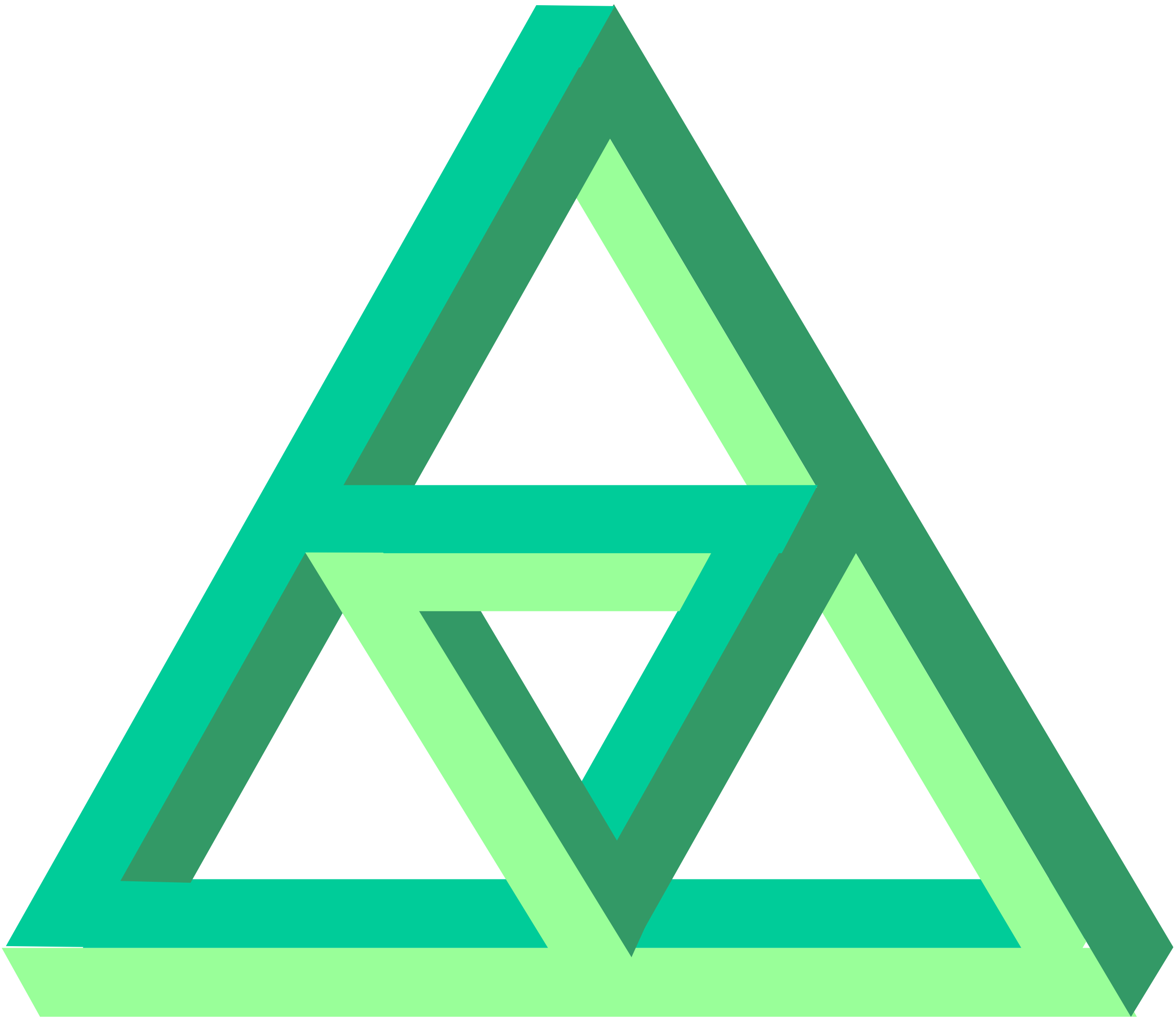
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06/2026 (Juni 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit der Aufgabe **MO651032** greifen wir noch einmal auf das Thema 31 „Lösungsansätze im Koordinatensystem“ zurück. Wir zeigen daran und an anderen Aufgaben vergangener MO-Jahrgänge, wie sich geometrische Problem analysieren lassen. Diese Lösungen sind zwar meist nicht so prägnant und elegant wie rein geometrische Ansätze ermöglichen. Aber mit Fertigkeiten bei der Ermittlung von Geradengleichungen und Schnittpunkten lassen sich die Lage von Punkten, Verhältnisse von Strecken und vieles mehr sehr zielorientiert bewältigen.

Als historischen Rückblick zeigen wir die Veröffentlichung von ADAM RIES zu **magischen Quadraten** von 1522, eingebettet in eine unterhaltsame Diskussion zu diesen mathematischen Objekten.

Wir blicken auf die **Bundesrunde der 65. MO** zurück und freuen uns über das erfolgreiche Abschneiden des sächsischen Teams.

Mit diesem Heft endet die Herausgabe der „Mathematischen Kostproben“. Es steht nun mit den Ausgaben der letzten fünf Jahre[3] eine Sammlung themenbezogener Aufgaben zur Verfügung, die in der individuellen Vor- und Nachbereitung der MO-Runden ständig vervollständigt werden kann.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1
[3] https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben

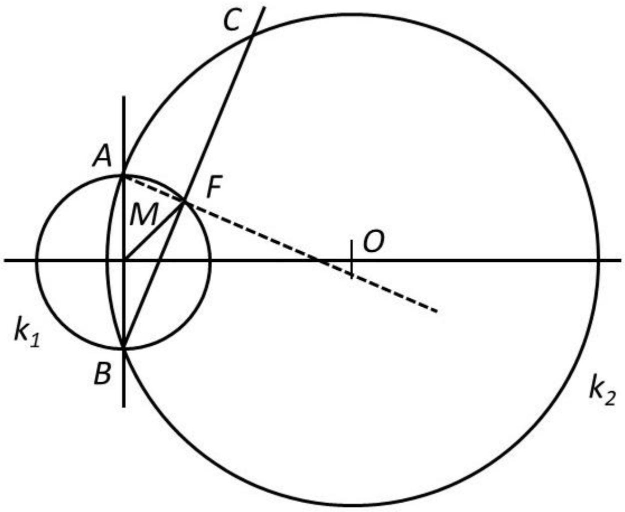
Thema 31.6 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[4]

Aufgabe 31.28 – MO651032. Zu drei paarweise verschiedenen Punkten M, F und O sollen paarweise verschiedene Punkte A, B und C derart konstruiert werden, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
(2) Der Punkt F ist der Fußpunkt des von A auf die Gerade $\overline{BC}$ gefällten Lotes.
(3) Der Punkt O hat von den drei Punkten A, B und C den gleichen Abstand.

Geben Sie eine einfache Bedingung für die drei Punkte M, F und O an, welche notwendig und hinreichend dafür ist, dass Punkte A, B und C wie beschrieben existieren. Beschreiben Sie außerdem in dem Fall, dass die Bedingung erfüllt ist, wie man (mittels Zirkel und Lineal) ein Tripel (A, B, C) konstruieren kann, welches die Bedingung erfüllt.

Lösungshinweise: Wir können (Konstruktionsschritt I) um M einen Kreis k_1 konstruieren, auf dessen Peripherie der Punkt F liegt. Konstruieren wir in M eine Senkrechte zur Geraden $\overline{MO}$ (Konstruktionsschritt II), so schneidet diese den Kreis k_1 in zwei Punkten, die wir A und B nennen. Wir konstruieren nun den Kreis k_2 um O (Konstruktionsschritt III), auf dessen Peripherie der Punkt B und damit auch der Punkt A liegen. Den Schnittpunkt des Kreises k_2 mit der Geraden durch B und F (Konstruktionsschritt IV) bezeichnen wir mit C. Die Punkte A, B und C erfüllen die Bedingungen (1) bis (3), denn



- laut Konstruktion ist $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises k_1 und der Mittelpunkt M halbiert diesen Durchmesser,
- da F auf dem Kreis über $\overline{AB}$ um M liegt (THALESkreis), ist das Dreieck ΔBFA rechtwinklig und $\overline{AF}$ ist das Lot auf die Gerade durch B und F,
- laut Konstruktion liegen die Punkte A, B und C auf der Kreislinie um O und haben damit den gleichen Abstand zu O.

Wir untersuchen die Ausführbarkeit der vier Konstruktionsschritte.

(I) Stets ausführbar, wenn $M \neq F$.

---

[4] Siehe 31.1 (Heft 03/2025), 31.2 (Heft 04/2025), 31.3 (Heft 05/2025), 31.4 (Heft 08/2025), 31.5 (Heft 11/2025)

(II) Stets ausführbar, wenn $M \neq O$.
(III) Stets ausführbar.
(IV) Wir stellen fest, dass die Punkte A, B und C genau dann existieren, wenn M nicht der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FO}$ ist.

Die (bei der Konstruktion anschaulich korrekte) Aussage zum Konstruktionsschritt IV ist jedoch nachzuweisen! Wir suchen einen Nachweis durch Analyse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Dazu legen wir die drei gegebenen Punkte so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dass die Koordinaten durch $M(0;0), O(m,0)$ und $F(x,y)$ gegeben sind, wobei die Parameter $m > 0, x, y$ aus der gegebenen Lage bekannt und fixiert sind. Dabei können wir $x \neq 0$ annehmen, denn andernfalls läge der Punkt F auf der Senkrechten zu $\overline{MO}$. Insbesondere wäre auch $C \in \overline{BF}$ auf dieser Senkrechten. Da aber ein Kreis um O nur zwei Schnittpunkte mit einer Geraden haben kann, fielen die Punkte A und C im Widerspruch zu den Forderungen zusammen.

Der Radius r (mit $r > 0$ weil $M \neq F$) des Kreises um M durch F beträgt

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Somit können wir die Punkte $A(0,r)$ und $B(0,-r)$ angeben. Zur Geraden durch B und F gehört die Geradengleichung (mit $x \neq 0$)

$$g_{BF}(t) = \frac{y+r}{x} \cdot t - r\,.$$

Wir suchen nun die Punkte $C(t, g_{BF}(t))$ auf dem Kreis um O mit dem Radius

$$r_O = \sqrt{(0-m)^2 + (r-0)^2} = \sqrt{m^2 + r^2}.$$

Für diese Punkte gilt

$$(t-m)^2 + \left(\frac{y+r}{x} - r\right)^2 = m^2 + r^2\,.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhalten wir daraus die Gleichung

$$t^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{y+r}{x}\right)^2\right) - 2 \cdot t \cdot \left(m + r \cdot \frac{y+r}{x}\right) = 0$$

Wie oben erklärt, können wir $t = 0$ dem Punkt B zuordnen. Da wir diesen Schnittpunkt mit dem Kreis um O hier nicht suchen, setzen wir $t \neq 0$. Der Faktor bei t^2 ist stets positiv, deshalb können wir nach t auflösen:

$$t = \frac{2 \cdot \left(m + r \cdot \frac{y+r}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y+r}{x}\right)^2}\,.$$

Ist der Zähler dieses Ausdrucks von Null verschieden, existiert also stets ein zweiter von A oder B verschiedener Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis um O, den wir als Punkt C wählen.

Ist der Zähler dieses Ausdrucks jedoch gleich Null, also $m + r \cdot \frac{y+r}{x} = 0$, so fällt C mit dem Punkt B zusammen, d.h. es gibt keine Lösung der geforderten Art. Wir formen diese Gleichung wie folgt um

$$m \cdot x + r \cdot y + r^2 = 0\,,$$
$$m \cdot x + y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = 0\,,$$
$$\left(y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (x^2 + y^2 + m \cdot x)^2\,,$$
$$x^3 + x \cdot m^2 + x \cdot y^2 + 2 \cdot x^2 \cdot m + 2 \cdot y^2 \cdot m\,,$$
$$y^2 \cdot (2 \cdot m + x) = -x \cdot (x + m)^2.$$

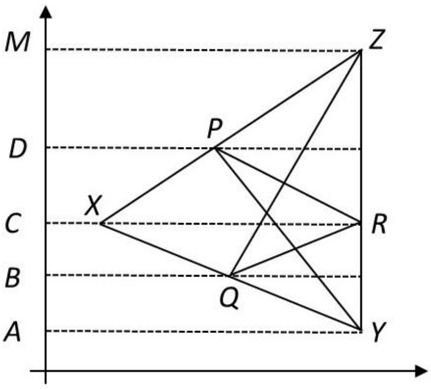
Wir erkennen: Für $x = -m$ wird $y = 0$ (da $2 \cdot m + x = m > 0$). Folglich gibt es im Fall $F(-m; 0)$ keinen dritten Punkt C, der den Anforderungen entspricht.

Den Fall $2 \cdot m + x = 0$ können wir ausschließen, weil für $x = -2 \cdot m$ die rechte Seite der letzten Gleichung von Null verschieden ist. ❑

Aufgabe 31.29 – MO490932. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Wir tragen die Positionen der Züge in ein Koordinatensystem ein: Entlang der x-Achse tragen wir den Zeitablauf ab (eine LE entspricht einer Stunde), und entlang der y-Achse tragen wir die Position auf der Bahnstrecke ab (eine LE entspricht 50 km). Die Wege der Züge werden durch Strecken dargestellt, deren Steigungen durch die Geschwindigkeiten gegeben sind.



Wir erhalten folgendes Bild. Dabei entsprechen

- die Strecke $\overline{XY}$ der Regionalbahn von C nach A,
- die Strecke $\overline{XZ}$ dem Regionalexpress von C nach E,
- die Strecke $\overline{QZ}$ dem ICE von B nach E,
- die Strecke $\overline{QR}$ dem Güterzug 1 von B nach C,
- die Strecke $\overline{QR}$ auch dem IC von D nach A und
- die Strecke $\overline{PR}$ dem Güterzug 2 von D nach C.

Für das Produkt der Steigungen der Strecken $\overline{XY}$ und $\overline{QZ}$ ergibt sich:

$$m_{XY} \cdot m_{QZ} = \frac{-25}{50} \cdot \frac{100}{50} = -1$$

Die beiden Strecken stehen also im Koordinatensystem senkrecht aufeinander. Analog gilt:

$$m_{XZ} \cdot m_{PY} = \frac{40}{50} \cdot \frac{-62.5}{50} = -1\,.$$

Also stehen auch $\overline{XZ}$ und $\overline{PY}$ senkrecht aufeinander. Die Strecken $\overline{PY}$ und $\overline{QZ}$ sind also Höhen im Dreieck ΔXYZ und schneiden sich deshalb auf der dritten Höhe, welches die durch X verlaufende Parallele zur x-Achse ist. Dies beweist Teilaufgabe a).

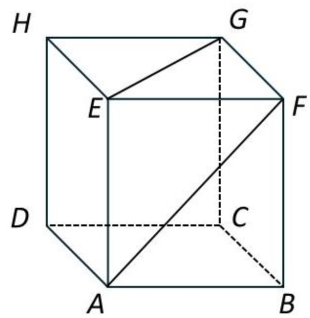
Bekanntlich gilt nun $|\sphericalangle PRX| = |\sphericalangle XRQ|$ (Eigenschaft des Höhenfußpunktdreiecks). Die Strecken $\overline{PE}$ und $\overline{QE}$ haben also (bis auf das Vorzeichen) dieselbe Steigung. Das beweist Teilaufgabe b). ❑

Aufgabe 31.30 – MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Es lassen sich die Überlegungen aus der Lösung zur Aufgabe MO490932 übertragen. Insbesondere erweisen sich die Angaben der Uhrzeiten als nicht erforderlich.

Aufgabe 31.31 – MO271024. Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.



Ermitteln Sie den Abstand von g und h!

Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke $\overline{XY}$, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

Lösungshinweise: Wir legen den Würfel in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem mit $A(0,0,0), B\ (a,0,0), D(0,a,0)$ und $E(0,0,a)$. Der Hinweis zur Definition des Abstandes ist gleichbedeutend zu der Aussage, dass die Streckenlänge $\overline{XY}$ minimal wird. Deshalb gelingt eine Lösung durch Bestimmung der Geradengleichungen g durch A und F bzw. h durch E und G, um damit den Abstand beider Geraden abzuschätzen. Wir finden für reelle Zahlen t und s

$$g(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \cdot t \quad ; \quad h(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s$$

Um die Richtigkeit der Geradengleichungen zu begründen, genügt es, die Punkte für die Spezialfälle $t = 0, t = 1, s = 0, s = 1$zu bestimmen und mit den Eckpunkten des Würfels zu vergleichen.

Der (EUKLIDische) Abstand zwischen zwei Punkten X auf g und Y auf h beträgt

$$\frac{|\overline{XY}|^2}{a^2} = (t-s)^2 + (0-s)^2 + (t-1-0)^2\,.$$

Offenbar können nicht alle drei Quadrate gleichzeitig 0 werden. Durch Probieren finden wir für $t = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$ den Abstand $\frac{1}{3}$. Wir vermuten, dass dies ein minimaler Abstand sein könnte, und untersuchen den Abstand für die Punkte X mit $t = \frac{2}{3} + t_x$ und Y mit $s = \frac{1}{3} + s_y$ (d.h., wir variieren die vermuteten günstigsten Punkte um deren Koordinaten herum):

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{XY}|^2}{a^2} &= \left(t_x - s_y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(s_y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(t_x - \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= t_x^2 + s_y^2 + \frac{1}{9} - 2 \cdot t_x \cdot s_y + \frac{2}{3} \cdot t_x - \frac{2}{3} \cdot s_y + s_y^2 + \frac{2}{3} \cdot s_y + \frac{1}{9} + t_x^2 - \frac{2}{3} \cdot t_x + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

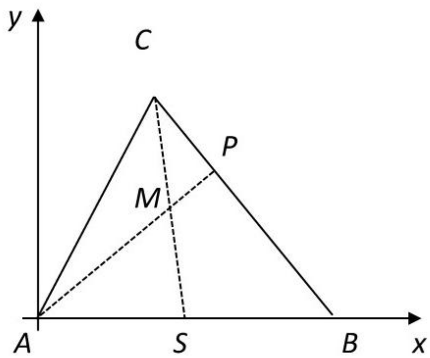
$$= t_x^2 + s_y^2 + \left(t_x - s_y\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}$$

Das Gleichheitszeichen wird genau dann angenommen, wenn $t_x = s_y = 0$ erfüllt ist. Also beträgt die minimale Länge der Verbindung (also der Abstand) zweier Punkte X und Y

$$|\overline{XY}| = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot a^2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt{3}\,.$$

❑

Aufgabe 31.32 – MO271035. Es sei ΔABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei S, der Mittelpunkt von $\overline{CS}$ sei M, der Schnittpunkt von $\overline{BC}$ mit der Geraden durch A und M sei P.



Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $\overline{|BP|} : \overline{|PC|}$ und $\overline{|AM|} : \overline{|MP|}$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Lösungshinweise: Wir legen das Dreieck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so dass die Eckpunkte die Koordinaten $A(0{,}0), B(a,0)$ und $C\left(c_x, c_y\right)$ haben. Ohne Probleme können wir die Koordinaten weiterer Punkte der Figur angeben (wobei wir zunächst o.B.d.A. $c_x \leq \frac{a}{2}$ annehmen):

$$S\left(\frac{a}{2},0\right) \quad ; \quad M\left(c_x + \frac{\frac{a}{2} - c_x}{2}; \frac{c_y}{2}\right) = M\left(\frac{c_x + \frac{a}{2}}{2}; \frac{c_y}{2}\right)$$

Um die Koordinaten des Punktes P zu finden, berechnen wir den Schnittpunkt der Geraden g durch A und M mit der Geraden h durch B und C. Es gilt:

$$g(t) = \frac{c_y}{c_x + \frac{a}{2}} \cdot t \quad ; \quad h(t) = -\frac{c_y}{a - c_x} \cdot t + \frac{a \cdot c_y}{a - c_x}$$

Wir suchen den Wert t mit

$$\frac{c_y}{c_x + \frac{a}{2}} \cdot t = -\frac{c_y}{a - c_x} \cdot t + \frac{a \cdot c_y}{a - c_x}$$

$$(a - c_x) \cdot c_y \cdot t = -\left(c_x + \frac{a}{2}\right) \cdot c_y \cdot t + a \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right) \cdot c_y$$

$$a \cdot c_y \cdot t - c_x \cdot c_y \cdot t = -c_x \cdot c_y \cdot t - \frac{a}{2} \cdot c_y \cdot t + a \cdot c_x \cdot c_y + \frac{a^2}{2} \cdot c_y$$

$$\frac{3}{2} \cdot c_y \cdot t = a \cdot c_y \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right)$$
$$t = \frac{2}{3} \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right)$$

Für dieses Argument beträgt der Funktionswert der Geradengleichung g

$$\frac{c_y}{c_x + \frac{a}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot c_y$$

Nun bestimmen wir die geforderten Streckenlängen als EUKLIDischen Abstand ihrer Endpunkte.

$$|\overline{BP}|^2 = \left(a - \frac{2}{3} \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3} \cdot c_y\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot a^2 - \frac{4}{9} \cdot a \cdot c_x + \frac{4}{9} \cdot c_x^2 + \frac{4}{9} \cdot c_y^2$$

$$|\overline{PC}|^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right) - c_x\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot c_y - c_y\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot c_x^2 - \frac{1}{9} \cdot a \cdot c_x + \frac{1}{9} \cdot a^2 + \frac{1}{9} \cdot c_y^2$$

Wir erhalten das Verhältnis $\overline{|BP|}^2 : \overline{|PC|}^2 = 4 : 1$, also $\overline{|BP|} : \overline{|PC|} = 2 : 1$.

$$|\overline{AM}|^2 = \left(0 - \frac{c_x + \frac{a}{2}}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c_y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(c_x^2 + 2 \cdot a \cdot c_x + \frac{a^2}{4} + c_y^2\right)$$

$$|\overline{MP}|^2 = \left(\frac{c_x + \frac{a}{2}}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{c_y}{2} - \frac{2}{3} \cdot c_y\right)^2 = \left(\frac{a}{12} + \frac{c_x}{6}\right)^2 + \left(\frac{c_y}{6}\right)^2$$
$$= \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + 2 \cdot a \cdot c_x + c_x^2 + c_y^2\right)$$

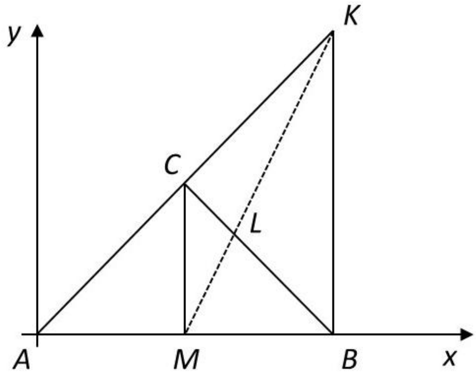
Wir erhalten das Verhältnis $\overline{|AM|}^2 : \overline{|MP|}^2 = 36 : 4$, also $\overline{|AM|} : \overline{|MP|} = 3 : 1$.

Schließlich müssen wir noch nachweisen, dass die Verhältnisse in den Fällen $\frac{a}{2} < c_x < a$ und $a \leq c_x$ nicht verändert werden. ❑

Aufgabe 13. – MO331023. Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ΔABC mit $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ die folgende Aussage gilt!

Verlängert man die Strecke $\overline{AC}$ über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke $\overline{CB}$ zwischen C und B, dass $3 \cdot |\overline{CL}| = |\overline{CB}|$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

Lösungshinweise: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|\overline{AB}| = 1$ gilt. Wir legen das Dreieck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Eckpunkte haben die Koordinaten $A(0{,}0), B(1{,}0)$ und $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Dann kennen wir auch die Koordinaten $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ und $K(1; 2 \cdot c)$. Außerdem gilt wegen der Bedingung $3 \cdot |\overline{CL}| = |\overline{CB}|$ für die Koordinaten $L\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}; \frac{2}{3} \cdot c\right)$.



Mit der Geradengleichung g durch M und K,

$$g(t) = \frac{2 \cdot c}{\frac{1}{2}} \cdot t - 2 \cdot c = 2 \cdot c \cdot (2 \cdot t - 1)$$

ermitteln wir den Funktionswert für das Argument $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ und erhalten den Wert $2 \cdot c \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} \cdot c$. Somit liegt der Punkt L auf der Geraden durch $\overline{MK}$. ❑

Magische Quadrate für die Urlaubszeit

Zu einem der ältesten Themen mathematischer Unterhaltung zählen **magische Quadrate**:

> *Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine $n \times n$-Matrix, die die Zahlen 1 bis n^2 enthält und die Eigenschaft hat, dass die Summen der n Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in den beiden Diagonalen gleich sind.*

Der Summenwert S wird **magische Konstante** genannt und beträgt nach der Summenformel der ersten n^2 natürlichen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$$

Für $n = 1$ existiert trivialerweise nur ein magisches Quadrat, nämlich das mit der Zahl 1. Leicht können wir zeigen, dass es kein magisches Quadrat zweiter Ordnung gibt. Bei der Suche nach der Anzahl der verschiedenen magischen Quadrate ab $n = 3$ ist es zunächst zweckmäßig, die magischen Quadrate als gleich zu betrachten, die durch Spiegelung (an einer der Symmetrieachsen der Matrix) oder Drehungen (um Vielfache von 90°) ineinander überführt werden können. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur ein magisches Quadrat 3. Ordnung, das schon 4000 Jahre v.u.Z. in China bekannt war:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für $n = 4$ existieren bereits 880 im oben genannten Sinne verschiedene magische Quadrate. Diese Zahl ist schon seit dem 17. Jh. bekannt und wurde erstmals von Bernard FRÉNICLE DE BESSY (1605 – 1675) ermittelt. Das wohl berühmteste derartige Quadrat ist sicherlich das von ALBRECHT DÜRER (1471- 1528) in seinem Stich „Melancholie“ von 1514:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Für $n = 5$ beträgt die Zahl der verschiedenen magischen Quadrate immerhin schon über 275 Millionen. Auch wenn dieser Wert bereits 1973 veröffentlicht wurde, war diese Fragestellung ein erfolgreiches Thema einer „Jugend forscht“-Arbeit. HEINRICH FRANK (damals Schüler am Humboldt-Gymnasium Werdau) erreichte mit seiner Computerlösung zur Ermittlung dieser Anzahl einen 2. Preis im sächsischen Landesausscheid 1995.

Verzichten wir auf die Bedingung, dass magische Quadrate die Zahlen 1 bis n^2 enthalten sollen und lassen eine beliebige Zahlenauswahl (jedoch ohne Wiederholungen) zu, so kann die Frage nach **magischen Primzahlquadraten** gestellt werden, also nach solchen Quadraten, bei denen nur Primzahlen verwendet werden. Bereits HENRY ERNEST DUDENEY (1857 – 1930) entwarf 1900 ein solches – allerdings zählte er die 1 zu den Primzahlen:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Die magische Konstante beträgt 111. Es ist beweisbar, dass für magische Primzahlquadrate 3. Ordnung kein kleinerer Summenwert existiert. Verwenden wir nicht die Zahl 1, so wurde für $S = 177$ das nächste derartige Quadrat gefunden:

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Bezeichnen wir die Zahl in der Mitte der Matrix als **Kernzahl**, so können wir feststellen, dass es kein (echtes, also ohne die Zahl 1 verwendendes) magisches Primzahlquadrat gibt, dass eine kleinere Primzahl als Kernzahl besitzt. Durch Vorgabe der Kernzahl und zwei weiterer Zahlen ist das Quadrat vollständig bestimmt. Es ist dann mit einem Computer recht einfach, systematisch zu probieren, ob es zu einer Kernzahl auch wirklich ein Primzahlquadrat gibt. Notwendig ist allerdings eine Abschätzung bis zu welchen Werten wir das Probieren durchführen müssen, um keine Möglichkeiten auszuschließen! Interessanterweise gibt es für die Kernzahl 127 erstmalig zwei verschiedene Primzahlquadrate, die sich nicht nur in der Anordnung, sondern auch in der Auswahl der Primzahlen unterscheiden. Bei 241 existieren bereits drei verschiedene Lösungen.

Eine weitere amüsante Variante der magischen Quadrate sind **bimagische Quadrate**: Einerseits ist es ein ganz normales magisches Quadrat der Zahlen 1 bis n^2 mit der magischen Konstante S_1, andererseits ergeben die quadrierten Zahlen (an den gleichen Plätzen belassen) ebenfalls ein magisches Quadrat mit der Konstanten S_2. Da sich S_2 als Summe der ersten n^2 Quadratzahlen berechnen lässt, ist das Verhältnis von S_2 und S_1 bekannt:

$$S_2\colon\ S_1 = \frac{1}{3}(2n^2 + 1)$$

Solche bimagischen Quadrate gibt es wirklich, das kleinstmögliche wurde ebenfalls von H. E. DUDENEY gefunden. Es ist 8. Ordnung und besitzt die magische Konstante $S_1 = 260$.

Die Fortsetzung der Spielerei ist naheliegend: Gibt es auch **trimagische Quadrate**, also solche, bei denen zusätzlich auch die Kuben der Zahlen ein magisches Quadrat bilden? Ja, das kleinste bisher bekannte trimagische Quadrat besitzt die Ordnung 32 und wurde von WILLIAM H. BENSON (1902 – 1984) gefunden.

Eine ganz andere Idee: Das Gegenstück zu magischen Quadraten heißt **antimagisches Quadrat**. Sie wurden erstmals von J. A. LINDON entdeckt. Bei diesen Gebilden sind die Summen der n Zeilen und n Spalten und 2 Diagonalen jeweils paarweise verschieden, wobei die $2 \cdot n + 2$ Summen eine ununterbrochene Folge aufsteigender Zahlen bilden sollen. Antimagische Quadrate der Ordnung 1 bis 3 gibt es nicht, ein Beispiel vierter Ordnung lautet:

11	14	1	4
5	2	16	10
15	3	8	9
6	12	7	13

Über antimagische Quadrate ist bislang wenig publiziert, Konstruktionsalgorithmen sollen noch nicht bekannt sein. Es gibt noch weitere Sonderheiten: Zunächst mag beim folgenden magischen Quadrat nichts Besonderes auffallen:

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Doch wir können es um 180° drehen – und das neue Quadrat mit dem auf den Kopf stehenden Zahlen ist wieder magisch, wenn die gedrehte 96 und 11 wieder als 96 und 11, die 89 als 68 usw. gelesen wird.

Schreiben wir die Zahlen in der Display-Art eines Taschenrechners, gibt es viel mehr Möglichkeiten, weil dann auch ohne Probleme die Zahl 2 und die Zahl 5 auf den Kopf gestellt werden können, beispielsweise

29	15	61	52
51	62	19	25
12	21	55	69
65	59	22	11

In alten Mathe-Büchern geblättert

Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist ein Quadrat der Seitenlänge n, auf dessen Feldern n^2 paarweise verschiedene natürliche Zahlen so platziert werden, dass jede Zeile und jede Spalte sowie die beiden Diagonalen die gleiche Summe ergeben. Sie sind bereits aus China seit ca. 2800 v.u.Z. bekannt.

Auch Adam Ries (1496 – 1559) beschäftigt sich zum Schluss seines 2. Rechenbuchs „Rechenung auff der Linihen vnd Federn“ (1522, gedruckt in Erfurt) mit magischen

Quadraten der Ordnung 3. Abschließend gibt er ohne weitere Erläuterungen ein magisches Quadrat der Ordnung 4 an – das DÜRER-Quadrat, in dem die zwei mittleren Spalten vertauscht sind. RIES nimmt später in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) darauf Bezug und diskutiert ausführlich die Bildung magischer Quadrate[5].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones / Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des viſierens.

Durch Adam Rieſen
im 1550. jar.

[... Seiten 103 bis 106]

Zum beſchlus der federn / will ich dir alhie erzehlen ſo etlich zaln / natürlicher ordenung / oder gleichen mitteln in ein geuierdt geſatzt werden / wie du die ordnen ſolt / hiermit in einer zal fur ſich oder vnderſich / des gleichen creutzweis eine zal wird / das iſt in einer zeil ſovil als in der andern.

Item in 3 mal 3 als 9 velder gleich einem gevierden quadraten / ſollen geſatzt werden 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. das vberal ein Summa wirt alhie thu 1 zu 9 wird 10 derhalbe teil iſt 5. kompt in die mitte des geviertdes als in das fünffte feldt / vnder dem ſetz 1 als die erſte zal und zele diametraliter / das iſt von einem winckel zum anderen / wie die zaln angegeben ſeind / kanſtu nicht vnderſich / ſetz das ſelb in die oberſte zeil gerad vberſich zele fort / kompt auſſerhalb der rechten handt / ſetz zu forderſt gen der lincke hand zele alſo nach den winckeln / Begibt ſich das ein zall ſter / nach der ſeiren darunter / ſetz du die letzte zal gen der lincken handt / zele fort / bis du die letzte zal erreichſt / vnd alle felder mit zaln beſchrieben ſeind / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern.

4	9	2	
3	5	7	~~3~~
8	1	6	~~8~~
~~4~~	~~9~~	~~2~~	~~7~~

Nach 1 volget 2 kompt auſſerhalb des gevierds/ ſetz 2 zu oberſt / ſo komen 3 auch auſſerhalb des gevierden / ſetz zu forderſt gen der lincken handt / zele fort / quemen 4 an ſtatt des 1 ſetz 4 nachm winckel zu rück / thu die auf kompt auſſerhalb / ſetz zu oberſt / zele herab 4 / 5 / 6 wie hie obe komen 7 auſſerhalb / ſetz in das euſſerſte mittlere felt / ſo komet 8 auſſerhalb / ſetz gerad gen der lincken hant zele alſo fort / kompt wie oben / vnd ſeind in jeder zal 15.

[5] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

Item 1/2/3/4/5/6 etc, in 5 mal 5 felder zu ſetzen / al hie iſt die erſte zal .1 die letzte zal 25 thut 26 / der halbe theil iſt 13 komet in die mitte als an das dreizehende feldt / wu ſchacht weis gemacht ſetz 1 vnder 13 zele fort wie hie oben gethan / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern wie hie 65 in jder zeil.

11	24	7	20	3	
4	12	25	8	16	~~4~~
17	5	13	21	9	~~17~~
10	18	1	14	22	~~10~~
23	6	19	2	15	~~23~~
~~11~~	~~24~~	~~7~~	~~20~~	~~3~~	~~16~~

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	~~5~~
30	6	24	49	18	36	12	~~30~~
13	31	7	25	43	19	37	~~13~~
38	14	32	1	26	44	20	~~38~~
21	39	8	33	2	27	45	~~21~~
46	15	40	9	34	3	28	~~46~~
~~22~~	~~47~~	~~16~~	~~41~~	~~10~~	~~35~~	~~4~~	~~29~~

Desgleichen in 7 mal 7 zu ſetzen von 1 an zuheben iſt 1 vnd 49 gerad 50 der halbe theil iſt 25 komet in die mitte darunter heb an zu zeln / nach den winckeln gen der rechten handt 1/2/3 etc. wie alhie wirt 175.

Desgleichen kanſtu auch in 9 mal 9 als in 81 feldern ſetzen das allenthalben ein zal kompt wie hie 361.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	
6	38	79	30	71	22	63	14	46	~~6~~
47	7	39	80	31	72	23	55	15	~~47~~
16	48	8	40	81	32	64	24	56	~~16~~
57	17	49	9	41	73	33	65	25	~~57~~
26	58	18	50	1	42	74	34	66	~~26~~
67	27	59	10	51	2	43	75	35	~~67~~
36	68	19	60	11	52	3	44	76	~~36~~
77	28	69	20	61	12	53	4	45	~~77~~
~~37~~	~~78~~	~~29~~	~~70~~	~~21~~	~~62~~	~~13~~	~~54~~	~~5~~	~~46~~

Mit 11 mal 11 / 13 mal 13 vnd allen ungeraden zaln thu gleicher weis / allhie thut 11 mal 11 / 121 iſt 61 der eine teil vnd 60 der ander teil kompt 61 in die mitte deſ gevierdes / gleich wie das punct in der mitte deſ Circkels iſt / darunter ſetz 1 danach winckelmeſſig 2 / 3 / 4 etc.

Wirt alſo von 56 dem obern eck bis auff 66 das vnder eck gezelt / thut die Summa jder zeil 671 / furſich / vnderſich / auch creutzweis.

Von den ungeraden / oder ungleichen zaln / hab ich bis here gnugſame vnterricht gethan / wie ein jede in ſich multiplicirt / ein gevierte flech auff alle ſeitten gleich brengt / vnd auff alle ſeitten / furſich / vnderſich auch creutzweis eine Suzmma komet / Nach dem die zaln / Natürlicher ordenung einander volgen / gleich en mitteln / oder irgent einer quantiter / will ich itzt ein wenig melden wan ein gerade zal alſ 2 / 4 / 6 / 8 etc. in ſich gefürt / vnd ein gevierd mache / wie gleicherweis zaln / natürlicher / vnderſcheidener des gleichen der quantiteten geſatzt ſolln werden / das allenthalben gleiche ſumma wie hie oben angezeigt kome.

Hie sol ein jder wissen / das 2 mal 2 als 4 nicht zu gleich komen kan / dan 1 / 2 / 3 / 4 in eine gevierdt gesetzt so an jmezehent thut / in vier gantze das nicht bleibt vnmüglich / Creutzweis mag das sein / oder fur sich vnd vndersich nicht.

1	2
3	4

Nach zweien in sich volget die an der gerade zal / natürlicher ordenung / 4 / so die in sich gefürt / werden 16 müssen alda vier für sich vnd 4 vndersich sein / es kann von 1 oder einer anderen zal angehoben werden / jdoch das Natürlich / oder vnterschiedtlich etc. zeln da ist / hie vnd im volgenden zaln so gerad vnd in sich gefürt / kann allenthalben gleicheit gehalten / welche in zwei mal zwei nicht sein mag.

In 4 mal 4 das ist ein Rost 4 löcher fur sich vnd 4 vndersich / zu setzen.

5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

In meinem vorigen Büchlein / so 1522 in Erffurdt gedruckt hab ich gelernt / vor wechsselung auswendig vnd inwendig vber eck / darbey las ichs noch beruhen / stet.

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

Ist alhie in jeder zeil / fursich / auch vndersich desgleichen vber eck 50.

Dem nach mag ein jeder von jeme selbst / machen in 6 mal 6 / oder 8 mal 8 zu setzen / wie der ausganck der ersten vnd obersten zeil gen der vndersten / also ist der ausganck der anderen zeil / gegen an einer der letzten / wu zuvor von der rechten / wirt als dan von der lincken / gen der rechten handt gegangen / also hinfort wie hie klerlich vor augen.

In sechs felder fur sich / auch vnderlich zu setzen /

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Volgendt werden in 64 felder gesetzt zaln / als 1 2 3 4 5 6 also hinfort das an einer zeil / sovill als an der andern komen den ausganck / sihestu vor augen / magst mit andern geraden zaln / gleich messig handeln wirt vberal 260.

In acht feldern zu setzen das allenthalben gleich werde 260.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	41	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Themen 2020 – 2026 (Übersicht)

Nr.	Thema	Heft(e)
01	Funktionalgleichungen	09/2020, 01/2021, 09/2021, 01/2026
02	Ungleichungen mit vollständigen Quadraten	01/2021
03	Lineare Gleichungssysteme und Satz von Vieta	02/2021, 11/2024, 01/2025
04	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	03/2021, 09/2024, 10/2024, 03/2026
05	Quadratische Funktionen	05/2021
06	Einbeschriebene Figuren und Körper	04/2021, 05/2022
07	Kryptogramme	07/2021, 03/2026
08	Sehnen-Tangenten-Winkelsatz, Sekanten-Tangenten-Satz	08/2021
09	Pythagoreische Zahlentripel, Summen von Quadratzahlen	09/2021, 11/2022, 04/2024, 05/2025, 01/2026, 05/2026
10	Beschränkte und kürzbare Brüche	10/2021, 05/2024
11	Streckenberechnung	10/2021
12	Ebene Bedeckungen	11/2021, 03/2022, 01/2024
13	Bewegungsaufgaben	01/2022, 10/2023
14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	02/2022
15	Stammbrüche	04/2022
16	Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme	06/2022
17	Größter gemeinsamer Teiler	09/2022
18	Der Satz des Thales	10/2022, 03/2023
19	Flächenabschätzung	12/2022, 11/2024
20	Rechnen mit großen Zahlen	01/2023
21	Mischungsverhältnisse	04/2023

22	Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren und Körpern	05/2023, 06/2023, 11/2024
23	Quersummen und Querprodukte	07/2023, 08/2023
24	Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit	08/2023, 01/2025, 02/2025, 11/2025, 12/2025, 01/2026
25	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	11/2023, 03/2025, 08/2025
26	Geometrische Örter	11/2023, 05/2024
27	Rechnen mit Polynomen	03/2024
28	Geometrie am Rechteck	06/2024
29	Schubfachprinzip	08/2024, 02/2025
30	Diophantische Gleichungen	12/2024, 12/2025, 01/2026
31	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	03/2025, 04/2025, 05/2025, 08/2025, 11/2025
32	Spieltheorie	06/2025
33	Rationale Zahlen	06/2025, 10/2025
34	Zyklische Aufgabenformulierungen	08/2025, 09/2025

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2026

Es ist zu untersuchen, ob es Quadrupel (x, y, z, a) positiver ganzer Zahlen gibt, für die die Eigenschaft (1) oder (2) erfüllt ist. Man beweise die entsprechenden Vermutungen.

(1) $x^2 + y^2 = 10 \cdot (z^2 + a^2)$,
(2) $x^2 + y^2 = 11 \cdot (z^2 + a^2)$.

Lösungshinweise zu (1): Wie eine Probe beweist, gilt beispielsweise
$6^2 + 8^2 = 10 \cdot (1^2 + 3^2)$. Damit ist gezeigt, dass es Quadrupel gibt, die die Bedingung (1) erfüllen.

Lösungshinweise zu (2): Angenommen, es gibt ein Quadrupel, das die geforderte Eigenschaft (2) besitzt. Dann gibt es (da die Menge der positiven ganzen Zahlen ein kleinstes Element besitzt) mindestens ein Quadrupel mit kleinster Summe $x^2 + y^2$ (Extremalprinzip). Es sei dies das Quadrupel (c, d, e, f) mit positiven Zahlen c, d, e, f mit kleinster Summe und $c^2 + d^2$ und $c^2 + d^2 = 11 \cdot (e^2 + f^2)$.

Offensichtlich ist die linke Seite der Gleichung durch 11 teilbar. Die Summe zweier Quadratzahlen ist aber nur dann durch 11 teilbar, wenn jede der beiden Zahlen bereits durch 11 teilbar ist, also teilt 11 auch c und d.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass bei Quadratzahlen die Reste bei Division durch 11 nur eine der Zahlen 0, 1, 4, 9, 5, 3 annehmen kann. Die Summe von zwei solchen Resten wird nur dann durch 11 teilbar, wenn beide Reste gleich 0 sind.

Wir finden also positive ganze Zahlen m und n mit $c = 11 \cdot m$ bzw. $d = 11 \cdot n$. Setzen wir dies in die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir

$$11 \cdot (e^2 + f^2) = c^2 + d^2 = (11 \cdot m)^2 + (11 \cdot n)^2 = 121 \cdot (m^2 + n^2)$$

Folglich erfüllt auch das Quadrupel (e, f, m, n) die Gleichung (2). Offensichtlich ist aber $e^2 + f^2 < c^2 + d^2$ im Widerspruch zur Annahme, dass das Quadrupel (c, d, e, f) ein solches mit kleinster Summe sei.

Aus diesem Widerspruch wird ersichtlich, dass unsere Annahme, es existiere ein Quadrupel mit der Eigenschaft (2), falsch ist. ❑

Vom Korrespondenzzirkel Mathematik zu den „Mathematischen Kostproben“

Von Norman Bitterlich – ein persönlicher Rückblick

Anfang der 1970er Jahre erlebte der damalige Bezirk Karl-Marx-Stadt im DDR-Vergleich einen drastischen Rückgang in der inoffiziellen Bezirkswertung der Mathematik-Olympiade (MO). Die Ursachen waren sicher vielschichtig. Der sich schon länger anbahnende enttäuschende Negativrekord zur 14. MO (1974/75: 13. Platz von 15 Bezirken) forderte dringend eine Neukonzipierung der mathematischen Förderung. Ziel der von Dr. HELMUT KÖNIG (1929 – 2026) geführten Aktivitäten war eine solide Breitenförderung als Grundlage der Spitzenförderung. Unter anderem wurde bereits 1973 ein Bezirkskorrespondenzzirkel Mathematik (BKZM) für Schüler der Klassenstufen 7 bis 12 eingeführt. Dies und weitere Maßnahmen zur Förderung mathematisch begabter Schüler bewährten sich. Sie trugen *„zur Befähigung zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können und zur Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen“* bei (König, H.: MU Jahrgang 43, Heft 6/1997, S. 46). Die Anstrengungen zeigten schnell Erfolg – bereits zur 16. MO (1976/77) belegte der Bezirk in der inoffiziellen Bezirkswertung wieder den 1. Platz.

Ich hatte das große Glück, als Schüler die ersten beiden KZM-Jahre selbst erleben zu dürfen. Die Treffen mit meinem Zirkelleiter zur Diskussion meiner Lösungen sind mir gut in Erinnerung geblieben. Hier fand ich nicht nur Bestätigung meiner Lösungsideen oder Hinweise zur Schließung meiner Darstellungslücken, sondern lernte nachhaltig Prinzipien einer erfolgversprechenden Nachbereitung von Wettbewerbs- und KZM-Aufgaben kennen. Als ich 1986 nach meinem Mathematik-Studium und der

Assistenzzeit an der Universität Jena in meine Heimatstadt zurückkehrte, übernahm ich die Leitung des KZM der Klassenstufen 9/10.

Das Grundprinzip ist seitdem geblieben. In sieben Serien erhalten die Teilnehmenden im Verlaufe eines Schuljahres jeweils fünf Aufgaben. Die Lösungseinsendungen werden bewertet und kommentiert. Die Rücksendungen enthalten (zunehmend variantenreiche) Lösungshinweise, vertiefende Beiträge zu Lösungsstrategien, anwendungsorientierte Diskussion zu mathematischen Verfahren und Wettbewerbsinformationen (Bundeswettbewerb Mathematik, Jugend forscht, IMO).

Die Materialen zum KZM wurden – zunächst unter inhaltlicher Anleitung von Herrn Dr. König – selbst hergestellt. Wie haben sich die technischen Möglichkeiten in diesen Jahren verändert! Aus den Anfangsjahren bleiben die sehr händischen Vervielfältigung mittels Ormig-Verfahren[6] unvergessen (ständig blaue Finger!). Auch der Einzug der Computer-Technik lief zunächst holprig (ständig irgendwelche Überraschungen auf dem Bildschirm!). Aus der einst losen Blattsammlung zum KZM ist seit 2001 (in Anlehnung an die Zeitschrift für Mathematik „$\sqrt[\text{Die}]{\text{WURZEL}}$“[7]) eine 24-seitige Broschüre mit jährlich 9 Ausgaben geworden.

Jede Serie folgte einer inhaltlichen Dreiteilung. Für die beiden einführenden Aufgaben wurden keine speziellen Kenntnisse erwartet. *„Eine Turmuhr (mit üblichem Zwölfstundenziffernblatt) zeigt genau 13:00 Uhr an. Wie oft bilden bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel?“* (Serie 6 Aufgabe 1 [A6-1], diese und die weiteren Aufgaben stammen aus dem Schuljahr 2017/18). Doch solche Alltagsprobleme stellten durchaus eine besondere Herausforderung bzgl. der Lösungsdarstellung dar – die Einsendungen reichten von den Zeichnungen von Zeigerstellungen aller rechtwinkligen Situationen bis zu aufwendigen Gleichungssystemen. Wie soll man

---

[6] Ein Matrizendrucker, auch unter dem Begriff *Ormigverfahren* bekannt, ist eine Form der Hektographie, bei der ein recht einfaches Gerät zur Vervielfältigung verwendet wird. Mit dem Matrizendrucker kann man eine begrenzte Anzahl von Abzügen (je nach Qualität der Matrizen bis maximal 250 Exemplare) von einem speziell angefertigten Original – der Matrize – herstellen. Vor dem Druck muss zuerst eine Druckvorlage, die Matrize, auch *Spiritusmatrize* genannt, angefertigt werden. Sie ist ein stärkeres (120–150 g/m²), glattes (gestrichenes) Blatt Papier, das an den druckenden Stellen mit der abzugebenden Farbe beschichtet wird. Dazu legt man das Blatt auf eine spezielle Folie, die ähnlich wie Kohlepapier funktioniert. Allerdings wird der Durchschlag nicht auf ein neues Blatt geschrieben, sondern auf die Rückseite des zu beschreibenden Papieres. Diese Kopie ist somit spiegelverkehrt und dient als Vorlage für den Druck. Die Beschichtung der Folie besteht aus einem speziellen, alkohollöslichen Wachs, und durch den Druck des Schreibens bleibt diese auf der Rückseite des Papiers haften. Die Matrize wird auf eine Trommel gespannt und diese gedreht. Unter der Trommel wird das zu bedruckende saugfähige Papier hindurchgezogen, nachdem es hauchdünn durch einen feinporigen Schwamm mit Spiritus benetzt wurde. Der Alkohol löst winzige Partikel von der Matrize, und das zu bedruckende Papier nimmt diese auf – ein Abzug entsteht.

[7] www.wurzel.org

ausführlich aufschreiben, was doch eigentlich offensichtlich ist? Wie lässt sich Alltägliches in mathematische Form bringen?

Es folgten stets zwei Aufgaben aus dem Fundus der MO, wobei gern auf längst vergangene Jahrgänge zurückgegriffen wurde, aber auch stets aktuelle Aufgabenstellungen einflossen. *„Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ΔABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck ΔDEF mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.“* (A1-3, in Anlehnung an Aufgabe MO541023, in der eine solche Konstruktion mit zwei Rechtecken gefordert wurde).

Die fünfte Aufgabe mit drei Teilaufgaben ließ Spielraum für komplexe Themen, z.B. *Nullstellen von Polynomen* (A2-5A), *Methode der vollständigen Induktion* (A5-5A), oder spezielle Gleichungen wie $n^2 - 16 \cdot n + 42 = QP(n)$ mit QP als Abkürzung für das Querprodukt einer natürlichen Zahl (A7-5B). Mit A und B wurden dabei zwei Wahlaufgaben angeboten – doch für die erfolgreichsten Teilnehmenden waren Lösungseinsendungen zu beiden Aufgaben selbstverständlich, auch wenn da schon mal mehrere Seiten Lösungsdarstellung zusammenkamen.

Eine Besonderheit bildete die dritte Serie (Einsendeschluss Dezember): Alle Aufgaben entstammten dem Bundeswettbewerb Mathematik[8] (BWM), um einen Eindruck zum Schwierigkeitsgrad sowie zum Erwartungsbild zu geben und damit für die Teilnahme an diesem Angebot zu motivieren. In der fünften Serie (Einsendeschluss März) wurden zudem zwei aktuelle Aufgaben des BWM verwendet. Der Hinweis *„… [es] können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden“* verdeutlichte das Anliegen – mit Erfolg: Unter den leider (viel zu!) wenigen Teilnehmern am BWM (1. Runde 2024: 62 von bundesweit 1189, 5.2%) sind im Vergleich zur bundesweiten Gesamtzahl unter den sächsischen Schülern überdurchschnittlich viele aus den Klassenstufen 9 und 10 (1. Runde 2024: bundesweit – 31.8%, Sachsen – 45.1%).

Fester Bestandteil des KZM waren Seminare, die im Schuljahr viermal samstags angeboten wurden (September, Dezember, März, Juni). Hierbei hatten die Teilnehmenden nicht nur die Möglichkeit, Lösungsvarianten zu diskutieren, Lösungsstrategien zu üben oder Mathematik unterhaltsam zu erleben. Da jedes Mal ein schulferner Seminarort gewählt wurde, gab es zusätzlich interessante Einblicke in Anwendungen von Mathematik. Traditionell begann der Seminarzyklus an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz (TUC), natürlich mit Hinweisen zum Mathematik-Studium im Allgemeinen und an der TUC im Besonderen. Interessante Gastgeber waren beispielsweise auch immer wieder das

[8] www.bundeswettbewerb-mathematik.de

- das Vermessungsbüro Wuttke,
- das Sächsische Textilforschungsinstitut oder
- die Leadec Engineering GmbH,

die Einblicke in ihre Tätigkeiten boten, also Mathematik zum Anfassen. Aber ebenso beliebt waren kulturelle Einrichtungen der Stadt Chemnitz, wobei im Seminarprogramm ein passendes Thema angeboten wurde:

- Deutsches SPIELEmuseum (Führung mit Schwerpunkt Strategiespiele vs. Spiele in Wettbewerbsaufgaben),
- Sächsisches Industriemuseum (Führung mit Schwerpunkt Rechentechnik vs. Aufgaben mit verschiedenen Stellenwertsystemen) oder
- Tierpark Chemnitz (Zuchtprogramme vs. Wachstumsmodelle).

Zu den Gastgebervorstellungen oder Führungen waren die abholenden Eltern ausdrücklich eingeladen. Die Resonanz auf die Seminareinladungen war stets erfreulich groß. Es war erstaunlich, welche oft weiten Wege die KZM-Teilnehmenden auf sich nahmen, um knapp vier Stunden Mathematik zu erleben. Schade, dass die Corona-Pandemie diese Angebote unterbrach!

Der KZM der Klassenstufen 9/10 ordnet sich in das System der landesweiten Aktivitäten ein. Ab Klassenstufe 5 werden in den Regionen Chemnitz, Dresden und Leipzig Schülerinnen und Schüler zum KZM eingeladen. Die sachsenweite Ausschreibung ab Klassenstufe 9 erschien ab 1991 angemessen, um entsprechend der Anmeldezahlen (Klassenstufe 9 durchschnittlich 20 bis 50) effizient zu arbeiten.

Nach 35 Jahren Leitung des KZM in den Klassenstufen 9/10 übernahm Frau Prof. CORDULA BERNET (ehemals Hochschule Mittweida) diese Aufgabe. So wird die Tradition des KZM erfolgreich fortgesetzt, natürlich zunehmend in digitaler Form. Für die Teilnehmenden bleibt er eine wichtige Form der Wettbewerbsvorbereitung, denn beim Ringen um Punkte in mathematischen Wettbewerben wird die Fähigkeit einer vollständigen Lösungsdarstellung über die Platzierungen entscheiden. Während man die Lösungsfindung in unterschiedlicher Weise trainieren kann, ist für die Lösungsdarstellung das Aufschreiben und die kritische Durchsicht unerlässlich.

Eine kontinuierliche Teilnahme fördert die allgemeinen Eigenschaften wie Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen bestärkt das Interesse für das Fach. Zunehmende Erfolge bei der Lösungsfindung motivieren. Alles gute Gründe für eine Anmeldung – es lohnt, Jugendliche dafür begeistern zu wollen. **Anmeldungen sind jederzeit möglich!**[9]

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/webs/cbernert/korrespondenzzirkelmathematik-olympiaden/anmeldung-zum-korrespondenzzirkel-mathematik-klasse-910/

Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade fand vom 7. bis 10. Juni 2026 in Hamburg statt. Frau KATHARINA VON FINTEL, Staatsrätin für Bildung der Behörde für Schule, Familie und Berufsbildung der Freien und Hansestadt Hamburg begrüßte die 197 Teilnehmenden und die zahlreichen Mitwirkenden zur Abschlussveranstaltung mit herzlichen Worten und hoher Anerkennung der Leistung aller Anwesenden.. Unter www.mo2026.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Sonntag, dem Anreisetag, mit anschließendem gemeinsamem Spaziergang durch den Alten Elbtunnel begrüßt. Die beiden Klausuren fanden am Montag und Dienstag im Christianeum. Im traditionsreichen staatlichen Gymnasium mit altsprachlichem Profil in Hamburg-Othmarschen mussten am Montag und Dienstag die Klausuren mit jeweils drei Aufgaben absolviert werden. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Hamburg. Am Abend nach den Klausuren wurde beim Begegnungsabend im Christianeum gespannt auf die Klausurrückgabe gewartet. Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand im Haus der Patriotischen Gesellschaft (Saalhaus GmbH) statt. Im Festvortrag sprach Prof. Dr. WOLFGANG MACKENS über „KI, Mathematik und wir“. In informativer und unterhaltsamer Weise stellte er die Risiken und die Chancen der KI in den Mittelpunkt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere fünf Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 79 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 41% aller Teilnehmenden[10]. Dazu kommen noch 28 Anerkennungsurkunden[11]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[12] belegte sie mit 26 Punkten den dritten Platz. Bayern mit 41 Wertungspunkten und Niedersachsen mit 30 Wertungspunkten führen die Länderliste an. Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen vier II. Preise und sechs III. Preise den Platz 8 (insgesamt 10 Preise und zwei Anerkennung). Für eine bessere Platzierung fehlen hier I. Preise, denn die elf Spitzenpreise gingen an sieben Bundesländer, darunter Bayern (drei I. Preise, insgesamt 14 Preise), Niedersachsen

[10] Bei diesen statistischen Angaben werden die Teilnehmenden aus den deutschen Auslandsschulen nicht berücksichtigt.
[11] Die vollständige Liste ist unter www.mo2026.de verfügbar (Stand: 11.06.2026).
[12] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

(zwie I. Preise, insgesamt 10 Preise), Hessen (zwei I. Preise, insgesamt 7 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

II. Preis	Rishi Kumar	(Okl. 8, Nexö-Gymn. Dresden)
	Bhuvan Chalamala	(Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden)
	Aaron Adler	(Okl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Tilman Ferchland	(Okl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
III. Preise	Armin Ferchland	(Okl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Maria Ihsberner	(Okl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Martin Brill	(Okl. 9, Sächs. Landesgymn. St, Afra Meißen)
	Viktoria Fedotova	(Okl. 9, Sächs. Landesgymn. St, Afra Meißen)
	Tom Edgar Asche	(Okl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	Julius Morgenstern	(Okl 11, Nexö-Gymn. Dresden)

Die Bundesrunde der 66. Mathematik-Olympiade wird vom 30. Mai bis 2. Juni 2027 in Kaiserslautern (Rheinland-Pfalz) ausgetragen.

Termine

67. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 10. bis 21. Juli 2026. Shanghai (Volksrepublik China).

66. Mathemtik-Olympiade, Runde 1 (Schulrunde), Schuljahresbeginn 2026.

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz