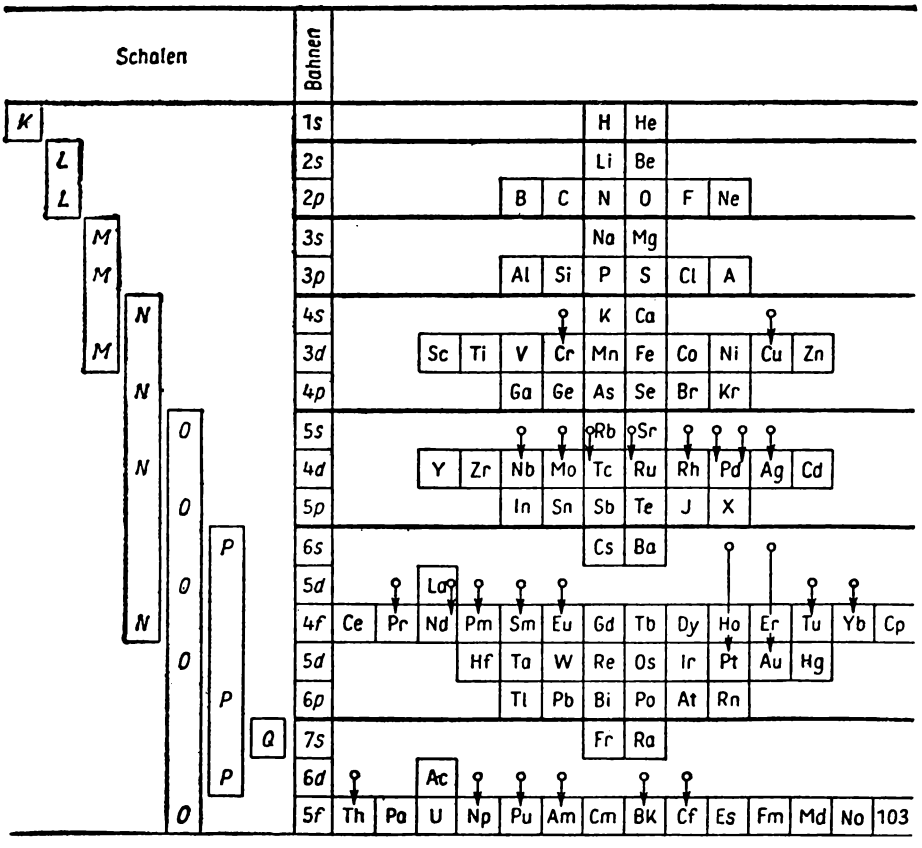
Aus der Übersicht S. 548 erkennt man ferner, daß der Aufbau jeder Hauptschale mit einem *Alkalimetall* beginnt. Mit der Besetzung der jeweiligen p-Niveaus wird die Hauptschale vorläufig abgeschlossen, womit eine besonders stabile Konfiguration erreicht wird. Hier steht am Schluß stets ein *Edelgas*. Das Krypton beschließt z. B. die Unterschale $4p$. Da die Unterschale $5s$ energetisch tiefer als die Unterschalen $4d$ und $4f$ liegt, werden diese erst später eingebaut.
Die folgende Übersicht zeigt den Aufbau aller Atome des Periodensystems der Elemente, aus dem sich viele chemische und physikalische Eigenschaften ableiten lassen.

Beispiele: 1. Aus der analogen Stellung der Halogene F, Cl, Br und J erklärt sich das chemisch ähnliche Verhalten dieser Elemente.

2. Die leichte Ionisierbarkeit und chemische Aktivität der Alkalimetalle erklärt sich daraus, daß das zuletzt eingebaute Elektron sich vorzugsweise im äußersten Teil des s-Orbitals aufhält.

Elektronenverteilung der Elemente

Auffüllung der Elektronenschalen in der Reihenfolge der Ordnungszahl



Die Elemente mit dem Zeichen $\overset{\circ}{\downarrow}$ übernehmen ein *s*-Elektron in die Unterschale *d* bzw. ein *d*-Elektron in die Unterschale *f*.

3. Welchen Elektronenaufbau hat das Kupfer? – Alle Unterschalen von $1s$ bis $4s$ sind voll besetzt, das sind 20 Elektronen. Die außerdem noch eingebaute Unterschale $3d$ ist mit 9 Elektronen besetzt, wozu noch 1 Elektron kommt, das aus der Zelle $4s$ übernommen wird und dafür dort fehlt.

4. Das ferromagnetische Verhalten der Elemente Eisen, Kobalt und Nickel ist darauf zurückzuführen, daß die Unterschale $3d$ mehrere Elektronen mit noch nicht kompensiertem einheitlichem Spin enthält und der Radius dieser Unterschale gegenüber den Atomabständen im Kristallgitter klein ist.

46.5. Röntgenstrahlung

Wichtige Beiträge zur Aufklärung des Atombaus lieferte die 1895 entdeckte **Röntgenstrahlung.** Es handelt sich hierbei um eine sehr kurzwellige elektromagnetische Strahlung, deren Wellenlängen etwa in den Bereich von 10^{-13} bis 10^{-8} m fallen (sichtbares Licht liegt zwischen etwa 3,8 und $7{,}8 \cdot 10^{-7}$ m).

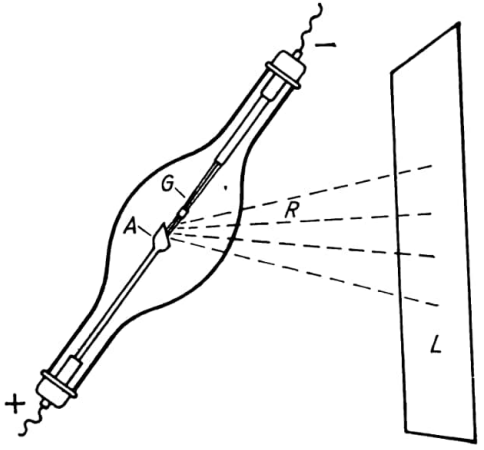


Bild 689. Röntgenröhre



Bild 690. Eine der ersten Röntgenaufnahmen: die Hand von Röntgens Frau

Prinzipiell entstehen Röntgenstrahlen immer dann, wenn schnell bewegte Elektronen auf einen festen Körper treffen. Praktisch verwendet man hierzu die **Röntgenröhre** (Bild 689). Die von der Glühkatode G emittierten Elektronen werden im Vakuum zur Anode A hin beschleunigt. Die Spannung beträgt je nach Verwendungszweck einige 10 000 bis 100 000 V. Bei den technischen Röhren besteht die Anode meist aus einem Wolframklotz, der nach der Richtung abgeschrägt ist, wohin die Strahlung austreten soll. Fällt die Strahlung R auf einen Leuchtschirm L, so wird sie durch die Fluoreszenz seines Belages (mit Silber aktiviertes Zinksulfid) indirekt sichtbar.

Haupteigenschaften der Röntgenstrahlung:

1. Großes *Durchdringungsvermögen* für fast alle Körper, auch Metalle;
2. Schwärzung fotografischer Schichten, so daß auf lichtempfindlichem Film ein *Schattenbild* des durchstrahlten Gegenstandes entsteht;
3. *zerstörende* Wirkungen auf *lebende* Gewebe, weshalb mit der Strahlung sehr vorsichtig umgegangen werden muß (s. 47.6.5.).
4. Der Brechungsindex aller Stoffe für Röntgenstrahlen weicht nur wenig von 1 ab.
5. Gase werden ionisiert, wodurch z. B. Luft elektrisch leitend wird.

*Kurz*wellige Röntgenstrahlen werden als *„hart"*, *länger*wellige als *„weich"* bezeichnet. Die Röntgenstrahlung setzt sich aus 2 Komponenten zusammen, die sich durch ihre Entstehungsursache grundsätzlich unterscheiden. Es handelt sich dabei um

1. die Bremsstrahlung: kontinuierliches Spektrum

2. die charakteristische Strahlung: Linienspektrum des Anodenmaterials.

Beide Komponenten treten meist gleichzeitig auf und überlagern sich gegenseitig. Sie werden im folgenden getrennt betrachtet.

46.5.1. Bremsstrahlung

Die Röntgenbremsstrahlung entsteht dadurch, daß die schnell bewegten Elektronen in den Kraftfeldern der Atomhülle abgebremst werden. Die den Elektronen dabei verlorengehende *kinetische Energie* setzt sich in *elektromagnetische Strahlung* um. Das erfolgt in der unregelmäßigsten Weise, so daß die Bremsstrahlung ein **kontinuierliches Spektrum** ergibt (Bild 691). Dieses ist nach der kurzwelligen Seite hin scharf *begrenzt*, denn im Höchstfall kann das Elektron nicht mehr als seine gesamte Energie einbüßen, und diese ist durch die an der Röhre liegende Anodenspannung U gegeben. Die maximale Energie des einzelnen Strahlungsquantes ergibt sich damit aus der Gleichung

$$eU = h\nu,$$

woraus sich die größtmögliche Frequenz ν_{grenz} der Strahlung ergibt:

(448) $$\boxed{\nu_{grenz} = \frac{eU}{h}}$$ **Grenzfrequenz ν_{grenz} der Röntgenbremsstrahlung**

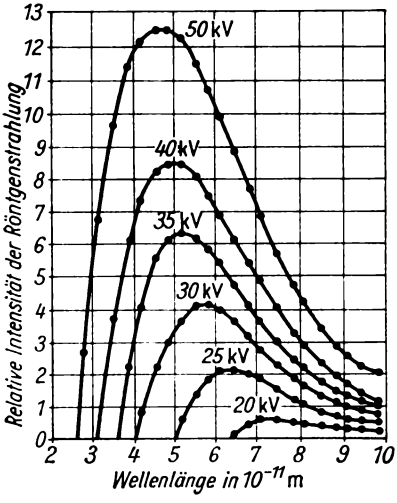


Bild 691. Intensitätsspektrum der Röntgenbremsstrahlung bei verschiedenen Spannungen

Die gesamte Energie des Anodenstroms setzt sich dagegen nur zu einem kleinen Bruchteil in Röntgenstrahlung um. Der Wirkungsgrad liegt in der Größenordnung von etwa 1%. Der überwiegende Teil der zugeführten Energie erscheint in Form von Wärme.

Beispiel: Für eine Anodenspannung von 30000 V erhält man als Grenzfrequenz der Bremsstrahlung nach Gleichung (448)

$$\nu_{\text{Grenz}} = \frac{eU}{h} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 3 \cdot 10^{4}\,\text{V}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Ws}^2} = 7{,}25 \cdot 10^{18}\,\text{Hz}$$

entsprechend einer Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,\text{m s}}{7{,}25 \cdot 10^{18}\,\text{s}} = 4{,}14 \cdot 10^{-11}\,\text{m}\ \text{(s. Bild 691).}$$

46.5.2. Charakteristische Strahlung

Die charakteristische Röntgenstrahlung hat im Gegensatz zur Bremsstrahlung *diskontinuierlichen* Charakter. Sie entsteht durch Quantensprünge von Elektronen, die der Hülle des betreffenden Atoms angehören, d. h. nach einem ganz ähnlichen Mechanismus, nach dem auch das sichtbare Licht zustande kommt. Während dieses aber nur von den *äußersten* Elektronen der Hülle („Leuchtelektronen") ausgesandt wird, entstehen die Quanten der charakteristischen Röntgenstrahlung durch Änderungen des Energieniveaus von Elektronen innerhalb der *kernnächsten* Schalen.
Das Spektrum dieses Anteils des Röntgenlichtes läßt sich, ähnlich wie das des sichtbaren Lichtes, in einzelne *Serien* gruppieren, die mit einer gewissen Verschiebung bei allen Elementen wiederkehren.
Die Strahlung wird ebenfalls von den Elektronen hervorgerufen, die, von der Katode kommend, in die Anode eindringen. Hier schlagen sie Elektronen aus den *tiefer liegenden Schalen* der Atome heraus. Auf diese Weise entsteht z. B. in der K-Schale eine *Lücke*, die dadurch wieder geschlossen wird, daß ein Elektron aus der benachbarten L-Schale in diese Lücke zurückfällt. Der hierbei frei gewordene Platz in der L-Schale wird durch ein Elektron aus einer noch höheren Schale ausgefüllt usw. (Bild 692). In die K-Schale zurückfallende Elektronen geben die dann frei werdende Energie als Strahlung der **K-Serie** ab. Entsprechend ergeben Quantensprünge in die L-Schale die **L-Serie** usw.
Die Spektrallinien der K-Serie werden, entsprechend den Übergängen von der L-, M-, ... Schale, mit den Indizes α, β, ... versehen. Dabei macht sich auch noch die auf S. 543 erwähnte Aufspaltung der Hauptquantenzahl n in die Nebenquantenzahlen l bemerkbar. So zerfällt z. B. die Linie K_α in die dicht nebeneinander liegenden Linien $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$, da die zur Hauptquantenzahl $n = 2$ gehörigen Elektronen der L-Schale auch 2 unterschiedliche Energiezustände aufweisen.

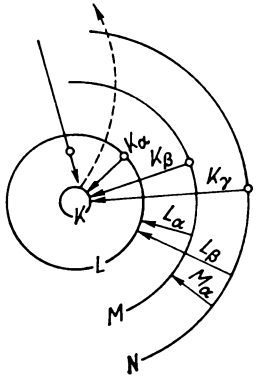


Bild 692. Entstehung der charakteristischen Röntgenstrahlung

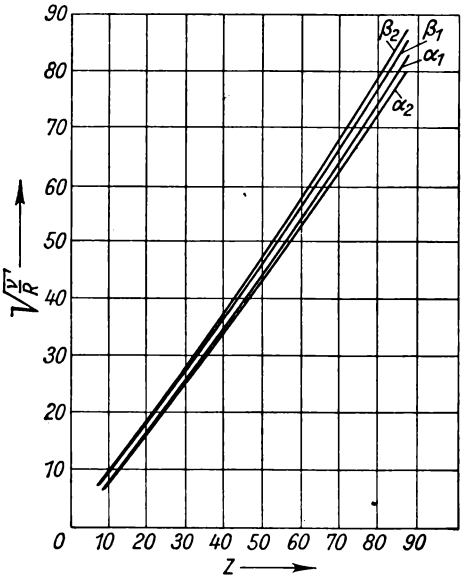


Bild 693. MOSELEY-Diagramm für einige Linien der K-Serie

Untersucht man die einander entsprechenden (homologen) Linien (z. B. alle $K_{\alpha 1}$-Linien) *bei verschiedenem Anodenmaterial*, so zeigt sich ein einfacher Zusammenhang mit der Ordnungszahl Z des betreffenden Elementes:

(449) **Moseleysches Gesetz:**
Die Quadratwurzeln aus den Frequenzen homologer Serienlinien sind der Ordnungszahl Z proportional (Bild 693).

$$\sqrt{\nu} \sim Z$$

Bei der Aufstellung einer genaueren Gleichung für die Linien der K-Serie ist noch zu berücksichtigen, daß das zweite noch in der K-Schale befindliche Elektron die wirksame Kernladung Z um eine Einheit vermindert. Das die K-Linie verursachende Elektron unterliegt jetzt also der verringerten COULOMBschen Kraft

$$F = \frac{(Z-1)\,e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Im weiteren läßt sich dann dieselbe Rechnung wie auf S. 542 durchführen. Sie führt zu der Serienformel

(450) $$\boxed{\nu = (Z-1)^2\, R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n'^2}\right)}$$ **Frequenzen der K-Serie des Röntgenspektrums**

Hiernach geben Metalle großer Atommasse auch die höchsten Frequenzen, d. h. kurzwelligsten (härtesten) Röntgenstrahlen ab.

Beispiele: 1. Ein Element der Ordnungszahl $Z = 50$ ergibt nach (450) für die Linie K_α mit $n' = 2$

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = (Z-1)\sqrt{1-\frac{1}{4}} = (50-1)\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = 42{,}4.$$

Dieser Zahlenwert kann auch aus dem MOSELEY-Diagramm (Bild 691) abgelesen werden.

2. Die härteste Röntgenstrahlung liefert das Uran ($Z = 92$). Für die Linie K_α erhält man

$$\nu = (Z-1)^2\, R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = (92-1)^2 \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15}\,{}^1/_{\mathrm{s}}\,(1 - {}^1/_4) = 2{,}04 \cdot 10^{19}\,\mathrm{Hz}$$

und damit die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}}{\text{s } 2{,}04 \cdot 10^{19}} = 1{,}47 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

46.6. Energiebändermodell

Wir haben gesehen, wie die Elektronen eines Atoms nur bestimmte Energiezustände annehmen können. Irgendwelche beliebigen Zwischenzustände sind nicht möglich. Diese *scharf definierten* Energieniveaus lassen sich schematisch als übereinanderliegende *Linien* darstellen (z. B. das Termschema des Wasserstoffatoms, Bild 685). Die Zwischenräume sind sogenannte *verbotene* Bereiche, in denen sich kein Elektron aufhalten kann.

In den festen Körpern und Flüssigkeiten existieren nun die Atome nicht unabhängig voneinander, sondern sind mit äußerst kleinen Abständen eng aneinandergepackt. Die Hülle eines jeden Atoms, insbesondere ihre äußeren Teile, befinden sich im elektrostatischen Feld der ringsum benachbarten Atome. Jedes Energieniveau wird dadurch in dicht nebeneinanderliegende Unterniveaus aufgespalten. Ihre Anzahl ist jedoch so groß, daß aus jedem ursprünglichen Niveau ein praktisch kontinuierliches Band von Energiewerten entsteht. Diese **Energiebänder** selbst sind (wie die scharfen Energieniveaus des freien, ungestörten Atoms) durch *verbotene Bereiche* voneinander getrennt. Da die äußersten Niveaus dem Störfeld der übrigen Atome am meisten ausgesetzt sind, ist hier die Verbreiterung besonders stark, während sie in Kernnähe vernachlässigt werden kann (Bild 694).

Hierbei unterscheidet man jeweils das

G- (Grund-) Band: das letzte vollbesetzte Energieband

sowie das

L-(Leitungs-) Band: das letzte, nur teilweise besetzte Band.

Wichtig ist, daß sich auch solche Energieniveaus verbreitern, auf denen noch gar keine Elektronen umlaufen.

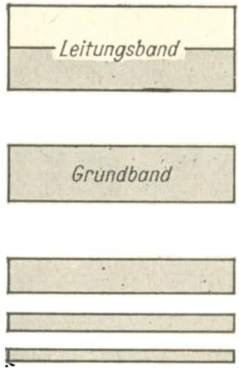


Bild 694. Energiebänder bei metallischer Leitung (Leitungsband teilweise besetzt) (Metall 1. Art)

46.6.1. Darstellung der metallischen Leitung

Mit Hilfe des Energiebändermodells gelingt eine besonders übersichtliche Darstellung der elektrischen Eigenschaften der Stoffe. Sie können den elektrischen Strom nämlich nur dann leiten, wenn das L-Band noch nicht voll mit Elektronen besetzt ist. Das ist der Fall, wenn die äußere Unterschale $2s$ oder $3s$ usw. nur ein Elektron enthält.

Denn hier können sich nach dem PAULI-Prinzip auch 2 Elektronen mit entgegengesetztem Spin aufhalten. Für die im L-Band befindlichen Elektronen bedeutet dies eine starke Herabsetzung der Ionisierungsenergie. Ihre Bindung an den Atomkern wird so schwach, daß man überhaupt nicht mehr von der Zugehörigkeit zu einem bestimmten Atom sprechen kann. Die Leitungselektronen gehören nicht mehr zu einzelnen Atomen, sondern zum Gitter des gesamten Kristalls. Sie bewegen sich frei in den Gitterzwischenräumen und bilden hier das schon besprochene Elektronengas (s. 40.1.).
Wie man dem Periodensystem (S. 538) entnimmt, betrifft das zunächst die chemisch einwertigen Metalle, wie beispielsweise Silber, Kupfer oder Natrium. Die das elektrische Leitvermögen bestimmenden Elektronen sind auch zugleich die bei chemischen Prozessen in Aktion tretenden Valenzelektronen:

Stoffe mit einem Valenzelektron je Atom sind elektrische Leiter.

Ist dagegen das L-Band völlig leer, so ist an sich keine Elektronenleitung möglich. Alle Elektronen im G-Band sind an ihre Atome gebunden; kein Elektron hat die Möglichkeit, an einen anderen Ort zu gelangen, weil alle Plätze im G-Band besetzt sind. Es ist allerdings noch denkbar, daß der Abstand bis zum darüberliegenden L-Band von Elektronen übersprungen werden könnte. Solche Fälle werden wir im nächsten Abschnitt betrachten. Wenn aber die eigene, d. h. thermische Energie der Elektronen nicht dazu ausreicht, sind dertige Stoffe Isolatoren (Bild 695):

Stoffe mit größerem Bandabstand und leerem L-Band sind Isolatoren.

Nun gibt es aber eine ganze Reihe von Metallen, deren L-Band zwar ebenfalls leer ist, die aber dennoch den Strom vorzüglich leiten. Bei ihnen ist das L-Band derartig verbreitert, daß es das G-Band überlappt. Die Elektronen können auf diese Weise ohne weiteres in das freie Gebiet eindringen und sich hier als Leitungselektronen betätigen (Bild 696). So ist es z. B. beim Magnesium der Fall. Bei diesem chemisch zweiwertigen Metall ist das Niveau 3*s* mit 2 Elektronen voll besetzt und wird vom nächsthöheren unbesetzten Niveau 3 *p* überlagert.

Wird das vollbesetzte G-Band von einem leeren L-Band überlappt, so ergibt sich ein elektrischer Leiter.

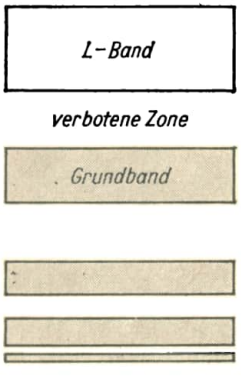


Bild 695
Energiebänder
eines Isolators

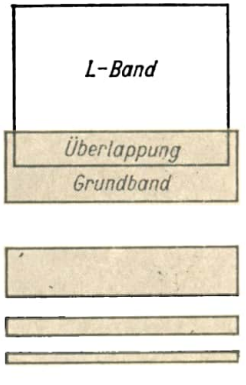


Bild 696
Energiebänder bei
metallischer Leitung
(Metall 2. Art)

46.6.2. Bändermodell der Halbleiter

Weshalb die Elemente Germanium und Silizium bei der Temperatur des absoluten Nullpunktes Isolatoren sind, wurde bereits erklärt (40.2.1.). Bei diesen Halbleitern ist das G-Band, hier auch häufig als **Valenzband** bezeichnet, voll besetzt. Der verbotene Zwischenraum bis zum nächsthöheren leeren Band hat eine Breite, die einem Energiebetrag von $\Delta W = 0{,}75$ eV (Germanium) bzw. $\Delta W = 1{,}20$ eV (Silizium) entspricht. Die bei anwachsender Temperatur frei werdenden Elektronen kann man als Teilchen eines Gases betrachten und ihre Energie nach dem hierfür gültigen Ausdruck (S. 254)

$$W = kT$$

berechnen. Für Zimmertemperatur 20°C und mit der BOLTZMANNschen Konstanten $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Ws/grd erhält man die Energie $W = 0{,}025$ eV. Zum Überspringen des verbotenen Bereiches ist das also zu wenig. Es ist aber zu bedenken, daß die tatsächlichen Energien der Elektronen sich statisch um diesen Mittelwert gruppieren und demzufolge auch viele Elektronen mit entsprechend größeren Energien vorhanden sind. Mit ansteigender Temperatur nimmt die Anzahl der ins L-Band übergehenden Elektronen zu, und so läßt sich die Eigenleitung des Halbleiters zwanglos erklären (Bild 697).

Befinden sich im Grundgitter des reinen Halbleiters Störstellen eingebettet, so kann man weiterhin abschätzen, daß diese Fremdatome viel leichter als im freien Zustand ionisieren. Die COULOMBschen Kräfte sind nämlich innerhalb eines Dielektrikums um den Faktor ε geringer als im leeren Raum. Beim Germanium ist $\varepsilon = 16$. Wird der Halbleiter beispielsweise mit Antimon dotiert, so gibt dieses 5wertige Element je Atom 1 Elektron an das L-Band ab. Man bezeichnet die Antimonatome als

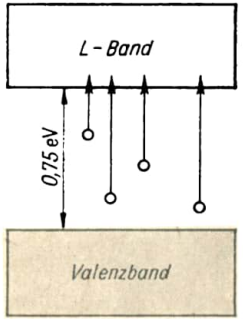


Bild 697. Energiebänder eines Halbleiters (Germanium) im Zustand der Eigenleitung: Vereinzelte Elektronen überspringen die verbotene Zone

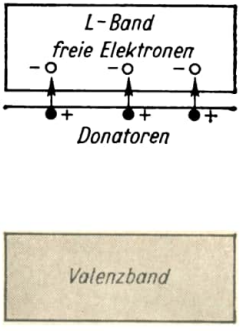


Bild 698. Energiebänder eines n-Leiters. Die Donatoratome geben Elektronen ins L-Band

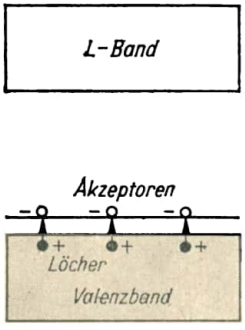


Bild 699. Energiebänder eines p-Leiters. Die Akzeptoren nehmen Elektronen aus dem Valenzband auf

Donatoren (Elektronenspender) und trägt sie entsprechend ihrer energetischen Lage mit etwa 0,01···0,05 eV nahe dem unteren Rand des L-Bandes ein (Bild 698). Damit ist angedeutet, wie leicht Donatoren ihre überschüssigen Elektronen ins L-Band abgeben.
In entsprechender Weise wirkt die Dotierung mit chemisch 3wertigen Elementen, wie z. B. mit Indium. Man nennt ihre Atome **Akzeptoren** (Elektronenfänger), weil sie leicht ein viertes Elektron binden und dadurch zu negativen Ionen werden.
Im Bändermodell liegen die Akzeptoren nahe dem oberen Rand des Valenzbandes (Bild 699). Damit kommt wieder zum Ausdruck, daß es nur eines geringen Energiebetrages bedarf, z. B. durch Wärmezufuhr, um Elektronen aus dem Valenzband an die Akzeptoren abzugeben. Auf diese Weise entstehen im Valenzband die bereits erwähnten freien Löcher oder Defektelektronen. Die negativen Akzeptorionen dagegen sind unbeweglich und an der elektrischen Leitung nicht beteiligt.

47. Atomkern

47.1. Natürliche Radioaktivität

Als der französische Physiker Becquerel 1896 ein Stück Uranpechblende auf eine in schwarzes Papier gehüllte fotografische Platte legte, stellte er nach dem Entwickeln fest, daß die Platte geschwärzt war. Es mußte von der Pechblende eine bis dahin unbekannte Strahlung ausgegangen sein. Auf der Suche nach der Herkunft dieser Strahlen entdeckte das Ehepaar Pierre und Marie Curie 1898 die Elemente **Radium** und **Polonium,** die sie als **radioaktiv** strahlend erkannten. Den Nachweis der Radioaktivität führten sie mit Hilfe eines hochempfindlichen Elektrometers. Legt man z. B. ein Stück Uranpechblende, das stets eine Reihe radioaktiver Substanzen enthält, auf den Teller eines geladenen Elektrometers, so geht der Zeiger bald auf Null zurück. Daran erkennt man die stark ionisierende Wirkung der Strahlung.



Bild 700. Marie Curie (1867 bis 1934)

Die von radioaktiven Stoffen ausgesandten Strahlen können dreierlei Art sein (Bild 701). Bis auf wenige Ausnahmen ist ein radioaktiver Stoff ein α- oder ein β-Strahler, wobei jeweils noch γ-Strahlung auftreten kann.

1. α-Strahlung. Sie wird durch einen *Magneten abgelenkt* und zeigt dabei, daß sie aus *positiv* geladenen Teilchen, den sogenannten **α-Teilchen,** besteht. Man weiß heute, daß es positiv geladene *Heliumkerne* vom Massenwert 4,0015 und der Ordnungszahl 2 sind.

2. **β-Strahlung.** Sie wird vom Magneten *entgegengesetzt* wie die α-Strahlung abgelenkt und besteht aus *Elektronen* großer, aber nicht einheitlicher Geschwindigkeit.

3. **γ-Strahlung.** Sie wird von einem Magneten nicht abgelenkt und stellt eine *elektromagnetische Strahlung* von außerordentlich kleiner Wellenlänge dar (kürzer als diejenige der Röntgenstrahlung). Sie kommt dadurch zustande, daß der Kern nach Aussendung eines α- oder β-Teilchens in angeregtem Zustand zurückbleiben kann. Er gibt die überschüssige Energie anschließend als γ-Strahlung von großem Durchdringungsvermögen ab.

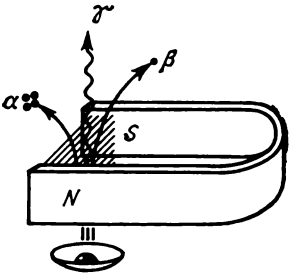


Bild 701. Ablenkung der radioaktiven Strahlen im Magnetfeld

47.2. Gesetze des radioaktiven Zerfalls

47.2.1. Allgemeine Merkmale

Wie sich bald herausstellte, spielen sich alle radioaktiven Vorgänge im *Atomkern* ab. Sie lassen sich mit herkömmlichen physikalischen oder chemischen Mitteln nicht beeinflussen, weder aufhalten noch beschleunigen. Der Atomkern muß dabei zwangsläufig gewisse Veränderungen erleiden. Es kommt also in erster Linie auf die Zusammensetzung des *Kerns* an. Im Bereich der Kernphysik spricht man daher im allgemeinen nicht von chemischen Elementen, sondern von Kernarten und bezeichnet diese als **Nuklide.**

Nuklide:
Stoffe, deren Atomkerne von bestimmter einheitlicher Zusammensetzung sind.

Zur eindeutigen Kennzeichnung eines Nuklides schreibt man links oben vor das chemische Zeichen die Massenzahl A und links unten die Ordnungszahl Z an. Beispielsweise liest man aus dem Symbol

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra}$$

ab, daß der Kern des Radiums aus $Z = 88$ Protonen und $N = A - Z = 226 - 88 = 138$ Neutronen besteht.

Die Erscheinungen der Radioaktivität zeigen also, daß die Atomkerne gewisser Nuklide die Eigenschaft haben, sich unter Aussendung von Teilchen und γ-Quanten zu verändern. Man sagt, der Kern **zerfällt** dabei. Die Ursache beruht auf einem Überschuß des Kerns an Protonen oder Neutronen, wodurch der Kern instabil ist. Man unterscheidet also **stabile** (die beständigen) und **instabile** (die radioaktiven) Nuklide.

Die Anzahl der in der Natur vorkommenden Nuklide beträgt etwa 320. Davon sind etwa 50 radioaktiv.

Es zerfallen aber nicht alle Kerne der betreffenden Substanz mit einem Mal, es gäbe sonst längst keine derartigen Stoffe mehr. Man kann überhaupt nicht sagen, *wann* ein be-

stimmter ins Auge gefaßter Atomkern zerfallen wird. Er kann, obwohl seit seiner Entstehung schon Milliarden Jahre verflossen sind, noch viele Millionen Jahre völlig unverändert bleiben, ebensogut sich schon im nächsten Augenblick explosionsartig umwandeln. Trotz dieser grundsätzlichen Unbestimmtheit im einzelnen ergibt sich bei der Gesamtheit *sehr vieler Kerne*, daß je Zeiteinheit im *Mittel* eine bestimmte Anzahl N zerfällt. Es ist damit ähnlich wie mit der Bevölkerung eines Landes, von der die Versicherungsgesellschaft genau weiß, wieviel Menschen in jedem Jahr sterben, ohne aber angeben zu können, wieviel es im kommenden Jahr genau sein werden. So schwankt die Anzahl der tatsächlichen Zerfälle um diesen Mittelwert N. Nach den Gesetzen der Statistik ist die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert die

(451) **mittlere (Standard-) Abweichung** $\sigma = \pm \sqrt{N}$.

Ist die Anzahl der registrierten Zerfälle sehr groß, so ist die *prozentuale* Schwankung relativ klein. In den folgenden Rechnungen ist sie vernachlässigt.

Beispiele: 1. Werden bei wiederholten Messungen einer radioaktiven Substanz im Durchschnitt $N = 100$ Zerfälle/min beobachtet, so ist die Messung mit einem mittleren Fehler von $\sigma = \pm \sqrt{100} = \pm 10$ behaftet. Die Einzelmessungen schwanken im Durchschnitt zwischen 90 und 110 Zerfällen/min; der prozentuale Fehler ist $10/100 = 10\,\%$.
2. Stellt man bei einer anderen Substanz im Durchschnitt 1000 Zerfälle/min fest, so ist die mittlere Abweichung $\sigma = \pm \sqrt{1000} = \pm 32$. Die prozentuale Abweichung beträgt nur noch $= 3{,}2\,\%$.

47.2.2. Zerfallsgesetz

Die in einem radioaktiven Nuklid je Zeiteinheit vor sich gehende Anzahl von Zerfällen ist allein von seiner Menge und der ihm eigenen Beschaffenheit abhängig. Es gilt das

Gesetz des radioaktiven Zerfalls:
Die Anzahl der je Zeiteinheit zerfallenden Atomkerne ist der Zahl der jeweils vorhandenen Kerne proportional.

Der Proportionalitätsfaktor ist die **Zerfallskonstante** λ:

Die Zerfallskonstante gibt denjenigen Bruchteil der in einem radioaktiven Nuklid enthaltenen Atomkerne an, der in der Zeiteinheit zerfällt.

Betrachtet man N Atomkerne, so zerfällt demnach in der sehr kurzen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ die Anzahl

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \,\mathrm{d}t$$

Kerne. Durch Integration erhält man daraus

(452) $\boxed{N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}$ **Zerfallsgesetz**

(N_0 Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atomkerne)

Es wird also eine bestimmte Zeit vergangen sein, bis die *Hälfte* aller ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen sein wird. Man nennt sie die

Halbwertszeit T:
diejenige Zeit, innerhalb deren die Hälfte aller jeweils vorhandenen Atomkerne zerfallen ist.

Bis dann von der verbliebenen Hälfte wieder die Hälfte zerfallen ist, vergeht abermals die *gleiche* Zeit T, so daß in gleichen Zeitabständen T von einer ursprünglich vorhanden gewesenen Menge N noch vorhanden sind: N, $N/2$, $N/4$, $N/8$, ...
Die Halbwertszeit ist für jedes radioaktive Nuklid *konstant* und *charakteristisch*. Man findet sie, indem man in Gleichung (452)

$$N = \frac{N_0}{2}$$

setzt. Dann ist

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{oder} \quad e^{\lambda T} = 2 \quad \text{bzw.}$$

$$\lambda T = \ln 2 .$$

(453) $$\boxed{T = \frac{0{,}693}{\lambda}}$$ **Halbwertszeit**

47.2.3. Aktivität

Für die Wirksamkeit einer strahlenden Substanz kommt es weniger auf deren absolute, etwa in Gramm ausgedrückte Menge an, sondern darauf, wieviel Kerne je Zeiteinheit eine radioaktive Umwandlung erleiden.
Zur Festlegung einer entsprechenden Maßeinheit ist man vom Radium ausgegangen. Dieses enthält auf Grund der Avogadroschen Konstanten (19.1.)

$$N = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{226\ \text{g}} = 2{,}665 \cdot 10^{21}\ \text{Kerne/g} .$$

Die Zerfallskonstante ist nach (453)

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T} = \frac{0{,}693}{1590 \cdot 365 \cdot 86400\ \text{s}} = 1{,}382 \cdot 10^{-11}\ 1/\text{s} .$$

Dann zerfallen in einem Gramm frischen Radiums

$$\lambda N = 1{,}382 \cdot 10^{-11}\ 1/\text{s} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} = 3{,}68 \cdot 10^{10}\ \text{Atomkerne/s}.$$

Da die genaue Bestimmung der Halbwertszeit des Radiums mit großen meßtechnischen Schwierigkeiten verbunden ist, hat man diese gerundet und festgesetzt:

(454) **Einheit der Aktivität:**
1 Curie (1 Ci) ist diejenige Menge einer radioaktiven Substanz, in der je Sekunde $3{,}7000 \cdot 10^{10}$ Zerfallsakte stattfinden.

Kleinere Aktivitäten werden in Millicurie (mCi) bzw. in Mikrocurie (μCi) ausgedrückt. Im allgemeinen (insbesondere bei den künstlich hergestellten radioaktiven Nukliden) ist nicht jedes der darin enthaltenen Atome radioaktiv. Diese sind dann mit anderen stabilen Nukliden bzw. mit Zerfallsprodukten vermischt. In solchen Fällen rechnet man mit der

$$\text{spezifischen Aktivität} = \frac{\text{Aktivität}}{\text{Masse}}.$$

Wenn z. B. 0,1 g $^{60}_{27}$Co vorliegen, dessen spezifische Aktivität 1,8 mCi/g beträgt, so ist die Aktivität 1,8 mCi/g · 0,1 g = 0,18 mCi.

Beispiel: Die Halbwertszeit des radioaktiven Nuklids $^{60}_{27}$Co beträgt 5,3 Jahre. Wie groß ist die Aktivität nach 2 Jahren, wenn anfänglich 80 mCi vorliegen? – Unter Benutzung der Halbwertszeit (453) lautet das Zerfallsgesetz

$$N = N_0\, e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Der Exponent hat den Wert $\frac{0{,}693 \cdot 2}{5{,}3} = 0{,}26$ und $e^{-0{,}26} = 0{,}77$.

Damit ist die noch vorhandene Aktivität 80 mCi · 0,77 = 61,6 mCi.

47.3. Natürliche Zerfallsreihen

Der durch einen Umwandlungsakt entstehende neue Kern braucht aber seinerseits nicht stabil zu sein, sondern stellt in vielen Fällen einen neuen radioaktiven Stoff dar. Zerfallsart und Halbwertszeit dieses neuen Kerns sind aber, ganz unabhängig vom ersten, durchaus anders. Der neu gebildete Kern ist demnach oft radioaktiv, so daß eine *Kette* von *Umwandlungen* zustande kommt, die erst dann abschließt, wenn der letzte Kern vollkommen *stabil* ist. Auf diese Weise entsteht eine radioaktive **Zerfallsreihe.**

Fast alle in der Natur vorkommenden radioaktiven Nuklide gehören drei Familien, d. h. *drei Zerfallsreihen*, an, innerhalb deren jedes Glied aus dem vorhergehenden entsteht.

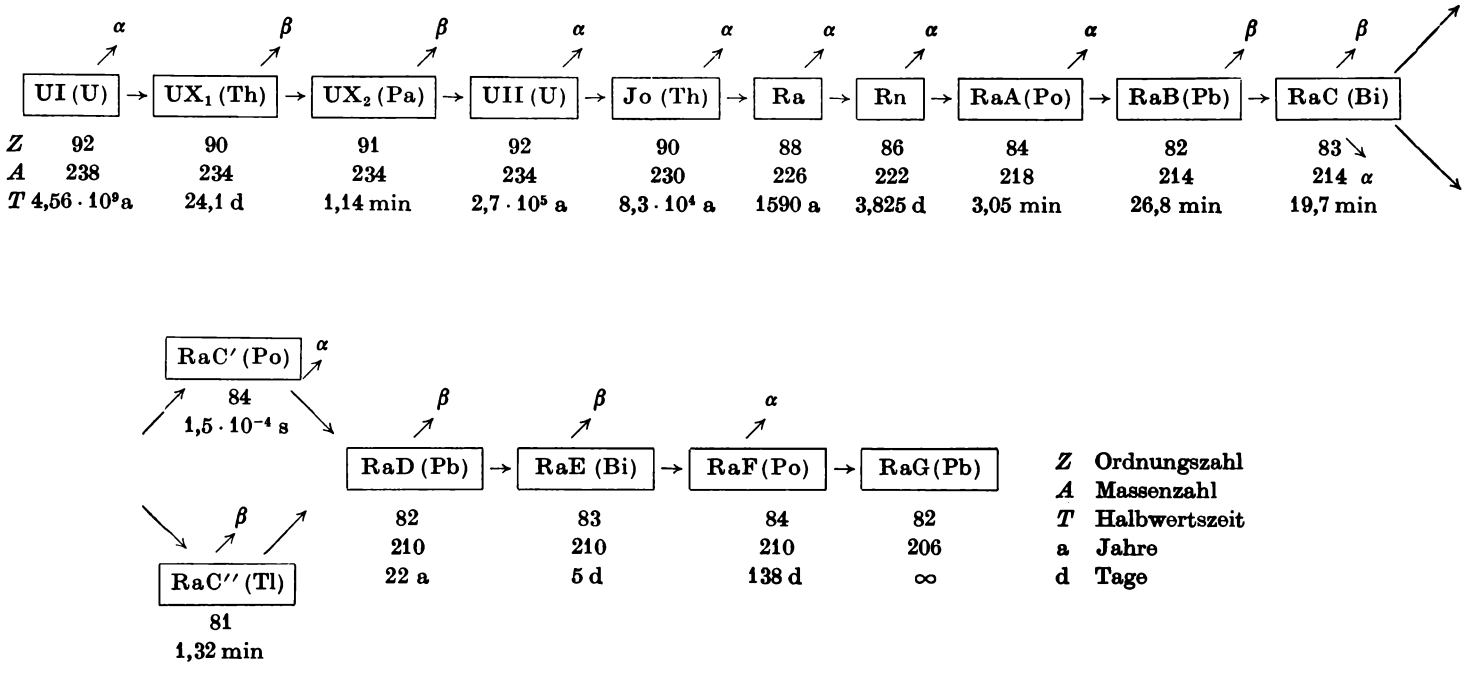
47.3.1. Uranreihe

Ausgangssubstanz ist das Uran $^{238}_{92}$UI ($T = 4{,}56 \cdot 10^9$ Jahre). *Endglied* ist das stabile Blei $^{206}_{82}$Pb.

Die Übersicht S. 561 gibt die Uranreihe wieder, aus der man erkennt, wie sich aus dem Uran das Ionium, das Radium, Polonium und zum Schluß Blei bilden.

Aus der Reihe ist ersichtlich, wie UI zunächst ein (positiv 2fach geladenes) α-Teilchen abgibt, wodurch die Kernladungszahl Z um 2 Einheiten *abnimmt*, die Massenzahl dagegen um 4 Einheiten, da die Massenzahl des α-Teilchens $A = 4$ ist. Das so entstandene Nuklid

Die Zerfallsreihe des Urans



Angegeben sind die in der Radiologie üblichen Bezeichnungen; in den Klammern dahinter die entsprechenden chemischen Zeichen.

UX_1 gibt ein β-Teilchen ab. Da dieses negativ ist, muß die *Kernladungszahl* um 1 Einheit *zunehmen*, weil sich dabei ein Neutron in ein Proton umwandelt:

Neutron → Elektron + Proton.

In ähnlicher Weise geht die Reihe weiter und endigt beim Nuklid RaG(Pb), das in dieser Form *endgültig* verharrt.

Wenn man demnach ein Stück natürliches Uran untersucht, so finden sich darin zu gleicher Zeit *sämtliche Glieder* der Zerfallsreihe. Von den Gliedern mit *kurzer* Halbwertszeit wird aber nur *wenig* vorhanden sein, weil diese Kerne zwar fortlaufend neu gebildet werden, aber schnell wieder zerfallen.
Es sei angenommen, daß sich eine Kernart B aus einer anderen Kernart A bilde. Dann entstehen je Zeiteinheit $\lambda_A N_A$ Kerne der Substanz B. Von dieser zerfallen je Zeiteinheit $\lambda_B N_B$ Kerne. Im Gleichgewicht müssen ebensoviel zerfallen, wie im gleichen Zeitraum neu entstehen. Dann gilt

$$\lambda_A N_A = \lambda_B N_B \quad \text{oder}$$

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}.$$

Da nach Gleichung (453) die Zerfallskonstanten λ den Halbwertszeiten T umgekehrt proportional sind, gilt für das

(455) **radioaktive Dauergleichgewicht: Die einzelnen Gleichgewichtsmengen verhalten sich wie die Halbwertszeiten zueinander.**

Beispiel: 1 kg natürliches Uran enthält eine stets konstante Menge von $\frac{1590}{4{,}56 \cdot 10^9} \cdot \frac{226}{238}$ kg = $= 0{,}33 \cdot 10^{-6}$ kg = 0,33 mg Radium (der zweite Bruch berücksichtigt die Atommassen).

Eines der bemerkenswertesten Glieder dieser Reihe ist das Element Rn *(Radon* oder *Radium-Emanation)*, das gasförmig ist und aus dem *Radium* entsteht. Es gelangt aus den stets uranhaltigen Gesteinen der Erdrinde in die Atmosphäre und ist in vielen natürlichen *Quellwässern* enthalten *(Radiumbäder)*.

47.3.2. Thoriumreihe

Ausgangssubstanz ist das Thorium $^{232}_{90}$Th ($T = 1{,}39 \cdot 10^{10}$ Jahre), Endprodukt das stabile Blei $^{208}_{82}$Pb.

47.3.3. Aktiniumreihe

Ausgangselement ist das Aktinuran $^{235}_{92}$U ($T = 7{,}13 \cdot 10^8$ Jahre), Endglied das stabile Blei $^{207}_{82}$Pb.

47.3.4. Weitere natürliche radioaktive Nuklide

In der Natur existieren noch etwa 12 weitere radioaktive Nuklide, die nicht in den drei genannten Zerfallsreihen enthalten sind. Ihre Halbwertszeiten sind meist außerordentlich groß. Von ihnen sei hier nur das Nuklid $^{40}_{19}\mathrm{K}$ genannt, das im gewöhnlichen Element Kalium zu 0,012% enthalten ist. Seine Halbwertszeit beträgt $1{,}25 \cdot 10^9$ Jahre. Es ist zu 89% β-aktiv und zerfällt dabei in das stabile Nuklid $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$. Ein weiterer Prozentsatz (11%) des $^{40}_{19}\mathrm{K}$ wandelt sich dadurch um, daß es aus der K-Schale der Hülle ein Elektron in den Kern übernimmt, wobei sich ein Kernproton in ein Neutron umwandelt. Hierbei entsteht das stabile $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ und gleichzeitig noch eine γ-Strahlung. Diese Art einer Kernumwandlung nennt man deshalb **K-Einfang** (oder auch E-Einfang).

47.4. Massen der Atomkerne

47.4.1. Isotope Kernarten

Vergleicht man die Endglieder der natürlichen Zerfallsreihen miteinander, so mag auffallen, daß sie in allen 3 Fällen aus Blei bestehen. Dies ist an der Ordnungszahl $Z = 82$ zu erkennen. Sie gibt die Stellung des Nuklides im Periodensystem und damit auch seine chemischen Eigenschaften an.

Ein chemisches Element ist durch seine Ordnungszahl definiert.

Die 3 genannten Nuklide haben aber unterschiedliche Symbole:

$$^{206}_{82}\mathrm{Pb},\ ^{207}_{82}\mathrm{Pb},\ ^{208}_{82}\mathrm{Pb},$$

d. h., sie unterscheiden sich durch ihre Massenzahlen und damit in der Anzahl der im Kern enthaltenen Neutronen. Man nennt solche zum *gleichen chemischen Element* gehörenden Kernarten *isotope Nuklide* oder kurz **Isotope**.

Isotope:

Kernarten von gleicher Ordnungszahl und gleichen chemischen Eigenschaften, aber verschiedener Massenzahl.

Daß auch andere Elemente aus mehreren Isotopen bestehen müssen, erkennt man an den mitunter starken Abweichungen der relativen Atommassen von der Ganzzahligkeit. Beispielsweise hat Chlor die relative Atommasse 35,453.
Die Ursache liegt darin, daß im Chlor zwei Isotope der Massenzahlen 35 und 37 im Verhältnis 75,7:24,3 miteinander vermischt sind. Beide Isotope haben dieselbe Ordnungszahl und lassen sich daher nicht chemisch voneinander trennen.
Die meisten natürlichen Elemente sind daher physikalisch nicht rein, sondern sind **Mischelemente.** Nur 17 Elemente des Periodensystems bestehen aus einer einzigen Atomart. Diese **Reinelemente** sind Be, F, Na, Al, P, Sc, Mn, Co, As, Y, Nb, Rh, J, Cs, Tb, Au und Bi.

In vielen Fällen ist der Anteil der Isotope im Verhältnis zum Hauptisotop nur geringfügig, so daß er an dessen Atommasse kaum etwas ändert. So besteht der natürliche Wasserstoff hauptsächlich aus dem Isotop ${}_1^1\mathrm{H}$ und zu 0,015 % aus dem Isotop ${}_1^2\mathrm{H}$ **(Deuterium).** Ausnahmsweise hat dieses Isotop das chemische Zeichen D erhalten. Das **schwere Wasser** D_2O reichert sich bei der Elektrolyse großer Wassermengen in der Restflüssigkeit an. Das noch viel seltenere Isotop **Tritium** ${}_1^3\mathrm{H}$ ist radioaktiv, nur von kurzer Lebensdauer und kommt nur in Spuren in der Atmosphäre vor.

47.4.2. Massendefekt

Da die Massenwerte (S. 535) der Elementarteilchen genau bekannt sind, könnte man annehmen, daß es möglich sei, den Massenwert eines beliebigen Atoms als Summe seiner elementaren Bestandteile zu errechnen. Führt man dies beispielsweise beim ${}_2^4\mathrm{He}$ durch, so findet man die Summe aus 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen mit

$$2 \cdot 1{,}00753 + 2 \cdot 1{,}00865 + 2 \cdot 0{,}00055 = 4{,}03346.$$

Im Periodensystem ist jedoch die relative Atommasse 4,0026 angegeben. Die tatsächliche Atommasse ist demnach geringer als die Summe der einzelnen Bausteine des Atoms! Dies ist bei sämtlichen Atomen in ähnlicher Weise der Fall. Man nennt diese Erscheinung den

Massendefekt ΔM:

Die Masse eines Atoms ist stets kleiner als die Summe der Massen der darin enthaltenen Bestandteile.

Die Elektronen der Atomhülle sind am Massendefekt *nicht* beteiligt. Er ist eine Eigenschaft der Atomkerne. Sein Zustandekommen erklärt sich daraus, daß beim gedachten Zusammentritt der Elementarteilchen ein Teil der in ihnen enthaltenen *Masse verschwindet* und als *Energie abgestrahlt* wird. Um dies zu verstehen, muß man wieder daran denken, daß die in den Elementarteilchen vor dem Zusammentritt enthaltene Materie Masse und Energie zugleich darstellt, deren Gesamtsumme bei dem Vorgang erhalten bleibt.
Umgekehrt müßte man eine gleich große Energiemenge aufwenden, wenn man den Heliumkern wieder in seine Bestandteile auflösen wollte. Man nennt sie die **Bindungsenergie** ΔW des Kerns. Zu ihrer Berechnung ist die Masse-Energie-Beziehung (34.3.) zu verwenden:

(456) $$\Delta W = \Delta m\, c^2.$$

Besonders aufschlußreich ist es, wenn man die Bindungsenergie der Atomkerne auf das *einzelne Nukleon* bezieht. Stellt man sie dann in Abhängigkeit von der Massenzahl A grafisch dar, so erhält man die in Bild 702 angegebene Kurve. Sie zeigt, daß die Bindungsenergie bis etwa zur Massenzahl 50 ansteigt, um dann nach den noch schwereren Kernen hin wieder abzunehmen. Aus dem Verlauf dieser Kurve ergeben sich die Möglichkeiten, Energie durch Spaltung bzw. Verschmelzen von Atomkernen zu gewinnen (47.9.).

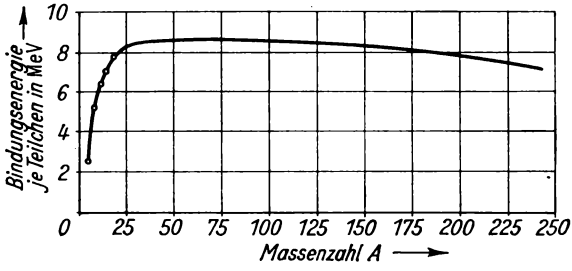


Bild 702. Abhängigkeit der auf 1 Nukleon entfallenden Bindungsenergie von der Massenzahl

Beispiel: Aus dem oben berechneten Betrag des Massendefektes ist die Bindungsenergie des Heliumkerns zu ermitteln und in MeV auszudrücken – In Einheiten der relativen Atommasse ist

$$\Delta M = 4{,}0335 - 4{,}0026 = 0{,}0309.$$

Das ergibt nach Gleichung (195) je Kern die absolute Masse

$$\Delta m = \frac{1}{N_A} = \frac{0{,}0309\,\text{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 5{,}13 \cdot 10^{-29}\,\text{kg}.$$

Nach (456) ist dann

$$\Delta W = \Delta m\, c^2 = 5{,}13 \cdot 10^{-29}\,\text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\text{m}^2/\text{s}^2 = 4{,}62 \cdot 10^{-12}\,\text{J} = 28{,}9\,\text{MeV}$$
$$(1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}).$$

47.5. Künstliche Umwandlung von Atomkernen

47.5.1. Prinzip der Kernumwandlung

Die Erscheinungen der natürlichen Radioaktivität sind Vorgänge, die von *selbst* verlaufen und ohne Zutun des Menschen vor sich gehen. Ein neuer Abschnitt in der Entwicklung wurde eingeleitet, als RUTHERFORD (1919) entdeckte, daß ein von einem α-Teilchen getroffener *Stickstoffkern* einen *Wasserstoffkern erzeugt* und sich dabei in einen *Sauerstoffkern* umwandelt. Das schnell bewegte α-Teilchen dringt dabei in den Stickstoffkern ein und vereinigt sich mit ihm. Gleich danach wird aber ein Proton (p) ausgestoßen, so daß ein Isotop des Sauerstoffs $^{17}_{8}\text{O}$ zurückbleibt. Dabei wird eine beträchtliche kinetische Energie frei, so daß die beiden neuen Teilchen mit großer Geschwindigkeit auseinanderfliegen. Diesen Prozeß beschreibt man abgekürzt durch das Symbol

$$^{14}_{7}\text{N}\,(\alpha, \text{p})\,^{17}_{8}\text{O}.$$

Die Klammer enthält an *erster* Stelle stets das *aufgeschossene* und an *zweiter* Stelle das *emittierte* Teilchen.

Derartige Prozesse lassen sich unter günstigen Bedingungen mit Hilfe der Nebelkammer (S. 570) sichtbar machen. Auf Bild 703 sieht man viele geradlinige Spuren von α-Teilchen und in der Bildmitte, wie am Ende einer α-Spur sich die lange Spur des ausgeschleuderten Protons und die kurze dicke Spur des Kerns $^{17}_{8}\text{O}$ abzweigen.

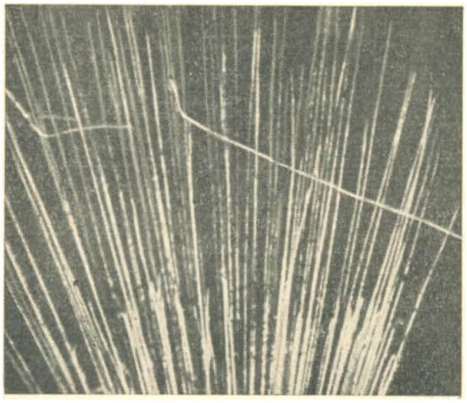


Bild 703. Kernumwandlung durch Beschießen eines Stickstoffatoms mit einem α-Teilchen

Wegen der Kleinheit sowohl der verwendeten „Geschosse" als auch der relativ großen Abstände zwischen den Kernen (die Kerne sind rund 10^5mal so klein wie die Atome selbst) ist die Ausbeute verhältnismäßig gering. Bei obiger Reaktion erzielen etwa 100000 α-Teilchen einen Treffer. Ein neuer Reaktionstyp wurde 1932 entdeckt, als man stark beschleunigte Wasserstoffkerne (Protonen) auf Lithium einwirken ließ:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}\ (\mathrm{p}, \alpha)\ ^{4}_{2}\mathrm{He}\,.$$

Dies bedeutet: Ein Proton dringt in den Lithiumkern ein (zusammen 7 + 1), worauf dann ein α-Teilchen emittiert wird und ein Heliumkern zurückbleibt (zusammen 4 + 4). Man erkennt, daß die Summen der Massenzahlen und der Ladungen *konstant* bleiben.

Die Anzahl der heute bekannten Kernreaktionen beträgt bereits viele Hunderte. Werden zur „Beschießung" der Kerne elektrisch geladene Teilchen verwendet, so müssen diese sehr große Energien haben, um die elektrostatische Abstoßung des Atomkerns zu überwinden.

Daher verwendet man in der modernen Kernphysik große Apparaturen, mit denen sich sehr starke Ströme energiereicher Teilchen herstellen lassen. Von den zahlreichen Konstruktionen z. T. gigantischen Ausmaßes sei hier nur das **Zyklotron** erwähnt. Es dient dazu, α-Teilchen, Protonen oder andere als Geschosse geeignete Teilchen auf höchste Geschwindigkeiten zu beschleunigen und sie dann gegen die umzuwandelnden Atomkerne zu lenken.

Wie in 43.3.2. beschrieben, bewegen sich elektrisch geladene Teilchen auf einer *Kreisbahn*, wenn sie in ein *magnetisches Feld* geraten. Die Ebene dieser Bahn liegt *quer* zu den Polschuhen. Die beiden Elektroden, zwischen denen sich die Teilchen bewegen, werden als *halbkreisförmige Dosen* (D_1) und (D_2) ausgebildet. Bild 704 zeigt sie in der Draufsicht. Die Magnetpole hat man sich unter bzw. über der Zeichenebene vorzustellen. Werden im Mittelpunkt *O* Ionen erzeugt, so werden sie zunächst im elektrischen Feld zwischen D_1 und D_2 nach der Elektrode D_2 hin beschleunigt. Wegen des Magnetfeldes ist die Bahn der Ionen in den Dosen kreisförmig gekrümmt. Nach Verlassen der Halbdose D_2 werden die Elektroden umgepolt, wodurch die Teilchen jetzt von der Elektrode D_1 angezogen werden und ihre Kreisbahn dort fortsetzen, bis nach abermaligem Polwechsel die Halbdose D_2 wieder erreicht ist usw. Der *Polwechsel* muß der Teilchengeschwindigkeit genau *angepaßt* sein. Die erforderliche hochfrequente Wechselspannung wird mit einem starken Kurzwellensender (S) er-

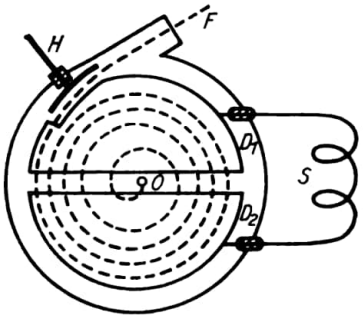


Bild 704. Schema des Zyklotrons

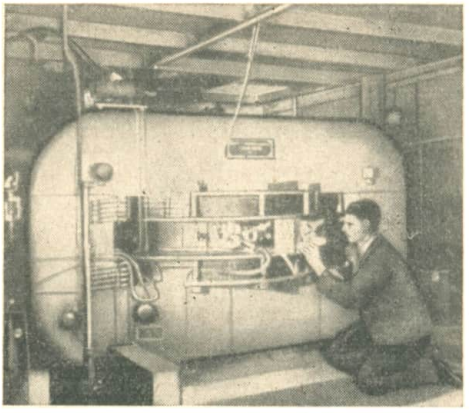


Bild 705. Kleines Zyklotron von JOLIOT in Paris (Masse 27 t)

zeugt. Der wegen der zunehmenden Geschwindigkeit auf spiraliger Bahn laufende Strahl wird mit einer Hilfselektrode (H) durch das Fenster (F) nach außen gelenkt.

Das größte Zyklotron der Welt (Sowjetunion) hat eine Eisenmasse von 7000 t und erzeugt Protonen von 680 MeV, Deuteronen von 350 MeV und He-Ionen von 750 MeV Energie. (Die Energie der α-Teilchen des Radiums beträgt nur 9 MeV!) Große Anlagen können wegen der Gefährlichkeit der Strahlungen nur hinter dicken Schutzwänden und aus der Ferne bedient werden.

47.5.2. Künstliche Radionuklide

Ein bedeutender Fortschritt in der Physik der Kernumwandlungen wurde mit der Entdeckung (1932) des **Neutrons** (n) erreicht, da für dieses Teilchen das COULOMB-Feld des Kerns nicht existiert. Es wird daher leicht von Atomkernen *eingefangen*. Besonders starke Neutronenquellen stellen die Kernreaktoren (47.7.4.) dar. Mit ihrer Hilfe lassen sich vor allem **künstliche radioaktive Nuklide** in großer Zahl herstellen. Damit ist man heute in der Lage, von jedem chemischen Element mindestens ein radioaktives Isotop zu erzeugen.

Von jedem stabilen Nuklid läßt sich mindestens ein radioaktives Isotop herstellen.



Bild 706. FREDERIC JOLIOT-CURIE (1900 bis 1958) Physiker und Präsident des Weltfriedensrates

Da die chemischen Eigenschaften nur von der Elektronenhülle abhängen, sind diese radioaktiven Nuklide *chemisch* von den entsprechend inaktiven Nukliden nicht zu unterscheiden und bilden auch dieselben chemischen Verbindungen.
Es gibt also radioaktives Natrium, Eisen, Kobalt, radioaktiven Schwefel, Kohlenstoff usw. Beispielsweise erhält man radioaktiven Kohlenstoff nach der Gleichung

$$^{14}_{7}\mathrm{N}\,(\mathrm{n,p})\,^{14}_{6}\mathrm{C}\,.$$

Dieser Radiokohlenstoff ist ein β-Strahler und wandelt sich mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren wieder in das Ausgangsnuklid um:

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \beta\,.$$

Das historisch erste Experiment dieser Art gelang (1934) dem französischen Forscherehepaar **Joliot-Curie.** Sie brachten einen α-Strahler in ein Aluminiumgefäß und beobachteten, daß dieses nach dem Entfernen des Präparates weiterstrahlte. In dem Aluminium hatte sich radioaktiver Phosphor mit der Halbwertszeit $T = 2{,}55$ min gebildet nach dem Schema

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}\,(\alpha,\mathrm{n})\,^{30}_{15}\mathrm{P}\,(\mathrm{e}^{+})\,^{30}_{14}\mathrm{Si}\,.$$

Damit entdeckten sie zugleich eine bis dahin unbekannte Strahlung. Der Radiophosphor sendet mit einer Halbwertszeit von 2,55 min **Positronen** (positiv geladene Elektronen) aus.
Außer dem $^{30}_{15}\mathrm{P}$ sind heute noch viele andere radioaktive Nuklide bekannt, die unter Aussendung von Positronen zerfallen. Im Gegensatz zu den negativen Elektronen aussendenden β^--Strahlern bezeichnet man sie als β^+-Strahler.
Das Positron selbst hat genau die gleiche Masse wie das Elektron, trägt jedoch eine Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As von positivem Vorzeichen. An sich ist dieses Teilchen stabil. Trotzdem kann es nur kurze Zeit existieren, da es beim Durchqueren stofflicher Medien sehr bald auf ein Elektron trifft. Beide Teilchen verschwinden dann, wobei ihre Masse in Form zumeist zweier γ-Quanten als Energie abgestrahlt wird. Man nennt diesen Vorgang **Zerstrahlung (Annihilation).**

Die Energie dieser beiden γ-Quanten läßt sich nach der Gleichung (298) $W = mc^2$ leicht berechnen. Der Massenwert der beiden Teilchen ist $M = 2 \cdot 0{,}00055 = 0{,}0011$. Dem entspricht nach Gleichung (195) die absolute Masse

$$m = \frac{1}{N_A} = \frac{0{,}0011\ \mathrm{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 1{,}826 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}$$

und die frei werdende Energie

$$W = mc^2 = 1{,}826 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2/s^2} =$$
$$= 1{,}6434 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}\ (\text{oder Ws});$$
$$W = 1{,}03\ \mathrm{MeV}.$$

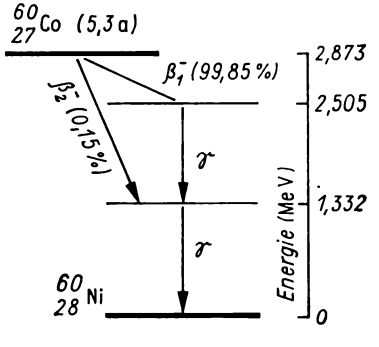


Bild 707. Zerfallsschema des $^{60}_{27}\mathrm{Co}$

Die Art des Zerfalls und die Energie der Strahlungen ist in übersichtlicher Weise dem **Zerfallsschema** des betreffenden Nuklids zu entnehmen. Bild 707 zeigt z. B., wie das durch Bestrahlung im Reaktor gewonnene radioaktive $^{60}_{27}Co$ zunächst ein β^--Teilchen aussendet und sich dabei in $^{60}_{28}Ni$ umwandelt. Dieser Nickelkern befindet sich noch im **angeregten Zustand** und emittiert nacheinander 2 γ-Quanten, deren Energie 1,33 bzw. 1,17 MeV beträgt. Praktisch rechnet man meist mit einer γ-Strahlung vom Mittelwert 1,25 MeV.

47.6. Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Stoff

Die von radioaktiven Nukliden ausgehenden Strahlen sind entweder korpuskularer Art (α-, β^-- oder β^+-Strahlen) oder bestehen aus Energiequanten (γ-Strahlen). In fast allen Fällen ist ihre Energie außerordentlich groß und liegt in der Größenordnung von Megaelektronenvolt. Die wichtigste Eigenschaft ist ihr starkes Ionisierungsvermögen.

47.6.1. Strahlennachweis

Auf diesem Ionisierungsvermögen beruht ein großer Teil der Methoden, radioaktive Strahlen nachzuweisen und zu messen. Hier seien nur die wichtigsten genannt.

1. Ionisationskammern. α-, β- und γ-Strahlen machen die in einem geschlossenen Gefäß befindliche Luft und andere Gase durch Bildung von Ionen elektrisch mehr oder weniger leitend. Findet diese Ionenbildung im elektrischen Feld zweier Kondensatorplatten statt, so erhält man (S. 487) bei richtiger Wahl des Spannungsbereiches einen bestimmten **Sättigungsstrom.** Dieser ist der Anzahl der gebildeten Ionen proportional und liefert ein Maß für die Intensität der Strahlung.

Von den zahlreichen Ausführungsformen solcher Ionisationskammern sei hier nur das **γ-Strahlen-Elektroskop** (Bild 708) erwähnt. Ein mit mindestens 2 mm dickem Blei abgeschirmtes Gefäß (P) enthält ein empfindliches Goldblattelektroskop (G), das mittels des Hebels (H) elektrisch geladen wird. Der Bleipanzer ist für α- und β-Strahlen undurchdringlich, läßt aber die γ-Quanten durch. Außerdem werden im Blei noch zusätzliche, das Füllgas ionisierende Elektronen befreit.

Dadurch entlädt sich das Elektrometer mehr oder weniger schnell. Zur Eichung des Instrumentes dienen *Standardpräparate* (Etalons), die in Wien oder Paris mit dem dort befindlichen **Radiumstandard,** einem 22,23 mg $RaCl_2$ enthaltenden Präparat, verglichen sind.

Zur Messung von β-Strahlen muß die Kammer ein strahlendurchlässiges Fenster (z. B. Papier) haben, während α-Strahler in das Innere der Kammer gebracht werden müssen.

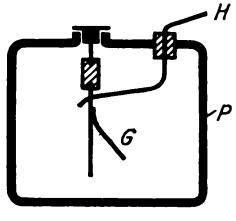


Bild 708. γ-Strahlen-Elektroskop

2. Das Geiger-Müller-Zählrohr (Bilder 709, 710). Es enthält einen axial ausgespannten Draht in einer Argon-Alkoholdampf-Atmosphäre von etwa 100 Torr. Zwischen

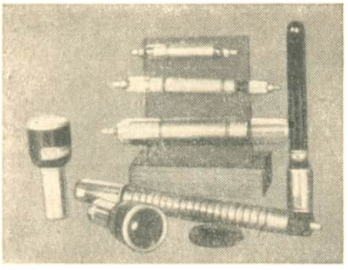


Bild 709. GEIGER-MÜLLER-Zählrohre

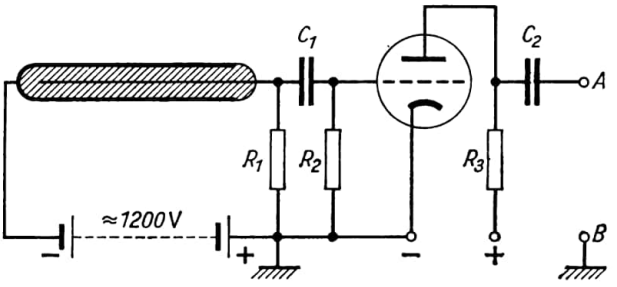


Bild 710. Anschluß eines Zählrohres an einen gewöhnlichen Rundfunkverstärker bei A—B ($C_1 = 50$ pF, $C_2 = 100$ pF, $R_1 = 10^8 \cdots 10^9\,\Omega$, $R_2 = 10^7\,\Omega$, $R_3 = 10^5\,\Omega$)

Zähldraht und metallisierte Innenwand des Rohres wird eine Spannung von etwa 1000 bis 1500 V gelegt. Wenn z. B. ein β-Teilchen in das Innere eindringt, wird das Füllgas ionisiert; es bildet sich eine *selbständige Entladung*, die sogleich wieder abreißt. Jeder Entladungsstoß gibt einen *Impuls* an den Verstärker und kann dann im Lautsprecher gehört oder durch ein Zählwerk registriert werden (Bild 711). Mittels besonderer Zählrohre können auch γ- und α-Strahlen sowie Neutronen registriert werden.

3. Die Wilsonsche Nebelkammer. Fliegt ein α- oder β-Teilchen durch eine *mit Wasserdampf übersättigte* Atmosphäre, so zieht es einen feinen *Nebelstreifen* hinter sich her, der bei kräftiger Beleuchtung deutlich sichtbar ist und fotografiert werden kann (Bild 703). Er kommt dadurch zustande, daß sich an den zahlreich gebildeten Ionen Wasserdampf kondensiert. Hierzu dient eine zylindrische, mit einem Glasboden versehene Kammer, deren Luft feucht gehalten wird (Bild 712). Durch einen eingesetzten Kolben wird die feuchte Luft plötzlich expandiert, wodurch Abkühlung und damit Übersättigung eintritt.

4. Szintillationszähler. Treffen Teilchen bzw. Quanten radioaktiver Strahlen auf geeignete Stoffe, so können sie deren Atome zum Leuchten anregen. Jedes auf einen solchen Leuchtstoff treffende Teilchen ruft hier einen Lichtblitz (Szintillation) hervor. Zur direkten Beobachtung genügt schon das einfache **Spinthariskop.** An einem Ende einer kleinen Metallhülse (Bild 713) befindet sich inwendig ein Leuchtschirm (mit Kupfer aktiviertes Zinksulfid), der mit einer Lupe betrachtet wird. Dem Schirm gegenüber ist auf einer Nadelspitze das Präparat angebracht. Man vermag so die ausgesandten α-Teilchen mit dem Auge *einzeln direkt* zu zählen. RUTHERFORD hat damit seine historischen

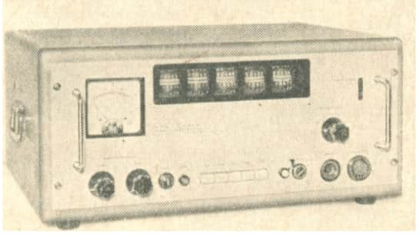
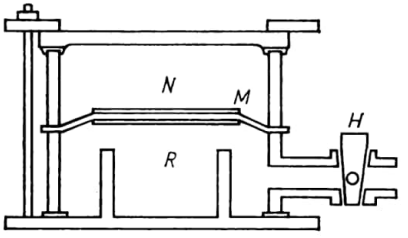


Bild 711. Impuls-Zählgerät

Bild 712. Einfache Nebelkammer. Der unterhalb der eigentlichen Kammer N befindliche Raum R wird durch Drehen des Hahnes H plötzlich mit einem evakuierten Gefäß verbunden. Dadurch springt die Membran M nach unten und expandiert die in N enthaltene feuchte Luft



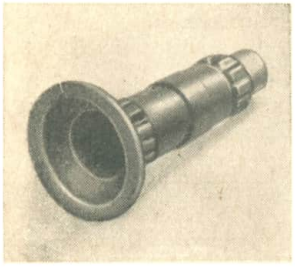


Bild 713. Spinthariskop



Bild 714. Deuteronenspur in der Schicht einer fotografischen Platte bei 600facher Vergrößerung

Versuche angestellt. Die Methode hat neuerdings wieder an großer Bedeutung gewonnen. β- und γ-Strahlen wirken in ähnlicher Weise in Anthrazen-, Naphthalin- und anderen Kristallen, wobei die Lichtblitze mit Hilfe elektrischer Vorrichtungen (Fotokatode mit Sekundärelektronenvervielfacher) registriert und gezählt werden.

5. Kernspurplatten. In Fotoplatten mit besonders dicker lichtempfindlicher Schicht hinterlassen Elementarteilchen eine Schwärzungsspur, die sich bei etwa 400facher Vergrößerung nach dem Entwickeln bequem erkennen läßt (Bild 714). Einem Zentimeter Bahnlänge in Luft entsprechen etwa 6···7 μm in der Schicht.

47.6.2. Eigenschaften der α-Strahlen

Je nach ihrer Energie bilden die α-Strahlen beim Durchqueren der Luft je cm Bahnlänge 20000···40000 Ionen. Da zur Bildung eines Ionenpaares in Luft etwa 32,5 eV verbraucht werden, ist die Reichweite in Luft auf wenige Zentimeter begrenzt (Bild 715). Jeder α-Strahler hat eine bestimmte, charakteristische Reichweite. Die Reichweite in festen Stoffen beträgt nur Bruchteile von Millimetern.

Beispiel: Die α-Energie des Radiums 226 beträgt 4,86 MeV. Nach Bild 715 ergibt das eine Reichweite in Luft von 3,4 cm. In Aluminium ist sie nur etwa 0,02 mm.

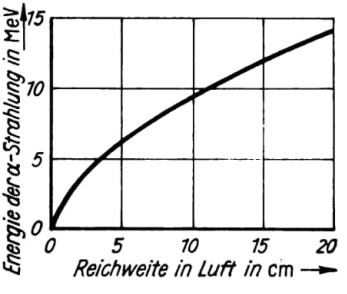


Bild 715. Reichweite von α-Strahlen in Luft

47.6.3. Eigenschaften der β-Strahlen

Die Energiewerte der von einem bestimmten β-Strahler emittierten Teilchen sind nicht einheitlich, sondern bilden ein kontinuierliches Spektrum. Dies erklärt sich daraus, daß zugleich mit jedem β-Teilchen ein **Neutrino** entsteht.

Die beim Zerfall des Neutrons entstehenden β-Teilchen haben keine einheitliche Reichweite, sondern besitzen ein kontinuierliches Geschwindigkeitsspektrum mit scharfer oberer Grenze. Daher fordert der Energieerhaltungssatz ein Teilchen, welches die dem jeweiligen β-Teilchen fehlende Energie mit sich führt, elektrisch aber *neutral* sein muß. Es wird Neutrino genannt.

Das Neutrino ist ein mit den üblichen Strahlennachweisgeräten nicht feststellbares, elektrisch neutrales Teilchen von der Ruhmasse 0.

Die Summe der Energien des β-Teilchens und des Neutrinos ist jedoch konstant und gleich der Maximalenergie $W_{\beta\,\mathrm{max}}$ des betreffenden Strahlers.
Die β-Strahlung wird beim Durchgang durch stoffliche Medien infolge verschiedener Vorgänge (Ionisation, Streuung, Bremsstrahlung) nach einem Exponentialgesetz geschwächt:

(457) $\boxed{N = N_0 e^{-\mu' F}}$ **Absorptionsgesetz**

Hierbei ist N_0 die Anzahl der Teilchen hinter und N die Teilchenzahl vor dem Absorber, μ' der vom Material unabhängige Massenabsorptionskoeffizient ($\mathrm{cm^2/mg}$) und F die Flächendichte ($\mathrm{mg/cm^2}$). Die Größe von μ' ist allein von der Energie $W_{\beta\,\mathrm{max}}$ der β-Teilchen abhängig und ist aus Bild 716 zu ersehen.

Beispiel: Ein Zählrohr registriert von einem Phosphor-32-Präparat in einem bestimmten Abstand 6500 β-Teilchen je min. Es wird dann ein $d = 3$ mm dickes Aluminiumblech dazwischengesetzt. Wieviel Teilchen werden noch gezählt? – Die Flächendichte ist

$$F = \varrho d = \frac{2{,}7\ \mathrm{g} \cdot 0{,}3\ \mathrm{cm}}{\mathrm{cm^3}} = 0{,}81\ \mathrm{g/cm^2} = 810\ \mathrm{mg/cm^2}\,.$$

Die β-Energie von ^{32}P ist 1,7 MeV, so daß nach Bild 716 $\mu' = 0{,}008\ \mathrm{cm^2/mg}$ ist. Damit wird $N = 6500\, e^{-0{,}008 \cdot 810} = \frac{6500}{650} = 10$ Teilchen je min.

47.6.4. Eigenschaften der γ-Strahlen

Die γ-Strahlung breitet sich wie das Licht oder die Röntgenstrahlung aus, indem ihre Intensität mit dem Quadrat des Abstandes von der Strahlungsquelle abnimmt. Ohne Berücksichtigung der Absorption gilt also

(458) $$I = \frac{I_0}{r^2}\,.$$

Die γ-Strahlung ist von außerordentlicher Durchdringungskraft und wird von stofflichen Medien mehr oder weniger geschwächt. Diese Schwächung erfolgt durch das Zusammenwirken von drei Vorgängen (Bild 717):

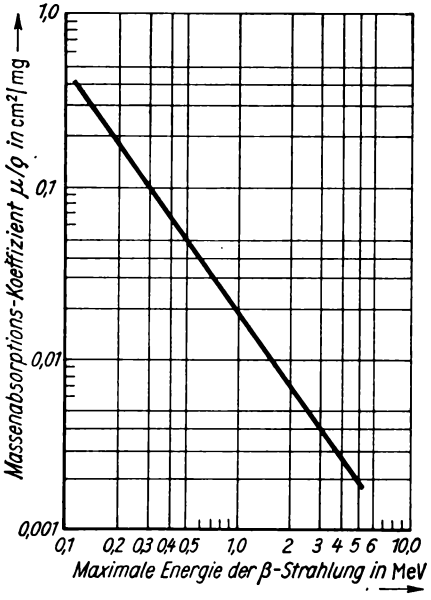


Bild 716. Massenabsorptionskoeffizient für β-Strahlen

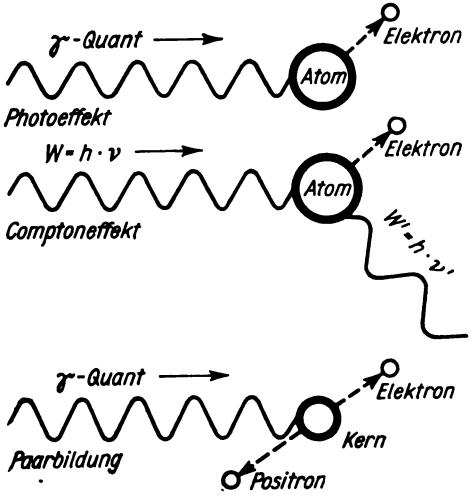


Bild 717. Die 3 Grundvorgänge bei der Schwächung der γ-Strahlung

a) Foto-Effekt: Das γ-Quant reißt ein Elektron aus der Atomhülle, wodurch die Atome des durchstrahlten Stoffes ionisiert werden.

b) Compton-Effekt: Das γ-Quant übergibt dem befreiten Elektron nur einen Teil seiner Energie und bewegt sich unter Richtungsänderung **(Streuung)** mit verminderter Frequenz und damit kleinerer Energie $W' = h\nu'$ weiter.

c) Paarbildung: Das γ-Quant verwandelt sich in ein Elektron-Positron-Paar. Dazu muß nach der auf S. 568 durchgeführten Rechnung seine Energie größer als 1,03 MeV sein, um nach der Beziehung $W = mc^2$ die erforderliche Masse zweier Elektronen zu bilden. Dies ist die Umkehrung des auf S. 568 besprochenen Zerstrahlungsvorganges. Die Schwächung der γ-Strahlung erfolgt ebenfalls nach einem Exponentialgesetz:

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \tag{459}$$

wobei I bzw. I_0 die Intensität der Strahlung hinter bzw. vor dem Absorber, μ (1/cm) der lineare Schwächungskoeffizient und d (cm) die durchstrahlte Schichtdicke ist. Der Schwächungskoeffizient μ für einige wichtige Stoffe ist aus Bild 718 ersichtlich. Das Schwächungsgesetz (459) gilt nur für *dünne Strahlenbündel*. Bei *breiten* Strahlenbündeln und -kegeln kann jedoch die Intensität hinter dem Absorber *weit größer* sein, da ein erheblicher Anteil der ursprünglich gestreuten Strahlung in das Bündel wieder eintritt. Zur praktischen Berechnung von Schutzwänden müssen daher umfangreiche Tabellen zu Hilfe genommen werden, die den Einfluß der Streustrahlung berücksichtigen.

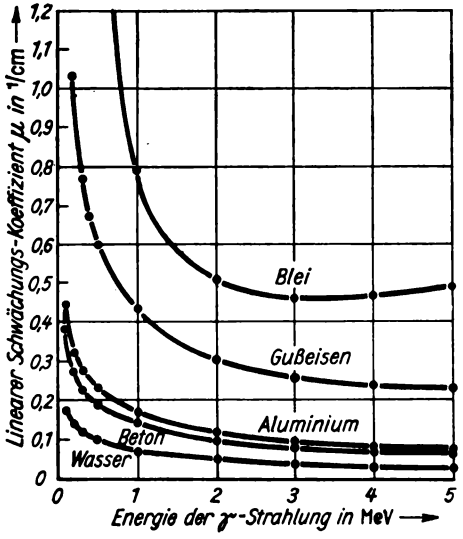


Bild 718. Linearer Schwächungskoeffizient für γ-Strahlen in verschiedenen Stoffen

Diejenige Schichtdicke, welche die γ-Strahlung auf die Hälfte ihres Anfangswertes abschwächt, ist die **Halbwertsdicke** $d_{1/2}$. Sie ergibt sich nach (459) zu

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \tag{460}$$

Da die Halbwertsdicke die Strahlung auf die Hälfte ihres Anfangswertes schwächt, sind zur Schwächung auf den n-ten Teil x Halbwertsschichten erforderlich. Es ist dann

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

und demzufolge die **Anzahl der Halbwertsschichten**

$$x = \frac{\lg n}{\lg 2}$$

Beispiel: Um die γ-Strahlung auf den 20. Teil abzuschwächen, benötigt man

$$x = \frac{\lg 20}{\lg 2} = 4{,}3 \text{ Halbwertsschichten}$$

47.6.5. Strahlendosis

Die Menge einer strahlenden Substanz bzw. ihre Aktivität sagen noch nichts über die Wirkung der dabei entstehenden Strahlen aus; denn diese hängt wiederum von deren Energie und dem Ionisationsvermögen ab. Als Einheit für die von einem Körper empfangene Strahlungsmenge **(Dosis)** gilt **1 Röntgen** (1 R), d. i. diejenige Strahlungsmenge, die in 1 cm³ Luft (0 °C, 760 Torr) Ionen beiderlei Vorzeichens von je $3{,}33 \cdot 10^{-10}$ As erzeugt.
Trifft diese Strahlungsmenge auf einen Körper, so setzt sie in diesem durch Bildung von Ionen eine bestimmte Energiemenge frei. Eine Umrechnung ergibt dann:

(461) **1 Röntgen (1 R) ist diejenige Dosis einer Röntgen- oder γ-Strahlung, die in 1 g Luft die Energie 84 erg umsetzt.**

Neuerdings wird statt dessen die für *alle Arten radioaktiver Strahlen* geltende Einheit bevorzugt:

(462) **1 rad ist diejenige absorbierte Dosis einer beliebigen Strahlung, die in 1 g eines beliebigen Stoffes die Energie 100 erg umsetzt.**

Die große Gefährlichkeit radioaktiver Strahlungen macht es notwendig, gewisse Richtlinien für die zulässigen Höchstwerte festzulegen. Für Personen, die beruflich mit strahlenden Substanzen umgehen, gilt nach internationalen Vereinbarungen z. Z. als **Höchstgrenze 0,1 rad je Arbeitswoche.** Als untere Gefährlichkeitsgrenze bei einmaliger starker Strahlenwirkung können 25 rad angesehen werden, d. i. also diejenige Dosis, bei deren Einwirkung mit ernsten körperlichen Schäden zu rechnen ist. Absolut tödlich wirkt bei Ganzkörperbestrahlung eine Dosis von 600···800 rad.

47.6.6. Dosisleistungskonstante

Die von einem radioaktiven Stoff ausgehende Wirkung kann also nur erfaßt werden, wenn man einerseits seine Aktivität (47.2.3.) und andererseits die von ihm abgegebene Strahlendosis berücksichtigt. Hierüber gibt aber die für jedes γ-strahlende Nuklid charakteristische **Dosisleistungskonstante** K_γ Auskunft:

(463) **Die Dosisleistungskonstante K_γ gibt die Dosisleistung in R/h an, die eine Strahlenquelle von 1 Ci im Abstand 1 m erzeugt.**

Dosisleistungskonstanten K_γ in Rm²/h Ci

$^{22}_{11}$Na	1,1	$^{226}_{88}$Ra	0,83
$^{60}_{27}$Co	1,32	$^{238}_{92}$U	0,009

Beispiel: Welche Dosis erzeugen 50 mCi Kobalt 60 im Abstand von 0,3 m bei 3stündiger Einwirkung? – Da die Intensität mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt (458), gilt für die Dosis $D = \frac{K_\gamma m t}{r^2} = \frac{1{,}32\ \text{R m}^2\ 0{,}05\ \text{Ci}\ 3\ \text{h}}{\text{h Ci}\ 0{,}09\ \text{m}^2} = 2{,}2\ \text{R}$.

47.7. Kernspaltung

47.7.1. Grundvorgang der Kernspaltung

1938 entdeckten Otto Hahn und F. Strassmann, daß bei der Bestrahlung von Uran ($Z = 92$) mit Neutronen die Elemente Barium ($Z = 56$) und Krypton ($Z = 36$) entstanden. Da die Summe der Ordnungszahlen (56 + 36) gerade die Ordnungszahl des Urans ausmacht, mußte gefolgert werden, daß der Urankern in *zwei Teile zerplatzt* war. Weitere Untersuchungen ergaben, daß für diese Spaltreaktion nicht das gewöhnliche Uran $^{238}_{92}$U, sondern das mit einem Mengenanteil von 0,7% darin enthaltene Isotop $^{235}_{92}$U in Frage kommt.
Bald war es möglich, auch viele andere dabei entstehende Spaltprodukte aufzufinden, die paarweise zusammen die Ordnungszahl 92 ergeben. Außerdem entstehen bei der Spaltung 2 bis 3 weitere Neutronen.
Eine von den vielen Möglichkeiten, nach denen sich der Spaltakt abspielen kann, wird durch folgende Gleichung wiedergegeben:

$$^1_0\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{140}_{55}\text{Cs} + {}^{94}_{37}\text{Rb} + 2\,{}^1_0\text{n}\,.$$

Wie aus der Gleichung hervorgeht, sind die Summen sowohl der oben angeschriebenen Massenzahlen als auch der untenstehenden Kernladungen auf beiden Seiten gleich groß. Die beiden Spaltstücke $^{140}_{55}$Cs und $^{94}_{37}$Rb sind β^--aktiv und wandeln sich in mehreren aufeinanderfolgenden Zerfällen schließlich in die stabilen Endprodukte $^{140}_{58}$Ce und $^{94}_{40}$Zr um.

47.7.2. Kernspaltungsenergie

Daß bei der Kernspaltung Energie frei werden muß, kann bereits aus dem Verlauf der Bindungsenergie gefolgert werden (Bild 702). Hier sieht man nämlich, daß die auf ein einzelnes Nukleon entfallende Bindungsenergie bei einem Kern der Massenzahl 235 deutlich niedriger liegt als etwa bei einem Kern der Massenzahl 100. Diese Differenz muß dann beim Zerfall eines großen Kerns in kleinere Teile frei werden. Die Bindungsenergie ist aber nur ein anderer Ausdruck für den Massendefekt. Er berechnet sich wie folgt: Bildet man in der als Beispiel gegebenen Gleichung die Summen der genauen Massenwerte, so erhält man für die *Ausgangsmassen*

$^{1}_{0}$n und $^{235}_{92}$U: $\quad 1{,}00865 + 235{,}04232 = \underline{236{,}051}$

und für die *Spaltprodukte*

$^{140}_{58}$Ce und $^{94}_{40}$Zr: $\quad 139{,}9044 + 93{,}906 = 233{,}810$

sowie für die freigesetzten Neutronen: $\quad 2 \cdot 1{,}00865 = \underline{2{,}017}$

$\underline{235{,}827}$

Wie zu ersehen ist, ergibt sich bei der Kernspaltung ein Massendefekt von

$$\Delta M = 236{,}051 - 235{,}827 = 0{,}224.$$

Dieser Massendefekt wird beim Spaltvorgang in Form von Energie frei.

Kernspaltungsenergie:

Bei der Kernspaltung ist die Gesamtmasse der entstehenden Spaltprodukte kleiner als die Ausgangsmasse. Der Massendefekt wird in Form von Energie frei, die sich nach der Formel $\Delta W = \Delta m\, c^2$ berechnet.

Der größte Teil dieser Energie erscheint als kinetische Energie der mit großer Gewalt auseinanderfliegenden Bruchstücke. Nach außen hin tritt sie als Wärmeenergie in Erscheinung, indem sich die der Spaltung unterworfene Uranmasse erhitzt. Etwa $^1/_6$ der Energie erscheint als radioaktive Strahlung der Spaltprodukte und als kinetische Energie der entstehenden Spaltneutronen.
Der soeben festgestellte Massendefekt $\Delta M = 0{,}224$ ist in Einheiten der relativen Atommasse ausgedrückt und entfällt auf den Massenwert eines Uranatoms $M = 235$. Dann beläuft er sich bei 1 kg Spaltmaterial auf die absolute Masse

$$\Delta m = \frac{0{,}224}{235}\,\mathrm{kg}.$$

Die entsprechende Energie ist

$$\Delta W = \Delta m\, c^2 = \frac{0{,}224\ \mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m^2}}{235\ \mathrm{s^2}} = 8{,}58 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kgm^2/s^2}.$$

Das sind rund 24 **Millionen Kilowattstunden,** die dem Heizwert von etwa 2400 t Steinkohle entsprechen.

47.7.3. Kettenreaktion

Wie schon erwähnt, entstehen bei der Uranspaltung jeweils 2···3 freie Neutronen. Diese neuen Neutronen können *ihrerseits Kernspaltungen* hervorrufen. Allerdings muß dafür gesorgt werden, daß sie vorher nicht von Fremdstoffen absorbiert werden oder aus der Anordnung entweichen. Letzteres tritt nicht ein, wenn eine bestimmte *Mindestmenge* von Uran angewandt wird **(kritische Menge),** so daß jedes Neutron mit *Sicherheit* einen Urankern trifft.

Aus der ursprünglichen Spaltung eines einzelnen Atoms kann sich also in kürzester Zeit eine ungeheure Lawine von Spaltprozessen entwickeln. Die bei dieser **Kettenreaktion** entstehenden Neutronen haben aber eine zu hohe Geschwindigkeit.

Diese sogenannten **schnellen Neutronen** werden von den in der überwiegenden Menge vorhandenen Kernen des Isotops $^{238}_{92}U$ eingefangen, ohne daß es dabei zur Spaltung kommt. Um den Einfang zu unterbinden, müssen die Neutronen möglichst rasch auf **thermische Geschwindigkeit** (d. i. etwa die Geschwindigkeit von Wasserstoffatomen bei Zimmertemperatur) abgebremst werden. Dies erreicht man durch Einbau von **Bremssubstanzen (Moderatoren),** die Neutronen durch elastische Zusammenstöße verlangsamen, aber möglichst wenig Neutronen dabei absorbieren. Hierzu eignen sich besonders reinster Kohlenstoff (Graphit) und schweres Wasser (D_2O). Bei der Verwendung gewöhnlichen Wassers muß man größere Einfangverluste in Kauf nehmen.

Den Ablauf einer derartigen Kettenreaktion zeigt schematisch Bild 719.

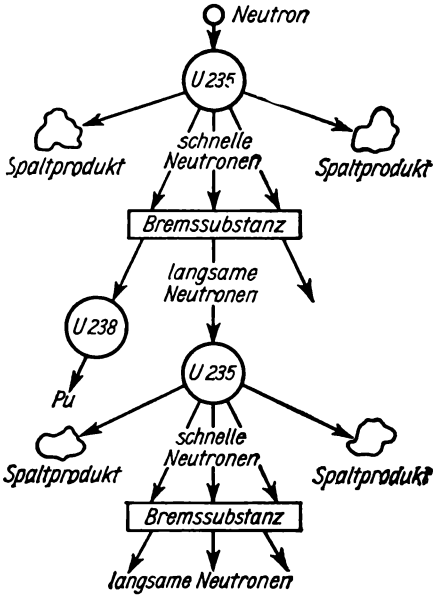


Bild 719. Schema einer Kettenreaktion

Auf dem Prinzip einer *ungehemmt* ablaufenden Kettenreaktion beruht die **Atombombe.** Zwei Klötze aus reinem U 235 oder Pu 239, deren Größen einzeln unterhalb der kritischen Menge liegen, werden durch eine kleine Sprengladung aufeinandergeschossen. Im Augenblick des Zusammentreffens ist die kritische Menge überschritten, womit die Reaktion sofort einsetzt. Die zur Einleitung dieser ungesteuerten Kettenreaktion notwendigen Neutronen sind von Natur aus in der Substanz bereits vorhanden.

47.7.4. Gewinnung von Kernenergie für friedliche Zwecke

Eine in technischem Maßstab arbeitende Anlage, in der sich eine **gesteuerte Kettenreaktion** abwickelt, ist der **Kernreaktor.** Hierbei kommt es vor allem darauf an, daß die in der Uranmasse ablaufenden Spaltprozesse auf einen zeitlich konstant bleibenden Umfang beschränkt bleiben. Finden je Zeiteinheit N Spaltungen statt, so dürfen je Zeiteinheit nicht mehr und nicht weniger als ebenso N Neutronen für den Fortgang der Reaktion gebildet werden. Man drückt das mit Hilfe des **Vermehrungsfaktors** aus. Er muß im stationären Betrieb genau 1 betragen. Liegt er darunter, so kommt die Reaktion zum Stillstand; liegt er darüber, so schwillt die Reaktion in u. U. unkontrollierbarem Ausmaß an und muß zur Zerstörung der Anlage führen.
Die **Steuerung** des Reaktors erfolgt innerhalb gewisser Grenzen selbsttätig. Gröbere Korrekturen werden mit Hilfe einer besonderen Regeleinrichtung vorgenommen. In vielen Fällen besteht sie aus **Regelstäben,** die mehr oder weniger tief in die aktive Zone eingesenkt werden. Sie bestehen aus einem Material, das sehr stark Neutronen absorbiert, z. B. Kadmium oder Borstahl. Das Prinzip eines Uran-Graphit-Reaktors zeigt Bild 720.

Stäbe von reinstem Uranmetall liegen in den Aushöhlungen eines großen *Graphitblockes* als *Bremssubstanz.* Die zur Auslösung der Reaktion notwendigen wenigen *Neutronen* sind von *Natur aus* immer vorhanden. Der Reaktionsablauf wird mit Hilfe von Kadmiumstäben, die mehr oder weniger tief eingesenkt werden, nach Bedarf *gesteuert.*
Es gibt heute eine ganze Anzahl von Reaktortypen, die sich hinsichtlich des spaltbaren Materials (natürliches Uran, angereichertes Uran, reines U 235 oder Pu), des Moderators (Graphit, D_2O, Beryllium), des Wärmeübertragers (gasförmiges CO_2, H_2O, D_2O, flüssiges Natrium oder Wismut) und der Verteilung des Spaltstoffs (Stäbe, Bleche oder im Moderator aufgelöst) voneinander unterscheiden.

Im **Kernkraftwerk** dient ein großer Reaktor dazu, ein in einem 1. Kreislauf zirkulierendes, wärmeübertragendes Medium (Wasser oder gasförmiges CO_2) zu erhitzen. Dieses gibt in Wärmeaustauschern die Wärme an einen 2. Kreislauf ab, in dem hochgespannter Dampf erzeugt wird. Dieser betreibt dann Turbogeneratoren üblicher Bauart. Das erste Atomkraftwerk mit einer elektrischen Leistung von 5000 kW wurde am 27. 6. 1954 in der Sowjetunion seiner Bestimmung übergeben.

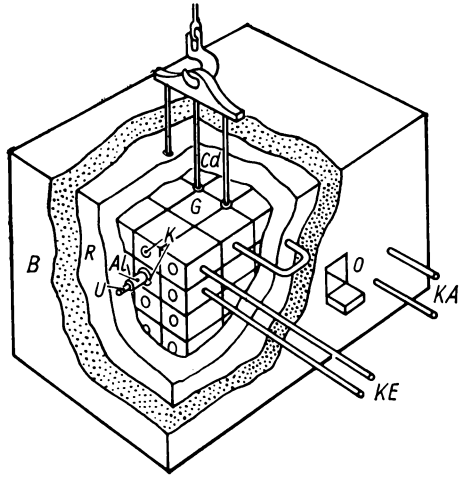


Bild 720. Schema eines Uran-Graphit-Reaktors
U Uranstab, Al Aluminiumschutzhülle, G Graphitziegel, R Reflektor aus Graphit, Cd Kadmiumstab zur Regulierung, B Betonschutz, K Kanäle für das Kühlmittel, KE Kühlmittelzufluß, KA Kühlmittelabfluß, O Öffnung für Versuche und Messungen

Inzwischen ist bereits eine ganze Reihe von Großkraftwerken in verschiedenen Ländern in Betrieb genommen worden.
Von besonderer Bedeutung für die Wirtschaftlichkeit eines Uran-Reaktors ist die Veränderung des Uranisotops U 238. Die von ihm eingefangenen Neutronen führen zwar nicht zur Spaltung und unmittelbaren Energieerzeugung, bewirken aber eine Kernumwandlung nach folgendem Schema:

$$^{238}_{92}\mathrm{U}\ (\mathrm{n},\gamma)\ ^{239}_{93}\mathrm{U} \xrightarrow[23\ \mathrm{min}]{\beta} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow[2{,}3\ \mathrm{d}]{\beta} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}\,.$$

Es bilden sich also Nuklide, deren Ordnungszahl größer als die des Urans ist. Man nennt sie

Transurane:

künstlich geschaffene radioaktive Elemente, deren Ordnungszahl größer als 92 ist.

Es sind die in der letzten Reihe des Periodensystems (S. 538) aufgezählten Elemente: **Neptunium, Plutonium, Amerizium, Kurium, Berkelium, Kalifornium, Einsteinium, Fermium, Mendelevium, Nobelium** und **Lawrenzium.** Da die Isotope dieser künstlichen Elemente im Gegensatz zu den natürlichen Elementen nicht in bestimmten Mischungsverhältnissen auftreten, sind deren Atommassen im Periodensystem nicht mit verzeichnet.
Das im Reaktor gebildete Plutonium aber hat hinsichtlich seiner Spaltbarkeit ganz ähnliche Eigenschaften wie das $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Es kann somit seinerseits zum Betrieb von Reaktoren verwendet werden und ermöglicht dadurch eine volle Ausnutzung der gesamten eingesetzten Uranmenge.

47.8. Anwendung von Radionukliden

Radionuklide sind radioaktive Isotope der natürlichen Elemente, die durch Neutronenbestrahlung oder Abtrennung von Spaltprodukten des Kernreaktors gewonnen werden.

Sie sind β- und γ-Strahler von verschiedenster Halbwertszeit und können je nach ihren Eigenschaften vielen Zwecken dienstbar gemacht werden. Beispielsweise läßt sich an Stelle des kostbaren Radiums in der Medizin (Krebsbekämpfung) das viel billigere Isotop $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ (kurz Co 60) verwenden, das in beliebigen Mengen hergestellt werden kann. Abgesehen von den zahlreichen Anwendungen in Forschung, Chemie, Medizin, Biologie und Landwirtschaft (Pflanzenzüchtung), haben die Radionuklide auch große technische Bedeutung.

Verabreicht man einem Tier z. B. ein Präparat mit radioaktivem Phosphor, so läßt sich mit Hilfe der von diesen Kernen ausgesandten Strahlen genau feststellen, welchen Weg der Phosphor im Tierkörper zurücklegt und an welchen Stellen er schließlich abgelagert wird. In der Chemie wurden wertvolle Erkenntnisse über die Struktur von Molekülen gewonnen.

1. Gammadefektoskopie. Zum Aufsuchen von Materialfehlern, wie Gußlunkern, zur Kontrolle von Schweißnähten usw. werden die Werkstücke von der intensiven

γ-Strahlung eines starken Präparates (z. B. Thulium 170, Iridium 195, Kobalt 60) „durchleuchtet". Der dahinter angebrachte fotografische Film gibt dann die innere Beschaffenheit wie im Röntgenbild wieder.

2. Radiographie. Durch Beifügen eines Radionuklides zur Schmelze von Legierungen kann deren Feingefüge nach dem Erstarren dadurch sichtbar gemacht werden, daß man das Probestück anschleift und hier einen Film auflegt. Auf dem Film bildet die Strahlung bestimmter Kornteile die Feinstruktur unmittelbar ab.

3. Kontaktfreie Dickenmessung. Zur laufenden Kontrolle des Flächengewichtes von Papier, Folien oder Aufstrichen läuft das Meßgut kontinuierlich zwischen einem β-Strahler (z. B. Thallium 204) und einem Strahlungsempfänger hindurch. Je nach der Dicke wird die Strahlung verschieden stark absorbiert und die Dicke dadurch registriert. Wenn die eine Seite des Meßgutes nicht zugänglich ist, kann auch die Rückstreuung der β-Teilchen zur Messung herangezogen werden.

4. Dichtemessungen. Innerhalb gewisser Grenzen ist die Absorption der γ-Strahlen der Dichte des durchstrahlten Mediums proportional. Durch Versenken einer aus γ-Präparat und Zählrohr bestehenden Meßsonde kann die Dichte von Baustoffen, Erdböden u. dgl. bestimmt werden.

5. Füllstandsmessung. Von außen her kann die Höhe des Füllstandes geschlossener Behälter kontrolliert werden, indem auf bestimmter Höhe seitlich ein γ-Strahler angebracht wird. Gegenüber befindet sich auf der anderen Außenseite ein Zählrohrgerät, das sofort anspricht, wenn das die Strahlung absorbierende Füllgut unter das festgelegte Niveau absinkt.

6. Feuchtigkeitsmessungen. Eine Neutronenquelle wird zusammen mit einem Neutronenzählrohr in das zu untersuchende Material versenkt. Ist dieses wasserhaltig, so werden die schnellen Neutronen von dem darin enthaltenen Wasserstoff stark abgebremst, wodurch die Dichte der in der Umgebung der Quelle vorhandenen Neutronen entsprechend zunimmt und vom Zählrohr registriert wird. Das Verfahren ist für Feuchtigkeitsbestimmungen in Kohle, Sand usw. verwendbar.

7. Untersuchung von Verschleißvorgängen. Enthält ein gewöhnlicher Werkstoff Spuren radioaktiver Nuklide, so verraten sich selbst kleinste Materialmengen durch ihre Strahlung. Von derartigen **radioaktiven Indikatoren** macht man in Chemie und Medizin weitgehend Gebrauch. In der Technik benutzt man sie z. B. zur Untersuchung von Verschleißvorgängen. Durch Beigabe während der Herstellung oder durch nachträgliches Bestrahlen mit Neutronen kann man Drehmeißel und andere Werkzeuge aktivieren. Die mehr oder weniger starke Abnützung ergibt sich aus der gemessenen Aktivität der Drehspäne. Auch gleitende Maschinenteile, wie etwa Kolbenringe von Motoren, können so präpariert werden. Die ins Schmieröl gelangenden Teilchen geben durch ihre Strahlung die Menge des abgeriebenen Materials an.

Damit sind nur einige Anwendungsbeispiele aufgezählt. Ihre Anzahl und Bedeutung nimmt ständig zu.

47.9. Prinzip der thermonuklearen Reaktionen

Die Kurve der Bindungsenergie (Bild 702) läßt noch eine zweite Möglichkeit zur Gewinnung von Kernenergie vermuten. Geht man von den Kernen niedriger Massenzahl aus, so steigt die Kurve bis zu ihrem Maximalwert steil an. Dies deutet darauf hin, daß bei der Vereinigung leichter Kerne zu einem schweren Kern ein starker Massendefekt auftritt. Man nennt einen solchen Prozeß

Kernfusion:

Vereinigung von leichten Atomkernen zu einem schweren, wobei eine dem auftretenden Massendefekt entsprechende Energiemenge frei wird.

Da aber Atomkerne stets positiv geladen sind, muß erst die zwischen ihnen bestehende Abstoßungskraft überwunden werden. Die beabsichtigten Reaktionen können daher nur erfolgen, wenn die Kerne sehr hohe Geschwindigkeiten haben. Der einzig gangbare Weg scheint darin zu bestehen, ein entsprechendes Gas auf viele Millionen Grad zu erhitzen und zugleich so stark zu komprimieren, daß genügend Teilchen je Zeiteinheit zur Reaktion kommen.

Leider konnte die Kernfusion bisher nur im Falle der **Wasserstoffbombe** praktisch realisiert werden. Zur Erzielung der notwendigen hohen Temperatur enthält die H-Bombe im Innern eine normale Pu-Bombe. Die weitere Füllung besteht wahrscheinlich aus festem Lithiumdeuterid LiD (D = schwerer Wasserstoff $^2_1\mathrm{H}$). Es finden dann die Reaktionen statt:

$$^6_3\mathrm{Li} + {}^2_1\mathrm{H} = 2\,{}^4_2\mathrm{He}$$

$$^6_3\mathrm{Li} + {}^1_0\mathrm{n} = {}^4_2\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H}$$

$$^6_3\mathrm{Li} + {}^3_1\mathrm{H} = 2{}^4_2\mathrm{H} + {}^1_0\mathrm{n}$$

1 kg LiD hat die Sprengkraft von 50000 t Nitrotoluol.

Es muß jedoch Aufgabe der gesamten zivilisierten Menschheit sein, die Anwendung der Atomenergie für Zwecke der Massenvernichtung zu verhindern.

Die Explosion der Wasserstoffbombe ist jedoch eine *ungesteuerte* Kernreaktion. Um das angestrebte Ziel einer technisch verwertbaren, d. h. **kontrollierten Kernfusion** zu erreichen, fehlen z. Z. noch geeignete Einrichtungen. Die Theorie ergibt, daß die stoßenden Teilchen die Energie von etwa 50 keV haben müssen. Sie hängt mit der Temperatur nach der Gleichung (S. 254)

$$W = kT$$

zusammen. Setzt man $W = 50 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Ws und die BOLTZMANNsche Konstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Ws/grd ein, so erhält man

$$T = \frac{W}{k} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Ws\ grd}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Ws}} = 580 \cdot 10^6\ \mathrm{grd}.$$

Da hier mit der „wahrscheinlichen Geschwindigkeit" der Gasmoleküle gerechnet wurde und im Gas auch erheblich höhere Geschwindigkeiten (MAXWELL-Verteilung,

S. 253) vorkommen, ist damit zu rechnen, daß vielleicht auch wesentlich niedrigere Anfangstemperaturen ausreichen.
In den letzten Jahren versucht man etwa den folgenden Weg. Ein geeignetes Gas wird ionisiert und in diesem so erhaltenen **Plasma** ein starker Strom erzeugt. Das mit dem elektrischen Strom verbundene Magnetfeld komprimiert das Plasma zu einem frei schwebenden Faden, womit Druck und Temperatur auf sehr hohe Werte ansteigen. Die Schwierigkeiten solcher Versuche bestehen vor allem darin, daß dieser Plasmaschlauch äußerst instabil ist und in Bruchteilen von Sekunden zerreißt. Untersuchungen solcher Art sind Gegenstand der **Plasmaphysik.**
Ein zweites Beispiel, wo aller Wahrscheinlichkeit nach Fusionsprozesse stattfinden, ist die Sonne. Die praktisch unversiegbare Quelle ihrer Energie ist ein **Reaktionszyklus** von etwa der folgenden Art:

$$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{D} + \mathrm{e}^+ + \gamma$$

$$^2_1\mathrm{D} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma$$

$$^3_2\mathrm{H} + {}^3_2\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H}$$

Beispiel: Die bei der Bildung eines Heliumkerns frei werdende Energie wurde in dem auf S. 565 angeführten Beispiel mit $\Delta W = 28{,}9$ MeV berechnet. Bezieht man dieses Ergebnis auf 1 kg Helium, so erhält man mit der Massenzahl $M = 4$

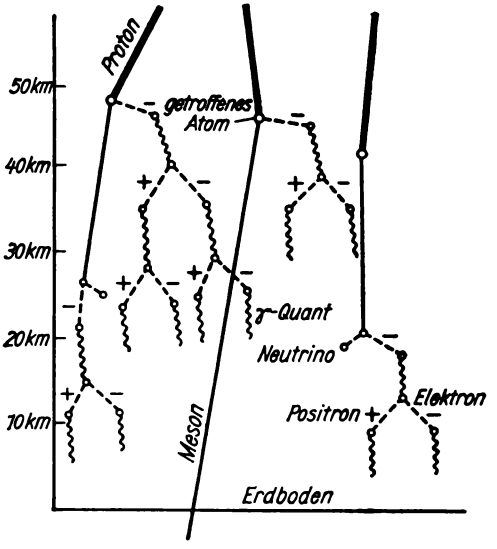
$$W = N_A \cdot \Delta W = \frac{6{,}023 \cdot 10^{26} \cdot 28{,}9 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Ws}}{4\,\mathrm{kg}} = 70 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Ws/kg} = 193 \cdot 10^6\,\mathrm{kWh/kg}$$

47.10. Kosmische Strahlung

Infolge des natürlichen Gehaltes der Erdrinde an radioaktiven Substanzen werden in der Luft ständig Ionen gebildet. Wenn man aber eine Ionisationskammer durch einen Bleipanzer abschirmt, bleibt dennoch ein *Rest von Leitfähigkeit* zurück. Ebenso spricht ein Zählrohrgerät auch bei Abwesenheit von radioaktiven Substanzen ständig auf eine harte Strahlung an, die aus der Atmosphäre kommt.
Wie 1912 durch Ballonaufstiege von Hess festgestellt wurde, rührt diese von einer Strahlung her, die aus dem *Weltenraum* in die Lufthülle eindringt. Sie wird **kosmische** oder **Höhenstrahlung** genannt und ist von besonders durchdringender Kraft. Selbst in mehr als 1000 m Wassertiefe ist sie noch nachweisbar. Über ihren Ursprung ist nichts Sicheres bekannt.[1]) Aus der Ablenkung im magnetischen Erdfeld schließt man, daß es zunächst vorwiegend Protonen und andere Atomkerne sind, die bereits oberhalb von 20 km völlig absorbiert werden (Bild 721). Ihre Anfangsenergie liegt zwischen 10^9 und 10^{15} eV. Dabei entstehen in den höchsten Luftschichten einerseits **Elektronen** (*weiche* Komponente) und andererseits **μ-Mesonen** (*harte* Komponente), deren Masse etwa 207 Elektronenmassen beträgt.

[1]) Man vermutet Kernprozesse im interstellaren Raum oder Vorgänge auf bestimmten Fixsternen als Ursache. Von der Sonne stammt nur ein kleiner Bruchteil

Bild 721. Schema der kosmischen Strahlung



Dies ist eine Gruppe von Elementarteilchen, die bis zu ihrer Entdeckung in der kosmischen Strahlung unbekannt war. Sie tragen je eine positive oder eine negative Elementarladung.

1. Die weiche Komponente. Beim Zusammentreffen der Elektronen mit den Atomen der Luft entsteht eine Bremsstrahlung (46.5.1.), d. h. äußerst energiereiche γ-Quanten (Photonen). Die Photonen werden von anderen Kernen wiederum absorbiert und erzeugen dabei je Quant ein Elektronenpaar (Elektronenzwilling), d. h. je ein Positron und Elektron. Diese beiden Teilchen wandeln sich ihrerseits in Photonen um usw., so daß eine **Kaskade (Schauer)** von Teilchen entsteht. Der Schauer bricht ab, wenn die Energie der Teilchen zu klein geworden ist, was meist schon in großer Höhe der Fall ist.

2. Die harte Komponente. 75% der in Meereshöhe registrierten Teilchen sind *μ-Mesonen*. Da ihre Halbwertszeit nur $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s beträgt, können sie erst in der Lufthülle entstanden sein. Sie *zerfallen* schließlich in *Elektronen*, *Positronen*, *Photonen* und *Neutrinos*.

Die weiteren Untersuchungen ergaben aber, daß die zwischen diesen Teilchen und den von ihnen getroffenen Atomkernen stattfindenden Wechselwirkungen eine viel umfassendere Bedeutung haben. Die in der kosmischen Strahlung vorkommenden Prozesse können auch mit Hilfe großer Beschleunigungsanlagen künstlich hervorgerufen werden, sind also nicht nur auf Vorgänge in der natürlichen Atmosphäre beschränkt. Dabei ergab es sich, daß außer den bisher genannten Elementarteilchen noch viele andere existieren. Sie haben zwar zumeist eine nur äußerst kurze Lebensdauer und zerfallen dann in einzelne stabile Teilchen. Man ist aber zu der Erkenntnis gelangt, daß alle Materie sich letzten Endes aus einzelnen diskreten, stabilen oder instabilen Elementarteilchen und Strahlungsquanten zusammensetzt. Insbesondere unterscheidet man dabei:

Hauptgruppen der Elementarteilchen

1. Photonen: Lichtquanten, Quanten der Röntgen- und γ-Strahlung.

2. Leptonen (leichte Teilchen): Elektron, Positron, Neutrino, μ-Meson.

3. Mesonen (mittelschwere Teilchen): π-Mesonen ($\approx$270fache Elektronenmasse), K-Mesonen ($\approx$1000fache Elektronenmasse).

4. Baryonen (schwere Teilchen): Proton, Neutron und eine größere Gruppe von Hyperonen (überschwere Teilchen), deren Masse das über 2500fache der Elektronenmasse erreicht. Zu jedem Teilchen gibt es ein entsprechendes **Antiteilchen.** So ist z. B. das Positron das Antiteilchen des Elektrons, und das dem Proton entsprechende Antiteilchen ist das negative **Antiproton,** das im Jahre 1955 künstlich hergestellt wurde, usw.

Aus diesem groben Überblick erkennt man, daß in den Atomen selbst bzw. bei deren radioaktivem Zerfall nur einige dieser Teilchen vorkommen. Die zwischen all diesen Teilchen und Quanten vorhandenen Wechselbeziehungen sind heute Gegenstand intensivster Forschung. Ihre endgültige Klärung wird dazu beitragen, das von den Naturwissenschaftlern aller Nationen weitgehend anerkannte materialistische Weltbild weiter zu vervollständigen und zu vertiefen.

Bildquellenverzeichnis

Deutsches Museum München: Bilder 271, 566

GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik, Band I. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962: Bild 391

GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik, Band II. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1951: Bilder 674, 680

GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik, Band III. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1951: Bild 450

KÜSTNER: 25 Versuche aus der Physik. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1951: Bild 227

Lehrbuch der Physik der Grundschule, 6. bis 8. Schuljahr, 3. Auflage. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1949: Bilder 468, 587

MOELLER/WOLFF: Grundlagen der Elektrotechnik, Band I. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1952: Bild 573

POHL: Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre. Berlin: Springer-Verlag 1944: Bilder 125, 221

PRANDTL: Abriß der Strömungslehre. Braunschweig: Verlag Vieweg & Sohn: Bild 201

SCHAEFER/BERGMANN/KLIEFOTH: Grundaufgaben des physikalischen Praktikums. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1948: Bild 198

VARDUHN/NELL: Handbuch der Elektrotechnik, Band I, 5. Auflage. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1953: Bild 658

VEB Carl Zeiss Jena: Bilder 318, 320

VEB Chemieanlagen Rudisleben: Bild 287

VEB ddk, Scharfenstein: Bild 528

VEB Feutron, Greiz: Bilder 226, 253, 296

VEB Freiberger Präzisionsmechanik: Bild 360

VEB Junkalor, Dessau: Bild 255

VEB Maschinenfabrik, Sangerhausen: Bild 120

VEB Meßgerätewerk, Magdeburg: Bild 447

VEB Meßtechnik Mellenbach: Bild 476

VEB Meß- und Armaturenwerk, Magdeburg-Buckau: Bild 10

VEB Werk für Fernsehelektronik, Berlin: Bild 451

VEB Zwickauer Maschinenfabrik: Bild 266

VEB Vakutronik, Dresden: Bild 711

Sachwortverzeichnis

α-Strahlen 556, 571
Abbe 351
Abbildung, optische 297, 313
Absorptions-gesetz 572
— -spektrum 310
— -vermögen 361
Abtrennarbeit 491
adiabatische Änderung 227
Aggregatzustand 205
Ähnlichkeitsgesetz 179
Akkumulator 485
Akkommodation 321
Aktiniumreihe 562
Aktivität 559
Akzeptor 556
Ampere 391
Amperewindungen 439
Angströmeinheit 18
Anion 479
Annihilation 568
Anode 496
Anodenstrom 496
Antiteilchen 584
Antrieb 88
Apertur, numerische 351
Äquipartitionsprinzip 256
Äquivalent, elektrochemisches 481
Äquivalentgewicht 482
Arbeit 77, 411
Archimedisches Prinzip 156
Astigmatismus 319
Astonscher Dunkelraum 488
Asynchronmotor 526
Atmosphäre 146
Atom-bombe 577
— -energie 578
— -hülle 535
— -kern 537, 556
— -kraftwerk 578
— -masse, relative 537
— -modell nach Bohr 539
— —, wellenmechanisches 544
— -radius 248
Auflösungsvermögen, optisches 349, 377
Auftrieb in Flüssigkeiten 156
— — Gasen 159
Auge 321
—, spektrale Empfindlichkeit 379
Ausdehnungskoeffizient 186
Ausfluß aus Gefäßen 165
Avogadro, Gesetz von 197
Avogadrosche Konstante 247

β-Strahlen 557, 572
Bahngeschwindigkeit 41
ballistisches Galvanometer 462
Balmer-Serie 543
Bandgenerator 412
bar 146
Baryonen 584
Beharrungsvermögen 71
bel 283
Beleuchtungsstärke 385
Bernoulli, Gesetz von 163
Beschleunigung 30, 71, 121
Bestrahlungsstärke 357
Beugung des Lichtes 345
— von Wellen 345
Beugungsgitter 348
Bewegung, harmonische 117
—, zusammengesetzte 48
Bewegungs-energie 81
— -größe 88
— lehre 27
Bezugssystem 45
Bild, reelles 298
—, virtuelles 298
— -feldwölbung 321
Bindungsenergie 564
Blättchen, dünne 341
Blind-leistung 519, 521
— -strom 519
— -widerstand 506, 508, 515
Bogen-entladung 489
— -maß 39
Bohr, Niels 539
Boltzmannsche Konstante 251
Bourdonsche Röhre 147
Boyle-Mariotte, Gesetz von 151
Braunsche Röhre 499
Brechkraft 317
Brechung des Lichtes 301, 332
Brems-leistung 86
— -strahlung 550
Brenn ebene 313

Brenn-punkt 296, 312
— -strahl 297, 314
— -stoffelement 485
Brewstersches Gesetz 353
Brownsche Bewegung 140
Bunsen, Gasdichtemesser 166

Candela 382
Carnot, Kreisprozeß von 236
CGS-Einheiten 87
charakteristische Strahlung 551
chromatischer Fehler 318
Clausius 240
Coehnsche Regel 433
Compton-Effekt 573
Coriolis-Kraft 110
Coulomb 75
Coulomb, Gesetz von 420
Curie, Maßeinheit 559
Curie-Punkt 447

Daltonsches Gesetz 212
Dampf 213
— -druck 211
— -tabelle 215
Defektelektron 472
Dehnungsarbeit 79
Depolarisator 484
Deuterium 564
Dezibel 283
Diamagnetismus 449
Dichte 23, 152
— -anomalie 189
— und Temperatur 189
Dielektrikum 429
Dielektrizitätszahl 429
Diffusion 139
Diode 496
Dipol 431, 532
Dispersion 308
Donator 556
Doppelbrechung 353
Doppelschicht, elektrische 433
Doppler-Effekt 275
Dosis 574
Drehbewegung 39
—, Energie der 96
Drehimpuls 103, 115
Drehmoment 61, 85, 103
Drehschwingungen 132
Dreieckschaltung 524
Dreiphasenstrom 523
Drosselspule 508
Druck, Einheiten 145
—, statischer und dynamischer 164
Dualität des Lichtes 375
Durchfluß 162
Durchflutungssatz 439
Durchlässigkeit spektrale 361
dyn 87
Dynamik, Grundgesetz der 70, 101
Dynamomaschine 454

Ebene, schiefe 58
Effektivwert 504
Eigenleitung 472
Einheiten, internationale 6
— -gleichung 26
Einsteinsche Gleichung 371
Eisen-Nickel-Akkumulator 486
Eispunkt 184
Elektret 432
Elektrolyse 478
Elektrometer 413
Elektromotor 460
Elektronen 392
— -Ablenkung von 494
— -bahnen 540
— -gas 492
— -leitung 470
— -radius 536
— -röhren 496
— -schalen 222
— -strahlen 489
— -volt 490
— -zwilling 573
Elektrostatik 411
Elementar-ladung 392
— -teilchen 584
— -welle 328
Elemente, galvanische 483
Elongation 118, 267
Emanation 562
Emission, thermische 493
Emissions-vermögen 363
— -theorie 369
Emitter 477
EMK 394
Energie des elektrischen Feldes 428
— — magnetischen Feldes 466
— -bänder 553
—, Einheiten 200
—, Erhaltungssatz 82
—, innere 220, 226
—, mechanische 81
— -niveau 543
—, potentielle und kinetische 81, 130
Engler-Viskosimeter 180
Entropie 240
Episkop 325
erg 88
Erstarrungswärme 206

Fahrenheit 184
Fahrwiderstand 75
Fall, freier 36
Farad 424
Faradaysche Gesetze 481
— Konstante 482
Farben 380
— dünner Blättchen 340
— -kreis 381
Farb-fehler 318
— -maßzahl 381
— -temperatur 368
Feld, elektrisches 411
— -emission 493
—, Energie 428, 465
— -konstante, elektrische 419
— —, magnetische 443, 465
— -linien 414
—, magnetisches 435
— -stärke, elektrische 416
— —, magnetische 438
Fermi-Verteilung 493
Fernrohr 326
Ferromagnetismus 445
Fettfleckfotometer 388
Feuchtigkeit 216
Flächendichte 418
Fliehkraft 107
Flintglas 301
Fluoreszenz 290
Fluß, magnetischer 444

Foto-effekt 370, 573
—-emission 493
— -element 477
— -metrie 379
fotografische Kamera 323
Fraunhofersche Beugung 347
— Linien 311
Freiheitsgrad 255
Frequenz 118, 267, 502
Fresnelscher Spiegel 338
Fundamentalschwingungen 127

γ-Defektoskopie 579
γ-Strahlen 557, 572
Galileisches Fernrohr 327
galvanische Elemente 483
Galvanometer, ballistisches 462
Gasentladung 486
Gas, ideales 191
— -konstante 195. 198, 222
— -thermometer 195
Gase, Zahlentafel für 199
—, Zustandsänderung 219
—, Zustandsgleichung 195
Gauß 444
Gay-Lussac, Gesetz von 191
Gefrierpunktserniedrigung 207
Gegenwirkungsprinzip 54
Geiger-Müller-Zählrohr 569
Germanium 472
Geschwindigkeit 28, 267
Gewicht 21, 72
—, wahres und scheinbares 159
Gitter, optisches 348
—, von Röhren 497
Gleichgewicht von Kräften 53, 57
—, radioaktives 562
Gleichgewichtsbedingungen 69
Gleichrichter 476, 497
Gleichungen, physikalische 25
Gleitreibung 75
Glimmentladung 488
Glüh-emission 493
— -farben 367
Glühkatode 496
Gravitation 112
Grenzfrequenz von Röntgenstrahlen 550
Grenzschicht in Strömungen 169, 174
— -winkel 306
Größengleichungen 25

Haftreibung 74
Hahn, Otto 575
Halbleiter 472, 555
Halbwerts-dicke 574
— -zeit 559
Hall-Effekt 471
Hauptebenen 316
Hauptquantenzahl 543
Hauptsatz, erster 220
—, zweiter 240
Hauptschlußmaschine 455
Hebelgesetz 60
Heber 138
Heisenberg, Werner 378
Henry 457
Hertz 117, 533
Höhen-formel, barometrische 154
— -strahlung 582
Hohlspiegel 295
holländisches Fernrohr 327
Höppler-Viskosimeter 171
Hör-fläche 284
— -schwelle 284
Huygens-Fresnelsches Prinzip 328, 336
hydrostatische Waage 158
Hyperonen 584
Hysteresis 446

Impedanz 512
Impuls 88
Induktion 441
Induktions-gesetz 451
— -konstante 443, 465
induktiver Widerstand 506
Induktivität 458
Inertialsystem 45
Influenz 415
— -konstante 419
Infrarot 289, 359
Interferenz 333, 338, 343
Ionen 479, 487
Ionen-beweglichkeit 479
Ionisationskammer 569
irreversible Vorgänge 239
isobare Zustandsänderung 221
isochore Zustandsänderung 220
Isolatoren 391, 398
isotherme Zustandsänderungen 223
Isotope 563

Joule 77
Joule-Thomson-Effekt 245

Kältemaschine 234
Kalorie 200
Kalorimeter 204
Kapazität 423
Kapillare 144
Kationen 479
Katode 479
Katoden-fall 489
— -strahlen 489
K-Einfang 563
Kelvin-Grad 194
Keplersche Gesetze 114
Kern-fusion 581
— -spaltung 575
— -umwandlung 565
Kettenreaktion 577
Kilomol 196
kinetische Energie 81
— Wärmetheorie 247
Kippschwingungen 127
Kirchhoffsche Regeln 401, 404
Kirchhoffsches Strahlungsgesetz 363
Klemmenspannung 407, 512
Knotenpunkt 401
Koerzitivkraft 448
kohärente Einheiten 87
— Wellen 338
Kohäsion 138
Kolbendruck 147
Koma 320
Komplementärfarben 380
Kompressibilität 148
Kondensation 209
Kondensator 235, 414
Kondensatoren, Schaltung von 424

Kondensor 325, 430
Konkav-linsen 313
— -spiegel 295
Kontinuitätsgleichung 163
Konvektion 260
Konvex-linsen 312
— -spiegel 300
Korkenzieherregel 62, 105, 437
kosmische Geschwindigkeit, erste 110
— —, zweite 116
— Strahlung 582
Kraft 21, 53, 71
— -fluß 444
— -stoß 88
Kräftepaar 68
—, Zerlegung 57
Kreisel 105
Kreis-frequenz 118, 267, 502
— -prozeß 231, 236
Kronglas 301
Kugel-kondensator 425
— -wellen 269
Kurzschlußläufer 526

Ladung, elektrische 412
Lambertsches Gesetz 383
Längeneinheit 18
latente Wärme 602
Lautstärke 284
Leistung 83, 409, 512
Leistungsfaktor 519
Leitungsband 553
Leitwert 396
Lenzsche Regel 458
Leptonen 584
Leuchtdichte 386
Licht 289, 368
— -äquivalent 383
— -emission und -absorption 540
— -geschwindigkeit 292, 375
— -quanten 369, 541
Licht-stärke 323, 382, 384
— -strom 383
— -verteilungskurve 382
— -weißes 308
— -Wellenlängen 290, 310
— -Wellentheorie 368
Liniendiagramm 509
Linienspektrum 310
Linke-Hand-Regel 459
Linsen 311
—, dicke 316
—, zusammengesetzte 316
— -fehler 316
— -systeme 316
Lissajoussche Figuren 125
Löcher 472
Longitudinalwellen 268
Lorentz-Kraft 495
Loschmidtsche Konstante 247
Luft, Feuchtigkeit 216
Luftdruck 152
Lumen 383
Lumineszenz 290
Lupe 322
Lux 385

MacLeod-Manometer 152
Magnet, Zugkraft 467
Magnetisierungskurve 446
Magnetismus, remanenter 448
Majoritätsträger 475
Mangelhalbleiter 475
Maschensatz 404
Masse 20, 71
Masse-Energie-Beziehung 372
Massen-anziehung 113
— -defekt 564
— -einheit 20
— -mittelpunkt 65
— -trägheitsmoment 96, 136
— -wert 535
— -wirkungsgesetz 474
— -zahl 537
— -zunahme, relativistische 373, 491
Maxwell-Verteilung 252
Mayer, Robert 82
Meniskus 144
Mesonen 582
Meter 17
Michelson-Interferometer 344
Mikroskop 327, 376
Millibar 146
Minoritätsträger 475
Moderator 577
Mol 196
Molekularbewegung 140
Molekulargeschwindigkeit 249
Molvolumen 197
Moment 61
Momentanwerte von Wechselgrößen 502
Moseleysches Gesetz 552

n-Leitung 474
n-p-Gleichrichter 475
Nebelkammer 570
Nebenquantenzahl 543
Nebenschlußmaschine 455
Neptunium 579
Neutrino 572
Neutron 536, 567. 577
Newton 21, 70, 71, 369
Newtonsche Ringe 343
Nicolsches Prisma 354
Normal-element 485
— -kraft 58
— -ton 285
— -widerstand 396
Nukleon 535
Nuklid 557
Nullpunkt, absoluter 193

Oberflächenspannung 142
Öffnungsverhältnis 323
Ohm 396
Ohmsches Gesetz 399
Orbital 545
Ordnungszahl 537, 546
Otto-Motor 231

p-Leitung 475
Paarbildung 472, 573
parabolische Geschwindigkeit 116
Parabolspiegel 296
Parallelogramm der Geschwindigkeiten 47
— — Kräfte 56
Parallelresonanz 517
Paramagnetismus 448
Partialdruck 212
Pauli-Prinzip 546
Peltier-Effekt 435
Pendel 133
Periodensystem 538
Permeabilitätszahl 445
perpetuum mobile 82

Pferdestärke, PS 84
Phasen-sprung 331
— -winkel 118, 267, 507, 512
Phon 285
Photonen 372, 584
piezoelektrischer Effekt 286, 432
Pitot-Rohr 167
Planck, Max 366
Planeten 115
Plasma 488, 582
Plutonium 579
Poise 171
Poissonsche Gleichungen 228
Polarisation, elektrische 431
— -elektrolytische 484
— des Lichtes 352
Polonium 556
polytrope Zustandsänderung 229
Positron 568, 584
Potential 395, 422
Prandtlsches Staurohr 168
Präzession 105
Projektions-apparat 325
— -satz 48, 58
Pronyscher Zaum 86
Proton 536
Psychrometer 217

Quanten-bedingung 540
— -theorie 369
— -zahlen 543
Quecksilbersäule 146

rad 40
Radialbeschleunigung 51
Radiant 40
Radioaktivität 556
Radium 556, 569
Radon 562
Raketenantrieb 91
Raumwinkel 384
reale Gase 244
Rechte-Hand-Regel 452
Reflexions-gesetz 95, 293, 320
— -vermögen 361
Reibung 74
— in Flüssigkeiten 169
Reihenresonanz 515
Reizstärke 283
relativistischer Massenzuwachs 373, 491
Relativität der Bewegungen 45
Resonanz 515
reversible Vorgänge 239
Reversionspendel 135
Reynoldssche Zahl 179
Richmannsche Regel 202
Richtgröße 129
Röntgen-einheit 574
— -strahlung 549
Rutherford, Ernest 535, 565
Rydberg-Frequenz 542

Sammler 485
Schall-druck 280
— -empfindung 283
— -geschwindigkeit 271
— -schnelle 278
— -stärke 281
— -strahlungsdruck 281
Schärfentiefe 325
Schein-leistung 520
— -widerstand 512
Scheitelwert 505
Schichtenströmung 172
Schleifenwicklung 455
Schlupf 527
Schmelzen und Erstarren 206
Schmerzgrenze 284
Schraubenregel 62, 105, 437
Schwarzer Körper 362
Schwebungen 126
Schwere-beschleunigung 36
— -druck 149, 153
Schwer-kraft 72, 109, 112
— -punkt 65
Schwimmen 157
Schwingkreis 529
Schwingungen, elektromagnetische 529
—, harmonische 117
—, polarisierte 125
—, Überlagerung von 122
—, zirkulare 125
Seger-Kegel 208
Seh-schärfe 321
— -weite 321
Sekundäremission 494
Selbstinduktion 452
Selen 476
Shunt 402
Siedepunktserhöhung 211
Siemens 396, 455
Sinusschwingung 117, 501
Skalar 28
Snellius 302
Solarkonstante 357
Sonne, Energie 582
—, Temperatur 367
Spannung, elektrische 393
Spannungsreihe, elektrochemische 483
— thermoelektrische 434
Spannungsstoß 463
Spektral-analyse 310
— -linien 310, 540
Spektrum 308
Sperrschichte 475
spezifische Wärme 201, 205, 222, 255
spezifischer Widerstand 397
sphärischer Fehler 319
— Spiegel 296
Spiegel 294
Spin 544
Sprungtemperatur 471
Standardabweichung 558
Stator 502
Staudruck 164
Staurohr 168
Stefan-Boltzmannsches Gesetz 365
Steighöhe, kapillare 144
Steilheit 499
Steiner, Satz von 100
Sternschaltung 524, 527
Stilb 387
Stokes 180
Stoß 91
—, schiefer 252
Stoßzahl 257
Strahlendosis 574
Strahlung, kosmische 582
Strahlungs-druck 281, 358
— -fluß 282, 356, 365
— -quanten 371
Strangspannung, 524
— -strom 524
Stromlinien 161
Strömungen 161
—, turbulente 174
Strömungs-messer 167
— -widerstand 176

Strom-kreis 393, 399, 400
— -resonanz 517
— -stärke 391, 399, 465
Sublimation 210
Superposition 45
Supraleitung 471
Synchronmotor 525

Tangentialbeschleunigung 52
Taupunkt 217
Temperatur, absolute 193, 246
—, kritische 245
— -leitzahl 262
—, schwarze 191
— -strahlung 359, 366
Thermo-element 185, 433
— -meter 184, 195
Tesla 443
thermonukleare Reaktionen 581
Thomsonsche Schwingungsformel 530
Thoriumreihe 562
Torr 146
Torricelli, Gesetz von 165
Torsionsschwingungen 132
Totalreflexion 306
Trägheits-achsen 99
— -gesetz 71
— -kraft 72, 107
— -moment 96
Transformator 522
Transistor 477
Transmissionsgrad 360
Transurane 579
Transversalwellen 268
Triode 497, 532
Tritium 564

Übersättigung 218
Ulbrichtsche Kugel 390
Ultraschall 271, 286
Ultraviolett 289
Unabhängigkeitsprinzip 45
Unschärfebeziehung 378
Unterschale 546
Unterschiedsschwelle 285
Uran-reihe 561
— -spaltung 575
Urspannung 393

val 482
Valenzelektronen 554
var 519
Vektoren 28, 47
Vektorprodukt 62
Venturi-Rohr 167
Verflüssigung der Gase 245
Vergrößerung 323, 327
Verlust-faktor, 398
— -winkel 514
Verschiebungs-dichte 419
— -fluß 420
Verstärkerröhre 498
virtuelles Bild 298
Viskosimeter, Viskosität 169
Volt 395
Voltampere 520
Voltsekunde 443
Volumenarbeit 225

Waals, van der 244
Wärmeäquivalent, mechanisches 200
Wärme-ausbreitung 259
— -ausdehnung 186
— -durchgang 263
— -inhalt 203
— -kapazität 203
— -latente 206
— -leitung 260
— -menge 200
— -pumpe 234
—, spezifische 201, 205, 222 255
— -strahlung 360
— -strömung 260
— -übergang 263
Wasser, schweres 564
— -stoff-atom 539
— — -bombe 581
— — -elektrode 483
— -wert 204
Watt 84
Weber 444
Weber-Fechnersches Gesetz 284
Wechsel-spannung 500
— -strom-generator 502
— — -motor 525
Weglänge, freie 257
Wellen, Beugung von 345
— -bewegung 266
Wellen, elektromagnetische 290, 533
—, Interferenz von 333
— -länge 267
Weston-Normalelement 485
Wheatstonesche Brücke 408
Widerstand, elektrischer 396, 506
—, induktiver 506
—, innerer 407
—, kapazitiver 508
Widerstands-beiwert 177
— -thermometer 185
Wiensches Verschiebungsgesetz 367
Winkel-beschleunigung 42, 101
— -geschwindigkeit 39
— -richtgröße 132
Wirbelstrom 453
Wirk-leistung 518
— -strom 511
Wirkungsgrad 86
—, thermischer 236
Wirkungsquantum 369
— -querschnitt 257
— -linie 54
Wirkwiderstand 506
Wölbspiegel 300
Wurf 38, 48

X-Einheit 18

Zähigkeit, dynamische 170, 180
—, kinematische 180
Zählrohr 569
Zeigerdiagramm 510
Zeiteinheit 21
Zentralbeschleunigung 53
Zentrifugalkraft 107
Zerfalls-gesetz 558
— -reihe 560
— -schema 569
Zerstrahlung 568
Ziolkowski 91
Zoll 18
Zustands-änderungen der Gase 219, 227
— -gleichung der Gase 195
Zwangskraft 55
Zyklotron 566