Ervin Szücs

Dialoge über technische Prozesse

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Szűcs · Dialoge über technische Prozesse

„Man überzeugt sich
für gewöhnlich besser mit Gründen,
die man selbst gefunden hat,
als mit denen,
die im Geiste eines anderen
entstanden sind.“

Pascal

Ervin Szűcs

Dialoge
über technische Prozesse

Mit 71 Bildern

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Titel der Originalausgabe:

Dialógusok a műszaki tudományokról

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Aus dem Ungarischen übersetzt von

István Gedeon, Budapest

Wissenschaftliche Redaktion der deutschsprachigen Ausgabe:

Dr. rer. nat. Konrad Werner, Leipzig

Illustriert von

Éva Gábor, Budapest

Gemeinschaftsausgabe des VEB Fachbuchverlag Leipzig
und des Akadémiai Kiadó, Budapest

1. Auflage
LSV 3009

Printed in Hungary

Redaktionsschluß 31. 7. 1976
Bestellnummer 546 135 3
DDR 12,80 M

Vorwort
zur deutschsprachigen Ausgabe

Mit großer Freude habe ich erfahren, daß der VEB Fachbuchverlag Leipzig in einer Gemeinschaftsausgabe mit dem Akadémiai Kiadó (Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften) mein Buch herausgeben will. Zwar ist dies mein erstes in der DDR erscheinendes Buch, doch habe ich nicht das Gefühl, vor meinen Lesern als Fremder zu erscheinen. Ich habe viele Freunde in der DDR, wir treffen uns oft, und ich fühle mich wohl in ihrer Gesellschaft. Die Ingenieurprobleme sind von der Muttersprache unabhängig. Wie könnte man sich sonst in dem ständig anwachsenden Wissensgut orientieren, es so systematisieren, daß die immer komplizierter werdende Forschungs-, Entwicklungs-, Konstruktions- und Produktionstätigkeit möglichst wirkungsvoll ist. Die in diesem Buch gewählte Betrachtungsweise und die Art der Darstellung sollen dabei behilflich sein und letzten Endes dazu beitragen, die Arbeit des Ingenieurs in der Praxis effektiver zu gestalten.
Die gewählte Dialogform soll meine Absicht erleichtern helfen. Ich hoffe, daß auch meine Leser in der DDR mit Verständnis und gutem Willen dieses Buch aufnehmen und die eventuellen Fehler und Mängel nicht der dargestellten Materie, sondern dem Verfasser anlasten werden.
Es ist schwer, den Inhalt des Buches im Vorwort darzulegen. Über seinen Aufbau soll nur folgendes gesagt werden:

Schon nach einigen Zeilen des einleitenden Dialoges kann man feststellen; womit sich das Buch befaßt und auf welche Weise.
Das Lesen der Gespräche 1 bis 4 macht mit den Grundlagen und der Betrachtungsweise bekannt, die Gespräche 5 bis 11 dagegen befassen sich mit der speziellen Anwendung in den einzelnen Fachgebieten. In den Gesprächen 12 bis 14 werden wieder allgemeine Prinzipien und Methoden diskutiert.
Zuletzt verabschiedet sich der Autor in einem „Brief" vom Leser. Ich hoffe, daß dieser Abschied nur symbolisch ist und daß mein Buch die Zahl meiner Freunde in der DDR nicht vermindern, sondern vermehren wird.

Budapest Dr. sc. techn. Ervin Szűcs

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„Wer Großes will, muß sich
zusammenraffen:
In der Beschränkung zeigt sich
erst der Meister,
Und das Gesetz nur kann uns
Freiheit geben."

Goethe

Leser: Sag, warum zeigst du mir dieses Buch? Weshalb soll ich meine Zeit damit verbringen? Ich hoffe, du nimmst es mir nicht übel, daß ich dich duze. Seitdem Leser überhaupt existieren, hat man so viele Bücher geschrieben, wer könnte nachzählen, wie viele Buchstaben in den etwa 530 Jahren gedruckt wurden, seit *Gutenberg* den Buchdruck erfunden hat, und nun kommst auch du und willst, daß ich lese, sogar sorgfältig lese, was du geschrieben hast. Sage offen, hast du daran gedacht, was *Kölcsey* (bedeutender ungarischer Dichter und Denker, 1790 bis 1838) in der „Parainesis" geschrieben hat: „Bücher schreiben ist auch eine Krankheit unserer Zeit . . . , deshalb, falls du einmal Lust dazu verspüren solltest, prüfe dich genau: hast du genügend Kraft, Erfahrung und Wissen gesammelt?"

Autor: Du hast recht, es wäre vielleicht besser, gar nicht anzufangen.

Leser: Ich sage es nicht, um dich zu verletzen, aber sieh ein, „die Anzahl der Bücher ist unendlich, deine Zeit ist aber begrenzt" (Kölcsey). Was willst du mit deinem Buch, unterhalten oder belehren?

Autor: Vielleicht keines von beiden, vielleicht auch beides. Auf alle Fälle möchte ich mich mit dir unterhalten — so im allgemeinen über die technischen Wissenschaften. Ich glaube nicht, daß ich über das, womit du dich speziell beschäftigst, etwas Neues sagen könnte. Aber vielleicht wird neu sein, wie ich es sage. Neues zu schaffen, wissenschaftliche Grundwahrheiten zu entdecken, ist ein Privileg weniger. Ich möchte mit den Worten *Kölcseys* fortfahren: „Ein Genie zu sein ist wenigen gegeben, aber jeder gesunde Geist kann durch ausdauernden Fleiß lernen, richtig zu urteilen und genau zu vergleichen. Durch ständige Übung und durch Praxis kann höchste Schöpferkraft zwar nicht erreicht, aber angenähert werden."

Leser: Hör schon auf mit den Zitaten; es ist wahr, ich habe damit angefangen, aber nun sag mir genau, wovon willst du reden?

Autor: Von deiner Fachwissenschaft, davon, wovon du viel mehr verstehst als ich, denn du bist ein technischer Fachmann. Du beklagst dich mit Recht, daß sich die Fachwissenschaften von Tag zu Tag immer stärker differenzieren. Der gute Fachmann ist immer mehr gezwungen, sich nur mit seinem eigenen Fach zu befassen, wenn er mit der Entwicklung seines Wissenszweiges Schritt halten will. Er ist oft nicht einmal in der Lage, die Abhandlungen anderer Fachrichtungen zu verstehen, denen sich sein eigenes Fachgebiet eng anschließt, da er die spezielle Sprache eventuell nicht versteht, das Grundgesetz, das für den

auf einem anderen Fachgebiet Arbeitenden gewohnt und selbstverständlich ist. Sag mal, weißt du z. B., was die Wobbe-Zahl bedeutet? Für die in der Gasindustrie Arbeitenden ist das ein sehr wesentlicher Grundbegriff. Hast du von den Damköhlerschen Gleichungen gehört? Nun, das weiß jeder Chemiker, wie wichtig diese bei den chemischen Reaktionen sind. Was denkst du, was die Reynoldssche Zahl einem Biologen sagt? Soll ich fortfahren?

Leser: Nicht doch, mir brummt schon der Kopf. Was willst du eigentlich? Soll jeder Fachmann auf jedem Fachgebiet zu Hause sein? Du hast dich, lieber Freund, um ein paar hundert Jahre verspätet. Jetzt willst du Polyhistoren erziehen, obwohl doch jedes Kind davon spricht, daß die rapide Entwicklung der Technik und der Physik immer mehr und mehr spezialisierte Fachleute erfordert. Jetzt, wo man in vielen Ländern darüber diskutiert, daß es selbst bei diesen außerordentlich spezialisierten Fachgebieten erforderlich werden könnte, das Hochschulstudium zu verlängern.

Autor: Du mißverstehst mich schon wieder. Keinesfalls will ich Polyhistoren haben. Ich weiß genau, daß es noch immer viele gibt, die, um ihre Autorität zu wahren, bei allem mitreden, alles wissen, doch „oft macht sich derjenige lächerlich, der zu ihm nicht näher bekannten Fragen ein kategorisches Urteil abgibt. Die Eitelkeit kann selbst Menschen, die sonst in ihrem Fach ausgezeichnet sind, als Dummköpfe erscheinen lassen."[1] Aber unterscheiden sich wirklich alle Fachgebiete grundlegend voneinander, gibt es keine gemeinsamen Gesetze, auf denen das gesamte technische Wissen beruht?

Leser: Das fragst du mich? Antworte selbst darauf!

Autor: Nein! Antworten wir zusammen, suchen wir diese gemeinsamen Grundlagen. Wenn wir sie finden und uns darüber einigen, daß diese wenigstens für mehrere Gebiete der Technik

---

[1] *Pietrasinski, Z.:* Die Psychologie des richtigen Denkens. Warschau 1961 (poln.)

gültig sind, dann erreichen wir sicher so viel, daß wir uns nicht nur auf unseren eigenen, sondern auch auf verwandten Fachgebieten orientieren können und eventuell die dort erworbenen Erkenntnisse auch in unserem eigenen Fach anwenden können.

Leser: Du hast etwas zu Großes in Angriff genommen!

Autor: Nicht ich, sondern wir. Ohne dich, deine Hilfe und deine Geduld würde ich nicht wagen, daran zu rühren. Doch fangen wir an!

Erstes Gespräch über die Grundlagen

Wechselwirkungen
Extensive und intensive Größen

„In jeder Wissenschaft ist es notwendig,
die Definitionen
der entsprechenden Begriffe klarzustellen
und jene primären Voraussetzungen
zu schaffen, aus denen,
wie aus dem saattragenden Samen,
die Grundprinzipien entstehen
und sich stufenweise die genauen Beweise
der Ursachen und der Eigenschaften
entwickeln.“

Galilei

Leser: Du hast mein Interesse geweckt. Wo finden wir diese einheitliche Betrachtungsweise, dieses Zaubermittel, mit dessen Hilfe wir jede technische Aufgabe verstehen?

Autor: Übertreibe nicht, wir suchen nicht den Stein der Weisen. Außerdem bat ich dich um Geduld und Mithilfe. Jetzt, während unseres ersten Gesprächs, ist besonders Geduld nötig. Ein wenig (oder vielleicht etwas mehr?) müssen wir von der Technik abschweifen, um uns dann der praktischen Seite unseres heutigen Gesprächs zuzuwenden. Ich bitte dich, eine Weile die technische Seite außer acht zu lassen. Später, das verspreche ich, wird nur noch davon die Rede sein.

Leser: Es geht in Ordnung, abstrahieren wir. Wo willst du anfangen? Bei der Relativitätstheorie oder bei der Quantenmechanik?

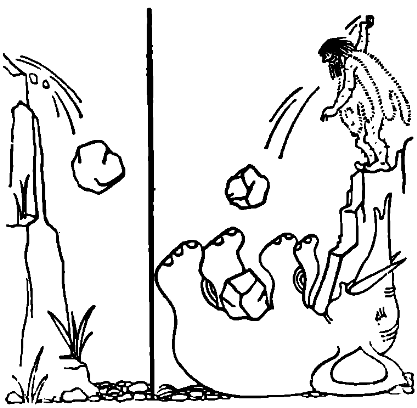
Autor: So weit wollen wir nicht abschweifen. Zwar finden diese physikalischen Entdeckungen des 20. Jahrhunderts in unseren Tagen bereits technische Anwendung, dennoch wollen wir nicht so weit gehen. Zuerst antworte nur, mit welchem Fachgebiet, aber ganz im allgemeinen, befaßt du dich?

Leser: Wie du weißt, ist mein Fachgebiet die Technik, genauer, die technischen Anlagen und Prozesse.

Autor: Natürlich weiß ich es, aber sage, was nennen wir eigentlich Technik? Und was verstehen wir unter technischem Prozeß?

Leser: Auf die erste Frage hat *Ágoston* folgende Antwort gegeben. Die Technik, das sind „dem bewußten Willen des Menschen untergeordnete, zweckmäßig wirkende und zweckentsprechend ausgewählte Naturkräfte, -vorgänge und Naturstoffe, welche ihm praktische Macht über die äußere Natur sichern".[1] Das ist verständlich. Und daraus ergibt sich auch, daß der technische Prozeß im wesentlichen ein zweckmäßig funktionierender Naturvorgang ist.

Autor: Die technischen Anlagen sorgen gerade dafür, daß diese Prozesse in der gewünschten Richtung ablaufen. Nur die Grenzen ändern sich, in deren Bereich die Naturgesetze gelten. Offensichtlich ändern sich z. B. die Bewegungsgesetze der Flüsse nicht, wenn wir Dämme errichten, Wasserkraftwerke bauen und verhindern, daß die Felder und die Siedlungen durch Überschwemmungen verwüstet werden. Der zwischen Dämme



[1] *Ágoston, L.:* Der Mensch und die Technik. Budapest 1965, S. 155 (ung.)

eingezwängte Fluß wirkt funktionsgerecht. Das konnten wir nur dadurch erreichen, daß wir die Naturgesetze erkannten und auf ihrer Grundlage die Dämme bauten, was den bewußten Willen des Menschen demonstriert.

Leser: Im Falle des Flusses ist das Problem klar. Die Regulierung der Flüsse ist eine einfache Aufgabe, mit dem Bau der Dämme haben wir bereits unsere Macht über die Natur gesichert.

Autor: Glaubst du, daß das wirklich so einfach ist? Frage nur einen Wasserbauingenieur. Das Schwanken des Wasserspiegels, die verschiedenen Flutwellen mit ihrem auf die Dämme wirkenden Druck, die Erosion, die Bewegung der Flußablagerungen und wer weiß, wie viele Fragen sich noch diesem Gebiet anschließen. Du kannst dich leicht davon überzeugen, daß es sich hier um eine komplizierte Fachwissenschaft von hohem Niveau handelt.

Leser: Interessant, siehst du, viele Fachgebiete (manchmal sogar das eigene Fachgebiet) hält der Mensch für zu kompliziert oder gar für zu einfach. Beide Ansichten entspringen der ungenügenden Kenntnis. Es wäre interessant, auch darüber zu reden.

Autor: Jetzt noch nicht, das kommt auch noch an die Reihe. Aber vorerst schieben wir unseren eigenen Gedanken einen Riegel vor und bleiben nur bei den Prozessen.

Leser: Das haben wir doch eben geklärt!

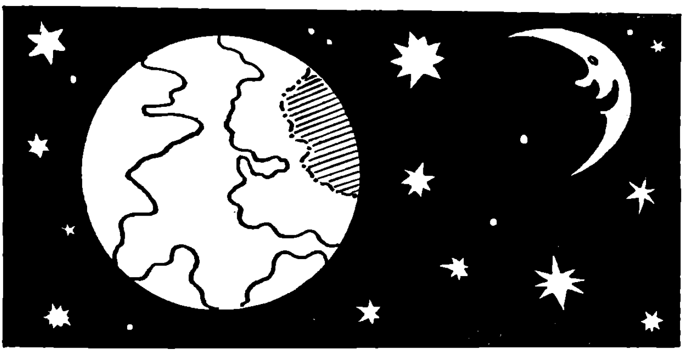
Autor: Haben wir es tatsächlich geklärt? Was nennen wir allgemein einen Prozeß?

Leser: Einen Vorgang, bei dem sich etwas verändert. Unsere Aufgabe ist es zu sagen, unter welchen Einwirkungen die Änderung vor sich geht, wie diese beeinflußt werden kann und wie groß die Geschwindigkeit der Veränderung ist.

Autor: Wo?

Leser: Was heißt wo? In der Anlage, in der die Änderung geschieht. Natürlich untersuchen wir nicht das ganze Weltall auf einmal.

Autor: Wir müssen also vor allem den Raumteil absondern, in dem wir die Änderungen untersuchen wollen. Dazu genügt es aber nicht, diesen Teil einfach zu umgrenzen. Es muß auch gesagt werden, in welchem Zusammenhang er mit seiner Umgebung steht, oder mit anderen Worten, welche Wechselwirkung zwischen dem Teil und seiner Umgebung besteht. Einen solchen umgrenzten Teil, der auf einen äußeren Reiz (Einwirkung) in bekannter (oder vorgegebener) Weise reagiert, nennen wir ein System. Wir werden uns also mit Systemen befassen und die Änderungen innerhalb eines Systems untersuchen. Nun müssen wir nur noch wissen, was das Etwas ist, das sich ändert.



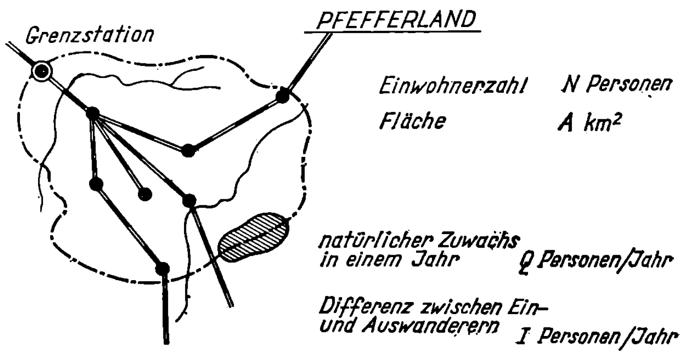
Leser: Also das kann vielerlei sein, irgendeine Stoffmenge, z. B. eine Wassermenge oder eine elektrische Ladung oder ein Energiebetrag. Natürlich können sich auch die Temperatur, der Druck, die elektrische Spannung usw. ändern. Hoffentlich verlangst du nicht, daß ich alles aufzähle, was sich überhaupt ändern kann.

Autor: Davon ist ja überhaupt nicht die Rede. Damit würden wir bloß Verwirrung stiften, da sich bei jedem Vorgang jeweils andere Eigenschaften des Stoffes ändern.

Leser: Warum verlangst du dann diese Aufzählung, kann man das nicht ganz allgemein formulieren?

Autor: Vielleicht doch. Vor allem stellen wir wiederum fest, daß wir uns mit einem umgrenzten Raumteil befassen und untersuchen, welche Veränderungen in diesem Raumteil vor sich gehen können. Dieser Raumteil sei z. B. ein Land, innerhalb seiner Grenzen leben N Menschen. Um wieviel ändert sich die Einwohnerzahl innerhalb einer gegebenen Zeitspanne?

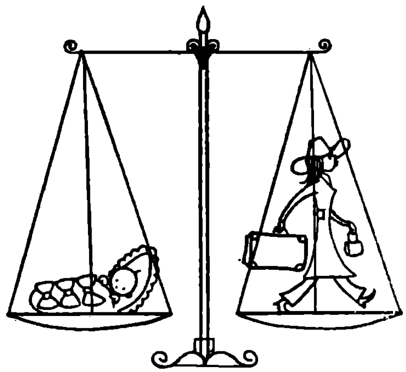
Leser: Das hängt von der Zahl der Todesfälle und der Zahl der Geburten ab. Wenn während dieser Zeit mehr Geburten als Todesfälle vorkommen, wächst die Einwohnerzahl, im anderen Falle vermindert sie sich.



Autor: Das stimmt, aber kann nicht noch durch andere Ursachen eine Veränderung eintreten?

Leser: Über die Grenzen ist eine Ein- und Ausreise möglich. Wenn mehr Personen aus dem Lande ausreisen als einreisen, vermindert sich die Zahl der im Lande Verbleibenden. Wenn es sich um die Einwohnerzahl des Landes handelt, darf dabei nur die Anzahl der für ständig Aus- und Einreisenden, d. h. die Zahl der Aus- und Einwanderer, berücksichtigt werden.

Autor: So ist das Bild vollkommen, und wir können die Bilanz der Einwohnerzahl aufstellen. Die Änderung der Einwohnerzahl ist jeweils gleich der Differenz aus natürlichem Zuwachs



und Aus- und Einwanderung (Strömung über die Grenze). Den Bevölkerungszuwachs oder mit anderen Worten, die Quelle der Einwohnerzahl, zählen wir positiv, wenn die Geburten gegenüber den Todesfällen überwiegen. Der Strom ist dann positiv, wenn die Zahl der Auswanderer größer als die der Einwanderer ist. Zur mathematischen Darstellung bezeichnen wir die Einwohnerzahl mit x, den natürlichen Zuwachs (die Quelle) mit Q, den Strom mit I. Der Strom muß an jeder Grenzstation getrennt gezählt werden. Wenn es insgesamt k Grenzstationen gibt und $I_1, I_2, \ldots, I_k$ die an den einzelnen Grenzstationen beobachteten Ströme sind, dann erhalten wir den Gesamtstrom, indem wir die einzelnen Teilströme addieren:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_k ,$$

oder kürzer mit dem Summenzeichen:

$$I = \sum_{j=1}^{k} I_j .$$

Da der zeitliche Differentialquotient die Änderungsgeschwindigkeit angibt, wird

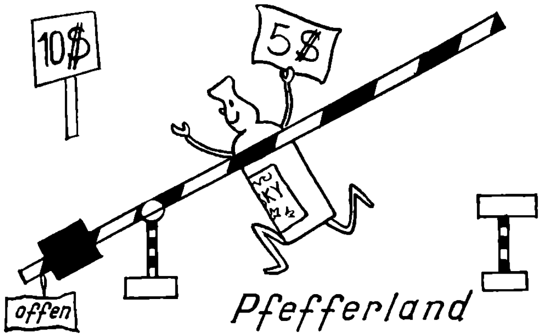
$$\frac{dx}{dt} = Q - I .$$

Leser: Was hat das mit den technischen Wissenschaften zu tun?

Autor: Ich bat dich um Geduld, wir sind noch nicht am Ende. Die Einwohner des Landes besitzen auch Geld. Für die innerhalb des Landes eingetretenen Veränderungen der Geld-, Kraftwagen- oder z. B. Branntweinmengen könnten wir entsprechende Bilanzgleichungen aufstellen, nur würde dann x nicht die Einwohnerzahl, sondern die Menge des Geldes, der Kraftwagen oder des Branntweins darstellen. Dementsprechend wäre dann Q die Banknotenzunahme, die Differenz aus der Anzahl der hergestellten und der verbrauchten Kraftwagen oder des gebrannten und des konsumierten Branntweins. I wäre dann der resultierende Strom der über die Grenzen gehenden Geld-, Kraftwagen- oder Branntweinmenge.

Leser: Deine Beispiele sind gut. Daraus wird klar, daß der Strom nur bei einer vollkommenen Grenzsperre Null ist, wenn sozusagen die Tür hermetisch geschlossen ist.

Autor: In diesem Falle gibt es tatsächlich keinen Strom über die Grenze. Wir können auch sagen, daß das Land vollkommen isoliert ist. Aber das Land kann auch dadurch isoliert sein, daß z. B. Alkoholverbot besteht, wobei jeder andere Strom möglich ist, nur Branntwein darf weder ein- noch ausgeführt werden. In diesem Falle können wir sagen, daß das Land nur für die betreffende Sache isoliert ist. Man könnte z. B. nur für Menschen, Kraftwagen, Geld usw. isolieren. Darin aber hast du Unrecht, daß der Strom nur dann Null ist, wenn Grenzsperre besteht. Betrachten wir zwei aneinander grenzende Länder; was an dieser Grenze aus dem einen Land herausströmt, strömt in das andere ein. Die oben erwähnte Grenzsperre tritt im allgemeinen auch infolge einer Zollvereinbarung



zwischen beiden Ländern ein. Von diesen Zollgesetzen, von den Beziehungen der beiden Länder hängt die Verbindung und demzufolge die Wechselwirkung zwischen ihnen ab. Es kommt oft vor, daß es zwar gestattet ist, irgendeine Ware über die Grenze auszuführen, und doch kein Strom zwischen den beiden Ländern besteht. Zum Beispiel besteht zwischen Bulgarien und Rumänien kein Branntweinstrom, da der Preis der alkoholischen Getränke in beiden Ländern annähernd gleich ist. Ein Menschenstrom besteht auch nicht zwischen Ländern, deren Lebensstandard und Gesellschaftsordnung annähernd gleich sind. (Wir sprechen nicht von der Touristik oder von Dienstreisen, sondern von Auswanderung.) Wenn also zwischen zwei Ländern, obgleich kein Verbot besteht, kein Menschen-, Kraftwagen-, Geldstrom usw. vorhanden ist, dann stimmen diese Länder in irgendeiner Eigenschaft überein. Für diese Eigenschaft besteht zwischen beiden Ländern ein Gleichgewicht. Eine solche Eigenschaft ist z. B. der Lebensstandard oder der Preis einzelner Erzeugnisse. Besteht dagegen kein Gleichgewicht, so wird auch von der Differenz dieser Eigenschaften abhängen, in welchem Maße die entsprechenden Waren zwischen beiden Ländern strömen.

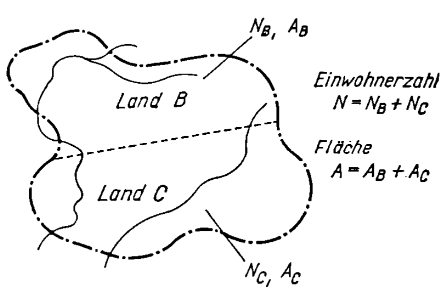
Aber ich sehe schon, das Beispiel langweilt dich, und du hältst es vielleicht für etwas gezwungen. Offensichtlich könnte man noch viel Interessantes darüber sagen, aber ich will dich nicht mit wirtschaftspolitischen und volkswirtschaftlichen Auseinandersetzungen unterhalten und könnte es auch nicht.

Leser: Du hast meine Gedanken erraten, ich möchte nicht wieder ungeduldig erscheinen, aber ich verstehe nicht, warum man von so einfachen Sachen so ausführlich reden muß. Was hat das Ganze für einen Sinn? Wollen wir nicht lieber davon sprechen, was in irgendeiner Weise Ähnlichkeit mit der Technik hat?

Autor: Noch eine Bemerkung und dann wechseln wir — wenigstens scheinbar — das Thema. Hast du nicht bemerkt, daß wir bisher von zweierlei Größen sprachen?

Leser: Aber ja, von solchen, die strömen, und von solchen, deren Differenz diese Ströme erzeugt, wenn keine Isolierung vorhanden ist.

Autor: Etwas unterscheidet diese Größen grundlegend. Die eine Art ist nämlich der räumlichen Ausdehnung proportional. Nehmen wir z. B. die Gesamteinwohnerzahl. Wenn wir zwei Länder vereinigen, dann ist die Gesamtbevölkerung die Summe der Einwohnerzahlen beider Länder. Ebenso werden die Kraftwagen, das Geld und der Branntwein addiert. Diese Eigenschaften nennen wir extensiv (oder extensive Größen). Davon wird später noch ausführlich die Rede sein. Die andere Art, wie der Lebensstandard oder der Preis der Erzeugnisse, ist eine sogenannte lokale Eigenschaft. Diese addieren sich natürlich bei einer Vereinigung der Länder nicht. Derartige Eigenschaften nennen wir intensiv (oder intensive Größen). Dazu gehört z. B. auch die Bevölkerungsdichte.



Leser: Aber die Bevölkerungsdichte ist der Quotient aus Gesamtbevölkerung und Flächeninhalt. Und du sagst doch von beiden, von der Einwohnerzahl und von der Größe des Gebietes, daß es extensive Größen sind.

Autor: Du hast recht, die Bevölkerungsdichte ist tatsächlich der Quotient zweier extensiver Größen. Im allgemeinen gilt: Jede Größe, die als Quotient zweier extensiver Größen dargestellt werden kann, ist intensiv. Das kann z. B. die auf eine Person bezogene Anzahl der Kraftwagen sein, die spezifische Anzahl der Kraftwagen.

Leser: Und dies sind derartige Größen, die sich nicht addieren? Aber die Bevölkerungsdichte ändert sich doch bei der Vereinigung zweier Länder.

Autor: Und du glaubst, sie addiert sich einfach?

Leser: Nicht einfach, sondern mit den Gebieten entsprechend gewichtet.

Autor: Also, Bevölkerungszahlen und Gebiete werden für sich addiert, die neue Bevölkerungsdichte erhalten wir als Quotienten aus der Gesamteinwohnerzahl und dem Gesamtgebiet.

Leser: Wenn der Quotient extensiver Größen eine intensive Größe ergibt, was hat dann die Unterscheidung für einen Sinn? Wäre es nicht einfacher, wenn wir von extensiven Größen und deren spezifischem Wert redeten?

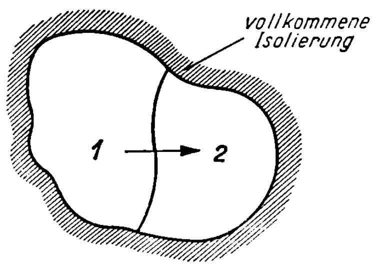
Autor: Das Beispiel sollte nur zur Veranschaulichung intensiver Größen dienen. Der Umstand, daß der Quotient extensiver Größen intensiv ist, besagt noch nicht, daß sich jede intensive Größe als Quotient zweier extensiver Größen darstellen läßt. Es gibt außerdem noch bestimmte intensive Größen, die bei der Strömung von extensiven Eigenschaften eine wichtige Rolle spielen. Jetzt wollen wir nur betonen: Die extensiven und intensiven Größen unterscheiden sich grundlegend darin, daß jene zur Ausdehnung proportional, diese dagegen lokale Größen sind.

Leser: Ich denke, darüber sprechen wir noch. Jetzt könnten wir zu einem anderen, der Technik näher stehenden Beispiel übergehen.

Autor: Ich hoffe, später wirst du noch einsehen und erkennen, daß auch unsere bisherigen Beispiele der Technik nicht fernstanden. Unsere neuen Beispiele werden nur eine Wiederholung des Vorhergesagten mit anderen Worten sein.

Leser: Erschrecke mich nicht, du willst mich doch nicht weiter mit volkswirtschaftlichen und Außenhandelserörterungen unterhalten?

Autor: Solche Erörterungen will ich nicht einmal anfangen, geschweige denn, daß ich sie fortsetzen wollte. Bisher haben wir uns doch nicht direkt mit der Volkswirtschaft befaßt, jetzt wird aber bereits in der Formulierung von physikalischen Systemen die Rede sein.



Wir sprachen davon, daß bei unseren Untersuchungen vor allem der Raumteil, mit dem wir uns befassen, abgesondert werden muß; wir müssen wissen: welche Wechselwirkung zwischen dem Raumteil und seiner Umgebung besteht. Nehmen wir den denkbar einfachsten Fall: einen Raumteil, der von seiner Umgebung vollkommen isoliert ist, der von außen keinerlei Einwirkung ausgesetzt ist.

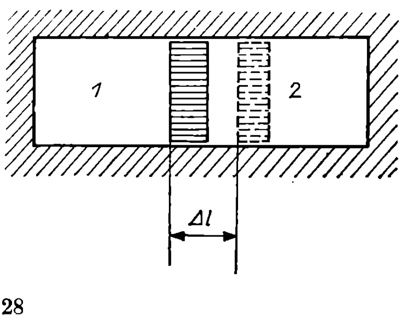
Leser: Ist eine solche Isolierung möglich?

Autor: In Wirklichkeit nicht, aber damit wir die sich innerhalb des Raumteils abspielenden Gesetzmäßigkeiten des Vorgangs verstehen, müssen wir eine solche Isolierung einmal voraussetzen. (Später werden wir auch noch die Wirkung der Umgebung berücksichtigen.) In unserem Bild befinden sich im Raumteil zwei durch eine Wand voneinander getrennte Systeme, die wir mit 1 bzw. 2 bezeichnen. Was geschieht zwischen den beiden Systemen?

Leser: Wenn sie miteinander in Berührung kommen, entsteht eine Wechselwirkung zwischen den beiden. Infolgedessen werden wir gewisse Änderungen im Zustand der einzelnen Systeme beobachten.

Autor: Könntest du auch sagen, was sich verändern wird?

Leser: Es ist schwer, darauf eine allgemeine Antwort zu geben. Unser Bild zeigt einen Zylinder, in dem die beiden Systeme durch einen Kolben getrennt sind. Da kann ich immerhin schon sagen, was zwischen den Raumteilen 1 und 2 geschieht. Angenommen, der Druck im System 1 ist größer als im System 2, dann wird sich der Kolben verschieben und nach einer gewissen Zeit, wenn sich die Drücke ausgeglichen haben, die gestrichelt gezeichnete Lage einnehmen. Das System 1 leistet Arbeit am System 2, diese Arbeit ist nur mit einem Energieaufwand möglich. Das System 1 verliert also Energie, sein Volumen wächst und sein Druck fällt. Das System 2 gewinnt zur gleichen Zeit Energie, sein Volumen nimmt ab und der Druck steigt.



$$p_1 > p_2$$
$$\Delta V_1 = \Delta l \cdot A = -\Delta V_2$$

Autor: Du hast den Prozeß, den wir mechanische Wechselwirkung nennen, genau beschrieben. Aber was geschieht nach der gewissen Zeit, wenn sich die Drücke ausgeglichen haben, d. h. auf beiden Seiten gleich sind?

Leser: Da das System äußeren Wirkungen gegenüber isoliert ist, bleibt der Kolben bei gleichen Drücken bewegungslos.

Autor: Auch wenn wir den Kolben nicht festhalten, d. h., der Kolben könnte sich bewegen, er bleibt aber trotzdem an seiner Stelle. Diesen Zustand nennen wir mechanisches Gleichgewicht. Das mechanische Gleichgewicht hängt also von der Gleichheit der Drücke, die Richtung des vorher abgelaufenen Prozesses dagegen von den Druckdifferenzen ab. Noch eine Frage in diesem Zusammenhang. Ist in der Gesamtheit der beiden Systeme auch eine Veränderung erfolgt?

Leser: Ja, die Drücke glichen sich aus.

Autor: Und wie groß waren im Anfangsstadium die Gesamtenergie und das Gesamtvolumen der beiden Systeme?

Leser: Ich verstehe, worauf du mich aufmerksam machen willst. Im Anfangs- und Endzustand ist die Gesamtenergie gleich der Summe der Energien beider Systeme, d. h.

$$W = W_1 + W_2,$$

und genauso das Volumen:

$$V = V_1 + V_2.$$

Im Endzustand — wenn das Gleichgewicht hergestellt ist — ist die Gesamtenergie und das Gesamtvolumen (mit einem Strich über den Buchstaben gebe ich die Endzustandswerte an):

$$\overline{W} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2, \quad \overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2.$$

Die Gesamtenergie und das Gesamtvolumen haben sich während des Prozesses nicht verändert:

$$W = \overline{W}, \quad V = \overline{V},$$

d. h., in dem Maße, wie die Energie (bzw. das Volumen) des einen Systems zugenommen hat, hat sich die Energie (bzw. das Volumen) des anderen Systems vermindert.

Autor: Die Energie und das Volumen sind sogenannte bleibende Größen,[1] ihre Gesamtsumme verändert sich infolge der Wechselwirkung nicht. Wir haben auch gesehen, daß sie der Ausdehnung proportional sind und sich additiv zusammensetzen, es sind also extensive Größen. Im allgemeinen sind alle bleibenden Größen extensiv. (Aber nicht jede extensive Größe ist bleibend! Nichtbleibende extensive Größen werden wir noch kennenlernen.) Der Wert bleibender Größen ändert sich innerhalb eines isolierten Systems nicht, da diese weder gewonnen werden noch verlorengehen können. Die Erhaltungsgesetze der Physik geben eine sichere Basis, mit der keine — als richtig zu betrachtende — Überlegung im Widerspruch stehen darf. Von der Erhaltung der Energie schreibt z. B. ein populärwissenschaftliches Physikbuch: „Das Prinzip von der Erhaltung der Energie ist der strenge Buchhalter der Physik. Um welchen Vorgang es sich auch handelt, die Einnahme und die Ausgabe müssen genau stimmen. Wenn das bei irgendeinem Experiment nicht stimmt, dann haben wir etwas sehr Wesentliches übersehen. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie zeigt da an: Forscher! Suche den Grund des Fehlers! Auf diese Weise haben die Physiker in mehreren Fällen neue Entdeckungen gemacht, immer wieder überzeugten sie sich von der strengen Gültigkeit des Gesetzes."[2]

Leser: Eine klare und verständliche Formulierung. Besonders diejenigen sollten sie beherzigen, die eine ohne Energieverbrauch wirkende, sich ewig bewegende Maschine, ein Perpetuum mobile, verwirklichen wollen. Zum Glück gibt es heutzutage kaum noch solche Käuze.

---

[1] Als *bleibende Größe* bezeichnen wir die Größen, für die ein Erhaltungssatz gültig ist

[2] *Landau, L. D.* und *Kitaigorodski, A. I.:* Physik für alle. Moskau 1965, S. 205 (russ.)

Autor: Desto mehr gab es sie in der Vergangenheit. Zur geschichtlichen Wahrheit gehört, daß das Prinzip von der Erhaltung der Energie erst *Helmholtz* in seinem Vortrag am 23. Juli 1847 in der Sitzung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin formuliert hat. Aber schon lange vor der Entdeckung dieses Gesetzes hat die Französische Akademie der Wissenschaften im Jahre 1775 einen Beschluß gefaßt, in dem sie bekannt gab, sie wolle in Zukunft keinen Vorschlag oder Versuchsplan annehmen, der mit der Herstellung eines Perpetuum mobile in Zusammenhang steht.
Kehren wir aber zum Kolbenbeispiel zurück. In diesem Zusammenhang haben wir festgestellt, daß die Energie und das Volumen extensive Größen sind. Wir haben noch nicht vom Druck gesprochen. Ob auch er sich addiert, wenn wir beide Systeme vereinigen?

Leser: Der Druck addiert sich natürlich nicht. Wenn wir zwei Raumteile mit verschiedenen Drücken vereinigen, so gleichen sich die Drücke aus. Bei einem Behälter mit gleichmäßiger Druckverteilung ist in jedem kleinen, aber endlichen Volumenelement der Druck gleich. Der Druck ist also nicht zu der Ausdehnung proportional, sondern ist eine lokale Größe.

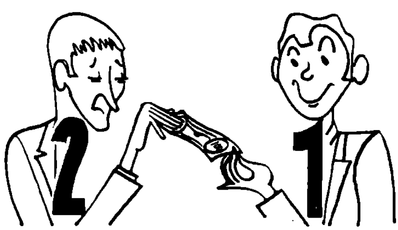
Autor: Demnach ist der Druck eine intensive Größe. Es kann aber sehr verschiedene intensive Größen geben. So ist z. B. der Quotient aus der Energie und dem Volumen, also die Energiedichte, auch eine intensive Größe. Es ist leicht einzusehen, daß sich die Energiedichte nicht addiert und nicht proportional mit der Ausdehnung wächst, sondern ebenfalls eine lokale Größe ist. Im allgemeinen ist, wie wir festgestellt haben, der Quotient zweier extensiver Größen eine intensive Größe. Deshalb unterscheiden wir unter den intensiven Größen diejenigen, die die Richtung irgendeines Wechselwirkungsprozesses bzw. das Gleichgewicht charakterisieren, und nennen diese für die betreffende Wechselwirkung charakteristische intensive Größen. Eine solche könnte auch der Druck sein, nur ist ein Haken dabei. Während der mechanischen Wechselwirkung ist die Veränderung des Volumens und des Druckes gerade umgekehrt gerichtet. Wenn sich der Druck vermindert, wächst das

Volumen, darum bezeichnen wir nicht den Druck, sondern dessen negativen Wert, die mechanische Spannung, als charakteristische intensive Größe der mechanischen Wechselwirkung.

Leser: Das ist ein wenig ungewohnt. Aber warum ist das nötig?

Autor: Im weiteren werden wir das sehen. Soviel kann ich schon jetzt verraten, daß sich bei den weiteren Wechselwirkungen die entsprechenden charakteristischen intensiven Größen vermindern und damit auch die zugehörigen extensiven Größen abnehmen. Für das Systematisieren ist es also auch nötig, mit dem negativen Druck zu rechnen. Sehen wir uns wieder das Bild auf Seite 28 an. Wenn die Abgrenzung zwischen den Systemen 1 und 2 eine befestigte poröse Keramikplatte ist, dann bleibt das Volumen beider Systeme auch einzeln unverändert. Aber unter besonderen Umständen treten die Moleküle, d. h. die Massen, aus einem System ins andere über. Die Masse nimmt auch Energie mit. (Jedes Molekül hat eine gewisse Energie.) Diese Wechselwirkung nennen wir die Wechselwirkung der Stoffe.
Wesentlich dabei ist, daß die Masse und die Energie des Systems 1 um genausoviel zunehmen, wie sie sich im System 2 vermindern.

Leser: Das ist auch ganz natürlich, da wir wissen, daß für die Masse und die Energie der Erhaltungssatz gilt. Da der gemeinsame Raumteil von außen vollkommen isoliert ist, kann er Energie bzw. Masse weder erhalten noch verlieren. Das Gesamtvolumen der beiden Systeme kann sich nicht ändern. Die Gesamtmasse beider Systeme ist die Summe der Massen der



einzelnen Systeme. Die Masse ist also ebenfalls extensiv, und zwar eine bleibende extensive Größe.

Autor: Wir kommen gut voran. Es sei jetzt die im Bild auf Seite 27 angegebene Trennwand ein elektrischer Leiter, der keine Masse durchläßt und auch die Volumenänderung verhindert, und wir laden beide Systeme elektrisch auf. Das Gesamtsystem sei wieder gegenüber seiner Umgebung isoliert. Wenn das elektrostatische Potential des Systems 2 größer ist als das des Systems 1, dann fließt elektrische Ladung durch die Wand in das System 1. Infolge der elektrostatischen Wechselwirkung strömt also elektrische Ladung von einem Ort zum anderen, bis sich die Potentialdifferenz, d. h. die Spannung, ausgleicht.

Leser: Die Systeme 1 und 2 bleiben im Gleichgewicht, wenn das elektrostatische Potential in beiden gleich ist. Die elektrostatische Spannung ist demzufolge die charakteristische intensive Größe der elektrostatischen Wechselwirkung. Die dazugehörende charakteristische extensive Größe ist die elektrische Ladung. Das ist offensichtlich. Als wir über die Wechselwirkung der Stoffe sprachen, ließen wir die charakteristische intensive Größe aus.

Autor: Darüber haben wir tatsächlich nicht gesprochen, und daher schreiben wir auch in der Tabelle, mit der wir alles Bisherige zusammenfassen, an dieser Stelle ein Fragezeichen. Später kommen wir noch darauf zurück.
Wovon war bisher die Rede? Von Wechselwirkungen, von strömenden Eigenschaften (extensiven Größen), von Eigenschaften, die die Richtung der Strömung bzw. das Gleichgewicht bestimmen (von charakteristischen intensiven Größen).

Bezeichnung der Wechselwirkung	Extensive (strömende) Größe	Charakteristische intensive (ausgleichende) Größe
Mechanisch	Energie, Volumen	negativer Druck
Elektrostatisch	Energie, elektrische Ladung	elektrostatische Spannung
Stofflich	Energie, Masse	?

Zweites Gespräch über die Grundlagen

Arbeit und Wärme

„Wenn die Menschen die Wörter,
die sie gebrauchen,
genau definieren wollten,
gäbe es weniger Debatten.“

Voltaire

Leser: Bist du gewillt, endlich etwas über die zur stofflichen Wechselwirkung gehörenden charakteristischen intensiven Größen zu sagen? Warum gehst du herum, wie die Katze um den heißen Brei?

Autor: Sei nicht ungeduldig, gehen wir schön der Reihe nach. Rekapitulieren wir, was bei einer Wechselwirkung jeweils vor sich geht. Bewirkt durch Unterschiede der charakteristischen intensiven Größen strömen extensive Größen von einem Ort zum anderen. Wenn wir nur das eine System betrachten, das an der Wechselwirkung teilnimmt, dann ist für jeden solchen Vorgang charakteristisch, daß sich die Energie des Systems umwandelt. Was verstehen wir unter Umwandlung der Energie?

Leser: Natürlich nicht, daß sie verschwindet oder entsteht, sondern daß das eine System Energie verliert, das andere aber Energie gewinnt. In Verbindung mit dem erwähnten Kolbenbeispiel wissen wir (noch aus den Grundlagen der Mechanik): Wenn sich infolge des Druckunterschiedes das Volumen des einen Systems um den Wert ΔV ändert, nimmt seine Energie um den Wert

$$\Delta W = -p\Delta V$$

zu. Diese Energieänderung stellt die Arbeit dar. Das negative Vorzeichen zeigt an, daß jenes System, dessen Volumen wächst, Arbeit verrichtet und sich dabei seine Energie vermindert.

Autor: Man muß aber immer sagen, von welchem System die Rede ist. Infolge der Wechselwirkung stimmt nämlich der absolute Wert der Energie- bzw. Volumenänderung des einen Systems mit den Änderungen der entsprechenden Werte des anderen Systems gerade überein. Die Drücke sind aber nur im Endzustand (in der Gleichgewichtslage) gleich. Durch einen Index werden die Systeme und durch Überstreichen der Endzustand bezeichnet:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 ,$$

Im Anfangszustand (und Zwischenzustand) gilt dagegen:

$$p_1 \neq p_2 .$$

Leser: Das versteht sich von selbst, da bei Übereinstimmung der Drücke zwischen den beiden Systemen ein mechanisches Gleichgewicht bestünde. Doch etwas verstehe ich nicht. Die Energieänderungen stimmen betragsmäßig überein:

$$\Delta W_1 = -\Delta W_2 .$$

Die Volumenänderungen stimmen ebenfalls betragsmäßig überein:

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 .$$

Daraus ergibt sich, daß auch die Drücke übereinstimmen müßten, nämlich

$$\Delta W_1 = -p_1 \Delta V_1 , \quad \Delta W_2 = -p_2 \Delta V_2 ,$$

woraus folgt:

$$-p_1 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2$$

bzw. wegen $-\Delta V_1 = \Delta V_2$

$$p_1 = p_2 .$$

Da sehe ich einen Widerspruch.

Autor: Zwischen deiner Auffassung und deinem Gedankengang besteht tatsächlich ein Widerspruch, aber in der Theorie gibt es keinen. Die reine mechanische Wechselwirkung ist nur im Gleichgewichtszustand möglich, d. h., wenn die Drücke über-

einstimmen und keine Volumenänderung vorhanden ist. In Wirklichkeit müssen wir bei den Wechselwirkungen immer die Änderungen von mehreren extensiven Größen verfolgen.
Wenn das eine System seine Energie in Form von aufgewandter Arbeit dem anderen System übermittelt, erhält das letztere die Energie nicht nur in Form von Arbeit. Sicher gilt

$$\Delta W_1 = -\Delta W_2 ,$$

wenn aber

$$\Delta W_1 = -p_1 \Delta V$$

ist, dann gilt nicht gleichzeitig

$$\Delta W_2 = -p_2 \Delta V.$$

Leser: Das verstehe ich nicht. Das eine System übermittelt die Energie in Form von Arbeit, das andere erhält dann diese Arbeit.

Autor: Das System erhält nicht Arbeit, sondern Energie. Eben hast du bewiesen, daß, wenn beide Arbeiten gleich wären, auch die Drücke jeweils gleich sein würden. Da die Druckunterschiede die Richtung des Prozesses bestimmen, würde überhaupt kein Prozeß ablaufen. Nur im Falle einer Druckdifferenz übermittelt das eine System dem anderen Energie. Die Gesamtenergieänderung äußert sich aber nicht nur in aufgewandter Arbeit. In Wirklichkeit bedeutet also die Gleichung

$$\Delta W_1 = -\Delta W_2$$

$$-p_1 \Delta V = -p_2 \Delta V + W_0$$

bzw.

$$W_0 = (p_2 - p_1) \Delta V,$$

worin W_0 die nichtkompensierte Arbeit ist, der Teil der Energieänderung des Systems 2, der nicht in Form von Arbeit entstanden ist (die Differenz der Arbeiten beider Systeme).

Leser: Weißt du auch von diesem W_0 etwas Genaueres?

Autor: Ja, aber dazu müssen wir die durch die anderen Wechselwirkungen bestimmten extensiven und intensiven Größen auch kennen. Vorläufig begnügen wir uns damit, daß es nicht genügt zu sagen, wie sich die Energieabgabe des einen Systems auf die verschiedenen Wechselwirkungsarten verteilt. Wir müssen auch wissen, wieviel Energie das andere System in den entsprechenden Formen aufnimmt.

Leser: Die verrichtete Arbeit charakterisiert den Vorgang nicht eindeutig, da sie nur über die Form der Energieänderung des einen Systems Auskunft gibt.

Autor: Genauso ist es, der besprochenen mechanischen Wechselwirkung ist die elektrostatische Wechselwirkung und die dabei auftretende Energieänderung vollkommen analog. Wenn sich in einem System die elektrische Ladung um Δq ändert, ist die entsprechende Energieänderung das Produkt aus Spannung und Ladungsänderung:

$$\Delta W = U \Delta q.$$

Hier ist vor der Spannung U ein positives Vorzeichen vorhanden, da mit der elektrischen Ladung auch der Energiegehalt wächst.

Das Bisherige können wir ohne weitere Beispiele verallgemeinern. Bei der i-ten Wechselwirkung ist die Energieänderung in dem einen System gleich dem Produkt aus der Änderung der entsprechenden extensiven Größe x_i und der charakteristischen intensiven Größe y_i:

$$\Delta W = y_i \Delta x_i \, .$$

Es ergibt sich aus diesem Zusammenhang, daß die charakteristischen intensiven Größen auch Proportionalitätsfaktoren sind. Ihr Zahlenwert gibt an, welche Energieänderung zu einer Änderung der entsprechenden extensiven Größe um eine Einheit gehört. Deshalb betonten wir auch, daß nicht einfach von intensiven, sondern von charakteristischen intensiven Größen die Rede ist. Die Merkmale der charakteristischen intensiven Größen sind folgende:

1. Sie sind unabhängig von der Ausdehnung.
2. Ihre Differenzen bewirken die Strömung der extensiven Größen.

3. Sie sind Proportionalitätsfaktoren. Ihr Zahlenwert zeigt an, welche Energieänderung zu der Änderung der zugehörigen extensiven Größe um eine Einheit gehört.

Kehren wir jetzt zur Wechselwirkung der Stoffe zurück.

Leser: Es ist nun soweit, daß wir die mechanischen und elektrostatischen Spannungen kennen. Was schreiben wir aber an Stelle des Fragezeichens in der Tabelle am Ende des vorigen Gesprächs?

Autor: Eine solche physikalische Größe, die den Kriterien für die charakteristischen intensiven Größen bei den stofflichen Wechselwirkungen genügt. Das heißt — nach dem vorher Gesagten — eine Größe,

— die unabhängig von der räumlichen Ausdehnung ist,
— deren Unterschiede Massenströmung hervorrufen und
— deren Zahlenwert angibt, welche Energieänderung zur Massenänderung um eine Einheit gehört.

Leser: Damit die Analogie vollständig wird, schlage ich vor, die Größe chemische Spannung zu nennen.

Autor: Dein Vorschlag kommt zu spät, da *Gibbs* schon in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts dem Kind einen Namen gab. Er unterscheidet sich zwar nicht sehr von deinem Vorschlag. Diese charakteristische intensive Größe ist das chemische Potential, und wir bezeichnen es mit μ. Das müssen wir an Stelle des „?" schreiben. Nun wissen wir von der zur stofflichen Wechselwirkung gehörenden Energieänderung, daß sie den Wert

$$\Delta W = \mu \Delta m$$

hat.

Leser: Das verstehe ich nicht ganz, bei der mechanischen und elektrostatischen Wechselwirkung war die Rolle der Spannung klar, sozusagen gewohnt. Aber der Begriff des chemischen Potentials ist etwas unklar. Was verstehen wir darunter?

Autor: Denke nicht an mehr, als wovon die Rede war. Das chemische Potential ist eine zur stofflichen Wechselwirkung gehörige charakteristische intensive Größe. Wenn die Masseneinheit gerade ein Molekül ist, dann bezeichnet μ die durch ein Molekül übertragene (durchschnittliche) Energiemenge. Im Bild auf Seite 27 sei 1 z. B. Wasser und 2 Wasserdampf. Die Trennlinie ist die Phasengrenze. (Drehe das Buch um 90°, damit du nicht sagst, der Wasserspiegel sei nicht waagerecht!) Das Wasser verdunstet oder der Dampf schlägt sich nieder, je nach dem, welche Seite das größere chemische Potential besitzt. Die Flüssigkeit und das Gas kommen nur dann ins Gleichgewicht, wenn der Zahlenwert ihrer chemischen Potentiale übereinstimmt. Wir wissen, daß auch dann H_2O-Moleküle den Wasserspiegel verlassen bzw. aus dem Dampf ins Wasser übergehen, es herrscht aber Gleichgewicht, d. h., nicht nur die Zahl der aus- und eintretenden Moleküle, sondern auch die von ihnen transportierte Energie stimmt überein. Es liegt hier ein ähnlicher Fall vor wie dann, wenn zwischen zwei Ländern freier Verkehr herrscht, ohne daß sich die Einwohnerzahl der einzelnen Länder oder ihr Geldbestand ändert. (Jetzt vernachlässigen wir den Bevölkerungszuwachs, die Geld- und Menschenmenge betrachten wir als quellenlos.) Jeder Mensch nimmt etwas Geld mit, da aber der durchschnittliche Geldvorrat in beiden Ländern gleich ist, stimmt im Falle eines im Gleichgewicht stehenden Reiseverkehrs nicht nur die Zahl der Hin- und Rückreisenden, sondern auch die Summe des von ihnen beförderten Geldes überein, sie kompensieren sich gegenseitig.

Leser: Jetzt wird mir allmählich klar, was du sagst und wie du es sagst. Bei jeder Wechselwirkung strömt die Energie und noch eine extensive Größe, und die charakteristische intensive

Größe der Wechselwirkung gleicht sich aus. Dabei verrichtet das eine System an dem anderen Arbeit.

Autor: Dafür könnten noch sehr viele Beispiele angeführt werden, wir könnten von der elektromagnetischen Wechselwirkung, über den Impulsaustausch der Systeme usw. sprechen. Vorläufig sind wir jedoch noch eine Erklärung schuldig. Wir kennen nämlich eine Wechselwirkung, die sich scheinbar von den bisherigen unterscheidet. In allen Fällen strömen zusammen mit der Energie solche extensive Größen von einem Ort zum anderen, deren Gesamtgröße (in einem von außen vollkommen isolierten Raumteil) sich dabei nicht ändert. Das sind die bleibenden extensiven Größen. Für diese gilt nur, daß (innerhalb eines von außen vollkommen isolierten Raumteils) die von einem System verlorene Menge mit der von dem anderen System gewonnenen Menge übereinstimmt:

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2 .$$

Leser: Gibt es vielleicht auch eine Wechselwirkung, bei der die charakteristische extensive Größe diese Eigenschaft nicht aufweist?

Autor: Aus Erfahrung wissen wir, daß es eine derartige Wechselwirkung gibt, bei der die Energieströmung nicht von anderen bleibenden extensiven Größenströmungen begleitet wird. Diese Wechselwirkung ist die thermische Wechselwirkung. Die physikalische Größe, deren Unterschied die Energieströmung verursacht (d. h. die die thermische Wechselwirkung charakterisierende intensive Größe), nennen wir Temperatur und bezeichnen sie mit T. Wir könnten sagen, daß die Temperatur auch eine Spannung ist, eine thermische Spannung.

Leser: Das Wesentliche also ist, daß die Temperatur die charakteristische intensive Größe der thermischen Wechselwirkung ist. Aber warum betontest du, daß in diesem Fall außer der Energie keine andere bleibende extensive Größe strömt? Warum betontest du das Wort bleibend?

Autor: Weil auch der thermischen Wechselwirkung eine entsprechende extensive Größe zugeordnet werden kann. Um Mißverständnisse zu vermeiden, könnten wir dieses auch ohne das Folgende erörtern, doch das Bild wird einheitlicher, anschau licher und leichter verständlich, wenn jeder Wechselwirkun eine entsprechende extensive Größe zugeordnet werden kanng

Leser: Das wird also ein willkürlicher, nach Belieben ausgesuchter Parameter sein?

Autor: Nicht ganz, er muß nämlich den für extensive Größen gültigen Kriterien Genüge leisten, und da er den Zustand charakterisiert, muß er sich als Funktion der übrigen extensiven Größen darstellen lassen, die den Zustand eindeutig festlegen. Da aber die übrigen extensiven Größen bleibende Größen sind, kann ihre Funktion nicht mehr bleibend sein.

Leser: Könnten wir das auch beweisen?

Autor: Wir würden sehr weit von unserem Thema abschweifen, wenn wir den exakten Beweis antreten wollten. Aber es genügt, wenn wir uns an die Rolle der während der Diskussion der mechanischen Wechselwirkung zuerst aufgetauchten Größe W_0 erinnern. Das dort Gesagte hat für jede Wechselwirkung Gültigkeit.
Die Verallgemeinerung von $-p_1 \Delta V = p_2 \Delta V + W_0$ lautet: Die bei der i-ten Wechselwirkung vom System (1) abgegebene Energie $y_i^{(1)} \Delta x_i$ wird vom System (2) in Form von $y_i^{(2)} \Delta x_i + W_0$ aufgenommen. Dieses W_0 ist der nichtkompensierte Teil der Wechselwirkungsarbeit, der ebenfalls mit der Änderung irgendeiner extensiven Größe zusammenhängen kann. Da der untersuchte Raumteil von außen vollkommen isoliert ist, kann keinerlei extensive Größe in die Systeme gelangen. Die betreffende Wechselwirkung läßt nur zu, daß die i-te extensive Größe zwischen den zwei Systemen strömt. Es muß also eine extensive Größe geben, die sich trotz dieser Isolierung verändert. Durch den Prozeß selbst (die Wechselwirkung) nimmt diese extensive Größe zu, d. h., sie hat infolge der Strömung eine Quelle.

Leser: Schön und gut, aber was soll diese geheimnisvolle extensive Größe sein?

Autor: Offenbar muß sie

- additiv sein (von der Ausdehnung abhängen) und
- ihre Änderung, multipliziert mit der Temperatur, muß die zur thermischen Wechselwirkung gehörige Energieänderung angeben.

Diese extensive Größe nennen wir Entropie und bezeichnen sie mit S.

Leser: Was mich anbelangt, so bin ich auch mit der Entropie nicht versöhnt, es ist zu abstrakt, was ich bisher davon gehört habe.

Autor: Du darfst an nichts anderes bzw. an nicht mehr denken, als wovon die Rede ist. Die Entropie ist eine zur thermischen Wechselwirkung gehörende extensive Größe. Mit ihrer Hilfe können wir die zur thermischen Wechselwirkung gehörende Energieänderung in analoger Form wie bei dem bisher Gesagten schreiben:

$$\Delta W = T\Delta S.$$

Leser: Und nach dem bisher Gesagten hängt die Energieänderung mit dem erwähnten W_0 zusammen?

Autor: Insofern die schon öfters besprochenen Isolierungen die Strömung anderer extensiver Größen verhindern. In diesem Fall lautet z. B. die Energiebilanz der mechanischen Wechselwirkung:

$$-T_1\Delta S_1 + p_1\Delta V = T_2\Delta S_2 + p_2\Delta V.$$

Das bedeutet, daß während der Arbeitsleistung in beiden Systemen auch die Entropie zugenommen hat, d. h., daß die nicht kompensierte Arbeit, die von uns vorher noch mit W_0 bezeichnet wurde, dem Ausdruck

$$W_0 = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2 = (p_1 - p_2)\,\Delta V$$

gleich ist.

Leser: Wenn es keine Entropiezunahme gibt, dann ist der sogenannte reversible Prozeß möglich.

Autor: Was kann das bedeuten? Aus dem Ausdruck $\Delta S_1 = \Delta S_2 = 0$ folgt, daß $p_1 = p_2$ ist. Das hast du vorhin schon abgeleitet. Wenn aber $p_1 = p_2$ ist, dann ist nur ein Gleichgewicht möglich, aber kein Prozeß.

Leser: Bedeutet dies, daß nur das Gleichgewicht reversibel ist? Aber das ist ja trivial.

Autor: Es ist tatsächlich so, Prozeß und Irreversibilität sind untrennbar miteinander verbunden. Der reversible Prozeß ist eine Fiktion, die nicht nur überflüssig, sondern auch störend ist. Der Prozeß wird immer durch einen Unterschied in der charakteristischen intensiven Größe bewirkt, und er läuft in Richtung auf einen Ausgleich der intensiven Größen ab. Dabei tritt immer eine Energieübertragung durch Wechselwirkung auf, die die Änderung irgendeiner anderen extensiven Größe mit sich bringt. Wenn in den von seiner Umgebung isolierten Raum keine bleibende extensive Größe eindringen kann, nimmt die Entropie notwendigerweise zu.

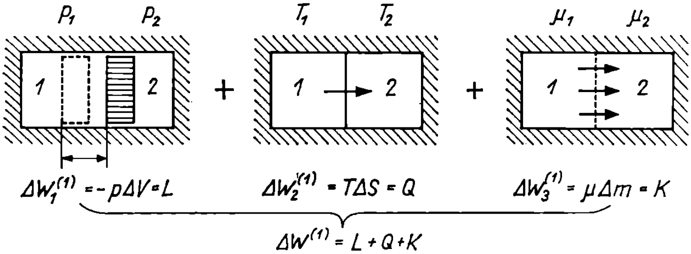
Leser: Bleiben wir einen Moment stehen, erlaube mir, daß ich das Bisherige zusammenfasse. Wir sprachen von den verschiedenen Wechselwirkungen, von den dazugehörigen charakteristischen extensiven und intensiven Größen, von den infolge der Wechselwirkungen auftretenden Energieänderungen. Tabellarisch zusammengefaßt ergibt sich das folgende Bild:

Wechselwirkung	Charakteristische extensive Größe	Charakteristische intensive Größe	Energieänderung
Thermisch	S Entropie	T Temperatur	$T\Delta S$
Mechanisch	V Volumen	$-p$ negativer Druck	$-p\Delta V$
Stofflich	m Masse	μ chemisches Potential	$\mu\Delta m$
Elektrostatisch	q Ladung	U elektrostatische Spannung	$U\Delta q$

Autor: Ja, davon war die Rede. Gehen wir aber jetzt einen Schritt weiter, und untersuchen wir mehrere, gleichzeitige Wechselwirkungen, z. B. mechanische, thermische und stoffliche. Wie groß wird die gesamte Änderung der Energie sein?

Leser: Wenn ich die Tabelle ansehe, dann ist die Antwort einfach. Die Energie ist eine bleibende und additive Kenngröße, daher ist offensichtlich die totale Energieänderung gleich der Summe der zu den einzelnen Wechselwirkungen gehörenden Änderungen:

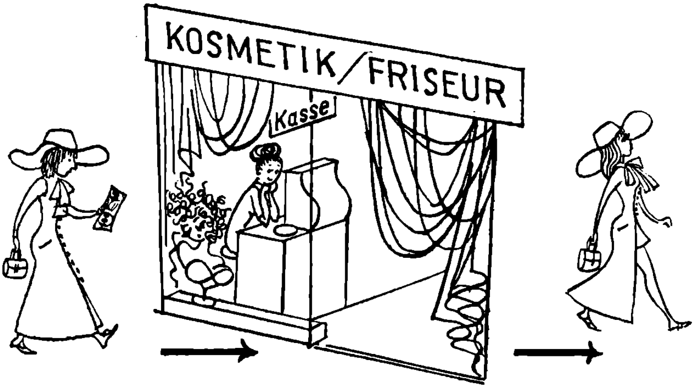
$$\Delta W = T\Delta S - p\Delta V + \mu\Delta m.$$



Autor: Du siehst also, daß auf der rechten Seite die Änderungen der extensiven Größen stehen, multipliziert mit den zugehörigen intensiven Größen. Das ist übrigens selbstverständlich, wenn wir uns wieder daran erinnern, daß die charakteristischen intensiven Größen die Eigenschaft haben, Proportionalitätsfaktoren zu sein. Sie sind gleich der Energieänderung, die bei der Änderung der zugehörigen extensiven Größe um jeweils eine Einheit auftritt. Im allgemeinen, wenn gleichzeitig n Wechselwirkungen vorhanden sind, gilt

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i ,$$

wobei y_i die charakteristische intensive Größe der i-ten Wechselwirkung und x_i die zu dieser Wechselwirkung gehörige extensive Größe ist. Die Energieänderung ergibt sich also immer



aus so vielen Gliedern, wie Arten von Wechselwirkungen im System herrschen.

Leser: Warte noch einen Moment. Vom Produkt $-p\Delta V$ wissen wir, daß dieses gleich der Arbeit L ist. Das Produkt $T\Delta S$ ist die Wärme Q. Was ist das Produkt $\mu\Delta m$?

Autor: Das ist auch Arbeit. Die zur Übertragung der Stoffmenge Δm benötigte Arbeit wollen wir mit K bezeichnen.

Leser: Demnach ist die Energieänderung gleich der Summe der verschiedenen Arbeiten?

Autor: Natürlich, die Energieänderung ist immer ein Resultat verrichteter Arbeit. Wie weit es zutrifft, daß hier von der Summe verschiedener Arbeiten die Rede ist, beweisen wir auf einem kleinen Umweg. Wir wissen bereits, daß die extensiven Größen additive Eigenschaften haben. Die Beziehung

$$\Delta W = T\Delta S - p\Delta V + \mu\Delta m$$

können wir auch als den Ausdruck für die Energie ΔW eines kleinen Volumens ΔV auffassen. Wenn wir solche Volumina vereinen, so wird die Energie der vereinten Systeme die Summe der Energien der Teilsysteme sein:

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_k = k\Delta W.$$

Unter Benutzung der Beziehung für ΔW ergibt sich

$$k(\Delta W) = k(T\Delta S) - k(p\Delta V) + k(\mu\Delta m).$$

Durch die Multiplikation wird der Zahlenwert der intensiven Größen nicht geändert, während sich der der extensiven Größen auf das k-fache erhöht. Da z. B. $k(T\Delta S) = Tk\Delta S = TS$ ist, folgt

$$W = TS - pV + \mu m$$

oder allgemein

$$W = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \,.$$

Damit haben wir die Grundgleichung der Thermodynamik erhalten.

Leser: Demnach ist also die Energie die Summe der Produkte der charakteristischen extensiven und intensiven Größen. Und zwar setzt sie sich aus genau so vielen Gliedern zusammen, wie es Wechselwirkungen im System gibt.

Autor: Jetzt kommt ein wenig Mathematik. Bestimmen wir, von diesen Grundgleichungen ausgehend, die Energieänderung. Vorhin hast du schon die zum Endzustand gehörenden Werte durch Überstreichen bezeichnet, jetzt machen wir es ebenso. Der Unterschied zwischen den Energiewerten im Anfangs- und im Endzustand beträgt

$$W - \overline{W} = TS - (\overline{TS}) - pV - (-\overline{pV}) + \mu m - (\overline{\mu m}).$$

Mit der Änderung der einzelnen Größen kann man den Wert des entsprechenden Endzustandes ausdrücken. Zum Beispiel ist $\overline{T} = T - \Delta T$ oder $\overline{V} = V - \Delta V$ usw. Setzt man das so ein und führt die Multiplikationen aus, so ergibt sich der Wert des Endzustandes, z. B. für das Produkt $\overline{TS}$:

$$\begin{aligned}\overline{TS} &= (T - \Delta T) \cdot (S - \Delta S) = \\ &= TS - T\Delta S - S\Delta T + \Delta T\Delta S.\end{aligned}$$

Ähnlich werden auch die Produkte von $\overline{pV}$ und $\overline{\mu m}$ ausgerechnet. Wenn wir diese in den vorigen Ausdruck für $W - \overline{W}$ einsetzen und die Glieder $\Delta T \Delta S$, $\Delta p \Delta V$, $\Delta \mu \Delta m$, die im Vergleich zu den übrigen von Kleinheit zweiter Ordnung sind, vernachlässigen, dann erhalten wir die Differenz zwischen Anfangs- und Endzustand, d. h. die Energieänderung ΔW:

$$\Delta W = T\Delta S + S\Delta T - p\Delta V - V\Delta p +$$
$$+ \mu\Delta m + m\Delta\mu.$$

Leser: Irgend etwas stimmt da nicht. Vorhin erhielten wir als Summe der Energieänderungen der einzelnen Wechselwirkungen folgende Beziehung:

$$\Delta W = T\Delta S - p\Delta V + \mu\Delta m.$$

Es ist ersichtlich, daß beide Gleichungen nicht identisch sind. Wo haben wir den Fehler begangen?

Autor: Nirgends, wir haben zwei voneinander unabhängige Ableitungen. Beide ergeben richtige Resultate, die also wirklich identisch sein müssen. Das gilt dann, wenn

$$S\Delta T - V\Delta p + m\Delta\mu = 0$$

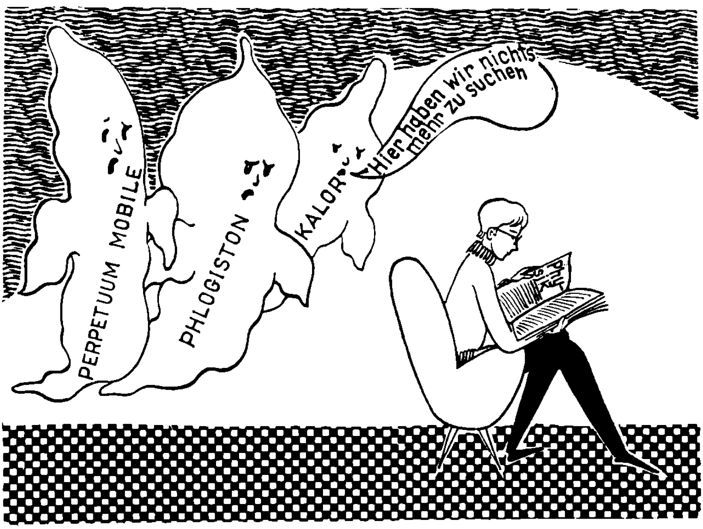
ist, d. h., von den Änderungen ergibt ein Teil zusammen Null. Daraus folgt, daß die Energieänderung nicht gleich der Änderung der Produkte $y_i x_i$ ist. Die Energieänderung ist die Differenz von Anfangs- und Endzustand. Sie ist unabhängig davon, auf welchem Wege sich das System zwischen den zwei Zuständen bewegt hat. Aber ohne den Weg der Änderung zu kennen, können wir nicht sagen, welcher Teil der Energieänderung Wärme, Arbeit, chemische Arbeit usw. war. Diese Arbeiten, jede für sich, hängen von der Art der Zustandsänderungen ab.

Leser: Man spricht oft davon, daß die Körper Wärmeenergie aufweisen.

Autor: Leider ist diese Ausdrucksform sehr verbreitet, ebenso wie das Wort Wärmemenge. Diese zwei Begriffe enthalten Reste der alten Wärmestofftheorie. Einst stellte man sich vor, daß jeder stoffliche Körper irgendeine Eigenschaft hat, die

man Wärmestoff (Phlogiston) nannte, und daß dieser Wärmestoff, wenn man Körper mit verschiedenen Temperaturen zusammenbringt, von dem einen Körper in den anderen strömt. Die Phlogistontheorie ist mit dem Namen des Professors *Becher* an der Universität Mainz und seines Schülers *Stahl*, Professor an der Medizinischen Fakultät der Universität Halle, verknüpft. *Becher* folgte den Lehren von *Paracelsus*, wonach die Grundbestandteile jeden Körpers Quecksilber, Schwefel und Salzstoffe sind. Diese determinieren die flüchtigen, die brennbaren und die festen Stoffe. Er ergänzte diese durch zwei von den vier Aristotelischen Urstoffen, durch Wasser und Erde. Die letztere teilte er in drei Typen, nämlich quecksilbrige, fette und steinige Erde. Nach *Becher* gibt es außer diesen Erdstoffen noch einen sogenannten brennbaren Teil, der in jedem brennbaren Körper zu finden ist. Die Verbrennung geht so vor sich, daß der verbrennbare Körper sich in seine Bestandteile zersetzt und die brennbare Erde flüchtig wird. Nach der Theorie von *Becher* spielt die Luft im Verbrennungsprozeß überhaupt keine Rolle.

Stahl hat diese Theorie weiterentwickelt. Er teilte die Grundstoffe in physikalische und chemische. Zu den ersteren gehören die vier Aristotelischen Urstoffe, zu den zweiten die Stoffe nach *Becher*. Die physikalischen Stoffe können infolge chemischer Umbildung chemische Stoffe werden. Den brennbaren Stoff nannte *Stahl* Phlogiston (nach dem griechischen Wort *φλογιστον*, was gebrannt oder verbrannt heißt), das ein gewichtsloses, in jedem Körper mehr oder weniger vorhandenes Fluidum ist. Ohne Phlogiston kann der Körper nicht brennen. Die brennbaren Körper enthalten im großen Maße Phlogiston.



Beim Verbrennen scheidet das Phlogiston aus dem Körper. Beim Glühen der Körper verflüchtigt sich das Phlogiston, und zurück bleibt die Asche.
Die Phlogistontheorie war in der Wissenschaft des 18. Jahrhunderts die herrschende Konzeption. Es gab wenige Gelehrte, die in dieser Zeit sich der geschilderten Auffassung zu widersetzen wagten. Am 6. April 1775 sandte *Lavoisier* der Französischen Akademie eine Denkschrift, in der er die Phlogistontheorie widerlegte. Die Versuchsergebnisse von *Lavoisier*, *Lomonossow* und *Rumford* (1798) widerlegten endgültig die Wärmestofftheorie und jede Art Theorien von gewichtslosem Fluidum. Heute wissen wir, daß es keinerlei Wärmestoff gibt. Infolge von Wechselwirkung strömt Energie zwischen den Körpern, und diesen Teil der Energieänderung, der zur thermischen Wechselwirkung gehört, nennen wir Wärme. Die Wärme ist nicht der Energie, sondern der Arbeit analog.

Leser: Vielleicht könnte man das Produkt TS Wärmeenergie nennen?

Autor: Das kannst du machen, aber dann mußt du damit rechnen, daß die Änderung der Wärmeenergie nicht gleich der Wärme Q ist. Die Änderung des Produktes TS ist nämlich $\Delta(TS) \approx T\Delta S + S\Delta T = Q + S\Delta T$. Erlaube, daß ich in diesem Zusammenhang den Nobelpreisträger Prof. *Landau* zitiere: „Im allgemeinen Falle des nicht thermisch isolierten Körpers empfängt der Körper (oder gibt ab) außer der Arbeit auch Energie durch direkte Übertragung von anderen ihn berührenden Körpern. Diesen Teil der Energieänderung nennt man die von dem Körper empfangene (oder abgegebene) Wärmemenge Q . . . deshalb kann man von der Energie W in einem gegebenen Zustand sprechen, aber z. B. nicht von der Wärmemenge, die ein Körper in einem gegebenen Zustand besitzt. Mit anderen Worten, die Energie eines Körpers kann man nicht in mechanische und in Wärmeenergie unterteilen. Eine solche Einteilung ist nur dann möglich, wenn man von der Energieänderung spricht. Die Änderung der Energie bei dem Übergang eines Körpers von einem Zustand in einen anderen kann man einteilen in die Wärmemenge, die von dem Körper aufgenommen (oder abgegeben) wird, und die Arbeit, die an ihm verrichtet wird. Diese Einteilung wird von den Anfangs- und Endzuständen des Körpers nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von dem Charakter des Prozesses selbst ab. Mit anderen Worten, die Arbeit und die Wärmemenge sind Funktionen des Prozesses, der mit dem Körper stattfindet, und nicht nur Funktionen der Anfangs- und Endzustände des Körpers."[1]

Leser: Daraus geht klar hervor, daß es nicht nur um den Sprachgebrauch geht, sondern um die Abgrenzung zweier verschiedener Begriffe. Die Energie ist etwas anderes (sie ist die Eigenschaft, die Zustandskenngröße des Körpers) als die Wärme und Arbeit (welche die Wechselwirkung zwischen den Körpern, aber nicht die Körper selbst charakterisieren).

Autor: Sehr richtig, und so sinnlos es ist, von der in einem Körper vorhandenen Arbeitsmenge zu sprechen, so inhaltslos ist der Begriff der in einem Körper befindlichen Wärmemenge. Das mag einstweilen hierüber genügen. Fassen wir das Wesentlichste zusammen.

Leser: Wir haben festgestellt, daß zwischen zwei Systemen verschiedene Wechselwirkungen möglich sind. Jede wird von einem Paar von Größen gekennzeichnet, einer intensiven und einer extensiven. Die Strömung der extensiven Größen wird von der Inhomogenität der intensiven Größen verursacht. Die infolge Wechselwirkung entstandene Energieänderung ist gleich dem Produkt der charakteristischen intensiven Größe mit der Änderung der extensiven Größe. Wenn in zwei Systemen die charakteristischen intensiven Größen jeweils die gleichen Zahlenwerte aufweisen, dann stehen die Systeme im Gleichgewicht.

Autor: Mit anderen Worten, die notwendige und hinreichende

---

[1] *Landau, L. D.* und *Lifschitz, M.:* Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band V (Statistische Physik). Berlin 1966, S. 48/49 (Übers. a. d. Russ.)

Bedingung für das Gleichgewicht ist die homogene Verteilung aller charakteristischen intensiven Größen. Diese Feststellung müßte man logisch den Hauptsatz der Thermodynamik nennen, da aber zur Zeit seiner Entdeckung der Name „erster Hauptsatz" bereits vergeben war (der Satz von der Erhaltung der Energie wird so genannt), so hat auf Vorschlag von *Guggenheim* der Satz vom thermischen Gleichgewicht die Benennung „nullter Hauptsatz" erhalten.

Leser: Und das würde nur für das thermische Gleichgewicht stimmen?

Autor: Was *Guggenheim* nur für die Temperaturverteilung bzw. für das thermische Gleichgewicht abgeleitet hat, das hat *Imre Fényes*[1] im Jahre 1952 auf sämtliche charakteristische intensive Größen bzw. auf das Gleichgewicht verallgemeinert. Die Grundlage für die obige Formulierung (und die gesamte bisherige Diskussion) stammt schon von ihm.

Leser: Interessant, daß von dieser wissenschaftlich und praktisch wesentlichen Erkenntnis, die mit dem Namen eines ungarischen Gelehrten verknüpft ist, kaum etwas zu hören ist.

Autor: Am 17. Februar 1933 hielt *Max Planck* einen Vortrag mit dem Titel „Ursprung und Auswirkung wissenschaftlicher Ideen" im Verein Deutscher Ingenieure (VDI). Darin sagte er (und er hielt seine Worte für so wichtig, daß er sie in seinen wissenschaftlichen Memoiren als wesentliche Feststellungen fast wörtlich wiederholt hat):
„Eine neue große wissenschaftliche Idee pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, daß ihre Gegner allmählich überzeugt und bekehrt werden — daß aus einem Saulus ein Paulus wird, ist eine große Seltenheit —, sondern vielmehr in der Weise, daß die Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende Generation von vornherein mit der Idee vertraut gemacht wird."

---

[1] *Fényes, I.:* Ergänzungen zur axiomatischen Begründung der Thermodynamik. Zeitschrift für Physik. Bd. 134, 1952, S. 95/100

Drittes Gespräch über die Grundlagen

Bilanzgleichungen

„Kein Wesen kann zu nichts zerfallen!
Das Ew'ge regt sich fort in allen,
Am Sein erhalte dich beglückt!
Das Sein ist ewig: denn Gesetze
Bewahren die lebend'gen Schätze,
Aus welchen sich das All geschmückt."

Goethe

Autor: Aufgrund des bisher Gesagten ergibt sich schon die Möglichkeit, etwas Wesentliches festzustellen, das sich auf sämtliche technische Aufgaben bezieht. Wir müssen vor allem wissen, welche Wechselwirkungen bei der gegebenen technischen Aufgabe möglich sind. Bei deren Kenntnis können wir sofort sagen, welche die entsprechenden extensiven und die charakteristischen intensiven Größen sind, und aus welchen Gliedern die während des Vorgangs entstehende Energieänderung besteht.

Leser: Das ist tatsächlich wesentlich, aber ich glaube, es besagt noch sehr wenig. Es ist auf alle Fälle gut, daß dieses Etwas, mit dessen Änderung wir uns befassen müssen, im voraus bestimmbar ist. Für den technischen Fachmann ist es aber auch sehr wichtig, daß er die Geschwindigkeit und Richtung der Änderung kennt.

Autor: Wir können es auch so sagen, wir müssen die Bilanzgleichungen der extensiven Größen kennen.

Leser: Denkst du an solche Bilanzgleichungen, wie wir sie im Zusammenhang mit den Ländern während unseres ersten Gesprächs aufgestellt haben?

Autor: Der Form nach wird es genau um solche gehen, nur daß jetzt der Buchstabe x (dessen Änderungsgeschwindigkeit wir betrachten) nicht die Einwohnerzahl, die Menge der Kraftwagen, des Geldes oder des Branntweins, sondern die während des Vorgangs sich ändernden extensiven Größen bezeichnet. Wir benötigen so viele Bilanzgleichungen, wie es Arten von Wechselwirkungen in dem untersuchten System gibt, d. h. so viele, wie charakteristische extensive Größen in unserer Aufgabe vorkommen.

Leser: Dementsprechend wird in dem abgegrenzten Raumteil, d. h. innerhalb des von uns untersuchten Systems, die zeitliche Änderung der einzelnen extensiven Größen gleich den Strömen über die Grenzen sein:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -I \, .$$

Autor: In der Bilanzgleichung kommt noch ein weiteres Glied vor, die Quelle Q.

Leser: Ich denke, das haben wir jetzt nicht nötig. Denn — mit einer Ausnahme — sprachen wir nur von bleibenden extensiven Größen. Bleibende Größen können aber keine Quelle haben, sie können nicht entstehen oder vergehen.

Autor: Da hast du recht, denke aber an das folgende Beispiel: Wasserstoff und Chlorgas sind durch eine poröse Wand voneinander getrennt. (Das Bild auf S. 28 war so einfach, daß es sich nicht lohnt, es noch einmal zu zeichnen, wir können es uns auch vorstellen.) Das System 1 sei das Chlorgas, das System 2 der Wasserstoff. Untersuchen wir den Gesamtraum, d. h. beide Systeme zusammen. Was müssen wir beachten?

Leser: Zwei extensive Größen, die Masse und die Energie. Die Aufgabe bestand nämlich — wie du gesagt hast — darin, die Wechselwirkung der Stoffe zu erkennen. Die beiden Systeme sind von außen vollkommen isoliert, es gibt also keine Wechselwirkung mit der Umgebung (Strömung durch die Wände). Demzufolge ist die Änderung der Gesamtmasse und die Änderung der Gesamtenergie gleich Null.

Autor: Du hast es richtig gesagt, die Gesamtmasse und Gesamtenergie verändern sich tatsächlich nicht, aber ist das auch für die Masse der einzelnen Gasarten richtig?

Leser: Offensichtlich nicht, auch durch die Berührung der Gase H_2 und Cl_2 entsteht HCl, d. h., sie ergeben Salzsäure. Im Laufe der Vermischung der Gase wird sich die Menge des Wasserstoffes und des Chlorgases verringern, während die Menge der Salzsäure zunimmt.

Autor: Im Hinblick auf die einzelnen Komponenten kann man also sehr wohl von einer Quelle reden. Das ändert natürlich nichts daran, daß sich innerhalb eines von der Umgebung vollkommen isolierten Systems die Gesamtmasse nicht verändert. Was für die eine Komponente eine Quelle ist, das ist für die andere eine Senke (negative Quelle). Im Falle der Energie ist die Lage die gleiche. Nur die Größe der Gesamtenergie bleibt konstant. Bei der chemischen Reaktion, d. h. bei der Verbindung von Wasserstoff und Chlor, wird ein Teil der chemischen Bindungsenergie der Moleküle frei und vermehrt die innere Energie des Systems. Dadurch dehnt sich das System aus, oder die Temperatur steigt. Davon werden wir in Zusammenhang mit den chemischen Reaktionen und der Verbrennung noch ausführlich sprechen. Hier nur soviel, daß sich die verschiedenen Energiearten ineinander verwandeln können. Einzelne Energiearten können also auf Kosten anderer Quellen leben. Das ändert natürlich nichts daran, daß die Gesamtenergie unverändert bleibt.

Leser: Das ist vollkommen klar, dann müssen aber die Bilanzgleichungen unter Berücksichtigung dieser Tatsache aufgestellt werden, u. zw. nicht für die einzelnen extensiven Größen, sondern für ihre Komponenten.

Autor: Moment, sind die Komponenten der extensiven Größen vielleicht keine extensiven Größen?

Leser: Auf jeden Fall sind sie keine bleibenden Größen.

Autor: Das ist doch auch keine Bedingung dafür, extensiv zu sein.

Leser: Das stimmt, wie steht es aber damit, daß zu jeder Wechselwirkung ein charakteristisches Paar aus einer extensiven und einer intensiven Größe gehört? Wie steht es z. B. bei einer stofflichen Wechselwirkung?

Autor: Das, worüber wir früher gesprochen haben, bezog sich in jener Form nur auf Einkomponenten-Systeme. Wenn mehrere Komponenten vorhanden sind, muß man die stoffliche Wechselwirkung je Komponente behandeln. Zu jeder solchen Komponenten-Wechselwirkung gehört ein charakteristisches Paar extensiver und intensiver Größen. Wenn insgesamt p Komponenten am Prozeß teilnehmen, muß man statt der Produkte μm bzw. $\mu \Delta m$ überall die Produkte

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j m_j \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{p} \mu_j \Delta m_j$$

schreiben. Der Ausdruck für die Energie lautet also

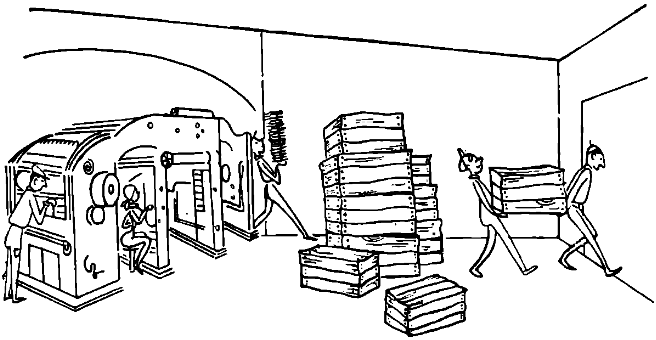
$$W = TS - pV + \sum_{j=1}^{p} \mu_j m_j ,$$

wobei μ_j und m_j das chemische Potential bzw. die Masse der j-ten Komponente bedeuten.

Leser: Auf diese Weise kann und muß man auch Quellen berücksichtigen. Es ist dann kein Problem mehr, für die einzelnen extensiven Größen (auch unter Berücksichtigung der Komponenten) die Bilanzgleichung aufzustellen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Q - I .$$

Autor: Vielleicht wird es nicht ganz überflüssig sein, uns wieder ins Gedächtnis zu rufen, was diese Gleichung bedeutet. Die Änderung des Lagervorrats ist gleich der Differenz aus produzierter und verkaufter Warenmenge.
Stellen wir uns einen beliebigen Raumteil vor. Die Begrenzungsfläche bezeichnen wir mit A, das durch die Fläche eingeschlossene Volumen mit V. Wir vernachlässigen jetzt die isolierende Wirkung der Fläche und nehmen an, daß durch sie jede Strömung möglich ist. Der Zustand des Systems mit einem Volu-



men V werde durch extensive Größen eindeutig charakterisiert. Wir bezeichnen die einzelnen extensiven Größen mit x_i, wo $i = 1, 2, \ldots, n$, ein Index ist, der sich auf die einzelnen extensiven Größen bezieht.

So ist z. B. $x_1 = W$ die Energie, $x_2 = m_a$, $x_3 = m_b$, d. h. die Masse der chemischen Komponente a und b usw., $x_n = V$ das Volumen des Systems. Wir wählen von den n extensiven Größen eine beliebige aus. Ihr Wert kann sich nur dann ändern, wenn innerhalb des Systems eine Quelle ist bzw. durch die Fläche des Systems ein Strom fließt. Die Bilanzgleichung nimmt also — für jede extensive Größe — folgende Form an:

$$\frac{dx_i}{dt} = Q_i - I_i .$$

Diese Formel ergibt, über das ganze Volumen V summiert, die Gesamtbilanz. Es ist üblich, diese auch Integral-Bilanzgleichung zu nennen. Bei unseren weiteren Untersuchungen benötigen wir auch die sog. differentielle Bilanzgleichung, welche die auf den Punkt bezogenen (lokalen) Werte der Quelle und des Stromes der i-ten extensiven Größe enthält. Diese erhalten wir verhältnismäßig einfach aus der vorigen Gleichung. Dazu benötigen wir vor allem den Begriff der Dichte. Wir haben schon erwähnt, daß wir den Quotienten zweier beliebiger extensiver Größen bilden können, der eine intensive — aber nicht charakteristische intensive — Größe ist. So ergibt z. B. eine beliebige extensive Größe, dividiert durch die Masse, den jeweiligen spezifischen Wert; $v = V/m$ ist das spezifische Volumen, $\varepsilon = W/m$ ist die spezifische Energie usw. Extensive Größen dividiert durch das Volumen ergeben die Dichte; $\varrho = m/V$ ist die Massendichte, $\varrho_e = W/V$ ist die Energiedichte usw. Im allgemeinen ist $\varrho_i = x_i/V$ die Dichte der i-ten extensiven Größe. Von homogener Dichteverteilung können wir dann sprechen, wenn in allen Punkten des Systems die Werte der Dichte gleich sind. In einem solchen Falle erhalten wir den im ganzen System vorhandenen Wert der i-ten extensiven Größe, indem wir die Dichte mit dem Volumen multiplizieren:

$$x_i = \varrho_i V .$$

Leser: Das ist eine sehr starke Einschränkung. Mit Systemen, in denen die Dichteverteilung homogen ist, hat man es sehr selten zu tun.

Autor: In der Praxis liegen meistens inhomogene Systeme vor, wo die Dichtewerte an den verschiedenen Punkten nicht gleich sind. In einem solchen Fall wird der im ganzen System vorhandene Wert der extensiven Größe bezeichnet, indem man kleine Elemente ΔV_j des Volumens V nimmt, in denen die Dichte als homogen betrachtet werden kann, diese Volumina mit dem zugehörigen Dichtewert multipliziert und danach über alle diese Produkte summiert:

$$x_i = \sum_j (x_i)_j = \sum_j (\varrho_i)_j \Delta V_j .$$

Wenn diese kleinen Volumina punktartig sind, d. h., die Dichte sich von Punkt zu Punkt verändert, dann ist statt der Summierung eine Integration nötig:

$$x_i = \int_V \varrho_i \mathrm{d}v .$$

Ebenso läßt sich die im Volumen V befindliche Gesamtquelle durch eine sogenannte Quelldichte ausdrücken:

$$Q_i = \int_V q_i \mathrm{d}v .$$

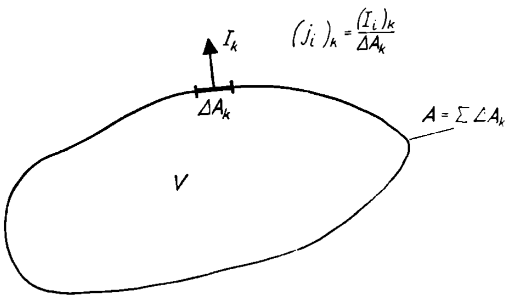
Leser: Damit können wir schon zwei Glieder der Integral-Bilanzgleichung angeben. Aber was ist mit dem dritten Glied, dem Strom? Den haben wir ja nicht auf das Volumen, sondern auf die Fläche bezogen!

Autor: Den aus der gesamten Fläche austretenden (resultierenden) Strom bezeichneten wir mit I_i. Dieser Strom, durch die Fläche dividiert, heißt Flächenstromdichte:

$$j_i = \frac{I_i}{A}.$$

Auf der im Bild angegebenen Fläche A können wir die Flächenstromdichte als homogen betrachten, wenn der durch ein ausgewähltes kleines Flächenelement ΔA_k fließende Strom $(I_i)_k$ und der Quotient

$$(j_i)_k = \frac{(I_i)_k}{\Delta A_k}$$



konstant sind. Wenn dieses $(j_i)_k$, d. h. die zum k-ten Flächenelement gehörende lokale Stromdichte, vom Ort abhängt, dann nennen wir die Verteilung der Stromdichte inhomogen. Denken wir nur an unser Beispiel mit den Grenzstationen. Wenn sich die Grenzstationen in gleichem Abstand voneinander befinden und an jeder die Differenz zwischen der Anzahl der Aus- und Einreisenden gleich wäre, dann würden wir den Einwohnerstrom homogen nennen. Falls die Verteilung homogen ist, ist der Gesamtstrom das Produkt aus Stromdichte und Gesamtfläche:

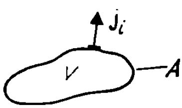
$$I_i = j_i A.$$

Wenn die Verteilung jedoch inhomogen ist — ähnlich dem zur Volumendichte Gesagten — nehmen wir so kleine Flächenelemente ΔA_k, daß hierfür die Stromdichte als homogen betrachtet werden kann. Diese Flächenelemente multiplizieren wir mit der zugehörigen Stromdichte und addieren alle Produkte:

$$I_i = \sum_k (I_i)_k = \sum_k (j_i)_k \, \Delta A_k \, .$$

Sind diese kleinen Flächenelemente punktartig, d. h., die Stromdichte ändert sich von Punkt zu Punkt, so ist statt der Summierung eine Flächenintegration nötig, wobei die Integration über die das Volumen V umschließende geschlossene Fläche A vorzunehmen ist.

Leser: Wir können also einfach das Flächenintegral der Stromdichten in die Formel einsetzen? Wäre es nicht zweckmäßig, auch da mit der Volumendichte zu rechnen? Läßt sich überhaupt die Volumendichte eines Flächenstroms physikalisch deuten?



$$\oint_A (\boldsymbol{j}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{a}) = \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i \, \mathrm{d}v$$

Autor: Ja, im Grund genommen handelt es sich darum, den auf eine geschlossene Fläche bezogenen Strom auf das durch diese Fläche eingeschlossene Volumen zu beziehen, d. h. eine Größe der Art I/V zu bilden. Auch da muß man natürlich kleine Volumenelemente nehmen und die auf diese Volumenelemente bezogenen Volumenstromdichten summieren. Wenn diese kleinen Volumina punktartig gewählt werden, dann nennt man die darauf bezogene Volumenstromdichte die Divergenz der Stromdichte. Natürlich muß das Integral der Flächenstromdichte, bezogen auf die das ganze Volumen begrenzende Fläche, gleich dem auf das Gesamtvolumen bezogenen Integral der Volumenstromdichte sein, da beide den Gesamtstrom I ergeben müssen:

$$I_i = \oint_A (\boldsymbol{j}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{a}) = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i \, \mathrm{d}v \,,$$

wo $\boldsymbol{j}_i$ die Flächenstromdichte der i-ten extensiven Größe ist. Der Strom und die Stromdichte sind Vektoren. Ihren Wert nehmen wir — wie schon vorher — dann als positiv an, wenn sie nach außen zeigen (d. h. eine Ausströmung anzeigen).

Leser: Ich unterbreche dich wieder für einen Moment, weißt du, ich habe mich daran gewöhnt, in Dimensionen zu rechnen. Es war von so vielen Begriffen die Rede, daß es gut wäre, sie auch dimensionsmäßig zu ordnen. Die Dimension extensiver Größen kann offenbar ganz verschieden sein. Nehmen wir z. B. die Masse, dann sind die bisher besprochenen Größen im SI-Maßsystem — wenn ich richtig verstanden habe — die folgenden:

Dichte: $\mathrm{kg/m^3}$
Quelle: $\mathrm{kg/s}$
Quelldichte: $\mathrm{kg/s\,m^3}$
Strom: $\mathrm{kg/s}$
Flächenstromdichte: $\mathrm{kg/s\,m^2}$
Volumenstromdichte: $\mathrm{kg/s\,m^3}$.

Autor: So kannst du sogar kontrollieren, ob jedes Glied der Bilanzgleichung die gleiche Dimension hat. Aber vorher setzen wir in die Integralbilanzgleichung die einzelnen Volumendichten ein:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \varrho_i \, \mathrm{d}v = \int_V q_i \, \mathrm{d}v - \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i \, \mathrm{d}v \,.$$

Die Differentiation nach der Zeit kann unter das Integralzeichen gezogen werden, dann müssen wir aber — weil nur nach der Zeit und nicht nach dem Ort zu differenzieren ist — zur Unterscheidung das Zeichen des partiellen Differentialquotienten schreiben. Da die Integrationsgrenzen (das Volumen V) überall dasselbe ist, kann man die einzelnen Glieder unter einem Integralzeichen zusammenfassen:

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i - q_i\right) dv = 0 .$$

An das Volumen hatten wir keine besondere Bedingung gestellt. Somit kann dieses Integral nur dann Null sein, wenn der Integrand selbst Null ist:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i - q_i = 0 ,$$

bzw. nach Umordnen

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i = q_i .$$

Diese differentielle Bilanzgleichung ist die sog. allgemeine Kontinuitäts- oder Transportgleichung. Sie wird die Grundlage aller unserer weiteren Ableitungen sein.

Leser: Bei diesem Gespräch hatten wir die bereits bekannten Formen der Bilanzgleichung für die Beschreibung der in einem umgrenzten Raum vor sich gehenden Änderung irgendeiner extensiven Größe verwendet. Mit entsprechenden Abänderungen gelangten wir dann zu der Differentialform der Bilanzgleichung, von der du behauptet hast, daß sie die Grundlage aller unserer späteren Ableitungen ist. Davon bin ich freilich noch nicht überzeugt, doch soll ja auch für unsere späteren Gespräche noch etwas übrig bleiben. Soviel ist schon jetzt klar, daß die in der Formel stehende Größe ϱ_i die Energiedichte, die Massendichte (oder Dichte einer Massenkomponente) oder die elektrische Ladungsdichte bzw. die Dichte jeder untersuchten extensiven Größe sein kann. Demnach brauchen wir nur die möglichen Wechselwirkungen in Betracht zu ziehen, von denen wir schon wissen, welche extensiven Größen sich dabei verändern (bzw. sich ändern können). Für jede stellen wir eine differentielle Bilanzgleichung in obiger Form auf, und damit ist die mathematische Formulierung der Aufgabe fertig.

Autor: Das ist auf jeden Fall notwendig, reicht aber noch längst nicht aus. Bei der richtigen Stellung der Aufgabe, beim

Erkennen der Grundlagen der verschiedenen technischen Gebiete haben wir einen entscheidenden Schritt getan, aber wir sind noch nicht ans Ziel gelangt. Wir haben nur allgemein von den einzelnen Gliedern der Gleichung gesprochen. In der allgemeinen Form enthält die Gleichung alles, aber eben wegen ihrer übertriebenen Allgemeinheit ist ihr Informationsgehalt sehr gering. In unserem folgenden Gespräch werden wir uns bemühen, diese Allgemeinheit — nach Möglichkeit — zu konkretisieren.

Viertes Gespräch über die Grundlagen

Ströme

„Ohne die Sprache der Mathematik
wäre uns der größte Teil
des tieferen Zusammenhangs der Dinge
für alle Zeiten
unbekannt geblieben.“

Poincaré

Leser: Wir haben unser Gespräch damit unterbrochen, daß wir sagten, daß für ein System mit n möglichen Wechselwirkungsarten n Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i = q_i$$

aufgestellt werden können. Du sagtest, daß dies zur mathematischen Formulierung notwendig, aber noch lange nicht hinreichend ist. Danach willst du offenbar weitere mathematische Beziehungen aufstellen. Sag, ist das kein überflüssiges Mathematisieren, was wir da treiben? Warum müssen wir uns mit dem mathematischen Modell abmühen, wenn wir die technischen Aufgaben in den meisten Fällen sowieso durch Versuche lösen? Überlassen wir dieses Gebiet den Mathematikern und Physikern.

Autor: Du bist nicht der erste, der das sagt. Ich will nicht wiederholen, warum die klare mathematische Formulierung nötig ist, warum wir bei unserer Arbeit auch die Mitwirkung eines Mathematikers benötigen. Aber nehmen wir an, daß die technischen Aufgaben in allen Fällen nur experimentell gelöst werden können. Das ist zwar stark anfechtbar, aber selbst dann ist die Arbeit, die wir für die mathematische Formulierung verwendet haben, nützlich.
Alfréd Rényi schreibt folgendes: „Die Erfahrung lehrte mich, daß die Suche nach einem geeigneten mathematischen Modell,

und sei es nur ein sehr grobes, oft zu einem tieferen Verständnis der zu untersuchenden Situation führt, weil wir dabei gezwungen sind, alle Möglichkeiten logisch von Anfang bis Ende zu durchdenken, die benutzten Begriffe klar und unmißverständlich zu definieren, alle Faktoren, die eine Rolle spielen könnten, zu berücksichtigen und herauszufinden, welche davon die entscheidenden sind."[1] Wenn wir nur soviel Nutzen vom Ganzen hätten, lohnte es sich auch, Zeit darauf zu verwenden. Sind wir uns darüber einig?

Leser: Ich glaube ja, aber ich sehe noch immer nicht ein, was der unmittelbare Nutzen ist, worin das der technischen Praxis hilft. Es ist besser, wir gehen jetzt weiter. Bei der Anwendung der Bilanzgleichungen besteht mit dem ersten Glied kein Problem. Es gibt so viele extensive Größen, wie Wechselwirkungen vorhanden sind. Für ϱ_i müssen wir nacheinander entsprechende Dichten einsetzen.

Autor: So ist es, und das ist — scheinbar — sehr einfach. Aber vergessen wir nicht, daß das einer der wichtigsten Schritte ist und demzufolge große Umsicht verlangt. Die einzelnen Klassen von Erscheinungen unterscheiden sich voneinander in der Zusammensetzung ihrer Wechselwirkungen, also dadurch, welche charakteristischen intensiven Größen zu ihnen gehören. So ist z. B. die charakteristische extensive Größe beim Wärmeaustauschprozeß die innere Energie; in der Strömungstechnik spielen die kinetische Energie, die Masse und der Impuls (oder auch der Drehimpuls) die entsprechende Rolle.

---

[1] *Rényi, A.:* Dialoge über Mathematik. Budapest—Berlin 1967, S. 57

Leser: Demnach gibt es verschiedene, voneinander unabhängige extensive Größen, die zu verschiedenen Wechselwirkungen gehören und zu jeweils anderen Erscheinungen führen.

Autor: Denkst du wirklich, daß z. B. der Impuls und die kinetische Energie oder die Masse jeweils voneinander unabhängig sind?

Leser: Aus dem Bisherigen hat sich das herausgestellt. Danach hast du die Wechselwirkungen so klassifiziert, daß zu jeder je eine charakteristische extensive Eigenschaft gehört.

Autor: Jetzt hast du richtig formuliert, du sagtest Eigenschaft, aber von wessen Eigenschaft ist die Rede?

Leser: Natürlich von den physikalischen Eigenschaften der Materie. Ohne Materie kann weder Energie, noch Masse, noch irgendeine andere extensive Größe existieren.

Autor: Entschuldige, wenn ich zwischendurch ein kindliches Beispiel anführe. Nehmen wir an, daß unser Freund blaue Augen, blondes Haar und eine hohe Stirn hat. Wir können sagen, daß das Eigenschaften unseres Freundes sind. Zu seinen Eigenschaften können noch Redegewandtheit, bestimmtes Auftreten, einnehmende Umgangsformen usw. gehören.

Leser: Was willst du damit sagen? Willst du einen Filmhelden in der Technik auftreten lassen?

Autor: Ich sagte im voraus, es ist ein kindliches Beispiel, und die jetzt folgende Frage kann überraschend sein. Ist es vorstellbar, daß irgendeine Eigenschaft unseres Freundes sich selbständig macht und unabhängig von ihm existiert?

Leser: Worauf willst du damit hinaus?

Autor: Unser Freund sei die Materie und seine Eigenschaften die genannten extensiven Größen.

Leser: Das ist klar, keine extensive Größe kann sich selbständig machen, keine kann man sich von der Materie unabhängig vorstellen, sie ist Träger dieser Eigenschaften.

Autor: Die Gruppierung nach extensiven Größen, die Klassifizierung der Wechselwirkungen stellt also von den verschiedenen, aber unzertrennlichen Eigenschaften der Materie stets jene in den Vordergrund, die vom Gesichtspunkt der gegebenen Erscheinung wesentlich ist. Der Impuls, die Masse, die innere Energie usw. sind alles Eigenschaften der Materie, darum ist es auch sinnlos, von der Umwandlung der Materie in Energie zu sprechen. (Die berühmte Einsteinsche Formel $W = mc^2$ unrichtig auslegend, sagen viele, daß sich Materie mit der Masse m in Energie von der Größe mc^2 umwandelt. In Wirklichkeit ist von einer Äquivalenzbeziehung die Rede, d. h. von der Verknüpfung zwischen der Masse m und der Energie W der Materie. Zu jeder Masse m gehört eine Energie mc^2, und umgekehrt gehört zu jeder Energie W eine Masse W/c^2.

Leser: Warte ein bißchen, einmal sprichst du über Energie im allgemeinen, vorhin sprachst du aber von innerer Energie. Wie soll ich das verstehen?

Autor: Die mechanische Energie kennen wir schon von unseren früheren Studien. Es ist aber nicht schwer einzusehen, daß die mechanische Energie des Körpers nur ein Teil der Gesamtenergie ist. Selbst wenn sich der Körper im Ruhezustand befindet und auch keine chemische Reaktion stattfindet, bewegen sich die Moleküle und treten miteinander in dauernde Wechselwirkung. (Man pflegt das auch thermische Bewegung oder Wärmebewegung zu nennen.) Diese Bewegung und Wechselwirkung ergibt die innere Energie des Körpers. Darum ist die Gesamtenergie des ruhenden Körpers die Summe der mechanischen und der inneren Energie. Beim sich bewegenden Körper kommt noch die kinetische Energie dazu. Wenn auch noch eine chemische Reaktion stattfindet, dann muß man die Bindungsenergie der Moleküle, die sog. chemische Bindungsenergie, ebenfalls in Betracht ziehen.

Leser: Diese Energiearten können sich ineinander umwandeln. Wenn jede getrennt betrachtet wird, hat dabei das Prinzip von der Erhaltung der Energie für sie keine Gültigkeit.

Autor: Eben deshalb sind die einzelnen Energiearten zwar extensive, aber keine bleibenden Größen. (Nur ihre Summe ist konstant!) Ich möchte auf den Anfang unseres heutigen Gespräches zurückkommen. Die einzelnen Wechselwirkungen und technischen Prozesse können wir danach einteilen, welche extensive Größen und Energiearten strömen und welche Energieumwandlungserscheinungen auftreten. Mit diesen werden wir uns später noch eingehender befassen. Jetzt aber wollen wir noch etwas von charakteristischen extensiven Größen bzw. von ihren Dichten im allgemeinen sprechen. Deren zeitliche Änderung ist das erste Glied der Bilanzgleichungen. Allgemein können wir von der auf der rechten Seite der Bilanzgleichung stehenden Quelldichte nur sagen, daß sie die auf das Volumen bezogene Entstehung bzw. Verringerung der entsprechenden extensiven Größe in der Zeiteinheit angibt. Mit der ausführlicheren Diskussion befassen sich die speziellen Fachgebiete. So gibt z. B. die chemische Reaktionskinetik die Quelle für irgendeine Komponente, die sog. Reaktionsgeschwindigkeit, an. Die Strömungstechnik untersucht die Umwandlungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie in innere Energie, d. h., die Quelle der (positiven) inneren Energie und der (negativen) kinetischen Energie, die sog. Dissipation. Vorläufig wollen wir die i-te extensive Quelldichte nur mit q_i bezeichnen, weil wir wissen, daß das auch eine sehr komplizierte Funktion sein kann.

Leser: Damit sind wir aber nicht vorwärts gekommen. Beenden wir die allgemeinen Formulierungen, und gehen wir auf die konkreten Fachgebiete über.

Autor: Beeilen wir uns noch nicht damit, über die Stromdichten können wir verhältnismäßig viel Allgemeingültiges sagen. Zuerst untersuchen wir jedoch ein System, in dem keine makroskopische Bewegung vorhanden ist.

Leser: Woran denkst du?

Autor: Nehmen wir z. B. einen Mückenschwarm. Millionen von Mücken fliegen durcheinander, aber dabei (das nehmen wir jedenfalls an) ändert sich das Volumen des ganzen Schwarms nicht. Von fern betrachtet erblicken wir nur dieses Volumen (sagen wir eine Kugel), und wir nehmen wahr, daß in einzelnen Fällen diese Kugel auf der Stelle steht, ein andermal dagegen sich in irgendeiner Richtung bewegt. Im ersteren Falle würden wir sagen, daß keine Bewegung vorhanden ist. Von nahem untersucht, würden wir natürlich bemerken, daß die einzelnen Elemente (die Mücken) sich ständig mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen und in verschiedene Richtungen fliegen. Was kann der Grund der scheinbaren Bewegungslosigkeit sein? Wir würden anfangen zu rechnen und könnten feststellen, daß alle Mücken-Geschwindigkeiten (natürlich vektoriell) summiert gerade Null ergeben; die einzelnen Mücken-Geschwindigkeiten mitteln sich aus.

Jetzt können wir auch schon sagen, wann wir die Kugeln sich bewegen sehen, u. zw. wenn innerhalb jedes Volumenelementes die vektorielle Summe der Mücken-Geschwindigkeiten im Durchschnitt von Null verschieden ist. In diesem Falle können wir sagen, daß sich der Mückenschwarm in makroskopischer Bewegung befindet.

Leser: Natürlich veranschaulichen hier die Mücken die einzelnen Moleküle. Demnach sprechen wir dann von makroskopischer Bewegung, wenn die Resultierende der Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle von Null abweicht.

Autor: Ja, aber man braucht die Geschwindigkeit der Moleküle doch nicht einzeln zu messen und zu summieren, um festzustellen, ob eine makroskopische Bewegung vorhanden ist. Auch beim Gas – wie bei dem Mückenschwarm – genügt es festzustellen, was der Massenmittelpunkt des Systems macht. Wenn er auf einer Stelle verharrt, dann können wir sagen, daß keine makroskopische Bewegung vorhanden ist. Vorläufig befassen wir uns also mit einem solchen System und untersuchen die mögliche Form der Stromdichte. Wir müssen ein wenig zu unserem zweiten Gespräch zurückkehren und uns daran erinnern, auf welche Wirkung hin der Strom einer extensiven Größe entstehen kann.

Leser: Wir haben festgestellt, daß die Strömung der extensiven Größen durch die Inhomogenität der intensiven Größen verursacht wird. Strömung ist nur dann nicht vorhanden, wenn das System im Gleichgewicht ist, wofür die homogene Verteilung jeder charakteristischen intensiven Größe notwendige und hinreichende Voraussetzung ist.

Autor: In der Physik sind schon seit langem dynamische Gesetze bekannt, welche sich auf extensive Ströme beziehen, die bei Differenzen bestimmter intensiver Größen entstehen. Könntest du einige aufzählen?

Leser: Vielleicht in erster Linie das Ohmsche Gesetz, nach dem der elektrische Strom Quotient einer Spannungsdifferenz und eines Widerstandes ist:

$$I_e = \frac{U - U_0}{R}.$$

Autor: Schreibęn wir statt Widerstand dessen Kehrwert $G = 1/R$, den elektrischen Leitwert:

$$I_e = G(U - U_0).$$

Leser: Bekannt ist auch etwa das Newtonsche Abkühlungsgesetz, nach dem der Wärmestrom gleich dem Produkt aus der Wärmeleitfähigkeit c und der Temperaturdifferenz ist:

$$Q = c(T - T_0).$$

Autor: Du erinnerst dich gewiß auc an hdas Gesetz von *Poiseuille* oder an das Darcysche Filtergesetz. Der Volumenstrom ist dem Druckunterschied proportional:

$$I_v = A(p - p_0),$$

wobei A der sogenannte Volumenleit- oder Sickerungsfaktor ist.

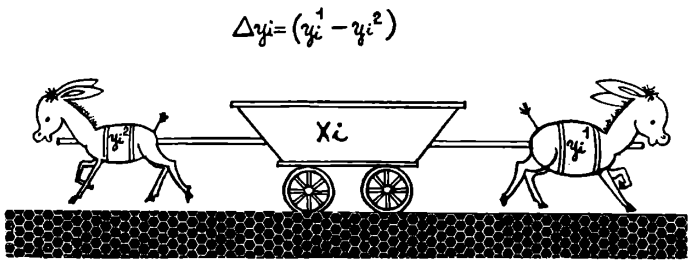
Leser: So ist auch das Ficksche Gesetz aufgebaut, das den Massenstrom als Produkt des Diffusionskoeffizienten mit der Dichtedifferenz angibt:

$$I_m = D(\varrho - \varrho_0).$$

Autor: Schon auf Grund dieser Aufzählung liegt die Verallgemeinerung auf der Hand, die Ströme der einzelnen extensiven Größen sind gleich dem Produkt aus der Differenz der intensiven Größen y_i und den entsprechenden Leitwerten G_i:

$$I_i = G_i(y_i - y_{i0}).$$

Diese Beziehung enthält offensichtlich alle Gesetze, die wir vorher aufgezählt haben.



Leser: Diese Strömungsgesetze ergeben also den Gesamtstrom in irgendeinem Punkt mit der Koordinate x, wenn in diesem Punkt und in endlicher Entfernung von ihm im Punkt x_0 der Wert der intensiven Größen bekannt ist. Wie können wir daraus die Stromdichten errechnen?

Autor: Der Quotient aus Gesamtstrom und Fläche ist die Stromdichte. Auf der rechten Seite muß man formal ebenfalls durch die Fläche dividieren. Wir zerlegen die Division in zwei Schritte. Gesondert dividieren wir den Leitwert G durch eine Länge x und bezeichnen G_i/x mit L_i. Das ist der auf die Einheitslänge bezogene Leitwert. Die Differenz $y - y_0$ dividieren wir ebenfalls durch eine Länge, nämlich die Entfernung $x - x_0$, und so erhalten wir

$$\frac{I_i}{x^2} \approx \boldsymbol{j}_i = L_i \frac{y_i - y_{i0}}{x - x_0}.$$

Wenn die Entfernung $x - x_0$ nach Null konvergiert, dann wird – wie bei der Definition der Geschwindigkeit – aus dem Bruch ein Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}$, und es folgt:

$$\boldsymbol{j}_i = L_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}.$$

Leser: All dies bezieht sich natürlich auf ein eindimensionales Problem, in dem wir die Änderung nur in einer Richtung verfolgen.

Autor: Im allgemeinen kann sich bei räumlichen Aufgaben der Wert der intensiven Größe in allen drei mit x_1, x_2 und x_3 bezeichneten Koordinatenrichtungen ändern. (Wir hoffen, es wird keine Unklarheit verursachen, wenn wir die räumlichen Koordinaten mit denselben Buchstaben bezeichnen wie die extensiven Größen.) Die Änderung in den verschiedenen Richtungen wird durch den partiellen Differentialquotienten angezeigt:

$$\boldsymbol{j}_i = L_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3 \right),$$

wobei $\boldsymbol{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) die Einheitsvektoren in den einzelnen Koordinatenrichtungen sind. Die Summe in der Klammer nennen wir grad y_i oder kurz ∇y_i.

Das Zeichen ∇ heißt Nablaoperator und ist wie folgt definiert:

$$\nabla = \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Damit wird die Stromdichte

$$\boldsymbol{j}_i = L_i \operatorname{grad} y_i = L_i \nabla y_i .$$

Offensichtlich gibt es keine Strömung, wenn grad y_i Null ist, d. h., wenn die intensive Größe gleichmäßig verteilt ist. Der Nablaoperator kann also auch als Maß der Homogenität angesehen werden. Diese Deutung werden wir im weiteren noch gut verwenden können.

Leser: Wir haben bereits soviel erreicht, daß wir die schon lange bekannten Strömungsgesetze durch lokale Werte ausgedrückt und in allgemeiner Form aufgeschrieben haben. Mathematisch haben wir die schon bekannte Tatsache formuliert, daß der Strom irgendeiner extensiven Größe durch die Inhomogenität der zugehörigen intensiven Größe verursacht wird.

Autor: Das allein ist aber noch wenig. Schon in den ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts waren auch Erscheinungen bekannt, bei denen nicht nur die Inhomogenität der „zugehörigen" charakteristischen intensiven Größe den Strom einer extensiven Größe auslöst. Eine solche Erscheinung ist z. B. die Thermodiffusion, wobei infolge von Temperaturdifferenz ein Massenstrom entsteht. Das Umgekehrte — wenn infolge von Dichteunterschieden (Konzentrationsunterschieden) ein innerer Energiestrom entsteht — ist der Dufour-Effekt. Diese Erscheinungen zusammen nennt man thermomechanische Erscheinungen. Es sind auch thermoelektrische, elektrokinetische usw. Erscheinungen bekannt, die auf solchen sog. Überlagerungsprozessen beruhen. Um 1820 hat *Oersted* die Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen nachgewiesen. Im Jahre 1821 beobachtete *Seebeck*, daß ein elektrischer Strom entsteht, wenn man zwei verschiedene Metalle vereinigt und das eine erhitzt. Der bei einer Temperaturdifferenz entstehende elektrische Strom wird z. B. in Thermoelementen verwendet. Im Jahre 1834 hat *Peltier* nachgewiesen, daß sich beim Stromfluß durch ein derartiges Metallpaar — je nach der Richtung des Stroms — die Berührungsstelle beider Metalle erwärmt oder abkühlt.

Leser: Für obige Erscheinungen hat die erwähnte verallgemeinerte Beziehung offensichtlich keine Gültigkeit.

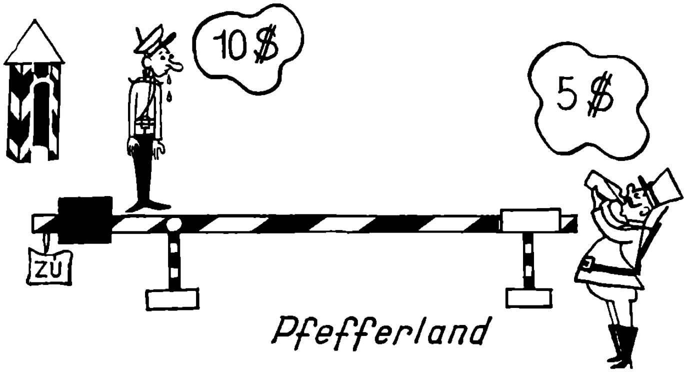
Autor: Gerade das hat *Lars Onsager* erkannt, der in seinen in den Jahren 1930/31 veröffentlichten Arbeiten die allgemeinste Formulierung der Stromdichte bekanntgab. Auf Grund des Gesagten liegt die Lösung schon auf der Hand. Die Stromdichte wird nicht nur durch die Inhomogenität der zugehörigen, sondern sämtlicher intensiven Größen bestimmt:

$$j_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \operatorname{grad} y_k \equiv \sum_{=1}^{n} L_{ik} \nabla y_k \,.$$

Die Leitwerte L_{ik} zeigen an, welche Stromstärke der i-ten extensiven Größe jeweils von einer Differenz der k-ten intensiven Größe um eine Einheit bewirkt wird. Der Strom ist also eine Linearkombination der Gradienten der intensiven Größen. Die Onsagersche Gleichung enthält auch die Überlagerungsprozesse und bringt zugleich zum Ausdruck, daß ein Gleichgewicht nur dann möglich ist, wenn alle charakteristischen intensiven Größen homogen verteilt sind.

Leser: Das ist tatsächlich einfach. Nun verstehe ich auch die Rolle der Gradienten der intensiven Größen. Ich glaube, wir können sie ruhig Kräfte nennen, die die Dynamik des Prozesses charakterisieren. Wenn die Kräfte gleich Null sind, gibt es keinen Strom. Das Ganze ähnelt ein wenig dem, was du in unserem ersten Gespräch über den Preis des Branntweins gesagt hast. Der Preisunterschied ist auch eine Kraft, welche dann den Branntweinstrom zwischen den Ländern zustande bringt.

Autor: Natürlich hinkt das ein wenig wie alle Vergleiche, aber im Grunde genommen hast du recht. Wenn du schon als Beispiel den Verkehr zwischen den Ländern erwähnt hast, mache ich dich noch auf die Rolle des Leitwertes aufmerksam. Wir sagten, daß die Zollgesetze die Isolierung eines Landes fixieren (für einen Handelsartikel, für das Geld, für den Personenverkehr, im allgemeinen für Größen von extensivem Charakter). Diese Zollvorschriften bedeuten sozusagen den Widerstand



der Grenze. Wenn ein Artikel zollpflichtig ist, dann verringert sich sein Strom, wenn er staatliche Subvention erhält, dann wächst er.

Leser: Vertiefen wir uns nicht weiter in die Außenhandels-Anschauungsweise, da es ja genügend physikalische Vorgänge gibt, bei denen die Rolle des Widerstandsfaktors bekannt ist. So ist z. B. der elektrische Strom bei gegebener Spannungsdifferenz dem Widerstand umgekehrt proportional, und demzufolge ist der Strom dem Leitwert — der den Kehrwert des Widerstandes darstellt — direkt proportional.

Autor: Wesentlich ist, daß die Größe der Leitwerte von den stofflichen Eigenschaften des Mediums abhängt. So können solche Stoffe ausgewählt werden, die, auf den Strom einzelner extensiver Größen bezogen, sehr schlechte Leiter sind. Diese Stoffe nennen wir Isolatoren (für den Strom der betreffenden extensiven Größe). Die Isolierstoffe haben in der technischen Praxis eine sehr wichtige Funktion. Ihre Aufgabe ist, den Strom der extensiven Größen in eine solche Richtung zu leiten, die der zweckmäßigen Wirkung entspricht. So blockiert z. B. eine Rohrleitung den Massen- und Volumenstrom einer Flüssigkeit (oder eines Gases) senkrecht zur Strömungsrichtung, und die Flüssigkeit bewegt sich somit in zweckmäßiger Richtung fort. Wenn die Isolierung schlecht, die Rohrleitung undicht ist, dann geht ein Teil der Flüssigkeit (des Gases) verloren. Ein Ofen muß so gebaut sein, daß die Strömung der Verbrennungsprodukte in Richtung des Raumes bzw. die der Energie in Richtung des Schornsteins isoliert ist. (Die letztere Isolierung kann leider niemals vollkommen sein, darum ist bei der Feuerung immer ein Energieverlust vorhanden.) Die Aufgabe der technischen Forschung, Entwicklung und Konstruktion ist u. a. gerade die Ausgestaltung bzw. die zweckmäßige Auswahl solcher Isolierungen, die die zweckmäßige Richtung der Strömung der einzelnen extensiven Größen im höchsten Grade sichern. Vorläufig sei nichts weiter über die Isolierung bzw. über die Funktion der Leitwerte gesagt.

Leser: Es fängt an, interessant zu werden, du sprichst von lauter Dingen, die beinahe trivial sind, obwohl die Art der Formulierung etwas ungewöhnlich ist. Ich fühle bereits, daß gewisse technische Begriffe bald auf einen gemeinsamen Nenner gelangen werden.

Autor: Ich hoffe, daß sich dein Gefühl noch mehr verstärken und — wenn wir zu den einzelnen Fachgebieten gelangen — sogar zur Überzeugung werden wird.
Wir formulieren immer noch nur verallgemeinert. Auf diese Art haben wir über den Strom der Systeme ohne makroskopische Bewegung alles gesagt. Jetzt nur noch so viel, daß wir die Stromdichte

$$\sum_{k=1}^{n} L_{ik} \operatorname{grad} y_k$$

konduktive, d. h. Leitungsstromdichte (Diffusionsstromdichte) nennen. Auch wenn eine makroskopische Bewegung auftritt, enthält die Stromdichte außer dem konduktiven Teil ein sog. konvektives Glied, dessen mathematischer Ausdruck wesentlich einfacher ist. Die Dichte der extensiven Größe an irgendeinem Punkt sei ϱ_i. Dieser Punkt möge sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ bewegen. Es erfordert keine lange Ableitung, um einzusehen, daß die Stromdichte gerade das Produkt $\varrho_i \boldsymbol{w}$ wird.

Leser: Das muß tatsächlich nicht besonders erklärt werden, da wir ja vor kurzem dargelegt haben, daß die extensiven Größen Stoffeigenschaften sind. Der sich bewegende Stoff nimmt offenbar auch seine Eigenschaften mit. Auch hier haben wir nicht ausgenutzt, von welcher extensiven Größe die Rede ist. Die konvektive Stromdichte ist also im allgemeinen

$$\varrho_i \boldsymbol{w}$$

und damit die gesamte Stromdichte:

$$\boldsymbol{j}_i = \varrho_i \boldsymbol{w} + \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \operatorname{grad} y_k \,.$$

Autor: Jetzt können wir schon jene Form der allgemeinen Bilanzgleichung aufstellen, die wir zum Ausgangspunkt jeder technischen Aufgabe nehmen werden:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\varrho_i \boldsymbol{w} + \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \operatorname{grad} y_k\right) = q_i \,.$$

Leser: Und mit dieser allgemeinen Formulierung sind wir schon fertig?

Autor: Was die Bilanzgleichungen anbelangt, die die Erscheinungen innerhalb des Systems beschreiben, so kann man im allgemeinen nichts weiter sagen. Es muß aber noch klargestellt werden, daß das mathematische Modell einer Erscheinung nicht nur aus diesen Gleichungen besteht. Zur eindeutigen Charakterisierung müssen auch die sog. Eindeutigkeitsbedingungen angegeben werden. Das sind die folgenden:

1. Der Variabilitätsbereich,

der angibt, in welchem Intervall die in der Gleichung vorkommenden Veränderlichen (die geometrischen Veränderlichen einbegriffen) variieren können. Für die geometrischen Veränderlichen bedeutet das die Beschreibung (oder evtl. die Zeichnung) der geometrischen Form, die das untersuchte System von seiner Umgebung abgrenzt.

2. Die Randbedingungen,

die die Wechselwirkung des Systems und seiner Umgebung charakterisieren. Wir müssen sagen, welche Wechselwirkungen innerhalb der untersuchten Zeitspanne an dem ganzen Rand zwischen dem System und seiner Umgebung auftreten.

3. Die Anfangsbedingungen,

die den Zustand des Systems zu der als Anfang der Untersuchung gewählten Zeit t_0 innerhalb des ganzen Systems charakterisieren. Offensichtlich fällt diese Bedingung weg, wenn wir stationäre Vorgänge untersuchen.

4. Die Zustandsgleichungen,

deren Kenntnis nötig ist, da diese die physikalischen Eigenschaften des zum System gehörigen Arbeitsmediums charakterisieren.

Leser: Das sind alles Charakteristiken, die nur für eine konkrete Aufgabe genau definierbar sind.

Autor: Eben darum nennen wir sie Eindeutigkeitsbedingungen. Mathematisch sind sie die Bedingung für die eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems, physikalisch dagegen für die eindeutige Beschreibung eines gegebenen Systems.
Wir müssen aber noch sagen, daß wir drei Typen von Randbedingungen unterscheiden. Beim ersten Randwertproblem (Dirichlet-Problem) wird der Wert der physikalischen Veränderlichen am Rande angegeben. Physikalisch heißt das, die Wirkung der Umgebung ist solcher Art, daß, welche Veränderungen auch immer innerhalb des untersuchten Systems vor sich gehen mögen, der am Rand angenommene Wert nur von der Randform bzw. von der Umgebung abhängig ist. (Diese Randwerte sind nicht unbedingt konstant, sie können zeitlich veränderlich sein, wir müssen sie aber zu jedem Zeitpunkt genau kennen.) Das zweite Randwertproblem besteht darin, daß der Wert der Normalableitung am Rande angegeben wird

(Neumannsches Problem). Physikalisch bedeutet das — in Kenntnis der Eigenschaft des Randes bzw. der auf den Rand bezogenen Leitwerte — diese über den Rand tretenden Ströme vorzuschreiben. (Auch dieser Strom kann sich zeitlich ändern.) Dann muß man auch die Zeitabhängigkeit der Ableitung kennen. Schließlich die dritte (gemischte) Randwertaufgabe: An einem Teil des Randes soll der Wert der Funktion, auf dem anderen der der Normalableitung vorgeschrieben werden. Damit haben wir die allgemeine Formulierung abgeschlossen. Mit den übrigen werden wir uns bei den — die technischen Probleme unmittelbar berührenden — weiteren Gesprächen befassen.

Fünftes Gespräch

Einfache Aufgaben

„Die Wissenschaft ist ein Versuch in der Richtung,
unsere chaotischen Sinneswahrnehmungen
mit irgendeinem Gedankensystem
in Zusammenhang zu bringen."

Einstein

Leser: Endlich können wir anfangen, die technischen Probleme zu analysieren. Ich möchte, daß du die ordnende Kraft der Transporttheorie – wie du sagtest – mit praktischen Beispielen belegst.

Autor: Betrachten wir zuerst die einfachsten Aufgaben, und untersuchen wir solche Fälle, in denen keine Quelle vorhanden ist und nur eine extensive Größe sich nichtkonvektiv ausbreitet, konvektiver Strom also auch nicht vorhanden ist.

Leser: Diese Vereinfachung kommt mir übertrieben vor. Ich kann mir nicht vorstellen, daß das irgendeinen praktischen Nutzen hätte. Gibt es überhaupt eine so einfache technische Aufgabe?

Autor: Die wirklichen Vorgänge sind immer zusammengesetzt, mit einer gleichzeitigen Strömung mehrerer extensiver Größen verbunden, und sehr oft ändert sich im Verlauf eines Prozesses die Stärke der Quellen. Wir kennen aber eine große Anzahl technischer Prozesse, zu deren Untersuchung es genügt, den Strom einer einzigen extensiven Größe zu betrachten. Unabhängig davon ist es sogar aus zwei Gründen richtig, stark vereinfachte Aufgaben zu analysieren. Erstens können wir klarer von der Methode sprechen; zweitens setzt sich auch das komplizierteste System aus einfachen Erscheinungen zusammen. Zunächst muß also der Vorgang in seine Teile gegliedert und sie müssen alle für sich untersucht werden. Sonst würden wir uns über die Gesetzmäßigkeiten der zusammengesetzten Erscheinung nicht genügend orientieren können.

Leser: Aber das ist genau zu überlegen. Die technischen Vorgänge sind im allgemeinen so kompliziert, daß wir selbst dann, wenn wir die einzelnen einfachen Teilvorgänge kennen, nicht sagen können, wie sich ein zusammengesetztes System verhalten wird.

Autor: Die Kenntnis der Teilvorgänge genügt tatsächlich nicht zur Beschreibung des Verhaltens der zusammengesetzten Systeme. Die Ursache dafür ist, daß auch zwischen den einzelnen Teilprozessen Wechselwirkungen auftreten, die wir noch gesondert untersuchen müssen. Mit den Untersuchungsmethoden für zusammengesetzte Systeme haben sich sehr viele ausgezeichnete Gelehrte befaßt. *Descartes* gibt z. B. den Rat: „Teile jedes Problem, das du untersuchst, in so viele Teile, wie es möglich und notwendig ist, um es leichter lösen zu können.“[1] Zugleich dürfen wir freilich nicht vergessen, „. . . besteht das Denken ebensosehr in der Zerlegung von Bewußtseinsgegenständen in ihre Elemente, wie in der Vereinigung zusammengehöriger Elemente zu einer Einheit? Ohne Analyse keine Synthese.“[2]
J. Neumann stellte bei der Untersuchung komplizierter Systeme unmißverständlich fest: „Es ist klar, daß das Problem, das sie repräsentieren, in Teile zerlegt werden muß.“ Aber er fügt auch hinzu: „Der zweite Teil des Problems ist, zu verstehen, wie sich diese Elemente zu einem Ganzen organisieren, und wie das Wirken des Ganzen mit Hilfe dieser Elemente beschrieben werden kann.“[3] Ich will dich nicht mit Zitaten überzeugen, über all dies werden wir nämlich noch sprechen, aber jetzt nimm soviel zur Kenntnis, daß auch die Analyse der vereinfachten Vorgänge einen technischen Sinn hat.

---

[1] *Descartes, R.:* Œuvres, Band VI, S. 18
[2] *Engels, F.:* Anti-Dühring. Berlin 1952, S. 49
[3] *Neumann, J.:* The General and Logical Theory of Automata. In: Collected works, Bd. V. Oxford 1963, S. 289

Leser: Das ist selbstverständlich, aber ich möchte nicht, daß wegen der erwähnten Beispiele unserem Gespräch ein Papiergeruch anhaftet und wir uns vom praktischen Leben entfernen.

Autor: Du nennst wieder die Praxis, als ob wir uns bisher über die Unsterblichkeit der Maikäfer unterhalten hätten. Nimm es mir nicht übel, aber darauf kann ich dir am besten mit den Worten von *Furnas*, dem Leiter einer industriellen Versuchsanstalt der USA, antworten. Er, der wirklich nicht als ein in einem Elfenbeinturm lebender Gelehrter angesehen werden kann, schreibt folgendes: „Einzelne Leiter der Industrieforschung brüsten sich oft damit, daß sie ‚Männer der Praxis' sind. Man muß aber bemerken, daß sich die Praxis nicht von der wissenschaftlichen Schulung trennen läßt . . ., da ja die Lösung der neuen Probleme nicht immer auf der Hand liegt; im entgegengesetzten Fall wären diese schon von jemandem gelöst worden."[1]

Leser: Ohne Zweifel hat *Furnas* recht, aber warum bist du gegen das Wort Praxis beinahe allergisch?

Autor: Weil ich nicht verstehe, warum man das Wort Praxis ständig betonen muß. Ich bin selbst ein Mann der Praxis, wäre auch gar nicht bereit, mich an der Entwicklung irgendeiner Naturwissenschaft zu beteiligen. Ich glaube aber, daß wir damit der Praxis nicht dienen, wenn wir dieses Wort dauernd betonen. Versuchen wir, weniger über die Praxis zu reden, aber mehr für sie zu tun. Das geht aber nicht ohne entsprechende theoretische und experimentelle Kenntnisse.

Leser: Meines Erachtens muß ein Fachmann, der sich wissenschaftlich betätigt, über eine andere Spezifik des Wissens verfügen, als der Fachmann, der in der Praxis tätig ist.

Autor: Das stimmt, aber nicht dadurch wird jemand ein Mann der Praxis, der von der Theorie nichts versteht und alles auf

---

[1] Research in Industry, its Organisation and Management. New York 1948, S. 3

Grund seines sogenannten technischen Gefühls erledigen will. Die Unwissenheit und Ungeschultheit unter der Maske des Praktischen zu verbergen, ist — gelinde gesagt — eine Irreführung. Soll ich aufrichtig sein? Das kann man nur im Ingenieurfach machen. Die Praxis des Schachmeisters ist das Schachspielen. Ist ein Schachmeister vorstellbar, der sich z. B. nicht mit der Eröffnungstheorie befaßt, noch dazu sehr intensiv? Was für ein Jurist ist der, der die neuesten Gesetze nicht kennt? Kann jemand Dirigent werden, der sich nicht mit der Musiktheorie befaßt?

Leser: Diese Beispiele sind nicht sehr treffend, da der Ingenieur in erster Linie Produktionsprobleme zu lösen hat.

Autor: Du weißt aber, daß auch die in der Produktion vorherrschenden Gesetzmäßigkeiten von den Naturwissenschaften aufgedeckt werden. Unsere Erkenntnis, der Erfolg und die Wirksamkeit unserer Arbeit werden gehemmt, wenn wir diese nicht kennen. Eben deshalb ist eine Kenntnis der Naturwissenschaften bei der auf dem entsprechenden Niveau verrichteten, also wirksamen wirtschaftlichen und erfolgreichen praktischen technischen Tätigkeit unentbehrlich.

Leser: Könnte man dieses Kennenlernen nicht nur auf das beschränken, was für unsere tägliche Arbeit unmittelbar nötig ist?

Autor: Wie würdest du jene Teile auswählen, welche deiner Meinung nach nötig sind, wenn du das Ganze nicht kennst? Und wenn du – auf eine wunderbare Eingebung hin – fähig wärest, diese auszuwählen, wie könntest du die herausgegriffenen Teile ohne das Übrige (das Vorhergegangene, die Ableitungen) verstehen? Wenn wir die Kenntnis einer Theorie – noch dazu einer, die die tägliche technische Praxis fördert und ihr hilft – zu unserem Ziel setzen, dann müssen wir uns nach dem System der Theorie richten und der von ihm vorgeschriebenen logischen Reihenfolge nachgehen.

Leser: Du hast recht, setze die Untersuchung der zwischen der speziellen Gesetzmäßigkeit der vereinfachten Erscheinungen und der allgemeinen Bilanzgleichung bestehenden Verbindung fort.

Autor: Als erstes betrachten wir eine rein thermische Wechselwirkung, bei der der Energiestrom nur infolge der Wirkung der Temperaturdifferenz auftritt und (außer der Entropie) keine andere extensive Größe strömt.

Leser: Eine solche Wechselwirkung besteht z. B. in einer von außen thermisch isolierten Stange, deren zwei Enden verschiedene Temperaturen aufweisen.

Autor: In der Technik begegnen wir sehr oft einer Wechselwirkung dieser Art, sie wird Wärmeleitung genannt. Die Ableitung der Grundgleichung ist sehr einfach. Der Gedankengang ist der folgende: Im Falle einer reinen Wärmeleitung besteht nur eine thermische Wechselwirkung, die strömende extensive Größe ist die innere Energie. Die dazugehörige intensive Größe ist die Temperatur. Das können wir aus der Tabelle auf S. 44 sofort feststellen. Wir setzen voraus, daß alle anderen intensiven Größen homogen verteilt sind, d. h. sämtliche Gradienten – außer der Temperatur – gleich Null sind. Setzen wir in die allgemeine Bilanzgleichung die Energiedichte e und die Temperatur T ein, so erhalten wie die Beziehung

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (\boldsymbol{L}_{el} \operatorname{grad} T) = 0 .$$

L_{et} ist der Leitwert, der angibt, wie groß bei einem Temperaturunterschied von einem Grad der Strom der inneren Energie ist.

Leser: Das ist die Wärmeleitfähigkeit λ?

Autor: Genau genommen deren negativer Wert, $L_{et} = -\lambda$. Im weiteren ziehen wir in Betracht, daß die innere Energie selbst auch von der Temperatur und der Massendichte abhängt:

$$e = f(T, \varrho).$$

Differenzieren wir unter Anwendung der Kettenregel nach der Zeit, so erhalten wir

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Wenn sich die Massendichte innerhalb der untersuchten Zeitspanne nicht verändert, also

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \text{ gilt,}$$

so ist das zweite Glied der rechten Seite Null. Die Ableitung der Energiedichte nach der Temperatur wird durch das Produkt der spezifischen Wärme und der Massendichte gegeben:

$$\frac{\partial e}{\partial T} = c_v \varrho .$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Bilanzgleichung ist also

$$c_v \varrho \frac{\partial T}{\partial t} .$$

Wir dividieren jedes Glied der Gleichung durch $c_v \varrho$ und erhalten

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{c_v \varrho} \operatorname{grad} T\right) = 0 .$$

Das ist die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung, die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung. Den Bruch $\lambda/c_v\varrho$ bezeichnet man abgekürzt mit a und nennt ihn Temperaturleitfähigkeit. Die Gleichung kann auf eine einfachere Form gebracht werden, wenn wir voraussetzen können, daß die Temperaturleitfähigkeit konstant, also nicht vom Ort abhängig ist. Dann kann a vor das Zeichen „div“ gezogen werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \operatorname{div} \operatorname{grad} T = 0 .$$

Die Operation div grad ist der Laplace-Operator, der mit dem Zeichen Δ symbolisiert wird:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} .$$

Ich glaube nicht, daß diese symbolische Abkürzung Probleme verursacht, da wir bereits den Nablaoperator kennen. Den Laplace-Operator kann man auch als Quadrat des Nablaoperators schreiben:

$$\Delta \equiv \nabla^2 .$$

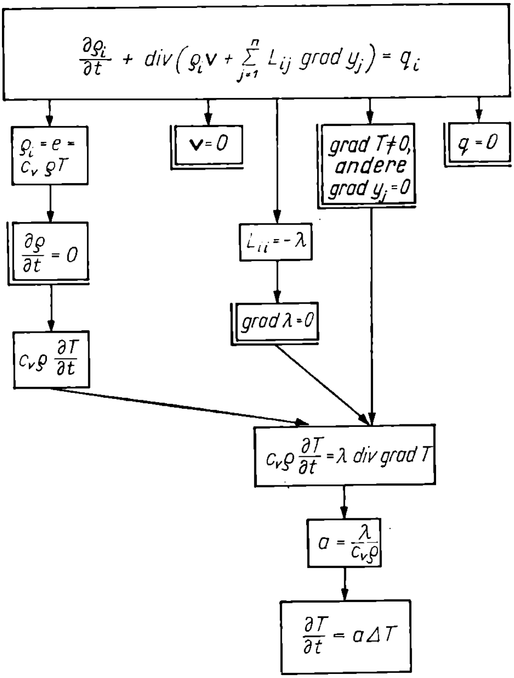
Der Nablaoperator ist ein Differentialoperator ersten Grades, der Laplace-Operator dagegen einer zweiten Grades. Mit seiner Hilfe kann man die Fouriersche Gleichung in vereinfachter Form schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \, \Delta T .$$

Leser: Nun können wir dem Zusammenhang zwischen den Bilanzgleichungen und der bekannten Fourierschen Wärmeleitungsgleichung Glauben schenken.

Autor: Aber es handelt sich eben um etwas mehr, wenn wir auf diesem Wege zur Fourierschen Gleichung gelangen — und nicht durch einfaches Memorieren —, dann wird für uns auch klar werden, wann wir sie verwenden können, nämlich nur dann, wenn die im Laufe der Ableitung gemachten Voraussetzungen auch auf die Erscheinung zutreffen, also:

— wenn außer der Temperatur alle intensiven Größen homogen verteilt sind;
— wenn sich die Massendichte während der untersuchten Zeitspanne nicht verändert;



— wenn der Wert der Temperaturleitfähigkeit vom Ort unabhängig ist;
— wenn innerhalb des Systems keine innere Energiequelle vorhanden ist;
— wenn der konvektive Energiestrom gegenüber dem nichtkonvektiven vernachlässigt werden kann.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, müssen wir eine Beziehung in anderer Form suchen.

Leser: Von einer solchen wird offenbar später die Rede sein. Jetzt müßten wir noch die Eindeutigkeitsbedingungen kennen, die aber nur dann angegeben werden können, wenn wir nicht von den Erscheinungstypen allgemein, sondern von einem konkreten Prozeß sprechen. Könnten wir nicht darüber etwas sagen?

Autor: Als Beispiel können wir eine Art Randbedingung aufschreiben, die sogenannte Biotsche Bedingung (mathematisch ist das die Neumannsche Randbedingung). Ihr physikalischer Inhalt ist, daß die vom System auf den Rand gelangende und die vom Rand in die Umgebung abfließende Energiestromdichte übereinstimmen. (Es ist verständlich, daß es am Rand selbst keine Energieanhäufung gibt.) Von den Diffusionsströmen wissen wir, daß sie der Differenz der charakteristischen intensiven Größe bzw. deren Gradient proportional sind. So ist die auf den Rand auftreffende Energiestromdichte:

$$(j_e)_p^{\leftarrow} = -(\lambda \operatorname{grad} T)_p \,.$$

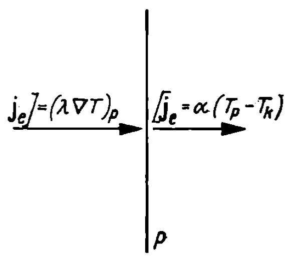
Der vom Rand in die Umgebung abfließende Energiestrom wird der Temperaturdifferenz zwischen Rand und Umgebung proportional sein, der Proportionalitätsfaktor α ist der Wärmeübergangskoeffizient:

$$(j_e)_p^{\rightarrow} = \alpha(T_p - T_k) \,.$$

Infolge der Übereinstimmung der beiden Stromdichten ist

$$-(\lambda \operatorname{grad} T)_p = \alpha(T_p - T_k) \,.$$

Das ist die erwähnte Biotsche Bedingung. Der Wärmeübergangskoeffizient α hängt sowohl vom Randmaterial als auch von der Form der Wechselwirkung zwischen Rand und Umgebung ab, d. h., er ist ebenfalls ein Leitwert, und zwar charakterisiert er die Isolierung. Je kleiner sein Zahlenwert ist, desto größer ist der Widerstand des Randes gegenüber einer Wechselwirkung mit der Umgebung.



Leser: Demnach bedeutet die vollkommene thermische Isolierung, daß $\alpha = 0$ ist.

Autor: Richtiger gesagt, müßte es heißen: „würde es“ bedeuten, da eine vollkommene Isolierung nur in der Theorie existiert. In der Praxis ist die Leitfähigkeit jedes Isolierstoffes endlich.

Darum kann im Falle eines sehr großen Gradienten der intensiven Größen der über die Isolierung strömende extensive Strom durchaus bedeutend sein. Elektrische Isolierungen können unter der Einwirkung von großen Spannungen durchschlagen. Der elektrische Strom wird so groß, daß die stofflichen Eigenschaften der Isolierung verändert werden. Aus dem Isolator wird ein Leiter. Bevor wir aber anfangen, uns mit anderen Wechselwirkungen zu befassen, überblicken wir kurz noch einmal, was wir eigentlich im Laufe der Ableitung gemacht haben.

Leser: Die Etappen waren folgende:

1. Wir haben festgestellt, daß es sich um eine reine thermische Wechselwirkung handelt.
2. Auf Grund dessen haben wir die charakteristischen extensiven und intensiven Größen ausgesucht und sie in die allgemeine Bilanzgleichung eingesetzt.
3. Die zeitliche Ableitung der Dichte der inneren Energie haben wir mittels der Kettenregel in die zeitliche Ableitung der Temperatur umgeformt. Dann kam anstelle von λ die Temperaturleitfähigkeit a. So haben wir die Fouriersche Gleichung erhalten.

Autor: Diese drei Schritte verfolgen wir in jedem weiteren Fall. Das wird uns ermöglichen, in den einzelnen konkreten Fällen nicht nur die den Vorgang beschreibende Gleichung aufzuschreiben, sondern auch zu fixieren, unter welchen Bedingungen die Gleichung gültig, d. h. anwendbar ist. Nehmen wir als nächstes die sog. reine Diffusion. Deren bekannte Grundgleichung ist die Ficksche Gleichung. Wieder gelangen wir unter Verwendung einiger Voraussetzungen von der allgemeinen Form bis zur Fickschen Gleichung. Verfolgen wir schrittweise die Voraussetzungen. Im Falle der reinen Diffusion ist nur eine chemische stoffliche Wechselwirkung vorhanden, also ist die Masse die einzige strömende extensive Eigenschaft. Die zugehörige intensive Größe ist das chemische Potential. Wir setzen voraus, daß alle weiteren intensiven Größen homogen verteilt sind. In die allgemeine Bilanzgleichung muß man also die Massendichte und das chemische Potential einsetzen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(L_{\varrho\mu} \operatorname{grad} \mu\right) = 0 \, .$$

Hier ist $L_{\varrho\mu}$ der Leitwert, der anzeigt, wie groß der Massenstrom bei einer Änderung des chemischen Potentials um eine Einheit wird.

Leser: Ist das der sog. Diffusionskoeffizient?

Autor: Das ist auch ein Diffusionskoeffizient, aber in der Technik verwenden wir diesen nicht. Ziehen wir in Betracht, daß das chemische Potential eine Funktion der Temperatur und der Dichte ist:

$$\mu = f(T, \varrho) \, .$$

Die Kettenregel ergibt auf grad μ angewandt:

$$\operatorname{grad} \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{\varrho} \operatorname{grad} T + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varrho}\right)_{T} \operatorname{grad} \varrho \, .$$

Wenn die Temperatur homogen verteilt ist, ist das erste Glied der rechten Seite gleich Null, weil dann

$$\operatorname{grad} T = 0$$

ist. Also setzen wir in die Formel für die Massenstromdichte ein

$$L_{\varrho\mu} \operatorname{grad} \mu = L_{\varrho\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \operatorname{grad} \varrho \, .$$

Der in der Technik gebrauchte Diffusionskoeffizient ist der negative Wert des Ausdrucks vor grad ϱ:

$$D = -\, L_{\varrho\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \, .$$

Oben eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \operatorname{div}\left(D \operatorname{grad} \varrho\right) = 0 \, .$$

Wenn wir noch annehmen, daß der Diffusionskoeffizient konstant, d. h. vom Ort unabhängig ist, dann kann man D vor das Zeichen div ziehen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = D \Delta T .$$

Diese damit abgeleitete Beziehung ist schon mit der Fickschen Gleichung identisch.

Leser: Das ging auch rasch. Auch in diesem Falle war nicht der formelle Zusammenhang zwischen der allgemeinen Form und der Fickschen Gleichung wesentlich, sondern die während der Ableitung gemachten Voraussetzungen. Die Ficksche Gleichung ist also nur für die Beschreibung solcher Diffusionserscheinungen geeignet, für die folgendes gilt:

- Außer dem chemischen Potential ist die Verteilung sämtlicher charakteristischer intensiver Größen homogen.
- Der Diffusionskoeffizient D ist vom Ort unabhängig.
- Innerhalb des Systems gibt es keine Massenquelle.
- Der konvektive Massenstrom kann im Vergleich zum nichtkonvektiven (Diffusionsstrom) vernachlässigt werden.

Dieses entspricht völlig dem Wärmeleitungsproblem.

Autor: Und zwar in solchem Maße, daß wir die Erscheinungen der Wärmeübertragung und der Diffusion als ähnliche Erscheinungen bezeichnen, wenn die Randbedingungen im Falle beider Erscheinungen ebenfalls entsprechend sind. Die Nusseltsche Bedingung bringt physikalisch zum Ausdruck, daß die vom System zum Rand fließende und die vom Rand in die Umgebung abfließende Massenstromdichte miteinander übereinstimmen. Ähnlich der bei der Wärmeleitung angeführten Biotschen Bedingung gilt hier

$$-(D \operatorname{grad} \varrho)_p = k(\varrho_p - \varrho_k) ,$$

wobei k der Massenübergangsfaktor ist, der vom Randmaterial von der Art der Wechselwirkung zwischen dem Rand und der Umgebung abhängt, also eine Kenngröße der Isolierung ist.

Leser: Jetzt bekomme ich schon direkt Lust, die Grundgleichungen der verschiedenen einfachen Erscheinungen aus der allgemeinen Bilanzgleichung abzuleiten.

Autor: Es sei nun eine solche Erscheinung behandelt, die von den bisherigen tatsächlich abweicht, z. B. der Straßenverkehr. Wir zitieren aus einem Artikel von Prof. *Turányi:* „Der Prozeß des Straßenverkehrs in Verkehrsgebieten, auf den Wegen, ist eine von kürzeren oder längeren Prozessen als Elemente zusammengesetzte komplizierte ... inhomogene Strömungserscheinung. ... Für die Definition der Verkehrsströmungen gebraucht man folgende Kenngrößen:

Strömungsgröße:

$$N = Q/t \text{ Fahrzeuge/h},$$

wobei Q die in der Zeit t eine Wegstrecke $\mathrm{d}x$ passierende Fahrzeugmenge ist.

Strömungsdichte:

$$s = \frac{\Sigma \mathrm{d}t}{t\mathrm{d}x},$$

wobei $\Sigma\,\mathrm{d}t$ die Summe der Zeitspannen $\mathrm{d}t$ ist, in der je ein Fahrzeug die Wegstrecke $\mathrm{d}x$ passiert. Die durchschnittliche Wegstrecken-Strömungsgeschwindigkeit beträgt:

$$v_s = \frac{N}{s} = \frac{\mathrm{d}x}{\Sigma \mathrm{d}t} Q\,.$$

Die Wegstrecken-Strömungsgeschwindigkeit ist also die gerichtete Durchschnittsgeschwindigkeit der einzelnen Fahrzeuge auf der Wegstrecke $\mathrm{d}x$.“[1]
Ohne uns in die Analyse des Vorganges zu weit zu vertiefen — das wäre eine so spezielle Aufgabe, die mein Wissen und meine

[1] *Turányi, J.:* Die Umrisse eines allgemeinen Verkehrsströmungsmodells. Közlekedéstudományi Szemle. Bd. XVIII 1968, S. 296 (ung.)

Vorkenntnisse weit übersteigen würde —, versuchen wir, die Grundgleichung aufzuschreiben.

Leser: Das ist eine interessante Aufgabe. Doch ein vollkommen unbekanntes Fachgebiet anzurühren — dazu habe ich nicht viel Mut. Schauen wir uns das aber trotzdem an. Die in der allgemeinen Bilanzgleichung auftretenden Größen sind: die Dichte der charakteristischen extensiven Größe, die charakteristischen intensiven Größen, die Strömungsgeschwindigkeit und die Quelle. Die Zahl der Kraftwagen ist offenbar eine extensive Größe. Demnach ist die auf die Einheit der Wegstrecke kommende Anzahl der Kraftfahrzeuge s die Dichte der entsprechenden extensiven Größen. Der nichtkonvektive Anteil der Stromdichte kommt nicht in Betracht. Der konvektive Teil ist das Produkt aus Dichte und Strömungsgeschwindigkeit. Im quellenlosen Fall kann die Gleichung etwa so aussehen:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\mathbf{v}_s) = 0\,,$$

bzw., da es sich um einen eindimensionalen Fall handelt, genügt es, statt div nur die partielle Ableitung nach x zu schreiben:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(s\mathbf{v}_s)}{\partial x} = 0\,.$$

Autor: Wenn wir auch in Betracht ziehen, daß das Produkt $s\mathbf{v}_s$ gleich N ist und — aus dem zitierten Artikel — die Lighthill-Witham-Gleichung aufschreiben:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0\,,$$

ist die Übereinstimmung augenscheinlich. Ich möchte nur noch hinzufügen, daß die Quellenglieder dann beachtet werden müssen, wenn auch sogenannte Anschluß- oder Abzweigungsströme vorhanden sind. In diesem Falle bedeutet die Anzahl der während der Zeiteinheit durch die Anschlüsse in die untersuchte Wegstrecke einfahrenden Kraftwagen die Quelle. Aber wenn wir schon dabei sind, kehren wir zum Massentransport zurück und untersuchen den Fall, in dem der Diffusionsstrom gegenüber dem konvektiven Strom zu vernachlässigen ist. Welche Gleichung beschreibt diese Erscheinung?

Leser: Das ist ja wirklich einfach. In der allgemeinen Bilanzgleichung schreiben wir anstelle der Dichte der extensiven Größe überall die Massendichte ϱ, das nichtkonvektive Glied kann als Null angenommen werden, also:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{w}) = 0 .$$

Wir erhalten unmittelbar die Kontinuitätsgleichung für die Masse.

Autor: Das stimmt, damit sind wir aber noch lange nicht fertig. In jedem solchen Fall, in dem man auch mit dem konvektiven Strom rechnen muß, müssen wir noch zwei extensive Eigenschaften, den Impuls und die kinetische Energie, in die Untersuchung einbeziehen. Bei konvektiven Strömen kann man also nie davon sprechen, daß nur eine einzige extensive Größe strömt.

Leser: Demnach müssen wir noch weitere Bilanzgleichungen aufstellen, für den Impuls und für die kinetische Energie. Auf Grund des bisherigen verursacht das kein Problem mehr, nur mußt du mir sagen, welche charakteristischen intensiven Größen wir berücksichtigen müssen und ob eine Quelle vorhanden ist. Das übrige ist beinahe selbstverständlich.

Autor: Leider ist das nicht so einfach, es gibt nämlich einen wesentlichen Unterschied zwischen den bisher behandelten extensiven Größen und dem Impuls, was die Ableitung in gewissem Maße kompliziert. Die Masse, die Energie, das Volumen, die Zahl der Fahrzeuge sind skalare Größen, der Impuls ist aber ein Vektor. Vor Aufstellung der Bilanzgleichung für den Impuls muß man noch einige Begriffe klären. Danach können wir aber die bisherige Ableitungsmethode schon beinahe automatisch anwenden. Das soll das Thema unseres nächsten Gespräches sein. Jetzt heben wir als Abschluß die wesentlichste Lehre aus der besprochenen Ableitung hervor.

Die Bilanzgleichung hat immer eine allgemeinere Gültigkeit als das sogenannte spezielle Gesetz. Darum können wir, von der Bilanzgleichung ausgehend, immer sagen, unter welchen Bedingungen die abgeleitete Beziehung gültig ist. Die im technischen Leben am häufigsten vorkommenden Zusammenhänge ergeben sich immer als Resultat einer Vernachlässigung. Wir vermeiden grundsätzliche Fehler, wenn wir diese Vernachlässigungen kennen und ihre Wirkung abschätzen können. Wir werden noch Gelegenheit haben, dies auch in komplizierteren Fällen beobachten zu können.

Sechstes Gespräch

Impulstransport[1]

„In der Welt existiert nichts
als die sich bewegende Materie,
und die sich bewegende Materie kann sich
nicht anders bewegen
als in Raum und Zeit.“

Lenin

[1] Dieser Abschnitt enthält einige Begriffe und Ableitungen, zu deren Verständnis Hochschulbildung nötig ist. Darum schlagen wir vor, daß Leser, die diese Ausbildung nicht haben, die Ableitungen nur durchsehen. Im weiteren wird es genügen, sich an die auf S. 124 erwähnten, mit den eindimensionalen Aufgaben zusammenhängenden Begriffe zu erinnern.

Leser: Unser voriges Gespräch hast du mit der Bemerkung beendet, daß das Aufschreiben der Impulsbilanz gar nicht so einfach ist, da der Impuls ein Vektor sei. Ich bin in der Vektorrechnung nicht sehr bewandert und befürchte, daß ich schwer (oder überhaupt nicht) verstehen werde, was du über die vektoriellen extensiven Größen sagen wirst.

Autor: Unterschätze dich nicht und glaube nicht, daß unsere Aufgabe zu kompliziert ist. Offenbar weißt du manches von den Vektoren, und wir brauchen nur einige Dinge aufzufrischen, die zum Verständnis der Aufgabe nötig sind.

Leser: Gut, soviel weiß ich noch, daß ein Vektor ein Zahlentripel ist, dessen einzelne Glieder die Komponenten des Vektors sind. Der Vektor hat so viele Dimensionen wie Komponenten. Einen Vektor können wir durch eine gerichtete Gerade von einer bestimmten Länge darstellen.

Autor: Noch ein Wort zum Skalar. Der Zahlenwert einer skalaren Größe ist von der Wahl des Bezugssystems unabhängig. (Darauf werden wir noch später zurückkommen. Das zwölfte Gespräch befaßt sich insgesamt mit der physikalischen Deutung des Skalars, des Vektors und des Tensors.) Wenn wir das Koordinatensystem — auf das wir die untersuchte Erscheinung beziehen — verschieben, drehen oder spiegeln, ändert sich der Wert einer skalaren Größe nicht. Demgegenüber bleiben die vektoriellen physikalischen Größen nur bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems unverändert, bei Drehen und Spiegeln ändern sich die Komponenten eines Vektors. Mit diesen Eigenschaften befassen wir uns aber momentan nicht. Vorerst beachten wir bloß, daß jede vektorielle extensive Größe, so z. B. der Impuls, drei Raumkomponenten hat:

$$\bar{\varrho} = \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\}.$$

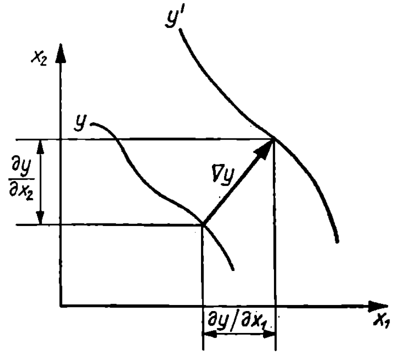
Für eine Komponente lautet die Bilanzgleichung

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_j = q_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

wobei ϱ_j die Komponente der vektoriellen extensiven Größe, $\boldsymbol{j}_j$ die der Strom- und q_j die der Quelldichte in Richtung x_j bezeichnet. Offenbar wird — wegen der Dreidimensionalität des Raumes — der Transport einer vektoriellen extensiven Größe durch drei solche Gleichungen beschrieben.

Leser: Das ist ja mit der für die skalaren Größen aufgestellten Bilanzgleichung vollkommen identisch, wo ist da das Problem?

Autor: Einen Moment! In der für die skalaren extensiven Größen aufgeschriebenen Gleichung haben wir die Inhomogenität der entsprechenden intensiven Größen, die selbst Skalare waren, durch ihre Gradienten angegeben, abgekürzt ∇y_i. Dieser Größe war die Diffusionsstromdichte proportional. Der hier vorkommende Differentialoperator, der Nablaoperator, ist ein Vektor mit folgenden Komponenten:



$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}.$$

Er mußte mit der skalaren intensiven Größe multipliziert werden. Als Resultat erhielten wir einen Vektor, dessen Komponenten

$$\nabla y_i = \left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \frac{\partial y_i}{\partial x_2}, \frac{\partial y_i}{\partial x_3}\right\}$$

sind. Ähnlich mußte man im Falle der konvektiven Stromdichte die Dichte ϱ_i der skalaren extensiven Größe mit der Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ multiplizieren, und so erhielten wir einen Vektor mit den Komponenten

$$\varrho_i \boldsymbol{w} = \{\varrho_i w_1, \varrho_i w_2, \varrho_i w_3\}.$$

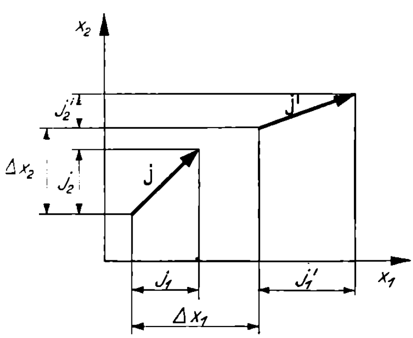
In der Bilanzgleichung für skalare extensive Größen sind die Ströme (Stromdichten) Vektoren. Die Stromdichten stehen unter dem Divergenzzeichen, das als Nablaoperator erklärbar ist. Das Produkt des Stromdichtevektors und des Nablavektors ist ein skalares Produkt, sein Resultat ist ein Skalar, dessen Größe (wenn j_1, j_2, j_3 die drei Komponenten des Stromdichtevektors sind) wie folgt dargestellt werden kann:

$$(\nabla, \boldsymbol{j}) = \operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3}.$$

Bei formal gebildeten extensiven Größen mit vektoriellem Charakter gehen wir ähnlich vor. Die zur vektoriellen extensiven Größe $\overline{\boldsymbol{\varrho}}$ gehörende charakteristische intensive Größe $\boldsymbol{y}$ ist auch selbst ein Vektor, der drei Komponenten hat:

$$\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

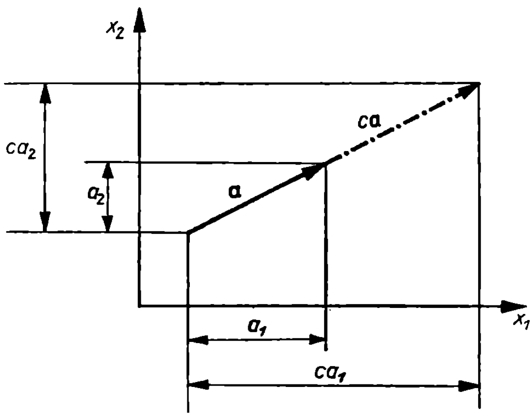
Mit ihnen kann man schon die zu der vektoriellen Größe gehörenden drei Skalargleichungen aufstellen. Statt dessen wählen wir aber die kürzere Schreibweise, die zusammenfassende Vektorgleichung. Dazu müssen wir uns einige Vektoroperatio-



nen ins Gedächtnis rufen, die Regeln der Multiplikation mit Vektoren. Von diesen ist die Multiplikation einer skalaren Größe mit einem Vektor die einfachste. Das Resultat ist selbst ein Vektor. Wenn die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{a}$ durch $\{a_1, a_2, a_3\}$ gegeben sind, dann hat der als Resultat der Multiplikation von $\boldsymbol{a}$ mit der skalaren Größe c erhaltene Vektor $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = c\boldsymbol{a},$$

folgende Komponenten: $\{ca_1, ca_2, ca_3\}$. Die Multiplikation mit dem Skalar verändert die Stellung des ursprünglichen Vektors nicht, sie dehnt ihn nur auf das c-fache. Skalare kann man also mit einem Vektor nur auf eine einzige Weise multiplizieren.



Demgegenüber können wir Vektor mit Vektor auf dreierlei Art multiplizieren (eigentlich nur auf zweierlei Art, da die dritte, das vektorielle Produkt, ein spezieller Fall der zweiten ist). Das skalare Produkt zweier Vektoren

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ oder $\boldsymbol{ab}$

ergibt eine skalare Größe, deren Wert die Summe der Produkte der einzelnen Komponenten ist. Wenn also $\{a_1, a_2, a_3\}$

die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{a}$ und $\{b_1, b_2, b_3\}$ die des Vektors $\boldsymbol{b}$ sind, dann erhalten wir

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \,.$$

Das dyadische Produkt (sein Zeichen ist ein kleiner Kreis zwischen den zwei Vektoren) zweier Vektoren ist ein Tensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix},$$

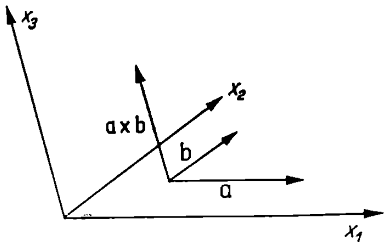
also eine Größe, die (im dreidimensionalen Raum) durch neun Bestimmungsstücke charakterisiert wird. Die Anordnung kann man sich leicht merken. In den waagerechten Zeilen folgen einander die entsprechenden Komponenten des ersten Vektors und in den senkrechten Spalten die des zweiten Vektors. Das vektorielle Produkt zweier Vektoren ist ein Vektor:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} \,.$$

Die einzelnen Komponenten des neuen Vektors sind:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \,, \\ d_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \,, \\ d_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \,. \end{aligned}$$

Der Tensor des dyadischen Produktes enthält die Elemente des skalaren und des vektoriellen Produktes. (Das erste ist die Summe der in der Hauptdiagonalen befindlichen Glieder, das letztere dagegen der antisymmetrische Teil des Tensors. Davon wird in diesem Gespräch noch die Rede sein.)



Leser: Können wir von einem Vektor nicht sagen, daß er ein dreikomponentiger Tensor ist?

Autor: Nein, ebensowenig kannst du von dem Skalar sagen, daß er ein einkomponentiger Vektor ist. Skalar, Vektor und Tensor unterscheiden sich nicht nur in der Zahl der zu ihrer Charakterisierung nötigen Bestimmungsstücke voneinander. Im dreidimensionalen Raum wird ein Tensor zweiter Stufe durch neun quadratisch angeordnete Bestimmungsstücke charakterisiert. Diese quadratisch geordnete Menge von Bestimmungsstücken heißt Matrix des Tensors. Ein Vektor wird durch drei Komponenten repräsentiert, die wir untereinander (oder nebeneinander) schreiben können. Diese Anordnung kann als Spalten- (oder Zeilen-) Matrix aufgefaßt werden. Ein Skalar läßt sich durch ein Bestimmungsstück definieren. Wenn wir die Zahl der zur Festlegung der einzelnen Größen nötigen Bestimmungsstücke als Potenzen von 3 ausdrücken, dann ist ihre Anzahl für den Skalar 3^0, für den Vektor 3^1 und für den Tensor zweiter Stufe 3^2. Daher heißt auch ein Skalar Tensor nullter, ein Vektor Tensor erster Stufe. Die Stufe bezieht sich jedoch nicht nur auf die Zahl der Komponenten. Die skalaren, vektoriellen und tensoriellen (zweiter Stufe) physikalischen Größen unterscheiden sich in speziellen Eigenschaften voneinander, derentwegen man z. B. keinen Skalar zu einer Vektorkomponente addieren kann.

Leser: Du könntest ausführlicher darüber sprechen!

Autor: Diese Eigenschaften — die also das Verhalten gegenüber Transformationen des Koordinatensystems widerspiegeln — werden wir in unserem zwölften Gespräch ausführlich erörtern. Jetzt schreiben wir die Bilanzgleichung für die extensiven Vektorgrößen auf. Zuerst nehmen wir nur eine Vektorkomponente, sagen wir die in Richtung x_1. Formal schreiben wir:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_1 \boldsymbol{w} + \boldsymbol{T}_1) = q_1 ,$$

wobei ϱ_1 die zur Dichte der extensiven Größe, q_1 wiederum die zur Quelle gehörende Komponente in Richtung x_1 ist. $\boldsymbol{T}_1$ bezeichnet die Komponente des Diffusionsstromes in Richtung x_1.

Leser: Der Vektor hat drei Komponenten, entspricht denn jeder je eine solche Bilanzgleichung?

Autor: Ja, und diese schreiben wir in gemeinsamer Form, in Form einer Vektorgleichung. Das erste Glied ist einfach:

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varrho}}}{\partial t}\,.$$

Von den Stromdichten schreiben wir zuerst die konvektive Stromdichte auf. Auch jetzt müssen wir das Produkt der Dichte der extensiven Größe und der Strömungsgeschwindigkeit aufschreiben, aber jetzt sind beide Vektoren. Welche Multiplikation müssen wir anwenden, eine skalare, eine vektorielle oder eine dyadische Multiplikation?

Leser: Ich glaube, das ist keine Frage zum Raten.

Autor: Natürlich nicht, aus dem bisherigen können wir aber schon auf die richtige Antwort schließen. Der zur skalaren extensiven Größe gehörende Strom ist ein Vektor. Mit anderen Worten, der zu einem Tensor nullter Stufe gehörende Strom ist ein Tensor erster Stufe.

Leser: Demnach ist der zu einer vektoriellen extensiven Größe (d. h. einem Tensor erster Stufe) gehörende Strom ein Tensor zweiter Stufe. Dann müssen wir aber ein dyadisches Produkt nehmen.

Autor: Richtig, das dyadische Produkt aus der Dichte der vektoriellen extensiven Größe und der Strömungsgeschwindigkeit ergibt den konvektiven Strom, was der tensoriellen Form des vorhin mit einer einzigen Komponente aufgeschriebenen Stromdichtevektors $\varrho_1 \cdot \boldsymbol{w}$ entspricht:

$$\boldsymbol{\varrho} \circ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \varrho_1 \boldsymbol{w} \\ \varrho_2 \boldsymbol{w} \\ \varrho_3 \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_1 w_1 & \varrho_1 w_2 & \varrho_1 w_3 \\ \varrho_2 w_1 & \varrho_2 w_2 & \varrho_2 w_3 \\ \varrho_3 w_1 & \varrho_3 w_2 & \varrho_3 w_3 \end{bmatrix}.$$

Leser: Jetzt können wir auch den Diffusionsstrom aufschreiben. Das wird die tensorielle Form von $\boldsymbol{T}_1$ sein. In Kenntnis der zur Wechselwirkung gehörenden charakteristischen intensiven Größe (die ebenfalls ein Vektor ist) kann mit ihrer Komponente y_1 die Komponente x_1 der Diffusionsstromdichte aufgeschrieben werden:

$$\boldsymbol{T}_1 = L \operatorname{grad} y_1 .$$

Der Tensor für alle drei Komponenten ergibt sich offenbar als dyadisches Produkt des Nablavektors und der charakteristischen intensiven Größe:

$$(\nabla \circ \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

multipliziert mit dem entsprechenden Leitwert.

Autor: Das ist vielleicht die einzige formale Abweichung vom Rechnen mit skalaren Größen. Die transponierte Form[1] dessen, was du aufgeschrieben hast, ist tatsächlich ein Maß der Inhomogenität der vektoriellen extensiven Größe, aber nur ein Maß. Es heißt Gradiententensor, und zur Unterscheidung vom Gradientenvektor ist seine Bezeichnung

$$\operatorname{Grad} \boldsymbol{y} = (\nabla \circ \boldsymbol{y})^{+} .$$

Eine andere Charakteristik des Maßes der Inhomogenität ist das Produkt des Nablavektors und der vektoriellen charakteristischen intensiven Größe, die — wie wir wissen — die Divergenz ist:

$$(\nabla, \boldsymbol{y}) \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{y} .$$

[1] Der transponierte Tensor wird aus dem ursprünglichen dadurch erhalten, daß man alle seine Elemente an der Hauptdiagonalen spiegelt. So wird das j-te Element der k-ten Zeile zum k-ten Element der j-ten Zeile des transponierten Tensors: $\{d_{kj}\}^{+} = \{d_{jk}\}$. Darüber sprechen wir noch in diesem Abschnitt

Die Summe dieser beiden (des dyadischen und des skalaren) Produkte, multipliziert mit den entsprechenden Leitwerten, ergibt die Diffusionsstromdichte.

Leser: Wir werden also einen Tensor und einen Skalar addieren, ist das möglich?

Autor: Natürlich nicht, die einzelnen Glieder der physikalischen Gleichungen müssen miteinander nicht nur dimensionsmäßig, sondern auch in ihrer Tensorstufe übereinstimmen. So kann man einen Skalar nicht zu einem Vektor oder Tensor bzw. einen Vektor nicht zu einem Tensor addieren. Das skalare Produkt des Nablaoperators mit einer vektoriellen intensiven Größe muß darum noch mit dem sogenannten Einheitstensor multipliziert werden. Das ist ein Tensor, in dessen Matrix der Wert der Elemente der Hauptdiagonale 1 und der der übrigen Elemente 0 ist:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eine skalare Größe, mit dem Einheitstensor multipliziert, ergibt einen Tensor, dessen Matrix außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält:

$$c\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

So besteht also der Tensor der Diffusionsstromdichte aus zwei Gliedern:

$$\boldsymbol{J} = L_1 \operatorname{Grad} \boldsymbol{y} + L_2 \operatorname{div} \boldsymbol{y}\boldsymbol{I},$$

wobei L_1 und L_2 die entsprechenden Leitwerte sind. Es war schon die Rede davon, daß das dyadische Produkt aus dem Nablaoperator und einem Vektor ebenfalls Gradient (Gradiententensor) genannt wird, seine Bezeichnung ist Grad. Ähnlich hat die auf einen Tensor angewandte Divergenzoperation das besondere Zeichen Div. Jetzt stellen wir die Bilanzgleichung für die allgemeine Form einer vektoriellen extensiven Größe auf:

$$\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\bar{\varrho} \circ \boldsymbol{w} + L_1 \operatorname{Grad} \boldsymbol{y} + L_2 \operatorname{div} \boldsymbol{y} \boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{q}\,,$$

die der für eine skalare Größe aufgeschriebenen Gleichung offensichtlich ähnelt.

Leser: Auf der linken Seite der Gleichung ist jedes Glied ein Vektor, damit ist selbstverständlich auch die Quelldichte $\boldsymbol{q}$ ein Vektor. Ich erkenne allerdings nicht die Grundgleichung der Hydrodynamik, die Navier-Stokessche Gleichung, in dieser Formel. Jetzt müssen wir offenbar einen längeren Weg beschreiten als bei der Ableitung der Fourierschen Gleichung bzw. dem Fickschen Gesetz.

Autor: Wir werden gleich sehen, der Impuls ist $m \cdot \boldsymbol{w}$, seine Dichte $\varrho \cdot \boldsymbol{w}$. Das müssen wir überall einsetzen, wo der Dichtevektor $\boldsymbol{\varrho}$ vorkommt.

Leser: Was geschieht aber mit der intensiven Größe, überhaupt, wie können wir von den in der Tabelle nicht vorkommenden Größen feststellen, welche charakteristische intensive Größe zu welcher charakteristischen extensiven Größe gehört?

Autor: Dazu kehren wir für kurze Zeit zur Grundgleichung der Thermodynamik zurück:

$$W = TS - pV + \mu m \ldots = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\,.$$

Differenzieren wir die beiden Seiten der Gleichung nach irgendeiner extensiven Größe, etwa der Entropie oder dem Volumen. Es ist leicht einzusehen, daß in diesem Fall jedes Glied auf der rechten Seite Null ist, ausgenommen jenes, in dem die betreffende extensive Größe vorkommt.

$$\frac{\partial W}{\partial S} = T\,, \quad \frac{\partial W}{\partial V} = -p \quad \text{usw.}$$

So ergibt also die Ableitung der Energie nach einer bestimmten extensiven Größe die zugehörige intensive Größe, allgemein

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i \, .$$

Wenn wir demnach die zu einer Wechselwirkung gehörende Energiegleichung und die entsprechende extensive Größe kennen, dann erhalten wir durch Differenzieren die charakteristische intensive Größe. Betrachten wir den Impuls. Im Falle der makroskopischen Strömung kommt zum Ausdruck für die innere Energie noch die kinetische Energie $\frac{1}{2} mw^2$ hinzu:

$$W = TS - pV + \mu m + \frac{1}{2} mw^2 \, .$$

Wir formen das ein wenig um. Zum letzten Glied der rechten Seite addieren wir, von dem vorletzten dagegen subtrahieren wir $\frac{1}{2} mw^2$:

$$W = TS - pV + \left(\mu - \frac{1}{2} w^2\right) m + mw^2 \, .$$

Den in der Klammer stehenden Teil bezeichnen wir mit μ^*:

$$\mu^* = \mu - \frac{1}{2} w^2 .$$

Das ist das sogenannte scheinbare chemische Potential. Das Glied mw^2 schreiben wir in der Form $m\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}$. Damit ist

$$W = TS - pV + \mu^* m + m\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Differenzieren wir die Energie nach dem Impuls $m\boldsymbol{w}$, so ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial (m\boldsymbol{w})} = \boldsymbol{w} \, .$$

Die zum Impuls gehörende charakteristische intensive Größe ist die Strömungsgeschwindigkeit. (Man muß auch berücksichtigen, daß die makroskopische Strömung den Ruhewert des chemischen Potentials verändert.)

Leser: Die Diffusionsstromdichte des Impulses kann demnach in der Form

$$L_1 \operatorname{Grad} \boldsymbol{w} + L_2 \operatorname{div} \boldsymbol{w}\boldsymbol{I}$$

geschrieben werden.

Autor: Die Formel müssen wir noch durch ein Glied, nämlich die statische isotrope Spannung ergänzen. Erlasse mir die Ableitung, im zehnten Gespräch werden wir darauf noch zurückkommen. Hier bemerke ich nur, daß zum nichtkonvektiven (konduktiven) Impulstransport noch eine Kraft gehört, die mit der Inhomogenität des Deformationsvektors $\boldsymbol{S}$ in Verbindung steht. Dieser ist die andere charakteristische intensive Größe des Impulstransportes und kann auf zweierlei Art mit dem Nablavektor multipliziert werden. Grad $\boldsymbol{S}$ ist gegenüber Grad $\boldsymbol{w}$ im allgemeinen zu vernachlässigen, div $\boldsymbol{S} = -p$ (der negative Wert des Druckes) muß aber berücksichtigt werden. So ist die gesamte nichtkonvektive Impulsstromdichte:

$$\boldsymbol{T} = 2\eta \operatorname{Grad} \boldsymbol{w} + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{w}\boldsymbol{I} - p\boldsymbol{I}.$$

Die nichtkonvektive Impulsstromdichte nennt man auch Spannungstensor. In den Ausdruck haben wir gleich die entsprechenden Leitwerte hineingeschrieben:

$$L_1 = -2\eta, \quad L_2 = -\lambda.$$

Leser: Von den Leitwerten sagten wir früher, daß sie solche Zahlen sind, die angeben, welchen extensiven Strom die Änderung der charakteristischen intensiven Größe um jeweils eine Einheit auslöst. Im gegebenen Fall ergibt z. B. 2η den Impulsstrom, der unter der Wirkung des Geschwindigkeitsgradienten Eins entsteht. Das wiederum ist — nach der Definition, wenn ich mich recht erinnere — eben der Koeffizient der Viskosität, und zwar der dynamische Viskositätskoeffizient. Aber warum steht hier der Faktor 2?

Autor: Nur einfachheitshalber, später kürzt er sich sowieso heraus. Grad $\boldsymbol{w}$ ist nämlich, wie jeder Tensor, in die Summe von zwei Tensoren zerlegbar. Rekapitulieren wir auch das kurz.

Es sei irgendein $\boldsymbol{A}$ unser Tensor:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Bei Spiegelung der Elemente des Tensors an der Hauptdiagonalen vertauschen sich die Zeilen und Spalten, und wir erhalten die Transponierte des Tensors:

$$\boldsymbol{A}^+ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Addieren wir zum Tensor $\boldsymbol{A}$ die Hälfte seiner Transponierten und subtrahieren wir sie gleich wieder, dann bleibt sein Wert offenbar unverändert:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^+ - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^+ =$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^+) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^+) = \boldsymbol{A}^s + \boldsymbol{A}^a.$$

$\boldsymbol{A}$ kann man also als die Summe der Tensoren $\boldsymbol{A}^s$ und $\boldsymbol{A}^a$ angeben. Diese haben spezielle Eigenschaften. Schreiben wir ihre Komponenten auf, so müssen wir wissen, daß man zwei Tensoren addiert, in dem man ihre entsprechenden Komponenten addiert:

$$\boldsymbol{A}^s = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^+) = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} & a_{13} + a_{31} \\ a_{12} + a_{21} & 2a_{22} & a_{23} + a_{32} \\ a_{13} + a_{31} & a_{23} + a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}.$$

Es ist ersichtlich, daß dieser Tensor in der Hauptdiagonalen symmetrisch ist. Das Element in der k-ten Spalte der i-ten Zeile ist dasselbe wie das in der i-ten Spalte der k-ten Zeile:

$$\{a_{ik}^s\} = \{a_{ki}^s\}.$$

Ein solcher Tensor wird symmetrischer Tensor genannt. Der Tensor $\boldsymbol{A}^a$ ist dagegen unmittelbar übersehbar:

$$\boldsymbol{A}^a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^+) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

also ein Tensor, der bez. der Hauptdiagonalen antisymmetrisch ist, d. h., das Element in der k-ten Spalte der i-ten Zeile ist das (-1)fache des in der i-ten Spalte der k-ten Zeile:

$$\{a_{ik}^a\} = -\{a_{ki}^a\}.$$

Ein solcher Tensor heißt antisymmetrisch. Also kann man von Grad $\boldsymbol{w}$ sagen, daß er unbedingt symmetrisch[1], also sein antisymmetrischer Teil gleich 0 ist:

$$\text{Grad}\,\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}(\text{Grad}\,\boldsymbol{w})^s + \frac{1}{2}(\text{Grad}\,\boldsymbol{w})^a = \frac{1}{2}(\text{Grad}\,\boldsymbol{w})_s.$$

Leser: Also der im Spannungstensor vor η stehende Faktor 2 und der vor dem symmetrischen Teil von Grad $\boldsymbol{w}$ stehende Faktor 1/2 gleichen sich aus. Die nichtkonvektive Impulsstromdichte, d. h. der Spannungstensor, kann in der Form

$$\boldsymbol{T} = \eta\,(\text{Grad}\,\boldsymbol{w})^s + \lambda\,\text{div}\,\boldsymbol{w}\boldsymbol{I} - p\boldsymbol{I}$$

geschrieben werden. Jetzt kennen wir schon jedes Glied der linken Seite der Bilanzgleichung. Aber was wird mit der Quelldichte? Der Impuls ist eine konstante extensive Größe, hat er denn keine Quelle?

Autor: Das bezieht sich nur auf ein geschlossenes System, also auf eines, das gegenüber dem Impuls isoliert ist. Die Impulsänderung in der Zeiteinheit ist die Kraft. Nur dann kann die Quelle des Impulses Null sein, wenn das System keiner äußeren

---

[1] Die Symmetrie des Spannungstensors ist die Folge des Drehimpulserhaltungssatzes. Die Symmetrie besagt physikalisch, daß der Strom der x-Komponente des Impulses (Vektor!) in y-Richtung mit dem Strom der y-Komponente des Impulses in x-Richtung gleich ist

Kraftwirkung ausgesetzt ist. Wenn aber das untersuchte System sich in einem Kraftfeld befindet, so wächst der Impuls des Mediums auf Kosten des Kraftfeldimpulses. (Die Impulserhaltung ist nur für das Kraftfeld zusammen mit dem untersuchten System gültig.)

Leser: Dann muß unbedingt ein Quellenglied vorhanden sein, denn ich kenne keine Wand, die das System gegen das Gravitationskraftfeld isolieren könnte.

Autor: Wenn nur das Gravitationskraftfeld auf das System wirkt, dann ist die Quelldichte des Impulses $\varrho \boldsymbol{g}$. (Es ist aber auch eine durch andere Kraftfelder verursachte Impulsquelle möglich!) Die Bilanzgleichung des Impulses wird also folgende Form haben (den Spannungstensor auf die rechte Seite gebracht):

$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathrm{Div}(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}) = \varrho \boldsymbol{g} + \mathrm{Div}[\eta(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{w})^s + \lambda \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{w} \boldsymbol{I}].$$

Leser: Wäre das das Endresultat der Ableitung? Ich erkenne die Navier-Stokessche Gleichung noch immer nicht.

Autor: Aber das ist sie schon im wesentlichen. Damit wir zu einer bekannteren Form gelangen, müssen wir einige Änderungen vornehmen. Wir wissen, daß

$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{w} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}$$

gilt und mit der formalen Verwendung des Nablavektors[1]

$$\mathrm{Div}\,(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}) = \nabla\,(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}) =$$
$$= \boldsymbol{w}\,(\nabla, \varrho \boldsymbol{w}) \times \varrho\,(\boldsymbol{w}, \nabla)\boldsymbol{w}\,.$$

[1] Diese Gleichung wird für den in der Vektorrechnung weniger bewanderten Leser leichter verständlich, wenn er eine (die i-te) Komponente der Vektors Div $(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w})$ betrachtet:

$$\mathrm{Div}\,(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w})_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varrho\, w_i w_k}{\partial x_k} = w_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varrho\, w_k}{\partial x_k} + \varrho \sum_{k=1}^{3} \left(w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) w_i\,.$$

Vektoriell ist das mit der obigen Beziehung identisch

Die linke Seite der Gleichung kann also in der Form

$$\boldsymbol{w}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\nabla, \varrho \boldsymbol{w})\right] + \varrho\left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{w}, \nabla)\, \boldsymbol{w}\right]$$

geschrieben werden. Die Massentransportgleichung lautete:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = q + D \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varrho)\,.$$

Wenn keine Massenquelle und kein Diffusionsstrom vorhanden sind (bzw. diese gegenüber dem konvektiven Massenstrom zu vernachlässigen sind), dann gilt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = 0\,,$$

darum fällt der in der Impulstransportgleichung auf der linken Seite in der ersten eckigen Klammer stehende Teil fort wegen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\nabla, \varrho \boldsymbol{w}) \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = 0\,.$$

Auf der rechten Seite bilden wir die Divergenz des Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \boldsymbol{T} &= \nabla\,[\eta(\nabla \circ \boldsymbol{w})^s] + \nabla[\lambda(\nabla, \boldsymbol{w})\boldsymbol{I}] - \nabla[p\boldsymbol{I}] = \\ &= \eta \Delta \boldsymbol{w} + (\eta + \lambda)\, \nabla(\nabla, \boldsymbol{w}) - \nabla p\,. \end{aligned}$$

Im Falle divergenzloser Strömung (d. h. div $\boldsymbol{w} = 0$) ist das zweite Glied Null, also

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{T} = \eta \Delta \boldsymbol{w} - \operatorname{grad} p.$$

Bei Untersuchung eines Teilchens, das einer gegebenen Stromlinie folgt, steht auf der linken Seite der Impulsbilanzgleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{w}, \nabla)\, \boldsymbol{w} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Daraus folgt

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{g} + \eta \Delta\, \boldsymbol{w} - \operatorname{grad} p\,,$$

was auch der Form nach der bekannten Navier-Stokesschen Gleichung entspricht.

Leser: Von dieser Ableitung kannst du wirklich nicht behaupten, daß sie einfach war. Allerdings haben wir von einer bekannten Gleichung wieder bewiesen, daß sie eine Bilanzgleichung ist. Zwischendurch haben wir aber einige Bedingungen gestellt, die jetzt zusammengefaßt werden sollten.

Autor: Die eine Voraussetzung ist, daß es keine Massenquelle und keinen nichtkonvektiven Massenstrom (Diffusion) gibt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = 0\,,$$

die zweite, daß die Strömung divergenzfrei ist:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0.$$

Diese beiden sind zusammen nur dann gültig, wenn das Medium inkompressibel, d. h. das vollständige zeitliche Differential der Dichte gleich Null ist. Dann muß nämlich wegen

$$\operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}, \operatorname{grad} \varrho)$$

im Falle $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$ auch

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\boldsymbol{w}, \operatorname{grad} \varrho) = 0$$

gelten, was mit der Bedingung für Inkompressibilität

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0$$

gleichbedeutend ist. Insgesamt hatten wir nur diese Bedingung benutzt.

Leser: Demnach ist z. B. bei chemischen Reaktionen, wo die Masse eine Quelle hat, die Navier-Stokessche Gleichung nicht brauchbar?

Autor: Doch, wenn wir die wegen $q \neq 0$ hinzukommenden Glieder beachten. Darauf kommen wir noch im Zusammenhang mit den chemischen Reaktionen zurück.

Leser: Es ist leicht einzusehen, daß die abgeleitete Gleichung äquivalent der Form[1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{w}^2}{2} - \boldsymbol{w} \operatorname{rot} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} + \nu \Delta \boldsymbol{w} - \operatorname{grad} p$$

ist. Haben wir jetzt mit dem Impulstransport weiter nichts zu tun, können wir zu anderen Wechselwirkungen übergehen?

Autor: Noch nicht, mit dem Impuls strömt nämlich auch kinetische Energie, und so gehört deren Bilanzgleichung auch zur Charakterisierung des Prozesses.

Leser: Zum Glück ist die kinetische Energie eine skalare extensive Größe, und so werden wir mit ihr hoffentlich früher fertig als mit dem Impuls.

Autor: Wir gehen auch nicht bis zur allgemeinen Bilanzgleichung zurück. Wir wissen nämlich, daß die kinetische Energie die Hälfte des skalaren Produktes von Impuls und Geschwindigkeit ist. Wenn wir jedes Glied der Bilanzgleichung skalar mit $\boldsymbol{w}$ multiplizieren, dann erhalten wir unmittelbar die Bilanzgleichung der kinetischen Energie. Nehmen wir gleich die von dir angegebene Form (auf der rechten Seite lassen wir die Be-

---

[1] Ähnlich wie in der Fußnote auf S. 117 betrachten wir auch hier eine Komponente der vektoriellen Gleichung. Die i-te Komponente von $(\boldsymbol{w}, \nabla)\boldsymbol{w}$ ist:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(w_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) w_i \,.$$

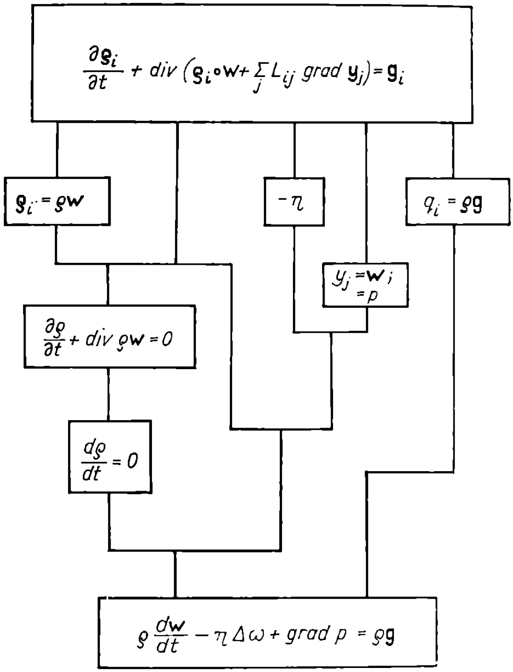
Wir führen die folgende identische Umformung durch:

$$w_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} = w_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} - w_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + w_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} =$$
$$= w_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} - w_k \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right).$$

Das erste Glied der rechten Seite ist $\frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial x_i}$. Vektoriell erhalten wir die aufgeschriebene Beziehung zeichnung Div $\boldsymbol{T}$):

$$\left(\varrho \boldsymbol{w}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \left(\varrho \boldsymbol{w}, \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{w}^2}{2}\right) - [\varrho \boldsymbol{w}, (\boldsymbol{w} \operatorname{rot} \boldsymbol{w})] =$$
$$= (\varrho \boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{w}, \operatorname{Div} \boldsymbol{T}) .$$

Das dritte Glied ist ein Skalarprodukt von zwei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren, das immer Null ist. Addieren



wir zu dieser Gleichung (ohne die Quelle und die Diffusion zu beachten) die Bilanzgleichung der Masse und multiplizieren wir jedes Glied mit $\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2$, so folgt

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2 \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = 0 .$$

Beachten wir die folgenden Identitäten:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\left(\varrho\boldsymbol{w},\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho\boldsymbol{w}^2\right),$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\operatorname{div}\varrho\boldsymbol{w}+\left(\varrho\boldsymbol{w},\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{w}^2}{2}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\varrho\boldsymbol{w}^2\boldsymbol{w}\right)$$

bzw.[1]

$$(\boldsymbol{w},\operatorname{Div}\boldsymbol{T})=\operatorname{div}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{w})-\boldsymbol{T}:(\nabla\circ\boldsymbol{w}).$$

So ist die Bilanzgleichung der kinetischen Energie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho\boldsymbol{w}^2\right)+\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\varrho\boldsymbol{w}^2\boldsymbol{w}-\boldsymbol{T},\boldsymbol{w}\right)=$$
$$=(\varrho\boldsymbol{w},\boldsymbol{g})-\boldsymbol{T}=(\nabla\circ\boldsymbol{w}).$$

Die Gleichung können wir auch unmittelbar aus der allgemeinen Bilanzgleichung erhalten, wenn wir wissen, daß der Diffusionsstrom der kinetischen Energie $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{w})$, seine Quelle die vom äußeren Kraftfeld verrichtete Arbeit $(\varrho\boldsymbol{w},\boldsymbol{g})$ ist, und

[1] Das skalare Produkt zweier Tensoren bezeichnen wir mit einem Doppelpunkt. Sein Ergebnis ist ein Skalar. Wenn die A_{ik} Komponenten des Tensors $\boldsymbol{A}$, B_{ik} die des Tensors $\boldsymbol{B}$ sind, dann ist das skalare Produkt

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}A_{ik}B_{ki}.$$

Die folgende Identität ist leicht einzusehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T_{ik}w_i)=T_{ik}\frac{\partial w_i}{\partial x_k}+w_i\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}.$$

Wenn wir diese über alle i und k summieren, dann erhalten wir die gesuchte Beziehung:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}:(\nabla\circ\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w},\operatorname{Div}\boldsymbol{T}.$$

In Worten, die Divergenz des skalaren Produktes des Tensors $\boldsymbol{T}$ und des Vektors $\boldsymbol{w}$ ist gleich der Summe der skalaren Produkte von $\boldsymbol{T}$ und Grad $\boldsymbol{w}$ plus dem Vektorprodukt aus $\boldsymbol{w}$ und Div $\boldsymbol{T}$

$-\boldsymbol{T} : (\nabla \circ \boldsymbol{w})$, die sogenannte Dissipation. Das ist jener Teil der kinetischen Energie, der sich in innere Energie umwandelt. (In der Gleichung der inneren Energie erscheint dasselbe Glied als positive Quelle.) Im Falle einer isotropen Strömung besteht der Spannungstensor im reibungsfreien Medium bloß aus der isotropen Spannung (dem negativen Druck), $\boldsymbol{T} = -p$, und die Diffusionsstromdichte ist

$$-(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{w}) = +p\boldsymbol{w}\,,$$

die Dissipation dagegen

$$-(\boldsymbol{T} : \nabla \circ \boldsymbol{w}) = +p \operatorname{div} \boldsymbol{w}\,,$$

was im Falle der divergenzlosen Strömung gleich Null ist. Die Bilanzgleichung der kinetischen Energie kann selbst in dem einfachen Fall nicht unmittelbar integriert werden, wenn die Strömung durch ein Potential beschreibbar ist, $\boldsymbol{w} = \nabla\varphi$, auch eine potentielle Energie vorhanden ist, $\boldsymbol{g} = -\nabla U$, und der Druck nur eine Funktion der Dichte ist (isotherme Strömung),

$$p = p(\varrho),$$

wobei φ das Geschwindigkeitspotential und U das Potential der Masseeinheit bedeutet. Eine integrierbare Form erhalten wir, indem wir aus jedem Glied nacheinander den Faktor $\varrho\boldsymbol{w}$ herausheben, was zulässig ist, wenn wir die Identitäten

$$\operatorname{div}(p\boldsymbol{w}) - p(\operatorname{div}\boldsymbol{w}) = \left(\varrho\boldsymbol{w}, \frac{\nabla p}{\varrho}\right) = (\varrho\boldsymbol{w}, \nabla P)$$

$$\text{mit } P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho}$$

benutzen. Nach Durchführung der Rechenoperationen erhalten wir die Energiegleichung der Potentialströmung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + P + U = P_0 = \text{konstant}\,.$$

Im stationären Fall ist das die allgemein bekannte Bernoullische Gleichung:

$$\frac{\boldsymbol{w}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + gh = \text{konstant}\,.$$

Leser: Diese Formel kennt jeder Ingenieur. Damit rechnet man z. B. aus der mit verschiedenen Meßinstrumenten erzeugten Druckverminderung Δp die Strömungsgeschwindigkeit.

Autor: Die Gleichung hat zahlreiche Verwendungsmöglickeiten. Noch eine Bemerkung, wenn auch die konvektive Strömung einer extensiven Größe beachtet werden muß, dann braucht man außer der sich auf die gegebene extensive Größe beziehenden Gleichung noch weitere vier Gleichungen: Die Bilanzgleichung der kinetischen Energie, die Bilanzgleichung des Impulses, die (da sie eine Vektorgleichung ist) drei skalaren Gleichungen gleichwertig ist.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} + \nu \Delta \boldsymbol{w} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p$$

kann nämlich auch als Dreikomponentengleichung aufgeschrieben werden. In kartesischen Koordinaten sind die einzelnen Koordinatenrichtungen mit dem Index i voneinander ($i = 1, 2, 3$) unterschieden:

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}t} = g_i + \nu \Delta w_i - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i + \nu \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Wenn die Strömung eindimensional ist, so kann die Navier-Stokessche Gleichung einfach abgeleitet werden. (Die Ableitung ist ganz speziell, aber wer in der Vektorrechnung weniger bewandert ist, versteht vielleicht den vorigen Gedankengang besser.) Für den eindimensionalen Fall ist die Form der Navier-Stokesschen Gleichung die folgende:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Schreiben wir darunter die eindimensionale Form der allgemeinen Bilanzgleichung, anstelle der Dichte die Impulsdichte ϱ_w, anstelle des Leitwerts die dynamische Viskosität η, anstelle der charakteristischen intensiven Größe die Geschwindigkeit w. Ziehen wir noch in Betracht, daß der Diffusionsstrom des Impulses um den statischen Druck ergänzt werden muß. Dann wird

$$\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\varrho w w) - \eta \frac{\partial w}{\partial x} + p\right] = \varrho g ,$$

im eindimensionalen Fall bezeichnen nämlich die Operationen div und grad Differentiation nach x. Die Ausführung der Differentiation ergibt:

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho w \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial \varrho w}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho w}{\partial x}\right) - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varrho g .$$

Wenn kein nichtkonvektiver Massenstrom und keine Massenquelle vorhanden ist, folgt aus der Bilanzgleichung der Masse:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho w}{\partial x} = 0 .$$

Die vollständige zeitliche Ableitung der von Ort und Zeit abhängigen Geschwindigkeit setzt sich aus zwei Gliedern zusammen:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} ,$$

da $\partial x/\partial t = w$ ist. Danach wird unsere Gleichung

$$\varrho \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varrho g ,$$

die nach der Division durch ϱ mit der eindimensionalen Navier-Stokesschen Gleichung übereinstimmt. (Ähnlich erhalten wir auch die eindimensionale Form der Energiegleichung.)

Leser: Diese Ableitung war auch gut, um die angewandten Voraussetzungen in unserem Gedächtnis wieder aufzufrischen.

Autor: Wir haben festgestellt, daß die allgemeine Bilanzgleichung auch für vektorielle extensive Größen gültig ist. Mit dem Auffrischen einiger Regeln der Vektorrechnung haben wir die Bilanzgleichungen des Impulses und der kinetischen Energie abgeleitet. Dabei hatten wir folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Nichtkonvektiver Massenstrom (Diffusion) und nichtkonvektive Massenquelle sind nicht vorhanden bzw. können vernachlässigt werden.
2. Das strömende Medium ist inkompressibel. Das genügte, um die bekannte Form der Navier-Stokesschen Gleichung zu erhalten. Zur Ableitung der Bernoullischen Gleichung waren aber noch weitere Voraussetzungen nötig.
3. Es gibt eine potentielle Energie (das äußere Kraftfeld ist ein Potentialfeld).
4. Der Druck ist nur eine Funktion der Temperatur, die Strömung ist isothermisch.

Leser: Können wir damit nicht das aerodynamische Thema abschließen?

Autor: Noch nicht, wir müssen auch über die Turbulenz sprechen, das werden wir aber auf unser nächstes Gespräch verschieben.

Siebentes Gespräch

Turbulenz

„Große Wirbel enthalten kleine Wirbel,
die ihre Geschwindigkeit weitertragen;
kleine Wirbel enthalten
noch kleinere Wirbel
und so weiter bis zur Viskosität.“

Richardson

Leser: Ich habe unser voriges Gespräch noch einmal gelesen und halte nun die Ableitungen schon für wesentlich einfacher, aber ich müßte lügen, wollte ich behaupten, diese auswendig zu können.

Autor: Ich glaube, das ist auch nicht notwendig. Wir müssen aber wissen, unter welchen Bedingungen die so oft gebrauchten Beziehungen anzuwenden sind. Darum muß man die komplizierter erscheinenden Ableitungen wenigstens kennenlernen.

Leser: Ist das eine geistige Vorbereitung für das jetzige Gespräch?

Autor: Davon ist keine Rede, die mathematischen Schwierigkeiten haben wir schon überwunden. Was jetzt kommt, ist viel einfacher, obzwar die Erscheinung selbst viel komplizierter ist.

Leser: Was ist das wieder für ein Paradoxon, wie kann man denn eine kompliziertere Erscheinung einfacher erörtern?

Autor: Wir befassen uns nicht ausführlich mit dem Problem, einerseits, weil dazu die genaue Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung notwendig ist, andererseits hat keines unserer Gespräche das Ziel, eine Schilderung im Stil eines Lehrbuches oder einer Monographie zu geben. Das wäre bei so vielen Fachgebieten geradezu absurd. In diesem Sinne gelangen wir jetzt auch nur bis zur Grundgleichung der turbulenten Strömung.

Leser: Wenn ich mich recht erinnere, bezeichnen wir die wirbelnde Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases als turbulent.

Autor: In der Tat ist ein turbulenter Strom oft wirbelnd, und die wirbelnde Strömung ist oft turbulent. Oft, aber nicht immer. Auf keinen Fall kann man diese zwei Wörter als identisch oder als synonym betrachten. So bedingt z. B. das regelmäßige Wirbelsystem keine turbulenten Verhältnisse. Die genaue Übersetzung des aus dem Lateinischen stammenden Wortes turbulent heißt: wirbelnd, stürmisch, ungestüm. Das Wesentliche der turbulenten Strömung war die chaotische, ungeordnete Geschwindigkeitsschwankung, die am ehesten der Brownschen Molekularbewegung gleicht. In unserem Fall ist nicht nur von der chaotischen Bewegung einzelner Moleküle, sondern von kleinen Volumenelementen die Rede, die ihre Größe ständig verändern.

Leser: Ich glaube, hier müssen wir wieder an einen Mückenschwarm denken. Aus dem Gesagten schließe ich, daß innerhalb des Schwarmes die Bewegung einer Mückengruppe oder Mückenfamilie (wenn es überhaupt so etwas gibt), am meisten einer turbulenten Strömung ähnelt.

Autor: Dein Vergleich ist vortrefflich, und es stimmt auch, daß, wie man die momentane Lage und Geschwindigkeit einer Mücke unmöglich voraussagen kann, es unmöglich ist vorauszusagen, wie groß die momentane Geschwindigkeit der turbulenten Bewegung in irgendeinem Punkte sein wird.

Leser: Die Lage scheint vollkommen unübersichtlich zu sein. Wie kann man sich in einem solchen Chaos überhaupt zurechtfinden?

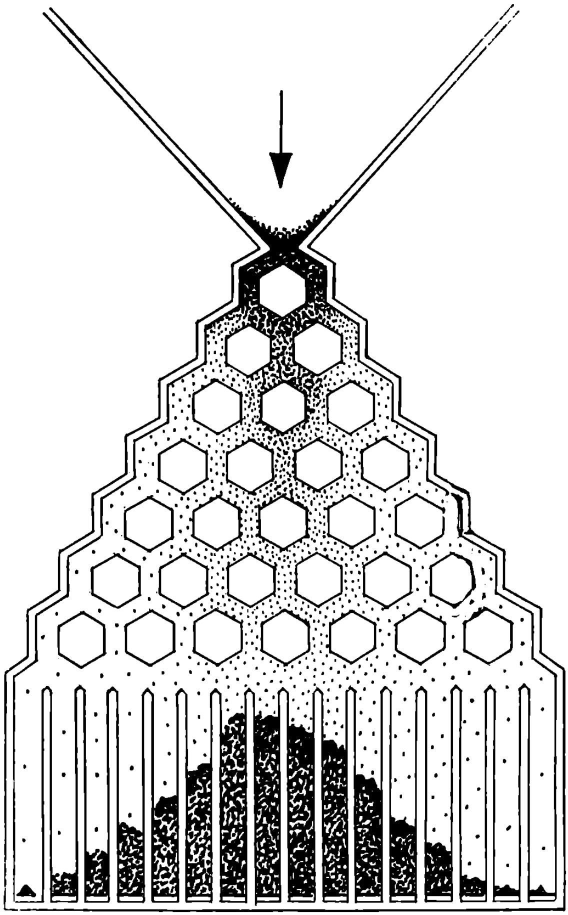
Autor: Wie ist die Situation bei der Bewegung der Moleküle? Können wir vielleicht sagen, wie groß die momentane Ge-

schwindigkeit eines Sauerstoffmoleküls in irgendeinem Punkt des Zimmers sein wird?

Leser: Nein, aber das interessiert uns auch gar nicht. Wir können jedoch beantworten, wie sich die Gesamtheit der Moleküle verhält und wie groß z. B. die Durchschnittsgeschwindigkeit der Sauerstoffmoleküle ist. Wir können auch sagen, daß das Verhalten der einzelnen Moleküle rein zufällig, das Verhalten einer großen Zahl von Molekülen jedoch gesetzmäßig ist.

Autor: Dann weißt du gewiß auch, daß wir die Gesamtheit solcher Zufallserscheinungen einen stochastischen Prozeß nennen, und mit dessen Beschreibung befaßt sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die stochastischen Prozesse können wir nicht mit den augenblicklichen Werten, sondern mit den statistischen Werten (wie dem Erwartungswert, der Streuung usw.) charakterisieren. Für diese sind bereits gut definierbare Zusammenhänge bekannt. Für unsere vereinfachte Diskussion brauchen wir jetzt nur den Erwartungswert auszurechnen. Der Erwartungswert ist ein Wahrscheinlichkeitsbegriff. (In der Turbulenztheorie kommen natürlich auch noch andere statistische Größen vor.)

Leser: Ist dieser im wesentlichen dem mathematischen Mittelwert gleich?

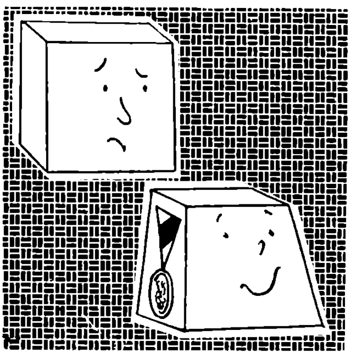


Autor: Verwechseln wir nicht die zwei Begriffe. Nehmen wir eines der häufigsten Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, das Würfeln. Beim Wurf mit einem vollkommen regelmäßigen Würfel besteht die Wahrscheinlichkeit 1/6, daß das Resultat des Wurfes 1, 2, . . . , 6 beträgt; die einzelnen möglichen Resultate zeigen an, ob wir 1, 2, . . . bzw. 6 geworfen haben. Das Produkt der möglichen Ereignisse und der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ergibt den Erwartungswert. In unserem Fall:

$$\frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = 3{,}5\,.$$

Diese Zahl haben wir bestimmt, ohne daß wir den Versuch (das Würfeln) ausgeführt hätten, u. zw. einfach von der physikalischen Überlegung her, daß ein vollkommen regelmäßiger Würfel keine ausgezeichnete Seite hat und somit jedes Ereignis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten kann. Wenn p_i die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A_i ist, dann ist der Erwartungswert aller Ereignisse die Summe aller $p_i A_i$:

$$\overline{A} = \sum_{i=1}^{n} p_i A_i\,,$$



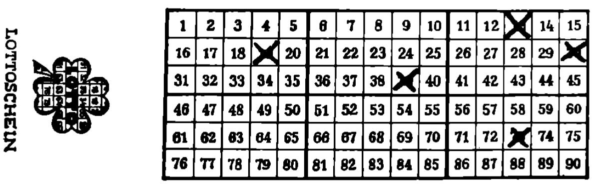
wobei durch Überstreichen der Erwartungswert gekennzeichnet ist, während sich die Summation über alle n möglichen Ereignisse erstreckt. Da von den möglichen Ereignissen sicher eines eintrifft, so gilt für die Summe aller Wahrscheinlichkeiten immer

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Bei gleichwahrscheinlichen Ereignissen kann p_i vor das Summenzeichen gezogen werden, und da p dann gerade der reziproke Wert der Zahl der möglichen Ereignisse ist ($p = 1/n$), gilt

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \,;$$

der Erwartungswert ist also das arithmetische Mittel der möglichen Ereignisse. Der Erwartungswert sagt über ein bestimmtes Ereignis überhaupt nichts aus. So erwarten wir umsonst, daß sich 3,5 als Wert des Würfelns ergibt. Bei einer sehr großen Zahl von Versuchen wird das Resultat der Versuche um den Erwartungswert schwanken. So können z. B. von 90 Lottozahlen alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen werden. Als Resultat von ungefähr 600 Ziehungen hat man die einzelnen Zahlen in 30 . . . 50 Fällen gezogen. Nach 6000 (oder noch eher nach 60 000) Ziehungen wird die Differenz zwischen den einzelnen Zahlen offensichtlich noch kleiner sein, es wird auch experimentell kontrollierbar sein, ob jede Zahl gleich oft gezogen wurde. Die Zahl, die anzeigt, wie oft ein Ereignis im Laufe der Versuche vorgekommen ist, nennen wir die Häufigkeit. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähert sich die Häufigkeit im Laufe sehr zahlreicher Versuche immer mehr der Wahrscheinlichkeit.



Leser: Es ist klar, daß aus all dem überhaupt nicht gefolgert werden kann, welche Zahlen nächste Woche gezogen werden. Aber ich denke, daß wir nicht das Rezept des Lottospiels gesucht haben, sondern unser Ziel die Betrachtung des Unterschiedes zwischen den Wahrscheinlichkeits- und statistischen Größen war. Kehren wir also zu der Turbulenz zurück.

Autor: Vorher aber greifen wir wieder auf die Massenbilanzgleichung zurück:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{w} - D \operatorname{grad} \varrho) = q\,.$$

Woraus ergab sich die Diffusionsstromdichte?

Leser: Wir haben sie aus dem Produkt des Leitwertes und dem Gradienten der charakteristischen intensiven Größe abgeleitet.

Autor: Aber was bedeutet molekularstatistisch der Diffusionsstrom? Erinnere dich an den Mückenschwarm. Nehmen wir an, wir hätten die Mücken des einen Mückenschwarms vorher gelb, die des anderen blau gefärbt und sie dann zusammen fliegen lassen. Was würden wir aus der Ferne sehen?

Leser: Wenn sie nach der Färbung überhaupt fliegen könnten, würden wir am Anfang getrennte gelbe und blaue Wolkenteile sehen, danach würde allmählich die ganze Kugel grün (die Mischfarbe von blau und gelb) werden. Die Mücken hätten sich vermischt.

Autor: Die ungeordnete, chaotische Bewegung würde also den Unterschied ausgleichen, der zwischen den Farben der beiden Teile vorhanden war. Solcher Art ist auch der Mechanismus der Diffusion. Infolge der ungeordneten Bewegung der einzelnen Moleküle ist es unmöglich zu sagen, wie groß in irgendeinem Punkte z. B. der momentane Wert der Molekülgeschwindigkeit ist. Wir können nur davon sprechen, daß die Geschwindigkeit der Moleküle einen (im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie zu verstehenden) Erwartungswert hat:

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t),$$

der eine Funktion des Ortes (der Raumkoordinaten) und der Zeit ist. Mit diesem Erwartungswert kann der konvektive Strom berechnet werden, aus der Streuung der Molekülbewegung dagegen der Diffusionsstrom.

Leser: Ich verstehe die Definition des konvektiven Stromes, da wir uns im Laufe unserer Gespräche schon mehrmals damit befaßt haben. Die Diffusionsströme haben wir aber bisher mit der Inhomogenität der intensiven Größen in Verbindung gebracht.

Autor: Auch im weiteren — soweit es nur möglich ist — bestimmen wir die Diffusionsstromdichte aus dem Gradienten der intensiven Größe. Aus mathematischen und aus meßtechnischen Gründen ist es schwierig, Wahrscheinlichkeitskennzahlen als Grundlage zu nehmen.

Leser: Kann die Diffusionserscheinung auch mathematisch nicht diskutiert werden?

Autor: Ich sagte nicht, daß man es nicht kann, sondern nur, daß es schwierig ist. Auf eine detaillierte Besprechung lassen wir uns deshalb gar nicht erst ein. Soviel müssen wir aber wissen, daß die chaotische Bewegung der Moleküle im wesentlichen ein Markowscher Prozeß ist (der zukünftige Zustand hängt nicht vom vergangenen Zustand ab, der Prozeß erinnert sich nicht an die Vergangenheit). Man muß die Übergangswahrscheinlichkeiten kennen (d. h. mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Teilchen im Zeitpunkt t' in der Umgebung der Stelle $\boldsymbol{r}'$ befinden wird, wenn es sich im Zeitpunkt t an der Stelle $\boldsymbol{r}$ befunden hatte):

$$f(\boldsymbol{r}' \mid t', \boldsymbol{r}, t).$$

Leser: Was bedeutet in dieser Funktion der senkrechte Strich?

Autor: Die Funktion stellt eine bedingte Wahrscheinlichkeit dar. Ihr Wert hängt davon ab, von welchem Punkt $\boldsymbol{r}'$ die Rede ist unter der Bedingung, daß wir den Zeitpunkt t' für alle Teilchen untersuchen, welche sich im Zeitpunkt t an der Stelle $\boldsymbol{r}$ befanden.

Leser: Also ist von den Teilchen die Rede, welche vom Punkt $\boldsymbol{r}$ in der Zeit $t' - t$ zum Punkt $\boldsymbol{r}'$ gelangt sind.

Autor: Analog dem Würfeln erhalten wir den Erwartungswert der Verschiebung, indem wir jedes mögliche Ereignis mit seiner Wahrscheinlichkeit multiplizieren und diese Produkte addieren.

Leser: Ist die Verschiebung $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ ein mögliches Ereignis?

Autor: Ja, und wenn wir alle möglichen Werte $\boldsymbol{r}'$ in Betracht ziehen, dann müssen wir über den ganzen Raum integrieren. Der Einfachheit halber nehmen wir nur einen eindimensionalen Fall, in dem x' und x die Punkte bestimmen. Dann ist der Erwartungswert der Verschiebung:

$$\overline{\Delta x} = \int (x' - x) f(x' \mid t', x, t) \, \mathrm{d}x \, .$$

Leser: Bei Kenntnis des Zeitintervalls $\Delta t = t' - t$ kann man schon die Geschwindigkeit bestimmen.

Autor: Noch dazu auf dem üblichen Wege, über den Grenzübergang $\Delta t = (t' - t) \to 0$:

$$w(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} .$$

Leser: Wir erhielten also den von Ort und Zeit abhängigen Erwartungswert der Geschwindigkeit.

Autor: Aus den Quadraten der Wegstrecken $(x' - x)^2$ erhalten wir in ähnlicher Weise über die Integration die Streuung. Es ist leicht einzusehen, daß der Erwartungswert der Geschwindigkeit über die makroskopische, und die Streuung über die mikroskopische (molekulare) Bewegung Auskunft gibt. Wenn sich der Massenmittelpunkt des Systems in Ruhe befindet, dann ist der Erwartungswert der Geschwindigkeit Null. Die Streuung wäre jedoch nur dann Null, wenn sich sämtliche Moleküle in Ruhe befänden, d. h., wenn die Wahrscheinlichkeit, daß sich auch nur ein einziges Molekül fortbewegt, Null wäre. Eine eingehende Besprechung dieses Problems ist schon Aufgabe der statistischen Physik und würde den Rahmen unseres Gespräches überschreiten.

Leser: Sage wenigstens noch, wie man aus diesen Streuungen die Diffusionsströme bestimmen kann.

Autor: Wir können zwei Fälle unterscheiden. Im einen Fall haben wir (und bisher haben wir nur das in Betracht gezogen) von der Streuung angenommen, daß sie proportional dem Gradienten der charakteristischen intensiven Größe ist, und den Proportionalitätsfaktor Leitwert genannt. Das ist die phänomenologische Betrachtungsweise. Im anderen Fall arbeiten wir unmittelbar mit der Streuung. Wir bestimmen die Korrelation der Schwankungen der einzelnen physikalischen Charakteristiken (Geschwindigkeit, Dichte usw.). Das ist die statistische Erörterungsweise. Was wir bisher Diffusionsstrom genannt haben, ist also im wesentlichen der infolge der ungeordneten Molekülbewegung entstandene Erwartungswert der Verschiebung. Ähnlich gehen wir auch im Falle des Impulsstromes vor.

Leser: Wiederholen wir den Stoff des ersten Gespräches?

Autor: Wir schreiben nur den Diffusionsstrom auf mit dem momentanen Wert und bilden den Erwartungswert:

$$\frac{\partial \overline{\varrho \boldsymbol{w}}}{\partial t} + \operatorname{Div}\,(\overline{\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}}) = \boldsymbol{q}\ .$$

Zwecks Vereinfachung setzen wir voraus, daß die Dichte ϱ nicht schwankt, und nehmen eine quellenlose Strömung an. Wir schreiben den momentanen Wert der Geschwindigkeit als Summe aus ihrem Erwartungswert und der Abweichung von derselben auf, $\boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{w}'$, und schreiben

$$\frac{\partial \overline{\varrho(\overline{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{w}')}}{\partial t} + \operatorname{Div}\,(\overline{\varrho \overline{\boldsymbol{w}} \circ \overline{\boldsymbol{w}}} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \overline{\boldsymbol{w}}} + \\ + \overline{\varrho \overline{\boldsymbol{w}} \circ \boldsymbol{w}'} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}) = 0\ .$$

Da $\overline{\boldsymbol{w}'} = 0$ und $\overline{\boldsymbol{w}' \circ \overline{\boldsymbol{w}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{w}} \circ \boldsymbol{w}'} = 0$ ist, erhalten wir

$$\frac{\partial \varrho \overline{\boldsymbol{w}}}{\partial t} + \operatorname{Div}\,(\varrho \overline{\boldsymbol{w}} \circ \overline{\boldsymbol{w}} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}) = 0\ .$$

Das zweite Glied in der Klammer ist die Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen.

Leser: Das ist also die nichtkonvektive Impulsdichte bzw. der Spannungstensor:

$$\rho \overline{\boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'} = -\boldsymbol{T}.$$

Jetzt ist es schon verständlich, warum das unbedingt ein symmetrischer Tensor gewesen ist, da $\overline{\boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}$, ein dyadisches Produkt, gleichfalls einen symmetrischen Tensor ergibt.

Autor: In diesem Sinne haben wir ihn als sogenannte viskose Spannung (Reibungsschubspannung) verwendet, was bei kleinen Geschwindigkeiten den Diffusionsstrom des Impulses bedeutet. Dieser Strom ist dem Geschwindigkeitsgradienten proportional, und der Proportionalitätsfaktor ist der sogenannte Viskositätskoeffizient. Die Geschwindigkeitsschwankung wird mit wachsender Geschwindigkeit immer intensiver, und kann oberhalb eines gewissen Wertes nicht mehr als lineare Funktion des Geschwindigkeitsgradienten angegeben werden. Der einfachere Ausdruck des Impulsstromes muß durch seine ursprüngliche Form, den korrelativen Zusammenhang der Schwankungsgeschwindigkeit ersetzt werden. Im Falle turbulenter Strömung ist der Spannungstensor (der nichtkonvektive Impulsstrom) der Erwartungswert des dyadischen Produktes der Schwankungsgeschwindigkeiten. Die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit werden mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet:

$$\overline{\boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'} = \begin{bmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_2 u_3} & \overline{u_3^2} \end{bmatrix}.$$

Die Komponenten des Tensors, die die Produkte der Erwartungswerte der verschieden gerichteten Schwankungsgeschwindigkeiten darstellen, sind die Reynoldsschen Spannungen. Je größer die Schwankung, desto größer werden diese Komponenten, darum sind die Reynoldsschen Spannungen Maße für die Turbulenzstärke. Isotrop nennen wir die Turbulenz, wenn die Elemente in der Hauptdiagonalen gleich und die anderen Komponenten Null sind.

Leser: Demnach ist die isotrope Turbulenz ein sehr spezieller Fall.

Autor: Ja — das zeigt die Kompliziertheit des Problems — und die meisten Turbulenztheorien beziehen sich nur darauf. Die Erörterung der nichtisotropen Turbulenz verursacht heute noch sehr ernste mathematische Schwierigkeiten. Man kann auch nicht von einer einheitlichen und ausgearbeiteten Turbulenztheorie sprechen, wie bei anderen Theorien, die auf vielen Gebieten der Physik und der Technik anzutreffen sind. Mit diesem Thema können wir uns jetzt nicht eingehender befassen. Das Bisherige zusammengefaßt: Eine Strömung der Flüssigkeiten und Gase ist turbulent, wenn bei deren Verlauf die einzelnen physikalischen Charakteristiken (Geschwindigkeit, Temperatur, Druck, Dichte usw.) chaotisch fluktuieren und sich von Punkt zu Punkt unregelmäßig ändern. Die Turbulenz ist ein stochastischer Prozeß, den man nur mit statistischen Größen beschreiben kann. Infolgedessen haben wir aus der allgemeinen Bilanzgleichung die Reynoldssche Gleichung der turbulenten Strömung abgeleitet:

$$\frac{\partial \varrho \overline{\boldsymbol{w}}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\varrho \overline{\boldsymbol{w}} \circ \overline{\boldsymbol{w}} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}\right) = 0 .$$

Dabei haben wir besprochen, daß die Diffusionsstromdichten das Produkt der Leitwerte und des Gradienten der intensiven Größen, die makroskopischen (phänomenologischen) Ausdrücke der korrelativen Zusammenhänge der ungeordneten molekularen Bewegung sind. In der Navier-Stokesschen Gleichung, wo es sich um eine laminare Strömung handelt, konnte man das korrelative Glied durch die viskose Spannung $-\boldsymbol{T}$ ersetzen, im Falle einer turbulenten Strömung kann ein solcher phänomenologer Zusammenhang nicht formuliert werden. Es müssen die Reynoldsschen Spannungen selbst gemessen werden, dazu benötigt man aber spezielle Meßgeräte, ohne die die turbulente Strömung nicht untersucht werden kann.

Leser: Vielleicht haben wir eine Frage im Laufe unseres Gespräches über die Strömungstechnik offengelassen: Die Bestimmung der Eindeutigkeitsbedingungen. Ich weiß, daß man davon nur in Verbindung mit einem konkreten Problem reden kann; aber besteht jetzt nicht doch eine Möglichkeit zu allgemeinen Feststellungen, ähnlich wie im Falle der Wärmeleitung und Diffusion?

Autor: Im wesentlichen gilt auch hier, daß dreierlei Randbedingungen möglich sind. Am häufigsten treffen wir hier die Bedingung: „an der Wand ist die Geschwindigkeit gleich Null", was im wesentlichen soviel bedeutet, daß die Wand keinen Impuls durchläßt. Vielleicht könnte man bezüglich des Impulses sagen, daß hier der Variabilitätsbereich eine größere Bedeutung hat. Von laminarer Strömung kann man überhaupt nur in einem begrenzten Intervall der geometrischen Maße und physikalischen Charakteristiken sprechen. Über bestimmte Grenzwerte der Temperatur und des Druckes hinaus kann das Medium nicht mehr als inkompressibel betrachtet werden. Dasselbe gilt auch für die Geschwindigkeit. Aber all dies kann nicht allgemein erörtert werden. Auf gewisse Beziehungen kommen wir später noch zurück, aber wenn du ernsthaftes Interesse hast, mußt du dich an die Fachbücher wenden.

Leser: Danke, soviel wird vorläufig genügen. Wir wollen lieber zu dem nächsten Thema übergehen.

Achtes Gespräch

Chemische Reaktionen

„Ein solcher Chemiker,
der nicht gleichfalls Physiker ist,
ein solcher Chemiker ist
überhaupt gar nichts.“

Bunsen

Leser: Ich will unserem Gespräch nicht vorgreifen, aber in Kenntnis dessen, daß von den chemischen Reaktionen die Rede sein wird, erinnere ich mich an mein Universitätsstudium und in diesem Zusammenhang an die stöchiometrischen Gleichungen. In den wärmetechnischen Fachbüchern liest man als Grundgleichungen der Verbrennung

$$C + O_2 = CO_2 + 97\,800 \text{ kcal}$$

$$H_2 + O = H_2O + 68\,450 \text{ kcal}$$

und ähnliche Beziehungen. Ferner finden wir auch in der Literatur bei den chemischen Reaktionen Gleichungen in der Form

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = kc\,,$$

die Konzentrationsänderung und Reaktionsgeschwindigkeit ausdrücken. Sind das, in der Sprache unserer bisherigen Diskussionsmethode, die Ausdrücke für die Quelle der Masse?

Autor: Im Laufe unserer bisherigen Gespräche begegneten wir der Quelldichte nur im Zusammenhang mit der Impulsbilanz. Auch dort befaßten wir uns nur mit dem einfachsten Fall, mit der Wirkung des Gravitationskraftfeldes. In diesem Zusammenhang war auch schon die Rede von der Quelle der Energie, von der Umwandlung einer Art der kinetischen Energie in eine andere Art (die innere Energie), die sog. Energiedissipation. Die Gesamtmenge der Energie hat sich dabei natürlich nicht verändert. Die chemische Reaktion ist ein Prozeß, in dem auch eine Massenquelle vorhanden ist, aber in diesem Falle können wir auch nur davon sprechen, daß die eine Art der Massenkomponente sich in eine andere Massenkomponente umwandelt, die Gesamtsumme bleibt infolgedessen unverändert.

Leser: Das bedeutet, daß wir wieder von der allgemeinen Bilanzgleichung

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho_i \boldsymbol{w} + \sum_k L_{ik}\,\mathrm{grad}\,y_k) = q_i$$

ausgehen. Die eine extensive Größe ist die innere Energie, da es eine Erfahrungstatsache ist, daß bei vielen chemischen Reaktionen Energie frei wird (bzw. im Laufe der endothermen Reaktionen Energie verschlungen wird) und dadurch in der Regel die innere Energie des Mediums vergrößert (oder vermindert) wird. Wenn die Reaktion in einem strömenden Medium abläuft, benötigen wir auch die Gleichungen für den Impuls und die kinetische Energie. Die zu diesen extensiven Größen gehörenden charakteristischen intensiven Größen kennen wir bereits. Unsere Aufgabe ist nun, eine Bilanzgleichung für die Masse aufzustellen. Verwenden wir auch hier die schon vorher bekannte Form, erweitert um die entsprechenden Quellen?

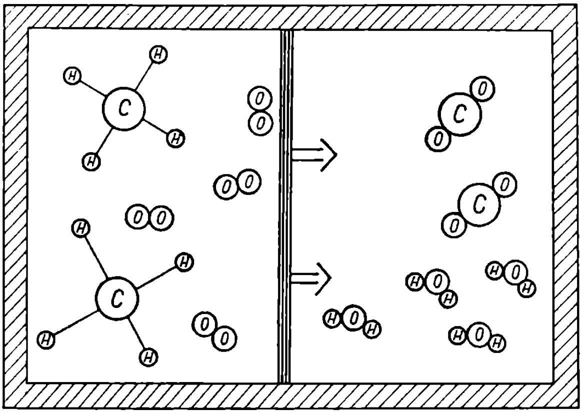
Autor: Vorher haben wir eine kleine Auffassungserweiterung nötig. Bisher war von solchen Wechselwirkungen die Rede, bei denen wir unter Massenerhaltung verstanden, daß die Masse jeder Komponente erhalten bleibt. Eine solche Wechselwirkung ist z. B. die Vermischung. Du erwähntest aber z. B. die Gleichung $C + O_2 = CO_2$, in der sich Kohlenstoff und Sauerstoff zu Kohlendioxid umwandeln. Es sieht also so aus, daß es eine Wechselwirkung gibt, bei der die Massenerhaltung je Komponente nicht gültig ist.
Bei der Erdgasheizung bleibt offenbar die Masse der Methankomponente nicht erhalten. Solange wir das Gas mit der Luft bloß vermischen, bleibt die Masse jeder einzelnen Gaskomponente erhalten. Sobald wir aber das Gemisch anzünden, hat das oben Gesagte keine Gültigkeit mehr. Die Massenerhaltung gilt nur dann auch für jede Komponente, wenn die molekulare Struktur unverändert bleibt.

Leser: Wenn ich mich nicht irre, haben im 18. Jahrhundert *Lomonossow* und *Lavoisier* bereits bewiesen, daß während der Verbrennung kein Stoff verlorengeht und keiner entsteht bzw. daß auch bei chemischen Reaktionen das Gesetz der Energieerhaltung gültig ist.

Autor: Diese Versuche waren sehr bedeutungsvoll, da man im 18. Jahrhundert noch die Vorstellung hatte, daß die Verbrennung die Trennung des Stoffes in Phlogiston und Erde bedeutet. Die Erde bleibt, das Phlogiston aber verschwindet spurlos. Heute wissen wir, daß sich im Verlauf chemischer Reaktionen (z. B. einer Verbrennung) die Moleküle nur umordnen, die Bindungen der Atome sich ändern, aber die Atome selbst erhalten bleiben. So besteht das schon erwähnte Methangas aus Molekülen, in denen ein Kohlenstoffatom mit vier Wasserstoffatomen verbunden ist (CH_4). Bei der Verbrennung spaltet sich dieses Molekül auf, um sich mit den Atomen von zwei (ebenfalls aufgespaltenen) Sauerstoffmolekülen zu verbinden: es entsteht ein Kohlendioxid- (CO_2) und zwei Wasserdampf- (H_2O) Moleküle. Kurz:

$$CH_4 + 2\,O_2 = CO_2 + 2\,H_2O.$$

Die Gleichung zeigt, daß sich die Zahl der C-, H- und O-Atome nicht verändert hat. Auf der rechten und linken Seite sind 1 C-, 4 H- und 4 O-Atome zu finden. Die Anzahl der Atome bleibt während jeder chemischen Reaktion unverändert. Mit anderen



Worten: die Massenerhaltung bedeutet bei den chemischen Reaktionen die Konstanz der Anzahl der Atome. Die Gleichung, die die Arten und die Anzahl der Molekülgruppen vor und nach der Reaktion angibt, ist die von dir bereits erwähnte stöchiometrische Gleichung. Ihre allgemeine Form können wir leicht ableiten. Wir wissen, die Massenerhaltung bedeutet, daß die Gesamtmasse der Komponenten im Anfangs- und in jedem Zwischen- (oder End-) Zustand identisch ist:

$$\sum_i m_i = \sum_j m_j ,$$

wobei der Index i die Komponenten des Anfangs- und j die des Endzustandes angibt. Die Masse m_i, dividiert durch die Masse eines Moleküls, ergibt die Anzahl der Moleküle N_i. Es ist bekannt, daß die molare Masse eines Moleküls der Quotient aus M_i und der Avogadroschen Zahl L ist. So ist die Anzahl der Moleküle:

$$N_i = \frac{m_i}{M_i/L} = L\frac{m_i}{M_i} .$$

Damit drückt die Massenerhaltung der an der Reaktion beteiligten Stoffe die Gleichheit

$$\frac{1}{L}\sum_i N_i M_i = \frac{1}{L}\sum_j N_j M_j$$

aus, woraus

$$\sum_i N_i M_i = \sum_j N_j M_j$$

folgt. Den größten gemeinsamen Teiler der Molekülzahlen N_i bezeichnen wir mit ξ. Wenn wir die einzelnen Molekülzahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren, erhalten wir jeweils eine ganze Zahl (wenn $\xi = 1$, d. h. α teilerfremd ist, sprechen wir von einer elementaren Reaktion). Man schreibt

$$\frac{N_i}{\xi} = \alpha_i .$$

Dividieren wir beide Seiten der Massenerhaltungsgleichung durch ξ und setzen α ein, ergibt sich

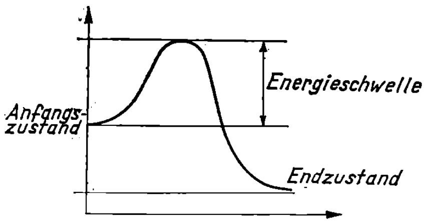
$$\sum_i \alpha_i M_i = \sum_j \alpha_j M_j .$$

Das ist die allgemeine Form der stöchiometrischen Gleichung. M_i und M_j symbolisieren die einzelnen Molekülarten, α_i und α_j wiederum zeigen an, wieviel von den entsprechenden Molekülarten an der elementaren Reaktion beteiligt sind bzw. wieviel entstehen. Diese Zahlen sind die stöchiometrischen Koeffizienten.

Leser: Die stöchiometrischen Gleichungen geben nur das quantitative Verhältnis zwischen Anfangs- und Endprodukten an. Aus ihnen geht jedoch nicht hervor, wie die Reaktion selbst verläuft. Wir wissen, daß die Atome der Moleküle im allgemeinen sehr stark miteinander verbunden sind. Die Verbindung ist so stark, daß die Moleküle von selbst nicht zerfallen. Aber ohne vorherige Trennung der Moleküle ist keine molekulare Umordnung möglich.

Autor: Der Zerfall kann beim Zusammenstoß der Moleküle passieren.

Leser: Das muß aber nicht passieren. Wir wissen ja, daß in Gasgemischen die Moleküle miteinander außerordentlich oft zusammenstoßen. Wenn jeder Zusammenstoß mit der Aufspaltung der Moleküle und mit einer Verbindung zu neuen Molekülen enden würde, so würde z. B. ein brennbares Gas im Moment der Vermischung mit Sauerstoff explodieren.



Autor: Natürlich ist die Begegnung, d. h. der Zusammenstoß der Moleküle, nur eine Bedingung. Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend. Eine weitere Bedingung ist, daß der Zusammenstoß die zusammenhaltenden „Fesseln", die energetische Bindung zwischen den das Molekül bildenden Atomen, zerschmettert. Dazu ist notwendig, daß die Energie der zusammenstoßenden Moleküle größer als die Bindungsenergie ist. Der Zusammenstoß von Molekülen mit kleinerer Energie ist ein passiver Zusammenstoß, er ermöglicht keine molekulare Umlagerung. Die Moleküle, die größere Energie als die Bindungsenergie aufweisen, nennen wir aktive Moleküle. Nur der Zusammenstoß aktiver Moleküle führt zu chemischen Reaktionen. Die zur Vereinigung der Moleküle (d. h. zur Akti-

vierung) nötige Energie heißt Aktivierungsenergie. Bei einer Verbrennungsreaktion ist z. B. die Bindungsenergie im Anfangszustand größer als im Endzustand.
Hier wird im Laufe der Reaktion Energie frei. Vorher muß man aber die Energieschwelle (die Aktivierungsenergie) überwinden, die den Ablauf der Reaktion behindert. Danach entsteht von selbst die neue Bindung, und Energie wird frei, die zum Teil neue Moleküle aktiviert, zum Teil in die Umgebung übergeht. Es ist nicht von „Entstehen der Energie" die Rede, sondern wieder nur von der Umwandlung einer Energieart, der chemisch gebundenen Energie, in eine andere Energieart.

Leser: In der Grundgleichung der Energie

$$W = TS - pV + \mu m$$

war bisher von der chemisch gebundenen Energie nicht die Rede gewesen.

Autor: Weil wir bisher die Umlagerung der molekularen Bin dung nicht berücksichtigt haben. In Mehrkomponentensystemen trat zwar an die Stelle von μm die Summe

$$\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots = \sum_i \mu_i m_i ,$$

wobei m_1, m_2, ... aber solche Massenkomponenten bezeichnen, die alle für sich gesondert konstant waren. Jetzt müssen wir auch berücksichtigen, daß die Masse der Komponenten keine konstante Eigenschaft ist.

Leser: Vorhin haben wir schon die Masse der Komponenten als Produkt aus relativer Molekülmasse und Anzahl der Moleküle ausgedrückt:

$$m_i = N_i M_i .$$

Autor: Wir haben auch eine Zahl ξ eingeführt, die der größte gemeinsame Teiler der Anzahl der Moleküle war. Damit ist die Masse der Komponenten $m_i = \xi \alpha_i M_i$. Setzen wir diesen Ausdruck in die Energiegleichung ein (der Einfachheit halber lassen wir die Buchstabenbezeichnung unverändert)[1] mit dem auf ein Mol bezogenen chemischen Potential, so ergibt sich:

$$W = TS - pV + \sum_i \mu_i \xi \alpha_i = TS - pV + \xi \sum_i \mu_i \alpha_i ,$$

denn die Zahl ξ kann vor das Summenzeichen gebracht werden. Die angegebene Gleichung bezieht sich jedoch auf einen gegebenen Zustand. Die Masse der Ausgangsmoleküle sei am Anfang der Reaktion m. In einem Zwischenzustand verwandelte sich davon die Masse $(m - \overline{m})$ in das Reaktionsprodukt und es bleiben noch Ausgangsmoleküle mit der Masse $\overline{m}$ übrig. Ebenso wie früher ist jetzt, mit den stöchiometrischen Koeffizienten der Reaktionsprodukte geschrieben,

$$m - \overline{m} = (\xi - \overline{\xi}) \sum \alpha_j M_j$$

die umgewandelte Masse und

$$\overline{m} = \overline{\xi} \sum_i \alpha_i M_i$$

die noch verbliebene Masse der Ausgangsmoleküle.

Leser: Wenn ich richtig verstanden habe, ist z. B. bei der Verbrennung von Wasserstoff

$$2\,H_2 + O_2 = 2\,H_2O$$

in der stöchiometrischen Gleichung $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$. Wenn z. B. im Ausgangszustand $\xi = 10$ war und in einem Zwischenzustand daraus $4 \cdot 2 = 8$ Wassermoleküle entstanden sind, dann ist $\xi - \overline{\xi} = 4$ bzw. $\overline{\xi} = 6$. Es blieben also $6 \cdot 2 = 12$ H_2- und 6 O_2-Moleküle. Die Gleichung müßte also so aussehen:

$$10(2\,H_2 + O_2) = (10 - 6)\; 2\,H_2O + 6(2\,H_2 + O_2).$$

---

[1] Bisher bezeichnete μ den auf die Masseneinheit und im weiteren den auf ein Molekül bezogenen Wert. Der Quotient aus der Avogadroschen Zahl und der molaren Masse ergibt den Zusammenhang zwischen den auf ein Mol und den auf die molare Masse bezogenen Wert

Autor: In der tatsächlichen Reaktion ist ξ und $\bar{\xi}$ natürlich eine bedeutend größere Zahl, aber für die numerische Darstellung ist das unwesentlich. Schreiben wir jetzt die Energie des Ausgangs- und Zwischenzustandes auf und bilden wir die Differenz

$$\begin{array}{l} W = TS - pV + \xi \sum_i \mu_i \alpha_i \\ \overline{W} = \overline{T}\,\overline{S} - \bar{p}\,\overline{V} + \bar{\xi} \sum_i \mu_i \alpha_i + (\xi - \bar{\xi}) \sum_j \mu_j \alpha_j \\ \hline \Delta W = TS - \overline{T}\,\overline{S} - pV + \bar{p}\,\overline{V} + (\xi - \bar{\xi}) \left(\sum_i \mu_i \alpha_i - \sum_j \mu_j \alpha_j \right). \end{array}$$

Durch Überstreichen haben wir die auf den Zwischenzustand bezogenen Zustandsgrößen bezeichnet. Wir untersuchen nur den Teil der Energieumwandlung, der eine Folge der molekularen Umlagerung ist, und bringen deshalb das System in einen solchen Zustand, daß seine Temperatur und sein Druck mit den Ausgangswerten übereinstimmen:

$$p = p, \ T = \overline{T}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta W &= T \Delta S - p \Delta V + (\xi - \bar{\xi}) \left(\sum_i \mu_i \alpha_i - \sum_j \mu_j \alpha_j \right) = \\ &= T \Delta S - p \Delta V + A \Delta \xi , \end{aligned}$$

worin wir die Bezeichnungen $\Delta S = S - \overline{S}$, $\Delta V = V - \overline{V}$ und $\Delta \xi = \xi - \bar{\xi}$ verwendet haben. In der Beziehung ist

$$A = \sum_i \mu_i \alpha_i - \sum_j \mu_j \alpha_j$$

die Summe der mit den stöchiometrischen Koeffizienten multiplizierten chemischen Potentiale[1] (bei den Ausgangskomponenten mit positivem, bei dem Reaktionsprodukt mit negativem Vorzeichen). Dieser Ausdruck, eigentlich eine charakteristische

[1] Statt des chemischen Potentials pflegt man die Aktivität oder Fugazität zu verwenden. Beide sind eindeutige Funktionen des chemischen Potentials, es besteht ein logarithmischer Zusammenhang zwischen ihnen

intensive Größe, kann als gewichtete Summe des chemischen Potentials betrachtet werden und definiert ebenfalls eine charakteristische intensive Größe, die chemische Affinität. Die Affinität ist eine Größe, die das Bestreben nach Ausgleich beschreibt, die charakteristische intensive Größe der chemischen Reaktion. Es vollzieht sich so lange eine chemische Reaktion, bis die Affinität Null wird. Die Richtung wird dadurch bestimmt, ob der Affinitätswert positiv oder negativ ist. Auf beiden Seiten der stöchiometrischen Gleichung besteht in Wirklichkeit keine Gleichheit, sondern es gilt ein Pfeil hin und zurück. Von dem Vorzeichen der Affinität hängt es ab, in welcher Richtung man den Pfeil zu deuten hat. Wenn es positiv ist, verläuft die Reaktion in direkter Richtung (von links nach rechts), wenn negativ, dann verläuft die Reaktion in umgekehrter Richtung. Die Affinität hängt vom stöchiometrischen Koeffizienten und vom chemischen Potential ab. Ihr Wert gibt die Energiegröße an, welche bei Änderung des Fortschrittsgrades ξ [1] um eine Einheit der Reaktion frei wird. Im Falle chemischer Reaktionen ist nicht einfach das chemische Potential die charakteristische intensive Größe, sondern die mit dem stöchiometrischen Koeffizienten gewichtete Summe.

Leser: Auf Grund des Ausdrucks

$$\Delta W = T\Delta S - p\Delta V + A\Delta\xi$$

scheint es, daß ξ eine ähnliche Rolle spielt wie die anderen extensiven Größen (S und V).

Autor: Tatsächlich ist der Fortschrittsgrad der Reaktion ξ die charakteristische extensive Größe der chemischen Reaktion.

Leser: Bei Reaktionsende ist dieser offenbar Null, da sich dann jedes Molekül in ein Molekül des Endproduktes verwandelt hat:

$$\xi = \bar{\xi}, \quad \Delta\xi = 0.$$

---

[1] *Donder, Th. de:* Leçons de Thermodynamique et de Chimie-Physique. Paris 1920, S. 117

Autor: Und somit ist die ganze Energieumwandlung

$$W = T\Delta S - p\Delta V$$

bzw. die Summe der Wärme und der Arbeit. Die Energieänderung wird zum Teil zur Volumenänderung, zum Teil zur Erhöhung der Entropie verwendet. Die sogenannte Reaktionswärme

$$T\Delta S = Q_p = \Delta W + p\Delta V = \Delta I$$

ist gleich der Enthalpieänderung. Der Index p bei Q weist darauf hin, daß der Druck konstant gehalten wird. Das haben wir nämlich vorausgesetzt, als wir die Differenz zwischen W und $\overline{W}$ gebildet haben. Ist auch die Volumenänderung Null, d. h., geschieht die Reaktion bei konstantem Volumen, so ist wegen $\Delta V = 0$

$$Q_V = \Delta W,$$

d. h. die Reaktionswärme der Energieänderung gleich.

Leser: Wir haben die extensiven und charakteristischen intensiven Größen der Bilanzgleichung der Energie und der Masse angegeben, jetzt müßten wir noch von der Quelle reden. Sie steht offenbar mit der Reaktionsgeschwindigkeit im Zusammenhang. Wir wissen bereits, daß zwischen dem Anfangs- und Endzustand der Energie eine Barriere besteht, die überwunden werden muß. Das ist die Aktivierungsenergie, und je größer diese ist, desto schwerer kommt eine Reaktion zustande. Wir wissen auch, daß die Reaktion um so leichter abläuft, je größer die Energie der einzelnen Moleküle ist. Was können wir aber außer diesen qualitativen Kenntnissen von der Reaktionsgeschwindigkeit sagen, ohne im Spezialstudium des Fachgebietes zu versinken?

Autor: Die Geschwindigkeit jedes Prozesses haben wir bisher als den zu der Wechselwirkung der charakteristischen extensiven Größen gehörenden zeitlichen (partiellen) Differentialquotienten der Dichte definiert. Die Geschwindigkeit des Diffusionsvorganges ist der Differentialquotient der Massendichte $\partial\varrho/\partial t$, die Geschwindigkeit des Wärmeleitvorganges ist der

Differentialquotient der Dichte der inneren Energie $\partial e/\partial t = c_v \varrho(\partial T/\partial t)$. Aus dem Vorangegangenen haben wir gesehen, daß die charakteristische extensive Größe der chemischen Reaktion ξ ist. Ihre auf die Volumeneinheit bezogene Änderungsgeschwindigkeit heißt Reaktionsgeschwindigkeit:

$$q = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} .$$

Von ξ wissen wir, daß es, multipliziert mit der relativen Molekülmasse irgendeiner Komponente und dem stöchiometrischen Koeffizienten, die Masse der betreffenden Komponente ergibt

$$M_i \xi \alpha_i = m_i .$$

Damit folgt:

$$q_1 = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\alpha_i M_i} \frac{d\varrho_i}{dt} ,$$

da M_i und α_i von der Zeit unabhängig sind und der Quotient Masse und Volumen die Massendichte ist. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist also für alle Komponenten gleich.[1]
Die gleiche Beziehung kann auch für die Reaktionsprodukte aufgeschrieben werden, die die Reaktionsgeschwindigkeit in umgekehrter Richtung (die Zurückwandlung der Endprodukte zu Ausgangsmolekülen, die Rekombination) angibt:

$$q_2 = \frac{1}{\alpha_j M_j} \frac{d\varrho_j}{dt} .$$

Die resultierende Reaktionsgeschwindigkeit ist gleich der Differenz der direkten und der umgekehrt gerichteten Geschwin-

[1] Die Reaktionsgeschwindigkeit kann mit der Konzentration c_i der i-ten Komponente oder auch mit der Dichte der Molekülzahl n_i angegeben werden:

$$\frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\alpha_i M_i} \frac{d\varrho_i}{dt} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{dn_i}{dt} = \frac{n}{\alpha_i} \frac{dc_i}{dt}$$
$$\frac{\xi}{V} = \frac{m_i}{V\alpha_i M_i} = \frac{N_i}{\alpha_i V} = \frac{n_i}{\alpha_i V} = \frac{nc_i}{\alpha_i} ,$$

worin n die Gesamtzahl der Moleküle in der Volumeneinheit ist digkeiten. (Es versteht sich von selbst, daß um so weniger Reaktionsprodukte entstehen, je mehr sich während der Reaktion in Ausgangsmoleküle verwandeln.)

$$q = q_1 - q_2.$$

Die Reaktion gelangt ins Gleichgewicht, die Konzentration der einzelnen Komponenten verändert sich also dann nicht mehr, wenn $q = 0$ bzw. $q_1 = q_2$ ist;

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\bar{\xi}}{dt}$$

d. h. q ist dann 0, wenn $A = 0$ ist. Die Bedingung des wirklichen Gleichgewichtes ist das Verschwinden der Affinität. Wir könnten die Ableitung des Massenwirkungsgesetzes noch weiter fortsetzen und daraus die Reaktionsgeschwindigkeit bestimmen und eine Beziehung zwischen den Konzentrationen der Komponenten herleiten. Wir könnten genau sagen, wie die Zahl der aktiven Zusammenstöße von der Temperatur des Systems und von der Größe der Aktivierungsenergie abhängt. Es ist aber nicht unsere Aufgabe, auf Einzelheiten einzugehen. Wir wollen statt dessen lieber die Gleichungen der chemischen Reaktionen aufstellen.

Leser: Befolgen wir wieder die gewohnte Methode?

Autor: Ja, aber ohne daß wir uns mit Wiederholungen befassen. Wir schreiben die Massenbilanzgleichung für jede Komponente auf:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_i \boldsymbol{w} - D_i \operatorname{grad} \varrho_i) = \alpha_i q\,,$$

worin ϱ_i die Dichte der i-ten Komponente, D_i der Diffusionskoeffizient und α_i der stöchiometrische Koeffizient ist. Die Energiebilanzgleichung schreiben wir wegen der möglichen Volumenänderung folgendermaßen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_p \varrho T) + \operatorname{div}(c_p \varrho T \boldsymbol{w} - \lambda \operatorname{grad} T) = q Q_p\,,$$

wobei Q_p die Reaktionswärme bei konstantem Druck ist. Es ist leicht einzusehen, daß die Dichte der im Laufe der Reaktion freiwerdenden Gesamtenergie zur Reaktionsgeschwindigkeit proportional ist. Daraus ist unmittelbar einzusehen, daß die Quelle der Energie die Stoffumwandlung, die Umwandlung einer Molekülart in eine andere ist. Schließlich, wenn sich die Reaktion in einem strömenden Medium vollzieht, schreiben wir auch die Bilanzgleichung für den Impuls und die kinetische Energie auf. (Wenn die während der Reaktion freiwerdende Energie größenordnungsmäßig die kinetische Energie übertrifft, braucht man die Bilanzgleichung der letzteren nicht zu beachten.) Die Impulsgleichung schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w} + \varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'\right) = \varrho \boldsymbol{g} ,$$

aus der wir auf die schon bekannte Weise die Navier-Stokesschen bzw. Reynoldsschen Gleichungen für die laminare bzw. turbulente Strömung erhalten. (Bei der Ableitung muß man achtgeben, die Strömung ist nicht unbedingt divergenzfrei, es gilt also nicht div $\boldsymbol{w} = 0$. Den nichtkonvektiven Strom und die Diffusion können wir nur in speziellen Fällen vernachlässigen, die Massenquelle jedoch niemals.)

Leser: Der Artikel von *Damköhler*[1] ist schon klassisch zu nennen, er gibt im zweiten Punkt die grundlegenden Differentialgleichungen an, die genau mit den jetzt aufgeschriebenen Gleichungen übereinstimmen. Es ist ersichtlich, daß die Damköhlerschen Gleichungen unmittelbar auf die allgemeinen Bilanzgleichungen zurückzuführen sind. Im Laufe unseres Gesprächs wurde auch klar, daß man für die Quelldichten keine so allgemeine Beziehung angeben kann wie für die Stromdichten. Hier sind schon spezielle Erwägungen und Untersuchungen des Fachgebietes erforderlich.

Autor: Nach unserer Vereinbarung befassen wir uns aber mit solchen speziellen Fragen nicht.

---

[1] *Damköhler, G.:* Zeitschrift für Elektrochemie 1936, S. 846/862

Neuntes Gespräch

Hydraulik und Quelldichte

„Das menschliche Denkvermögen bleibt
immer ein und dasselbe,
wenn es sich auch
den verschiedensten Gegenständen zuwendet,
und es erfährt durch ihre Verschiedenheit
ebensowenig eine Veränderung
wie das Sonnenlicht
durch die Mannigfaltigkeit der Gegenstände,
die es bestrahlt."

Descartes

Autor: In unserem ersten Gespräch haben wir erwähnt, was für eine einfache Aufgabe die Untersuchung der Flüsse ist. Ich habe versprochen, darauf noch zurückzukommen. Beginnen wir gleich mit einem interessanten Problem. Welche Gesetze beschreiben die Bewegung des ungelösten Materials im Wasser, d. h. den Feststofftransport? Prof. *J. Bogárdi* stellt folgendes fest: „Eines der kompliziertesten Kapitel der Hydraulik der Wasserläufe ist der Feststofftransport."[1] Im weiteren betonte er, daß „es schwierig wäre, die mit dem Feststofftransport verbundenen Aufgaben lückenlos aufzuzählen". Bei der Klärung der Grundfragen muß man neben der Geschwindigkeit und der auf die Feststoffe ausgeübten Kraft auch andere Charakteristiken beachten, so z. B. die Turbulenz der Wasserbewegung, die Größe und die Form des Flußbettes usw. „Grundlegend ist auch die Frage, ob sich die Feststoffe auf dem Grund rollend oder im Wasser schwebend bewegen." Die theoretische und experimentelle Untersuchung des Feststofftransportes ist sowohl in prinzipieller als auch in praktischer Hinsicht von Bedeutung. Versuchen wir, auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse die Aufgabe zu formulieren, allerdings nur skizzenhaft und ausschließlich für Schwebstoffe.

---

[1] *Bogárdi, J.:* Theoretische Untersuchung der Zusammenhänge beim Feststofftransport der Wasserläufe. Budapest 1967, S. 215 (ung.)

Leser: Als ersten Schritt, wie stets bisher, muß man die charakteristischen extensiven Größen berücksichtigen. Da es sich um strömendes Wasser handelt, wird die Masse, die kinetische und innere Energie bzw. der Impuls des Wassers unbedingt gebraucht, deren Bilanzgleichungen wir bereits aufschreiben können.

Autor: Warten wir damit ein wenig, und nehmen wir der Reihe nach die übrigen extensiven Größen, die sich auf den Schwebstoff im Wasser beziehen.

Leser: Ich glaube, dabei müssen wir auch die aufgezählten 4 extensiven Größen in Betracht ziehen. Das gemeinsame System ist also ein Zweikomponentensystem, die eine Komponente ist das Wasser, die andere der Schwebstoff. Zusammen haben wir 8 extensive Größen.

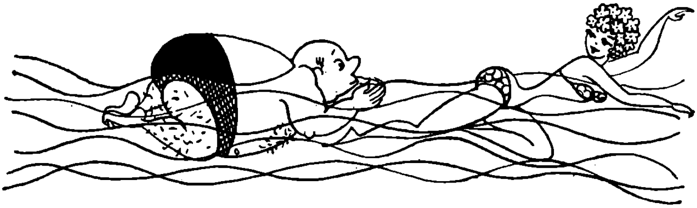
Autor: Das Wasser ist tatsächlich die eine Komponente. Ist aber der Feststoff auch nur eine Komponente?

Leser: Ich glaube, es ist nicht nötig zu beachten, daß die stoffliche Zusammensetzung der Feststoffe nicht homogen ist, d. h., wir haben es z. B. mit unterschiedlichen Gesteinsstücken oder mit Kristallen verschiedener Minerale zu tun. Das mathematisch zu beschreiben wäre zu kompliziert, und vielleicht ist es auch nicht nötig. Vom Standpunkt der Aufgabe aus können wir für die einzelnen Feststoffe annähernd gleiche stoffliche Eigenschaften voraussetzen.

Autor: Das stimmt, sind aber ihre Größen ebenfalls gleich?

Leser: Das können wir tatsächlich nicht behaupten, denn es kommen von mikroskopisch feinem Staub (der in beinahe gelöstem Zustand im Wasser schwebt) bis zu größeren Gesteinsstücken Feststoffe in verschiedenen Größen im Wasser vor. Aber warum muß man und wie kann man das berücksichtigen?

Autor: Wir sind auf die Bewegungsgesetze der Feststoffe neugierig. Nach deiner Meinung bewegt sich im Wasser z. B. ein Einzelkorn von 10 μm Durchmesser ebenso wie eins von 50 mm Durchmesser?



Leser: Natürlich nicht!

Autor: Also deshalb muß man, wenigstens für die allgemeine Formulierung, die verschiedenen Größen des Feststoffes berücksichtigen. Das ist dadurch möglich, daß wir jede Korngröße als eine besondere Komponente betrachten, und für jede Komponente die von dir erwähnten vier extensiven Größen als getrennte Werte behandeln.

Leser: Das verstehe ich nicht, vorhin war davon die Rede, daß verschiedene Korngrößen vorkommen können. Bedeutet das, daß wir unendlich viele Komponenten haben?

Autor: Ja, aber deshalb beunruhige dich nicht. Es genügt vorläufig, daß wir die auf den Schwebstoff bezogenen Werte mit k indizieren, zur Unterscheidung von den auf das Wasser bezogenen Werten ohne Index. Der Index k erinnert daran, daß es sich nicht um einen Wert handelt, sondern um eine stetige Variable entsprechend der Korngrößenverteilung. Zur exakten Behandlung ist natürlich auch die Kenntnis der Verteilungsfunktion der Korngröße nötig. Das wollen wir jetzt nicht detailliert besprechen, sondern nur soviel sagen: Die Theorie des sowjetischen Mathematikers *Kolmogorow* weiterentwickelnd, haben der ungarische Physiker *J. Fáy* und der bulgarische Ingenieur *B. Shelew* ein Verfahren und eine Diagrammtechnik ausgearbeitet, womit man die Kornverteilung eindeutig bestimmen kann. Im Laufe unserer Besprechung betrachten wir den Schwebstoff nur als die Gesamtheit der aus diskreten Abmessungen bestehenden Fraktionen. Eine andere Näherung wäre, von dem Schwebstoff anzunehmen, daß er nur aus gleich großen

Körnern besteht (monodispers ist). Damit wäre aber die Beschreibung schon außerordentlich grob und nicht einmal eindeutig.

Leser: Und das habe ich als einfache Aufgabe bezeichnet.

Autor: Doch sie ist nicht so kompliziert, um vor ihr zurückzuschrecken. Mit theoretischen und experimentellen Mitteln kann man ganz gute, für praktische Zwecke anwendbare Beziehungen aufstellen. Vorläufig befassen wir uns jedoch nur mit der Systematisierung der Aufgabe. Zählen wir also auf, wie viele extensive Größen wir haben:

m	Masse der Flüssigkeit
mw	Impuls der Flüssigkeit
$\frac{1}{2} mw^2$	kinetische Energie der Flüssigkeit
$c_v mT$	innere Energie der Flüssigkeit
m_k	Masse des Schwebstoffkorns
$m_k w_k$	Impuls des Schwebstoffkorns
$\frac{1}{2} m_k w_k$	kinetische Energie des Schwebstoffkorns
$c_k m_k T_k$	innere Energie des Schwebstoffkorns.

Leser: Demnach muß man berücksichtigen, daß sich nicht nur die Masse, die Geschwindigkeit und die spezifische Wärme des einzelnen Schwebstoffes, sondern auch ihre Temperatur ändern kann?

Autor: Bei der ersten Formulierung schadet das auf keinen Fall, natürlich sind bei stationärer Wasserströmung die Temperaturen identisch, aber wenn wir z. B. mit der Luft heiße Flugasche befördern, so können sich die Temperaturen der Luft und des Schwebstoffes wesentlich voneinander unterscheiden.

Leser: Warum bringst du hier Flugasche ins Gespräch?

Autor: Weil die beiden Aufgaben einander vollkommen analog sind. Bei Austausch der Wörter Wasser—Luft bzw. Schwebstoff—Flugasche ist all das, was wir bisher gesagt haben, auch für den Flugaschentransport gültig. Die beiden Aufgaben sind dermaßen analog, daß es experimentell unter bestimmten Bedingungen möglich ist, mit Staubströmung Schwebstofftransport bzw. mit Wasserströmung Flugaschentransport zu modellieren. Kehren wir aber zum Schwebstofftransport zurück. Die extensiven Größen haben wir schon aufgeschrieben, die entsprechenden intensiven Größen sind jetzt schon leicht zu bestimmen.

Leser: Diese sind der Reihe nach — natürlich für die Flüssigkeit und für die verschiedenen Körner getrennt — das chemische Potential, die Geschwindigkeit und der statische Druck sowie die Temperatur. Die Ströme kann man demzufolge schon aufschreiben. Können wir die Diffusionsströme gegenüber dem konvektiven Strom vernachlässigen?

Autor: In den Gleichungen für den Transport der Masse und der inneren Energie kannst du es ruhig machen.

Leser: Ich habe auch nicht an die Gleichungen für den Impuls und die kinetische Energie gedacht. Ich weiß ja genau, daß nur bei verschwindender Spannung, d. h. bei reibungsfreier isobarer Strömung des (sogenannten idealen) Mediums, die Vernachlässigung erlaubt ist.

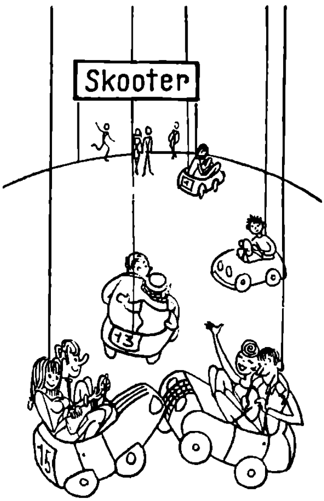
Autor: Jetzt muß man nur noch die Quellenglieder klären. Erstens: Der Massentransport der Flüssigkeit ist quellenfrei.

Leser: Warum nur der Flüssigkeit? Die Masse des Schwebstoffes geht auch nicht verloren und entsteht auch nicht.

Autor: Du hast vergessen zu sagen, die Gesamtmasse des Schwebstoffes. Denn bloß für sie hat das Gesetz von der Erhaltung der Masse Gültigkeit. Aber kann ein Korn nicht zerkleinert werden, wenn es mit einem anderen zusammenstößt? Da entstehen statt eines Korns alter Größe mehrere Körner neuer Größe, d. h., die Masse der einen Komponente verringert sich, die der anderen (kleineren) wächst.

Leser: Das sieht so aus, als wäre es eine chemische Reaktion.

Autor: Es besteht eine gewisse Ähnlichkeit, da auch hier davon die Rede ist, daß, während sich die Komponenten ändern, die Gesamtmasse unverändert bleibt. Das ist aber freilich keine chemische Reaktion — nicht die chemische Affinität ergibt die Richtung des Vorganges —, sondern der Zerkleinerungsvorgang, in dem die bei den Zusammenstößen entstehende Kraftwirkung den Zerfall der Körner verursacht. Daraus ist auch sofort ersichtlich, daß es bei der Bestimmung der Quelldichte des Impulses auch nicht genügt, nur das Gravitationskraftfeld zu berücksichtigen. Der Zusammenstoß der einzelnen Körner ist immer mit einem Impulsaustausch verbunden, der, wenn er auch nicht zur Zerkleinerung führt, als Impulsquelle (bzw. Senke) in Betracht gezogen werden muß.



Leser: Aber dann dürfen wir auch die Kraftwirkung der Flüsse auf den Schwebstoff nicht vergessen, da sie ja die Körner bewegt.

Autor: Die Kraft ist die Impulsänderung während der Zeiteinheit. Zwischen dem Wasser und dem Schwebstoff entsteht ein Impulsaustausch. Soviel Impuls wie das Schwebstoffkorn gewinnt, soviel verliert die Flüssigkeit.

Leser: Der Impulsaustausch zwischen Wasser und Schwebstoff muß also als negative Quelle in der Gleichung für das Wasser und als positive Quelle in der Gleichung für den Schwebstoff berücksichtigt werden.

Autor: Ja, und auf ähnliche Weise muß man auch diese Quellenglieder in die Bilanzgleichungen der kinetischen Energie einsetzen, die sich auf die Wechselwirkung Wasser—Schwebstoff bzw. Schwebstoff—Schwebstoff beziehen. Wie wir das in unserem Gespräch über die Strömungstechnik schon erwähnt haben, wächst infolge der Reibung die innere Energie, natürlich auf Kosten der kinetischen Energie. Das ist sinngemäß im Falle der kinetischen Energie eine negative, im Falle der inneren Energie eine positive Quelle.

Leser: In Worten ist das etwas kompliziert. Jetzt bitte ich, das mathematisch zu formulieren, das ist doch übersichtlicher. Füllen wir die Spalten aus und setzen wir die dem Gesagten entsprechenden Glieder in die Bilanzgleichung ein. Fangen wir mit der Massenbilanzgleichung an.
Für das Wasser:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} = 0 .$$

Für den Schwebstoff:

$$\frac{\partial \varrho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_k \boldsymbol{w}_k = q_k .$$

Autor: Bei der Formulierung der Impulsbilanzgleichung wollen wir nicht die verschiedenen Quellen vergessen und nicht, daß auch eine turbulente Strömung möglich ist.
Für das Wasser:

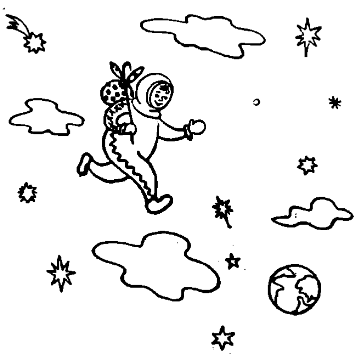
$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}) = \varrho \boldsymbol{g} - \sum_k \boldsymbol{E}_k \frac{N_k}{N} .$$

Für den Schwebstoff:

$$\frac{\partial \varrho_k \boldsymbol{w}_k}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho_k \boldsymbol{w}_k \circ \boldsymbol{w}_k + \overline{\varrho_k \boldsymbol{w}_k' \circ \boldsymbol{w}_k'}) = \varrho_k \boldsymbol{g} +$$
$$+ \boldsymbol{E}_k + \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} \boldsymbol{E}_{ik} \frac{N_i}{N} .$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ist $\boldsymbol{E}_k$ die Impulsquelldichte, die als Resultat des zwischen den Komponenten mit der Masse m_k und dem Wasser entstandenen Impulsaustausches auftritt, $\boldsymbol{E}_{ik}$ dagegen die Impulsquelldichte, die als Resultat des zwischen der Masse m_k und den gesamten übrigen Teilchen entstandenen Impulsaustausches erscheint. (Auf die Rolle von N_k/N bzw. N_i/N kommen wir noch zurück.) Der Einfachheit halber betrachten wir auf die bereits erwähnte Weise den Schwebstoff als eine aus diskreten Fraktionen bestehende Masse. (Im stetigen Falle müßte statt der Summierung integriert werden.) Ähnlich können wir die Bilanzgleichungen der inneren Energie und der kinetischen Energie aufstellen.

Leser: Vorher müßten wir noch etwas klären. Die Buchstaben $\boldsymbol{E}$ stören mich. Ich verstehe, was sie ausdrücken, aber so kommt es mir zu allgemein vor. Kann man nicht etwas Näheres darüber sagen? Sind das meßbare oder errechenbare Werte oder bloß abstrakte Zeichen?



Autor: Meßbare und errechenbare Werte. Das können wir sofort einsehen, nur müssen wir uns erinnern, daß sie einen Impulsaustausch bezeichnen. Der Impulsaustausch ist eine Wechselwirkung, deren charakteristische intensive Größe die Geschwindigkeit ist. Die Impulsänderung ist also der Geschwindigkeitsänderung proportional. Bei der Wechselwirkung zwischen Wasser und Schwebstoff ist

$$\boldsymbol{E}_k = L_k(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}),$$

bei der Wechselwirkung zwischen zwei Schwebstoffkörnern mit verschiedenen Massen aber

$$\boldsymbol{E}_{ik} = L_{ik}(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_i),$$

wobei L_k, L_{ik} die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren (ihre Definition können wir gleich sehen), $\boldsymbol{w}_k$, $\boldsymbol{w}_i$ und $\boldsymbol{w}$ dagegen die Strömungsgeschwindigkeiten der mit k bzw. i bezeichneten Schwebstoffkörner sowie die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit sind. Es ist offensichtlich, daß ein Einzelkorn sich dann im Gleichgewicht befindet, wenn die Resultierende der Kräfte Null ist. Die auf die Körner wirkenden Kräfte sind die durch die Flüssigkeit übertragene bzw. die aus dem Zusammenstoß mit den anderen Körnern entstandene Impulsänderung während der Zeiteinheit sowie die Wirkung des Gravitationskraftfeldes. (Sie alle stehen auf der rechten Seite der für den Schwebstoff aufgestellten Bilanzgleichung. Im Falle des Gleichgewichtes ist also

$$\varrho_k \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{E}_k - \sum_i \boldsymbol{E}_{ik} \frac{N_i}{N} = -L_k(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}) - \\ - \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} L_{ik}(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_i) \frac{N_i}{N}.$$

Wenn nur eine Art Korn mit der Masse m_k im Wasser vorhanden ist, dann kommt $\boldsymbol{E}_{ik}$ nicht vor. (In diesem Fall interessiert uns bloß, wie sich der gemeinsame Impuls sämtlicher Körner ändert. Der Zusammenstoß von Körnern mit verschiedenen Geschwindigkeiten, aber gleicher Masse bedeutet natürlich einen Impulsaustausch, hierdurch ändert sich aber der Gesamtimpuls der Körner nicht.) Wenn sich auch die Flüssigkeit nicht bewegt, d. h. $\boldsymbol{w} = 0$ ist, erhalten wir den Ausdruck für das Gleichgewicht

$$\varrho_k g = \gamma_k = -L_k \omega_k,$$

worin ω_k die Geschwindigkeit der im Gleichgewicht befindlichen Körner mit der Masse m_k in der ruhenden Flüssigkeit ist. Nach Definition ist das die Schwebegeschwindigkeit (bzw. nach der hydraulischen Terminologie die Sedimentationsgeschwindigkeit). Ihren Wert kann man messen und auch errechnen. Der Leitwert der Impulsquelle ist also

$$L_k = -\frac{\gamma_k}{\omega_k},$$

der negative Quotient der Größe γ_k (die man früher spezifisches Gewicht nannte) und der Sedimentationsgeschwindigkeit.

Leser: Da stört mich etwas, ich habe mich daran gewöhnt, daß ich unter Leitwert den Diffusionskoeffizienten D, den Koeffizienten der kinematischen Viskosität ν, die Temperaturleitfähigkeit a verstehe, deren Maßeinheit m^2/s ist. Jetzt willst du eine solche Zahl Leitwert nennen, die die Dimension kg/m^3s hat.

Autor: Das ist ein Mißverständnis, nicht die Dimension bestimmt die Rolle des Leitwertes, sondern umgekehrt, die Rolle des Leitwertes bestimmt seine Dimension. Die Wärmeleitfähigkeit λ ist auch ein Leitwert, seine Maßeinheit ist $\frac{W}{m \cdot K}$, die dynamische Viskosität η hat die Maßeinheit Pa · s. Die Dimension hängt davon ab, welche Proportion zwischen dem Strom der extensiven Größe und der Inhomogenität der intensiven Größe besteht. Im gegebenen Fall bezeichnet L die Impulsänderung, die infolge der Wirkung der Geschwindigkeitsänderung der am Impulsaustausch teilnehmenden Teilchen auftritt. Die in der Zeiteinheit auftretende Impulsänderung ist die Kraft, die Änderung der Impulsdichte in der Zeiteinheit ist die Kraftdichte. Die Dimension des Leitwertes ist demnach Kraftdichte/Geschwindigkeit.

Dimensionsmäßig:

$$[\text{Kraftdichte}] = [\text{Impulsdichte}] / [\text{Zeit}] =$$

$$= [\text{Masse}] \times [\text{Geschwindigkeit}] / [\text{Volumen}] \times [\text{Zeit}] =$$

$$= \frac{\text{kg m/s}}{\text{m}^3\,\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\,\text{s}^2},$$

$$[\text{L}] = [\text{Kraftdichte}] / [\text{Geschwindigkeit}] =$$

$$= \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\,\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3\,\text{s}}.$$

So erhielten wir also für den Leitwert die Maßeinheit kg/m^3s. Ich betone wieder, daß die Dimensionskontrolle eine sehr wichtige Angelegenheit ist, sie bewahrt uns oft vor Irrtümern. Eine einzige allgemeine Regel gibt es. Nach dem Homogenitätsprinzip von *Fourier* können die einzelnen Glieder einer physikalischen Gleichung nicht verschiedene Dimensionen haben. Es wäre aber ein Fehler, auf Grund der Dimensionskontrolle die physikalischen Veränderlichen neu zu gruppieren.

Leser: Das ist wahr, L_k ist also physikalisch der Proportionalitätsfaktor, der angibt, welchen Impuls die sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}_k$ bewegenden Körner vom Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ während der Zeiteinheit auf die Volumeneinheit bezogen erhalten. Jetzt habe ich nur noch ein Problem. Die Beziehung haben wir unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Gesamtkornmenge nur aus Körnern von der Masse m_k besteht. Aber eben hast du betont, daß das eine sehr grobe Annäherung ist, in Wirklichkeit besteht der Schwebstoff immer aus verschiedenen Fraktionen.

Autor: Gerade darauf wollte ich jetzt eingehen. Die verschiedenen Fraktionen bezeichnen wir mit einem Zahlenindex (1, 2, . . . ,k). Die Fraktion mit der Masse $m_1, m_2, \ldots, m_k$ besteht aus $N_1, N_2, \ldots, N_k$ Körnern. Die Gesamtkornzahl ist $N = N_1 + N_2 \ldots + N_k$. Nun können wir aus der für eine Fraktion aufgestellten Impulsbilanzgleichung die Gleichung für den ganzen Schwebstoff erhalten. Bedenken wir, daß die ganze Impulsdichte die gewichtete Summe der Impulsdichten der einzelnen Fraktionen ist:

$$\overline{\varrho \boldsymbol{w}} = \frac{1}{N} \sum_k N_k \varrho_k \boldsymbol{w}_k .$$

Leser: Das braucht man tatsächlich nicht zu beweisen, da wir bei der Multiplikation mit N die triviale Gleichheit erhalten, daß die durchschnittliche Impulsdichte, multipliziert mit der gesamten Kornanzahl, gleich dem Wert des Produktes aus der Impulsdichte und Kornanzahl ist.

Autor: Auf Grund dessen summieren wir die rechte Seite der Impulsbilanzgleichung, und wir nehmen ähnlich wie bisher an, daß die durch die Flüssigkeit auf alle Teilchen wirkende Kraft proportional der Differenz aus der Durchschnittsgeschwindigkeit $\boldsymbol{w}_k$ der Teilchen und der Flüssigkeitsgeschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ ist:

$$\sum_k \frac{N_k}{N} \varrho_k \boldsymbol{g} + \sum_k \frac{N_k}{N} \boldsymbol{E}_k = \bar{\varrho} \boldsymbol{g} + \lambda(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}) ,$$

wobei $\bar{\varrho}$ die mittlere Korndichte, λ der Proportionalitätsfaktor ist.

Leser: Bei der Summierung hast du das Glied $\sum_i \boldsymbol{E}_{ik}$ ausgelassen!

Autor: Das ist Null. (Der bei dem Zusammenstoß der Körner miteinander auftretende Impulsaustausch berührt nicht den Impuls des gesamten Schwebstoffes.) Wenn wir wieder den Gleichgewichtszustand betrachten, d. h., wenn die Schwerkraft und die Wechselwirkung des Impulsaustausches Flüssigkeit — Schwebstoff gleich ist, und wir wieder den Fall mit $\boldsymbol{w} = 0$ nehmen, erhalten wir

$$\bar{\varrho} g = \bar{\gamma} = -\lambda \bar{\omega},$$

wobei ω die Geschwindigkeit des im Gleichgewicht befindlichen ganzen Schwebstoffes in der ruhenden Flüssigkeit ist. Das ist nach der Definition die resultierende Sedimentationsgeschwindigkeit des Schwebstoffes. Daher ist $-\lambda = \dfrac{\bar{\gamma}}{\bar{\omega}}$.

Anderseits haben wir vorher schon abgeleitet, daß

$$\boldsymbol{E}_k = L_k(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}) \quad \text{bzw. im Falle} \quad \boldsymbol{w} = 0 \quad \boldsymbol{E}_k = L_k \omega_k$$

gilt. Daher besitzen wir für die Summe zweierlei Ausdrücke:

$$\sum_k \frac{N_k}{N} \boldsymbol{E}_k = \lambda \bar{\omega} = \sum_k \frac{N_k}{N} L_k \omega_k .$$

Da ω gerade der Erwartungswert der Geschwindigkeit ω_k ist, d. h. die Geschwindigkeit, mit der der Massenmittelpunkt des ganzen Schwebstoffes schwebt, so ist

$$\lambda = \sum_k \frac{N_k}{N} L_k ,$$

woraus

$$-\lambda = \sum_k \frac{N_k}{N} \frac{\gamma_k}{\omega_k} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\omega}}$$

folgt. Dieser Ausdruck veranschaulicht besonders gut die Verteilung der Schwebegeschwindigkeiten für den Fall, daß alle

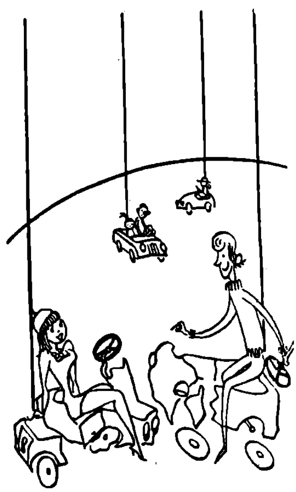
Körner das gleiche spezifische Gewicht haben, d. h. $\gamma_k = \overline{\gamma}$ ist. Da nämlich

$$\frac{1}{\overline{\omega}} = \sum_k \frac{N_k}{N} \frac{1}{\omega_k}$$

gilt, kann die resultierende Schwebegeschwindigkeit formal ähnlich wie die Summe von N parallel geschalteten Widerständen aufgefaßt werden. Die Wechselwirkungsquelldichte der auf der rechten Seite der Impulsbilanzgleichung vorkommenden Schwebstoff—Flüssigkeit können wir auch auf zweierlei Art angeben; entweder müssen wir die resultierende Schwebegeschwindigkeit und die resultierende Dichte der Gesamtmenge kennen oder die auf die Körner bezogenen Werte und natürlich dabei auch die relative Anzahl der Körner.

Leser: Und kümmern wir uns in der für ein Einzelkorn aufgeschriebenen Gleichung nicht um die Wechselwirkung zwischen den Körnern?

Autor: Wenn wir die Bewegung von Körnern bestimmter Größe verfolgen wollen und nicht die Gesamtheit des ganzen Schwebstoffes (eine solche Aufgabe ist möglich), dann müssen wir auch dieses Glied in Betracht ziehen. Der in ihm vorkommende Koeffizient L_{ik} kann nur dann Null werden, wenn Körner gleicher Masse zusammenstoßen. Es ist leicht einzusehen, daß sein Wert proportional dem Quotienten der zusammenstoßenden Massen sein wird. Wir detaillieren die Art der Definition nicht, der Gedankengang ist ähnlich den Vorangegangenen. Nur soviel sei dazu gesagt; man kann keinen elastischen Zusammenstoß voraussetzen, wenn eine Zerkleinerung passiert, d. h., wenn die Quelldichten q_k



der Massen-Bilanzgleichungen von Null abweichen. Der Zerkleinerungsvorgang und die dabei auftretende Zerkleinerungsarbeit sind sehr wesentliche Fragen, mit denen wir uns aber — wie vereinbart — nicht befassen. Als Zusammenfassung schreiben wir die Bilanzgleichung für den Impuls des Wassers und des Schwebstoffes auf.

Für das Wasser:

$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w} + \overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}\right) =$$

$$= \varrho \boldsymbol{g} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\bar{\omega}}}\left(\bar{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{w}\right).$$

Für den aus der Körnermasse k bestehenden Schwebstoff:

$$\frac{\partial \varrho_k \boldsymbol{w}_k}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\varrho_k \boldsymbol{w}_k \circ \boldsymbol{w}_k + \overline{\varrho \boldsymbol{w}_k' \circ \boldsymbol{w}_k'}\right) =$$

$$= \varrho_k \boldsymbol{g} - \frac{\gamma_k}{\omega_k}\left(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}\right) + \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} \boldsymbol{E}_{ik} \frac{N_i}{N}.$$

Für den gesamten Schwebstoff:

$$\frac{\partial \overline{\varrho \boldsymbol{w}}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\overline{\varrho \boldsymbol{w}} \circ \bar{\boldsymbol{w}} + \overline{\overline{\varrho \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{w}'}}\right) = \bar{\varrho} \boldsymbol{g} - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\bar{\omega}}}\left(\bar{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{w}\right).$$

Auf Grund des Bisherigen könnten wir ohne Probleme die Bilanzgleichungen der kinetischen und der inneren Energie aufstellen, aber jetzt sehen wir auch davon ab. Das ganze Gleichungssystem ergibt die allgemeinen Zusammenhänge des Feststofftransportes, mit denen wir unter gewissen Voraussetzungen zu den in der Hydraulik verwendeten verschiedenen Grundgleichungen gelangen können. Erstens: Fast in allen Fällen vernachlässigen sie die auf die Körner bezogene Massenquelle, d. h., sie betrachten den Zusammenstoß der Schwebstoffkörner als einen zerkleinerungslosen Prozeß. Zweitens: Im allgemeinen charakterisieren sie die Feststoffe nur auf Grund ihrer Konzentration, und beachten nicht die unterschiedliche Korngröße und die Körnermasse. Unter beiden Voraussetzungen erhalten wir die Franklschen Gleichungen, die die Bilanzgleichung der inneren Energie nicht enthalten. Die Barenblattschen Gleichungen enthalten auch nur die Impuls-Bilanzgleichungen.

Die Beschreibungsgleichungen von *Welikanow* beschränken sich dagegen nur auf die Massen-Bilanzgleichungen. Eine weitere Vereinfachung bedeutet die von *Dobbins* angegebene Form, die eine zweidimensionale Strömung voraussetzt und die Diffusionsströme als Produkt aus dem turbulenten Leitwert und dem Gradienten der entsprechenden intensiven Größe angibt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} c) = 0 .$$

Leser: Warum arbeitet man nicht mit der ganz allgemeinen Form?

Autor: Darauf kann ich keine exakte Antwort geben, aber offensichtlich, weil man nach Einfachheit strebt. *Dobbins* z. B. kam durch weitere Vereinfachungen zu analytischen Lösungen, die für Berechnungen geeignet sind. Ich will auch nicht weiter die Arbeitshypothesen diskutieren, nur auf einen wichtigen Gesichtspunkt möchte ich noch deine Aufmerksamkeit lenken: Zu den aufgeschriebenen Bilanzgleichungen — welche Vereinfachung wir auch anwenden — müssen wir auf jeden Fall die Charakteristik der Kornverteilung des Schwebstoffes angeben, die sogenannte Kornverteilungskurve. Das ist selbst dann nötig, wenn wir von durchschnittlichen oder mittleren Korngrößen reden. Verschiedene Kornverteilungen können zu demselben charakteristischen Maß gehören (abgesehen davon, daß der Durchschnittswert von Maß, Zahl, Fläche und Volumen im allgemeinen nicht übereinstimmt!), daher können die verschiedenen Versuchsresultate voneinander bedeutend abweichen. „Vom praktischen Standpunkt aus müssen wir beachten, daß bei der Charakterisierung des Feststoffes uns niemals die Eigenschaften der einzelnen Feststoffkörner interessieren, sondern immer die ganze Masse des Feststoffes“, betont *J. Bogárdi* in seinem Buch.[1]

[1] *Bogárdi, J.:* Sediment Transport in Alluvial Streams. Budapest 1974, S. 19

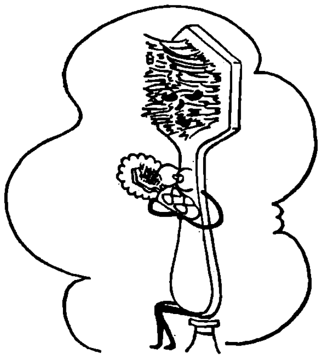
Leser: Ich habe das Gefühl, daß wir uns mit dieser Frage viel ausführlicher befaßt haben als mit den anderen Themen.

Autor: Das möchte ich nicht behaupten, vorher sind wir immer zu den Gleichungen der bekannten Form gelangt, jetzt kamen wir aber nicht weiter als zur allgemeinen Form der Bilanzgleichungen. Wir haben die Gleichungen für die innere und kinetische Energie ausgelassen, und wir haben kein Wort über die Eindeutigkeitsbedingungen verloren. Vielleicht erschien dir nur darum die Besprechung ausführlicher als die bisherigen, weil von einer solchen komplexen Aufgabe die Rede war, bei der man auf Grund vielseitiger umfassender Überlegung entscheiden mußte, welche extensive und charakteristische intensive Größe und Quelldichte man in Betracht ziehen muß. Besonders im letzteren Fall war Umsicht nötig. Du konntest dich überzeugen, daß die durch den Buchstaben q auf der rechten Seite der allgemeinen Bilanzgleichung bezeichnete Größe in jedem Fall eine spezielle Form hatte, nicht einfach Stromdichten darstellte. Bei den chemischen Reaktionen in der Massen-Bilanzgleichung besteht die Quelldichte aus einem exponentiellen Glied und dem Potenzprodukt der Konzentrationen. In der Impuls-Bilanzgleichung des Schwebstofftransports steht ein Quellenglied, das proportional der Differenz der Schwebstoff- und der Wassergeschwindigkeit ist. Wir erhalten einen noch komplizierteren Zusammenhang für die Quelldichten, wenn wir auch den Zerkleinerungsvorgang berücksichtigen; dann treten in den Bilanzgleichungen für Masse, Energie und Impuls ergänzende Quellenglieder auf. Im allgemeinen erfordert gerade die Bestimmung von q eine sehr gründliche Erwägung der Umstände. Das einzige, was wir darüber im allgemeinen sagen können, ist, daß die Tensorstufe der Quelle immer gleich der ihrer charakteristischen extensiven Größe ist, die Stufe des Stromes ist immer um eins größer:

Extensive Größe	Strom	Quelle
Skalar	Vektor	Skalar
Vektor	Tensor	Vektor

Hierbei gibt es keine Ausnahme und kann es auch nicht geben!

Leser: Viele sprechen auch von skalaren Strömen, wie kann man diese hier einfügen?



Autor: Natürlich überhaupt nicht, da zu einem skalaren Strom eine extensive Größe gehören würde, deren Tensorstufe um eins kleiner als die eines Skalars wäre, eine solche Größe aber existiert nicht.
Dies hat, — wie die Benennung Wärmenenergie, — nur geschichtliche Ursache. In Wirklichkeit ist das, was einige Leute skalaren Strom nennen, nichts anderes als die Quelle. Nicht dadurch wird etwas ein Strom, weil wir es so nennen. „Wenn ich eine Schuhbürste unter die Einheit Säugetier zusammenfasse, so bekommt sie damit noch lange keine Milchdrüsen."[1]

Leser: Von den Quellen können wir also nur soviel sagen, daß sie die gleiche Tensorstufe wie die entsprechenden extensiven Größen haben, und sowohl Maß wie Geschwindigkeit der als Resultat der mechanischen, thermischen oder chemischen Wechselwirkungen entstehenden (oder verschwindenden) extensiven Größen sind.

Autor: Manchmal ist die Quelle das Resultat von noch komplizierteren Wechselwirkungen. Als Beispiel erwähne ich die mit der Abwasserreinigung verbundenen Quellenglieder. In diesem Falle nämlich enthält die Transportgleichung der verschiedenen Schmutzkomponenten auch eine biologische Quelle. Die Mikroorganismen erzeugen und verbrauchen Schmutzkomponenten. Diese Tätigkeit der Mikroorganismen wirkt auch auf die innere Energie, also muß man dies in der Gleichung der inneren Energie als Quelle berücksichtigen. Die Geschwindigkeit, Richtung

[1] *Engels, F.:* Anti-Dühring. Berlin 1952, S. 49

und thermische Wirkung dieses biologischen (oder biochemischen) Vorgangs sind Faktoren, ohne die man das Abwasserproblem gar nicht formulieren kann.

Leser: Allmählich erwartest du schon, daß der Ingenieur auch Biologe sein soll. Gut, daß du nicht gleich Chirurgen-Ingenieure ausbilden willst.

Autor: Spotte nicht, tatsächlich ist eine biologische Ingenieur- oder gar eine chirurgische Ingenieurtätigkeit notwendig. Nur eben nicht in einer Person. Schon vor einigen tausend Jahren entstand die Arbeitsteilung, und je mehr wir mit der Erkenntnis der Natur vordringen, um so differenzierter wird sie. Immer mehr und besser spezialisierte Fachleute sind notwendig, und gleichzeitig ist eine immer engere Zusammenarbeit erforderlich.

Leser: Jetzt bist du aber in Widerspruch geraten zu all dem, was du bisher gesagt hast. Es scheint, daß man keine so einheitliche Anschauungsweise der technischen Wissenschaften bilden kann, bei der man, wenn man auf ein anderes Fachgebiet gelangt, sich nicht als Laie fühlen müßte.

Autor: Von Anfang an habe ich betont, es handelt sich nicht darum, daß jemand auf allen Gebieten Spezialist sein soll. Aber eben die erhöhte Spezialisierung und die damit verbundene Arbeitsteilung verlangen, jawohl, verlangen die Bildung einer gemeinsamen Sprache. Ohne diese ist sogar auf dem eigenen Fachgebiet die Orientierung unmöglich. Man muß erkennen, daß die Verbindung der einzelnen Fachgebiete am meisten in der Bestimmung der Quelldichten in Erscheinung tritt; hier schließen sich der Chemiker mit dem Strömungstechniker, der Biologe mit dem Hydrologen, der Verbrennungstechniker mit dem Chemiker usw. zusammen.

Leser: Du wünschst also, daß die Vertreter der verschiedenen Wissenschaften eine gemeinsame Sprache sprechen sollen und in den verwandten Fachgebieten orientiert seien, was allerdings auch zur Allgemeinbildung gehört.

Autor: Es ist nicht nur von der Allgemeinbildung die Rede, sondern von der Wirksamkeit der geleisteten Arbeit. Die umfassende Informiertheit erleichtert die Lösung der speziellen Fachprobleme. Ein Beispiel von vielen: Um die Mitte des 19. Jahrhunderts lebte der Arzt und Physiker *Julius Robert Mayer* (1814 bis 1878). In Batavia verbreitete sich einmal unter den Matrosen und den Einheimischen eine schwere Lungenentzündungsepidemie. In dieser Zeit war der Aderlaß eine übliche Therapie dieser Krankheit. *Mayer* machte als Schiffsarzt die Erfahrung, daß das Blut der Matrosen normalfarbig, das der Einheimischen aber ungewohnt schillernd war. Offenbar war er nicht der erste, der das wahrgenommen hatte. Aber seine naturwissenschaftliche Bildung bewog ihn dazu, für diese Erscheinung auch eine naturwissenschaftliche Erklärung zu finden. Zur richtigen Lösung führte *Mayer* die Überlegung, daß in der organischen Welt und in der leblosen Natur dieselben physikalischen und chemischen Gesetze herrschen. Er gelangte zu zwei wichtigen Folgerungen:

1. Der Unterschied in der Farbe des Blutes steht mit der Temperaturdifferenz zwischen dem menschlichen Körper und der Umgebung in Zusammenhang; 2. der Unterschied in der Blutfarbe ist der Ausdruck des Sauerstoffbedarfs des menschlichen Körpers, d. h., er drückt die Intensität des im Organismus stattfindenden Oxydationsvorgangs aus. *Mayer* gelangte auf Grund logischer Überlegungen zu der Erkenntnis, daß sich zwischen der infolge der Wirkung der Lebensfunktion bildenden

Wärme und der geleisteten Arbeit ein bestimmter quantitativer Zusammenhang besteht.

Leser: Und als Resultat dieser Erkenntnis formulierte er das sogenannte Wärmeäquivalent der mechanischen Arbeit ...

Autor: ... sowie — als erster — das Gesetz von der Erhaltung der Energie. (Im Juni 1841 formulierte *Mayer* seinen Gedanken in endgültiger Form. Später sandte er den Artikel an eine der angesehensten physikalischen Zeitschriften, die „Annalen der Physik". Aber *Poggendorf*, der Verleger der Zeitschrift, veröffentlichte die Arbeit nicht, er antwortete nicht einmal dem Verfasser. Erst nach seinem Tode fand man den Artikel in seinem Archiv.) *Mayer* wäre niemals soweit gekommen, hätte er nur in gewohnten Bahnen gedacht, hätte er sich nicht von der Routine des engen Fachgebietes loslösen können. Die Wissenschaft unserer Zeit zeigt unzählige Beispiele für wissenschaftliche Erfolge bei Verknüpfung der verschiedenen Fachgebiete. Beinahe jedes Jahr hören wir, daß aus verschiedenen Fachgelehrten bestehende Arbeitsteams mit dem Nobelpreis ausgezeichnet werden. Wir könnten eine lange Reihe von Beispielen anführen, aber vielleicht genügt es auch, daran zu erinnern, daß ein sogenannter Fachidiot, den außer seinem engen Spezialgebiet nichts interessiert, oft selbst im eigenen Fachbereich nicht recht Bescheid weiß. Schließen wir also dieses Thema ab und gehen wir zu einem anderen Fragenkomplex, zu einem anderen Fach über, zur technischen Mechanik.

Zehntes Gespräch

Technische Mechanik

„Die mathematischen Formulierungen
der verschiedenen Wissenschaften
sind einander dermaßen ähnlich,
daß ihre Kenntnis in einer Wissenschaft
beim Studium einer anderen große Hilfe
leisten kann.“

Maxwell

Autor: Wir werden uns jetzt über die technische Mechanik unterhalten, sie besteht aus mehreren Teilgebieten und auch die schon besprochene Strömungslehre gehört eigentlich hierher. Jetzt wird zunächst nur von Aufgaben die Rede sein, die mit den festen Körpern in Verbindung stehen. Wir werden uns damit befassen, wie mit Hilfe der allgemeinen Bilanzgleichungen die Grundgleichungen der Elastizitätslehre und die der plastischen Verformung formuliert werden können.

Leser: Der Ausgangspunkt — wie bisher in allen Fällen — ist die Auswahl der charakteristischen extensiven und intensiven Größen, weiterhin die Bestimmung der Quelldichte. Danach leiten wir formal auf dem gewohnten Wege die Gleichungen mit Hilfe von Vereinfachungs- und Beschränkungsbedingungen ab. Ich glaube, wir werden keine Schwierigkeiten haben, denn wir haben von der mechanischen Wechselwirkung im Zusammenhang mit dem Kolbenbeispiel schon am Anfang gesprochen. Wir wissen, daß die Arbeit der äußeren Kraft die innere Energie des Systems um den Wert $-p\Delta V$ erhöht. Die charakteristische extensive Größe der Wechselwirkung ist also das Volumen V, seine intensive Größe dagegen ist der negative Wert des Druckes, die Spannung $-p$.

Autor: Jetzt ist in der Tat auch im wesentlichen davon die Rede, daß der Körper einer äußeren Kraftwirkung ausgesetzt ist und sich infolgedessen seine geometrischen Maße verändern. Die festen Körper unterscheiden sich unter anderem in einem sehr wesentlichen Punkt von den Gasen und Flüssigkeiten. In den letzteren hat die Wirkungsausbreitung keine bevorzugte Richtung, d. h., das Medium ist isotrop. Wenn wir den Spannungszustand nur mit einer einzigen (skalaren) Zahl, mit dem negativen Druck ($-p$) charakterisieren, die Änderung der geometrischen Maße aber nur mit der Volumenänderung V, so haben wir stillschweigend zur Bedingung gemacht, daß es sich um ein isotropes Medium handelt. Ist aber dieselbe Charakterisierung auch im Fall fester Körper zulässig? Richtiger, genügt es zur Charakterisierung der Spannung, einen Druckwert anzugeben? Genügt es, nur eine Volumenänderung zur Charakterisierung der Änderung der äußeren Maße anzugeben? Und daraus folgt die Frage: Kann man die geleistete Arbeit durch das Produkt aus Volumenänderung und Druck eindeutig charakterisieren?

Leser: Es ist offensichtlich, daß auf alle deine Fragen die Antwort nein lautet. Die Ausbreitung der Kraftwirkungen, die Veränderung der Maße je nach der Kristallstruktur sind richtungsabhängig. Eine Glasplatte z. B. verhält sich unterschiedlich, wenn wir die gleiche Druckkraft auf sie einmal in Längs-, das andere Mal in Querrichtung wirken lassen.

Autor: Dein Beispiel ist leider nicht gut, das Glas ist nämlich kein fester Körper, sondern eine sogenannte unterkühlte Flüssigkeit. Im alltäglichen Sprachgebrauch verwendet man tatsächlich das Wort fest für alle Medien, deren Temperaturen unter dem Schmelzpunkt liegen, den physikalischen Eigenschaften nach nennen wir jedoch nur die Stoffe mit Kristallstruktur feste Körper. Die kristalline Struktur ist eben die Ursache dafür, daß, wie du übrigens richtig gesagt hast, in den verschiedenen Richtungen des Raumes die Eigenschaften der Körper jeweils andere sind, d. h., daß die Leitwerte richtungsabhängig sind. Zum Beispiel unterscheiden sich in einem willkürlich angenommenen Koordinatensystem beim Quarzkristall die Wärmeleitfähigkeiten in den Richtungen x, y, z stark voneinander. Hinsichtlich der Kraftwirkung deformieren sich aus dem Quarzkristall ausgeschnittene Stäbchen bei derselben Beanspruchung (Druck, Zug, Verdrehung) unterschiedlich, je nachdem, in welcher Richtung wir das Probestück aus dem Kristall ausgeschnitten haben.

Leser: Habe ich richtig verstanden, du sagtest, daß die Richtungsabhängigkeit der Leitwerte mit der Kristallstruktur zusammenhängt? Demnach ist also der Leitwert eine Stoffcharakteristik?

Autor: Genau davon ist die Rede. Als wir die Gleichungen der Wärmeleitung, Diffusion und der Strömungstechnik abgeleitet haben, standen die entsprechenden Leitwerte, der Diffusionskoeffizient D, die Temperaturleitfähigkeit a und der Viskositätskoeffizient ν zunächst nur nach dem Divergenzzeichen, und wir konnten sie nur mit der Bemerkung vorziehen, daß der Leitwert konstant und unabhängig von den Raumkoordinaten ist. Das ist natürlich eine sehr strenge Bedingung, deren Gültigkeit man in jedem Falle kontrollieren muß.

Leser: Jetzt müssen wir also unsere entsprechenden Leitwerte hinter dem Divergenzzeichen stehen lassen und die Anisotropie des Mediums genau beachten?

Autor: Wir werden es gleich sehen. Vor allem müssen wir die extensiven Größen zusammensuchen. Der feste Körper wird einer Kraftwirkung ausgesetzt. Die Kraft ist die Impulsänderung in der Zeiteinheit. Die Ausbreitung der Kraftwirkung ist also gar nichts anderes als der Impulsstrom. Der Impuls ist eine der charakteristischen extensiven Größen.

Leser: Mit dem Impulsstrom haben wir uns schon während unseres sechsten Gespräches befaßt, als wir die Aerodynamik besprachen.

Autor: Wir verwenden jetzt auch die dort festgestellten Zusammenhänge. (Wenn du willst, können wir eine Weile warten, bis du das sechste Gespräch nochmals durchblättert hast.)

Autor: Fahren wir fort. Welche extensiven Größen müssen wir außer dem Impuls noch beachten?

Leser: Die Masse bleibt offenbar konstant, es tritt kein Massenaustausch auf. Die kinetische Energie ist auch jetzt nicht interessant, da sich der Massenmittelpunkt des einer Kraftwirkung ausgesetzten Körpers in Ruhe befindet. Die innere Energie kann sich aber ändern, da die äußere Kraft am Körper Arbeit verrichtet.

Autor: In der Tat ist die innere Energie unsere andere extensive Größe. Bezüglich der Kristallstruktur handelt es sich nämlich darum, daß die äußere Kraft die aufeinander bezogene Lage der Teilchen des festen Körpers verändert, sie rückt sie aus ihrer Gleichgewichtslage. Dieser entspricht eine minimale potentielle Energie. Zur Bewegung aus der Gleichgewichtslage ist also Energieübertragung notwendig. Bis zu einer von der stofflichen Beschaffenheit abhängigen Grenze widersteht der Körper elastisch der äußeren Kraftwirkung. Darunter ist zu verstehen, daß innere Kräfte auftreten, die sich mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht befinden. Nach dem Wegnehmen der äußeren Kräfte führen die inneren Kräfte den Körper in den ursprünglichen Zustand zurück. Mit anderen Worten: Als Resultat der äußeren Arbeitsleistung wächst die innere Energie; nach Wegnahme der äußeren Kraftwirkung verrichtet der Körper Arbeit auf Kosten der inneren Energie und kehrt in seinen Ursprungszustand zurück. Diese Art von Deformation nennen wir elastische Deformation.

Leser: Und wenn die äußere Kraft die vorhin erwähnte Grenze überschreitet?

Autor: Dann verändert sich auch die Kristallstruktur, der Körper erleidet eine dauernde Deformation. Zur Änderung der Kristallstruktur ist eine bestimmte Energie nötig. Dazu wird ein Teil der durch Arbeit übertragenen Energie verbraucht. Diese bleibende Formveränderung nennen wir plastische Deformation, den erwähnten Grenzwert aber Fließ- (oder Plastizitäts-) Grenze. Durch plastische Deformation verändern sich wesentlich die Struktur und die Eigenschaften des festen Körpers. Im Verhältnis zum undeformierten Zustand können sich die Wärmeleitfähigkeit, die elektrischen und magnetischen Eigenschaften usw. wesentlich ändern.

Leser: Die Aufgabe sieht ziemlich kompliziert aus. Wir müßten in der Festkörperphysik besser Bescheid wissen, um die Aufgaben lösen zu können.

Autor: Zur Lösung der Aufgaben gewiß, aber wie bisher immer, so beschränken wir uns auch jetzt nur auf die Ableitung der Grundgleichungen, genauer, wir zeigen nur, wie sich aus der allgemeinen Bilanzgleichung die Grundgleichungen ergeben. Wir fangen mit der Impulsübertragung an.

Leser: Vom Impuls wissen wir, daß er ein Vektor ist, also ist die dazugehörige charakteristische intensive Größe auch ein Vektor. Aber welche Größe ist das?

Autor: Es ist jetzt einfacher, wenn wir den umgekehrten Weg beschreiten, d. h., wir konstruieren nicht aus der intensiven Größe die Stromdichte, sondern wir bestimmen aus der Stromdichte die charakteristische intensive Größe.

Leser: Aber warum, ich habe mich schon dermaßen an das Verfahren gewöhnt, daß die Ableitung beinahe automatisch erfolgt.

Autor: Du wirst sehen, daß wir jetzt keine besonderen Wege brauchen, wir könnten getrost auch auf dem gewohnten Weg fortfahren. Die Vereinfachung ist aber ein solcher Vorteil, um dessentwillen es lohnt, einen kleinen Umweg zu machen. Auch schon deshalb, weil es oft vorkommen kann, daß es im Falle einer gegebenen Wechselwirkung nicht ganz auf der Hand liegt, welche intensiven Größen die charakteristischen sind. Sagen können wir aber, wie die Stromdichten aussehen (z. B. in der Elektrodynamik). Auch jetzt liegt ein derartiger Fall vor. Aus unseren früheren Gesprächen wissen wir bereits, was die Diffusionsstromdichte des Impulses ist.

Leser: Ich habe deinen Rat befolgt und unser sechstes Gespräch über die Aerodynamik nochmals durchgesehen, und die Antwort auf deine Frage lautet: Die Diffusionsstromdichte des Impulses ist der Spannungstensor.

Autor: Wir wissen auch, daß die Diffusionsstromdichte proportional der Inhomogenität der charakteristischen intensiven Größe ist, der Proportionalitätsfaktor aber ist der Leitwert. Die intensive Größe muß ein Vektor sein (da der Impuls auch ein Vektor ist). Die Inhomogenität des Vektors wird aber durch die mit dem Nablaoperator gebildeten Produkte gegeben. So ist (vorläufig bezeichnen wir die noch unbekannte intensive Größe nur mit dem Buchstaben $\boldsymbol{s}$) der Spannungstensor

$$\boldsymbol{T} = L_1(\nabla \circ \boldsymbol{s}) + L_2(\nabla, \boldsymbol{s})\,\boldsymbol{I},$$

der vollkommen analog dem in unserem sechsten Gespräch beschriebenen, aus dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{w}$ aufgebauten Spannungstensor ist. Was kann die physikalische Bedeutung des Vektors $\boldsymbol{s}$ sein?

Leser: Wie du sagtest, ist er eine solche intensive Größe, deren Gradient die Richtung des nichtkonvektiven Impulsstromes bestimmt.

Autor: Noch konkreter!

Leser: Bei der Aerodynamik war die Strömungsgeschwindigkeit die charakteristische intensive Größe. Das ist aber jetzt nicht möglich, denn wir haben erwähnt, daß es sich um einen Körper handelt, dessen Massenmittelpunkt im Laufe des Vorgangs unbeweglich bleibt.

Autor: Deshalb rekapitulieren wir, warum wir von der Strömungsgeschwindigkeit sagten, daß sie eine charakteristische intensive Größe ist.

Leser: Weil ihr Gradient den nichtkonvektiven Impulsstrom ergibt.

Autor: Warum?

Leser: Das ist anschaulich genug, obzwar wir es bis jetzt nicht spezifiziert haben. Die Schwebstoffe mit größerer Geschwindigkeit beschleunigen und reißen die langsamen Schwebstoffe mit, und dabei vermindert sich ihre Geschwindigkeit. Die Beschleunigung (bzw. Verzögerung) geschieht unter dem Einfluß des Impulsaustausches.

Autor: Die Impulsänderung während der Zeiteinheit ist die Kraft. Die Flüssigkeitsschichten verschiedener Geschwindigkeiten üben aufeinander Kraftwirkungen aus. Was verstehen wir unter verschiedene Geschwindigkeiten?

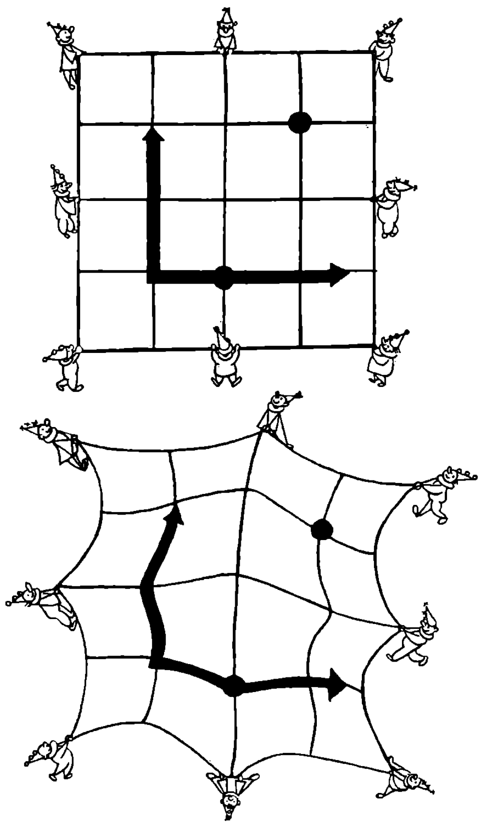
Leser: Die Geschwindigkeit ist als Verschiebung je Zeiteinheit definiert. Oder genauer: Der Differentialquotient (nach der Zeit) der Weg-Zeit-Kurve.

Autor: Die aufeinander bezogenen verschiedenen Geschwindigkeiten bedeuten also, daß die Teilchen sich relativ zueinander bewegen. Wenn sich jeder einzelne Punkt eines Gummiteppichs mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, sind die aufeinander bezogenen Punkte unbeweglich, das auf den Teppich gezeichnete Bild des Koordinatennetzes ist unverändert (siehe das Bild auf S. 188; entnommen aus *Churgin, Ja.:* Na und? Moskau 1967). Wenn die kleinen Männchen den Teppich in verschiedene Richtung zu ziehen beginnen, deformiert sich das Koordinatennetz. Warum?

Leser: Offensichtlich darum, weil sich die einzelnen Punkte des Teppichs relativ zueinander bewegen. Infolge der äußeren Kraftwirkung deformiert sich der Teppich.

Autor: Und wenn unsere Männchen den Teppich loslassen?

Leser: Vorausgesetzt, daß sie keine dauernde Formänderung verursacht haben (der Gummi ist nicht zerrissen oder hat sich nicht gestreckt), dann nimmt nach Wegfall der äußeren Kraftwirkung der Teppich seine ursprüngliche Form wieder an.



Autor: Zwischen der äußeren Kraftwirkung und der Deformation besteht also ein Zusammenhang. Im (elastisch) deformierten Körper beginnt nach Erlöschen der äußeren Kraftwirkung ein Ausgleichsvorgang, der solange dauert, bis der Körper seine ursprüngliche Form wiedergewinnt. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Ausgleichsvorgang ein Impulstransport ist, da die Formänderung (die Rückkehr des deformierten Teppichs zu der ursprünglichen Form ist ebenfalls eine Formveränderung) durch eine Kraftwirkung verursacht wird, diese aber mit einer Impulsänderung verbunden ist.

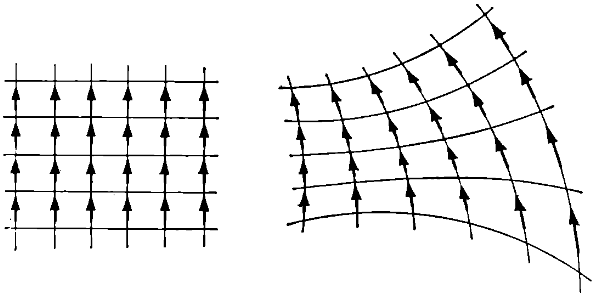
Leser: Infolgedessen ist der nichtkonvektive Impulsstrom vom Maß der Deformation abhängig?

Autor: Fassen wir kurz zusammen, wovon bis jetzt die Rede war: In der Strömungslehre haben wir den nichtkonvektiven Impulsstrom durch den Gradienten der Strömungsgeschwindigkeit angegeben. Wir haben festgestellt, daß er mit der relativen Bewegung der einzelnen Teilchen zueinander zusammenhängt. Eine solche Relativbewegung ist nicht nur in einem strömenden Medium möglich. Unabhängig davon, ob sich das Medium (dessen Massenmittelpunkt) bewegt oder nicht bewegt, bewirkt seine Deformation einen nichtkonvektiven Impulsstrom.

Leser: Jetzt müssen wir klären, wodurch wir die Deformation charakterisieren können. Die genaue Übersetzung des lateinischen Wortes heißt Verformung, Formänderung; physikalisch bedeutet Deformation die infolge einer Kraftwirkung auftretende Formänderung. Zu ihrer Charakterisierung müssen wir offenbar die mathematische Beschreibung des Körpers im Anfangs- und im verformten Endzustand angeben.

Autor: Wir müssen also die räumlich-geometrische Form des untersuchten Körpers kennen. Dem Problem sind wir schon am Schluß unseres vierten Gespräches begegnet, wo von den Eindeutigkeitsbedingungen die Rede war. Dort sagten wir, „der Variabilitätsbereich gibt an, in welchem Intervall die in der Gleichung vorkommenden Veränderlichen (die geometrischen Veränderlichen einbegriffen) variieren können. Für die geometrischen Veränderlichen bedeutet das die Beschreibung (oder evtl. die Zeichnung) der geometrischen Form, die das untersuchte System von seiner Umgebung abgrenzt".

Leser: Das einfachste ist die Angabe der Zeichnung. Im allgemeinen pflegen wir nicht die Umrißlinien bzw. die Umgrenzungsflächen der Maschinen oder Arbeitsstücke in mathematischer Form zu beschreiben.



Autor: Wenn du trotzdem die geometrische Form mathematisch beschreiben wolltest, wie würdest du das anfangen?

Leser: Ich gäbe die Koordinaten x, y und z an, die die Punkte einer Fläche darstellen.

Autor: Zu jedem solchen Punkt kannst du je einen Vektor $\boldsymbol{r}$ zeichnen, dessen Komponenten die Koordinaten x, y, z sind. Wenn wir die Fläche wegen der Anschaulichkeit mit einem Quadratnetz versehen, dann wird zu jedem einzelnen Schnittpunkt jeweils ein anderer Vektor $\boldsymbol{r}$ gehören. Die Differenz zweier solcher benachbarter Ortsvektoren bezeichnen wir mit $\boldsymbol{s}$. Diese Größe ist selbst ein Vektor. Vor der Deformation können diese $\boldsymbol{s}$-Vektoren als gleich lange, den Körper gleichmäßig ausfüllende und parallele Pfeile dargestellt werden. Wenn der Körper deformiert wird, ändert sich die Lage der Pfeile ($\boldsymbol{s}$-Vektoren) ebenfalls. In dem deformierten Körper ist im allgemeinen die Verteilung, Länge und Parallelität der Vektoren nicht mehr gleichmäßig. Diesen Vektor $\boldsymbol{s}$, dessen Lage, Verteilung und Größe die Deformation charakterisiert, nennen wir den Deformationsvektor. Natürlich beziehen wir den Deformationsvektor nicht nur auf die äußeren Flächen, sondern auch auf die Flächen innerhalb des Körpers (Schnitte), deshalb können wir sagen, daß er im ganzen Körper definiert ist.

Leser: Und dieser Vektor wäre die die Deformation beschreibende charakteristische intensive Größe?

Autor: Ja, das kannst du leicht einsehen, denn wir wissen bereits, daß der nichtkonvektive Impulsstrom eigentlich die Spannung ist.
Wir haben ebenfalls erwähnt, daß die Spannung proportional der Deformation ist. Je größer die (räumliche) Inhomogenität des Deformationsvektors ist, desto größere Spannungen gibt es innerhalb des Körpers. Das Maß der Inhomogenität können wir wie bisher mit Hilfe des Nablaoperators angeben. So erhalten wir die bereits aufgeschriebene Beziehung:

$$\boldsymbol{T} = L_1(\nabla \circ \boldsymbol{s}) + L_2(\nabla, \boldsymbol{s})\,\boldsymbol{I}.$$

Auf der rechten Seite bedeutet das erste Glied den abgeleiteten Deformationstensor multipliziert mit dem Leitwert L_1 (der selbst ein Tensor ist). Der abgeleitete Tensor drückt die reine Formänderung, die Deformation, aus. Das zweite Glied gibt die eine Volumenänderung an. (Genauer wollen wir das jetzt nicht behandeln, es ist in jedem Handbuch nachzulesen.) Abgekürzt schreiben wir an Stelle von Grad $\boldsymbol{s} = \nabla \circ \boldsymbol{s}$ die Größe $\boldsymbol{S}$, an Stelle von div $\boldsymbol{s} = (\nabla, \boldsymbol{s})$ den Buchstaben S; dann wird

$$\boldsymbol{T} = L_1 \boldsymbol{S} + L_2 S' \boldsymbol{I}.$$

Leser: Das ergibt also einen linearen Zusammenhang zwischen der Formänderung und der Spannung.

Autor: Die Koeffizienten L_1 und L_2 können komplizierte Funktionen von $\boldsymbol{s}$ bzw. $\boldsymbol{S}$ sein, diese Formulierung bedeutet also nicht unbedingt einen linearen Zusammenhang. Der Fall ist den übrigen Bilanzgleichungen vollkommen ähnlich. Für die Diffusionsströme gaben wir auf Grund der Onsagerschen Beziehung in jedem Fall das Produkt aus den Leitwerten L und den Gradienten der charakteristischen intensiven Größen an. Aber das bedeutet nur dann eine Linearkombination, wenn L nicht von y abhängig ist. Für die konkreten L-Werte kann man keinen allgemeinen Zusammenhang angeben, das hängt in jedem Fall von der stofflichen Beschaffenheit ab. So können wir z. B. von wärmeleitenden oder von wärmeisolierenden Stoffen sprechen, je nachdem, ob der für den Diffusionsstrom der inneren Energie gültige Leitwert für den betreffenden Stoff einen großen oder sehr kleinen Wert aufweist. Auch im Falle einer elektrostatischen Wechselwirkung ist ein Stoff Leiter oder Isolator, je nachdem, wie groß sein Widerstand ist. Die Stoffe mit großem Widerstand sind auch keine absoluten Isolatoren, da ja bei einer bestimmten (hohen) Spannung die Isolierung durchschlägt und ein elektrischer Strom fließt. Jetzt ist auch von etwas Ähnlichem die Rede. Der konkrete Wert von L_1 und L_2 ergibt sich aus der stofflichen Beschaffenheit. Die Körper können wir wie folgt klassifizieren:

1. Der Vektor $\boldsymbol{s}$ hängt nicht von der Zeit ab, d. h., er ist zeitlich konstant, eine Deformation ist nicht vorhanden. Das ist der starre Körper.
2. Die Summe der Leitwerte ist Null, demzufolge ist auch der Spannungstensor gleich Null. Das ist eine inkompressible, ideale Flüssigkeit.
3. $L_1 = 0$, aber $L_2 \neq 0$. Das ist eine sogenannte elastische Flüssigkeit. (Erinnern wir uns nur daran, daß wir im Zusammenhang mit der Strömungslehre den Gradiententensor des Deformationsvektors als Null annehmen konnten und nur das Glied $L_2 S' \boldsymbol{I}$, der hydrostatische Druck, im nichtkonvektiven Impulsstrom vorkam.)
4. $L_1 \neq 0$, $L_2 = 0$. Das ist der inkompressible elastische feste Körper.
5. $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, ein elastischer fester Körper im allgemeinen Sinne. Mit den letzten zwei Typen befaßt sich die Festigkeitslehre.

Leser: Jetzt müßte nur noch geklärt werden, wie wir die Impulsdichte, das erste Glied der Bilanzgleichung aufschreiben sollen, da jetzt $\boldsymbol{w}$, die konvektive Geschwindigkeit, nicht vorkommen kann.

Autor: Der Impuls ergibt sich aus dem Produkt von Masse und Geschwindigkeit. In diesem Falle ist die Geschwindigkeit die Ortsänderung der einzelnen Punkte in der Zeiteinheit, d. h. eben die zeitliche Ableitung des Formveränderungsvektors:

$$\boldsymbol{w} = \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t}\,.$$

Leser: Damit kann ich auch schon die allgemeine Form der Bilanzgleichung aufschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t}\right) + \operatorname{Div}\left[L_1(\nabla \circ \boldsymbol{s}) + L_2(\Delta, \boldsymbol{s})\, \boldsymbol{I}\right] = \varrho \boldsymbol{F}\,,$$

worin $\boldsymbol{F}$ die äußere Kraftdichte ist.

Autor: In dieser Beziehung können wir umformen:

$$\operatorname{Div} L_1(\nabla \circ \boldsymbol{s}) = L_1 \Delta \boldsymbol{s} + (L_1 + L_2)\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{s}.$$

An der Stelle der Leitwerte L_1 und L_2 setzen wir die Laméschen Zahlen ein:

$$L_1 = -\eta, \quad L_2 = -\lambda,$$

und erhalten die Grundgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t}\right) = \varrho \boldsymbol{F} + \eta \nabla \boldsymbol{s} + (\eta + \lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{s}\,.$$

Diese Gleichung spielt in der Mechanik eine außerordentlich wichtige Rolle. Wenn $\boldsymbol{F} = 0$ und $\partial \boldsymbol{s}/\partial t = 0$ ist, erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung die Beltramischen Gleichungen.

Leser: Sind diese Beziehungen auch für die plastische Verformung gültig?

Autor: Ja, solange man voraussetzen kann, daß die L-Werte nicht von der Größe der Deformation abhängen, solange können wir von elastischer Formänderung sprechen. Ein Teil des auf den Diffusionsstrom bezogenen allgemeinen Leitungsgesetzes ist das Hookesche Gesetz, nach dem

$$-\boldsymbol{T} = 2\,G\boldsymbol{S} + \lambda S'\boldsymbol{I} \quad \text{ist.}$$

Hier ist also $L_1 = -2\,G$ der Schubmodul, $L_2 = -\lambda$ ist dagegen die Lamésche Konstante. Bei plastischer Formänderung liegt die Aufgabe eben in der Feststellung, was für ein Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Formänderung und dem Spannungstensor besteht, wenn die Spannung die Schwelle der Plastizität, die Fließgrenze, erreicht. Danach können wir z. B. von Bingham- (viskoplastische), Prandtl-Reuss- (elastoplastische) und Haar-Kármán-Hencky-Körper, die sogenannte vollkommen plastische Körper sind, sprechen. Ihre Eigenschaften verändern sich während der Formänderung überhaupt nicht. In Wirklichkeit aber sind die stofflichen Eigenschaften von der Formänderung abhängig. Zu ihrer Diskussion müßten wir auch die Energiegleichung aufschreiben. Man muß beachten, daß die Arbeitsleistung der äußeren Kräfte nach der Grundgleichung der Thermodynamik

$$\Delta W = T\Delta S - p\Delta V$$

für die Erhöhung der inneren Energie des Systems Verwendung findet. Wenn diese innere Energie – nach Wegfall der äußeren Kraft – sich insgesamt in Arbeit rückverwandelt, ist die Formänderung elastisch. Wenn ein Teil in Form von Wärme überführt wird bzw. als innere Energie zurückbleibt, erhält der Körper seine ursprüngliche Form nicht zurück, er erleidet eine dauernde Formänderung. Wegen der Anisotropie darf man zur Arbeitsverrichtung natürlich nicht die Werte von p und V, sondern muß das Produkt aus dem Spannungstensor und dem abgeleiteten Deformationstensor angeben. Ausführlich können wir dieses Thema[1] schon deshalb nicht behandeln, weil es von meinem Fachgebiet zu entfernt liegt und ich mich nur als halber Laie äußern könnte.

Leser: Demnach unterbrechen wir wieder unsere Besprechung, bevor die Fachfragen an die Reihe kämen?

Autor: Entschuldige, wenn ich jetzt sage, wir haben dieses Thema ausführlicher besprochen, als wir es von vornherein tun wollten. Nur deshalb sind wir auf dieses Gebiet abgeschweift, weil wir den Geltungsbereich und die Anwendbarkeit der Bilanzgleichungen auch hier demonstrieren wollten. Zur detaillierten Diskussion dieser wissenschaftlichen Fachrichtung habe ich keine genügenden Kenntnisse.

---

[1] *Fényes, I.:* Thermostatik und Thermodynamik. Budapest 1968, S. 158 (ung.)

Leser: Das ist ein ziemlich triftiges Argument. Gehen wir zum nächsten Thema über.

Autor: Zum Schluß aber noch eine kurze Ergänzung. Aus dem Bisherigen kann man leicht die Gleichung der Schwingungsbewegung ableiten. Denken wir wieder an die abgeleitete Grundgleichung, vorausgesetzt, daß $\operatorname{div} \boldsymbol{s} = 0$ ist und die Dichte nicht von der Zeit abhängt. Dann ist

$$\varrho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \varrho \boldsymbol{F} + \eta \Delta \boldsymbol{s} ,$$

woraus wir durch die Division mit ϱ und unter Anwendung der Bezeichnung $\eta/\varrho = c^2$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \boldsymbol{s} + \boldsymbol{F} ,$$

die Wellengleichung, eine sogenannte hyperbolische Gleichung, erhalten. Solche Wellengleichungen beschreiben z. B. die (eindimensionale) Bewegung einer Saite oder die (zweidimensionale) Bewegung einer Membran. Mit einer noch einfacheren Bewegung gelangen wir zur Bewegungsgleichung der gedämpften Schwingungen. Im eindimensionalen Fall ist der Impuls die Zeitableitung der Ortskoordinate, multipliziert mit der Masse:

$$m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} .$$

Die Quelle besteht aus drei Teilen:

1. aus der äußeren Kraft (F_0), die den Impuls liefert,
2. aus der Reibung, die den Impuls des Körpers vermindert,
3. aus der Federkraft, die einen Teil der äußeren Kraft periodisch speichert bzw. wieder abgibt und so — von der Streckung der Feder abhängig — sich als Impulssenke oder -quelle verhält.

Die Reibung ist der Geschwindigkeit proportional, und der Proportionalitätsfaktor wird mit k, Dämpfungsfaktor, bezeichnet. Die Federkraft ist proportional der Auslenkung, der Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert der Federkonstante c.

Also ist die bekannte Form der Gleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \frac{x}{c} = F_0$$

ebenfalls ein Teilfall der allgemeinen Bilanzgleichung. Wir könnten die Beispiele aus der Mechanik noch weiter fortsetzen, aber soviel genügt zur Illustrierung (oder ist auch schon zuviel). Es ist also nicht bloß von Systemen die Rede, die in der Thermo- und Aerodynamik gebraucht werden.

Leser: Wenn wir bereits so weit gekommen sind, könnten wir auch von der Elektrodynamik sprechen.

Autor: Wir können damit beginnen, aber ich mache dich im voraus darauf aufmerksam, daß ich nicht versuchen werde, tiefer in dieses neue Gebiet einzudringen.

Elftes Gespräch

Elektrodynamik

„Die Natur schien gewissermaßen
die verschiedensten Dinge genau
nach demselben Plan gebaut zu haben oder,
wie der Analytiker trocken sagt,
dieselben Differentialgleichungen gelten
für die verschiedensten Phänomene.“

Boltzmann

Leser: Der bekannte Physiker *Peierls* leitet den Abschnitt „Die Elektrizität und der Magnetismus" in seinem Buch mit folgenden Worten ein: „Die Beschreibung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen stellt unsere Phantasie vor eine weit größere Aufgabe als die Mechanik. Die Bewegungen der Körper sind sichtbar, die Wirkung der Kräfte können wir spüren, dagegen wirkt die Elektrizität und der Magnetismus im allgemeinen nicht unmittelbar auf unsere Sinnesorgane. Wir gewinnen zwar mit der Elektrizität ein tiefes Erlebnis, wenn wir mit unserem Finger die Drahtenden des elektrischen Netzes berühren, aber das ist eine nicht sehr zweckmäßige Art des Studiums der elektrischen Stromkreise." [1]

Autor: Aber wenn wir auf jene hören wollten, die sich die Besprechung der Wärmelehre nur so vorstellen können, daß der Begriff der Temperatur in unserem Wärmeempfinden wurzelt, bzw. daß wir die Temperatur der Körper auf subjektive Weise auch durch Berühren unmit-

[1] *Peierls, R. E.:* The Laws of Nature. London 1957

telbar wahrnehmen können, müßte man die Lehre der Elektrizität auch so beginnen: „Der Begriff der elektrischen Spannung wurzelt in unseren elektrischen Sinnesorganen“ bzw. „die elektrische Spannung können wir auf subjektive Weise unmittelbar durch Berührung wahrnehmen“.

Leser: Dieser Vergleich hinkt. Erstens, man kann die elektrische Spannung nicht an einem Punkt wahrnehmen, sondern nur die Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten, die berührt werden. Zweitens, die Wahrnehmung der Temperatur ist im Vergleich zu der der elektrischen Spannung ungefährlicher, da man davon nicht sagen kann, daß sie physiologische Veränderungen verursachen oder gar zur Todesursache werden kann.

Autor: Möchtest du das auch dann behaupten, wenn du zufälligerweise einen Körper von 1000 °C berühren würdest?

Leser: Eine so hohe Temperatur ist natürlich gefährlich.

Autor: Und wenn du eine Spannung von nur einigen Volt wahrnehmen müßtest?

Leser: Siehst du, da ist die große Abweichung, nicht die Spannung selbst ist gefährlich, sondern der elektrische Strom. Auch infolge kleiner Spannungen kann ein Strom von solcher Intensität entstehen, der eine tödliche Wirkung verursacht. Eigentlich ist der Strom das, was man wahrnimmt, und nicht die Spannung.

Autor: Bei kleiner Spannung ein starker Strom, was kann das für einen Grund haben?

Leser: Der Widerstand des menschlichen Körpers ist von vielen Umständen (trockene oder feuchte Hautfläche, Kleidung, Schweiß, sogar vom Nervenzustand) abhängig. Je kleiner der Widerstand eines Körpers ist, desto stärkerer Strom fließt bei gleicher Spannung durch den Körper. Es kann sogar passieren, daß jemand, der in der Badewanne telefoniert, durch den sonst ungefährlichen Telefonapparat einen tödlichen Stromstoß erleidet.

Autor: Also, das ist ganz was anderes als die Wahrnehmung der Temperatur. — Ein Moment, wie nehmen wir die Temperatur überhaupt wahr?

Leser: Jedes Schulkind kann dir sagen, daß wir bei Berührung zweier Körper spüren, welcher der wärmere bzw. kältere ist.

Autor: Und wenn auch ein dritter Körper vorhanden ist?

Leser: Ärgere mich nicht mit solchen Fragen, in bezug auf den dritten Körper können wir sagen, welcher der beiden anderen wärmer oder kälter ist.

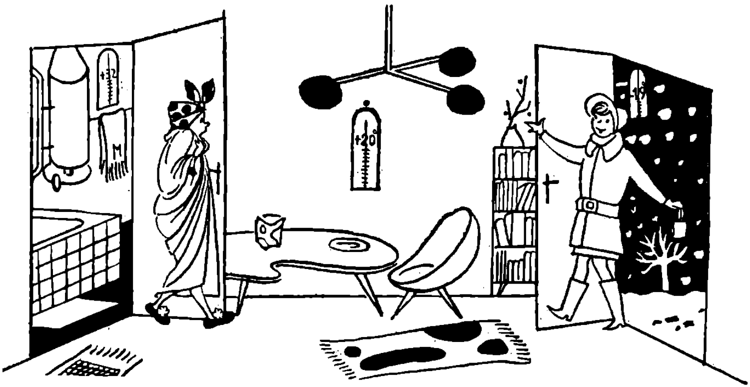
Autor: Bist du dessen gewiß? Wenn du im Winter entweder von der kalten Straße oder aus dem warmen Badezimmer in ein Zimmer trittst, in dem 20 °C sind, empfindest du dasselbe?

Leser: Lächerlich, natürlich wird mein Wärmeempfinden nicht dasselbe sein.

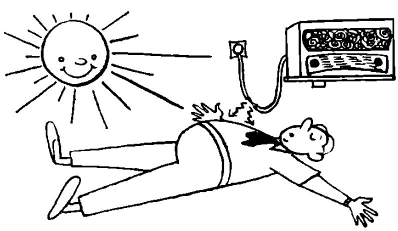
Autor: Und was hat das für einen Grund?

Leser: Ich empfinde eigentlich nicht die Temperatur, sondern die Temperaturdifferenz.

Autor: Genauer, etwas, was der Temperaturdifferenz proportional ist. Das ist der Energiestrom. Das Empfinden ist immer mit dem Energiestrom verbunden. Tödlich ist der Stromstoß unter anderem dann, wenn der menschliche Organismus eine



solche Menge Energie erhält, daß diese seinen Energiehaushalt vollkommen durcheinanderbringt, irreversible biologische Veränderungen verursacht. Diese Energiemenge kann durch ganz verschiedene Wechselwirkungen zwischen Mensch und Energiesender in den Organismus geraten, so z. B. als Resultat der thermischen Wechselwirkung (Wärmeübergang), infolge Krafteinwirkung (zusammen mit dem Impulsübergang) oder eben infolge elektrischer Spannung. Von der thermischen Wechselwirkung kann man auch sagen, daß du bei derselben Temperaturdifferenz größere Wärme verspürst, wenn der thermische Widerstand deines Körpers klein ist. Der Widerstand des Körpers ist von vielen Umständen (trockene oder nasse Hautfläche, Kleidung, Schweiß, sogar vom Nervenzustand) abhängig. Unter besonderen Umständen ist es auch möglich, daß der Mensch einen tödlichen Stromstoß erleidet.



Leser: Du wiederholst wörtlich, was ich vorhin vom elektrischen Stromstoß gesagt habe. Was willst du damit erzielen?

Autor: Nur soviel, daß du die Elektrizitätslehre nicht als eine Wissenschaft betrachtest, die in ihren Grundzügen von den bereits besprochenen Fachgebieten abweicht. Auch die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind in der Sprache unseres Buches für die charakteristischen extensiven Größen aufgestellte Bilanzgleichungen.

Leser: Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind die Maxwellschen Gleichungen. Kann man diese auch aus der in allgemeiner Form aufgeschriebenen Bilanzgleichung ableiten?

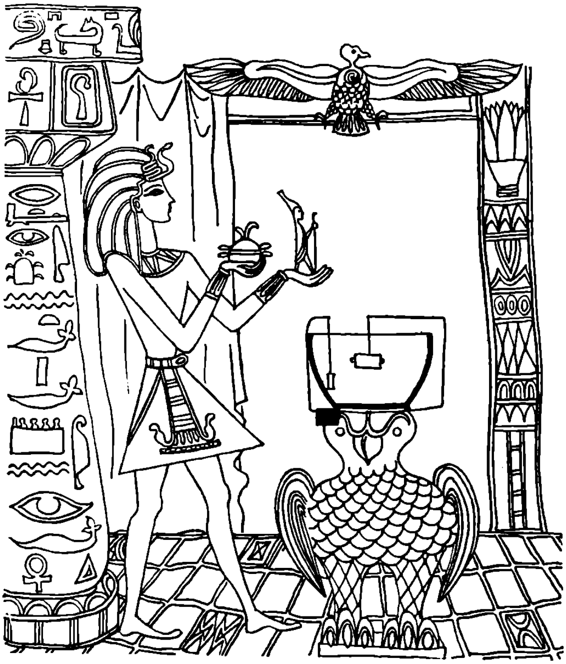
Autor: Jawohl, und es ist hier durchaus nicht von einem nachträglichen Ordnen eines schon entwickelten Wissenschaftszweiges die Rede, wie bei der Wärmelehre. Geschichtlich ist die Theorie so entstanden: Ihr Begründer *Maxwell* selbst hat die Gesetze der Elektrodynamik auf Grund der Bilanzgleichungen und der (später noch zu besprechenden) Symmetrie-Eigenschaften formuliert.

Leser: Dabei spielt sicher eine bedeutende Rolle, daß die Elektrizitätslehre vor kaum 100 Jahren entstanden ist, während die Wärmelehre bzw. Mechanik viele hundert Jahre alt ist.

Autor: Das möchte ich eher von der Elektrodynamik sagen. Die elektrischen und magnetischen Erscheinungen kennt die Menschheit schon seit Jahrhunderten (vielleicht seit Jahrtausenden). Aus archäologischen Funden, die aus ägyptischen und babylonischen Kulturen stammen, folgern einzelne Gelehrte, daß man schon in dieser Zeit zum Galvanisieren elektrischen Strom verwendet hat.[1] Das Wort „Elektrizität“ hat der

---

[1] Die am Ufer des Tigris erfolgten Ausgrabungen haben ungefähr 3000 Jahre alte Tongefäße zu Tage gebracht, in denen sich geätzte Kupferzylinder und Eisenplättchen befanden. Die



Hofarzt der englischen Königin *Elisabeth*, der im Jahre 1540 geborene *Gilbert*, eingeführt. Nach ihm hielt man noch nahezu 300 Jahre lang die Elektrizität für eine Flüssigkeit, die man aus den Körpern durch Reiben herauspressen kann. *Faraday* war der erste, der statt von einem Fluidum vom elektrischen und magnetischen Feld spricht. Heute wissen wir, daß das

---

Spuren deuten darauf hin, daß die Ätzung durch Essig oder Zitronensäure verursacht worden ist. Den Boden der Gefäße bedeckte eine dünne Schicht Bitumen, das bekanntlich ein elektrischer Isolator ist. Man vermutet, daß in solchen Gefäßen auch die Schmuckstücke galvanisiert wurden, die „hauchdünn" vergoldet sind (nach *Kapzew*) elektromagnetische Feld auch eine Materieform ist, deren Gesetze ähnlich denen anderer stofflicher Systeme mit Bilanzgleichungen beschrieben werden können.

Leser: Was verstehst du darunter, daß das Feld eine Materieform ist?

Autor: Es war schon davon die Rede, als wir von den Stoffen sprachen. Ich möchte dich nur daran erinnern, daß ein undurchdringbarer Stoff (ein chemischer Stoff) nicht durch seine Undurchdringlichkeit, sondern durch seine Eigenschaften (Masse, Impuls, Energie usw.) charakterisiert wird. Das elektromagnetische Feld ist zwar nicht undurchdringlich, es ist aber Materie, weil es auch diese Eigenschaften hat. Eben die mit diesen extensiven Eigenschaften aufgestellten Bilanzgleichungen beschreiben die Gesetze des elektromagnetischen Feldes.

Leser: All dies hat *Faraday* als erster erkannt?

Autor: Vielleicht sagen wir es so: Er sah (oder fühlte) das, was später der um 40 Jahre jüngere *Maxwell* auch mathematisch formuliert hat. *Maxwell* schreibt: „Als ich anfing, mich in die Arbeiten von *Faraday* zu vertiefen, merkte ich, daß seine Untersuchungsmethode auch mathematisch ist, obzwar sie nicht in Form von mathematischen Symbolen niedergeschrieben ist." Das 19. Jahrhundert brachte einen rapiden Fortschritt in der Elektrizitätslehre. Ich erwähne nur einige wesentliche Stationen: 1820 entdeckte *Oersted* die Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen. 1827 erschien das Buch von *Ampère* „Über die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen". Im selben Jahr erschien *Ohms* Buch von den galvanischen Strömen, in dem er zuerst die Ausdrücke Stromstärke und Widerstand verwendete. Den elektrischen Strom vergleicht er mit der Strömung des Wassers und die Spannung mit der Wasserniveaudifferenz. (Aus *Ohms* Gedankengang wird offensichtlich, daß er die elektrischen Erscheinungen, ähnlich den thermischen und hydrodynamischen Erscheinungen, als Resultat von Ausgleichsvorgängen betrachtete.) Im Jahre 1831, nach zehnjährigen Versuchen, entdeckte

Faraday die elektromagnetische Induktion. Bei der mathematischen Definition der Gesetze hatte *Umow* eine wesentliche Rolle. Auf Grund der zwischen dem hydrodynamischen und elektrischen Energiestrom bestehenden Analogie (die eine Folge davon ist, daß sowohl die Masse wie die Energie konstante Eigenschaften sind) stellte er die Bilanzgleichung der elektromagnetischen Energie auf:

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div} \boldsymbol{l}e = 0\,,$$

worin $\boldsymbol{l}$ der Vektor der Geschwindigkeit der elektrischen Verschiebung und e die Energiedichte ist. Das Produkt $\boldsymbol{l}e$ wird auch Umow-Vektor genannt. *Poynting* befaßte sich damit, auf welche Weise die elektrische und magnetische Energie sich durch den Raum ausbreitet und wie sie sich in eine andere Energieform umwandelt. Nach dem von ihm aufgestellten Gesetz strömt die Energie in irgendeinem Punkte senkrecht zu der Fläche, die durch die elektrischen und magnetischen Kraftlinien gebildet wird. Die Energiemenge, die die Flächeneinheit in 1 s durchquert, ist gleich dem Vektorprodukt aus elektrischer und magnetischer Feldstärke

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H},$$

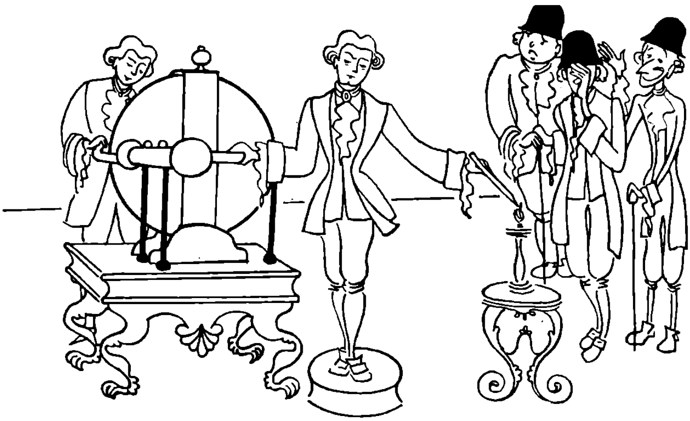
worin $\boldsymbol{S}$ der Poynting-Vektor, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ die elektrische und magnetische Feldstärke sind.

Leser: Diese Erkenntnisse haben offenbar ein riesiges Aufsehen erregt. Die Gelehrten hatten es leicht, da sie in einem Zeitalter arbeiteten, in dem physikalische und mathematische Kenntnisse sehr weite Möglichkeiten boten.

Autor: Du kennst die Geschichte schlecht, wenn du glaubst, daß neue Erkenntnisse ohne Hindernisse im Triumphzug vorstoßen. *Voltaire* sagte: „Die Wahrheit zu verkünden und den Menschen nützliche Dinge vorzuschlagen — ist die sicherste Art, ihre Verfolgung herauszufordern.“ Die Begründer der Elektrizitätslehre mußten ihren eigenen Galilei-Prozeß erleben. Die Vertreter der Theorie des magnetischen und elektrischen

Fluidums gaben ihre Kampfpositionen nicht leicht auf. *Umow* z. B. schreibt in seinen Memoiren, daß bei der Verteidigung seiner Dissertation der Begriff des Energiestroms und der Energiedichte einen sehr großen Widerstand ausgelöst hat. Die Opponenten haben ihn geradezu als unbegründet und physikalisch sinnlos bezeichnet.

Leser: Wer waren diese Opponenten?



Autor: Heute kennen wir nicht einmal ihre Namen. Kritiker dieser Art können zwar zeitweilig die Verbreitung der neuen Gedanken hemmen, aber verhindern können sie sie nicht. Ihre Tätigkeit kann zwar den Vertretern der neuen Ideen viel Unannehmlichkeiten verursachen, aber ihre Namen geraten wegen ihres Konservativismus, ihrer pseudowissenschaftlichen Auffassung bald in Vergessenheit.

Leser: Wir finden genügend ähnliche Beispiele auf anderen Gebieten. Die Kritiker nannten seinerzeit *Petőfi* „ordinär", *Beethoven* „unbegabt", *Wagner* „besessen". Diese Kritiker erscheinen uns heute schon lächerlich.

Autor: Ich glaube, es ist richtiger, wenn wir uns jetzt mit der Elektrodynamik befassen.

Leser: Entsprechend den bisherigen Gesprächen gehen wir auch jetzt nur bis zur Tür. Leiten wir nur die Maxwellschen Gleichungen aus der allgemeinen Bilanzgleichung ab?

Autor: Leider werden wir noch wortkarger als bisher sein. Die Elektrodynamik ist nur auf Grund der Relativitätstheorie konsequent diskutierbar, es existiert keine nichtrelativistische Elektrodynamik. Mit der Relativitätstheorie können wir uns nicht befassen, deshalb sprechen wir nur sehr skizzenhaft ausschließlich vom Prinzip.

Leser: Während unserer bisherigen Gespräche schrieben wir immer die Form der allgemeinen Bilanzgleichung auf:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_i = q_i ,$$

dann setzen wir die entsprechenden charakteristischen extensiven und intensiven Größen ein.

Autor: Das Schema ist auch jetzt dasselbe, vor allem müssen wir aber fragen, welches die charakteristischen extensiven Größen der Elektrodynamik sind.

Leser: In erster Linie die elektrische Energie.

Autor: Genauer, die elektromagnetische Energie, deren Stromdichte, den Poynting-Vektor, wir bereits kennen:

$$\boldsymbol{j}_e = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} .$$

Die Energiedichte kann man ebenfalls mit den Feldstärken ausdrücken, wenn man auch die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ[1] kennt, die beide Stoffeigen-

---

[1] Der Einfachheit halber werden wir die Werte ε und μ als Konstante betrachten, und so werden, auf Grund der Beziehung

schaften charakterisieren:

$$\varrho_e = \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2}.$$

Danach bedeutet es kein Problem, die folgende charakteristische extensive Eigenschaft, nämlich die Masse des elektromagnetischen Feldes, auf Grund der Einsteinschen Äquivalenzbeziehung zu bestimmen.

Leser: Das heißt, daß wir laut

$$\boldsymbol{E} = mc^2$$

die Energiewerte durch c^2 dividieren müssen, um die Werte der Masse zu erhalten? Also ist die Massendichte des elektromagnetischen Feldes

$$\varrho = \frac{\varrho_e}{c^2} = \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2c^2},$$

die Massenstromdichte dagegen

$$\boldsymbol{j}_m = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}.$$

Autor: Jetzt kennen wir auch bereits die Impulsdichte. Denken wir nun wieder an die Aerodynamik. Dort haben wir unmittelbar gesehen, daß die Impulsdichte $\varrho \boldsymbol{w}$ der Massenstromdichte $\varrho \boldsymbol{w}$ gleich ist. Das stimmt in jedem Fall, auch in der Elektrodynamik.

Leser: Demnach stimmt der Ausdruck $\boldsymbol{j}_m$ der Massenstromdichte mit dem Impuls des elektromagnetischen Feldes überein?

Autor: Mit der Impulsdichte. Die Dichte des Impulsstroms bezeichnen wir dagegen vorläufig mit $\boldsymbol{T}$.

Leser: So haben wir in der Aerodynamik den Spannungstensor bzw. auch die nichtkonvektive Impulsstromdichte bezeichnet.

---

für die dielektrische Verschiebung $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ und für die magnetische Kraftflußdichte $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, die Größen $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{B}$ in unseren Ableitungen nicht explizit auftreten

Autor: Aber hier ist nicht vom konduktiven, sondern vom konvektiven Impulsstrom die Rede. Ähnlich wie bei den mechanischen Wechselwirkungen können wir auch vom Impulsmoment des elektromagnetischen Feldes sprechen, in dem Erhaltungsgesetz hierfür ist $\boldsymbol{T}$ ein symmetrischer Tensor. Die speziellen extensiven Eigenschaften des elektrischen Feldes sind das elektrische Moment $\boldsymbol{P}$ und das magnetische Moment $\boldsymbol{M}$.

Leser: Ich glaube, daß wir alle extensiven Eigenschaften aufgezählt haben, nur die elektrische Ladung nicht.

Autor: In der Tat ist nur das übriggeblieben. Die elektrische Ladung ist die Quelle des elektrischen Feldes. (Kraftlinien können nur von Ladungen ausgehen.) Anders formuliert: Die Gesamtladung innerhalb irgendeines Volumens ist gleich dem Integral der Feldstärke über die umgrenzende Fläche des Volumens:

$$\int\limits_V \varrho_q \, \mathrm{d}\tau = \oint\limits_A (\varepsilon \boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}) \, .$$

Wählen wir uns als Integrationsvolumen eine Kugel mit dem Einheitsradius, so erhalten wir mit Hilfe des bei der Ableitung der Bilanzgleichungen bereits verwendeten Gaußschen Satzes die Beziehung

$$\varrho_q = \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} \, .$$

Leser: So wird also die elektrische Ladungsdichte auch durch die elektrische Feldstärke ausgedrückt. Demnach können wir bereits die Bilanzgleichungen aufschreiben.

Autor: Die Bilanzgleichung für die elektromagnetische Energie lautet:

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_e \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2) + \operatorname{div} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = q_e \, ,$$

worin q_e die Quelle, diejenige Arbeit bedeutet, die das Feld $\boldsymbol{E}$ an den Ladungen verrichtet. Sie erzielt zweierlei Wirkungen:

Sie erhöht die innere Energie $\sigma \boldsymbol{E}$ der Leitung sowie die kinetische Energie $\varrho_q \boldsymbol{w}$ der Ladung. Die Quelldichte ist also

$$q_e = \sigma \boldsymbol{E}^2 + (\varrho_q \boldsymbol{w}, \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}) .$$

Unter Beachtung, daß

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \text{ gilt,}$$

erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\left(\left(\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{j}\right), \boldsymbol{E}\right) + \left(\left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\right), \boldsymbol{H}\right) = 0 .$$

Bei der Ableitung der Impulsbilanz müssen wir in Betracht ziehen, daß bei einer eventuellen Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und einem chemischen Stoff nur der Gesamtimpuls erhalten bleibt. Der elektromagnetische Impuls kann sich in mechanischen Impuls umwandeln ($\boldsymbol{k}$ ist die sogenannte ponderomotorische Kraft). Somit lautet die Bilanzgleichung des elektromagnetischen Impulses

$$\frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \operatorname{Div} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{k} .$$

Die Impulsstromdichte haben wir in der Aerodynamik durch das dyadische Produkt $\varrho \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}$ und den mit dem Einheitstensor multiplizierten hydrostatischen Druck p angegeben. Ähnlich können wir auch die Impulsstromdichte des (isotropen) elektromagnetischen Feldes angeben, wenn wir ϱ einmal durch ε, zum anderen durch μ, $\boldsymbol{w}$ einmal durch $\boldsymbol{E}$ und zum anderen durch $\boldsymbol{H}$ ersetzen und an Stelle von p die halbe Energiedichte einsetzen:

$$\boldsymbol{T} = \varepsilon \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \circ \boldsymbol{H} - \boldsymbol{I} \, \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{4} .$$

Die Bilanzgleichungen der übrigen extensiven Eigenschaften lassen sich ähnlich ableiten. Darauf wollen wir aber nicht eingehen. Zusammenfassend schreiben wir die charakteristischen extensiven Größen der Elektrodynamik auf und damit schließen wir unser Gespräch über die Elektrodynamik ab. Zum Demonstrieren, so denke ich, genügt das.

Benennung der Größen	Tensorstufe	Dichte	Stromdichte
Elektromagnetisch:			
Energie	Skalar	$\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2}$	$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$
Masse	Skalar	$\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2c^2}$	$\frac{1}{c^2} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$
Impuls	Vektor	$\frac{1}{c^2} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$	$\boldsymbol{T}$[1]
Elektrisch:			
Ladung	Skalar	$\varrho_q = \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \varrho_q \boldsymbol{u}$
Moment	Vektor	$\boldsymbol{P}$	0
Magnetisch:			
Moment	Vektor	$\boldsymbol{M}$	0

Leser: Zum Demonstrieren genügt es tatsächlich, aber nicht um die Maxwellschen Gleichungen identifizieren zu können. Daran müssen wir noch etwas Zeit verwenden.

Autor: Du kannst in den Fachbüchern über Elektrodynamik eine ausführliche Ableitung finden. Ganz kurz müssen wir folgendes bedenken: Zu den je 3 Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ waren insgesamt sechs Gleichungen nötig. Demgegenüber besitzen wir zwei skalare und drei vektorielle extensive Größen, für jede kann man eine Bilanzgleichung aufstellen (insgesamt 11).

Leser: Die Vektorgleichungen sind verständlicherweise dreifach zu rechnen. In der Tabelle haben wir jedoch drei skalare extensive Größen dargestellt.

[1] Aus dem Erhaltungsgesetz, hier bezogen auf das elektromagnetische Impulsmoment, folgt, daß die elektromagnetische Spannung ein symmetrischer Tensor ist

Autor: Die elektromagnetische Energie und die Masse lassen sich nicht trennen. Sie sind miteinander äquivalente Eigenschaften. So können wir — im Hinblick auf die Bilanzgleichung — nur eine von beiden nehmen. Die 11 Bilanzgleichungen sind also mehr, als zur Bestimmung der Komponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ nötig sind. Dies bedeutet, daß nicht alle Bilanzgleichungen voneinander unabhängig sind. Unter Beachtung der Verknüpfungen zwischen den Dichten bzw. den Stromdichten der einzelnen extensiven Größen lassen sich die Maxwellschen Gleichungen ableiten. Schreiben wir sie der Reihe nach auf:

$$\text{(I)} \qquad \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$$

$$\text{(II)} \qquad \varrho_q = \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\text{(III)} \qquad -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0$$

$$\text{(V)} \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\text{(VI)} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$$

$$\text{(VII)} \qquad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} .$$

Leser: Aber damit haben wir uns bereits befaßt. Von der Gleichung (II) haben wir bei der elektrischen Ladung, von (VII) in Verbindung mit dem Ohmschen Gesetz gesprochen. Die Gleichungen (I) und (III) erschienen dagegen in der Bilanzgleichung der Energie, skalar multipliziert mit den Vektoren $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{H}$:

$$\left(\left(\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j} - \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\right), \boldsymbol{E}\right) + \left(\left(\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right), \boldsymbol{H}\right) = 0 .$$

Autor: Die Gleichungen (V) und (VI) sind die Ausdrücke für die dielektrische Polarisation bzw. die magnetische Induktion. Es freut mich, daß du selbst die Verbindung zwischen den angeführten Bilanzgleichungen und den Maxwellschen Gleichungen wahrgenommen hast. Natürlich sind auch, wie wir bereits erwähnten, zur präzisen Ableitung noch weitere Überlegungen notwendig, die wir hier nicht erörtern. Mit dem Bisherigen wollte ich nur zeigen, wie weit selbst ein Laie (wie ich es auf dem Gebiete der Elektrodynamik bin) imstande ist, sich mit Hilfe der vorher verwendeten Methode in einem für ihn unbekannten Wissensgebiet zu orientieren. Nach dieser kleinen Abschweifung unterhalten wir uns wieder über bekanntere Gebiete.

Zwölftes Gespräch

Kovarianz der Naturgesetze

„Ein physikalisches Gesetz ist ein jeder Satz,
welcher einen festen,
unverbrüchlich gültigen Zusammenhang
zwischen meßbaren physikalischen Größen ausspricht,
einen Zusammenhang, welcher es gestattet,
eine dieser Größen zu berechnen,
wenn die übrigen durch Messung bekannt sind.“

Planck

Leser: Von den physikalischen Größen und von den Gesetzen, die diese verbinden, haben wir schon oft gesprochen. Von meinem Standpunkt aus halte ich es in erster Linie für wesentlich, daß wir die gemeinsamen Grundlagen aller technischen Disziplinen, sämtlicher Fachgebiete kennengelernt haben. Die Einteilung der physikalischen Größen in strömende (extensive) und ausgleichende (charakteristische intensive) Größen halte ich jetzt nicht mehr für eine willkürliche Gruppierung, sondern für eine Systematisierung, deren Rolle in den Prozessen widergespiegelt wird. Damit kann man die die technischen Vorgänge beschreibenden physikalischen Einzelgesetze als einen Teil der allgemeinen Bilanzgleichung auffassen.

Autor: Ich freue mich wirklich, daß die wechselseitige Verbindung der dir bereits bekannten Fachgebiete und die Ähnlichkeit der Naturgesetze während unseres Gesprächs klarer geworden sind. Ich habe aber eine Frage. Was verstehst du unter einem physikalischen Gesetz?

Leser: Diese Frage überrascht mich nicht, ich habe das Motto unseres Gespräches, die Definition von *Max Planck* gelesen. Dazu, denke ich, können wir nichts hinzufügen.

Autor: „Jede Messung ist ein einzelnes, zunächst für sich stehendes Ereignis und als solches an ganz spezielle Umstände, vor allem an einen bestimmten Ort und eine bestimmte Zeit, sowie an ein bestimmtes Meßinstrument und einen bestimmten Beobachter gebunden . . ."[1]

Leser: Inwiefern gehört das zur Definition des physikalischen Gesetzes?

Autor: Ich stelle eine Gegenfrage: Ist das physikalische Gesetz vom Menschen unabhängig?

Leser: Natürlich ist es unabhängig. Die Naturgesetze sind objektiv, sie existieren unabhängig davon, ob der Mensch sie zur Kenntnis nimmt oder nicht.

Autor: Das physikalische Gesetz (richtiger dessen mathematische Formulierung) drückt die Verbindung zwischen den gemessenen Werten aus, das Messen hängt vom Beobachter, von dem Ort und von der Zeit ab. Das sind alles subjektive, von Menschen unabhängige Faktoren.

Leser: Im ersten Moment scheint es tatsächlich ein Widerspruch zu sein, daß das Gesetz objektiv und die Messung subjektiv ist. Es muß irgendeinen Ausweg geben. Wie ich auch messe, die Form der Beziehung zwischen den gemessenen Werten müßte vom Messen selbst unabhängig sein.

Autor: Dein Gedankengang ist richtig. Zuerst müssen wir aber zur Einteilung der physikalischen Größen zurückkehren.

Leser: Willst du wieder von extensiven und intensiven Größen sprechen?

Autor: Nein, jetzt untersuchen wir die physikalischen Größen von einer anderen Seite. Die extensive und intensive Größe spiegelt die qualitativen Eigenschaften des Vorgangs wider, über die quantitativen Eigenschaften geben sie keine Auf-

---

[1] *Planck, Max:* Wege zur physikalischen Erkenntnis. Leipzig 1944, S. 157

klärung. Aber Messen bedeutet immer die Feststellung irgendeines Zahlenwertes. Wie können wir eine physikalische Größe zahlenmäßig darstellen?

Leser: Wir geben ihren Meßwert und die Maßeinheit an, d. h. die Art ihrer Abhängigkeit von anderen physikalischen Größen. Die Maßeinheiten hängen natürlich von dem zugrunde gelegten Einheitensystem ab, darum sind die Meßwerte auch vom Maßsystem abhängig. Wenn z. B. die Geschwindigkeit eines Autos 80 km/h beträgt, so ist der Meßwert 80 und km/h die Maßeinheit. Dieselbe Geschwindigkeit beträgt bei Angabe in der Maßeinheit Meter je Sekunde 22,22 m/s. Der Meßwert ist hier also 22,22 ...

Autor: Das ist ganz präzis! Die Wahl der Einheit ist also bei der zahlenmäßigen Charakterisierung jeder physikalischen Größe wesentlich. Wie führen wir die eigentliche Messung durch? Bleiben wir jetzt nur bei der Längenmessung.

Leser: Wir vergleichen die zu messende Länge mit der Länge eines Etalons, den wir als Einheit betrachten, und stellen fest, wievielmal die Etalonlänge in der zu messenden Länge enthalten ist. Die Länge eines Objektes hängt nicht davon ab, ob die Einheit als Meter, Yard oder Lichtjahr angegeben ist, aber die durch den Zahlenwert ausgedrückte Länge ist eine Funktion der gewählten Einheit.

Autor: Und wann sind zwei Längen gleich?

Leser: Wenn beide dieselbe Etalonlänge gleich oft enthalten. Das ist dermaßen trivial, daß ich nicht weiß, warum wir darüber so viel sprechen müssen.

Autor: Wirklich trivial, auch bei Geschwindigkeiten? Wann ist die Geschwindigkeit von zwei Gegenständen gleich?

Leser: Wenn Richtung und Größe der Geschwindigkeiten übereinstimmen.

Autor: Und wann ist der Impuls von zwei Gegenständen gleich?

Leser: Wenn das Produkt ihrer Masse und Geschwindigkeit und die Richtung ihrer Geschwindigkeiten übereinstimmen.

Autor: Diese Definitionen sind schon etwas komplizierter als die auf die Länge bezogenen. Aber noch eine Frage, wann ist der Druck zweier Systeme gleich?

Leser: Wenn der Druck der beiden Systeme ... Nein, das ist so nicht gut. Vielleicht ist es richtiger, wenn ich sage, wenn innerhalb der beiden Systeme die Erwartungswerte des Impulsaustausches zwischen den Molekülen und der Wand übereinstimmen, was von der Zahl, Masse und Geschwindigkeit der Moleküle abhängig ist.

Autor: Diese Definition ist schon sehr kompliziert, es scheint, die Gleichheit ist doch nicht so trivial. Auf Grund des vorher Gesagten wäre es etwas schwierig, die Gleichheit der Drücke zweier Systeme mittels Messung zu bestimmen.

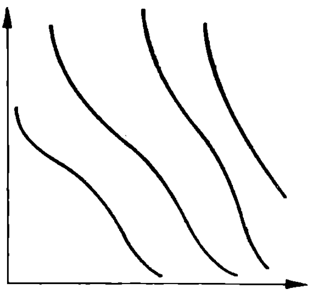
Leser: Es gibt dafür eine einfachere Methode. Bei der mechanischen Wechselwirkung, wie bei dem seit unserem ersten Gespräch öfter wiederholten Kolbenbeispiel, sind die in Wechselwirkung stehenden zwei Systeme im Gleichgewicht, wenn die Drücke übereinstimmen.

Autor: Eben das ist die Gleichheitsdefinition der charakteristischen intensiven Größen. Die intensiven Größen zweier Systeme sind gleich, wenn trotz der Möglichkeit entsprechender Wechselwirkungen die beiden Systeme miteinander (oder gesondert mit einem dritten System) im Gleichgewicht stehen.

Leser: Daraus folgt auch, daß die Gleichheit nicht vom Wert der extensiven Größen abhängt, da die Masse, die Energie und das Volumen der im Gleichgewicht stehenden Systeme verschieden sein können.

Autor: Genauer, im Falle der Gleichheit besteht zwischen den einzelnen intensiven Größen ein bestimmter Zusammenhang.

Wenn wir die extensiven Größen des einen Systems so ändern, daß es zwischendurch ständig mit den anderen Systemen im Gleichgewicht bleiben soll, dann bleibt auch die entsprechende charakteristische intensive Größe unverändert. Auf diese Weise können wir die Äquipotentialflächen erhalten (z. B. Isothermen, Isobaren), die die Punkte gleichgroßer intensiver Größen (z. B. Temperatur, Druck) angeben. Wenn wir der Einfachheit halber die Untersuchung mit einer Funktion von zwei Veränderlichen durchführen, erhalten wir eine Kurvenschar wie im Bild.



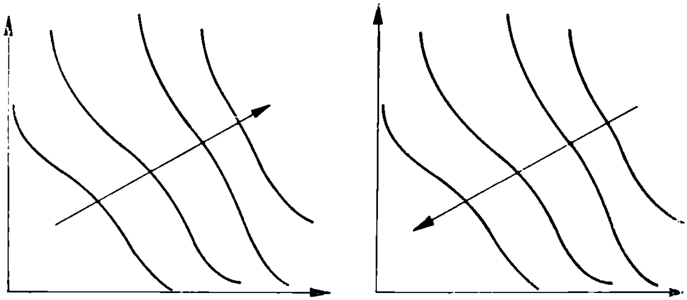
Leser: Auch das Messen intensiver Größen beruht hierauf. Wird das Meßsystem (Meßgerät) mit dem gemessenen System in die entsprechende Wechselwirkung gebracht, geht zwischen den beiden Systemen ein Ausgleichsvorgang vor sich, als dessen Resultat Gleichgewicht zwischen dem Meßgerät und dem System entsteht, d. h., die Zahlenwerte der entsprechenden intensiven Größen werden in beiden Systemen gleich. Auf Grund der Charakteristik des Meßgerätes ist dieser (auch auf das gemessene System bezogene) Gleichgewichts-Zahlenwert der intensiven Größe bestimmbar.

Autor: Nach all dem ist die Antwort auf meine nächste Frage einfach. Welchen von zwei verschiedenen Werten einer physikalischen Größe nennen wir größer oder kleiner?

Leser: Die extensiven Eigenschaften strömen aus dem System mit größeren intensiven Werten in die Richtung der kleineren Werte. Das System, von dem irgendeine extensive Größe abfließt, hat eine entsprechend größere intensive Größe.

Autor: Meinst du nicht, daß das etwas willkürlich ist? Wir könnten auch umgekehrt definieren, dann würde der Strom vom kleineren Wert in die Richtung des größeren fließen.

Leser: Es kann sein, daß dies eine Vereinbarung ist, aber sie ist für alle charakteristischen intensiven Größen gleichermaßen gültig.



Autor: Ebendeshalb wählten wir früher das Negative des Druckes als Bezugsgröße. Aber es wäre auch möglich gewesen, den Druck positiv zu lassen und die Vorzeichen aller anderen charakteristischen intensiven Größen, z. B. das der Temperatur, umzukehren. Das Wesentliche ist die eindeutige Entscheidung der Relation kleiner—größer. Mit anderen Worten, nach dem Bild auf Seite 221 muß man an den Isoflächen die Richtung des Anwachsens anzeigen. Sonst können wir keinerlei physikalische Größe zahlenmäßig charakterisieren. Bleiben wir bei der Temperatur. Wir wissen nun, daß zur zahlenmäßigen Charakterisierung die Definition der Gleichheit, der Wahl der Einheit und der Relation kleiner—größer notwendig sind. Aber ob das genügt? Nach dem Bisherigen besteht zwischen der Celsius- und der Kelvinskale überhaupt kein Unterschied.

Leser: Es besteht doch tatsächlich keiner, außer, daß die Celsiusskale um etwa 273 Einheiten im Vergleich zur Kelvinskale verschoben ist.

Autor: Das heißt, daß dem Nullpunkt der Celsiusskale der Zahlenwert 273,15 der Kelvinskale entspricht. Daraus können wir sehen, daß . . .

Leser: . . . bei der zahlenmäßigen Angabe einer physikalischen Größe die Wahl des Nullpunkts ebenfalls wesentlich ist. Das bezieht sich auch auf Druckangaben in Atmosphären und in Atmosphären Überdruck, wo wir auch verschiedene Nullpunkte haben, obwohl Maßangaben sonst vollkommen äquivalent sind.

Autor: Nur eins ist noch zu klären: Besteht ein prinzipieller Grund dagegen, die Temperaturen und den Druck z. B. nicht in Grad Celsius bzw. in Atmosphären, sondern mit den entsprechenden Logarithmen auszudrücken? Würde das irgendeiner unserer Bedingungen widersprechen?

Leser: Nein, die Einheit würde sich zwar verändern, nicht aber die Gleichheit und die Relation kleiner—größer. Im täglichen Leben wäre es aber sonderbar, mit Logarithmen zu rechnen.

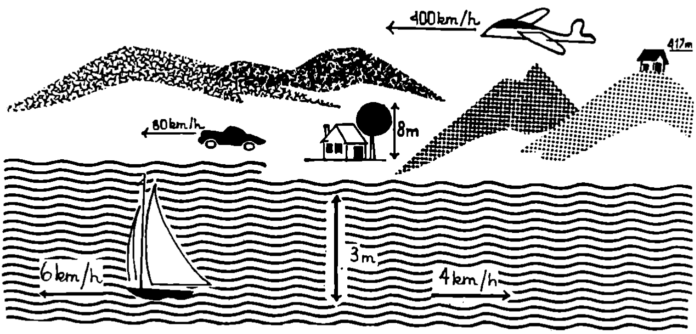
Autor: Bei einer anderen charakteristischen intensiven Größe tun wir das aber: Statt des chemischen Potentials nehmen wir oft die Aktivität oder die Fugazität, die eine logarithmische Funktion des chemischen Potentials ist. Diese Skale ist durchaus berechtigt. Wesentlich ist, daß die auf dieselbe physikalische Größe bezogenen verschiedenen Skalen miteinander in eindeutiger, monotoner, funktionaler Verbindung stehen, man muß also auch das Skalengesetz angeben. Diese Voraussetzungen wurden zuerst von *Carnap* formuliert. Zusammengefaßt ergibt sich also: Zur Bestimmung der Skale einer physikalischen Größe ist die eindeutige Wahl

1. der Einheit,
2. der Gleichheit,
3. der Relation kleiner—größer,
4. des Nullpunktes,
5. des Skalengesetzes notwendig.

Leser: Das ist klar und verständlich, allerdings sagt es nicht viel Neues. Es sind, jede für sich, bekannte Bedingungen.

Autor: Ich will nicht auf weitere Einzelheiten eingehen, ich mache dich nur darauf aufmerksam, daß die Bedingungen für die Aufstellung einer Skale den mathematischen Bedingungen für die Menge der reellen Zahlen genügen müssen, da wir den Wert der physikalischen Größen immer mit einer reellen Zahl darstellen. Aber kehren wir zu den physikalischen Erscheinungen zurück.

Leser: Stellt das skizzierte Panorama deine physikalische Erscheinung dar?



Autor: Sieh es dir genauer an, nicht auf dem Panorama liegt die Betonung.

Leser: Ich sehe auch verschiedene Maßangaben auf der Zeichnung: Die Geschwindigkeiten des Segelbootes, der Wasserströmung, des Kraftwagens und des Flugzeugs, die Höhe des Segels, die Höhe des Baumes neben dem Haus, die Höhe des Aussichtspunktes. Na und?

Autor: Die Abbildung fixiert den Zustand in einem bestimmten Zeitpunkt. In Wirklichkeit ändert sich die gezeichnete Situation räumlich und zeitlich. Vereinfachend betrachten wir jetzt nur den Raum. Wo ist der Nullpunkt dieses Raumes?

Leser: Was verstehst du unter dem Nullpunkt des Raumes?

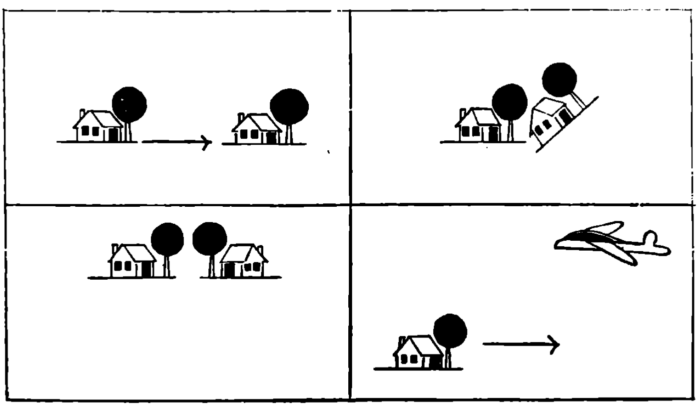
Autor: Ich meine den Punkt, wo der Beobachter bzw. jener, der die aufgeschriebenen Zahlenwerte gemessen hat, steht.

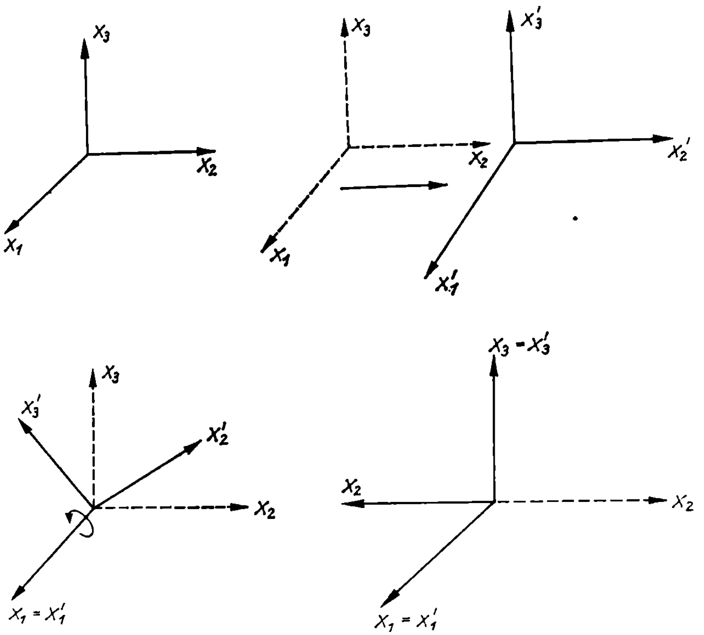
Leser: Ich glaube, das kann sonstwo sein.

Autor: Und er wird von jeder Stelle aus immer dieselben Zahlenwerte messen?

Leser: Der Raumumfang des Hauses, die Höhe des Baumes oder des Segels sind unabhängig vom Standort des Beobachters. Aber die Geschwindigkeiten werden tatsächlich andere sein, vom Haus, vom Segelboot oder vom Flugzeug aus betrachtet.

Autor: Es gibt also bestimmte physikalische Größen, deren Zahlenwert unabhängig vom Standort ist, mit anderen Worten, sie sind invariant. Andere physikalische Größen dagegen hängen davon ab, von welchem Ort und aus welcher Lage wir die Erscheinungen betrachten. Greifen wir aus dem Bild das Haus und den danebenstehenden Baum heraus. Ich kann das Haus von einem Punkt aus betrachten, der von meiner früheren Lage aus gesehen 10 m links liegt. Dann nimmt im neuen Bezugssystem das Haus im Vergleich zu meinem vorherigen Koordinatensystem einen Platz 10 m weiter rechts ein. Drehe ich den Kopf um 30° nach rechts, dann dreht sich die Lage des Hauses scheinbar um 30° nach links. Stehe ich mit dem Rücken zum Haus und betrachte es in einem Spiegel, dann sehe ich sein Spiegelbild. Vom Flugzeug aus gesehen, bewegt sich das Haus





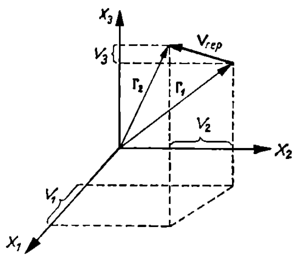
mit einer Geschwindigkeit von vielleicht 400 km/h nach rechts. Dasselbe würde bei der Beobachtung beliebiger physikalischer Vorgänge passieren. In jedem Fall muß man ein Koordinatensystem auswählen und diese Wahl kann willkürlich sein. Alle Bezugssysteme im Bild sind gleich gut. Die im Vergleich zum ersten verschobenen, gedrehten bzw. gespiegelten Bezugssystem sind einander äquivalent.

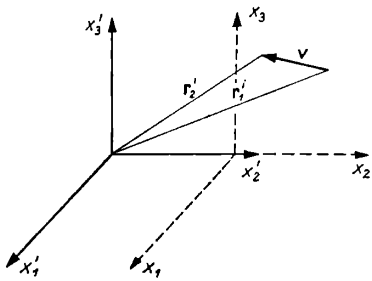
Leser: Also wäre es gleich, welches Bezugssystem ich auswähle, die beobachteten Werte der physikalischen Größen sind unverändert? Aber was die Geschwindigkeit betrifft . . .

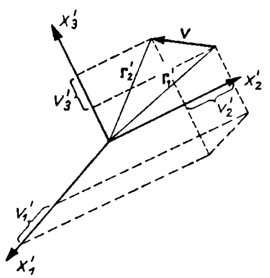
Autor: Wir wollen nicht über etwas disputieren, was ich nicht behauptet habe. Die Koordinatensysteme sind gleichwertig, also hat die Beschreibung der physikalischen Erscheinungen in jedem die gleiche Form (davon später etwas mehr), der Zahlenwert der physikalischen Größen ist aber durchaus nicht unverändert.

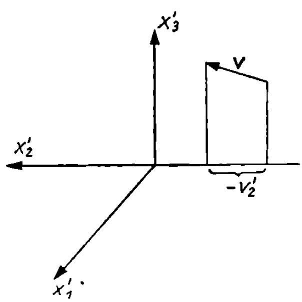
Leser: Die Höhe des Baumes hat sich nicht verändert, wie wir auch das Koordinatensystem transformierten.

Autor: Die Höhe ist eine skalare Größe. Nur ein Skalar ist gegenüber jeder Koordinatentransformation invariant. Anders liegt es im Falle der Geschwindigkeit. Zum Beispiel seien die Komponenten der momentanen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Flugzeugs im Koordinatensystem unseres Bildes als Projektionen von $\boldsymbol{v}$ auf die einzelnen Achsen mit v_1, v_2 bzw. v_3 bezeichnet.









Leser: Bei einer Verschiebung des Koordinatensystems bleiben diese Komponenten offensichtlich unverändert. Das kannst du aber nicht von jedem Vektor sagen. Im Bild haben wir den

Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs als Differenz der charakteristischen Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, die das Flugzeug in zwei Zeitpunkten einnimmt, dargestellt. Aber diese Ortsvektoren verändern sich, wenn wir den Ursprung verschieben.

Autor: Der Ortsvektor und der Geschwindigkeitsvektor sind nicht gleichartige Vektoren. Genauer, ein Ortsvektor ist streng genommen im physikalischen Sinne kein Vektor.

Leser: Dann war also die Formulierung, die ich im sechsten Gespräch gebraucht habe, falsch?

Autor: Sie war nicht falsch, sie war nur nicht vollständig. Einen Vektor kann man tatsächlich durch eine gerichtete Strecke darstellen. Ein Vektor hat zwar drei Komponenten, das bedeutet aber noch nicht, daß jedes Zahlentripel ein Vektor ist. Physikalisch entscheidet — auf Grund des bisherigen Gedankenganges — das Verhalten gegenüber Transformationen des Koordinatensystems darüber, ob es sich um einen Vektor handelt. Ein Vektor ist (im dreidimensionalen Raum) eine solche dreikomponentige physikalische Größe, deren Komponenten

1. bei Parallelverschiebung des Koordinatensystems unverändert bleiben (invariant sind),
2. sich bei Drehung des Koordinatensystems ändern,
3. während beim Spiegeln die zur Spiegelebene senkrechte Komponente ihr Vorzeichen ändert.

Wir haben schon über einige mit Vektoren durchführbare Operationen gesprochen. Wir erinnern nur daran, daß wir beim Multiplizieren eines Vektors $\boldsymbol{w}$ mit einem Skalar c wieder einen Vektor erhalten, dessen Länge das c-fache des ursprünglichen Vektors ist, dessen Richtung aber unverändert ist oder sich umdreht, je nachdem, ob c positiv oder negativ ist:

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{w}.$$

Das heißt, jede einzelne Komponente des neuen Vektors ist das c-fache der ursprünglichen, z. B.:

$$v_1 = cw_1.$$

Zwei Vektoren können skalar, vektoriell oder dyadisch multipliziert werden. Das Resultat einer skalaren Multiplikation ist ein Skalar, z. B. ist das skalare Produkt der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Das skalare Produkt zweier aufeinander senkrecht stehender (orthogonaler) Vektoren ist Null. Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selber

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}_1^2 + \boldsymbol{w}_2^2 + \boldsymbol{w}_3^2 = \boldsymbol{w}^2$$

ergibt das Quadrat der Vektorlänge.

Leser: Daraus folgt fast trivialerweise, daß das Skalarprodukt tatsächlich gegenüber allen Arten von Koordinatentransformationen invariant ist, da die Länge des Vektors durch keinerlei Koordinatenänderung (Drehung, Spiegelung, Verschiebung) beeinflußt werden kann.

Autor: Natürlich gibt es eine Koordinatentransformation, welche auch die Länge eines bestimmten Vektors verändert. Zum Beispiel ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors, aus zwei Koordinatensystemen betrachtet, die sich im Verhältnis zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, jeweils anders. *Galilei* erkannte zuerst, daß die Naturgesetze auch beim Verschieben des Koordinatensystems mit gleichförmiger Geschwindigkeit unverändert bleiben. Das nennen wir Relativitätsprinzip. *Einstein* hat, von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ausgehend, erkannt, daß die Zeit als die vierte Vektorkomponente im vierdimensionalen (Minkowskischen) Raum betrachtet werden muß. (Die anderen Komponenten stimmen mit den Ortskomponenten des dreidimensionalen Raumes überein.) Diese Erkenntnis hat – im Gegensatz zu der allgemeinen Meinung – die Beschreibung der Vorgänge nicht kompliziert, sondern – gerade umgekehrt – vereinfacht. Im vierdimensionalen Raum bleibt nämlich die Form der die Naturgesetze beschreibenden Gleichungen auch in zueinander in beschleunigter Bewegung befindlichen Koordinatensystemen unverändert. Mit diesen Koordinatentransformationen befassen wir uns aber in unserem Gespräch nicht.

Leser: Dann setzen wir die Wiederholung der Vektorengesetze fort.

Autor: Es war schon vom dyadischen Produkt die Rede, das dyadische Produkt zweier Vektoren

$$\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix}$$

ergibt eine quadratisch geordnete Tabelle (Matrix), in der die einzelnen Elemente die Produkte der einzelnen Komponenten der Vektoren sind. Und zwar sind die Faktoren des Produkts zeilenweise die entsprechenden Komponenten des ersten, spaltenweise die des zweiten Vektors. Es ist leicht zu sagen, wie sich eine derartige physikalische Größe, ein Tensor (genauer: ein Tensor zweiter Stufe) bei einer Transformation des Koordinatensystems verhält. Bei einer Verschiebung bleiben die Vektorkomponenten invariant. Infolgedessen ist ein Tensor gegenüber einer Verschiebung invariant. Bei einer Drehung ändern sich (im allgemeinen) die Komponenten des Vektors, also auch die Tensorkomponenten. Bei einer Spiegelung wechselt die auf die Spiegelebene senkrecht stehende Komponente des Vektors das Vorzeichen so, daß alle Elemente des Tensors, die diese Komponente enthalten, das Vorzeichen umkehren. Ist z. B. die x_2x_3-Ebene die Spiegelebene, dann ändert sich das Vorzeichen der Komponenten v_1 und w_1, und somit lautet der vorige Tensor im gespiegelten Koordinatensystem:

$$\begin{bmatrix} v_1 w_1 & -v_1 w_2 & -v_1 w_3 \\ -v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ -v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix}.$$

Tensor nennen wir allgemein im dreidimensionalen Raum eine durch neun Zahlen charakterisierbare physikalische Größe, deren Komponenten sich bei der Transformation des Koordinatensystems so verhalten wie die Komponenten des dyadischen Produktes zweier Vektoren. Die Tensorkomponenten zeigen also bei Koordinatentransformationen folgendes Verhalten:

1. bei Parallelverschiebung bleiben sie unverändert
2. bei Drehung ändern sie sich,

3. beim Spiegeln ändern sich ihre Vorzeichen (bei Spiegelung an der jk-Ebene ändern die Elemente der i-ten Zeile und i-ten Spalte ihre Vorzeichen, ausgenommen die Elemente in der Hauptdiagonalen).

Leser: Bleiben die Elemente in der Hauptdiagonale bei jeder Spiegelung unverändert?

Autor: Das kann man einfach erkennen. An welcher Ebene wir auch spiegeln, die Komponenten beider Vektoren wechseln das Vorzeichen in dem gleichen Sinne, und da die in der Hauptdiagonalen befindlichen Elemente die Produkte der Komponenten in gleicher Richtung sind, kompensieren sich die beiden Vorzeichenwechsel. Wir können aber über die Elemente in der Hauptdiagonale noch weiteres sagen. Vergleichen wir sie mit den Gliedern der Skalarprodukte zweier Vektoren.

Leser: Tatsächlich, $v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ ist eben die Summe der in der Hauptdiagonalen befindlichen Elemente.

Autor: Hiervon wissen wir aber, daß sie einen Skalar darstellt, d. h., daß sie bei jeder Art von Koordinatentransformation invariant bleibt. Darum pflegt man auch die Summe der Hauptdiagonalelemente des Tensors skalare Invariante des Tensors zu nennen. Wir wollen noch einen Begriff rekapitulieren, die Transponierte eines Tensors.

Leser: Also jenen Tensor, der entsteht, wenn seine ursprünglichen Elemente an der Hauptdiagonale gespiegelt werden? Die Transponierte z. B. des vorherigen Tensors ist:

$$(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w})^{+} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 & v_3 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 & v_3 w_2 \\ v_1 w_3 & v_2 w_3 & v_3 w_3 \end{bmatrix}.$$

Autor: Gewiß. Bezeichnen wir der Einfachheit halber den Tensor und seine Transponierte mit den Buchstaben $\boldsymbol{T}$, bzw. $\boldsymbol{T}^{+}$. Das folgende ist dann eine triviale Gleichheit:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} + \frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{+} - \frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{+} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{+}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{+}).$$

Das erste Glied der rechten Seite ist, wenn wir die Komponenten des Tensors $\boldsymbol{T}$ mit t_{ik} bezeichnen ($t_{ik} = v_i w_k$)

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^+) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2t_{11} & t_{12} + t_{21} & t_{13} + t_{31} \\ t_{12} + t_{21} & 2t_{22} & t_{23} + t_{32} \\ t_{13} + t_{31} & t_{23} + t_{32} & 2t_{33} \end{bmatrix}.$$

Leser: Davon sagten wir, daß es der symmetrische Teil des Tensors ist, da das k-te Element der i-ten Zeile gleich dem i-ten Element der k-ten Spalte ist.

Autor: Das zweite Glied der rechten Seite ist dagegen der antisymmetrische Teil:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^+) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & t_{12} - t_{21} & t_{13} - t_{31} \\ t_{21} - t_{12} & 0 & t_{23} - t_{32} \\ t_{31} - t_{13} & t_{32} - t_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

In diesem Tensor ist das k-te Element der i-ten Zeile entgegengesetzt gleich dem Wert des i-ten Elementes der k-ten Zeile:

$$(a_{ik}) = -(a_{ki}),$$

der Tensor hat also nur drei unabhängige Elemente:

$$\{a_{23}, a_{31}, a_{12}\}.$$

Diese drei Komponenten können wir als drei Komponenten eines Vektors betrachten.

Leser: Hat das irgendeinen Sinn, ist dieses Zahlentripel tatsächlich ein Vektor?

Autor: Diese Komponenten verhalten sich bei jeder Koordinatentransformation wie die entsprechenden Komponenten eines Vektors, allein bei der Spiegelung ist das Vorzeichen entgegengesetzt. Bei der Spiegelung an der x_2, x_3-Ebene z. B. bleibt die erste Komponente unverändert, während die Komponenten 2 und 3 ihre Vorzeichen wechseln. Das ist leicht einzusehen. Schreiben wir an die Stelle von a_{ik} die entsprechenden t_{ik} bzw. die Produkte $v_i w_k$, dann ergibt sich z. B.

$$a_{23} = t_{23} - t_{32} = v_2 w_3 - v_3 w_2.$$

Hier kommt keine einzige Vektorkomponente vor, die ihr Vorzeichen ändert. Demgegenüber wechseln z. B. in der Komponente

$$a_{31} = v_3 w_1 - v_1 w_3$$

w_1 und v_1 die Vorzeichen, es ist also

$$-v_3 w_1 + v_1 w_3 = -a_{31}.$$

Solche Vektoren, deren Komponenten ähnlich wie die Elemente des antisymmetrischen Teiles des dyadischen Produktes zweier Vektoren transformiert werden, heißen Pseudovektoren:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\boldsymbol{e}_1 + (v_3 w_2 - v_1 w_3)\boldsymbol{e}_2 + \\ + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\boldsymbol{e}_3.$$

Geometrisch ergibt das vektorielle Produkt die gerichtete Fläche des durch die beiden Vektoren gebildeten Parallelogramms. Die vorhergehenden Operationsregeln beziehen sich auch auf den als Maß der Inhomogenität eingeführten Nablavektor.

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}.$$

Mit einem Skalar multipliziert erhalten wir den Gradienten:

$$\nabla \cdot c = \operatorname{grad} c\,.$$

Mit einem Vektor skalar multipliziert ergibt sich als Resultat die Divergenz des Vektors

$$(\nabla, \boldsymbol{w}) = \operatorname{div} \boldsymbol{w}\,.$$

Das dyadische Produkt des Nablavektors mit einem Vektor ergibt den Gradiententensor:

$$\nabla \circ \boldsymbol{w} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{w}\,.$$

Das vektorielle Produkt des Nablavektors mit einem Vektor ergibt die Rotation:

$$\nabla \times \boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}\,.$$

Aus Vollständigkeitsgründen müßten wir auch noch von den sogenannten Pseudoskalaren sprechen, die sich in allem wie gewöhnliche Skalare verhalten, nur im Falle der Spiegelung ihr Vorzeichen ändern. Ein Pseudoskalar wäre z. B. das Volumen, wenn wir es als Produkt aus der erwähnten gerichteten Fläche und dem Höhenvektor ableiten (siehe Bild Seite 107):

$$v = ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}) .$$

(Pseudoskalare sind z. B. auch einzelne quantenphysikalische Zustandsgrößen.) Statt weiterer ausführlicher Erörterungen wollen wir das Verhalten der skalaren, vektoriellen und tensoriellen physikalischen Größen gegenüber der Koordinatentransformation tabellarisch zusammenfassen. Wir wollen nur noch festhalten, daß wir (im dreidimensionalen Raum) die zur Bestimmung einer einzelnen physikalischen Größe nötige An-

Art der Größe	Verschiebung	Drehung	Spiegelung (an einer Ebene)	Beispiel
Skalar	invariant	invariant	invariant	Masse, Temperatur
Vektor	invariant	Komponenten ändern sich	eine Komponente wechselt ihr Vorzeichen	Geschwindigkeit, Impuls, Massenstrom
Tensor	invariant	Komponenten ändern sich	vier Komponenten des antisymmetrischen Teils wechseln ihre Vorzeichen	Impulsstrom
Pseudovektor	invariant	Komponenten ändern sich	zwei Komponenten wechseln ihr Vorzeichen	Rotationsgeschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit
Pseudoskalar	invariant	invariant	wechselt Vorzeichen	Volumen mit Vorzeichen

zahl von Angaben als Potenzen von 3 darstellen können. So wird ein Tensor durch $3^2 = 9$, ein Vektor durch $3^1 = 3$ und ein Skalar durch $3^0 = 1$ Angabe bestimmt. In diesem Zusammenhang sprechen wir allgemein von Tensorstufen. Einem Skalar schreiben wir die Stufe 0 zu, einem Vektor die Stufe 1 und einem durch 9 Angaben bestimmten Tensor die Stufe 2. In der Physik sind auch Tensoren höherer Stufe bekannt, die z. B. mit $3^3 = 27$ oder $3^4 = 81$ Angaben bestimmt sind. (In der relativistischen Physik sind — der Vierdimensionalität von Raum-Zeit entsprechend — zur Festlegung eines Skalars, eines Vektors bzw. eines Tensors zweiter Stufe 1, 4 bzw. 16 Angaben notwendig. In Verbindung mit den in der Physik gebräuchlichen 5 Größenarten zitieren wir folgendes: „Grund zur Unterscheidung gaben ihr Verhalten gegenüber drei charakteristischen Transformationen der Koordinatensysteme." Diese Unterscheidung „ist kein formales Spiel, da eine physikalische Größe immer ein auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogener Zahlenwert ist. Es ist wichtig zu wissen, auf welche Weise eine objektive Eigenschaft der Natur sich in verschiedenen Bezugssystemen darstellt." Die von der Willkür des Bezugssystems „unabhängigen Naturerscheinungen können offenbar als invariante Eigenschaften definiert werden, während die sich transformierenden Züge nur die Willkür des gewählten Bezugssystems widerspiegeln" (*Fényes*).

Leser: Im Laufe unserer bisherigen Besprechungen gab es nicht nur skalare, sondern auch vektorielle extensive Größen. Ich sehe jetzt, daß sich Bilanzgleichungen für eine skalare extensive Größe im Verlauf einer Koordinatentransformation nicht verändern, da ein Skalar gegenüber jeder Transformation invariant ist. Aber wie steht es mit der Bilanz für die Vektoren, ist diese vielleicht von der Wahl des Bezugssystems abhängig?

Autor: Wenn jedes Glied einer Gleichung in derselben Weise transformiert wird, dann bleibt die Form der Gleichung selbst unverändert. Eine Gleichung, die objektive Eigenschaften widerspiegelt, kann keine Glieder verschiedener Tensorstufe enthalten. Darum hat (neben der bekannteren dimensionellen Homogenität) auch die tensorielle Homogenität der Gleichung große Bedeutung. Es kann z. B. nicht sein, daß ein Glied der Gleichung ein Skalar und ein anderes Glied ein Vektor oder eine Komponente eines Tensors zweiter Stufe ist, da in diesem Falle — bei einer gewissen Transformation — bei einem Glied z. B. sich das Vorzeichen ändern würde, das andere unverändert bliebe, und sich dadurch die Form der Gleichung verändern würde. Halten wir als Satz fest, daß eine Beziehung, die sich bei einer Koordinatentransformation verändert, kein Naturgesetz sein kann.

Und umgekehrt, jede Gleichung, die ein Naturgesetz ausdrückt, bleibt unverändert, unabhängig davon, welche Koordinatentransformation wir verwenden. Die Gleichungen, die Naturgesetze beschreiben, sind also kovariant. Physikalisch ist das die Konsequenz des objektiven Charakters der Naturgesetze. Das bezieht sich natürlich auch auf die Bilanzgleichung der vektoriellen extensiven Größen. Statt einer detaillierten Besprechung nehmen wir nur als Beispiel die auf Seite 118 stehende Navier-Stokessche Gleichung. Schreiben wir z. B. deren erste Komponentengleichung auf:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} = \varrho g_1 + \eta \Delta w_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} .$$

Wenn infolge der Spiegelung des Koordinatensystems bei den einzelnen Komponenten sich das Vorzeichen ändert, so kehrt jedes Glied der Gleichung sein Vorzeichen um, und wir erhalten nach einer Multiplikation mit -1 die ursprüngliche Form zurück.

Leser: Steht das alles irgendwie mit den Symmetrieeigenschaften der Naturgesetze in Zusammenhang? Darüber habe ich in einem Buch von *Feynman* gelesen, wo er z. B. folgendes schreibt: „Wie sollen wir verstehen, daß ein physikalisches Gesetz ‚symmetrisch' ist? Die Bestimmung der Symmetrie ist ein grundlegendes Problem." Er erwähnt die Formulierung von *Weyl*, in der wesentlich ist, daß „etwas dann symmetrisch ist, wenn wir nach einer bestimmten Operation, der wir es unterworfen haben, keine Änderung wahrnehmen". Er fragte, „welche Wirkung wir auf eine physikalische Erscheinung ausüben können, ohne daß der während des Versuches bestehende physikalische Zustand geändert wird". Die erste einfachste Operation ist, wie *Feynman* schreibt: „die räumliche Verschiebung der physikalischen Erscheinungen (Translation). Wenn wir an einer bestimmten Stelle im Raum einen Versuch durchführen und dann an einer anderen Stelle im Raum eine andere Versuchsanordnung aufbauen (oder das ursprüngliche dorthin verschieben), dann wiederholt sich das, was sich in der einen Anordnung in einer gewissen Zeitfolge abspielte, in der anderen Anordnung ebenso, natürlich nur dann, wenn dieselben Umstände — unter Berücksichtigung aller auf den ersten Versuch bezogenen Beschränkungen — zugrunde gelegt wurden. Mit anderen Worten, man muß alle Bedingungen, die sich auf das Experiment beziehen, ebenfalls verlegen." Die mit der zeitlichen Verschiebung verbundene Symmetrie erklärt er wie folgt: „Wenn wir eine Meßeinrichtung bauen und dieselbe zu einem bestimmten Zeitpunkt in Gang setzen und danach eine andere, aber genau gleich aufgebaute Meßeinrichtung unter gleichen Umständen in Gang setzen, dann werden beide Meßeinrichtungen — genau gleich — arbeiten. Wir setzen natürlich wieder voraus, daß alle wesentlichen Eigenschaften der Umgebung sich auch zeitlich verändern." Vom Drehen sagt er: „Wenn wir eine Meßeinrichtung um einen gewissen Winkel verdrehen, wird sie genau so wirken wie vor dem Verdrehen, vorausgesetzt, daß wir alle wesentlichen Faktoren der Umgebung mit ihr zusammen drehen."

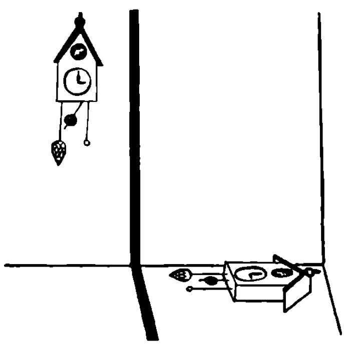
Autor: Es ist wirklich schwer, zwischen dem Feynmanschen Text und der Kovarianz der physikalischen Gesetze im ersten Moment den Zusammenhang zu erkennen; daher ist deine Frage schon berechtigt. In diesem Falle handelt es sich aber um eine seitens der Physik längst gelöste Frage, obwohl die zitierte Formulierung die Angelegenheit übermäßig kompliziert. Beginnen wir von vorn! Wie du zitiert hast, beschäftigt sich der Autor damit, „welche Wirkung wir auf eine physikalische Erscheinung ausüben können, ohne daß der während des Versuches bestehende physikalische Zustand geändert wird". Nach dieser Ansicht wirkt eine Änderung des Koordinatensystems auch auf die physikalische Erscheinung?

Leser: Ich kann mir schwer vorstellen, auf welche Weise. Meines Wissens — und das bezeugen auch unsere bisherigen Gespräche — kann die Wahl des Koordinatensystems nur die Form der mathematischen Beschreibung der Erscheinung berühren. Aber *Feynman* spricht ja gar nicht darüber. Er führte im weiteren nämlich mit der Versuchseinrichtung Operationen aus, d. h. räumliche und zeitliche Verschiebung bzw. Drehung, und erörterte deren Wirkung.

Autor: Also ist von keinem Koordinatensystem die Rede. Sehen wir dann den von dir zitierten letzten Satz an: „Wenn wir eine Meßeinrichtung ... verdrehen, wird sie genau so wirken wie vor dem Verdrehen, vorausgesetzt, daß wir alle wesentlichen Faktoren der Umgebung mit ihr zusammen drehen." Was verstehen wir unter wesentlichen Faktoren?

Leser: All das, was die Wirkung der Meßeinrichtung beeinflußt.

Autor: Wenn es sich z. B. um ein Pendel handelt und ich seine Achse in der senkrechten Ebene drehen will, was muß ich da mit drehen?



Leser: Ein auf das Pendel wirkender wesentlicher Umgebungsfaktor ist z. B. das Gravitationsfeld der Erde. Demnach müßte man auch die Erde um eine senkrechte Achse drehen?

Autor: Nicht ich habe das gesagt!

Leser: Aber das ist ja unmöglich!

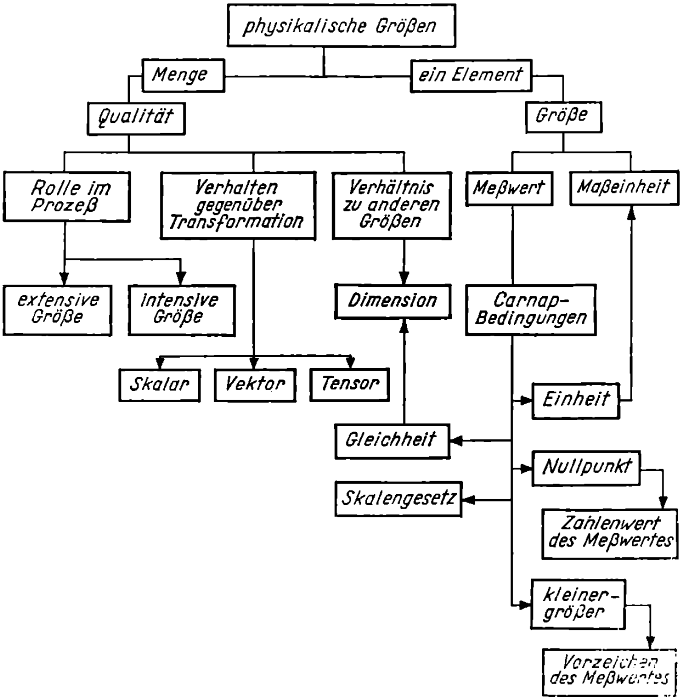
Autor: Als Gedankenversuch ist es vorstellbar, aber wogegen haben wir dann das Pendel gedreht? Was ist die senkrechte Ebene, in der die Drehung geschah? Hat das Weltall irgendeine bevorzugte Richtung, die z. B. die absolute Lage der senkrechten Ebene bestimmt?

Leser: Eine solche gibt es offenbar nicht.

Autor: Ebenso könnten wir auch darüber nachdenken, was in dem von dir zitierten Text die „zusammen mit allen Bedingungen“ im Raum versetzte Meßeinrichtung bedeutet. Worauf bezieht sich eigentlich die Umsetzung? Wir wollen diese Fragen nicht weiter vertiefen, nach der Definition von *Weyl* ist „etwas dann symmetrisch, wenn wir nach einer bestimmten Operation, der wir es unterworfen haben, keine Änderung wahrnehmen“. Die mathematische Form der Naturgesetze hat diese Symmetrie, bei Transformation der Koordinatensysteme erhalten wir keine Veränderung. Wir transformieren nicht die Erscheinung, sondern das Koordinatensystem.

Leser: Danach bedeuten die Symmetrieeigenschaften der Naturgesetze im wesentlichen die Kovarianz, d. h., sie drücken aus, daß die Naturgesetze objektiv, die Wahl des Koordinatensystems aber subjektiv ist, und daher kann die mathematische Form der Gesetze auch nicht davon abhängen.

Autor: Ich glaube, es ist an der Zeit, dieses Gespräch zu beenden. Als Zusammenfassung lohnt sich vielleicht, ein Schema der physikalischen Veränderlichen anzugeben.
Ob die physikalischen Größen Skalare, Vektoren oder Tensoren sind, hängt davon ab, wie sie sich einer Koordinatentransformation gegenüber verhalten. Von den bei den einzelnen Koordinatentransformationen unverändert bleibenden Eigenschaften sagen wir, daß diese gegenüber der betreffenden Koordinatentransformation invariant sind. Die in den physikalischen Gleichungen auftretenden Variablen verändern sich (je nach ihrer Art) bei bestimmten Koordinatentransformationen, oder sie bleiben invariant. Die Bedingung für die Objektivität der Gleichung liegt darin — welche Koordinatentransformation wir auch gebrauchen —, daß ihre Form unverändert bleibt. Diese Eigenschaft der Gleichungen, die Naturgesetze beschreiben, nennen wir Kovarianz.



Bisher war von einer Aufteilung in qualitative und quantitative physikalische Veränderliche die Rede. Bei der Lösung jeder technischen Aufgabe arbeiten wir mit physikalischen Größen. Die Lösung irgendeiner technischen Aufgabe bedeutet die Feststellung des zahlenmäßigen Zusammenhanges zwischen den physikalischen Größen. Welche Lösungsmethoden möglich sind, wird der Gegenstand unseres nächsten Gespräches sein.

Dreizehntes Gespräch

Lösungsmethoden

„Wirklich hilfreich, wirklich bildend kann
der Unterricht nur dann sein,
wenn er sich nicht
auf die Mitteilung der Kenntnisse beschränkt,
sondern dabei bestrebt ist,
eine Grundlage für die Denkmethode
zu vermitteln,
die man heute naturwissenschaftliches Denken
zu nennen pflegt.“

Loránd Eötvös

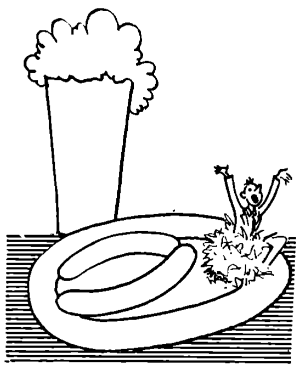
Leser: Soweit es unsere Zeit erlaubt, haben wir über ziemlich viele Fragen gesprochen. Es ist uns beinahe zur Gewohnheit geworden, die Untersuchung eines Themenkreises mit der Bestimmung der Wechselwirkungen und mit der Feststellung der charakteristischen Größen zu beginnen. Es war überzeugend, wenigstens für mich, wie wir dann die Grundgleichungen der einzelnen Themenkreise aus der allgemeinen Transportgleichung abgeleitet haben. Diese Methode ist wirklich dazu geeignet, unsere Kenntnisse leichter zu ordnen. Mir scheint, daß wir dieses ordnende Prinzip der Physik des 20. Jahrhunderts verdanken.

Autor: Es wäre übertrieben, das nur als Resultat des 20. Jahrhunderts zu verbuchen. Einer der größten Physiker des 19. Jahrhunderts, *Maxwell*, hat im Jahre 1870 gesagt: „In verschiedenen Wissenschaften können wir beobachten, daß das System der Veränderlichen und die sie verknüpfenden mathematischen Beziehungen dieselben sind, ungeachtet dessen, daß die Vorgänge physikalisch sehr verschieden sind."[1]
Wir könnten beinahe ohne Ausnahme alle großen Gelehrten der Physik zitieren, da die Einheit der physikalischen Welt seit *Galilei* und *Newton* auch mathematisch immer klarer formuliert

---

[1] *Maxwell, J. C.:* The scientific papers. 1927, S. 215 bis 229 (Address to the Mathematical and Physical Sections of the British Association, 1870, Sept. 15)

wird. *Einstein*[1] zeigt in einem seiner glänzenden Artikel, daß die Entwicklung der Wissenschaft nicht nur das Anwachsen der Wissensmenge bedeutet (in unseren Tagen beruft man sich mit Vorliebe nur auf diese Seite), sondern auch die Verminderung der Anzahl der Grundprinzipien und Grundbeziehungen. Leider kommt es auf dem Gebiet der technischen Wissenschaften besonders häufig vor, daß man die letztere Eigenart der physikalischen Entwicklung unbeachtet läßt. Oft vertiefen wir uns in Details, in den alles umfassenden Unterricht und sehen den Wald vor lauter Bäumen nicht.



Die großen lexikalischen Kenntnisse, über die ein Mensch verfügt, sind jedoch wertlos, wenn er nicht systematisch und selbständig denken kann. Ohne diese Fähigkeit kann er sich nicht einmal auf dem engeren Fachgebiet orientieren. *L. Eötvös* betont, daß „die Menge der praktischen Vorschriften keine Selbstständigkeit des Denkens erzeugen kann“. Ohne die systematisierte Wissensmenge kann man leicht ein Pseudogelehrter werden, von dem *Eötvös* mit tiefer Verachtung schreibt: „Sie ähneln einer in Meerrettich gefallenen Made, die nichts anzufangen weiß, wenn sie sich aus einem bekannten Gebiet verirrt.“[2]

Leser: Das ist ein etwas starker Ausdruck, aber „wem die Jacke nicht paßt ...“. Würdest du all das am Anfang unseres Gesprächs zitiert haben, hätte ich es vielleicht als Übertreibung

---

[1] *Einstein, A.:* Physik und Realität. 1936

[2] Einige Worte zu den Fragen des Universitätsunterrichtes, Vortrag gehalten von *L. Eötvös* am 10. 4. 1887. Veröffentlicht in: Aus den Schriften des Gelehrten und Kulturpolitikers *L. Eötvös*. Budapest 1964, S. 181 bis 182 (ung.)

empfunden, aber jetzt sehe ich schon klar, daß in den Systematisierungsprinzipien keine Hexerei steckt, und es ist meine Überzeugung, daß es sich lohnt, soviel Mühe darauf zu verwenden, wie zu ihrer Erlernung und Handhabung nötig ist. Die allgemeinen Bilanzgleichungen geben eine solche Grundlage, die sehr viele — gewiß weit mehr als die besprochenen — Beschreibungen technischer Prozesse erleichtert.

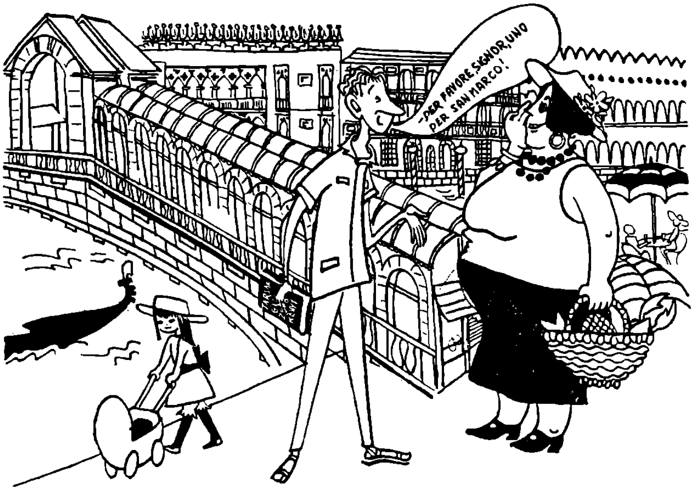
Autor: Erlaube in diesem Zusammenhang noch einen Vergleich. Offenbar hast du Sprachen gelernt. Sage, was hast du zuerst gebraucht, eine Grammatik oder ein Konversationstaschenbuch?

Leser: Eigentlich beides zugleich. In den Konversationstaschenbüchern kann man ab und zu ganz gute Ausdrücke für spezielle Situationen finden, für Gespräche, die mit der Reise, dem Einkauf oder der Bildung zusammenhängen.

Autor: Und was denkst du, wie weit würdest du damit kommen, wenn du ohne Kenntnis der Grammatik und der Wörter ein solches Taschenbuch auswendig lerntest?

Leser: Ich glaube, keinen Schritt. Einerseits würde ich manchmal Sätze gebrauchen, die nicht zur Situation passen, und mich damit lächerlich machen, andererseits würde ich eine Antwort nicht verstehen, wenn sie nicht wörtlich dieselbe wäre, wie sie im Buche steht. Aber diese Frage ist sehr abstrakt. Es gibt wohl keinen Menschen, der nur aus dem Konversationsbuch lernt.

Autor: Bemerkst du nicht, daß jedoch ziemlich viele diese auch von dir verpönte Methode beim Aneignen von technischen Kenntnissen anwenden? Sie erlernen Beziehungen, die nur für einen speziellen Fall Gültigkeit haben. Sie vertiefen sich in Handbücher und Fachartikel und suchen da die Lösung ihrer aktuellen Aufgabe. All das ohne Kenntnisse der Grammatik. Mißverstehen wir einander nicht, die Kenntnis von Zusammenhängen und Formeln kann nützlich sein, das Studium von Handbüchern und Fachartikeln ist notwendig. Aber, ein solcher



Glücksfall ist sehr selten, daß wir einen Artikel finden, der genau die Lösung unserer Aufgabe enthält. (Eine kleine Abweichung genügt, und wenn wir es bemerken, ist der Artikel unbrauchbar, wenn wir es nicht bemerken, ist unsere Lösung unbrauchbar). Die technische Wissenschaft ist keine Formelsammlung, wie die Musik auch nicht mit der Menge der Noten identisch ist. Ohne Ordnung, ohne Gesetz, ist das Aneinanderreihen von Tönen keine Musik, das Aneinanderreihen von Wörtern keine Sprache.

In der Sprache ist Ordnung, Gesetz, Grammatik. In den technischen Wissenschaften ist auch eine Ordnung nötig, aus der die Formeln und die Regeln zu wissenschaftlichen Kenntnissen werden. Solche Gesetze sind die Erhaltungsgesetze und die Bilanzgleichungen. Jede in den technischen Wissenschaften verwendete Grundgleichung ist auf diese zurückzuführen. Wie für alle Gedankengänge, so gelten auch für die technischen Fragen die Gesetze der Dialektik.

Leser: Du willst dich doch nicht auch noch mit Philosophie befassen?

Autor: Ob ich will oder nicht – man muß sich damit befassen. Wer denkt, der philosophiert. Wenn jemand die Gesetze der Philosophie nicht kennt, dann kann es leicht vorkommen, daß er unrichtig, unlogisch denkt. Wir befassen uns jetzt nur mit einer einzigen Frage, der Untersuchung zusammengesetzter (komplizierter) Systeme.

Leser: Das ist einerseits kein philosophisches Problem, andererseits haben wir es im fünften Gespräch schon ausführlich erörtert.

Autor: Ich wiederhole, es gibt kein wissenschaftliches Problem, das man vom Prozeß des menschlichen Denkens trennen könnte. *Engels* schreibt, einzelne „glauben sich von der Philosophie zu befreien, indem sie sie ignorieren oder über sie schimpfen. Da sie aber ohne Denken nicht vorankommen und zum Denken Denkbestimmungen nötig haben . . ., so stehen sie nicht minder in der Knechtschaft der Philosophie, meist aber leider der schlechtesten, und die, die am meisten auf die Philosophie schimpfen, sind Sklaven gerade der schlechtesten vulgarisierten Reste der schlechtesten Philosophien.[1] So ist die Untersuchung der zusammengesetzten Systeme, obwohl es in der Tat ein naturwissenschaftliches, oder wenn du willst, ein Ingenieur-Problem ist, hinsichtlich ihrer Methode eine philosophische Frage. Andererseits haben wir in unserem fünften Gespräch nur darüber debattiert, ob die Untersuchung der vereinfachten Vorgänge einen technischen Sinn hat. Wir haben aber nicht darüber gesprochen, wie man über die einfachen Erkenntnisse zu den komplizierten gelangen kann und muß. Es ist ein sehr häufiger Fehler, besonders bei jungen Ingenieuren, daß sie bei der Untersuchung einer Erscheinung oder einer Anlage, ohne das kleinste Detail wegzulassen, alles registrieren, niederschreiben, kennenlernen wollen. Als ganz allgemeines Prinzip können wir feststellen, daß das nicht möglich, aber auch nicht nötig ist. Bei den Untersuchungen muß man nur danach trachten (und das ist auch eine genügend große Aufgabe), die für den Vorgang wesentlichen, bestimmenden Kennzahlen und Gesetze zu erlernen.

---

[1] *Engels, F.:* Dialektik der Natur. Berlin 1952

Leser: Ist es aber nicht besser, wenn wir zu diesem Zweck mehr und verschiedenartige Messungen vornehmen und danach feststellen, was wesentlich und was unwesentlich war?

Autor: Umfangreiches Messen ist unbedingt vorteilhaft, aber es hat keinen großen Wert, wenn wir es ohne vorherige theoretische Überlegungen ausführen. „Die mit keiner Theorie zu verstehenden Beobachtungen sind vollkommen nutzlos", schreibt *Selye.*[1] Die theoretische Überlegung wählt aus der unmittelbaren Anschauung den wesentlichen Teil, von dem übrigen abstrahiert sie. „Von der lebendigen Anschauung zum abstrakten Denken und von diesem zur Praxis — das ist der dialektische Weg der Erkenntnis der Wahrheit, der Erkenntnis der objektiven Realität".[2] Ohne Vernachlässigung und Abstraktion ist eine entsprechende erklärende Theorie undenkbar.

Leser: Und können wir nicht den Fehler begehen, gerade das Wesentliche zu vernachlässigen?

Autor: Die dargelegte Theorie hilft auch, einen solchen Fehler zu vermeiden. Selbst die kompliziertesten technischen Systeme sind die Summe elementarer Ausgleichsvorgänge. Zum Erkennen dieser Ausgleichsvorgänge genügt es, das Fachgebiet verhältnismäßig kurze Zeit zu studieren. Auf Grund dessen kann man auch alle physikalischen Veränderlichen, die charakteristischen extensiven und intensiven Größen erkennen, welche für den Vorgang wesentlich sind. Die Strömungen der einzelnen extensiven Größen bedeuten die Teilvorgänge des zusammengesetzten Systems. Ihre dynamischen Gesetze sind bereits bekannt, das sind die Bilanzgleichungen. Für die zahlenmäßigen Größen der in der Gleichung vorkommenden Leitwerte (oft auch für die Quelldichten) können wir Angaben in der Fachliteratur finden.

---

[1] *Selye, J.:* Vom Traum bis zur Entdeckung. Budapest 1967, S. 359 (ung.)

[2] *Lenin, W. I.:* Werke, Band 38. Berlin 1964, S. 160

Leser: Und wenn es solche Zahlenwerte gibt, was bietet Sicherheit, daß sie auch dann anwendbar sind, wenn diese Größen in Teilvorgängen nebeneinander und auch miteinander in Wechselwirkung stehen?

Autor: Die Summe der Teilvorgänge bedeutet tatsächlich noch nicht den gesamten Vorgang, aber sie orientiert uns grob über die zu erwartenden Endzustände. Die Untersuchung der Teilvorgänge ersetzt nicht die Untersuchung des Gesamtsystems. Für das Zerlegen in Elemente gibt es eine Methode, die man zusammen mit der vorangegangenen anwenden muß, und das ist die Zerlegung des Systems in Teilsysteme.

Leser: Du führst wieder einen neuen Begriff ein, was verstehst du unter Teilsysteme?

Autor: Wir sprachen schon davon, daß bezüglich des Verhaltens der Systeme die Isolation eine außerordentlich wichtige Rolle spielt. Die Isolation verhindert die Strömung gewisser extensiver Größen bzw. beschränkt diese je nach ihrer stofflichen Beschaffenheit. Es ist in einem solchen System charakteristisch, daß die Zahlenwerte der zu einer bestimmten intensiven Größe gehörenden Leitwerte sehr klein (ihr Widerstand sehr groß) sind. Aber eine „absolute Isolation" existiert nicht. Bei sehr großen Werten des Gradienten der intensiven Größe wird der durch die „Isolation" gehende extensive Strom bedeutend werden. Durch die Isolierung wird das System von seiner Umgebung abgegrenzt. Die Grenze nennen wir den äußeren Rand des Systems. Unsere Untersuchungen berühren nur den Teil innerhalb dieses Randes. Für diesen inneren Teil schreiben wir die Erhaltungsgesetze auf. Aber ohne die Eigenschaften des Randes zu kennen, können wir nichts über die Wechselwirkung des Systems mit seiner Umgebung sagen. (Die Erhaltungsgesetze ergeben nur zusammen mit den Randbedingungen das mathematische Modell des Systems.) Aber nicht nur zwischen dem System und seiner Umgebung, sondern auch innerhalb des Systems gibt es eine Isolation. Diese innere Isolation trennt das System in gut abgrenzbare Teile und bildet den inneren Rand des Systems. Je einen solchen durch einen inneren Rand getrennten Teil nennen wir ein Teilsystem.

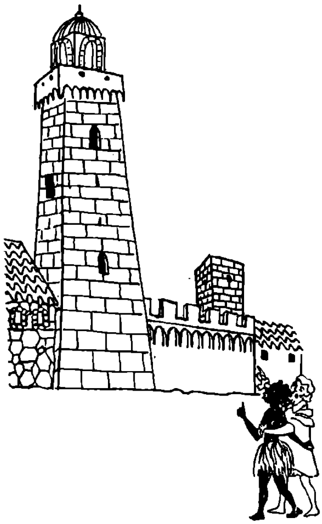
Leser: Sind Teilsysteme also einfach mit Wänden geometrisch umgrenzte Teile des Gesamtsystems?

Autor: Nein, man muß nicht immer an tatsächliche Wände denken. Das wesentliche ist, daß von einer Fläche die Rede ist, die die Strömung gewisser extensiver Größen verhindert bzw. beschränkt. So kann der innere Rand auch eine solche fiktive (gedachte) Fläche sein, die z. B. die Grenze der chemischen Reaktionen innerhalb eines Systems anzeigt. In einem Feuerraum trennt der Querschnitt hinter dem Ende der Flammenhöhe das die chemische Reaktion enthaltende Teilsystem von jenem, in dem keine Reaktion mehr stattfindet. Durch diese Aufteilung in Teilsysteme wird ermöglicht, die einzelnen wesentlich einfacheren Teile gesondert zu untersuchen und die Teilresultate verhältnismäßig einfach zusammenzusetzen. (Anschaulich können wir sagen, daß an der Grenze zweier Teilsysteme das Resultat des einen zugleich die Anfangbedingung für die Untersuchung des anderen Teilsystems darstellt.)

Leser: Das kommt mir zu abstrakt vor, aber ich glaube, das Wesentliche verstehe ich. Es handelt sich darum, daß wir nicht zu viel auf einmal greifen dürfen, sonst behalten wir zu wenig in der Hand. Du versuchst, mir verständlich zu machen, was *Descartes* einmal sagte: „Teile jedes Problem, das du untersuchst, in soviel Teile, wie es möglich und notwendig ist, um es leichter lösen zu können."

Autor: Das ist eine goldene Regel für jeden Erkenntnisvorgang, für die Versuchs- wie für die Denktätigkeit gleichermaßen gültig. Und da wir wieder bei Zitaten stehengeblieben sind, denken wir auch an die Worte von *Galilei*: „Würden wir einem Menschen, der noch nie eine Treppe gesehen hat, einen Turm zeigen und fragen, ob er auf seine Spitze steigen könne, er würde, glaube ich, unbedingt mit Nein antworten, weil er sich nicht vorstellen könnte, das Ziel anders als fliegend zu erreichen. Aber zeigen wir ihm einen Stein, der nicht höher als ein halber Fuß ist und fragen wir ihn, ob er darauf steigen kann, würde er unbedingt mit Ja antworten. Sogar, daß er nicht nur einmal, sondern auch leicht zweimal, zwanzigmal, oder gar hundertmal darauf steigen könne. Würden wir ihm danach eine Treppe zeigen, mit deren Hilfe er stufenweise die vorherige Höhe nach seiner eigenen Aussage bequem erreichen könnte, die ihm eben noch unerreichbar erschien, würde er selbst lachen und seine Unüberlegtheit zugeben."[1]

Leser: Jetzt ist alles tatsächlich sehr einfach. Wir sind in den Bereich der Transporttheorie gelangt, und mit ihrer Hilfe können wir die Zusammenhänge der untersuchten konkreten Erscheinung glatt angeben.



Autor: Davon ist keine Rede, du fällst von einem Extrem ins andere.
Worüber wir bisher sprachen, bedeutet nur die Systematisierung der Vorgänge, die Formulierung der beschreibenden Differentialgleichungen und nicht die konkreten Zusammenhänge. So einfach ist das Leben doch nicht. Die Theorie gibt keine fertigen Rezepte. Darin hat *Goethes* Mephisto recht: „Grau, teurer Freund, ist alle Theorie und grün des Lebens goldner Baum."[2] Zu den konkreten Zusammenhängen führt noch ein langer Weg, und das ist jeweils die Aufgabe des speziellen Fachgebiets. Da muß sich entscheiden, welche Form z. B. die Quellenglieder der Gleichung haben. Nur für ein bestimmtes technisches System sind die zur Differentialgleichung gehörenden Eindeutigkeitsbedingungen formulierbar. Wir haben damit zwar die Aufgabe formuliert, taten es auch sehr genau, aber es bleibt doch nur eine Formulierung und keine Lösung. Die tech-

[1] *Galilei, G.:* Dialogo. Florenz 1663
[2] *Goethe:* Faust, I. Teil

nischen Zusammenhänge bedeuten aber gerade die Lösung der Aufgabe.

Leser: Die Formulierung der Aufgabe ist schon die halbe Lösung der Aufgabe. Wir sind also schon über die Hälfte hinaus.

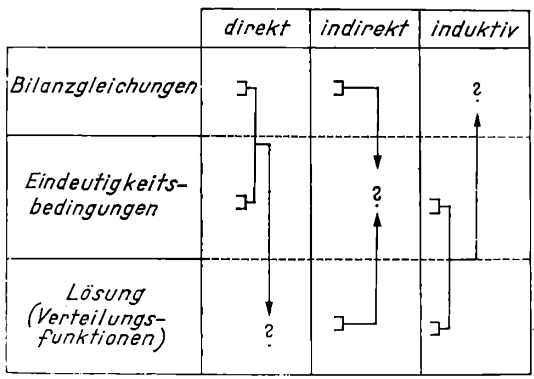
Autor: Es ist wahr, über die Hälfte sind wir schon hinaus, aber über das Schwierigste noch nicht. Die Lösung ist nicht so einfach. Zur Lösung der technischen Aufgaben sind seriöse Sachkenntnisse notwendig. Von welcher Art Lösung der Aufgaben kann überhaupt die Rede sein? Wir unterscheiden drei Arten: Bei der ersten Art — und davon war bisher die Rede — kennen wir die den Vorgang beschreibenden Gleichungen, zusammen mit den Eindeutigkeitsbedingungen und suchen deren Lösung. Gegeben sind also eine technische Einrichtung (die durch die Eindeutigkeitsbedingungen charakterisiert wird) und Kenntnisse der Gesetze des im System ablaufenden Vorgangs (diese werden durch die Differentialgleichungen beschrieben). Wir suchen das Verhalten der Einrichtung, die Verteilungsfunktionen der verschiedenen physikalischen Größen nach Zeit und Ort (das bedeutet die Lösung des Gleichungssystems); d. h., wir wollen wissen, wie die Einrichtung bei gegebenen Bedingungen wirken wird. Eine solche Aufgabe nennen wir eine direkte Aufgabe.

Leser: Im Grunde genommen handelt es sich um eine bekannte Aufgabe. Eine solche muß ein Betriebsingenieur lösen (der mit fertigen Anlagen und Bedingungen arbeitet) und auch diejenigen, die eine Qualitätsuntersuchung für einen neuen Maschinentyp oder eine technische Anlage vornehmen.

Autor: Bei der zweiten Art kennen wir auch die den Vorgang beschreibenden Gleichungen, doch nicht die Eindeutigkeitsgleichungen. Statt dessen ist angegeben, wie die Verteilungsfunktionen aussehen sollen. Wir suchen die Eindeutigkeitsbedingungen, mit denen die beschreibenden Gleichungen gerade eine vorgeschriebene Lösung ergeben. Diese Aufgabe nennen wir eine indirekte Aufgabe. Im wesentlichen geht es darum, daß wir irgendein Naturgesetz (bzw. Gesetze) für unsere Ziele gebrauchen wollen. Unsere Ziele sind klar, die Planung schreibt vor, was für eine Maschine oder Anlage, mit welchem Verhalten wir benötigen. Die Aufgabe besteht darin, jene Bedingungen zu finden (die Form der Maschine, die Wechselwirkung mit ihrer Umgebung, die durch uns wählbare Charakteristik des in der Maschine verwendeten Arbeitsmediums), unter denen der Prozeß in der vorgeschriebenen Richtung, Geschwindigkeit und mit dem gewünschten Wirkungsgrad vonstatten geht.

Leser: Ist das nicht eher der Wirkungskreis eines Konstrukteurs?

Autor: Ja, doch kommt eine solche Aufgabe auch oft in der Praxis des Betriebsingenieurs vor, besonders wenn es sich um die Änderung einer vorhandenen Einrichtung, die Auswahl und die Besorgung von Materialien, Geräten, Einrichtungen und Betriebsbedingungen für das vorgeschriebene technologische Ziel handelt.
Schließlich die dritte Art, die induktive Aufgabe. Eine Reihe Meßergebnisse stehen zu unserer Verfügung, die die Verteilungsfunktionen bei verschiedenen Randbedingungen angeben. Unsere Aufgabe besteht darin, die Gesetzmäßigkeit des sich abspielenden Vorgangs in eine mathematische Form zu kleiden. Das heißt, wir können nicht vorhersagen, welcher Vorgang sich



innerhalb der Anlage abspielt. Wir haben nur darüber Angaben, wie unser System auf die verschiedenen äußeren Wirkungen reagiert. Zu diesem Aufgabenbereich gehört auch das sogenannte „Black-box"-Problem.

Leser: Gehört das also in das Gebiet der Automatik, der Regelungstechnik?

Autor: In der Automatik ist das tatsächlich eine verbreitete Methode, sie kann aber in jedem Fall angewandt werden, wo die dynamische Charakteristik komplizierter technischer Einrichtungen gesucht wird. Im Prinzip bedeutet auch die Entdeckung jedes neuen Naturgesetzes die Lösung einer solchen Aufgabe. Wir beschäftigen uns aber bloß mit den ersten beiden Aufgabentypen. Und da bleiben wir einen Moment stehen. Wie lösen wir unsere Aufgabe? Diese Frage ist für alle aufregend, vom Schulkind bis zum Wissenschaftler. Der in Amerika lebende, ungarische Mathematiker *György Pólya* befaßt sich damit in mehreren Büchern. Aus einem seiner Bücher[1] wollen wir einige Abschnitte zusammen lesen. Es wird auch für uns unterhaltend und nützlich sein.

*

„Mache dich mit der Aufgabe bekannt

Wovon soll ich ausgehen? Gehe davon aus, was die Aufgabe sagt.

Was soll ich danach tun? Stelle dir die Aufgabe in ihrer Gesamtheit vor, so klar und lebendig, wie du es nur kannst. Befasse dich momentan nicht mit Details.

Was erreiche ich damit? Du verstehst die Aufgabe, befreundest dich mit ihr, du prägst das gesteckte Ziel in dein Gedächtnis ein. Die auf die Aufgabe konzentrierte Aufmerksamkeit regt das Gedächtnis an, sie hilft, die einschlägigen Kenntnisse in Erinnerung zu bringen.

---

[1] *Pólya, G.:* Schule des Denkens. Bern 1948

Vertiefe dich in das Verständnis der Aufgabe

Wovon soll ich ausgehen? Gehe wieder von der Aufgabe selbst aus. Sie soll jetzt so klar vor dir stehen, daß du selbst, wenn du sie eine Zeitlang aus dem Auge verlierst, nicht befürchten mußt, daß sie endgültig verschwindet.

Was soll ich danach tun? Zerlege die Aufgabe in ihre Hauptteile ... Gehe in Gedanken durch die Hauptteile der Aufgabe, untersuche einen nach dem anderen, denke sie der Reihe nach durch, in verschiedenen Kombinationen, alle Details im Verhältnis zu den übrigen und auf die ganze Aufgabe bezogen.

Was erreiche ich damit? Du bereitest die Details vor, die später offenbar eine Rolle spielen werden, und machst sie klar.

Suche nach einem nützlichen Einfall

Wovon soll ich ausgehen? Gehe von der Untersuchung der Hauptteile der Aufgabe aus. Diese seien jetzt bereits — als Resultat deiner bisherigen Arbeit — genügend geordnet, klar vor dir, daß du sie dir jederzeit vergegenwärtigen kannst.

Was soll ich danach tun? Betrachte die Aufgabe von verschiedenen Seiten und suche Zusammenhänge mit deinen früher erworbenen Kenntnissen.

1. Betrachte die Aufgabe von verschiedenen Seiten. Lege die Betonung jeweils auf andere Teile der Aufgabe, untersuche die einzelnen Details, jedes auch mehrmals, aber auf verschiedene Art, kombiniere sie auf verschiedene Weise. Nähere dich ihnen immer wieder von neuen Seiten. Versuche, die einzelnen Details in neuer Auffassung zu sehen, versuche, der ganzen Aufgabe eine neue Form zu geben.
2. Suche Verbindungen zu deinen früher erworbenen Kenntnissen. Denke daran, was dir in der Vergangenheit in ähnlichen Situationen geholfen hat. Versuche, im untersuchten Stoff ein bekanntes Detail zu erkennen, versuche im erkannten Detail etwas Nützliches zu sehen.

Was muß ich also wahrnehmen? Eine nützliche Idee, eventuell einen entscheidenden Gedanken, der auf einmal den Weg zum Ziel zeigt.

Wie kann mir eine Idee nützlich sein? Indem sie ganz, oder wenigstens teilweise den zu verfolgenden Weg zeigt; sie lenkt dich mehr oder weniger bestimmt dahin, wie du fortfahren sollst. Die Ideen sind teils vollständiger, teils weniger vollständig. Wenn du eine Idee hast, so freue dich, selbst wenn es nur eine Teilidee ist.

Was soll ich mit einer Teilidee anfangen? Du sollst sie gründlich untersuchen. Wenn es sich lohnt, befasse dich längere Zeit mit ihr. Wenn sie dir richtig scheint, stelle fest, wie weit du mit ihr kommen kannst und überdenke wieder die Lage. Jede irgendwie taugliche Idee verändert die ursprüngliche Lage. Untersuche die neue Lage von verschiedenen Seiten und suche Anschlüsse an deine vorher gesammelten Kenntnisse.

Was erreiche ich damit? Wenn du Glück hast, kannst du zu einer neuen Idee kommen. Es ist möglich, daß dich die neue Idee gerade zur Lösung führt. Es ist möglich, daß du noch einige weitere Ideen benötigst. Es ist möglich, daß irgendeine deiner Ideen dich irreführen wird. Trotzdem mußt du für jede neue Idee dankbar sein, auch wenn sie unbedeutend oder unklar ist, auch dann, wenn sie nur dazu gut ist, andere unklare Ideen etwas zu beleuchten oder andere weniger glückliche Ideen zu ergänzen. Du sollst dich auch darüber freuen, wenn du eine Zeitlang keine wesentlichen neuen Ideen hast, aber dein Bild von der Aufgabe vollkommener oder zusammenhängender, einheitlicher oder ausgeglichener wird.

Führe deinen Plan aus

Wovon soll ich ausgehen? Gehe von dem glücklichen Einfall aus, der die Lösung zeigte. Fange dann an, wenn du genügend sicher bist, den wesentlichen Zusammenhang erfaßt zu haben, mit den eventuell vorkommenden kleineren Detailfragen fertig zu werden.

Was soll ich danach tun? Laß die Lösung nicht aus der Hand gleiten. Führe bis ins einzelne alle Operationen durch, von denen du annimmst, daß sie ohne Schwierigkeit ausgeführt werden können. Überzeuge dich von der Richtigkeit jeden Schrittes, entweder durch formalen Nachweis oder durch induktiven

Schluß oder durch beide, wenn das möglich ist. Wenn deine Aufgabe sehr kompliziert ist, kannst du „größere“ oder „kleinere“ Schritte unterscheiden; die größeren Schritte bestehen aus mehreren kleineren. Kontrolliere erst die größeren Schritte und wende dich erst danach den kleineren zu.

Was erreiche ich dadurch? Du erhältst die Lösung so, daß jeder einzelne Schritt ohne Zweifel fehlerlos ist.

Untersuche die Lösung

Wovon soll ich ausgehen? Von der in allen Teilen vollständigen und fehlerlosen Lösung.

Was soll ich danach tun? Betrachte von verschiedenen Seiten die Lösung und suche Anschlüsse an deine früher erworbenen Kenntnisse.
Untersuche die einzelnen Teile der Lösung und versuche, sie soweit wie möglich zu vereinfachen; untersuche auch die längeren Teile der Lösung und versuche, sie zu verkürzen; versuche, die ganze Lösung mit einem Blick zu übersehen. Versuche, die kürzeren und längeren Teile der Lösung vorteilhaft zu verändern, versuche, die Lösung vollkommener, anschaulicher zu gestalten, versuche, sie auf möglichst natürliche Weise in deine vorher erworbenen Kenntnisse einzuordnen. Untersuche gründlich die Methode, die dich zur Lösung führte, versuche, das Wesentliche zu erkennen und auch zur Lösung anderer Aufgaben zu verwenden. Untersuche schließlich auch das Resultat und versuche, es ebenfalls zur Lösung anderer Aufgaben zu verwenden.

Was erreiche ich damit? Du kannst auf eine neue und bessere Lösung stoßen, und du kannst interessante Tatsachen entdecken. Wenn es dir zur Gewohnheit wird, daß du deine Lösungen auf diese Weise überprüfst und gründlich untersuchst, wirst du geordnete und gut verwendbare Kenntnisse erwerben, du entwickelst deine Fertigkeiten zur Lösung von Aufgaben.“

*

Leser: Jeder seiner Sätze verdient, daß wir ihn uns gründlich ins Gedächtnis einprägen.

Autor: Wir könnten auch nichts mehr hinzufügen. Kommen wir auf die direkten und indirekten Aufgaben zurück. Mit welchen Methoden kann man diese lösen?

Leser: Wenn wir die vollständige mathematische Formulierung der Aufgabe kennen, dann ist es zweckmäßig, mit mathematischen Mitteln (analytisch oder mit der Rechenanlage) die Lösung auch auszuführen.

Autor: Das ist der nächstliegende Weg, aber leider nicht immer möglich. Es gibt unzählige technische Probleme, bei denen heute noch die direkte und erst recht die indirekte mathematische Lösung unmöglich ist. Dann sind wir auf Versuche angewiesen. Als Versuchsresultat erhalten wir auch die funktionale Verknüpfung zwischen den abhängigen und unabhängigen Veränderlichen.

Leser: In diesem Sinn ist also das Messen (das Experiment) auch schon eine Lösung und bedeutet die Lösung des mathematischen Modells?

Autor: Ja, aber es gibt (unter anderem) einen — für uns sehr wesentlichen — Unterschied zwischen dem analytischen (oder numerischen) Integrieren und der durch Messungen erhaltenen Lösung. Die analytische Integration ordnet nämlich jedem Zahlenwert der unabhängigen Veränderlichen eine neue Zahl zu, allgemein also Zahlen zu Zahlen. Wir könnten auch sagen, daß die Lösung punktartig ist. Bei der Messung können wir nie so eine Punktartigkeit erhalten. Das muß man aber bereits vor dem Beginn des Versuchs in Betracht ziehen. Wegen der auf die zu untersuchende Erscheinung und auf den Meßvorgang selbst wirkenden Zufallsstörungen können wir nämlich nur sicher sein, daß sich der wirkliche Wert innerhalb einer (kleinen) Umgebung der gemessenen Werte befindet. Als Meßresultat erhalten wir also eine Beziehung, die ein Wertintervall der abhängigen Veränderlichen einem Wertintervall der unabhängigen Veränderlichen zuordnet. Wir könnten auch sagen, daß die Lösung verschmiert ist. Es wäre prinzipiell falsch, vom Versuch Punkte, die sich genau auf einer exakten Funktionskurve befinden, zu erwarten. Da wir die Fehlertheorie kennen, trifft uns die Streuung der Meßdaten infolge des stochastischen Charakters des Prozesses nicht unerwartet. Wir können im vornherein entscheiden, wie viele und wie genaue Messungen wir zur Bestimmung der entsprechenden Zusammenhänge benötigen. (Mit dieser Frage befaßt sich die Theorie der Versuchsplanung.) Ein Versuch ist mit der gegebenen Anlage nicht immer durchführbar. In einem solchen Falle muß man den Versuch nicht in der ursprünglichen, sondern in einer ähnlichen Anlage bzw. an einem Modell ausführen.

Vierzehntes Gespräch

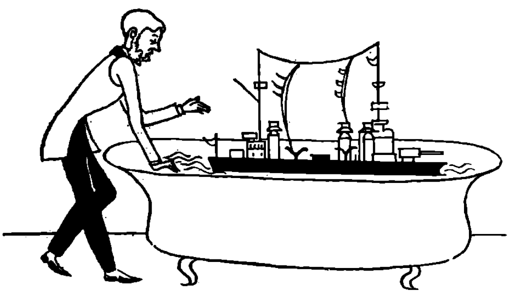
Ähnlichkeit und Modellversuche

„Und ich schätze über alles die Analogien,
meine vertrauenswertesten Lehrmeister."

Kepler

Leser: Ich glaube, unser voriges Gespräch ist unbeendet geblieben. Du hast es kurz mit der Bemerkung abgebrochen, daß, wenn an einer gegebenen Anlage der Versuch nicht möglich ist, mit einer ähnlichen Einrichtung, einem Modell, gemessen werden muß. Könnten wir darüber nicht etwas ausführlicher sprechen?

Autor: Erlaube mir, vorerst eine wahre Geschichte aus dem vergangenen Jahrhundert zu erzählen.
Im Jahre 1870 ließ die Admiralität in England ein wunderbares Schiff bauen. Die Pläne der stolzen „Capitan" haben alle in



Staunen versetzt. Ein Gelehrter dieser Zeit, *Reed*, begnügte sich nicht mit der Bewunderung. Er fertigte ein Modell des Sichffes an, und nach Laboratoriumsversuchen stellte er betroffen fest, daß der Stapellauf des Schiffes zu einer unabwendbaren Katastrophe führen müßte. Er verständigte schnellstens die Admiralität, wo aber seine Prophezeiung nicht beachtet wurde. Lachend höhnte man noch darüber, daß er sich in einer Badewanne mit einem Spielzeugschiff amüsierte und so die alten Seebären belehren will. Für den Spott mußte man einen hohen Preis bezahlen. Im September, an einem verhältnismäßig ruhigen Tage, kenterte das Schiff unerwartet, und von den 550 an Bord befindlichen Personen wurden nur 17 gerettet.

Leser: Das war eine harte Lehre. Aber warum hast du das erzählt? Es gibt doch heute kein Schiff mehr, das man ohne vorherige Modellversuche zu bauen beginnt.

Autor: Wendet man aber bei allen technischen Konstruktionen, bei der Gestaltung aller neuen Erzeugnisse Modellversuche an?

Leser: Ich könnte schwer darauf antworten. Jedenfalls erscheinen immer mehr solche Artikel, Veröffentlichungen bzw. Bücher, die sich mit Modellversuchen befassen. Ich kenne mehrere technische Objekte, bei deren Konstruktion man die Resultate der Modelluntersuchungen verwendet hat.

Autor: Wir wollen vor allem klären, was unter einem Modell zu verstehen ist.

Leser: Ein Objekt, das dem Original ähnlich ist. Die Aufgabe des technischen Modells besteht darin, die wichtigsten Charakteristiken, das Verhalten der neu in Betrieb zu setzenden Anlage vorauszusagen, eine Antwort darauf zu geben, wie man einen besseren Wirkungsgrad und größere Betriebssicherheit gewährleisten kann. Der Forscher oder der Konstrukteur baut das Modell der fertigzustellenden Anlage, er führt daran Messungen aus, er nimmt Änderungen vor, kontrolliert deren Wirkung und zieht daraus Schlüsse, wie die wirkliche Einrichtung sein wird, wie sie wirken, sich im Betrieb verhalten wird. Dazu ist nur nötig, daß das Modell dem Original ähnlich ist.

Autor: Das ist tatsächlich nötig und auch gleichzeitig ausreichend. Aber was verstehen wir unter Ähnlichkeit?

Leser: Das Wort Ähnlichkeit gebrauchen wir häufig. Wenn wir etwas darlegen oder erklären, dann gebrauchen wir dauernd Vergleiche.

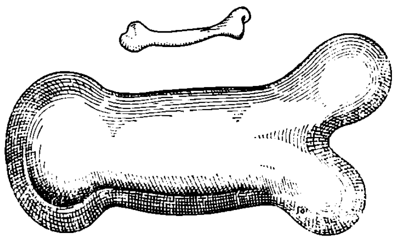
Autor: Woran können wir die Ähnlichkeit erkennen?

Leser: Am einfachsten an den äußeren Maßen auf Grund der Form. Schon die Gelehrten des Altertums haben erkannt, daß die Beziehungen zwischen den Maßen der einzelnen Gegenstände, Erdstücke usw. von ihrem Inhalt unabhängig sind. So ist der bekannte Satz des *Pythagoras* für das rechtwinklige Dreieck ebenso für eine dreieckförmige Waldfläche oder für eine entsprechende Lichtung mit einer Rasenfläche gültig. Zwischen dem Umfang und Durchmesser eines kreisförmigen Teiches, eines Geldstückes oder eines Mühlrades besteht dieselbe Beziehung.

Autor: Übrigens war eben diese Verhältniszahl, der Quotient aus Umfang und Durchmesser $\pi = 3{,}1415926536\ldots$, die sogenannte Ludolfsche Zahl, die erste Ähnlichkeitskennzahl. Die Geometrie ist eine Wissenschaft, die von dem Inhalt der Gegenstände abstrahiert und nur die Zusammenhänge der Form untersucht. Hier hat man zuerst wissenschaftlich den Begriff der Ähnlichkeit formuliert. Bekanntlich nennen wir zwei Figuren geometrisch ähnlich, wenn sie durch eine verzerrungsfreie Deformation ineinander überführbar sind. Die entsprechenden Seiten ähnlicher geometrischer Figuren sind einander proportional, die eingeschlossenen Winkel stimmen alle überein. Jeder Punkt der einen Figur ist eindeutig auf den entsprechenden Punkt der ähnlichen Figur projizierbar. Die exakte Definition der geometrischen Ähnlichkeit ermöglicht, die geometrischen Gesetzmäßigkeiten von formmäßig ähnlichen Gegenständen mit verschiedenen Eigenschaften nicht alle einzeln für sich untersuchen zu müssen, sondern einen aus der Schar der ähnlichen Gegenstände herausgreifen zu können. „Wenn ein Gebilde aus dem anderen durch stetige Änderung zu gewinnen ist und ebenso allgemein wie das erste ist, dann kann man die für das erste Gebilde bewiesenen Eigenschaften ohne weitere Untersuchung auf das andere übertragen“, schreibt *Poncelet*, der Gründer der projektiven Geometrie.

Leser: Demnach ist das höchste Kriterium der Ähnlichkeit die Ähnlichkeit der geometrischen Form.

Autor: Tatsächlich identifizieren auch heute noch viele die Ähnlichkeit mit der geometrischen Ähnlichkeit. Wenn die proportionale Vergrößerung oder Verkleinerung der Maße die Funktion irgendeines Systems nicht beeinflußte, wäre unsere Arbeit einfach. Man brauchte nichts anderes zu machen, als nur einfach eine sehr große Anlage sehr verkleinert nachzubauen,



und schon wäre das Modell fertig, und wir könnten daran seine ursprünglichen Eigenschaften untersuchen. Im Jahre 1638, vor mehr als 300 Jahren, schrieb schon *Galilei*: „Als Beispiel zeichne ich ihnen zwei Knochen, von denen ist der größere nur dreimal so lang wie der kleinere, aber in solchem Maße verdickt, daß er mit derselben Sicherheit das größere Lebewesen trägt wie der kleine Knochen das kleinere. Sie können sehen, wie unmöglich dick so ein vergrößerter Knochen erscheint. Es ist klar, wer die Proportionen der Teile des gewohnten menschlichen Körpers in dem vergrößerten Maße bewahren wollte, der müßte irgendein anders geartetes ‚Knochenmaterial' verwenden, das fester ist, oder ein solches ‚Körpermaterial', dessen Gewicht leichter ist. Im entgegengesetzten Falle würde die Maßvergrößerung dazu führen, daß der Körper unter seinem eigenen Gewicht zusammenbräche."[1] *Galilei* wies als erster darauf hin,

[1] *Galilei, G.:* Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze. Leiden 1638

daß die geometrische Ähnlichkeit, die einfache Veränderung des Maßstabes ausschließt, daß wir etwas in der Funktion, im Aufbau, in der Charakteristik dem Original Ähnliches erhalten.

Leser: Das ist für mich überraschend. Demnach ist die geometrische Ähnlichkeit keine Bedingung der physikalischen Ähnlichkeit?

Autor: Die geometrische Ähnlichkeit ist niemals hinreichend, aber oft ist sie auch keine notwendige Bedingung für die Ähnlichkeit der Erscheinungen, Vorgänge und Anlagen. Zur Erkennung der Ähnlichkeit ist immer Abstraktion nötig. Im Falle der geometrischen Ähnlichkeit erkennen wir die formale Ähnlichkeit, so daß wir von dem übrigen, d. h. dem Unterschied im Inhalt abstrahieren. Zur Erkennung der Ähnlichkeit der Erscheinungen müssen wir von der Form abstrahieren.

Leser: Bei technischen Prozessen konzentrieren wir also unsere Aufmerksamkeit auf die Ähnlichkeit des Inhalts?

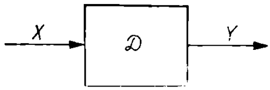
Autor: Und womit können wir den Inhalt deiner Meinung nach charakterisieren?

Leser: Mit den mathematischen Beziehungen, die den Vorgang beschreiben.

Autor: Darüber schreibt *Poincaré:* „Wer hat uns die wirklichen, tiefen Analogien kennen gelehrt, die die Augen nicht sehen, die der Verstand ahnt? Es ist der mathematische Geist, der die Materie verschmäht, um sich an die reine Form zu halten.“[1] Mit Hilfe der mathematischen Zusammenhänge kann man die sich auf die untersuchten Erscheinungen und Anlagen beziehenden Gesetzmäßigkeiten genau formulieren sowie die Bedingungen, unter denen diese Gesetzmäßigkeiten gelten. *Diderot* schreibt: „In der Physik basiert unser ganzes Wissen auf der Ähnlichkeit.

[1] *Poincaré, H.:* Der Wert der Wissenschaft. Leipzig 1906, S. 109

Wenn wir auf Grund der Ähnlichkeit von Wirkungen nicht das Recht hätten, die gleichen Ursachen vorauszusetzen, was wäre aus dieser Wissenschaft geworden?" Nach den Naturgesetzen haben ähnliche Ursachen ähnliche Wirkungen zur Folge. Wenn bei zwei Erscheinungen dieselben Naturgesetze unter ähnlichen Bedingungen zur Geltung kommen, dann werden die Wirkungen auch ähnlich sein. Wir bezeichnen ganz allgemein die innere Gesetzmäßigkeit eines Prozesses mit $\boldsymbol{D}$, die Bedingungen (Ursachen), unter denen der Prozeß vor sich geht, mit dem Buchstaben $\boldsymbol{X}$ und die Antwort (Konsequenz), die unter den Bedingungen $\boldsymbol{X}$ das System $\boldsymbol{D}$ ergibt, mit $\boldsymbol{Y}$. Jedes System (Einrichtung, Erscheinung) kann wie in nebenstehendem Bild aufgefaßt werden, wo $\boldsymbol{X}$ die charakteristischen Eingangsgrößen, $\boldsymbol{Y}$ die charakteristischen Ausgangsgrößen bedeuten. Wenn in zwei Systemen ähnliche Ursachen ähnliche Konsequenzen auslösen, dann sind beide Systeme ähnlich.



Leser: So ist das für mich zu abstrakt. Ich sehe ein, daß die Ähnlichkeit der Erscheinungen ohne Abstraktion nicht erkennbar ist, aber hier ist schon so stark abstrahiert worden, daß ich nicht mehr den physikalischen Inhalt spüre.

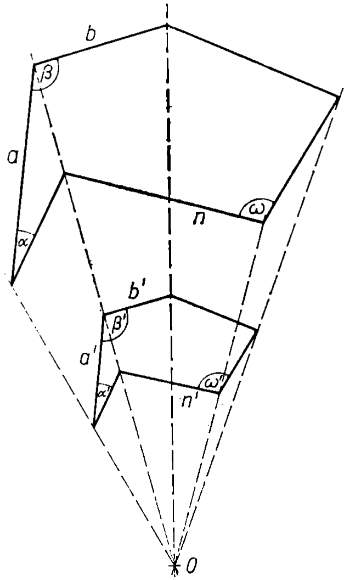
Autor: Dabei verfolgen wir denselben Gedanken wie bei der Bestimmung der geometrischen Ähnlichkeit. In der Geometrie haben wir zwischen zwei Figuren eine entsprechende projektive Beziehung festgestellt. Bei der Ähnlichkeit von Erscheinungen müssen wir auch den zwischen zwei Erscheinungen bestehenden projektiven Zusammenhang suchen.

Erinnern wir uns daran, daß in der Geometrie unter den entsprechenden Maßen ähnlicher Figuren eine bestimmte Proportion besteht. So gilt mit den Bezeichnungen des Bildes

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots = c\,,$$

worin c der Ähnlichkeitsfaktor ist. Eine geometrische Ähnlichkeitstransformation überführt einen Kreis wieder in einen Kreis, ein Quadrat in ein Quadrat. Die Maße einander ähnlicher

Figuren können verschieden sein, aber ihre Proportionen sind dieselben. So erhalten wir durch Vergleich der charakteristischen Maße dimensionslose Zahlen, deren Zahlenwert für alle ähnlichen Figuren gleich ist.



Zum Beispiel

$$\frac{a}{b} = A = \frac{a'}{b'} .$$

Eine solche dimensionslose Zahl war das schon erwähnte π, das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser. Die sich auf die geometrischen Figuren beziehenden mathematischen Beziehungen sind für alle ähnlichen Figuren identisch, wenn die Variablen durch derartige dimensionslose Zahlen ausgedrückt werden. Die Gleichung des Kreises in der Form

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$$

geschrieben, wo $x/R = X$ und $y/R = Y$ eingesetzt ist, stellt einen solchen Zusammenhang dar, der auch dann unverändert bleibt, wenn wir den Radius des Kreises in der x- und y-Richtung mit einem beliebigen anderen Maßstab dehnen. Es sei die Dehnung in der x-Richtung durch c_x, in der y-Richtung durch c_y bezeichnet. Die Radien in den verschiedenen Richtungen bezeichnen wir mit den Buchstaben a bzw. b:

$$a = c_x R ; \quad b = c_y R .$$

Es ist dann leicht einzusehen, daß die Kreisgleichung in der Form

$$X^2 + Y^2 = 1$$

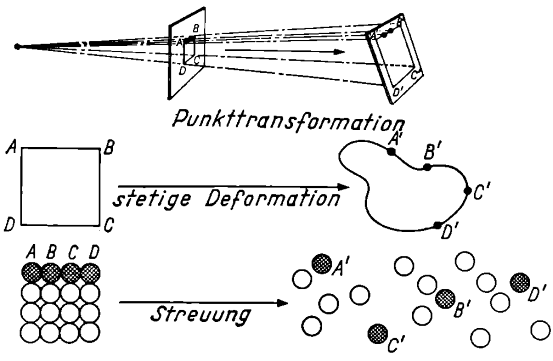
trotz der verschiedenen Maßstabstransformationen unverändert bleibt.
Diese Transformation hat aber den Kreis zur Ellipse verzerrt. Die dimensionslose Gleichung bezieht sich gleichermaßen auf den Kreis und auf die Ellipse. Diese im allgemeinen Sinne aufgefaßte Ähnlichkeitstransformation nennen wir eine affine Transformation.

Leser: Willst du dich eingehend mit der geometrischen Ähnlichkeit befassen?

Autor: Nein, wir borgen uns nur einige terminologische Begriffe, die geometrisch sehr anschaulich sind. Diese sind: der Ähnlichkeitsfaktor, der zwischen zwei einander ähnlichen Figuren das Verhältnis entsprechender charakteristischer Größen angibt; die dimensionslose Veränderliche, die einen relativen Wert der charakteristischen Größe innerhalb einer Figur angibt und deren Zahlenwert bei jeder ähnlichen Figur gleich ist (Invarianten!); sowie die dimensionslosen Gleichungen, die im Falle ähnlicher (bzw. affiner) Figuren im Laufe der verschiedenen Transformationen unverändert bleiben.

Leser: Ähnlich wie die Kovarianz der die Naturgesetze beschreibenden Gleichungen?

Autor: Nicht ganz so, dort haben wir die Orientierung der Koordinatensysteme geändert. Hier ändern wir den Maßstab einzelner physikalischer (vorläufig nur geometrischer) Veränderlicher. Bei den geometrischen Figuren kann eine Transformation ganz allgemein eine Projektivität bedeuten. Die Bedingung ist nur, daß die Projektion eineindeutig sei: Jedem Punkt der einen Figur soll ein bestimmter Punkt der anderen Figur zugeordnet werden, und in keiner der Figuren sollen Punkte vorhanden sein, denen keine entsprechenden Punkte der anderen Figur zugeordnet werden können. Die eineindeutige Zuordnung bei der Projektion wird ganz allgemein vom Bild veranschaulicht. Alle drei Beispiele repräsentieren eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A und A', B und B' usw.



Ähnlich nennen wir solche Systeme, zwischen deren entsprechenden Veränderlichen eine eineindeutige projektive Verknüpfung besteht.

Leser: Sind die „entsprechenden" Veränderlichen die vorher erwähnten charakteristischen Eingangs- und Ausgangsgrößen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$?

Autor: Ja, bzw. ihre Komponenten, die physikalischen Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Untersuchen wir zwei Systeme: In dem einen sollen $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ im anderen $\boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{Y}'$ die Veränderlichen bezeichnen. Wir können leicht einsehen, daß eine eineindeutige Beziehung zwischen der jeweiligen Wertmenge von $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}'$ bzw. $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}'$ dann und nur dann bestehen kann, wenn die die inneren Gesetzmäßigkeiten (die Naturgesetze nach denen innerhalb des Systems die Prozesse ablaufen) beschreibenden Gleichungen und die dazugehörigen Eindeutigkeitsbedingungen dieselbe Struktur haben, d. h., wenn die Gleichungen gegenüber der Ähnlichkeitstransformation invariant sind.

Leser: Es kann sein, daß das leicht einzusehen ist, aber mir kommt es keinesfalls trivial vor. Könntest du es nicht einfacher oder wenigstens verständlicher formulieren?

Autor: Vielleicht hilft dabei die geometrische Anschaulichkeit. In der Geometrie sind die Verhältnisse entsprechender ähnlicher

Figuren konstant. Bei den physikalischen Erscheinungen ist das Verhältnis entsprechender physikalischer Veränderlicher konstant. Wenn z B. das Verhältnis zwischen den Temperaturwerten in entsprechenden Punkten von zwei verschiedenen Zimmern konstant ist, $T_1/T_2 = c_T$, dann sind die Temperaturverteilungen ähnlich. Wenn in entsprechenden Punkten von zwei Kanälen die Geschwindigkeitsverhältnisse konstant sind, $v_1/v_2 = c_v$, dann sind die Geschwindigkeitsverteilungen ähnlich. Dieses muß für alle jeweils einander entsprechenden Punkte gelten. Wenn wir in einem System die identischen Werte verbinden, dann erhalten wir sogenannte Isolinien. Manche Erscheinung wird durch mehrere physikalische Größen charakterisiert. Wenn für alle Größen gilt, daß ihre Verhältnisse in verschiedenen Systemen gleich sind ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ usw.), dann sind die zwei Erscheinungen einander ähnlich. In einem solchen Falle kann man die Verteilung der physikalischen Größen durch Kurvenscharen darstellen. Wenn wir also den Verteilungsplan der verschiedenen physikalischen Größen von zwei Systemen kennen, dann können wir durch einen Vergleich feststellen, ob die beiden Systeme einander ähnlich sind oder nicht.

Leser: Damit sind wir aber noch nicht weit gekommen. Wenn wir nämlich diese Kurven bereits kennen würden, brauchten wir kein Modell. Ebendeshalb muß man Modellversuche vornehmen, weil wir im Original nicht messen können (oder das Messen sehr kompliziert und kostspielig wäre bzw. weil das Original erst in Gedanken existiert). Nicht nachträglich soll man vergleichen, sondern vorher die Bedingungen festlegen, die das Modell erfüllen soll, damit es dem Original ähnlich sei.

Autor: Du hast um eine anschauliche Erklärung gebeten und nicht um einen Satz, der die Ähnlichkeit definiert. Aber jetzt können wir auch schon einen solchen Satz aussprechen. Wenn nämlich bei dem im Bild auf S. 266 erwähnten Vorgang $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{D} - \boldsymbol{Y}$ zwischen den Differentialgleichungen der beiden Systeme $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{D}'$ sowie zwischen den Eindeutigkeitsbedingungen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{X}'$ eine eineindeutige Beziehung besteht, dann besteht eine solche auch zwischen den Lösungen $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{Y}'$ und daraus folgt der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Ähnlichkeit zweier Systeme ist, daß ihre beschreibenden Differentialgleichungen und die Eindeutigkeitsbedingungen eineindeutig ineinander transformierbar sind.

Leser: Die Verknüpfung von X und X' bzw. D und D' kann man tatsächlich ohne vorherige Messungen angeben. Bisher kannte ich nur solche Ähnlichkeitsgesetze, die die Übereinstimmung einer mit dem Namen irgendeines Gelehrten versehenen Kennzahl im Original und im Modell vorschreiben. So kenne ich z. B. das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz, nach dem in zwei geometrisch ähnlichen Systemen die Strömungsverhältnisse ebenfalls ähnlich sind, wenn das Produkt aus Rohrdurchmesser und Geschwindigkeit, dividiert durch die kinematische Viskosität, denselben Zahlenwert hat:

$$\mathrm{Re} = \frac{wd}{\nu} = \text{konstant}.$$

Autor: Ist das nach deiner Meinung ein Ähnlichkeitsgesetz?

Leser: Nicht nach meiner Meinung, sondern nach der Meinung sehr vieler Leute. Soll ich dir Artikel und Bücher zeigen, in denen fast wörtlich dasselbe steht?

Autor: Danke, davon können wir Abstand nehmen. Sage mir lieber, warum die Strömungsverhältnisse ähnlich sind, wenn die Re-Zahlen übereinstimmen?

Leser: Weil die Reynoldssche Zahl das Verhältnis der Trägheitskraft zur Reibungskraft darstellt. In Systemen, in denen die Kraftwirkungen ähnlich sind, werden auch die durch die Kräfte verursachten Änderungen ähnlich sein.

Autor: Eine andere Kraft beeinflußt nicht die Strömungsverhältnisse?

Leser: Doch, die Gravitationskraft z. B. wirkt auf alle strömenden Flüssigkeiten. Nur können wir ihre Wirkung oft vernachlässigen. Ist es nicht so?

Autor: Vorläufig erlaube, daß ich nicht antworte, sondern weiter frage. Kannst du bei jedem technischen Prozeß sagen, welches die Ähnlichkeitskriterien sind, die man im Falle der Ähnlichkeit zweier Systeme beachten muß?

Leser: Natürlich bei denen, mit denen ich mich ständig befasse, aber alle Ähnlichkeitskriterien kann ich nicht kennen.

Autor: Es wäre auch schwierig. Nur als Beispiel (vielleicht als „abschreckendes" Beispiel) erwähne ich, daß in der Ausgabe der Zeitschrift „Industrial and engineering chemistry" vom März 1966 eine Zusammenstellung von den in der Literatur zu findenden Ähnlichkeitskennzahlen erschienen ist. Obzwar die Zusammenstellung nicht vollständig ist, teilt sie doch 210 Ähnlichkeitskennzahlen alphabetisch geordnet mit. Daraus die eben aktuellen, entsprechenden Zahlen auszuwählen . . . ?

Leser: Du bringst mich wieder in Verlegenheit, sind demzufolge die Ähnlichkeitskriterien keine Ähnlichkeitsgesetze?

Autor: Auf keinen Fall sind die Kriterien die Gesetze, diese sind höchstens vom Ähnlichkeitsgesetz abgeleitet. Wir müssen zu unserem Satz zurückkehren: „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Ähnlichkeit zweier Systeme ist, daß ihre beschreibenden Differentialgleichungen und die Eindeutigkeitsbedingungen eineindeutig ineinander transformierbar sind."

Leser: Wie erhalten wir daraus Ähnlichkeitskenngrößen?

Autor: Verzeihung, aber was nennst du eine Ähnlichkeitskenngröße?

Leser: Einen solchen Komplex physikalischer Größen, dessen Zahlenwert im Modell und im Original übereinstimmen muß. Oder gibt es deiner Meinung nach keine solchen Zahlen?

Autor: Doch, aber zuerst wollen wir klarstellen, daß man nur dort von solchen Größen sprechen kann, wo innerhalb von zwei

Systemen die Gleichungen, die die wirkenden physikalischen Gesetze beschreiben, ähnlich sind.

Leser: Das haben wir schon geklärt. Das ist für eine Ähnlichkeit unbedingt nötig.

Autor: Nehmen wir als Beispiel die Wärmeleitungsgleichung, die in einem System einen bestimmten Prozeß beschreibt. Der Einfachheit halber schreiben wir die eindimensionale Form auf:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Im anderen System dagegen soll ein Prozeß durch die Ficksche Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x'^2}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn zwischen den entsprechenden Raum- und Zeitpunkten der beiden Systeme der Zusammenhang

$$\frac{x}{x'} = c_x, \quad \frac{t}{t'} = c_t$$

besteht und für jeden Punkt das Verhältnis zwischen den entsprechenden physikalischen Veränderlichen konstant ist:

$$\frac{T}{\varrho} = c_1 \text{ bzw. } \frac{a}{D} = c_2,$$

die beiden Systeme einander ähnlich sind.

Leser: Wir verfolgen wieder den umgekehrten Weg. Wenn es ein solches Verhältnis gibt, dann sind die Prozesse ähnlich . . .

Autor: Warte einen Moment, es stimmt auch umgekehrt. Wenn die Prozesse ähnlich sind, gibt es ein solches Verhältnis.

Leser: Na und, was folgt daraus?

Autor: Setze in die eine (sagen wir in die Ficksche) Gleichung die entsprechenden Veränderlichen der anderen Gleichung, multipliziert mit den zugehörigen Proportionalitätsfaktoren c, ein.

Leser: Das ist einfach, $\varrho = c_1 T$, $t = c_t t'$, $a = c_2 D$, $x = c_x x'$, also ist

$$\frac{\partial(c_1 T)}{\partial(c_t t)} = (c_2 a) \frac{\partial^2(c_1 T)}{\partial(c_x x)^2}.$$

Autor: Die Faktoren c sind von Ort und Zeit unabhängig, sie können also aus der Differentialoperation herausgehoben werden:

$$\left(\frac{c_1}{c_t}\right) \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{c_2 c_1}{c_x^2}\right) a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Leser: Wenn die beiden Ausdrücke in Klammern einander gleich sind, so ist die Gleichung mit der Fourierschen Gleichung identisch.

Autor: Eben das ist die Bedingung der Ähnlichkeit der beiden Erscheinungen. Die Beziehung

$$\frac{c_1}{c_t} = \frac{c_2 c_1}{c_x^2}$$

(bzw. analoge Beziehungen bei anderen Vorgängen) nennen wir Bedingungsgleichungen.

Leser: Wie erhalten wir daraus eine Kombination der physikalischen Veränderlichen?

Autor: Stellen wir die Gleichung um, so daß rechts Eins steht. Dann schreiben wir wieder anstelle von c die Größen, deren Proportionalität wir ausgedrückt haben:

$$\frac{c_x^2}{c_t c_2} = 1\,; \quad \left(\frac{x}{x'}\right)^2 \left(\frac{t'}{t}\right) \left(\frac{D}{a}\right) = 1$$

und trennen die zu der Fourierschen und der Fickschen Gleichung gehörenden Veränderlichen:

$$\frac{Dt'}{x'^2} = \frac{at}{x^2}.$$

Leser: Die rechte Seite kenne ich, das ist die Fouriersche Zahl, die eine Ähnlichkeitskennzahl ist.

Autor: Die linke Seite ist die Ficksche Zahl. Aber keine von beiden ist eine Ähnlichkeitskenngröße. Bisher sagten wir nur, wenn die beiden Systeme ähnlich sind, dann ... Das heißt, dann stimmt die Ficksche und Fouriersche Zahl überein, und das ist dann die Folge der Ähnlichkeit.

Leser: Aber du sprachst vorhin von Bedingungsgleichungen, Ist das nicht die Bedingung für die Ähnlichkeit?

Autor: Ja, eine Bedingung dafür, und zwar eine notwendige Bedingung in dem Sinne, daß zwischen den die inneren Gesetzmäßigkeiten der beiden Systeme beschreibenden Gleichungen eine solche Beziehung bestehen muß. Anderenfalls kann von Ähnlichkeit keine Rede sein. Aber dieselbe Gleichung kann auch verschiedene Lösungen haben.

Leser: Wir sprachen schon davon, zur eindeutigen Lösung ist auch die Kenntnis der Eindeutigkeitsbedingungen notwendig.

Autor: Wenn wir diese genauso transformieren wie die Grundgleichungen, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen. Zum Beispiel, wenn die zur Fourierschen bzw. Fickschen Gleichung gehörenden Bedingungen die Form

$$\alpha(T_f - T_0) = \lambda(\mathrm{grad}\; T)_f,$$

bzw.

$$k^*(\varrho_f - \varrho_0) = D(\mathrm{grad}\; \varrho)_f$$

haben, würden wir vollkommen analog wie oben (mit Hilfe der Proportionalitätsfaktoren c) solche Bedingungsgleichungen erhalten, die die Gleichheit

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha x_0}{\lambda} = \frac{k^* x'_0}{D}$$

vorschreiben.

Leser: Das ist die sogenannte Nußeltsche oder Biotsche Zahl.

Autor: Diese ist nun wirklich eine Ähnlichkeitskennzahl. Wird ihre Gleichheit nicht eingehalten, so werden in den beiden Systemen die Verteilung der Temperatur bzw. der Massendichte nicht ähnlich sein.

Leser: Können wir also nur die letzteren Variablengruppen, die hinreichende Bedingungen ausdrücken, Ähnlichkeitskennzahlen nennen? Und wie nennt man die anderen?

Autor: Ähnlichkeitsinvariante. Es ist nicht bloß von einem einfachen Benennungsunterschied die Rede. Die Gleichheit des Zahlenwerts der Kenngröße (nennen wir sie π) ist die Bedingung für die Ähnlichkeit. Die Gleichheit des Zahlenwerts der Invariante (nennen wir sie P) ist die Folge der Ähnlichkeit. Wir können sie anschaulich Ähnlichkeits- (oder dimensionslose) unabhängige (π) und abhängige (P) Variable nennen. Im Kriterium kann nur eine solche physikalische Größe vorkommen, die auch in den Eindeutigkeitsbedingungen zu finden ist. Nur deren Werte kann der Experimentator verändern.

Leser: Ich verstehe, und je nachdem auf welche Werte er einstellt, ändert sich innerhalb des Systems der Zahlenwert der abhängigen Veränderlichen (Ähnlichkeitsinvarianten).

Autor: Bei ähnlichen Systemen ermöglicht eben der Zusammenhang zwischen den dimensionslosen abhängigen und den unabhängigen Veränderlichen, daß wir das in einem System gemessene Resultat in das andere umrechnen können. Der funktionale Zusammenhang

$$P = f(\pi)$$

ist nämlich universell, er ist ein für alle einander ähnlichen Systeme gültiger Zusammenhang.

Leser: Das ist sehr verlockend, aber auf diese Weise kann das Erkennen der Ähnlichkeit keine leichte Aufgabe sein. Wir haben ja nicht einmal den Vorteil, dasselbe physikalische System als Modell zu wählen, von der geometrischen Ähnlichkeit gar nicht zu reden.

Autor: Nennst du das einen Vorteil? Dann nütze ihn. Es ist gewiß, daß für dieselben physikalischen Erscheinungen auch dieselben Gesetze gültig sind. Aber meinst du nicht, daß du damit das Gebiet, aus dem du dein Modell auswählen kannst, sehr einengst?

Leser: Das stimmt, es wäre besser, über eine größere Auswahl zu verfügen, damit wir das billigste, am schnellsten zu einem Resultat führende Versuchsobjekt auswählen können. Aber man bewegt sich doch auf seinem eigenen Fachgebiet sicherer. Über einschlägige Gleichungen auf anderen Fachgebieten hat man höchstens während seines Universitätsstudiums gehört.

Autor: Mein lieber Freund, während aller bisherigen Gespräche habe ich versucht, dir zu beweisen, daß die Gleichungen der anderen Fachrichtungen sich im Grunde nicht von den Gleichungen deines Fachs unterscheiden. Alle sind auf den Bilanzgleichungen der extensiven Eigenschaften aufgebaut.

Leser: Kann ich demnach jeden technischen Prozeß als Modell verwenden?

Autor: Wenn du die entsprechenden Eindeutigkeitsbedingungen gewährleisten kannst, ja. Die Einheit der physikalischen Welt präsentiert beinahe auf dem Tablett die Erkenntnis der Ähnlichkeit zwischen den verschiedenen Prozessen. Mit Hilfe der Ähnlichkeitsmethode kannst du zur Lösung deiner Aufgabe analoge Probleme finden. Aus der Fachliteratur muß man die ähnlichen Erscheinungen oder Systeme nicht nach dem Gefühl, nicht nach der Ähnlichkeit der Form oder dem ähnlichen technologischen Ziel auswählen. Das Kriterium ist die Übereinstimmung des mathematischen Modells. Auf diese Weise kamen schon unzählige technische Resultate zustande.

Leser: Das stimmt mit den Ratschlägen überein, die *Pólya* zur Lösung einer Aufgabe gibt.

Autor: Darum habe ich ihn zitiert. Aber vergiß auch die abschließenden Zeilen von *Pólya* nicht: „Untersuche gründlich das Resultat.“ Vergiß nicht, daß die Kontrolle aller unserer Abhandlungen, aller Aufgabenlösungen die Praxis ist. Alles, worüber wir gesprochen haben, war skizzenhaft, vielleicht auch an mehreren Stellen unvollständig. Das Ziel ist, eine solche Anschauungsweise in uns zu entwickeln, die die praktische Arbeit leichter und erfolgreicher gestaltet. Es gibt kein Rezeptbuch, das auf alle unsere Fragen Antwort gibt. Aber vielleicht wird nicht das, wovon wir sprachen, sondern wie wir unsere Themen besprachen, dabei ein ganz klein wenig helfen. Bitte, nimm es mir nicht übel, wenn ich hier und da ungeduldig war oder meine Worte nicht genügend überzeugend waren. Zum Abschluß lies bitte noch meinen Brief.

Brief an den Leser

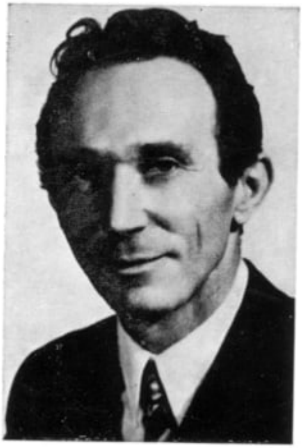
„Da die Zeit gekommen ist,
daß wir unser Gespräch beenden,
wende ich mich nur mit einer Bitte an dich.
Wenn du in größerer Ruhe
wieder meine Erörterungen überdenkst
und dazwischen auf Schwierigkeiten und Einwände stößt,
die ich nicht ausreichend widerlegt habe,
verzeihe meinen Fehler;
einerseits wegen der Neuheit der Idee,
andererseits wegen der Unzulänglichkeit meines Geistes,
endlich wegen des Umfanges des Themas.“

Galilei

Lieber Leser!

Ich bat um Geduld und Hilfe während unseres ersten Gesprächs und habe beides erhalten. Dies wird dadurch bezeugt, daß wir soweit gekommen sind und auch die nicht gerade leichten Gedankengänge zu Ende verfolgt haben. Wir sind zwar am Ende des Buches angelangt, aber sein Thema ist noch lange nicht erschöpft. Zahlreiche Gebiete wurden in unseren Gesprächen nicht berücksichtigt, auf die wohl mit ähnlichem Erfolg die Betrachtungsweise der Transporttheorie angewandt werden kann. Mit dieser Anschauungsweise hat mich ein Gelehrter bekannt gemacht, mit dessen Namen der konsequente Aufbau und die exakte Begründung der Theorie verbunden ist: Professor *I. Fényes*. Er war es eigentlich, der mich zum Schreiben des Buches inspiriert hat, und – mit Ausnahme dieses Briefes – war er auch der Lektor des Textes. Diesem Umstand verdanke ich, daß das Bestreben zur Popularisierung und Vereinfachung mich nicht in eine Sackgasse geführt hat.
Die Form des Buches ist ein Dialog. Selbst der Gedanke sei mir fern, daß ich mich mit den Lorbeeren von *Platon*, *Galilei* oder auch der neueren Dialogliteratur schmücken wollte. Ich glaube aber, daß dieser Stil, der in sehr vielen Fällen tatsächlich stattgefundene Gespräche widerspiegelt, ungezwungener ist und so den Zielen mehr entspricht. Ich hoffe, daß nach Beendigung unserer Gespräche ohne Zweifel klar wurde, daß nicht die eingehende Analyse der Prozesse und Gesetze spezieller Fachgebiete das Ziel war. (Es gibt keinen Menschen, der auf

sämtlichen Fachgebieten gleichzeitig Fachmann sein könnte.) Die technischen Aufgaben sind im allgemeinen mit einer konkreten Anlage verbunden. Während der Untersuchung können wir eine beachtliche Zeit- und Kostenersparnis erreichen, wenn wir im vornherein möglichst viele Informationen sammeln, uns in der Literatur orientieren. Zur richtigen Orientierung, zur Aufarbeitung der Bücher und Artikel, muß man über Systematisierungsprinzipien verfügen, durch die der Ort und Zusammenhang der einzelnen technischen Aufgaben klar bestimmbar sind. Ein solches Systematiserungsprinzip macht eine verhältnismäßig schnelle Durchsicht des Schrifttums und seine Sortierung nach einer Konzeption möglich, ist auch dazu gut, unsere eigenen Gedanken und Vorstellungen in die richtige Bahn zu lenken und uns damit vor größeren Fehlern zu bewahren.
Unser Ziel war, ein solches Systematisierungsprinzip vorzuführen. Wie weit das gelungen ist, kann nur der Leser entscheiden.



Dr. sc. techn. Ervin Szűcs, 1930 in Budapest geboren, ist ein in seiner Heimat bekannter Autor von acht Büchern sowie zahlreicher Artikel in Fachzeitschriften.

Mit großer Freude habe ich erfahren, daß im VEB Fachbuchverlag mein Buch herausgegeben wird. Zwar ist dies mein erstes in der DDR erscheinendes Buch, doch ich habe nicht das Gefühl, vor meinen Lesern als Fremder zu erscheinen. Die Ingenieurprobleme sind von der Muttersprache unabhängig. Wie könnte man sich sonst in dem ständig anwachsenden Wissensgut orientieren, es so systematisieren, daß die immer komplizierter werdende Forschungs-, Entwicklungs-, Konstruktions- und Produktionstätigkeit möglichst wirkungsvoll ist. Die in diesem Buch gewählte Betrachtungsweise soll dabei behilflich sein. Und letzten Endes soll sie dazu beitragen, die Arbeit des Ingenieurs in der Praxis effektiver zu gestalten. Auch die gewählte Dialogform soll meine Absicht erleichtern helfen.

VEB Fachbuchverlag Leipzig